

На правах рукописи

АСер

**СЛЕПНЕВ Андрей Вячеславович**

**АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ  
В ОДНОМЕРНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ  
И ФЛУКТУИРУЮЩИХ АКТИВНЫХ СРЕДАХ  
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ  
УСЛОВИЯМИ**

Специальность 01.04.03 — Радиоп физика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Саратов — 2014

Работа выполнена на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор,  
**Вадивасова Татьяна Евгеньевна**

Официальные оппоненты: **Осипов Григорий Владимирович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского»,  
заведующий кафедрой теории управления и динамики машин

**Купцов Павел Владимирович**,  
доктор физико-математических наук, доцент,  
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»,  
профессор кафедры «Приборостроение»

Ведущая организация: Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН

Защита состоится «26» декабря 2014 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.243.01 при Саратовском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, III корпус, ауд. 34.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени В.А. Артисевич Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского.

Автореферат разослан «10» ноября 2014 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 212.243.01, д.ф.-м.н.



Аникин Валерий  
Михайлович

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы

Исследование пространственно-временной динамики активных сред остается актуальной задачей теории колебаний и волн. Активная среда — это нелинейная диссипативная среда, в которой могут распространяться автоволны, т.е. незатухающие волновые процессы, поддерживаемые за счет энергии постоянных источников. Понятие активной среды является обобщением понятия автоколебательной системы и объединяет среды трех типов: автоколебательные, возбудимые и бистабильные.

Автоколебательные среды и их пространственно дискретные модели широко представлены в научной литературе. Классический пример модели автоколебательной среды — уравнение Гинзбурга – Ландау (работы Гапонова-Грехова, Shraiman, Cross, Chaté и Арансона), которое дает описание поведения среды вблизи бифуркации Андронова – Хопфа. Среда представляется в виде совокупности локально взаимодействующих квазигармонических генераторов.

В автоколебательных средах с периодическими граничными условиями и соответствующих дискретных моделях (кольцо автогенераторов) при не слишком сильной связи элементов и периодическом характере колебаний во времени наблюдаются фазовые волны с различной длиной волны. Кроме того, может существовать пространственно однородный режим, представляющий собой синфазные колебания всех элементов среды. Мультистабильность сохраняется и в режиме слабого хаоса (работы Шабунина). При изменении параметров автоколебательной среды наблюдается эволюция сосуществующих мод, которые могут претерпевать различные бифуркации, приводящие к усложнению как характера колебаний во времени, так и пространственного профиля волн. При сильной нелинейности возникает режим хаотических во времени колебаний и пространственного беспорядка (турбулентное состояние). *Исследование эволюции пространственно-временных режимов распределенных систем при изменении параметров и механизмов развития турбулентности на сегодняшний день не является полностью завершенным и остается в ряде актуальных задач нелинейной динамики.*

Поведение модели Гинзбурга – Ландау (в том числе с периодическими граничными условиями) достаточно хорошо изучено (работы Bragard, Короновского и Zhou). При некоторых значениях параметров однородный стационарный режим теряет устойчивость и в среде возникают квазигармонические колебания и фазовые волны, наблюдается мультистабильность. С ростом влияния нелинейности и неизохронности происходит развитие динамического хаоса. Сложное поведение среды Гинзбурга – Ландау является следствием взаимодействия большого

числа автоколебательных элементов, колебания которых в отсутствии связи были бы гармоническими. Можно предположить существование сред, состоящих из элементов со сложной динамикой. Такие модели сред могут, по-видимому, возникнуть в задачах биофизики и нейрофизиологии, где отдельный автоколебательный элемент способен в некоторых случаях демонстрировать сложное, в том числе хаотическое, поведение. Однако *автоколебательные среды, состоящие из элементарных генераторов с собственной сложной динамикой, в научной литературе практически не рассматривались*. Имеется значительное число работ, в которых исследуются пространственно организованные ансамбли, составленные из конечного числа генераторов со сложным индивидуальным поведением. Например, цепочки из осцилляторов Ресслера (работы Осипова и Шабунина), систем Чуа (работы Белыха и Шабунина) или генераторов Анищенко – Астахова (работы Анищенко). Эти модели служат для исследования явлений синхронизации хаоса и образования пространственных структур. Однако при фиксированном и, как правило, не очень большом числе элементов такие модели могут качественно отражать лишь некоторые, наиболее грубые, черты поведения распределенных систем, но не дают полной картины возможных явлений и не могут, строго говоря, рассматриваться в качестве моделей непрерывных сред. Еще меньше соответствуют непрерывным средам цепочки и решетки отображений последования (работы Канеко, Кузнецова и Белыха), так как в этом случае не только пространственные координаты, но и время оказывается дискретной переменной. *Таким образом, исследование модели непрерывной во времени и пространстве автоколебательной среды со сложным поведением элементарных ячеек является на сегодняшний день актуальной задачей нелинейной динамики.*

Автоколебательная среда всегда реализует незатухающие колебания, обладающие всеми свойствами автоколебаний. В то же время, хотя элементы возбудимой среды не являются автоколебательными, но при определенных граничных условиях в такой среде также могут наблюдаться локализованные в пространстве колебания, т.е. возбудимая среда может быть распределенным автогенератором, что определяется наличием в ней постоянных источников энергии. Простейший способ превратить возбудимую среду в автоколебательную систему — «свернуть» ее в кольцо, т.е. обеспечить периодические граничные условия (работы Winfree, Starmer, Starobin и Alford). В этом случае автоволна циркулирует в локализованном участке среды, воздействуя на одни и те же элементы среды. Более сложный пример возникновения автоколебаний в возбудимой среде — хорошо известные спиральные волны (работы Гореловой, Перцова, Gray, Zariisky, Лоскутова и Петрова). В возбудимой среде с периодическими граничными условиями, также как и в автоколебательной, наблюдаются мультистабильность волновых мод (работы Winfree, Jones, Starmer, Starobin, Neu, Nagai, Cytrynbaum и

