

## ОТЗЫВ

официального оппонента  
Сычева Вячеслава Петровича  
на диссертационную работу  
**Сафрончик Марии Ильиничны**

**на тему «Математическое моделирование нестационарного течения  
«запаздывающих» вязкопластических сред бингамовского типа с учетом  
эффекта «пристенного скольжения» на базе реологической модели  
Слибара-Паслая»**

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по  
специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

Вязкопластические материалы относятся к неньютоновским средам, которые проявляют свойства жидкости по достижении определенного внутреннего касательного напряжения, называемого пределом текучести, ниже которого материал испытывает лишь упругие деформации и ведет себя как твердое тело. Они используются в различных отраслях химической, нефтяной, пищевой промышленности, медицине и т.д., а математическое моделирование неустановившихся течений таких сред имеет большое прикладное значение для оптимизации различных технологических процессов. При течении вязкопластических сред образуются два типа зон: зона течения, где среда проявляет свойства вязкой жидкости и зона, где среда ведет себя как твердое тело. Эти задачи относят к многофазным задачам типа Стефана, и именно поведение границ раздела фаз представляет большой интерес в прикладных задачах. Необходимо учитывать, что для некоторых вязкопластических материалов разрушение структуры происходит при одном пределе текучести, а восстановление при другом, значительно меньшем, и для оптимизации ряда технологических процессов требуется развитие подобных математических моделей типа модели Слибара – Паслая. Также следует учесть возможность резкого изменения сопротивления при определенных скоростях движения и скольжения жидкости вдоль твердых стенок, что в представленной работе выполнено на основе гипотезы Н.П. Петрова. Представляет интерес развитие методов решения краевых задач в областях с неизвестными, изменяющимися во времени границами раздела зон течения.

Следовательно, тема диссертационной работы *является актуальной и соответствует* специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Автором предложена математическая модель неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред на основе модели Слибара –

Паслая, отличающаяся от известных аналогов учетом возможного «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки. Предложен метод численного моделирования для решения задач неустановившегося течения вязкопластических сред, на основе отображения области с подвижной границей на неподвижную область, применения дискретизации по независимой пространственной переменной на основе проекционного метода Галеркина и дальнейшего численного интегрирования по времени задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод позволяет определить положение границы раздела фаз течения и его применимость на всех этапах компьютерного моделирования (развитие течения, переходные этапы, восстановление структуры). По результатам сравнения с найденными точными автомодельными решениями показана высокая точность метода. Для корректной постановки задачи развития течения из состояния покоя, когда возникающая область течения характеризуется бесконечно малой протяженностью в начальный момент, предложено использовать методы асимптотического интегрирования в малой окрестности особой точки. Разработан и реализован программный комплекс моделирования неустановившихся течений вязкопластических сред с подвижными границами раздела фаз. Для задач с гистерезисом деформации и возможным «проскальзыванием» среды вдоль твердой стенки на основе численного моделирования исследовано движение границы раздела фаз. Исследовано влияние «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки на параметры течения на основе разработанного комплекса программ. В этом заключается **научная новизна** представленной работы.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается корректной математической постановкой задач, адекватно описывающей рассматриваемые физические процессы, применением апробированных методов качественного и численного анализа математических моделей и подтверждается расчетами на основе численного моделирования, а также согласованием полученных результатов с данными экспериментальных и численных исследований других авторов.

**Теоретическая значимость** состоит в том, что развита теория, проведена постановка задач, разработаны математические модели и методы численного моделирования в задачах нестационарных многофазных течений вязкопластических сред с подвижными границами. Проведенная разработка является основой для дальнейшего развития методов численного анализа и компьютерного моделирования для начально-краевых задач типа Стефана с подвижной границей, в том числе и для сред с более сложными свойствами. Автором получено свидетельство о государственной регистрации разработанного программного комплекса, что подтверждает **практическую значимость** предложенных методов и возможность их использования при

проектировании и математическом моделировании технологических процессов в различных производствах, таких как добыча нефти и торфа, изготовление цемента, пластмасс, стекла, различных пищевых продуктов, прокат металлов и т.д.

