На правах рукописи

Аржанухина Дарья Сергеевна

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИНАМИКОЙ, ОПИСЫВАЕМОЙ ОТОБРАЖЕНИЯМИ НА ТОРЕ

01.04.03 – Радиофизика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов 2014

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» на базовой кафедре динамических систем факультета нелинейных процессов

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор **Кузнецов Сергей Петрович**, ФГБУН «Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова Российской академии наук», заведующий лабораторией; ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», профессор базовой кафедры динамических систем
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, **Ряшко Лев Борисович,** ФГАОУ «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», профессор. кандидат физико-математических наук, **Хандурин Андрей Владимирович,** ФГБОУ ВПО Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», доцент.
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВПО** Национальный исследовательский университет **«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**.

Защита состоится 9 октября 2014 г. в 15.30 на заседании диссертационного совета Д212.243.01 по специальности 01.04.03 – радиофизика на базе ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, III корпус, ауд. 34.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке СГУ им. В.А. Артисевич.

Автореферат разослан 9 августа 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, Аникин Валерий Михайлович

Актуальность темы исследования

В соответствии с базовыми принципами теории колебаний и нелинейной динамики, среди систем с хаотическим поведением наиболее значимыми с практической точки зрения и в качестве предмета теоретического анализа следовало бы признать системы, в которых хаос характеризуется свойством структурной устойчивости.[1] Характеристики такого хаоса нечувствительны к вариации параметров и функций, фигурирующих в определении оператора эволюции. На уровне абстрактных моделей такие системы введены и изучаются в рамках так называемой гиперболической теории, разработку которой надо признать одним из выдающихся достижений математической теории динамических систем XX века. В силу присущей структурной устойчивости и наличия глубокого и полного теоретического описания, физическая реализация систем с гиперболическим хаосом может представлять интерес для приложений, в том числе в радиотехнике и электронике (скрытая коммуникация, генерация случайных чисел, шумовая локация).[2]

Специальный класс систем со структурно устойчивым хаосом образуют системы Аносова, у которых все фазовое пространство представляет собой гиперболическое инвариантное множество, составленное из траекторий седлового типа, причем типичная траектория посещает плотное во всем фазовом пространстве множество точек. Системы Аносова могут быть как консервативными (например, отображение Аносова, которое также называют отображением «кот Арнольда»), так и диссипативными, у которых гиперболическая хаотическая динамика имеет место на вложенном в фазовое пространство притягивающем инвариантном множестве, представляющем собой однородно гиперболический аттрактор. Аттрактор гиперболический, если для него выполнен ряд условий, основным из которых является то, что все траектории, принадлежащие аттрактору, седловые. Хаотическая природа динамики на таких аттракторах математически строго обоснована.

Примером такого аттрактора может служить гиперболический DA-аттрактор. Этот тип однородно гиперболических аттракторов введен в рассмотрение Смейлом для отображений на торе, полученных определенной модификацией отображений Аносова.[3] (Собственно аббревиатура DA означает “Derived from Anosov”.)

Степень разработанности темы исследования

---

[1] V. Afraimovich and S.-B. Hsu Lectures on chaotic dynamical systems. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol.28. American Mathematical Society, Providence RI, International Press, Somerville, MA, 2003., Дж. Гукенхеймер, П. Холмс Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2002. 559 с., R.L. Devaney An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. NY: Addison – Wesley, 1989., S. Smale. Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc. (NS) **73**, 1967, 747-817., R.F. Williams Expanding attractors. Publications mathématiques de l’I.H.É.S., **43**, 1974, 169-203.

[2] А.С.Дмитриев, А.И. Панас. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. – 252с., Z. Elhadj, J.C. Sprott Robust Chaos and Its Applications. WS, Singapore, 2011.

[3] А.Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. М.: Изд. «Факториал», 1999, 768 с., Y. Coudene Pictures of Hyperbolic Dynamical Systems. // Notices of the American Mathematical Society **53**(1), 2006, 8-13

В большинстве реальных физических систем и модельных дифференциальных уравнений, демонстрирующих хаотическую динамику, реализуются, аттракторы, не являющиеся гиперболическими. Такие аттракторы, как правило, не обладают структурной устойчивостью. Наиболее известные примеры негиперболических аттракторов это аттрактор Лоренца[4] (квазигиперболический аттрактор), аттрактор Эно[5] (квазиаттрактор) и другие.