Alford). По внешнему виду фазовые волны в автоколебательной среде и волны возбуждения в возбудимой среде могут мало различаться. На основании экспериментальных наблюдений не всегда можно сделать точный вывод о том, являются ли элементы исследуемой распределенной системы или среды возбудимыми осцилляторами или автогенераторами. В то же время, такая информация может быть важна с точки зрения создания адекватных математических моделей исследуемой системы. Поэтому *одной из актуальных задач является поиск методов для диагностирования типа активной среды, в которой распространяются волны.* Для решения данной задачи *необходимо исследовать и сопоставить различные аспекты поведения автоколебательных и возбудимых сред с периодическими граничными условиями.* Хотя возникновение незатухающих волн возбуждения и явление мультистабильности в возбудимых средах с периодическими граничными условиями хорошо известно, целенаправленное сопоставление этих режимов с соответствующими режимами автоколебательных сред в научной литературе на сегодняшний день не встречается. Важным отличием между автоколебательной и возбудимой средами является невозможность возникновения в последней пространственно однородных колебаний. Исчезновение данной моды при вариации параметров может свидетельствовать об изменении характера среды. Разница в поведении возбудимых и автоколебательных сред может проявиться также в различной зависимости характеристик бегущих волн от номера моды (длины волны) и управляющих параметров среды. Однако такие исследования до настоящего времени не проводились.

В последние годы интерес к исследованию возбудимых систем и сред значительно возрос. Это связано с типичностью возбудимых режимов в задачах биофизики (работы Wiener, Rinzel, Winfree, Гореловой, Gray, Keener, Елькина, Лоскутова, Петрова и Крюкова). Базовой моделью возбудимого осциллятора является система ФитцХью – Нагумо, также ведущая своё происхождение из биофизики (работы FitzHugh и Nagumo). При определенном выборе значений параметров эта система может находиться как в автоколебательном, так и в возбудимом режиме. Добавление источников шума в уравнения системы приводит к возникновению незатухающих стохастических колебаний в виде последовательности спайков (коротких импульсов). При определенных значениях интенсивности шума последовательность импульсов становится почти регулярной. Это явление получило название когерентного резонанса (работы Пиковского, Постнова, Giacomelli, Miyakawa и Gu). В условиях когерентного резонанса возбудимые системы обладают определенными чертами автоколебательных. Так они демонстрируют явление вынужденной и взаимной стохастической синхронизации в полной аналогии с эффективной синхронизацией зашумленных автогене-

раторов, что позволяет ввести понятие стохастических автоколебаний (работы Рабиновича, Вьюна и Башкирцевой).

Среда с периодическими граничными условиями, элементами которой являются осцилляторы ФитцХью – Нагумо, служит удобной моделью для сопоставления динамики автоколебательной и возбудимой среды, поскольку такая модель предусматривает изменение типа среды при выборе соответствующих значений параметров составляющих ее осцилляторов. Кроме того, исследования осцилляторных ансамблей и сред, в основе которых лежит модель ФитцХью – Нагумо, вызывают большой интерес в связи с задачами моделирования процессов в нейронных волокнах (работы Гореловой, Huang, Ermentrout и Lancaster).

Особый круг вопросов связан с воздействием шума на активные среды. В последние годы растет число исследований, посвященных этой теме. Можно назвать монографию Garcia-Ojalvo и ряд статей Garcia-Ojalvo, Cross, Кузнецова, Анищенко, Храмова и Viñals, в которых исследуются такие вопросы, как образование и разрушение пространственных структур под действием шума, вызванная шумом абсолютная неустойчивость, переход автоколебательной среды под действием шума к хаотической динамике и синхронизация распределенных систем и сред с помощью шума. Для пространственно дискретных моделей типа кольца автогенераторов было исследовано влияние шума на мультистабильность и показана возможность переключений между сосуществующими модами (работы Garcia-Ojalvo, Cross, Viñals, Кузнецова, Шабунина, Анищенко и Храмова). Имеется также большое число работ, посвященных явлению когерентного резонанса и стохастической синхронизации в возбудимых распределенных системах и средах (работы Lindner, Pei, Неймана и Ну). В целом роль шума в распределенных системах остается еще недостаточно исследованной. *Мало изучено влияние шума на бифуркации в активных средах, а также не проводилось сравнение влияния шума на разные типы активных сред.* В то же время, различия в реакции на внешний шум могли бы служить инструментом для диагностики типа активной среды.

Чтобы ответить на вопрос, можно ли считать колебания в возбудимых средах разновидностью автоколебаний, *необходимо выяснить, могут ли они быть синхронизованными внешним воздействием.* Как известно, одним из фундаментальных свойств автоколебаний является частотная синхронизация, т.е. захват характерных частот при внешнем воздействии или в результате взаимодействия систем (работы Розенблюма). Для возбудимых распределенных систем и сред, колебания которых индуцируются шумом, в условиях когерентного резонанса было установлено явление стохастической синхронизации (работы Nan, Неймана и Ну). При этом эффекты синхронизации детерминированных колебаний в возбудимых системах не были четко установлены и изучены. Имеется ряд ра-

бот, посвященных управлению колебаниями с помощью внешних импульсов в моделях сердечной мышцы, представляющих собой распределенные возбудимые системы (работы Nomura, González и Glass). Из приведенных в них результатов видно, что локальное внешнее воздействие может изменять фазу колебаний и частоту следования импульсов возбуждения. Указанные работы не были направлены конкретно на изучение свойств синхронизации. В частности, не рассматривалось существование области синхронизации при вариации параметров воздействия. С точки зрения задач диагностики характера среды по данным наблюдения *важно не только установить возможность синхронизации бегущих волн в детерминированной возбудимой среде, но и выяснить, имеются ли какие-либо особенности синхронизации колебаний в возбудимых распределенных системах и средах по сравнению с распределенными системами и средами, состоящими из автоколебательных элементов, и не может ли реакция на внешний периодический сигнал служить средством определения характера исследуемой системы.*

Все вышесказанное подтверждает актуальность исследований в выбранной области и служит основанием для формулировки цели и задач диссертационного исследования.

