Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи

УДК 517.984

Игнатьев Михаил Юрьевич

Обратные задачи рассеяния для сингулярных дифференциальных операторов

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор В.А. Юрко

Саратов — 2023

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Тема диссертации относится к теории обратных задач спектрального анализа дифференциальных операторов, основное внимание уделено обратным задачам теории рассеяния.

Обратные задачи спектрального анализа заключаются в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Такие задачи часто встречаются в различных областях естествознания и техники. Их исследование имеет богатую историю, насчитывающую более 70 лет. Первой значительной работой в данном направлении традиционно считается работа Г. Борга [74], в которой исследовалась задача восстановления потенциала $q(\cdot)$ оператора Штурма–Лиувилля

$$\ell y = -y'' + q(x)y \tag{1}$$

по заданным спектрам краевых задач, порожденных уравнением $\ell y = \lambda y$ и краевыми условиями $y(0) = y^{(\nu-1)}(\pi) = 0$, $\nu = 1, 2$. Следует упомянуть также ряд работ прикладного характера, где исследовались вопросы, которые (в их математической формулировке) могут быть отнесены к теории обратных спектральных задач [64], [98], [104], [47].

Теории обратных задач для операторов Штурма–Лиувилля посвящено большое число работ, в ходе ее дальнейшего развития был получен ряд глубоких нетривиальных результатов. Не претендуя на полноту обзора данного направления, упомянем работы В.А. Марченко, И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна, Л.Д. Фаддеева, В.А. Садовничего, среди которых особое место занимает революционная работа И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана [6], где было показано, что решение обратной задачи восстановления оператора Штурма–Лиувилля на полуоси по заданной спектральной функции может быть сведено к решению некоторого линейного интегрального уравнения, получившего название *уравнение Гельфанда–Левитана*. В дальнейшем оказалось, что обратные задачи Штурма–Лиувилля в других постановках также сводятся к решению некоторых линейных уравнений — например, *уравнения Марченко в теории рассеяния* [22], [23], [48], [33]. Указанное наблюдение весьма нетривиально в силу нелинейности самих обратных задач. Возможность сведения обратных спектральных задач к решению линейных уравнений играет решающую роль в контексте появившегося в 1967 году [99] *метода обратной задачи рассеяния* интегрирования некоторых нелинейных уравнений математической физики.

К обратным задачам Штурма–Лиувилля близки обратные задачи для одномерного оператора Дирака

$$\ell y = By' + Q(x)y,\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ -q(x) & p(x) \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

и систем дифференциальных уравнений вида:

$$y' = (\rho B + Q(x))y,\ B = diag(i, -i), \tag{2}$$

известных как *система Захарова–Шабата.* Следует отметить важную роль системы (2) в интегрировании нелинейных уравнений методом обратной задачи: если уравнение Кортевега–де Фриза $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ интегрируется при помощи обратной задачи рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля, то для решения таких важных уравнений, как нелинейное уравнение Шредингера $iu_t \pm 2u^2\bar{u} + u_{xx} = 0$, модифицированное уравнение КдФ $u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$ и уравнение синус–Гордон $u_{xt} + \sin u = 0$, используется обратная задача рассеяния для системы (2) [12], [1], [10].

Методы, использовавшиеся при исследовании систем вида (2), во многом аналогичны методам, возникшим при решении обратных задач Штурма – Лиувилля. Так, конструктивные процедуры решения обратных задач для таких систем основаны на аналогичных линейных интегральных уравнениях (уравнениях Гельфанда – Левитана – Марченко).

Существенно более сложными для изучения оказались обратные спектральные задачи для операторов высших ($n > 2$) порядков

$$\ell y = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)} \tag{3}$$

и систем вида

$$y' = (\rho B + Q(x))y,\ B = diag(b_1, \ldots, b_n), \tag{4}$$

в случае, когда $\{b_k\}$ – комплексные числа, не лежащие на одной прямой. Решение таких задач потребовало привлечения принципиально новых идей и методов. В частности, здесь оказывается неэффективным (за исключением некоторых частных случаев [44], [50], [19], [20]) использование так называемых операторов преобразования, играющих центральную роль в методе Гельфанда–Левитана–Марченко. Более эффективным оказался разработанный в 1980-е годы В.А. Юрко *метод спектральных отображений* (см. например,[52, 56], а также монографию [57]), представляющий собой развитие идей контурного интегрирования Коши–Пуанкаре в комплексной плоскости спектрального параметра. Базовая идея указанного подхода, активно применявшегося в теории *прямых задач* спектрального анализа, восходит к классическим работам начала 20 века [70], однако применение соответствующих идей в теории обратных задач весьма нетривиально в силу их нелинейности. Идеи метода контурного интеграла также использовались в работах Р. Билса, Р. Койфмана, П. Дейфта, К. Томея, С. Чжоу [67], [66], [68], [142], [92], посвященных теории рассеяния.

Дальнейшее развитие теории обратных спектральных задач, активно продолжающееся и в настоящее время, связано как с более глубоким изучением и переосмыслением упомянутых выше классических проблем, так и с появлением новых постановок задач, часто связанных с вновь возникающими приложениями.

Среди важнейших направлений развития спектральной теории можно упомянуть исследование операторов (1) и (3) и систем вида (4) в сингулярном случае. Так, например, активно развивается в последние десятилетия теория операторов (1) и (3) с коэффициентами-распределениями. Отметим, что если теория операторов (1) с потенциалами-распределениями из пространств $W_2^{-1}[0,\pi]$ разработана на данный момент достаточно полно (см., например, основополагающую работу [40], а также работы [103], [41], посвященные обратным задачам), то для операторов высших порядков (3) соответствующая теория делает лишь первые шаги. Здесь следует упомянуть сравнительно недавние работы [4], [34]. Отметим, что возникающие здесь вопросы тесно связаны с исследованием систем вида (4) в общем случае, когда требования на матрицу-функцию $Q(\cdot)$ налагаются в терминах принадлежности некоторым классам суммируемости и не предполагают, вообще говоря, ни гладкости, ни даже непрерывности. По ряду причин изучение систем вида (4) в указанном общем случае оказывается существенно более сложной задачей и требует пересмотра и нетривиальных модификаций используемых методов исследования.

К числу наиболее активно развивающихся направлений спектральной теории дифференциальных операторов можно отнести также теорию дифференциальных операторов, прежде всего, операторов Штурма–Лиувилля, на метрических графах (граф, на ребрах которого задано уравнение Штурма–Лиувилля, в современной литературе часто называют *квантовым графом*). Интерес к указанному направлению и, в частности, к соответствующим обратным задачам, обусловлен большим количеством разнообразных приложений (см., например, [35], [93], [116], [125], [120]). Не претендуя на полноту обзора данной теории, упомянем работы [69], [133], [75], [65], где было дано решение обратных задач Штурма–Лиувилля на графе в случае, когда граф представляет собой дерево (т.е., граф без циклов), а также работы [119], [117], [82], где изучались обратные задачи на графах более сложной структуры, и, наконец, работу [134], где дается решение обратной задачи на произвольном компактном графе.

Однако, несмотря на описанные выше значительные достижения, в теории обратных задач спектрального анализа остается ряд важных нерешенных вопросов, требующих развития новых подходов. Изучению ряда таких вопросов посвящена настоящая диссертация.

В первых двух главах работы изучается матричный дифференциальный оператор первого порядка:

$$\ell y = B_0\left(y' - (x^{-1}A + q(x))y\right),\ B_0 = diag(b_1^{-1}, \dots, b_n^{-1}), \tag{5}$$

действующий в пространстве вектор-функций $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$. Матрицы A, B_0 в (5) постоянны, в рамках исследования обратной задачи они считаются известными, $q(\cdot)$ - суммируемая на полуоси $x \in (0, \infty)$ матрица-функция. В работе рассматривается (более сложный) случай $n > 2$, причем комплексные числа $b_1, \dots, b_n$ не лежат на одной прямой.

Заметим, что уравнение $\ell y = \rho y$ со спектральным параметром ρ эквивалентно системе дифференциальных уравнений вида:

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y, \tag{6}$$

где $B = diag(b_1, \dots, b_n)$. Систему (6) можно формально рассматривать как вариант системы вида (4), где

$$Q(x) = x^{-1}A + q(x),$$

однако наличие слагаемого $x^{-1}A$, не суммируемого на $(0,\infty)$ не позволяет применить методы, использовавшиеся ранее при исследовании таких систем.

Операторы вида (5) и тесно связанные с ними *скалярные* операторы

$$\ell y = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2}\left(q_k(x) + \frac{\nu_k}{x^{n-k}}\right) y^{(k)} \tag{7}$$

с регулярной особенностью естественным образом возникают при разделении переменных в уравнениях электродинамики, оптики, квантовой механики, теории упругости и других разделов естествознания и техники при наличии в них вращательной симметрии. Так, к виду (6), $n = 2$, приводится радиальная система Дирака, хорошо известна связь операторов Штурма–Лиувилля с бесселевой особенностью

$$\ell y = -y'' + \left(q(x) + \frac{\nu_0}{x^2}\right) y \tag{8}$$

с классическими задачами квантовой теории рассеяния (см., например, [2], [3]). Операторы вида (7) высокого порядка возникают при исследовании многих задач теории упругости. Так, например, к уравнению вида $\ell y = \lambda y$ 4-го порядка сводится после разделения переменных в цилиндрических координатах уравнение, описывающее свободные колебания шарнирно-опертой осесимметричной круглой пластины.