Системы с гиперболическими аттракторами первоначально были представлены лишь абстрактными математическими моделями, построенными на основе геометрических конструкций, такими как соленоид Смейла - Вильямса и аттрактор Плыкина.[6] Однако, в последнее время появились работы, где указана возможность присутствия гиперболических аттракторов в системах, допускающих физическую реализацию.[7] Например, в статье[8] исследуется система с аттрактором Смейла – Вильямса, составленная из двух связанных осцилляторов ван дер Поля с модуляцией параметров и попеременной передачей возбуждения между подсистемами. В работе[9] обсуждается возможность существования гиперболического аттрактора типа Плыкина в модели нейрона Хиндмарша – Роуза. В работе[10] предложена электронная схема, динамика которой в установившемся режиме ассоциируется с аттрактором типа Плыкина. В статье[11] исследуется система четырех связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля с динамикой, соответствующей гиперболическому отображению «кот Арнольда». В статье[12] предложена система на основе неавтономного осциллятора ван дер Поля с запаздыванием, в которой реализуется аттрактор Смейла - Вильямса

Что же касается DA-аттракторов, то они рассматривались исключительно для искусственно сконструированных отображений, а примеров систем с аттракторами этого типа, допускающих физическую реализацию, в литературе представлено не было. В настоящей диссертационной работе предлагается физическая система с динамикой, соответствующей отображению с гиперболической хаотической динамикой «кот Арнольда», которая затем подвергается модификации, приводящей к возникновению DA-аттрактора.

---

[4] E. N. Lorenz Deterministic Nonperiodic Flow // J. of the Atmospheric Sciences. 1963. V. 20. P. 130-141.

[5] M. A. Henon Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor // Comm. Math. Phys. 1976. V. 50. P. 69.

[6] Я.Г. Синай. Стохастичность динамических систем. В кн. Нелинейные волны, ред. А.В. Гапонов–Грехов. М.: Наука, 1979, с. 192-212., L. Shilnikov Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial // Int. J. of Bif. & Chaos. 1997. Vol. 7, 9. P. 1353., С.П.Кузнецов. Динамический хаос, 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006, 356с.

[7] С.П. Кузнецов. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике. УФН, **181**, 2011, №2, 121-149.

[8] С.П.Кузнецов, Е. П. Селезнев Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла – Вильямса. ЖЭТФ, т.129, 2006, вып. 2, 400-412.

[9] V. Belykh, I. Belykh, E Mosekilde. Hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models. // International Journal of Bifurcation and Chaos, **15**, 2005, No. 11, 3567-3578.

[10] S.P. Kuznetsov. Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM. CHAOS, **21**, 2011, 043105.

[11] O.B. Isaeva, A.Yu. Jalnine, S.P. Kuznetsov. Arnold's cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators. Phys. Rev. E **74**, 2006, 046207

[12] С.П. Кузнецов, В.И. Пономаренко. О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла-Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием. Письма в ЖТФ, т.34, 2008, вып.18, 1-8.

Таким образом, впервые вводится в рассмотрение физически реализуемая система с гиперболическим DA-аттрактором.

Рассмотренные в настоящей работе системы открывают интересные возможности для конкретного исследования перехода от динамики Аносова к DA-аттракторам в контексте физических систем, что способствует наполнению содержанием абстрактных представлений математической теории. С практической точки зрения, эти системы могут представлять интерес как генераторы структурно устойчивого хаоса с хорошо определенными и допускающими детальный математический анализ свойствами.

<u>Цели и задачи работы</u>

Целью настоящей работы является построение систем с гиперболическим хаосом (в том числе систем с DA-аттрактором), допускающих физическую реализацию, а также исследование разработанных моделей в численном эксперименте и их радиофизическая реализация; указание возможности перехода в таких системах от одного типа однородно гиперболического аттрактора к другому.

Были решены следующие задачи:

1) Исследование отображения с гиперболическим DA-аттрактором, который получается результате введения в консервативную систему с гиперболическим хаосом «кот Арнольда» диссипативной добавки.
2) Построение и исследование системы на основе трех неавтономных осцилляторов ван дер Поля с попеременным возбуждением, динамика фаз которой определяется гиперболическим отображением на торе. Осуществление перехода в разработанной модели от динамики Аносова к поведению на гиперболическом DA-аттракторе.
3) Реализация в виде радиофизической схемы, демонстрирующей гиперболический хаос, на основе предложенной модели трех попеременно возбуждающихся осцилляторов.
4) Разработка и исследование автономной системы, построенной на основе логистического уравнения с запаздыванием. Осуществление перехода в полученной модели от динамики Аносова к поведению на хаотическом аттракторе Смейла-Вильямса.

<u>Научная новизна</u>

В работе впервые предложена система с гиперболическим DA-аттрактором, допускающая физическую реализацию, а также рассмотрена возможность перехода от систем с динамикой Аносова к системам с другими типами однородно гиперболических аттракторов.

Введена в рассмотрение и исследована система трех неавтономных осцилляторов ван дер Поля с динамикой фаз, соответствующей отображению Аносова («кот Арнольда»). Осуществлена модификация исходной модели, приводящая к появлению в отображении Пуанкаре системы гиперболического DA-аттрактора.