**Целью** данной работы является решение актуальной задачи радиофизики, состоящей в установлении различий в поведении двух типов активных сред с периодическими граничными условиями (автоколебательных и возбудимых сред), в выявлении эффектов шумового и регулярного воздействия на автоколебательные и возбудимые среды, в разработке методов, позволяющих диагностировать характер среды на основании наблюдаемых данных и в анализе возможных сценариев развития хаоса в среде, составленной из автоколебательных элементов со сложной динамикой динамикой.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Создать модель автоколебательной среды на основе элементов со сложной динамикой. Исследовать явление мультистабильности в предлагаемой модели среды с периодическими граничными условиями и установить сценарии эволюции колебаний и перехода к хаосу для различных сосуществующих мод. Провести анализ влияния шума на поведение мультистабильной среды. Сравнить эффекты, наблюдаемые в непрерывной среде с особенностями поведения дискретных аналогов.
2. Исследовать активную среду с периодическими граничными условиями, которая, в зависимости от управляющих параметров, может быть автоколебательной или возбудимой. В качестве модели такой среды выбрать среду, составленную из возбудимых осцилляторов ФитцХью – Нагумо. Сравнить динамику выбранной модели среды в автоколебательном и возбудимом ре-

жимах и определить, наблюдаются ли различия в поведении бегущих волн, в зависимости их характеристик от длины волны и параметров системы в этих двух случаях. Исследовать бифуркационный переход от одного типа среды к другому при изменении управляющего параметра, задающего характер элемента среды.

3. Выяснить, как влияет шум на бифуркации волновых мод и переход к хаосу в автоколебательной среде со сложной динамикой элементов. Проанализировать возможность управления динамическим режимом поведением среды с помощью шумового воздействия. Исследовать влияние шума на поведение активной среды с периодическими граничными условиями, составленной из осцилляторов ФитцХью – Нагумо при автоколебательном и возбужденном характере элементов среды. Установить, имеются ли различия в реакции на шум в указанных двух случаях и можно ли их использовать для диагностики типа среды.
4. Исследовать влияние внешнего локального периодического воздействия на автоколебательную и возбужденную среду. Установить, имеются ли различия в эффектах, наблюдаемых в двух типах сред при внешнем периодическом воздействии. Выяснить, возможна ли вынужденная синхронизация волн возбуждения и каковы ее особенности.

### **Основные положения и результаты, выносимые на защиту:**

#### **Положения:**

1. В автоколебательной однородной среде, составленной из элементов со сложной динамикой, возможен сценарий развития пространственной турбулентности, не наблюдающийся в соответствующих распределенных моделях с конечным числом элементов и состоящий в постепенном усложнении мгновенного пространственного профиля и возникновении все более мелкокомасштабных пространственных осцилляций при неизменном характере колебаний во времени.
2. Имеются качественные различия в поведении волновых мод в возбужденной и автоколебательной средах с периодическими граничными условиями, состоящие в различной зависимости динамических характеристик режима от параметров системы, а также в различной реакции на шумовое воздействие.
3. Возможна вынужденная синхронизация волн возбуждения в детерминированной возбужденной среде с периодическими граничными условиями в некоторой конечной области изменения частоты воздействия, причем наблюдается различие эффектов вынужденной синхронизации в возбужденной и в автоколебательной средах, состоящее в различной зависимости ширины области синхронизации от длины волны: если в автоколебательной среде

область синхронизации становится уже с ростом длины волны, то в возбудимой среде она возрастает.

### **Результаты:**

1. Предложен способ, позволяющий идентифицировать различные волновые моды в распределенной системе в условиях сложных по форме пространственных профилей профилей (в том числе в режиме слабого хаоса и в присутствии шума), в основе которого лежит расчет среднего фазового сдвига колебаний на длине системы.
2. Для модели непрерывной автоколебательной среды с периодическими граничными условиями подтвержден механизм удвоения периода колебаний для режимов фазовых волн, ранее установленный для пространственно неоднородных режимов в дискретных моделях распределенных систем и предполагающий возникновение квазипериодических колебаний и их эволюцию, приводящую к установлению колебаний удвоенного периода.
3. Показано, что воздействие случайной силы на непрерывную автоколебательную среду приводит к переключениям системы из режимов коротковолновых мод в режимы длинноволновых мод и, в конечном счете, к установлению «в среднем однородного» режима, что соответствует результатам, полученным для пространственно дискретных моделей.
4. Установленный эффект синхронизации колебаний детерминированной возбудимой среды с периодическими граничными условиями позволяет отнести данный тип систем к распределенным автогенераторам, несмотря на то, что элементы среды не являются автоколебательными.

**Научная новизна:** результатов диссертационной работы определяется следующим:

1. Впервые предложена и исследована модель непрерывной автоколебательной среды, элементарной ячейкой которой является автогенератор, способный сам по себе демонстрировать разнообразную динамику, включая режим динамического хаоса, установлены бифуркационные механизмы удвоения периода волновых мод через возникновение и эволюцию квазипериодических колебаний.
2. Впервые установлено, что в непрерывной среде усложнение формы пространственного профиля волн с ростом параметра нелинейности, проявляющееся в возникновении всё более мелкомасштабных осцилляций, может проходить в условиях неизменного характера колебаний во времени.
3. Впервые в непрерывной среде установлены индуцированные шумом бифуркации связанности (обратные бифуркации удвоения).

4. Впервые установлен факт синхронизации волн возбуждения в детерминированной возбудимой среде с периодическими граничными условиями при локальном внешнем периодическом воздействии и показаны различия эффектов синхронизации в возбудимой среде по сравнению с автоколебательной средой.
5. Впервые проведено сравнение поведения волновых мод в возбудимой и автоколебательной средах с периодическими граничными условиями и рассмотрены возможности диагностирования типа активной среды с помощью анализа зависимостей характеристик колебаний от параметров, а также по отклику среды на внешние регулярное и стохастическое воздействия.

**Научная и практическая значимость** результатов диссертации обусловлена тем, что они существенно расширяют современные представления нелинейной теории колебаний и статистической радиофизики о динамике активных сред и дополняют классическую концепцию автоколебаний. Научно-практическая значимость состоит в следующем:

1. Установлен сценарий развития хаоса и пространственной турбулентности в среде, составленной из автоколебательных элементов со сложной динамикой, демонстрирующих бифуркации удвоения периода во времени. Показан процесс усложнения пространственного профиля колебаний с ростом управляющего параметра, который можно рассматривать как один из сценариев развития пространственной турбулентности.
2. Показана возможность управления режимом автоколебательной среды в условиях мультистабильности с помощью шумовых воздействий.
3. Установлен факт вынужденной синхронизации бегущих волн в детерминированной возбудимой среде с периодическими граничными условиями, позволяющий рассматривать такую среду как особый тип распределенной автоколебательной системы.
4. Установленные в работе качественные различия в поведении автоколебательной и возбудимой сред в режиме мультистабильности при вариации управляющих параметров, воздействии шума и периодического сигнала могут быть использованы при разработке методов диагностики типа среды на основании результатов натуральных экспериментов.