Операторы вида (7) могут возникать также при исследовании некоторых решений нелинейных интегрируемых уравнений. Так, хорошо известны решения уравнения Буссинеска, имеющие особенность вида

$$u(x,t) \sim \frac{C}{(x - x_0(t))^2}$$

(см., например, [87]). Коэффициенты ассоциированного с уравнением оператора третьего порядка [91] в этих случаях будут иметь в точке $x = x_0$ регулярную особенность.

Операторы вида (7) также естественным образом возникают при исследовании уравнений с точкой поворота. Так, например, к уравнениям с регулярной особенностью преобразованием Лиувилля сводятся уравнения вида

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)} = \lambda r(x) y \tag{9}$$

в случае, когда гладкая весовая функция $r(x)$ при $x \to 0$ стремится к нулю по степенному закону: $r(x) \sim \alpha x^{\gamma}$, $\gamma > 0$. Уравнения вида (9) и связанные с ними обратные спектральные задачи находят многочисленные применения в контексте метода обратной задачи: так, уравнение (9), где $n = 2$ возникает при интегрировании уравнения Камассы–Холма [88], уравнение (9) с $n = 3$ – при интегрировании уравнения Островского–Вахненко [102]. Аналогичные закономерности имеют место и в случае более общих уравнений

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)} = \lambda \sum_{k=0}^{m} r_k(x) y^{(k)} \tag{10}$$

в случае когда коэффициент $r_m(x)$ обращается в нуль в некоторой точке рассматриваемого интервала. Уравнения высшего порядка вида (10) с точками поворота возникают при исследовании задач теории упругости, например, в теории колебаний оболочек [8].

Отметим, кроме того, что к возникновению регулярной особенности может привести преобразование системы вида:

$$y' = \lambda H(x) y. \tag{11}$$

Такие системы возникают в задачах оптики, спектроскопии, акустики, электродинамики, радиоэлектроники, а также представляют самостоятельный интерес. Предположим, что матрица $H(x)$ представима в виде $H(x) = p(x) W(x) B W^{-1}(x)$, где $p(\cdot)$ – знакопостоянная скалярная функция, B – постоянная диагональная матрица, а матрица - функция $W(x)$ такова, что $\det W(x)$ имеет простые нули. Тогда замена $y(x) = W(x) Y(x)$ приводит систему (11) к виду

$$Y' = \lambda p(x) B Y + Q(x) Y,\ Q(x) = -W^{-1}(x) W'(x).$$

Пусть $\det W(0) = 0$, $(\det W)'(0) \neq 0$. Тогда матрица $Q(x)$ представима в виде

$$Q(x) = x^{-1} A + q(x),$$

где A – некоторая постоянная матрица, матрица-функция $q(\cdot)$ суммируема в некоторой окрестности точки $x = 0$.

Операторы с бесселевой особенностью (8), а также тесно связанные с ними системы вида (2) с $Q(x) = x^{-1} A + q(x)$ (где A – некоторая постоянная матрица, а матрица-функция $q(\cdot)$ суммируема) были и остаются предметом активного изучения, начиная с классических работ [123], [46], [48] и до настоящего времени [114], [61], [115], [76], [62], [63], [72]. Однако, исследования, проведенные в указанных работах, существенно опираются на упоминавшуюся выше специфику случая $n = 2$ и перенесение используемых в них методов на случай операторов (7), (5) высокого порядка $n > 2$ сталкивается с рядом трудностей принципиального характера. Операторы вида (7) изучались ранее в работах В.А. Юрко и его учеников. Был получен ряд результатов, относящихся к прямым и обратным задачам для операторов вида (7) в различных постановках, включая задачи на полуоси [131], конечном отрезке [55], [24], а также на геометрических графах [136], [138]. Более того, удалось исследовать также случай (произвольного числа) особенностей внутри интервала [132], [94]. В то же время, несмотря на указанные достижения, использовавшийся подход имеет существенные ограничения, выражающиеся в дополнительных требованиях специального поведения коэффициентов $\{q_k(x)\}$ в окрестности особой точки $x = 0$. Операторы, удовлетворяющие соответствующим требованиям, образуют важный частный подкласс операторов вида (7), обладающий целым рядом интересных свойств. Однако, многие закономерности, присущие операторам этого подкласса, не имеют места в общем случае, поэтому его изучение не дает общей картины.

Подход, развитый для операторов (7), позволяет исследовать и операторы (5), но также лишь при дополнительном условии достаточно быстрого убывания матрицы-функции $q(x)$ при $x \to 0$. Отметим, что условия такого типа, вообще говоря, не выполняются в упомянутых выше приложениях.

В настоящей работе мы используем другой подход, позволяющий избавиться от упомянутых ограничений и исследовать операторы (5) в общем случае, причем требования на матрицу-функцию $q(\cdot)$ налагаются в терминах принадлежности некоторым классам суммируемости и не предполагают, вообще говоря, ни дифференцируемости, ни даже непрерывности указанной функции. Отметим, что возникающие при исследовании систем с недифференцируемыми коэффициентами трудности во многом аналогичны трудностям, возникающим при изучении скалярных операторов высших порядков с коэффициентами-распределениями.

В третьей главе настоящей работы представлен ряд результатов, касающихся обратных задач рассеяния на некомпактных графах, содержащих цикл, в том числе, для операторов переменного порядка; кроме того, исследована задача рассеяния на некомпактном графе-звезде в не изучавшемся ранее случае, когда потенциал оператора имеет бесселеву особенность в вершине.

Обратные задачи Штурма–Лиувилля на некомпактных графах изучены существенно менее полно, особенно в случае графов, содержащих циклы. Ряд важных частных случаев рассмотрен в работах [129], [130], [97], [81], см., также, [7], однако, общая теория таких задач на данный момент отсутствует.

Принципиально более сложными для изучения являются обратные задачи на графах для уравнений высших порядков. Такие задачи остаются малоизученными, причем открытыми в значительной мере остаются даже вопросы, связанные с постановкой задач. Среди имеющихся результатов можно упомянуть полученное в работах [58], [135], [136] решение задачи для деревьев. Особенно сложным является случай, когда порядки операторов на разных ребрах графа могут различаться между собой, в исследовании этого случая сделаны лишь первые шаги [60], [60], [71].

В четвертой главе настоящей работы исследуются задачи восстановления некоторых интегро-дифференциальных операторов.

Обратные задачи для нелокальных операторов, таких, как операторы с отклоняющимся аргументом, интегро-дифференциальные и интегральные операторы, занимают особое место в теории обратных спектральных задач. Несмотря на то, что модели с последействием естественным образом возникают во многих областях естествознания и техники, теория обратных задач для нелокальных операторов развита весьма слабо, фактически представляя собой набор отдельных разрозненных результатов, не формирующих общей картины. В значительной мере это обусловлено сложностью таких задач. Нелокальный характер операторов делает малоэффективными упоминавшиеся выше классические методы, такие, как метод Гельфанда–Левитана и метод спектральных отображений. Как правило, исследование обратных задач для таких операторов приводит к существенно нелинейным уравнениям, позволяющим получать лишь результаты локального характера.

Важным исключением являются задачи, в которых требуется восстановить сверточную компоненту оператора. Так, еще в работе [54] было замечено, что задание спектра задачи Дирихле для оператора

$$\ell y = -y'' + q(x)y + \int\limits_0^x M(x-t)y(t)\,dt \tag{12}$$

однозначно определяет функцию $M(\cdot)$ при условии, что коэффициент $q(\cdot)$ известен априори. Иначе говоря, для задачи восстановления сверточной компоненты оператора имеет место *глобальная* единственность решения. В работе [77] С.А. Бутерин показал, что задача восстановления оператора (12) в случае $q = 0$ может быть сведена к решению некоторого специального нелинейного уравнения, для которого можно доказать глобальную разрешимость. Таким образом, удалось получить нелокальную конструктивную процедуру решения указанной обратной задачи, и, более того, описать необходимые и достаточные условия ее разрешимости. В дальнейшем указанный результат был распространен на общий случай оператора (12) с ненулевым (априори заданным) потенциалом $q(\cdot)$ и на случай оператора высшего порядка

$$\ell y = y^{(n)} + \int\limits_0^x M(x-t)y^{(n-1)}(t)\,dt,$$

причем во всех указанных случаях для однозначного восстановления оператора оказалось достаточно задания спектра задачи Дирихле (или какой-либо иной краевой задачи с распадающимися условиями). Полученные результаты также получили дальнейшее развитие, см., например, работу [80] и приведенную в ней библиографию.

