

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по науке  
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого  
Президента России Б. Н. Ельцина»  
д. физ.-мат. н., доцент А. В. Германенко

«15» июля 2023 г.

### ОТЗЫВ

ведущей организации, ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,  
на диссертационную работу СПЕРАНСКОГО Константина Сергеевича  
«ФРЕЙМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ЯДРОМ СЕГЕ»,  
представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация в основном посвящена вопросу существования в гильбертовом пространстве Харди систем представления специального вида — порождённых ядром Коши–Сегё. Пространства Харди являются классическим объектом изучения в комплексном и функциональном анализе. Классическим и важным вопросом теории функций является представимость функций заданного функционального пространства рядом по заданной системе функций.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 90 наименований и имеет объём 107 страниц.

Первая глава занимает основное место в диссертации. Она посвящена исследованию вопроса существования системы представления в гильбертовом пространстве Харди  $H^2(D)$  аналитических в единичном круге  $D$  функций, порождённых ядром Коши–Сегё. Точнее, существованию последовательности  $z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , точек единичного круга  $D$ , таких, что система функций  $K_{z_n}(z) = 1/(1 - \bar{z}_n z)$ ,  $z \in D$ , является системой представления в пространстве  $H^2(D)$ . Вопрос о существовании такой системы был поставлен в статье E. Fricain, L. Khoi, P. Lefèvre, Representing systems generated by reproducing kernels // Indagationes Mathematicae (2018), и являлся актуальным в связи с полученными ранее результатами о несуществовании в пространстве Харди фреймов (фреймов Дафина–Шаффера), порождённых ядром Коши–Сегё, с одной стороны, и результатом о методе восстановления функции пространства Харди  $H^p$  по её значениям в точка круга (V. Totik, 1984), с другой. В диссертации рассматриваемый вопрос решен положительно, а именно в теореме 1.8.1 показано, что для последовательности точек  $z_{j,n} = (1 - 1/n)e^{2\pi j i/n}$ ,  $j = \overline{0, n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , система функций  $K_{z_{j,n}}$  является системой представления в пространстве  $H^2(D)$ . Доказательство основано на теореме представления П. А. Терёхина (2003), приведённой в диссертации как теорема 1.7.3, и введённого им понятия банахового фрейма относительно модельного пространства. А именно, показано, что система функций  $K_{z_{j,n}}$  является фреймом пространства  $H^2(D)$  относительно модельного пространства  $l^1(l_n^2)$ , откуда по теореме 1.7.3 и следует, что она является системой представления. Кроме доказательства фреймовых неравенств здесь важным и тонким вопросом являлся правильный выбор модельного пространства, что автору диссертации удалось сделать.

Во второй главе обобщается основной результат первой главы. В теореме 2.3.1 доказано достаточное условие на последовательности  $r_k$  и  $n_k$  для того, чтобы последовательность точек единичного круга  $z_{j,k} = r_k e^{2\pi j i/n_k}$ ,  $j = \overline{0, n_k - 1}$  являлась последовательностью точек дискретизации ядра Коши–Сегё, образующей систему представления в пространстве Харди  $H^2(D)$ .

В третьей главе диссертации результаты предыдущих глав перенесены на случай функции многих переменных. Изучается вопрос о системах представления, порождённых ядром Коши–Сегё поликруга, для пространства Харди  $H^2(D^d)$  на поликруге  $D^d$ . Основной теоремой третьей главы является теорема 3.1.3. Дополнительно (следствие 3.1.5) исследован вопрос вида зависимости от размерности  $d$  числа обусловленности фрейма пространства  $H^2(D^d)$  относительно соответствующего модельного пространства.

В последней главе изучен вопрос сходимости порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма, введённого А. В. Сильниченко (2008) для подпространств, порождённых дискретизацией ядра Коши–Сегё, пространства Харди  $H^2(D)$ . Получено условие (теорема 4.3.1) на последовательность точек единичного круга, порождающих дискретизацию ядра Коши–Сегё, сходимости порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма для соответствующих подпространств пространства Харди  $H^2(D)$ .

Отметим лишь мелкие замечания к тексту диссертации.

1) Диссертация имеет большой объём, нехарактерный для кандидатских диссертаций по специальности 1.1.1. Текст диссертации можно было бы сократить. Например, основному результату первой главы посвящён параграф 1.8. Предыдущие семь параграфов, посвящённые предварительным сведениям, можно было уменьшить, в частности — не приводить доказательство теоремы 1.7.3.

2) В диссертации при обсуждении предварительных сведений из комплексного и функционального анализа автор ссылается на англоязычные монографии [29], [30], [34], [56]. Более естественным было бы использование более доступных монографий на русском языке. Круг на комплексной плоскости автор почему-то называет диском.

3) Во второй главе диссертации используется отличное от иных частей обозначение нормированного ядра Коши–Сегё.

Замечания носят стилистический характер и не влияют на высокую оценку научного содержания диссертации.

Диссертационная работа К. С. Сперанского хорошо оформлена, математические утверждения имеют полные доказательства.

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации, её актуальность и научную ценность.

Диссертация представляет собой научно-квалификационную работу по законченным научным исследованиям, в которой содержится решение научной задачи, имеющей значение для развития теории функций.

Полученные результаты могут быть использованы специалистами в теории функций научных учреждений и университетов, включая Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Башкирский государственный университет, Институт математики с вычислительным центром Уфимского ФИЦ, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского, Уральский федеральный университет.

**Заключение.** Диссертация СПЕРАНСКОГО Константина Сергеевича «Фреймы в пространстве Харди, порожденные ядром Сеге» отвечает всем требованиям пп. 9–11, 13, 14 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 года, соответствует специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ, а её автор Сперанский К.С. заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв составлен профессором кафедры математического анализа Института естественных наук и математики УрФУ, доктором физико-математических наук Акоюном Романом Размиковичем.

Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры математического анализа Института естественных наук и математики УрФУ, протокол № 6 от 5 июля 2023 г.

Заведующий кафедрой математического анализа  
Института естественных наук и математики  
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»  
к. физ.-мат. н., доцент

П. Ю. Глазырина

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента  
России Б. Н. Ельцина»  
Адрес: 620002, Свердловская область, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19.  
Телефон: (343)375-45-07, 375-46-09; e-mail: rector@urfu.ru