Полученные результаты могут быть полезны для разработки методов диагностирования характера активной среды на основании экспериментальных данных и создании адекватных математических моделей реальных активных сред. Они также могут быть полезны при разработке новых методов управления радиофизическими устройствами, основанными на использовании источников шума. Материалы диссертационного исследования частично используются в курсах лек-

ций по теории нелинейных колебаний, синхронизации колебаний и флуктуациям в колебательных системах. Предполагается дальнейшее развитие указанных курсов с использованием полученных в диссертации результатов.

**Достоверность научных выводов** работы подтверждается соответствием результатов, полученных при использовании различных методов численного моделирования, включая применение различных схем интегрирования уравнений, а также совпадением части промежуточных результатов проведенных исследований с данными, полученными другими авторами и представленными в научных публикациях.

**Апробация работы.** Основные результаты научных исследований были представлены на следующих научных семинарах и конференциях:

- Международная школа-семинар «Статистическая физика и информационные технологии» (StatInfo-2009) (Саратов, 2009);
- Научная школа-конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (Саратов, 2009);
- Международная школа для студентов и молодых ученых по оптике, лазерной физике и биофизике «Saratov Fall Meeting» (SFM'10) (Саратов, 2010);
- Всероссийская научная конференция для молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2011);
- Международная школа для студентов и молодых ученых по оптике, лазерной физике и биофизике «Saratov Fall Meeting» (SFM'11) (Саратов, 2011);
- Научная школа «Нелинейные волны – 2012» (Нижний Новгород, 2012);
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2013» (Москва, 2013);
- Международная конференция «Динамика, бифуркации и странные аттракторы» (Нижний Новгород, 2013);
- Международная школа-конференция «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2013) (Саратов, 2013);
- Научный семинар рабочей группы по стохастическим процессам, Институт физики Гумбольдтовского университета (Берлин, 2013);
- Научный семинар Eugene-Wigner-Colloquium (Берлин, 2013);
- Международная конференция «Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems. Unraveling Complexity» (Саратов, 2014),

а также на научных семинарах кафедры радиофизики и нелинейной динамики.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ (код проекта 1008).

**Личный вклад.** В данной работе подавляющая часть представленных результатов была получена лично автором в ходе численных экспериментов. Также

автор принимал активное участие в постановке задач и интерпретации полученных экспериментальных данных.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 печатных изданиях (5 статей в журналах, рекомендованных ВАК [1–5], 1 монография [6], 2 статьи в сборниках трудов конференции [7,8] и 6 работ в сборниках тезисов конференций [9–14]).

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка цитируемой литературы. Полный объем диссертации 147 страниц текста с 49 рисунками. Список литературы содержит 149 наименований.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность выбранной темы диссертации, проводится краткий обзор имеющихся в научной литературе результатов по теме проводимого исследования, определяются цели и задачи исследования, формулируются положения и результаты, выносимые на защиту.

**В первой главе** диссертации исследуется динамика невозмущенных однородных активных сред с периодическими граничными условиями.

В п. 1.1 конструируются две модели среды: автоколебательная среда, элементами которой являются генераторы Анищенко – Астахова, обладающие собственной сложной динамикой (1), и среда, составленная из осцилляторов ФитцХью – Нагумо, которые, в зависимости от значений параметров, могут находиться как в автоколебательном, так и в возбужденном режиме (2).

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = mx + y - xz + \gamma \frac{\partial^2(x - y)}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -x, \\ \frac{\partial z}{\partial t} = g(\Phi(x) - z), \\ \Phi(x) = \frac{x}{2}(x + |x|), \end{cases} \quad (1)$$

где  $x = x(s, t)$ ,  $y = y(s, t)$ ,  $z = z(s, t)$  – динамические переменные, являющиеся функциями пространственной координаты  $s$  и времени  $t$ ;  $m$  и  $g$  – управляющие параметры системы;  $\gamma$  – коэффициент диффузии.

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} = x - y - \alpha x^3 + d \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \gamma x - y + \beta, \end{cases} \quad (2)$$

где  $x = x(s, t)$ ,  $y = y(s, t)$  – динамические переменные, являющиеся функциями пространственной координаты  $s$  и времени  $t$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\varepsilon$  – управляющие

параметры системы;  $d$  — коэффициент диффузии. Граничные условия для обеих сред периодические с периодом  $L = 100$ . Описываются методы исследования этих моделей. Приводится оценка достоверности полученных результатов посредством сравнения двух методов расчета уравнений в частных производных: спектрального и метода конечных разностей.

В п. 1.2 рассматривается автоколебательная среда со сложной динамикой элементарной ячейки, исследуется переход к хаотической динамике во времени, происходящий с ростом параметра нелинейности. Демонстрируется фазовая мультистабильность в системе — сосуществование бегущих волн, отличающихся друг от друга направлением бега и величиной набега фазы за длину системы. Показывается, что переход к колебаниям удвоенного периода во времени для режимов бегущих волн происходит через возникновение и разрушение квазипериодических во времени колебаний. Демонстрируется, что для режимов бегущих волн наблюдается только одно удвоение периода колебаний во времени, а переход к хаосу происходит через повторное возникновение и разрушение квазипериодических во времени колебаний. Показывается, что для различных мод переход к квазипериодическим во времени колебаниям, а затем и к колебаниям удвоенного во времени периода, происходит при различных значениях управляющего параметра  $m$ . Иллюстрируется сценарий развития пространственной турбулентности, не наблюдающийся в соответствующих распределенных моделях с конечным числом элементов и состоящий в постепенном усложнении мгновенного пространственного профиля и возникновении все более мелкомасштабных пространственных осцилляций при неизменном характере колебаний во времени (рис. 1). Предлагается метод идентификации волновых мод, основанный на определении изменения фазы колебаний на длине системы, позволяющий различать моды в условиях сложной формы волнового профиля. Демонстрируются особенности поведения различных мод исследуемой среды в хаотическом режиме.