В настоящей работе упомянутые результаты распространены на случай операторов дробного порядка, причем, рассмотрен, в частности, наиболее сложный случай, когда оператор в целом не имеет сверточной структуры (как, например, оператор (12) при $q \neq 0$). Существенную роль в проведенном исследовании играет полученная автором формула умножения для функций одного вида, выражающихся через функции типа Миттаг–Леффлера.

Степень разработанности темы. Наиболее полно разработана теория обратных спектральных задач для операторов Штурма – Лиувилля, Дирака и их непосредственных обобщений. Исследование операторов высших порядков и матричных операторов с коэффициентами размерности большей двух сталкивается с целым рядом трудностей принципиального характера и построение теории обратных задач здесь далеко от своего завершения. Наиболее существенные трудности возникают при исследовании сингулярных дифференциальных операторов, в частности, матричных операторов с негладкими коэффициентами, операторов с особенностью и операторов на некомпактных графах. Для таких операторов решение обратных задач рассеяния известными методами возможно лишь при выполнении некоторых весьма ограничительных дополнительных условий на коэффициенты оператора или, соответственно, структуру графа.

Цель работы - разработка новых современных методов исследования задачи рассеяния для сингулярных дифференциальных операторов.

Задачи исследования. Разработка конструктивной процедуры решения обратной задачи рассеяния для матричных дифференциальных операторов первого порядка с регулярной особенностью; исследование неклассических постановок обратных задач рассеяния на некомпактных геометрических графах; исследование и конструктивное решение обратных спектральных задач для некоторых интегро-дифференциальных операторов дробных порядков.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно. Главные из них состоят в следующем:

1. Введены и исследованы интегральные преобразования, ядра которых строятся по решениям дифференциальных систем с регулярной особенностью. Данные преобразования можно рассматривать как далеко идущие обобщения классических преобразований Фурье–Ханкеля. Доказаны теоремы о свойствах таких преобразований, аналогичные теоремам А.М. Седлецкого о свойствах преобразования Фурье–Лапласа в комплексной плоскости спектрального параметра.

2. Предложен метод построения и исследования решений типа Вейля для дифференциальных операторов с особенностью, основанный на использовании тензорно-значных решений построенных специальным образом вспомогательных дифференциальных систем. Метод позволяет исследовать решения типа Вейля при минимальных ограничениях на коэффициенты оператора, не предполагающих, в частности, их дифференцируемости. Также снято требование быстрого убывания коэффициентов при $x \to 0$.

3. Получены теорема единственности и конструктивная процедура решения обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов с особенно-

стью в случае отсутствия дискретного спектра. Конструктивная процедура основана на сведении задачи к линейному интегральному уравнению, для указанного уравнения доказана корректная разрешимость.

4. Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях разрешимости обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов с особенностью в случае отсутствия дискретного спектра. Получены легко проверяемые достаточные условия разрешимости обратной задачи.

5. Разработана конструктивная процедура решения обратной задачи рассеяния на графе-звезде для оператора Штурма–Лиувилля с бесселевой особенностью в вершине. Конструктивная процедура основана на сведении задачи к линейному интегральному уравнению, для указанного уравнения доказана корректная разрешимость.

6. Предложена конструктивная процедура решения обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля на некомпактном графе с циклом. Показано, что задача восстановления потенциала на неограниченном ребре по данным рассеяния, ассоциированным с этим ребром, может быть сведена к решению линейного уравнения. Найдены дополнительные данные, задание которых обеспечивает однозначное восстановление потенциала на цикле.

7. Доказана теорема единственности решения обратной задачи рассеяния для оператора переменного порядка на простейшем некомпактном графе с циклом.

8. Разработана конструктивная процедура решения обратной задачи для некоторых интегро-дифференциальных операторов дробного порядка. Процедура основана на сведении задачи к некоторому нелинейному интегральному уравнению, для указанного уравнения установлена его однозначная разрешимость. При построении уравнения существенную роль играют полученные автором формулы умножения для функций типа Миттаг-Леффлера.

Методы исследования. Для исследования обратной задачи применяется развитие идей метода спектральных отображений [57], в основе которого лежит метод контурного интегрирования Коши-Пуанкаре. Также в работе используются асимптотические методы, аппарат теории целых и мероморфных функций, теории интегральных уравнений, теории операторов в банаховых пространствах и другие методы вещественного, комплексного и функционального анализа.

Теоретическая значимость работы. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и систем, а также при построении математических моделей различных прикладных задач. Результаты диссертационной работы могут быть интересны специалистам, работающим в МГУ им. М.В. Ломоносова, Математическом институте им В.А. Стеклова РАН, Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, СПбГУ и других высших учебных заведениях и научных центрах. Результаты диссертации могут составить содержании специальных курсов для магистрантов и аспирантов.

Достоверность результатов обоснована строгими математическими доказательствами.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты автора:

1. Теория интегральных преобразований, являющихся обобщениями классических преобразований Фурье–Ханкеля. В частности, теоремы о свойствах таких преобразований, рассматриваемых в комплексной плоскости спектрального параметра.

2. Метод построения и исследования решений типа Вейля для дифференциальных операторов с особенностью, основанный на использовании тензорнозначных решений построенных специальным образом вспомогательных дифференциальных систем.

3. Теорема единственности и конструктивная процедура решения обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов с особенностью в случае отсутствия дискретного спектра.

4. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов с особенностью в случае отсутствия дискретного спектра. Также достаточные условия разрешимости обратной задачи.

5. Конструктивная процедура решения обратной задачи рассеяния на графе-звезде для оператора Штурма – Лиувилля с бесселевой особенностью в вершине.

6. Конструктивная процедура решения обратной задачи для оператора Штурма – Лиувилля на некомпактном графе с циклом.

7. Теорема единственности решения обратной задачи рассеяния для оператора переменного порядка на простейшем некомпактном графе с циклом.

8. Формулы умножения для функций типа Миттаг - Леффлера.

9. Конструктивная процедура решения обратной задачи для некоторых интегро - дифференциальных операторов дробного порядка.

Практическая значимость работы. Результаты диссертации могут быть полезны при решении обратных спектральных задач, возникающих в различных областях теории упругости, оптики, астрофизики. Все представленные в диссертации методы решения задач конструктивны, на их основе могут быть разработаны численные алгоритмы.

Апробация работы. Результаты диссертации в разные годы докладывались на научных семинарах:

- Семинар «Операторные модели в математической физике» механико - математического факультета МГУ (руководитель — чл.-корр. РАН А.А. Шкаликов).

- Семинар «Обратные задачи спектрального анализа» Саратовского государственного университета (руководитель — профессор В.А. Юрко).

- Семинар факультета математики университета Дуйсбург–Эссен (руководитель — профессор Г. Фрайлинг).

и на международных научных конференциях:

- Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В.А. Садовничего, Москва (2019 г.)

- Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», Саратов (2014, 2016, 2018, 2020 гг.)
- «Спектральная теория и смежные вопросы», Уфа (2018 г.)
- Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы», Воронеж (2021 г.)
- «Уфимская осенняя математическая школа», Уфа (2021, 2022 гг.)
- Крымская осенняя математическая школа-симпозиум КРОМШ (2015 г.)
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль (2022 г.)
- Конференция международных математических центров мирового уровня, Сириус (2021 г.)

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 13 работах [13—16], [105 —113], из которых 12 статей опубликованы в изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus. Все работы выполнены без соавторов.

Личный вклад. Все результаты диссертации получены автором лично.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 143 наименования. Объем диссертации 273 страницы.

Основное содержание работы. Главы 1, 2 посвящены изучению задачи рассеяния для операторов (5). Исследование проводится при следующих предположениях:

- Матрица A внедиагональна. Собственные значения $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ матрицы A различны и удовлетворяют условию $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$, кроме того, $\mathrm{Re}\mu_1 < \mathrm{Re}\mu_2 < \cdots < \mathrm{Re}\mu_n$, $\mathrm{Re}\mu_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$.
- $b_1, \ldots, b_n$ – различные ненулевые комплексные числа, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и такие, что $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j = 0$.

- матрица-функция $q(\cdot)$, далее называемая *потенциалом*, такова, что $q_{kj}(\cdot) \in X_p := L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$, $p > 2$, $q_{kk}(x) \equiv 0$, $k = \overline{1,n}$.

Помимо указанных условий мы предполагаем выполненным также так называемое *условие информативности* (см. §1 Главы 1), являющееся аналогом условий информативности для систем вида (4) на полуоси (см., например, [56]).