Проведено схемотехническое моделирование систем с динамикой фаз, описываемой отображением «кот Арнольда» и модифицированным отображением Фибоначчи (система с DA-аттрактором).

Введена в рассмотрение и исследована в численном эксперименте автономная система, построенная на основе дифференциального логистического уравнения с запаздыванием с динамикой фаз, описываемой отображением Аносова. Рассмотрен частный случай исходной модели, позволяющий перейти к системе с аттрактором Смейла – Вильямса в отображении Пуанкаре.

<u>Теоретическая и практическая значимость работы</u>

Теоретическая значимость работы заключается в указании способов построения систем с гиперболическими аттракторами, допускающих физическую реализацию, притом что до выполнения настоящей работы DA – аттракторы рассматривались исключительно для искусственно сконструированных отображений. Также в работе изучается переход от динамики Аносова к DA-аттрактору и аттрактору Смейла – Вильямса.

С практической точки зрения, такие системы могут представлять интерес как генераторы структурно устойчивого хаоса, поскольку генерируемый хаос будет нечувствителен к искажениям в канале передачи, техническим флуктуациям и шумам, а также по отношению к неидентичности параметров передатчика и приемника и т.д.

<u>Методология и методы исследования</u>

В ходе выполнения работы был использован ряд численных методов, так же был использован приближенный метод теории нелинейных колебаний для вывода укороченных уравнений (метод медленно меняющихся амплитуд).

Для анализа динамики исследуемых систем были применены такие методы, как построение временных реализаций, фазовых портретов аттракторов, бифуркационных диаграмм, расчет показателей Ляпунова.

Для исследования плоскости параметров диссипативного отображения «кот Арнольда» использовались карты динамических режимов, карты показателей Ляпунова, были построены бассейны притяжения аттракторов, а также был проведен анализ сжатия в фазовом пространстве, основанный на вычислении значения определителя матрицы Якоби в точках фазовой плоскости с достаточно малым шагом.

Для численного решения дифференциальных уравнений использовался метод Рунге – Кутты четвертого порядка, для расчета показателей Ляпунова применялся алгоритм Бенеттина.

Для схемотехнического моделирования систем использовался программный пакет «Multisim 10.0». С его помощью были получены осциллограммы, фазовые портреты, спектры сигналов, генерируемых предложенными схемами.

Положения, выносимые на защиту

1) Гиперболический DA-аттрактор можно реализовать путем модификации консервативного отображения с хаотической гиперболической динамикой «кот Арнольда» путем добавления диссипативных членов, представленных гладкими функциями.
2) Грубый гиперболический хаос, соответствующий динамике в отображении Пуанкаре, описываемой на аттракторе гиперболическим отображением Аносова, реализуется в системе, на основе трех связанных неавтономных осцилляторов с попеременным возбуждением. При определенной модификации этой системы возможно осуществление перехода от динамики Аносова к хаотическому поведению, ассоциирующемуся с гиперболическим DA-аттрактором.
3) Динамика, соответствующая гиперболическому хаосу в отображении «кот Арнольда», отображении Фибоначчи, отображении с DA-аттрактором, допускает радиофизическую реализацию в виде схем, построенных на основе трех связанных автоколебательных элементов с попеременным возбуждением.
4) Гиперболический хаос реализуется в автономной системе, построенной на основе логистического уравнения с запаздыванием, содержащей две петли обратной связи с разными временами задержки. При выбранных соответствующим образом не равных друг другу временах задержки оказывается возможным обеспечить динамику фаз высокочастотного заполнения последовательно генерируемых цугов колебаний, соответствующую отображению Аносова, тогда как в случае их равенства, хаотическая динамика определяется растягивающим отображением окружности.

Достоверность результатов

Достоверность результатов работы определяется использованием в расчетах известных, апробированных численных методов, соответствием качественного описания результатам численного моделирования и результатам моделирования с помощью программного пакета «Multisim 10.0».

Личный вклад соискателя

Постановка задач и обсуждение результатов проводились совместно с научным руководителем и соавторами совместных работ. Автором выполнено программирование, проведение численных расчетов, осуществление схемотехнического моделирования схем и обработка данных.

Публикации и апробация

Основные результаты диссертационной работы были представлены в виде докладов на следующих научных конференциях: V, VI, VII и VIII

Всероссийских конференциях молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2010 - 2013 гг.), школах-конференциях «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (2009–2012 гг.).

Частично результаты диссертации получены в процессе выполнения работ, поддержанных грантами РФФИ № 12-02-00342 и 14-02-31162.

По результатам диссертации опубликовано 11 работ, из них, 5 статей [1-5] в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК и 6 тезисов докладов [6-11].