В п. 1.3 проводится исследование модели активной среды с переходом от автоколебательного характера элементов к возбудимому. Также, как и для первой модели, демонстрируется явление фазовой мультистабильности при автоколебательном и возбудимом режиме элементов среды. Показывается, что для различных режимов исследуемой среды (автоколебательного и возбудимого) характеристики волновых мод ведут себя по-разному (рис. 2). Демонстрируется наличие бифуркационного перехода в исследуемой активной среде, которому соответствует интервал значений управляющего параметра. Иллюстрируется качественное изменение характеристик старших волновых мод в пределах этого интервала.

Результаты, представленные в первой главе, отражены в публикациях [1–3].

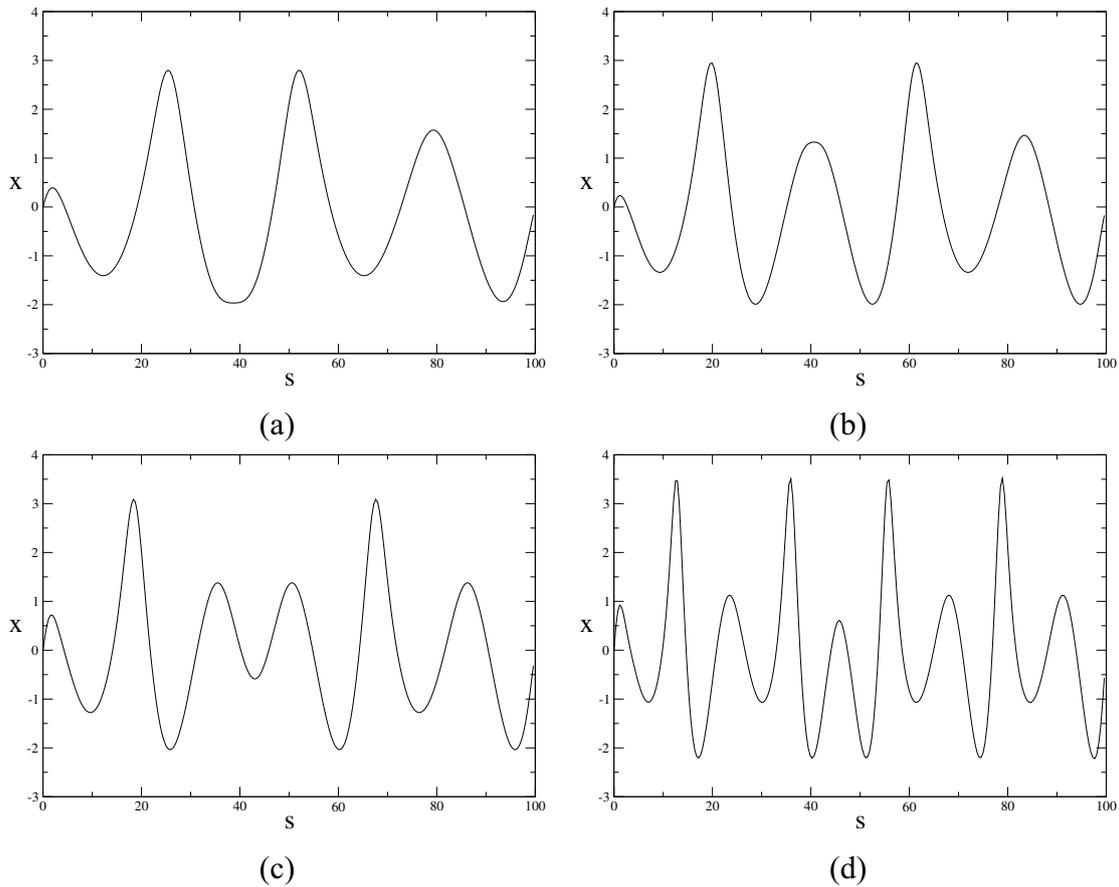


Рис. 1: Эволюция пространственного профиля  $x(s, t)$  режима  $n = 1$  в области колебаний удвоенного периода с ростом параметра  $m$ : а —  $m = 1.03$ , б —  $m = 1.06$ , в —  $m = 1.09$ , д —  $m = 1.21$ . Профили соответствуют условию  $x(0) = 0$ ,  $y(0) > 0$ .

**Во второй главе** диссертации исследуется динамика двух моделей активных сред, описанных в первой главе, в присутствии шума.

В п. 2.1 в модели исследуемых сред вводится внешняя случайная сила и описываются методы моделирования этой силы.

В п. 2.2 рассматривается воздействие шума на автоколебательную среду со сложной динамикой элементарной ячейки. Демонстрируется разрушение бегущих волн внешним шумовым воздействием в форме подавления пространственно неоднородных мод, начиная с больших значений номера  $n$ . Показывается, что для всех существующих в исследуемой среде устойчивых мод наблюдаются бифуркации связанности. Демонстрируется отсутствие бифуркационного интервала значений интенсивности шума для различных мод. Иллюстрируется изменение бифуркационных значений управляющего параметра для стохастических бифуркаций удвоения периода при изменении интенсивности шума. Показывается, что внешняя случайная сила слабо влияет на переход исследуемой активной среды к хаотическому режиму.

В п. 2.3 исследуется воздействие шума на поведение среды с переменной динамикой элементарной ячейки как в автоколебательном, так и в возбужденном