Неинтегрируемость слагаемого $x^{-1}A$ в (6) требует его включения в главную часть, что приводит к следующей невозмущенной системе:

$$y' = (\rho B + x^{-1}A)y. \tag{13}$$

Здесь наблюдается существенное отличие от случая системы (4), для которого (даже в наиболее сложном общем случае, когда $Q(\cdot)$ предполагается лишь суммируемой) невозмущенная система имеет вид:

$$y' = \rho B y$$

и фундаментальную систему решений вида $\{\exp(\rho x b_k)\mathfrak{e}_k\}$, $k = \overline{1,n}$ (здесь и далее $\mathfrak{e}_k$ обозначают базисные векторы координатного пространства $\mathbb{C}^n$: $(\mathfrak{e}_k)_j = \delta_{j,k}$, $\delta_{j,k}$–символ Кронекера). В случае же системы (13) решения имеют более сложную структуру (зависящую, кроме того, от матрицы A) и демонстрируют поведение, аналогичное поведению функций $\{\exp(\rho x b_k)\mathfrak{e}_k\}$ лишь при больших значениях ρx.

Рассмотрим решения системы (13) подробнее.

Обозначим через Σ объединение прямых вида:

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j):j\neq k} \{z : \mathrm{Re}(zb_j) = \mathrm{Re}(zb_k)\}.$$

Для любого $z \in \mathbb{C}\backslash\Sigma$ существует перестановка $R_1,\ldots,R_n$ чисел $b_1,\ldots,b_n$ такая, что $\mathrm{Re}(R_1 z) < \mathrm{Re}(R_2 z) < \cdots < \mathrm{Re}(R_n z)$. Пусть $\mathcal{S}$ – некоторый открытый сектор $\{z = r\exp(i\gamma), r \in (0,\infty), \gamma \in (\gamma_1,\gamma_2)\}$, лежащий в $\mathbb{C}\setminus\Sigma$. Для $\rho \in \mathcal{S}$ существуют фундаментальные системы решений $\{C_k(x,\rho)\}_{k=1}^n$, $\{E_k(x,\rho)\}_{k=1}^n$ со следующими свойствами:

- $C_k(x,\rho) = (\rho x)^{\mu_k}\hat{c}_k(\rho x)$, где $\hat{c}_k(\cdot)$ – целые функции, $\hat{c}_k(0) = \mathfrak{h}_k$, $\mathfrak{h}_k$ – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению μ_k;

- $E_k(x,\rho) = \exp(\rho x R_k)\left(\mathfrak{f}_k + O((\rho x)^{-1})\right)$.

Здесь (и далее) $\{\mathfrak{f}_k\}$ обозначают столбцы матрицы перестановок $\mathfrak{f}$ такой, что $(R_1, \ldots, R_n) = (b_1, \ldots, b_n)\mathfrak{f}$.

Переходя к общему случаю оператора (5) и связанной с ним системы (6), отметим, что ключевую роль в спектральной теории таких систем (как в вопросах, относящихся к прямым задачам, так и в теории обратных задач) играют решения, которые мы будем называть *решениями типа Вейля.* При $\rho \in \mathcal{S}$ (где, как и ранее, и в дальнейшем, пока не оговорено иное, $\mathcal{S}$ есть некоторый открытый сектор с вершиной в нуле, лежащий в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$), $k \in \{1, \ldots, n\}$ мы определим k-е решение типа Вейля для оператора (5) как решение $y(x), x \in (0, \infty)$ уравнения $\ell y = \rho y$, обладающее свойствами:

$$y(x) = O(x^{\mu_k}), x \to 0, \ y(x) = \exp(\rho R_k x)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x \to \infty.$$

Решения типа Вейля являются решениями неоднородных краевых задач специального вида, неоднородность в краевых условиях можно трактовать как своего рода «зондирующее воздействие» на систему. Само решение типа Вейля в данной интерпретации описывает реакцию системы на такое воздействие. Указанные свойства делают решения типа Вейля естественным объектом в теории обратных спектральных задач. Заметим, что в нашем случае зондирующее воздействие осуществляется из «точки» $x = \infty$, что соответствует термину «задача рассеяния».

Для построения и исследования решений типа Вейля (точнее, аналогичных им решений Вейля, для которых нормирующее неоднородное краевое условие ставится в точке $x = 0$) в упомянутых выше работах В.А. Юрко и его учеников используется процедура переразложения решений бирхгофовского типа через специальным образом построенные решения $\{S_k(x, \rho)\}_{k=1}^n$ уравнения $\ell y = \rho y$, удовлетворяющие (в частности) следующим асимптотическим условиям:

$$S_k(x, \rho) = x^{\mu_k}(\mathfrak{h}_k + o(1)), x \to 0.$$

Анализ коэффициентов указанных переразложений (так называемых *множителей Стокса*) является источником информации о свойствах решений Вейля. Однако, интегральные вольтерровские уравнения, используемые при построении решений $\{S_k(x, \rho)\}_{k=1}^n$, разрешимы лишь при дополнительном условии

$$\int\limits_0^1 \left\| x^{\mu_1 - \mu_n} q(x) \right\| \, dx < \infty,$$

что и порождает упомянутые выше ограничения метода.

Используемый нами метод построения решения типа Вейля отличается от описанного выше и основан на следующем приеме, впервые предложенном в [68] при исследовании задачи рассеяния для оператора (3) на всей оси (отметим, что коэффициенты $p_k(\cdot)$ в указанной работе предполагались принадлежащими пространству Шварца). Пусть функции $y_1(\cdot), \dots, y_m(\cdot)$ удовлетворяют системе уравнений

$$y' = U(x)y$$

с некоторой $n \times n$ ($n \geq m$) матрицей-функцией $U(\cdot)$. Тогда, как несложно убедиться непосредственной проверкой, m-вектор

$$Y(x) := y_1(x) \wedge \dots \wedge y_m(x)$$

удовлетворяет системе аналогичного вида, более точно, системе:

$$Y' = (U(x))^{(m)}Y.$$

Здесь (и далее в аналогичном контексте) используются следующая договоренность об обозначениях: если некоторый символ U обозначает матрицу или оператор в $\mathbb{C}^n$, то через $U^{(m)}$ ($m \in \{1, \dots, n\}$) обозначается действующий в $\wedge^m\mathbb{C}^n$ линейный оператор, такой что равенство

$$U^{(m)}(v_1 \wedge \dots \wedge v_m) = \sum_{j=1}^{m} v_1 \wedge \dots \wedge v_{j-1} \wedge (Uv_j) \wedge v_{j+1} \dots \wedge v_m$$

выполняется для любого набора векторов $\{v_1, \dots, v_n\}$ из $\mathbb{C}^n$. Следующее важное наблюдение состоит в том, что, если $\{\psi_k(\cdot)\}_{k=1}^n$ суть решения типа Вейля (при некотором фиксированном ρ), то построенные по ним тензоры $\psi_1(x)\wedge\dots\wedge\psi_k(x)$ и $\psi_k(x) \wedge \dots \wedge \psi_n(x)$ имеют минимальный рост при $x \to \infty$ и, соответственно, при $x \to 0$ среди решений системы

$$Y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))^{(m)}Y \tag{14}$$

при $m = k$ и $m = n - k + 1$ соответственно. Указанное обстоятельство позволяет получить для введенных тензоров интегральные *вольтерровские* уравнения. Таким образом, в отличие от подхода, предложенного в [131] и использовавшегося в дальнейших работах В.А. Юрко и его учеников, в данном случае техника интегральных вольтерровских уравнений применяется к вспомогательной системе (14), а не к исходной системе (6). Поскольку при этом строятся лишь решения с минимальным ростом на соответствующих концах интервала, для решения возникающих интегральных уравнений не требуется дополнительных условий на потенциал $q(\cdot)$, – фактически для разрешимости указанных уравнений достаточно суммируемости матрицы-функции $q(\cdot)$.

Построению и исследованию решений типа Вейля посвящена **первая глава** настоящей работы. В более детальном изложении построение решений типа Вейля можно описать следующим образом.

Первым шагом является исследование решений следующих интегральных уравнений:

$$Y(x) = \int\limits_0^x G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(q^{(n-k+1)}(t)Y(t)\right)\,dt + T_k^0(x,\rho), \tag{15}$$

$$Y(x) = -\int\limits_x^\infty G_k(x,t,\rho)\left(q^{(k)}(t)Y(t)\right)\,dt + F_k^0(x,\rho), \tag{16}$$

где $T_k^0(x,\rho) := C_k(x,\rho)\wedge\cdots\wedge C_n(x,\rho)$, $F_k^0(x,\rho) := E_1(x,\rho)\wedge\cdots\wedge E_k(x,\rho)$, а $G_m(x,t,\rho)$ – функция Грина системы (14) при $q=0$, представляющая собой при фиксированных значениях аргументов x,t,ρ линейный оператор в $\wedge^m\mathbb{C}^n$. Решения уравнений (15) и (16) обозначается, соответственно, $T_k(x,\rho)$ и $F_k(x,\rho)$ и называются в дальнейшем *фундаментальными тензорами*. Важным этапом исследования данных уравнений является исследование первых слагаемых ряда, получаемого по методу последовательных приближений. Указанные величины играют важную роль, во многом определяя свойства фундаментальных тензоров. Зависимость этих величин от $q(\cdot)$ линейна, что позволяет рассматривать их как результат применения к матрице-функции $q(\cdot)$ некоторых интегральных преобразований, являющихся обобщениями преобразований типа Фурье–Ханкеля. Изучению этих интегральных преобразований посвящен §1.1, основной результат которого содержится в Теореме 1.1. Отметим, что сходные закономерности прослеживаются и при построении ФСР бирхгофовского типа, см., напр., [38], где поведение построенных решений во многом определяется линейным относительно потенциала слагаемым, изучение соответствующих интегральных преобразований (являющихся в этом случае обобщением преобразования Фурье) становится, таким образом, важнейшим этапом исследования [39].