Структура и объем работы.

Работа содержит 128 страниц, из них 43 страниц иллюстраций и 7 страниц список литературы из 62 наименований.

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, и заключения.

Во введении обсуждается актуальность и степень разработанности темы исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

В первой главе исследуется модельное отображение, представляющее собой модификацию консервативного отображения с гиперболической хаотической динамикой «кот Арнольда», полученное в результате введения в исходную систему диссипативной добавки, соответствующей так называемой «хирургии Смейла», но заданной гладкими функциями [4, 8–11]. В модифицированном отображении неподвижная точка, имевшая ранее тип седла, становится отталкивающей вдоль устойчивого направления, превращаясь в неустойчивый узел, а в ее окрестности возникают две новые седловые точки. Получившееся отображение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n + \varepsilon(\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2}\sin 4\pi x_n)/2\pi \ (\mathrm{mod}1), \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n + \varepsilon(\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2}\sin 4\pi x_n + \sin 2\pi y_n + \frac{1}{2}\sin 4\pi y_n)/2\pi \ \ (\mathrm{mod}1). \end{aligned} \quad (1)$$

В данной системе, при малых значениях амплитуды введенного возмущения, реализуется гиперболический хаос, и в определенном диапазоне имеет место гиперболический хаотический аттрактор с поперечной канторовой структурой – DA-аттрактор (“Derived from Anosov”) (рис.1). При дальнейшем увеличении возмущения он разрушается.

Подтверждением присутствия в системе именно гиперболического хаоса может являться примерно постоянное значение старшего показателя Ляпунова и отсутствие окон периодичности (рис.2). Затем возникают регулярные режимы, которые переходят в квазипериодические и затем в хаотические.

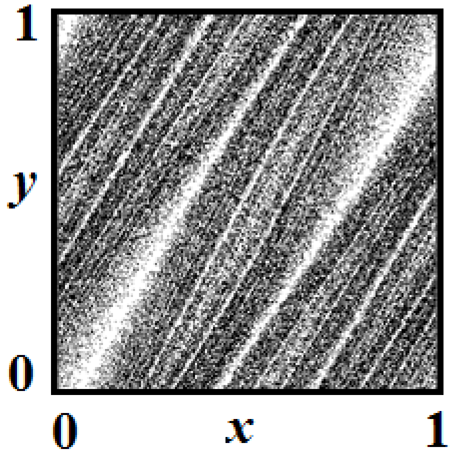

Рис.1. Гиперболический аттрактор системы (1), реализующийся при ε = 0.2.

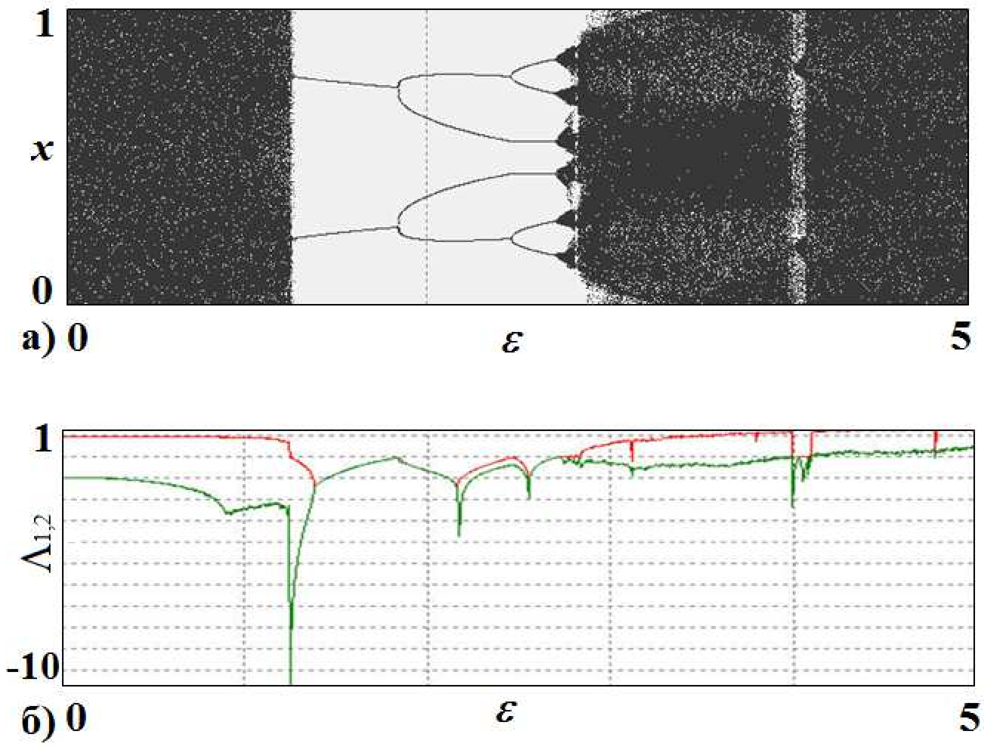

Рис.2. Бифуркационное дерево на плоскости (x,ε) (а) и графики зависимости показателей Ляпунова от параметра ε (б) системы (1).

