Отзыв
официального оппонента

на диссертационную работу Чумаченко Сергея Алексеевича
“Аффинные системы, порожденные сплайнами”,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
1.1.1. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Основным объектом диссертационного исследования является система функций, порожденная сжатиями и сдвигами N раз проинтегрированной на отрезке $[0, 1]$ функции Уолша с номером $2^n - 1$ и продолженной нулем вне отрезка $[0, 1]$. Функция, порождающая эту систему, имеет гладкость $(N - 1)$-го порядка и составлена из многочленов N-й степени со стыками в двоично-рациональных точках, вследствие чего диссертант называет эту функцию “двоичным базисным сплайном”. Особое внимание уделяется случаям $N = n$ и $N = n - 1$. В первом случае систему сжатий и сдвигов, порожденную двоичным базисным сплайном, диссертант называет “гладкой системой Фабера—Шаудера”, во втором случае — “гладкой системой Хаара”.

Актуальность тематики диссертации обусловлена широким применением систем сжатий и сдвигов в теории функций, а также в прикладных областях математики, в частности, в задачах цифровой обработки информации.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Во введении дан обзор результатов, связанных с тематикой диссертации, и изложено краткое содержание диссертации по главам.

В первой главе диссертации изучаются аппроксимационные свойства гладкой системы Фабера—Шаудера. Основными результатами этой главы являются теорема 1.1 о базисности некоторой подсистемы сдвигов двоичного базисного сплайна в пространстве кусочно-многочленных функций на полупрямой и теорема 1.2 о базисности гладкой системы Фабера—Шаудера в пространстве $C[0, 1]$.

Стоит отметить, что результаты первой главы представляют собой наиболее трудную с технической точки зрения часть диссертации. Полагаю, что этот факт лежит в основе того, что именно в первой главе содержится бóльшая часть опечаток и неточностей работы.

1. На стр. 4 и 22 в описании сплайнов Шенберга в формуле для $M_k(x)$ в знаменателе пропущен факториал. В то же время приведенный ниже частный случай при $k = 4$ записан правильно.

2. На стр. 6 при описании оценки В.А. Матвеева из работы [16] перекочевала опечатка: в правой части должен быть модуль непрерывности 2-го порядка, а не $\varphi_2(1/n, F)$. Здесь же для удобства читателя стоило написать, что χ_i — это система Хаара, описание которой появляется значительно позже (во второй главе).

3. При описании результатов Т.У. Аубакирова и Н.А. Бокаева для модуля непрерывности 2-го порядка используется обозначение ω_2, в то время как всюду далее применяется обозначение ω^2. Там же в определении системы $\varphi_{n,r}^{(s)}$ стоило указать, в каких пределах изменяется r. Вместо $m_{n+1}(x)$ должно быть $m_n x$.

4. На стр. 6 неясен смысл предложения "Сначала о системе Фабера—Шаудера."

5. При описании результатов Т.Н. Сабуровой и П.Л. Ульянова речь, по-видимому, должна идти о коэффициентах по системе Фабера—Шаудера функций, удовлетворяющих условию Липшица.

6. На стр. 15 и 40 второй раз появляется определение модуля непрерывности и, в отличие от первого его появления на стр. 6, содержит две опечатки: sup должен браться не только по h, но и по x; вместо скобок должен стоять модуль.

7. В формулах сплайнов Дженкинса на стр. 22 опечатка: вместо $x \leqslant 3$ должно быть $x \leqslant -3$. Также следовало упомянуть о четности $L(x)$ внутри самого определения.

8. Стр. 24 фактически копирует стр. 5 введения. Вместо этого стоило несколько подробнее рассказать о сплайнах Стрёмберга, определить формулы $N_m(x)$. Это позволило бы читателю лучше понять преимущество двоичных базисных сплайнов в сравнении со сплайнами Стрёмберга.

9. На стр. 25 в формуле (1.4) опечатка. Номер функции Уолша должен быть $2^n - 1$, а произведение должно быть до n. И, наверно, стоило пояснить, что это не все функции Уолша, а некоторая, специальным образом выбранная подпоследовательность.

10. Введение обозначения $1_{2^n-1}(x)$ на стр. 25 и дальнейшее его обсуждение излишни, т.к. фактически речь идет о функции Уолша w_{2^n-1}, о чем диссертант упоминает.

11. В определении 1.4 на стр. 13 и стр. 25 стоило добавить $\psi_{n,N}(x) = 0$, $x \notin [0, 1]$.

12. Фраза в начале доказательства леммы 1.2 неудачна. Случай $N = 0$ не нужно доказывать аналогично лемме 1.1, т.к. этот случай и есть лемма 1.1.