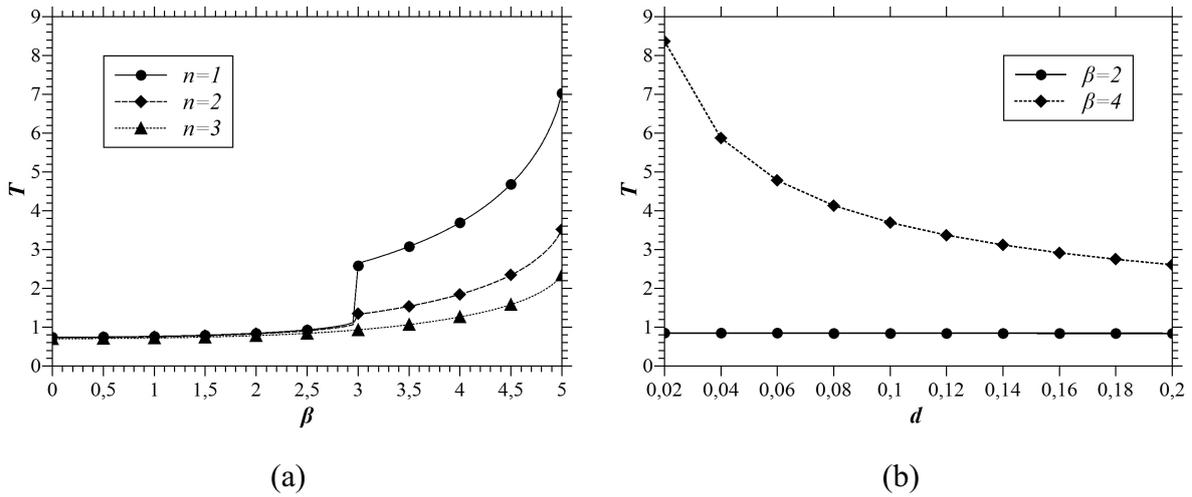


Рис. 2: Зависимости периода колебательных мод  $n = 1, 2, 3$  от параметров  $\beta$  (a) и  $d$  (b).  $\beta_{cr} \approx 3$  разделяет два режима поведения ячейки активной среды (2) — автоколебательный и возбудимый

режиме. Демонстрируется разрушение бегущих волн внешним шумовым воздействием в обоих режимах исследуемой активной среды. Показывается разница в поведении характеристик волновых мод для двух указанных режимов при вариации интенсивности шумового воздействия (рис. 3a). Демонстрируется эффект когерентного резонанса для исследуемой активной среды в возбудимом режиме (рис. 3b). Иллюстрируется переключение мод вблизи точки бифуркации  $\beta_{cr} \approx 3$ .

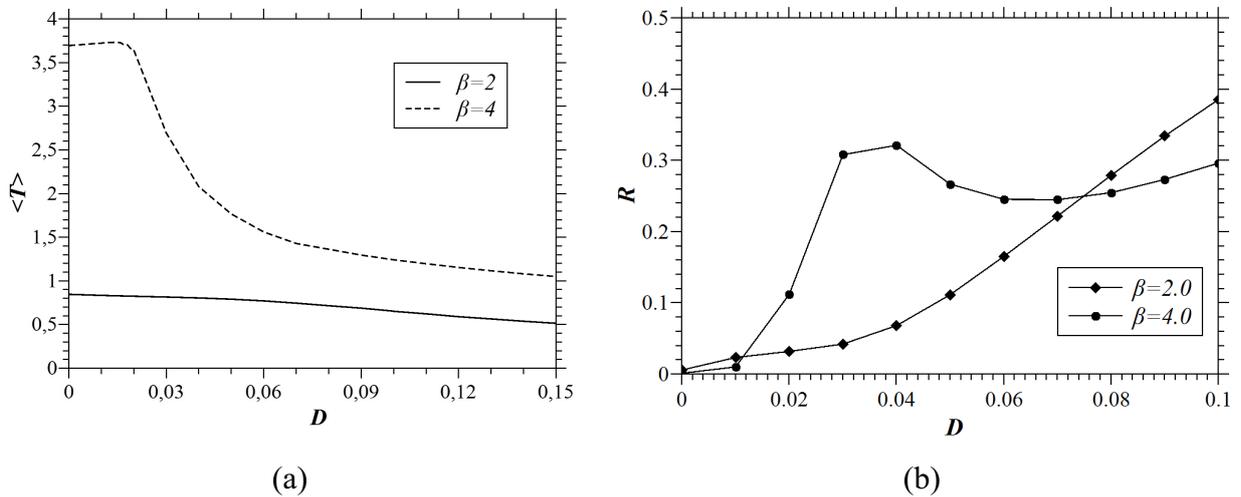


Рис. 3: Зависимость среднего периода колебаний (a) и нормированной девиации интерспайковых интервалов  $R$  (b) моды  $n = 1$  от интенсивности шума  $D$  в автоколебательном ( $\beta = 2$ ) и возбудимом ( $\beta = 4$ ) режимах элементарной ячейки.

Результаты, представленные во второй главе, отражены в публикациях [1–3, 5].

**Третья глава** диссертации посвящена исследованию вынужденной синхронизации волновых мод в средах с периодическими граничными условиями, описанных в первой главе.

В п. 3.1 в модели исследуемых сред вводится внешняя локальная гармоническая сила, рассматриваются методы диагностики синхронизации.

В п. 3.2 рассматривается синхронизация автоколебательной среды со сложной динамикой элементов. Показывается, что с приближением значения частоты внешнего воздействия к собственной частоте колебаний во времени исследуемой среды все волновые моды разрушаются и происходит переход к некоему единственному устойчивому режиму, который и синхронизируется внешним воздействием. Демонстрируется эффект увеличения средней частоты пространственных осцилляций этого режима с увеличением частоты внешнего воздействия в области синхронизации, а также обратный эффект при выходе из области синхронизации. Проводится аналогия с возникновением мелкомасштабных пространственных осцилляций с увеличением управляющего параметра в исследуемой среде без внешнего воздействия в режиме колебаний удвоенного во времени периода.

В п. 3.3 исследуется синхронизация активной среды с изменяемым характером элементарной ячейки внешним локальным гармоническим воздействием. Демонстрируется наличие для трёх волновых мод областей значений частоты воздействия, в которых имеет место синхронизация. Показывается различие в закономерностях вынужденной синхронизации в автоколебательной и возбудимой среде (рис. 4), состоящее в увеличении ширины области синхронизации для старших мод в среде в возбудимом режиме и обратном эффекте в среде в автоколебательном режиме. Вводится аналог активной среды с переменным характером элементарной ячейки в виде модели осциллятора ФитцХью – Нагумо с запаздывающей обратной связью. Показывается качественное соответствие результатов, полученных для среды, результатам, полученным для модели с запаздывающей обратной связью.

Результаты, представленные в третьей главе, отражены в работе [4].