Во второй главе представлены системы, построенные на основе связанных осцилляторов ван дер Поля, динамика фаз которых описывается отображениями с гиперболической хаотической динамикой [2, 3, 7].

В первом разделе второй главы исследуется система трех связанных неавтономных автоколебательных элементов, в которой поведение фаз осцилляторов за период изменения коэффициентов в уравнениях соответствует отображению Аносова, демонстрирующему хаотическую динамику [3]. Динамика системы описывается следующими уравнениями:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=[B+A\cos(2\pi t/T)-x^2]\frac{dx}{dt}+\varepsilon\frac{d(yz)}{dt}\cos\omega_0 t,\\
&\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2 y=[B+A\cos 2\pi(t/T-1/3)-y^2]\frac{dy}{dt}+\varepsilon\frac{d(xz)}{dt}\cos\omega_0 t,\\
&\frac{d^2z}{dt^2}+\omega_0^2 z=[B+A\cos 2\pi(t/T-2/3)-z^2]\frac{dz}{dt}+\varepsilon\frac{d(xy)}{dt}\cos\omega_0 t.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Здесь x, y и z – обобщенные координаты первого, второго и третьего осцилляторов, ω_0 – их собственная частота и частота вспомогательного сигнала, присутствующего в виде множителя при последнем члене каждого уравнения. Параметр A характеризует глубину модуляции параметра, ответственного за бифуркацию Андронова-Хопфа, а B – постоянную составляющую, выбор которой определяет, какую часть периода осцилляторы проводят выше и ниже порога возбуждения, T – период модуляции, ε – параметр связи.

Модуляция параметров осуществляется таким образом, что каждый из осцилляторов пребывает в возбужденном состоянии приблизительно одну третью часть периода. В силу того, что модуляция сдвинута по фазе, осцилляторы возбуждаются по очереди: $\ldots\to 1\to 2\to 3\to 1\to\ldots$, и возбуждение передается в циклической последовательности каждому следующему осциллятору от двух его партнеров.

Результаты численного исследования позволяют заключить, что аттрактор отображения Пуанкаре системы (2) можно рассматривать, по крайней мере, в грубом приближении, как располагающийся в шестимерном фазовом пространстве на двумерном торе, динамика на котором представляет собой гиперболический хаос, характерный для систем Аносова.

Трансформация фазы колебаний при возбуждении очередного осциллятора системы дается отображением Фибоначчи с хаотической динамикой, что иллюстрирует рис.3а. На рис.3а по вертикальной оси представлена фаза третьего осциллятора, определенная в момент времени $t=nT$. По горизонтальной оси отложена сумма фаз первого осциллятора в момент $t=(n-\frac{2}{3})T$ и второго осциллятора в момент $t=(n-\frac{1}{3})T$.

Во втором разделе второй главы рассматривается система трех связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля, в которой поведение фаз осцилляторов за характерный период приближенно описывается отображением Фибоначчи с модификацией типа «хирургии Смейла», приводящей к возникновению DA-аттрактора [2], описываемая уравнениями:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=[B+A\cos(2\pi t/T)-x^2]\frac{dx}{dt}+\varepsilon\left[\frac{d(yz)}{dt}\cos\omega_0 t+\alpha\frac{dz}{dt}\right]\\
&\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2 y=[B+A\cos 2\pi(t/T-1/3)-y^2]\frac{dy}{dt}+\varepsilon\left[\frac{d(xz)}{dt}\cos\omega_0 t+\alpha\frac{dx}{dt}\right]\\
&\frac{d^2z}{dt^2}+\omega_0^2 z=[B+A\cos 2\pi(t/T-2/3)-z^2]\frac{dz}{dt}+\varepsilon\left[\frac{d(xy)}{dt}\cos\omega_0 t+\alpha\frac{dy}{dt}\right]
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Основное отличие от системы (2) заключается во введении слагаемых пропорциональных дополнительному параметру связи α, ответственному за DA-модификацию.

Согласно численным результатам, аттрактор стробоскопического отображения представляет собой объект, локализованный вблизи двумерного тора в шестимерном фазовом пространстве системы.

Динамика фаз системы (3) в некотором приближении описывается модифицированным отображением Фибоначчи, которое получается в результате введения диссипативной добавки, приводящей к возникновению DA-аттрактора. На рис. 3б, представлен график, демонстрирующий поведение фаз системы. Фазы определяются за каждую треть периода модуляции в циклическом порядке и выводятся в координатах $(\varphi_{n-1}, \varphi_n)$. На диаграммах можно наблюдать характерную для DA-аттрактора поперечную канторову структуру.