Дальнейшее исследование уравнений (15), (16) проведено в §1.2. Уравнения изучаются при каждом фиксированном ρ в некоторых весовых аналогах пространства $L_\infty(0,\infty)$, а также (в преобразованном виде) в пространствах функций двух переменных (x,ρ), таких как пространства $BC\left([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}})\right)$ и $BC\left([0,\infty), \mathcal{H}(l)\right)$, где $\mathcal{H}(l) := C_0(l) \cap L_2(l)$ и l – произвольный луч вида $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$, – здесь, таким образом, функция двух переменных (x,ρ) трактуется как отображение, которое каждому значению x ставит в соответствие функцию спектрального параметра ρ. Устанавливаемые таким образом свойства фундаментальных тензоров сформулированы в Теоремах 1.5, 1.6, где, кроме того, исследуется зависимость фундаментальных тензоров от потенциала $q(\cdot)$.

Полученные в §§1.1, 1.2 результаты используются далее в §1.3 для построения решений типа Вейля. Процедура построения носит чисто алгебраический характер и сводится к решению при фиксированных x,ρ следующей системы линейных уравнений:

$$F_{k-1} \wedge \Psi_k = F_k, \;\; \Psi_k \wedge T_k = 0. \tag{17}$$

Отметим, что СЛАУ (17) является переопределенной, вопрос о ее разрешимости требует отдельного исследования. Соответствующее исследование приводит к результатам, сформулированным в Теореме 1.8. Оно основывается на идеях, предложенных ранее в [68], однако техническая реализация указанного подхода имеет ряд существенных отличий, поэтому используемые вспомогательные утверждения также снабжены подробными независимыми доказательствами (см. Лемму 1.10). В ходе упомянутого исследования показано, что разрешимость системы (17) определяется значением некоторой (выписываемой явно в терминах фундаментальных тензоров) характеристической функции $\Delta_k(\rho)$: при условии $\Delta_k(\rho) \neq 0$ при данном ρ и каждом $x \in (0,\infty)$ система имеет единственное решение $\Psi_k(x,\rho)$. Более того, функция $\Psi_k(\cdot,\rho)$ является k-м решением типа Вейля (при данном ρ), которое при выполнении условия $\Delta_k(\rho) \neq 0$ является единственным. Отметим, что описанная процедура построения решений типа Вейля не требует привлечения традиционно используемых вспомогательных ФСР, таких как ФСР с бирхгофовской асимптотикой. Более того, дальнейшее исследование свойств решений типа Вейля также основывается только на исследовании СЛАУ (17) с учетом установленных ранее свойств фундаментальных тензоров. Основные свойства решений типа Вейля сформулированы в Теоремах 1.10 и 1.11. Кроме того, рассмотрен важный частный случай абсолютно непрерывных потенциалов $q(\cdot)$, удовлетворяющих условию $q(0) = 0$. В этом случае для решений типа Вейля можно получить при $\rho \to \infty$ асимптотики «классического типа» с оценкой остаточного члена $o(\rho^{-1})$ (Теорема 1.12).

Глава 2 посвящена непосредственно решению обратной задачи рассеяния для операторов (5). Решение обратной задачи дается для потенциалов класса G_0^p, выделяемого следующим условием:

$$\prod_{k=2}^{n} \Delta_k(\rho) \neq 0, \ \ \rho \in \overline{\mathcal{S}}$$

для любого открытого сектора $\mathcal{S} \subset \mathbb{C} \backslash \Sigma$. Для потенциалов класса G_0^p в качестве данных рассеяния можно рассматривать *матрицу сопряжения* $v(\rho)$, заданную при $\rho \in \Sigma' := \Sigma \setminus \{0\}$. Отметим, что при выполнении условия информативности для невозмущенной системы (13), любой потенциал с достаточно малой нормой заведомо принадлежит классу G_0^p (однако такими потенциалами класс G_0^p не исчерпывается).

Опишем постановку задачи более подробно. Представим множество $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ как объединение непересекающихся открытых секторов $\mathcal{S}_\nu$, $\nu = \overline{1, N}$ с вершиной в нуле. Отметим, что в нашем случае всегда $N \geq 4$. Будем считать, что секторы $\mathcal{S}_\nu$ занумерованы в положительном направлении, обозначим через Σ_ν открытый луч, разделяющий секторы $\mathcal{S}_\nu$ и $\mathcal{S}_{\nu+1}$. Из результатов §1.3 вытекает, что для любого $\rho_0 \in \Sigma_\nu$ существуют граничные значения $\Psi^{\pm}(x, \rho_0)$:

$$\Psi^-(x, \rho_0) = \lim_{\rho \to \rho_0, \rho \in \mathcal{S}_\nu} \Psi(x, \rho), \ \ \Psi^+(x, \rho_0) = \lim_{\rho \to \rho_0, \rho \in \mathcal{S}_{\nu+1}} \Psi(x, \rho)$$

матриц $\Psi(x, \rho)$, составленных из решений типа Вейля $\{\Psi_k(x, \rho)\}_{k=1}^n$. Поскольку матрицы $\Psi^-(\cdot, \rho)$ и $\Psi^+(\cdot, \rho)$ удовлетворяют одной и той же системе (6) (с одним и тем значением ρ), справедливо равенство:

$$\Psi^+(x, \rho) = \Psi^-(x, \rho) v(\rho),$$

где $v(\rho)$ есть упомянутая ранее матрица сопряжения. Рассматриваемая в дальнейшем обратная задача рассеяния состоит в восстановлении потенциала $q(x)$, $x \in (0, \infty)$ по известным данным рассеяния $v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$. Отметим, что такая постановка задачи полностью аналогична постановкам обратных задач рассеяния для операторов высших порядков (3) и систем (4) в [67], [66], [68], которые, в свою очередь, в случае $n = 2$ эквивалентны классическим постановкам задач рассеяния (см., напр., подробное обсуждение указанной связи в [68]).

Опишем структуру Главы 2 более подробно.

Конструктивному решению обратной задачи предшествует проведенное в §2.1 изучение свойств данных рассеяния. Устанавливается, что матрица сопряжения $v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ по необходимости:

- Является нижнетреугольной, а также имеет специальную блочную структуру (Теорема 2.1).

- При $\rho \to 0$, $\rho \to \Sigma_\nu$ для каждого $\nu = \overline{1, N}$ имеет предельные значения, различные, вообще говоря, для различных лучей Σ_ν, но не зависящие от потенциала $q(\cdot)$ (Теорема 2.2). Отметим, что данное свойство не имеет места для систем вида (4) (т.е., при $A = 0$).

- При $\rho \to \infty$ асимптотически приближается к матрице сопряжения $v_0(\rho)$ «простейшего» оператора (5) с потенциалом $q = 0$. Более точное и детальное описание данного свойства (фактически, группы свойств) дано в Теореме 2.3.

Поведение матрицы $v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ при $\rho \to 0$ является одним из наиболее специфичных свойств данных рассеяния, обусловленных наличием особенности, его исследование существенно опирается на развитую в первой главе технику тензорно-значных решений вспомогательных дифференциальных систем.

В §2.2 описывается и обосновывается процедура восстановления потенциала $q(\cdot)$ по известным данным рассеяния, иначе говоря, дается конструктивное решение обратной задачи. В основе используемого здесь метода лежат упоминавшиеся выше идеи метода контурного интеграла. Основы данного подхода были заложены в классических работах 1980-х годов, тем не менее, реализация метода существенно различается в зависимости от конкретной постановки задачи. Более того, в силу нелинейности обратных задач, применение метода в той или иной конкретной ситуации может требовать его существенного и нетривиального развития.