13. В доказательстве леммы 1.3 следовало указать, что $k = n - N$.

14. На стр. 30 в формуле (1.5) опечатка. В правой части равенства перед x должен быть знак плюс, а не минус.

15. В многострочной формуле на стр. 31 несколько опечаток. В первой строке перед x оба раза должен быть знак плюс. Во второй строке пределы интегрирования во втором интеграле должны быть от $(\nu + 1/2)/2^{n-N}$ до $(\nu + 1/2)/2^{n-N} + x$ и перед интегралом должен быть знак плюс. В третьей строке пределы интегрирования должны быть от $\nu/2^{n-N}$ до $\nu/2^{n-N} + x$. В следующей формуле пропущен модуль.

16. В доказательстве леммы 1.6 допущены опечатки. В пункте 1 нижний предел интеграла должен быть $2k/2^n$. Далее стоило написать не "в этих точках",

а в точках $(2k+1)/2^n$. В пункте 2 вместо индекса i в верхнем пределе должно быть N.

Отдельно коснусь неточностей в формулировках и доказательствах главных результатов первой главы.

17. Лемма 1.5 — достаточно интересное и представляющее самостоятельную значимость утверждение, состоящее в том, что сумма в левой части (1.6) не зависит от x. В то же время постоянная в правой части (1.6) вычислена неверно, т.к. ее значение основано на неверном соотношении (1.9), не учитывающем финитность функций $\psi_{n,n}$.

18. Первая часть доказательства теоремы 1.1 содержит ряд неточностей. Система в начале стр. 36 неверна, т.к. в левой части должно быть не два слагаемых, а четыре, а в правой части должна стоять другая постоянная (см. замечание к лемме 1.5). То же самое относится и ко второй системе на стр. 36 с той лишь поправкой, что слагаемых в левой части должно быть 2^{k+1}. При этом главное утверждение о количестве линейно независимых функций среди отрицательных сдвигов остается верным, однако коэффициенты, выражающие линейную зависимость, будут иными.

19. На мой взгляд, для доказательства теоремы 1.1 вполне достаточно рассуждений, приведенных на стр. 37 и в начале стр. 38, которые в определенной степени снимают вопросы, обозначенные выше (пункты 17 и 18). Система, полученная на стр. 37, диагональна, имеет максимальный ранг и, тем самым, коэффициенты в (1.13) вычисляются единственным образом. При этом равенства (1.14) неверны хотя бы потому, что $F_{n,n}^{(n-1)}(1) \neq Q(n,n)/Q(1,1)$.

20. Теорема 1.2, по-видимому, верна в том смысле, что частные суммы ряда по гладкой системе Фабера—Шаудера равномерно приближают функцию. В то же время при исправлении неточностей в доказательстве постоянные в оценке точности приближения, очевидно, должны измениться. Основное проблемное место доказательства состоит в том, что в процессе его изучения остается неясным, верна ли оценка (1.24). В доказательстве этой оценки используется равенство

$$2S_{m-1}\left(\frac{j+1}{2^{m+t}}\right)-\left(S_{m-1}\left(\frac{j+2}{2^{m+t}}\right)+S_{m-1}\left(\frac{j}{2^{m+t}}\right)\right)=R_{m-1}\left(\frac{j\operatorname{div}2^{\mathrm{t}+1}}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^m}\right)$$
$$\times\left(2\phi_{m-1,j\operatorname{div}2^{\mathrm{t}+1}}\left(\frac{j+1}{2^{m+t}}\right)-\left(\phi_{m-1,j\operatorname{div}2^{\mathrm{t}+1}}\left(\frac{j+2}{2^{m+t}}\right)+\phi_{m-1,j\operatorname{div}2^{\mathrm{t}+1}}\left(\frac{j}{2^{m+t}}\right)\right)\right),$$

которое не выполняется, например, в случае $j+1$ кратно 2^{t+1}. На конкретные значения постоянных в теореме 1.2 также могут повлиять ошибки в вычислении суммы прогрессии в третьей строке формулы (1.40) и неверная оценка среднего слагаемого во второй строке формулы (1.41).