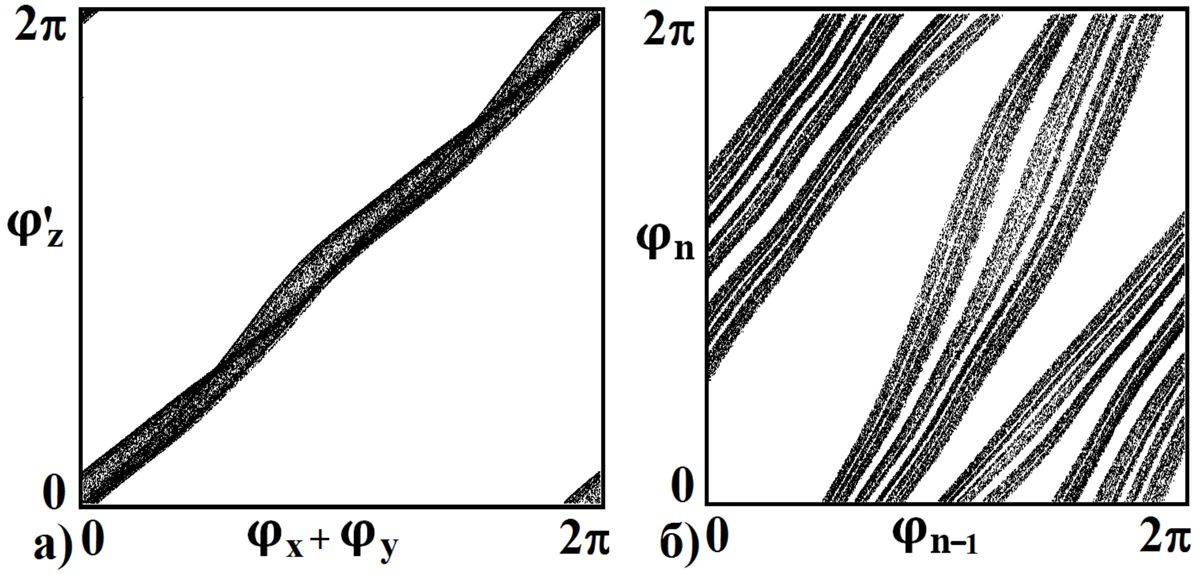

Рис.3. График, иллюстрирующий соотношение фаз при передаче возбуждения третьему осциллятору от его партнеров для систем (2) (а) и (3) (б).

В третьей главе приводятся схемы электронных устройств на основе связанных осцилляторов ван дер Поля, соответствующих рассмотренным во второй главе системам (2) и (3) с гиперболическим хаосом [1, 6]. Поведение фаз осцилляторов за период модуляции для первой системы соответствует отображению Аносова, демонстрирующему хаотическую динамику, а для второй – отображению Фибоначчи с модификацией, приводящей к возникновению гиперболического DA-аттрактора.

На рис.4. представлены графики, полученные при моделировании таких схем в среде Multisim с последующей обработкой внешней программой. Рис.4а, иллюстрирует динамику фаз системы (2). По вертикальной оси представлена фаза третьего осциллятора, определенная в момент времени $t = nT$. По горизонтальной оси отложена сумма фазы первого осциллятора, определенной за первую треть периода и фазы второго осциллятора, определенной за вторую треть периода. Точки на графике располагаются вдоль диагонали, подтверждая тот факт, что отображение Фибоначчи достаточно хорошо описывает преобразование фаз. На рис.4б представлен график в координатах $(\varphi_{n-1}, \varphi_n)$, демонстрирующий поведение фаз для системы (3). На диаграммах можно наблюдать структуру на качественном уровне похожую на гиперболический DA - аттрактор.

В четвертой главе рассматривается автономная система, построенная на основе модификации логистического дифференциального уравнения с запаздыванием и генерирующая последовательные цуги колебаний с фазой, трансформирующейся в соответствии с хаотическим отображением того или иного вида [5]. Система содержит две петли обратной связи, характеризующиеся двумя, вообще говоря, разными временами задержки. Уравнения, описывающие динамику системы, имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega_0 y + \tfrac{1}{2}\mu(1 - x^2(t-\tau_1) - y^2(t-\tau_1))x + \varepsilon[x(t-\tau_1)x(t-\tau_2) - y(t-\tau_1)y(t-\tau_2)],\\ \dot{y} &= \omega_0 x + \tfrac{1}{2}\mu(1 - x^2(t-\tau_1) - y^2(t-\tau_1))y + \varepsilon[x(t-\tau_1)y(t-\tau_2) + x(t-\tau_2)y(t-\tau_1)],\end{aligned} \quad (3)$$