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Для модели активной среды, элементами которой являются генераторы Анищенко – Астахова, обладающие собственной сложной собственной динамикой, было установлено, что при переходе от квазигармонических колебаний к колебаниям более сложной формы возникает сложное поведение волнового фронта бегущих волн, который может менять направление движения. Были выявлены два различных механизма удвоения периода колебаний во времени для однородной моды и для бегущих волн. Если для

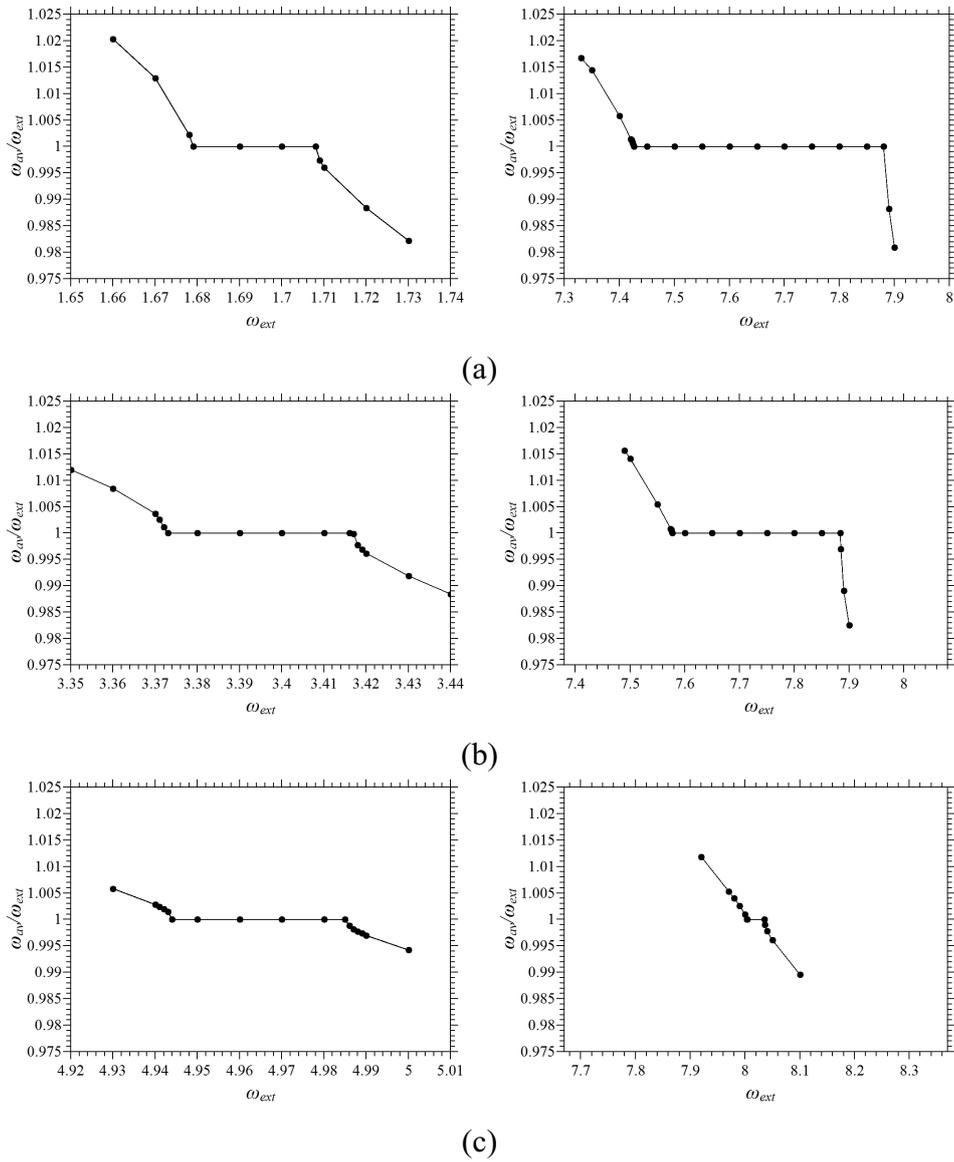


Рис. 4: Зависимости отношения частот  $\omega_{av}/\omega_{ext}$  от частоты воздействия  $\omega_{ext}$  в активной среде (2) в возбудимом (слева,  $\beta = 4$ ) и автоколебательном (справа,  $\beta = 2$ ) режимах, полученные при  $C = 14$  для различных мод:  $n = 1$  (a),  $n = 2$  (b) и  $n = 3$  (c).

однородной моды удвоение периода колебаний происходит аналогично бифуркациям удвоения периода в конечномерных системах, то для бегущих волн имеет место сложная перестройка колебаний, включающая возникновение квазипериодического режима и его эволюцию. Аналогичные результаты были получены в работах других авторов для пространственно дискретных моделей автоколебательной среды (цепочек автогенераторов) и, по-видимому, носит общий характер. Однако в отличие от пространственно дискретных моделей, в непрерывной среде с ростом управляющего параметра при отсутствии бифуркаций колебаний во времени наблюдается постепенное усложнение мгновенного пространственного профиля бегущих волн. Возникают все более мелкомасштабные пространственные осцилля-

ции, что ведет к пространственной неупорядоченности (то есть, к турбулентности).

2. Для бегущих волн переход к хаосу происходит в результате возникновения и разрушения квазипериодического режима, что также соответствует результатам, полученным ранее для пространственно дискретных моделей. В области слабого хаоса мультистабильность сохраняется. Однако при достижении управляющим параметром некоторого значения наблюдается кризис всех неоднородных мод и возникновение глобально устойчивого режима, для которого средний сдвиг фазы на длине системы является нулевым, но различные точки среды при этом совершают хаотические колебания с разными фазами.
3. В результате анализа модели среды, элементы которой представляют собой осцилляторы ФитцХью – Нагумо и могут находиться как в автоколебательном, так и в возбуждимом режиме, выявлены существенные различия в поведении среды в автоколебательном и возбуждимом режимах. Так, в случае автоколебательной среды, период колебаний слабо зависел от параметра  $\beta$ , управляющего поведением элемента среды, и практически не зависел от коэффициента диффузии. В то же время, для возбуждимой среды зависимость периода колебаний от этих параметров была весьма существенной. Кроме того, период колебаний в случае автоколебательной среды не зависит от номера волновой моды, а фазовая скорость для различных мод существенно различается. В возбуждимой среде, напротив, фазовая скорость практически одинакова для всех мод, а периоды колебаний различны.
4. Переход управляющего параметра через критическое значение, соответствующее смене характера элемента среды, для большинства волновых мод сопровождается заметным изменением периода и фазовой скорости, что позволяет говорить о бифуркационном переходе.
5. Во всех рассмотренных случаях шум приводил к разрушению бегущих волн и установлению режима однородных в статистическом смысле колебаний. Для первой модели среды в режиме квазигармонических колебаний в среде воздействие шума приводит к переходам от коротковолновых мод к более длинноволновым. Подобный эффект наблюдался ранее для пространственно дискретных моделей, что подтверждает его общий характер. При слабом шуме, не вызывающем переключения мод на временах наблюдения, в режиме колебаний удвоенного периода были обнаружены стохастические бифуркации связанности в полной аналогии с сосредоточенными системами. Слабый пространственно однородный шум на длительных временах

наблюдения не оказывает существенного влияния на переход к хаосу, лишь слегка смещая границу возникновения экспоненциальной неустойчивости.