Основное содержание работы изложено в 13 публикациях в рецензируемых изданиях, из них 3 в изданиях, рекомендованных ВАК РФ (две категория К2 и одна категория К1).

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографического списка и приложения. Она написана ясным и технически грамотным языком, и отличается последовательностью, логичностью и содержательностью изложения материала.

В первой главе приводится обзор различных реологических моделей вязкопластических сред и обосновывается выбор модели Слибара – Паслая в качестве основы для построения математической модели неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред с учетом гистерезиса деформации при нагружении и разгрузке. Рассматривается эффект возможного «проскальзывания» вдоль твердой стенки и для его учета в модели предлагается использовать подход, аналогичный гипотезе Н.П. Петрова для вязкой жидкости. Приводятся сведения о программной реализации проблемно-ориентированного комплекса для моделирования неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред с подвижными границами раздела фаз.

Во второй главе поставлена и решена задача о моделировании неустановившегося «запаздывающего» течения вязкопластической жидкости по наклонной плоскости с учетом эффекта пристенного скольжения. Предложен метод численного интегрирования задачи типа Стефана с подвижной границей на основе отображения на область с неподвижной границей, дискретизации по независимой пространственной переменной на основе проекционного метода Галеркина и дальнейшего численного интегрирования по времени задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для корректной постановки задачи развития течения применялся метод асимптотического интегрирования в малой окрестности особой точки. Подробно представлены результаты компьютерного моделирования всех возможных этапов течения.

В третьей главе поставлена и решена задача о моделировании неустановившегося «запаздывающего» течения вязкопластической жидкости в неподвижной трубе круглого сечения под действием перепада давления с учетом эффекта пристенного скольжения. Для ее решения применялись методы, предложенные во второй главе. Рассмотрены все возможные этапы течения, приведены результаты компьютерного моделирования.



В четвертой главе получен ряд автомодельных решений для задач неустановившегося «запаздывающего» течения вязкопластической жидкости по наклонной плоскости и в неподвижной трубе круглого сечения. Для проверки корректности численных алгоритмов автомодельные решения для этапа разгона среды модифицировались так, чтобы учесть влияние распределенных по объему внешних сил в плоскопараллельном случае и градиента давления – в осесимметричном. По результатам тестирования показана высокая эффективность предложенных алгоритмов численного моделирования.

По диссертационной работе можно сделать следующие *замечания*:

1. Строго говоря, формула (2.24) на стр. 38 справедлива при  $z=1$ .
2. При фиксированном значении времени выражение (3.38) на стр. 70 представляет собой полином второй степени относительно преобразованной пространственной координаты, что дает возможность представить в аналитической форме начальные условия для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.43), (3.44), (3.48).
3. Следовало бы пояснить, что в формуле (4.98) на стр. 113 используются цилиндрические функции Бесселя мнимого аргумента, а в формуле (4.99) – цилиндрические функции Макдональда.

Вместе с тем, замечания не влияют на высокий научный уровень диссертации, и касаются оформления работы либо направления дальнейших исследований.

**Заключение.** Диссертация Сафрончик М.И. является научно-квалификационной работой, в которой содержится решение научной задачи, включающей построение математических моделей и компьютерное моделирование неустановившихся течений вязкопластических жидкостей, а также развитие методов численного анализа для начально-краевых задач типа Стефана с подвижной границей, и имеющей существенное значение для математического моделирования многофазных течений вязкопластических сред. Диссертация выполнена самостоятельно на высоком научном уровне и является законченной научно-квалификационной работой. Полученные автором результаты достоверны, выводы и заключения обоснованы. Автореферат и опубликованные работы соответствует основному содержанию диссертации.

Диссертационная работа Сафрончик Марии Ильиничны на тему «Математическое моделирование нестационарного течения «запаздывающих» вязкопластических сред бингамовского типа с учетом эффекта «пристенного скольжения» на базе реологической модели Слибара-Паслая» соответствует паспорту специальности 1.2.2 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ и отвечает требованиям п.п. 9-11, 13, 14 «Положения о присуждении ученых степеней»,