Во второй главе изучается гладкий аналог системы Хаара. Хорошо известно, что классическая система Хаара порождается сжатиями и сдвигами одной функции, что очень удобно в приложениях, и является ортогональным базисом в $L_2[0,1]$. В то же время все функции системы Хаара разрывны, что сказывается на задачах приближения непрерывных, а тем более гладких функций. Диссертант предлагает вместо разрывной функции, порождающей систему Хаара, взять двоичный базисный сплайн — гладкую кусочно-многочленную функцию. В этом случае система, порождаемая сжатиями и сдвигами этой функции (гладкая система Хаара), конечно, не будет ортогональной. Тем не менее, как показано диссертантом, гладкая система Хаара является почти ортогональной в $L_2[0,1]$. А именно, она является базисом Рисса, причем границы Рисса — постоянные, не зависящие от порядка гладкости двоичного базисного сплайна. Этот результат (теорема 2.1) доказан в параграфе 2.2 с помощью аппарата хаоса Радемахера. В параграфе 2.3 приводится алгоритм построения двоичного базисного сплайна на компьютере. В параграфе 2.4 приведены разнообразные примеры, демонстрирующие различия в особенностях аппроксимации системой Фабера—Шаудера в сравнении с ее гладким аналогом.

Вторая глава, на мой взгляд, лучшая в диссертации. Она написана простым понятным языком. Теорема 2.1 полностью доказана, ее доказательство хорошо структурировано. Имеется лишь 3 мелких замечания.

1. Неясно, зачем для оператора интегрирования, обозначавшегося в первой главе через $I(t)$, вводится новое обозначение $V(t)$.

2. На стр. 57 вместо ссылки на формулу (2.3) должна быть ссылка на формулировку леммы.

3. В последней формуле на стр. 62 должно быть $f_{n,1}$ вместо $f_{m,1}$.

В третьей главе строится кратномасштабный анализ как для гладкой системы Фабера—Шаудера, так и для гладкой системы Хаара. В параграфе 3.1 доказано, что двоичные базисные сплайны, порождающие гладкие аналоги систем Фабера—Шаудера и Хаара, удовлетворяют масштабирующим уравнениям. В параграфе 3.2 установлено, что совокупность замкнутых подпространств, порожденных сжатиями и сдвигами двоичных базисных сплайнов, образует кратномасштабный анализ. В параграфе 3.3 получена оценка на скорость аппроксимации функций из класса Соболева W_2^1 квазиинтерполяционным оператором, порожденным сдвигами сжатого двоичного базисного сплайна, являющихся гладкими аналогами функций Фабера—Шаудера.

По третьей главе имеются следующие замечания.

1. Во введении на стр. 17 вместо "В разделе 3.2..." следовало написать "В разделах 3.2 и 3.3...".

2. На стр. 18 и 85 дается определение символа $O(x^t)$ при $x \to 0$. В этом определении допущена опечатка: $\lim\limits_{x\to 0}$ следовало заменить на $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}$.

3. Доказательство теоремы 3.4 верное, но несколько громоздкое и, как следствие, содержит ряд опечаток и неточностей. Представляется излишним сведе-

ние ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi(w+k)} \right)^{2n+2}$$

к многочлену по степеням $\operatorname{ctg} \pi w$ с рекуррентно определяемой последовательностью коэффициентов. Достаточно заметить, что упомянутый ряд сходится равномерно в окрестности точки $w = 0$ и, следовательно, имеет место порядковое соотношение

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi(w+k)} \right)^{2n+2} = \left(\frac{1}{\pi w} \right)^{2n+2} + O(1), \quad w \to 0.$$

Тем самым, проверка порядкового соотношения 2) леммы 3.4 напрямую вытекает из приведенной асимптотики, причем $[\widehat{\varphi}_n, \widehat{\varphi}_n] - |\widehat{\varphi}|^2 = O(w^{2n+2})$, что сильнее полученного на стр. 90. Как следствие отпадает надобность в лемме 3.5, значительно упрощается формулировка и доказательство леммы 3.6, а также можно опустить бо́льшую часть стр. 88, 90 и всю стр. 89.

Можно констатировать, что в диссертации получены результаты, которые будут интересны специалистам в теории приближений и прикладных областях математики. Результаты являются новыми, опубликованы в трех статьях в рецензируемых журналах и представлены в тезисах нескольких международных конференций. Текст диссертации содержит многочисленные неточности, опечатки и пробелы в доказательствах результатов первой главы. Тем не менее, актуальность тематики и сложность полученных результатов, особенно во второй главе, нивелируют указанные недостатки.

На основании вышесказанного считаю, что рассматриваемая диссертация удовлетворяет требованиям пп. 9–11, 13, 14 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 года, а ее автор, Чумаченко Сергей Алексеевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук по специальности 1.1.1. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, г. Москва

Солодов Алексей Петрович

4 августа 2023 г.

Почтовый адрес: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1
Электронная почта: apsolodov@mail.ru
Телефон: +7(495)9391801

Подпись Солодова А.П. заверяю
Вед. спец-т о/к Мороз /Морозова Т.Н.