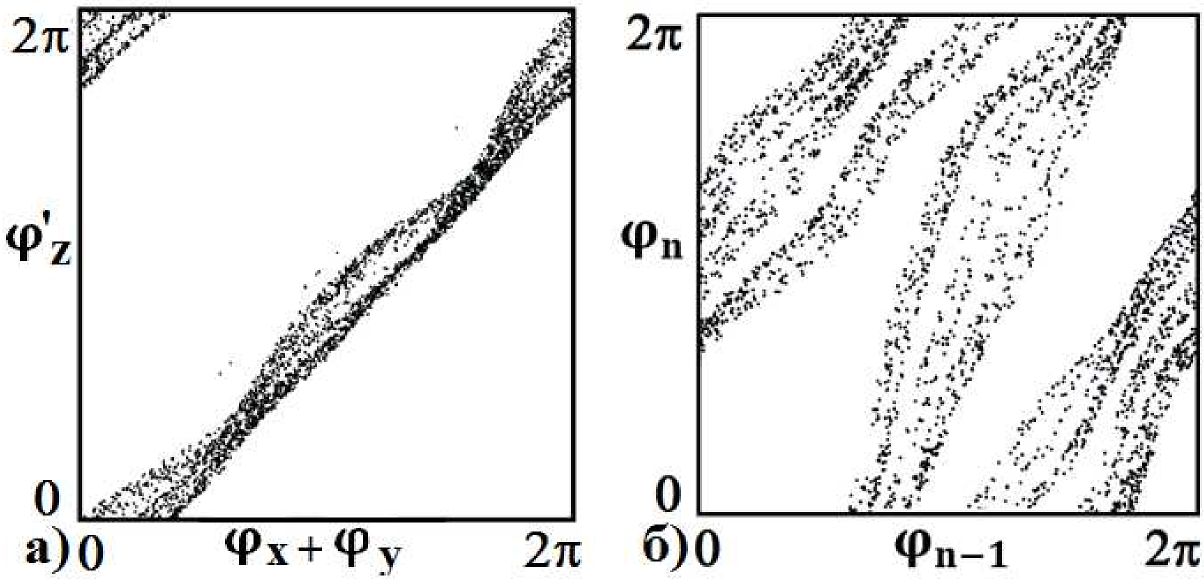

Рис.4. График для отображения фазы, полученный на основе результатов моделирования в программной среде Multisim.

При выбранных соответствующим образом временах задержки динамика фаз соответствует отображению Фибоначчи на торе, что подтверждает диаграмма на рис.5а. Таким образом, на аттракторе осуществляется динамика типа Аносова.

В случае равенства $\tau_2 = \tau_1 = \tau$, хаотическая динамика определяется аттрактором Смейла - Вильямса, который соответствует двукратно растягивающему отображению окружности для фазы несущего сигнала цугов колебаний. На рис.5б показан график, иллюстрирующий трансформацию фаз системы. Как можно видеть, отображение для фаз топологически эквивалентно отображению Бернулли: один полный обход для прообраза φ_n соответствует двойному обходу для образа φ_{n+1}. В обоих случаях аттракторы проявляется грубость (отсутствие окон регулярности окон при изменении параметров) и, предположительно, относятся к классу структурно устойчивых гиперболических аттракторов.