Метод, используемый в настоящей работе, можно рассматривать как синтез и дальнейшее развитие идей восходящих, с одной стороны, к идеям построенной в [67], [66], [68] теории рассеяния для операторов (3) и систем (4) на оси, и к идеям *метода спектральных отображений* ([52], [56], [131]) В.А. Юрко с другой. Как и в методе спектральных отображений, ключевую роль играет так называемая *матрица спектральных отображений* $P(x,\rho) := \Psi(x,\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho)$, где матрица $\Psi_0(x,\rho)$ построена по решениям типа Вейля $\{\Psi_{0k}(x,\rho)\}$ невозмущенной системы. Рассуждения, приводящие в конечном итоге к линейному уравнению (называемому в контексте метода спектральных отображений *основным уравнением обратной задачи*), основаны на аналитических и асимптотических свойствах матрицы спектральных отображений как функции спектрального параметра ρ, отправной точкой здесь служит применение классической интегральной формулы Коши. Итогом описанных построений является (линейное, как указывалось выше) уравнение

$$\mathbf{A}(x)\hat{P}(x,\cdot) = \hat{V}(x,\cdot), \tag{18}$$

зависящее от параметра $x \in (0,\infty)$ (Теорема 2.5, пункт 1). В роли искомой величины в нем выступает функция $\hat{P}(x,\rho) = P^+(x,\rho) - P^-(x,\rho)$, $\rho \in \Sigma'$, матрица-функция $\hat{V}(x,\rho)$ строится по матрице сопряжения $v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$, также по матрице сопряжения строится линейный оператор $\mathbf{A}(x)$. Оператор $\mathbf{A}(x)$ непрерывен в пространстве $L_2(\Sigma)$ (в котором и рассматривается уравнение (18)). Важным для обоснования процедуры решения обратной задачи является факт обратимости для каждого фиксированного $x \in (0,\infty)$ оператора $\mathbf{A}(x)$, устанавливаемый в пункте 2 Теоремы 2.5, доказательство которого проводится предъявлением в явном виде обратного оператора. Отметим, что вид уравнения (18) отличается как от основного уравнения классического метода спектральных отображений, так и от уравнений, получаемых в теории рассеяния методом, описанным в [67], [66], [68]. Непосредственное применение каждого из указанных методов к решению рассматриваемой обратной задачи сталкивается с целым рядом существенных трудностей.

Завершается решение обратной задачи рассеяния подсчетом по явной формуле, выражающей значение потенциала $q(x)$ (для каждого $x \in (0,\infty)$) через значения найденной из уравнения (18) функции $\hat{P}(x,\cdot)$. Получение указанных формул в рассматриваемом в работе случае нетривиально и проводится в два этапа. На первом этапе искомая формула выводится в частном случае абсолютно непрерывных потенциалов $q(\cdot)$, удовлетворяющих условию $q(0) = 0$ (Лемма 2.2); на втором этапе общий случай исследуется с помощью предельного перехода (Теорема 2.6).

§2.3 посвящен установлению условий разрешимости обратной задачи. Вопрос здесь ставится следующим образом. Пусть задана некоторая матрица-функция $v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$. Какие условия на $v(\cdot)$ являются необходимыми и достаточными для существования оператора вида (5) с потенциалом $q(\cdot) \in G_0^p$, матрица сопряжения (т.е., данные рассеяния) которого совпадала бы с $v(\cdot)$? В иной трактовке вопрос можно рассматривать как проблему характеризации (т.е., некоторого внутреннего описания) данных рассеяния операторов с потенциалом из класса G_0^p. Вопросы такого рода в контексте теории обратных задач являются, как правило, наиболее сложными для исследования [33], [68], [57], [143].

Основной результат, полученный в §2.3 (Теорема 2.7), можно кратко описать следующим образом. Искомые условия на заданную матрицу-функцию $v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ включают в себя:

- наличие выявленных в §2.1 структурных и аналитических свойств, выполненных для данных рассеяния «по необходимости»;
- обратимость при каждом $x \in (0, \infty)$ оператора $\mathbf{A}(x)$, построенного (формально) по матрице-функции $v(\cdot)$ способом, обоснованным «по необходимости» в §2.2;
- принадлежность классу $L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$ потенциала, полученного формальным применением процедуры восстановления, построенной в §2.2.

Доказательство соответствующих результатов основывается на следующих соображениях. Для каждого фиксированного $x \in (0, \infty)$ построим по заданной $v(\cdot)$ матрицы-функции $V(x, \cdot)$, $\hat{V}(x, \cdot)$ и оператор $\mathbf{A}(x)$, как в Теореме 2.5. Решим уравнение $\mathbf{A}(x)\varphi = \hat{V}(x, \cdot)$, обозначим найденное решение $\mathbf{p}(x, \cdot)$ (обозначения здесь отличаются от используемых в §2.2, поскольку объекты, фигурирующие в §2.2, относятся к некоторому оператору вида (5), теперь же существование этого оператора еще предстоит доказать!). Применяя, далее, формулы из Теоремы 2.6 (где вместо $\hat{P}$ используется $\mathbf{p}$), построим матрицу-функцию $\mathbf{q}(x)$, $x \in (0, \infty)$. Введем, кроме того, функцию

$$\psi(x, \rho) = \Psi_0(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} \mathbf{p}(x, \zeta) \Psi_0(x, \rho), \ \ \rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma.$$

Формула, определяющая функцию $\psi(\cdot,\cdot)$ есть в точности формула для подсчета матрицы $\Psi(x,\rho)$, составленной из решений типа Вейля оператора (5) при условии, что $\mathbf{p}(x,\rho)$ выражается в терминах соответствующей этому оператору матрицы спектральных отображений $P(x,\rho)$ по формуле $\mathbf{p}(x,\rho) = P^+(x,\rho) - P^-(x,\rho)$. Основные этапы дальнейшего доказательства сводятся к последовательному установлению следующих фактов:

1. при $x \to \infty$ справедлива асимптотика $\psi(x,\rho) = (\mathfrak{f} + o(1))\exp(\rho x R)$, где $R = diag(R_1,\dots,R_n)$ (Лемма 2.11);

2. для каждого фиксированного $\rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$ $\psi(\cdot,\rho)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений вида (6), причем $q(x) = \mathbf{q}(x)$ (Лемма 2.12);

3. при $x \to 0$ для k-го столбца $\psi_k(x,\rho)$ матрицы $\psi(x,\rho)$ справедлива оценка $\psi_k(x,\rho) = O\left(x^{\mu_k}\right)$;

4. при $\rho \in \Sigma'$ существуют предельные значения $\psi^{\pm}(x,\rho)$ и для них справедлива формула сопряжения $\psi^+(x,\rho) = \psi^-(x,\rho)v(\rho)$ с изначально заданной матрицей $v(\rho)$.

Результаты пунктов 1–3 позволяют утверждать, что столбцы матрицы $\psi(x,\rho)$ действительно являются решениями типа Вейля для оператора (5) с $q = \mathbf{q}$, – тогда последний пункт означает, что $v(\cdot)$ совпадает с матрицей сопряжения для этого оператора.

Отметим, что апостериорной проверки требует попадание построенного потенциала в класс $L_1(0,\infty)\cap L_p(0,\infty)$, формулируемое же в спектральной области условие $\mathbf{q}(\cdot) \in G_0^p$ оказывается выполненным автоматически. Указанное обстоятельство существенно в силу затруднительности практической проверки условий апостериорного характера. Доказательство отмеченного факта нетривиально и требует привлечения вспомогательных объектов, соответствующих матрице сопряжения для решений Вейля, нормируемых асимптотикой при $x \to 0$ (см. Леммы 2.13, 2.14).

В §2.3 получены, кроме того, достаточные условия разрешимости обратной задачи, не требующие проверки апостериорного условия $\mathbf{q}(\cdot) \in L_1(0,\infty)\cap L_p(0,\infty)$, данный результат содержится в Теореме 2.8 и Следствии 2.2. При доказательстве Теоремы 2.8 ключевую роль играет использование линейного оператора, конструкция которого подсказана асимптотическим поведением при $x \to \infty$ построенного в Теореме 2.5 оператора, обратного к оператору $\mathbf{A}(x)$.

Условимся относительно некоторых обозначений, используемых в Главах 1 и 2. Помимо обозначений, введенных выше, будем считать, если иное не оговорено явно, что действуют следующие договоренности:

- через $\mathcal{A}_m$ обозначается множество упорядоченных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$, $\alpha_j \in \{1, 2, \dots, n\}$;

- $u_\alpha := u_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge u_{\alpha_m}$, где $u_j \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathcal{A}_m$;

- α', где α мультииндекс, обозначает упорядоченный мультииндекс, являющийся дополнением α до $(1, 2, \dots, n)$;

- если $h \in \wedge^n \mathbb{C}^n$, то $|h|$ обозначает число, такое что $h = |h| \mathfrak{e}_1 \wedge \mathfrak{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathfrak{e}_n$, $\{\mathfrak{e}_k\}_{k=1}^n$ – стандартный базис в $\mathbb{C}^n$;

- если $\{a_j\}$ есть некоторая числовая последовательность, то для мультииндекса α обозначаем:
$$a_\alpha := \sum_{j \in \alpha} a_j, \ a^\alpha := \prod_{j \in \alpha} a_j;$$
для $k = \overline{1, n}$ используем обозначения:
$$\overrightarrow{a}_k := \sum_{j=1}^{k} a_j, \ \overleftarrow{a}_k := \sum_{j=k}^{n} a_j, \ \overrightarrow{a}^k := \prod_{j=1}^{k} a_j, \ \overleftarrow{a}^k := \prod_{j=k}^{n} a_j;$$
Заметим, что при выполнении Условий 1, 2 (§1.1) справедливо, в частности: $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k = \sum\limits_{k=1}^{n} R_k = 0$, следовательно, для любого мультииндекса α имеем: $R_{\alpha'} = -R_\alpha$, $\mu_{\alpha'} = -\mu_\alpha$.