6. В результате сравнения двух режимов, реализуемых во второй модели среды было установлено, что в возбудимом режиме среда демонстрирует существенно большую чувствительность к шуму, чем в автоколебательном. Так, для автоколебательной среды зависимость среднего периода от интенсивности шума оказывается гораздо более плавной, чем для возбудимого. Кроме того, для среды в возбудимом режиме с ростом интенсивности шума наблюдается эффект когерентного резонанса, отсутствующий в автоколебательном режиме.
7. Колебания, возникающие в детерминированной среде, составленной из возбудимых элементов, могут быть синхронизированы внешним воздействием в некоторой области частотных расстройок и, в этом смысле, могут рассматриваться как особый автоколебательный режим. При этом были выявлены существенные отличия частотной синхронизации в возбудимой среде по сравнению с автоколебательной средой. Во-первых, области синхронизации в возбудимой среде значительно (в целом на порядок) уже, чем в автоколебательной. Во-вторых, ширина областей синхронизации по-разному зависит от номера колебательной моды  $n$ , определяемому длиной волны: в возбудимой среде она растет с ростом  $n$ , а в автоколебательной, напротив, уменьшается.
8. С точки зрения классического определения автоколебаний, данного А.А. Андроновым, незатухающие колебания в возбудимой среде с периодическими граничными условиями, также как и в автоколебательной среде, являются автоколебательными режимами. Однако в силу перечисленных выше различий между ними, их имеет смысл различать как два вида автоколебаний, характерных для активных сред. Установленные различия могут быть использованы при определении характера элемента среды по результатам натуральных экспериментов, что может быть существенно при построении математических моделей реальных сред.

## Публикации автора по теме диссертации

1. Слепнев, А.В. Мультистабильность, удвоения периода и подавление бегущих волн шумовым воздействием в сильно нелинейной автоколебательной среде с периодическими граничными условиями / А.В. Слепнев, Т.Е. Вадивасова // *Нелинейная динамика*. — 2010. — Т. 6, № 4. — С. 755–767.
2. Слепнев, А.В. Бифуркации удвоения периода и эффекты шумового воздействия в мультистабильной автоколебательной среде / А.В. Слепнев, Т.Е. Вадивасова // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2011. — Т. 19, № 4. — С. 53–67.
3. Слепнев, А.В. Два вида автоколебаний в активной среде с периодическими граничными условиями / А.В. Слепнев, Т.Е. Вадивасова // *Нелинейная динамика*. — 2012. — Т. 8, № 3. — С. 497–505.
4. Слепнев, А.В. Эффекты шумового воздействия на активную среду с периодическими граничными условиями / А.В. Слепнев, И.А. Шепелев, Т.Е. Вадивасова // *Письма в ЖТФ*. — 2014. — Т. 40, № 2. — С. 30–36.
5. Слепнев, А.В. Вынужденная синхронизация бегущих волн в активной среде в автоколебательном и возбуждаемом режимах / А.В. Слепнев, И.А. Шепелев, Т.Е. Вадивасова // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. — 2014. — Т. 22, № 2. — С. 50–61.
6. Слепнев, А.В. Автоколебательная среда со сложной динамикой элементарной ячейки. Мультистабильность и сценарии перехода к хаосу. / А.В. Слепнев, Т.Е. Вадивасова. — Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. — 64 с.
7. Слепнев, А.В. Бифуркации удвоения периода и эволюция пространственных структур в модели автоколебательной среды / А.В. Слепнев // *Статистическая физика и информационные технологии (StatInfo – 2009): материалы международной школы-семинара*. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2009. — С. 34–38.
8. Слепнев, А.В. Фазовая мультистабильность и влияние локального источника шума в модели автоколебательной среды / А.В. Слепнев // *Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2009 (Саратов, 16–18 ноября 2009): сборник материалов научной школы-конференции*. — Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2010. — С. 94–97.

9. *Слепнев, А.В.* Сценарии перехода к хаосу в автоколебательной среде со сложной динамикой элементарной ячейки / А.В. Слепнев // Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: тезисы докладов VI Всероссийской конференции молодых ученых. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2011. — С. 154–155.
10. *Слепнев, А.В.* Два типа автоколебаний в активной среде с периодическими граничными условиями / А.В. Слепнев, Т.Е. Вадивасова // XVI научная школа «Нелинейные волны — 2012» (Нижний Новгород, 29 февраля – 6 марта 2012 г.): тезисы докладов молодых ученых. — Н. Новгород: Типография ИПФ РАН, 2012. — С. 122–123.
11. *Slepnev, A.V.* Coherence resonance and traveling waves regimes destruction in model of an active medium with periodic boundary conditions / A.V. Slepnev, T.E. Vadivasova, I.A. Shepelev // International conference «Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors» dedicated to the memory of L.P. Shil'nikov: Book of abstracts. — N. Novgorod: Publishing house of UNN, 2013. — P. 105.
12. *Шепелев, И.* Эффекты шумового воздействия на волновые режимы активной среды / И. Шепелев, А.В. Слепнев // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ – 2013» / Под ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова. — Москва: МАКС Пресс, 2013.
13. *Слепнев, А.В.* Бегущие волны, мультистабильность и синхронизация в кольцевой возбудимой среде / А.В. Слепнев, И.А. Шепелев, Т.Е. Вадивасова // Материалы X Международной школы-конференции «Хаотический автоколебания и образование структур» (ХАОС – 2013). — Саратов: ООО «Издательский центр «Наука», 2013. — С. 25.
14. *Slepnev, A.V.* Two types of oscillatory regimes in an active medium with periodic boundary conditions / A.V. Slepnev, T.E. Vadivasova // International Conference «Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity» dedicated to 70th birthday of Prof. Dr. Vadim S. Anishchenko. — Saratov: 2014. — Pp. 45–46.