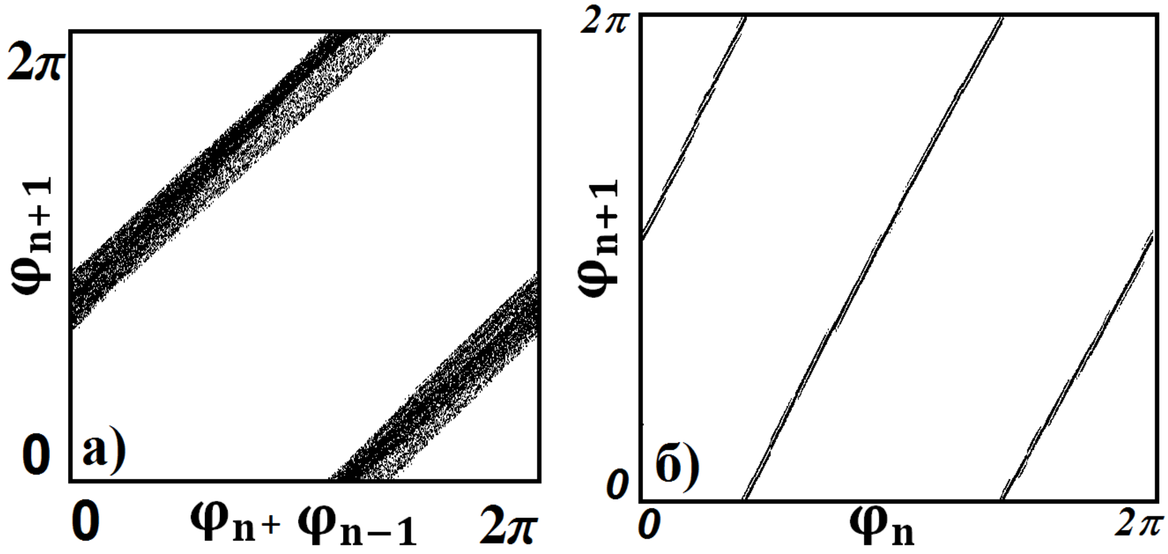

Рис.5. Диаграмма, иллюстрирующая трансформацию фаз на последовательных стадиях активности.

В заключении сформулированы выводы и приведены основные результаты, полученные в диссертационной работе.

Основные результаты и выводы

1. Предложено и исследовано отображение с гиперболическим DA-аттрактором, полученное в результате введения диссипативной добавки в консервативное отображение с хаотической гиперболической динамикой «кот Арнольда».

2. Указаны примеры неавтономных систем, построенных на основе связанных осцилляторов ван дер Поля с попеременной передачей возбуждения, динамика которых в отображении Пуанкаре описывается отображениями с гиперболическим хаосом.

3. Предложены схемы электронных устройств с динамикой фаз, описываемой гиперболическими хаотическими отображениями.

4. Рассмотрена модель, представляющая собой автономную систему, на основе логистического уравнения с запаздыванием, содержащая две петли обратной связи с разными временами задержки. Динамика такой системы в отображении Пуанкаре определяется отображениями с гиперболическим хаосом (отображение Фибоначчи или отображение Бернулли), в зависимости от выбора времени задержки.

Публикации по теме диссертации

[1] Д.С. Аржанухина. Схемы электронных устройств с гиперболическим хаосом на основе связанных осцилляторов Ван дер Поля. Вестник СГТУ, 2013, № 3 (72), 20-30.

[2] Д.С. Аржанухина, С.П. Кузнецов. Система трех неавтономных осцилляторов с гиперболическим хаосом. Часть II. Модель с DA-аттрактором. Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика, 21, 2013, №2, 163-172.

[3] Д.С. Аржанухина, С.П. Кузнецов. Система трех неавтономных осцилляторов с гиперболическим хаосом. Часть I. Модель с динамикой на аттракторе, описываемой отображением на торе "кот Арнольда". Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика, 20, 2012, №6, 56-66.

[4] Д.С. Аржанухина. О сценариях разрушения гиперболического хаоса в модельных отображениях на торе с диссипативным возмущением. Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика, 20, 2012, №1, 117-123.

[5] D.S. Arzhanukhina, S.P. Kuznetsov. Robust chaos in autonomous time-delay system. Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика, 22, 2014, №2, 37-50.

[6] Д.С. Аржанухина Генератор гиперболического хаоса на основе трех связанных осцилляторов ван дер Поля. Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: тезисы докладов VIII Всероссийской конференции молодых ученых. Саратов: изд-во СГУ, – 2013, с. 24-25.

[7] Д.С. Аржанухина Система трех неавтономных осцилляторов с динамикой фаз, соответствующей гиперболическому отображению на торе. Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: тезисы докладов VII Всероссийской конференции молодых ученых. Саратов: изд-во СГУ, – 2012, с. 13-14.

[8] Д.С. Аржанухина, М.В. Поздняков Сложная динамика и разрушение гиперболического хаоса в отображении «кот Арнольда» с диссипативным возмущением. Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика. Тезисы докладов VI Всероссийской конференции молодых учёных. 13 – 15 сентября 2011 г. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2011. С. 88 – 89.

[9] Д.С. Аржанухина, М.В. Поздняков Разрушение грубого хаоса в модельных системах, построенных на основе отображения «кот Арнольда». В сб.: Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2010:

Материалы научной школы-конференции. Саратов, 6 октября, 24, 26 ноября 2010 г. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2011, с.57-60.

[10] Д.С. Аржанухина, М.В. Поздняков Исследование аттракторов в отображении «кот Арнольда» при введении диссипативных добавок. Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: Тезисы докладов V Всероссийской конференции молодых учёных. Саратов, 6 – 8 сентября 2010 г. Саратов: Изд-во Сарат. университета, 2010. С. 81 – 82.

[11] Аржанухина Д.С., Поздняков М.В. Динамика диссипативных модификаций отображения «кот Арнольда». В сб.: Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2009: Материалы научной школы-конференции. Саратов, 16 – 18 ноября 2009 г. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2010. С. 61 –64.