- $\theta^\pm(\cdot)$ обозначают функции Хевисайда:
$$\theta^+(\xi) = \begin{cases} 0, \xi \le 0 \\ 1, \xi > 0, \end{cases}, \ \theta^-(\xi) = \begin{cases} 1, \xi \le 0 \\ 0, \xi > 0 \end{cases} = 1 - \theta^+(\xi).$$

- если l обозначает луч вида $l = \{\rho = zt, t \in [0, \infty)\}$ и r – некоторое положительное число, то $l^+(r) := l \cap \{\rho : |\rho| > r\}$, $l^-(r) := l \cap \{\rho : |\rho| \le r\}$;

- если иное не оговорено явно, символ μ обозначает диагональную матрицу, составленную из собственных значений матрицы A: $\mu = diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, символ R – диагональную матрицу $R = diag(R_1, \ldots, R_n)$;

- символ Id обозначает тождественный оператор;

- если U и V – некоторые матрицы, то $[U, V] = UV - VU$;

- один и тот же символ M обозначает различные константы в неравенствах; если иное не оговорено явно, константы зависят только от матриц A, B. Поскольку в контексте обратной задачи матрицы A и B предполагаются известными, мы будем считать, что эти матрицы фиксированы, и константы, зависящие только от них, для краткости будем называть абсолютными.

- символ $W(\cdot)$ обозначает диагональную матрицу-функцию, определяемую в §1.1.

Сделаем еще ряд замечаний относительно использования обозначений функциональных пространств.

Традиционные обозначения функциональных пространств, такие как $L_p(a, b)$, $C[a, b]$ и др. будут использоваться в их классическом понимании независимо от того, идет ли речь о скалярных, векторных, тензорных или операторных функциях во всех случаях, когда соответствующие пространства значений конечномерны. Запись $C_0(\mathcal{P})$, где $\mathcal{P}$ - неограниченное подмножество комплексной плоскости, обозначает пространство непрерывных на $\mathcal{P}$ функций $f(\cdot)$, принимающих значения в некотором конечномерном пространстве и таких что $\lim\limits_{\rho\to\infty, \rho\in\mathcal{P}} \|f(\rho)\| = 0$. Условимся, что $\|f\|_{C_0(\mathcal{P})} := \sup\limits_{\rho\in\mathcal{P}} \|f(\rho)\|$.

Запись $\mathcal{L}(X, Y)$, где X, Y – некоторые линейные топологические пространства, обозначает пространство линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y, $C(X, Y)$ в этом случае обозначает пространство непрерывных отображений $X \to Y$.

Глава 3 посвящена исследованию обратных задач рассеяния на некомпактных метрических графах.

В **первом параграфе** рассматривается некомпактный метрический граф–звезда Γ, состоящий из конечного набора лучей $\{\mathcal{R}_k\}_{k=1}^p$, выходящих из общей внутренней вершины. Функция y, заданная на луче $\mathcal{R}_k$, рассматривается как функция локального параметра $x \in [0, \infty)$, причем значение параметра $x = 0$ соответствует вершине. Функция y, заданная на Γ, рассматривается как набор функций $\{y_k\}_{k=1}^p$ (где функция $y_k = y\,|_{\mathcal{R}_k}$ рассматривается как функция на $[0, \infty)$, как указано выше).

На каждом луче $\mathcal{R}_k$, $k = \overline{1, p}$ задано дифференциальное уравнение:

$$\ell_k y := -y'' + \left(\frac{\nu_{k0}}{x^2} + q_k(x)\right) y = \lambda y = \rho^2 y, \tag{19}$$

где $\nu_{k0} = \nu_k^2 - 1/4$, $\mathrm{Re}\nu_k > 1/2$, $\nu_k \notin \mathbb{N}$ и комплексно-значная функция $q_k(\cdot)$ удовлетворяет условию:

$$\int_0^1 \left|x^{1-2\nu_k} q_k(x)\right| dx + \int_1^\infty |x q_k(x)|\, dx < \infty. \tag{20}$$

Комплексные (вообще говоря) числа ν_{k0} могут быть различными для различных лучей; но предполагается выполненным следующее условие: если $\nu_j \neq \nu_k$, то $\mathrm{Re}\nu_j \neq \mathrm{Re}\nu_k$.

При выполнении условия (20) применим подход, развитый В.А. Юрко [131], [132], [55] для операторов с регулярной особенностью на полуоси и конечном интервале. В частности, имеется возможность, используя технику интегральных вольтерровских уравнений, построить специальные целые по λ решения $S_{kj}(x, \lambda)$, $j = 1, 2$ уравнения (19), удовлетворяющие асимптотическим условиям:

$$S_{kj}(x, \lambda) = x^{\mu_{kj}}(c_{j0}^{(k)} + o(1)),\ x \to 0,$$

где $\mu_{k1} = 1/2 - \nu_k$, $\mu_{k2} = 1/2 + \nu_k$ и константы $c_{10}^{(k)}$, $c_{20}^{(k)}$ таковы, что $c_{10}^{(k)} c_{20}^{(k)} = (2\nu_k)^{-1}$. Используя построенные таким образом решения, введем линейные формы:

$$U_{k1}(y) := \sigma_k \langle y, S_{k2}\rangle,$$

$$U_{k2}(y) := \sigma_{k1}\langle y, S_{k2}\rangle + \sigma_{k2}\langle S_{k1}, y\rangle.$$

Предположим, что $\sigma_k \neq 0, \sigma_{k2} \neq 0$, $k = \overline{1, p}$.

Пусть заданная на Γ функция $y = \{y_k\}_{k=1}^p$ такова, что функции y_k, $k = \overline{1, p}$ удовлетворяют уравнениям (19). Определим *условия склейки* в вершине графа Γ следующим образом:

$$U_{j1}(y_j) = U_{k1}(y_k), j \neq k,\ \sum_{j=1}^p U_{j2}(y_j) = 0. \tag{21}$$

Условия склейки (21) являются, с одной стороны, обобщением так называемых *стандартных условий склейки* в вершинах квантовых графов, включающих в себя условия непрерывности и условия Кирхгофа, и, с другой стороны, условий склейки, возникающих (см., например, [132]) в теории операторов с особенностью внутри интервала из соображений аналитического продолжения решений.

Для произвольного фиксированного $k \in \{1, \dots, p\}$ и произвольного $\rho \in \mathbb{C}^+$ определим *решение типа Вейля, ассоциированное с лучом* $\mathcal{R}_k$, как функцию $\psi_k(\rho) = \{\psi_{kj}(x, \rho)\}_{j=1}^p$, $x \in [0, \infty)$ такую, что:

- функции $\psi_{kj}(\cdot, \rho)$, $j = \overline{1, p}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\ell_j \psi_{kj} = \rho^2 \psi_{kj}$;
- $\psi_{kj}(x, \rho) = O\left(\exp(i\rho x)\right)$ при $x \to \infty$, $j \neq k$;
- $\psi_{kk}(x, \rho) = \exp(-i\rho x)(1 + o(1))$ при $x \to \infty$;
- $\psi_k(\rho)$ удовлетворяет условиям склейки (21).

Отметим, что для каждого $k = \overline{1, p}$ решение типа Вейля, ассоциированное с лучом $\mathcal{R}_k$, определяется, тем не менее, глобально на всем графе и содержит, таким образом, спектральную информацию, «снимаемую» со всего графа Γ.

Введем *коэффициент отражения, ассоциированный с лучом* $\mathcal{R}_k$, как коэффициент асимптотического разложения:

$$\psi_{kk}(x, \rho) = \exp(-i\rho x) + r_k(\rho) \exp(i\rho x) + o(1), x \to \infty, \tag{22}$$

$\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Данными рассеяния, ассоциированными с лучом* $\mathcal{R}_k$, будем называть набор $J_k := \{r_k(\cdot), Z_k^+, \alpha_k(\rho), \rho \in Z_k^+\}$, где Z_k^+ – множество полюсов решения типа Вейля $\psi_k(\rho)$, $\alpha_k(\rho), \rho \in Z_k^+$ – постоянные, такие что:

$$\mathrm{res}_{\rho=\rho_0} \psi_{kk}(x, \rho) = \alpha_k(\rho_0) \exp(i\rho_0 x)(1 + o(1)), x \to \infty, \tag{23}$$

$\rho_0 \in Z_k^+$. Набор $J = \{J_k\}_{k=1}^{p-1}$ будем называть данными рассеяния для графа Γ.

Исследование обратной задачи рассеяния на графе Γ проведено в предположении выполнения:

1. Условия регулярности (Условие 3 §3.1).

2. Условия простоты и невещественности дискретного спектра (Условие 2 §3.1).

3. Условия «общего положения» (Условие 4 §3.1), аналогичного условию genericity [68].

