Отзыв официального оппонента

на диссертацию Сергея Алексеевича Чумаченко

“Аффинные системы, порожденные сплайнами”

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (специальность 1.1.1 - вещественный, комплексный и функциональный анализ)

Диссертация С.А.Чумаченко относится к области вещественного и гармонического анализа. В работе изучается система сжатий и сдвигов (по-другому, система всплесков) сплайна специального вида. Тематика диссертации крайне актуальна и востребована. Работы, положившие начало систематической теории всплесков, возникли в конце 1980-х годов фактически одновременно в прикладных и фундаментальных исследованиях. В настоящее время всплески используются во всех системах компьютерной математики, они нашли многочисленные применения в задачах сжатия и передачи информации, численных методах решения уравнений с частными производными, теории машинного обучения и во многих других областях.

В представленной диссертации построено семейство сплайнов с компактным носителем, минимального дефекта, заданных на равномерной сетке. Функции получаются в результате нескольких последовательных интегрирований функции Уолша. Построенные функции названы двоичными базисными сплайнами. Работа посвящена изучению базисных и аппроксимационных свойств данного семейства.

Отметим прежде всего два глубоких результата. В первой главе установлена базисность системы сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна в пространстве непрерывных функций, заданных на отрезке и обнуляющихся на его концах. Доказательство проводится конструктивно, при этом получается оценка приближения в терминах модулей непрерывности. Во второй главе доказывается, что производные двоичного базисного сплайна образуют базис Рисса в пространстве $L_2[0,1]$. Найденные границы Рисса не зависят от порядка сплайна. Доказательство так же конструктивно и проводится путем построения обратимого ограниченного оператора, действие которого на ортонормированный базис и приводит к базису Рисса. В третьей главе найдены масштабирующие уравнения для растяжения двоичного базисного сплайна и его производной. Вместе с результатами второй главы это означает, что производная порождает ортогональный кратномасштабный анализ. Из доказательства также следует, что целые сдвиги самой функции не являются системой Рисса, однако доказано, что квазиинтерполяционый оператор, построенный по двоичному базисному сплайну, имеет порядок аппроксимации, равный 1.

К работе имеются следующие замечания.

1. В доказательстве теоремы 1.1 разложение (1.13) проверено напрямую, поэтому нет необходимости специально устанавливать линейную зависимость не входя-

щих в разложение (1.13) функций. Хотя, возможно, эти рассуждения понадобятся для пояснения формулы (1.15).

2. При определении коэффициентов в разложении (1.13) в последнем уравнении системы потерян $(n-1)!$ при a_{n-1}, у последней дроби потерян множитель c_{-1}, также потерян множитель $\frac{1}{2^{n(n-1)}}$ в равенстве $F_{n,n}^{(n-1)}(x) = \left(\psi_{n,n}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{(n-1)} = \frac{1}{2^{n(n-1)}}\psi_{n,n}^{(n-1)}\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

3. Пояснения требует формула (1.15). Ведь необходимо доказать представление кусочно-многочленной функции из класса $P_n(0,\infty)$ в виде линейной комбинации функций системы $F_{n,n}(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Однако в левой части формулы (1.15) мы видим многочлен f, заданный на отрезке $[0,2]$.

4. В формулировке теоремы 1.2 читаем: «Пусть $\phi_{m,j}(x)$ – базис в $C_0[0,1]$.» Хотя на самом деле в этой теореме как раз доказывается, что $\phi_{m,j}(x)$ – базис в этом пространстве.

5. Стр. 42. Необходимо пояснить обозначение $j \operatorname{div} 2^{t+1}$. Оно не является общепринятым. Из контекста следует, что это $\lfloor j/2^{t+1} \rfloor$.

6. Стр. 43. Необходимо пояснить, как применяется (1.23) к (1.26). В (1.26) выражение
$$R_{m-1}\left(\frac{1/2\, j \operatorname{div} 2^{t+1} + 1/4}{2^{m-2}}\right)$$
оценивается с помощью неравенства (1.23)
$$\left|R_{m-1}\left(\frac{j+1/4}{2^{m-2}}\right)\right| \le \frac{1}{2}\tilde{\omega}^2_{R_{m-2},m}$$
верного для целых j, в то время как $1/2\, j \operatorname{div} 2^{t+1}$ полуцелое.

7. Для оператора интегрирования введены разные обозначения: в главе 1 – I (стр. 25), в пункте 2.2 – V (стр. 54), в пункте 2.3 опять возвращаемся к I (стр. 64).

8. Стр.61. Не сказано, что Y – обозначение для тождественного оператора.

9. Стр. 77. Фраза «кратномасштабный анализ образует базис Рисса» не является общепринятой и может ввести в заблуждение. Точнее будет сказать, что целые сдвиги функции, порождающей кратномасштабный анализ, образуют систему Рисса. Далее читаем «в случае $N = n$ кратномасштабный анализ не образует систему Рисса». В работе это не обосновывается, а стоило отметить, что это утверждение верно, начиная с $n = 2$, и оно следует напрямую из существования нулей у скобочного произведения $\left[\widehat{F}, \widehat{F}\right]$.

10. Стр. 83. В теореме 3.3 не лишним было бы отметить, что если пространства V_j уже определены как $\overline{\operatorname{span}\{\varphi(2^j\cdot+k), k\in\mathbb{Z}\}}$, то аксиома MR4 выполняется автоматически.

11. Масштабирующие уравнения, найденные в теоремах 3.1 и 3.2 во временной области, можно получить проще, и для всех производных сразу, перейдя к образам Фурье. Нужное преобразование Фурье $\widehat{F_{n,N}}$ найдено в лемме 3.3. Осталось заметить, что
$$\frac{\widehat{F_{n,N}}(2\omega)}{\widehat{F_{n,N}}(\omega)}=\frac{1}{2^{N+1}}\left(1+e^{-2\pi i\omega}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+e^{-2^k\pi i\omega}\right)$$
тригонометрический полином. Его коэффициенты – это коэффициенты в масштабирующем уравнении.

Работа содержит умеренное количество опечаток, которые перечислять не будем.

Указанные недостатки не являются принципиальными и не снижают научной ценности диссертации. Полученные результаты являются новыми, важными и интересными. Они могут быть применены в теории приближений, теории всплесков, дискретной математике, в задачах сжатия и передачи информации. Они будут интересны специалистам из МГУ им.М.В.Ломоносова, Математического института им.В.А.Стеклова РАН, СПбГУ, Воронежского, Самарского, Саратовского государственных университетов, ИММ УрО РАН. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в научных изданиях. Математические результаты и разработанные методы достаточны для защиты кандидатской диссертации. Диссертационная работа С.А.Чумаченко соответствует всем критериям раздела II Положения о присуждении ученых степеней, установленным для кандидатской диссертации, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук
(специальность 1.1.1 вещественный, комплексный и
функциональный анализ),
профессор кафедры математического анализа СПбГУ
(199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9)
+7 911 709 393 07, elena.a.lebedeva@spbu.ru
Лебедева Елена Александровна

Личную подпись Лебедевой Е.А.
заверяю
Заместитель начальника
Управления кадров О.С. Суворова
11.07.2023