Основные результаты §1 Главы 3 включают в себя:

- Теорему единственности восстановления потенциала $q_k(\cdot)$ по данным рассеяния, ассоциированным с лучом $\mathcal{R}_k$ (Теорема 3.1).

- Конструктивную процедуру решения обратной задачи $IP(k)$ восстановления потенциала $q_k(\cdot)$ по данным рассеяния, ассоциированным с лучом $\mathcal{R}_k$ (Теорема 3.2).

- Теорему единственности и конструктивную процедуру решения обратной задачи рассеяния на всем графе Γ по заданным данным рассеяния J (Теорема 3.3.)

Конструктивная процедура решения Задачи $IP(k)$ основана на сведении задачи к линейному уравнению вида

$$\mathbf{A}(x)\Phi(x,\cdot) = G(x,\cdot),$$

причем доказана обратимость для каждого значения параметра $x \in (0,\infty)$ линейного оператора $\mathbf{A}(x)$.

Во **втором параграфе** Главы 3 рассматривается некомпактный метрический граф G, состоящий из гладкой замкнутой кривой $\mathcal{R}_0$ длины π и лучей $\{\mathcal{R}_k\}_{k=1}^p$, $p \geq 2$, выходящих из некоторой точки $v \in \mathcal{R}_0$.

На каждом ребре графа G задано дифференциальное выражение:

$$\ell_j y_j := -y_j'' + q_j(x)y_j, \tag{24}$$

где функция $q = \{q_j\}_{j=0}^p$ предполагается вещественно-значной и удовлетворяющей условию:

$$\int_0^\pi |q_0(x)|\ dx + \sum_{j=1}^p \int_0^\infty (1+x)|q_j(x)|\ dx < \infty. \tag{25}$$

Для произвольного луча $\mathcal{R}_k$, $k \in \overline{1,p}$ определим решение типа Вейля, ассоциированное с $\mathcal{R}_k$ как функцию на графе G $\psi_k(\rho) = \{\psi_{kj}(\cdot,\rho)\}_{j=0}^p$, $\rho \in \mathbb{C}^+$ такую, что:

- она непрерывна на G и удовлетворяет условию Киргофа в вершине;
- выполняются уравнения $\ell_j \psi_{kj} = \rho^2 \psi_{kj}$, $j = \overline{0,p}$;
- $\psi_{kj}(x,\rho) = O\left(\exp(i\rho x)\right)$ при $x \to \infty$, $j = \overline{1,p} \setminus \{k\}$;
- $\psi_{kk}(x,\rho) = \exp(-i\rho x)(1 + o(1))$ при $x \to \infty$.

Определим данные рассеяния, ассоциированные с лучом $\mathcal{R}_k$, как набор данных $J_k := \{s_k(\cdot), Z_k^-, \alpha_k(\rho), \rho \in Z_k^-\}$, где $s_k(\cdot)$ – коэффициент отражения, ассоциированный с лучом $\mathcal{R}_k$, Z_k^- – множество полюсов решения типа Вейля $\psi_k(\rho)$, $\alpha_k(\rho), \rho \in Z_k^-$ – константы, такие что:

$$\mathrm{res}_{\rho=\rho_0} \psi_{kk}(x,\rho) = i\alpha_k(\rho_0) \exp(i\rho_0 x)(1 + o(1)), \quad x \to \infty.$$

Результаты §3.2 включают в себя:

- Теорему единственности восстановления потенциала $q_k(\cdot)$ по данным рассеяния, ассоциированным с $\mathcal{R}_k$ (Теорема 3.4).
- Конструктивную процедуру решения обратной задачи $IP(k)$ восстановления потенциала $q_k(\cdot)$ по J_k (Теорема 3.5, Алгоритм 3.2).
- Теорему единственности и конструктивную процедуру решения обратной задачи рассеяния на всем графе G по заданным данным рассеяния (Теорема 3.6)

Наличие цикла в некомпактном графе приводит к появлению новых нетривиальных свойств у заданных на таком графе операторов. Так, например, в отличие от задачи рассеяния на вещественной оси, главная часть асимптотики коэффициентов отражения при $\rho \to \infty$ представляет собой периодическую функцию; главные части асимптотик характеристических функций имеют бесконечные последовательности корней, расположенные параллельно вещественной оси, что характерно для операторов, заданных на конечном отрезке, и т.п. Неклассические спектральные свойства изучаемых операторов существенно затрудняют исследование обратной задачи. Отметим, однако, что в данном случае проведенное исследование не требует наложения каких-либо дополнительных ограничений в спектральной области, – удается, пользуясь вещественностью потенциала, получить достаточно полные результаты в таких важных и нетривиальных вопросах, как поведение решений типа Вейля при $\mathrm{Im}\rho \to 0$ (Лемма 3.19), свойства дискретного спектра, в частности, в окрестности точки $\rho = 0$ (Леммы 3.17, 3.18), поведение решений типа Вейля при $\rho \to 0$ (Лемма 3.23). Отметим также, что в отсутствие требований типа требования «общего положения» («genericity») меняется форма основного уравнения обратной задачи. Доказательство единственности решения основного уравнения также требует иных рассуждений по сравнению с теми, что использовались в §2.2, §3.1, – обоснование указанного факта в доказательстве Теоремы 3.5 является по сути рассуждением по достаточности, использующим свойства данных рассеяния, но не априорные гарантии существования восстанавливаемого оператора.

В **третьем параграфе** рассматривается задача рассеяния на геометрическом графе Γ, состоящем из замкнутой кривой r_0 длины T и луча r_1, исходящего из некоторой точки $v_1 \in r_0$.

На цикле r_0 рассмотрим уравнение

$$\ell_0 y_0 \equiv D^3 y_0 + p_{01}(x) D y_0 + p_{00}(x) y_0 = \rho^3 y_0, \tag{26}$$

где ρ - спектральный параметр, $D = -id/dx$ и коэффициенты $p_{00}(x)$, $p_{01}(x)$ таковы, что $\ell_0^* = \ell_0$.

На луче r_1 рассмотрим уравнение

$$\ell_1 y_1 \equiv D^N y_1 + \sum_{s=0}^{N-2} p_{1s}(x) D^s y_1 = \rho^N y_1, \tag{27}$$

где $N \geq 3$.

Введем в рассмотрение следующие линейные формы:

$$U_\nu(y) := \sigma_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \sum_{s=0}^{\nu-2} \sigma_{\nu s} y^{(s)}(0), u_{\xi\nu}(y) = (-1)^{\chi_{\xi\nu}} y^{(\nu-1)}(\xi),$$

где $\xi \in \{0, T\}$, $\chi_{0\nu} = 0$, $\chi_{T\nu} = \chi$, $\nu = 1, 2$, $\chi_{T3} = \chi + 1$, $\chi \in \{0, 1\}$. Для функции $y = (y_0, y_1)$ на Γ и $\nu \in \overline{1, N}$ определим условие склейки $C(\nu)$ как равенство $u_{0\nu}(y_0) = u_{T\nu}(y_0) = U_\nu(y_1)$, а условие $K(\nu)$ равенством $u_{0\nu}(y_0) + u_{T\nu}(y_0) + U_\nu(y_1) = 0$ при $\nu \leq 3$ и $U_\nu(y_1) = 0$ при $\nu > 3$.

Пусть $S_l := \{\arg(i\rho) \in \left((l-1)\frac{\pi}{N}, l\frac{\pi}{N}\right)\}$. Для фиксированного l через R_k, $k = \overline{1, N}$ обозначим корни N-й степени из 1, занумерованные таким образом, что $\mathrm{Re}(i\rho R_1) < \mathrm{Re}(i\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}(i\rho R_N)$ для всех $\rho \in S_l$.

Зафиксируем $\chi \in \{0, 1\}$. Для каждого $k = \overline{1, N}$ в каждом из секторов S_l определим *решение типа Вейля порядка* k как решение системы уравнений (26), (27) $\psi_k(\rho) = (\psi_{k0}(x, \rho), \psi_{k1}(x, \rho))$ со следующими свойствами:
1) $\psi_{k1}(x, \rho) = \exp(i\rho R_k x)(1 + o(1)),\ x \to \infty$;
2) для $\psi_k(\rho)$ выполнены условия склейки $C(\nu)$, $\nu = \overline{1, \nu_k - 1}, \nu_k = \min\{k, 3\}$, $K(\nu)$, $\nu = \overline{\nu_k, k}$.

Операторы переменного порядка на метрических графах стали предметом исследования сравнительно недавно, и на данный момент в их теории существуют лишь отдельные результаты, не составляющие общей картины. В частности, обратные задачи для операторов переменного порядка на некомпактных графах, насколько нам известно, до настоящего момента не изучались.

Результаты §3.3 представляют собой теоремы единственности двух видов. В одной из них (Теорема 3.7) изучается вопрос о восстановлении коэффициентов оператора ℓ_1 по данным рассеяния, ассоциированным с лучом r_1. Соответствующие данные рассеяния вводятся в терминах решений типа Вейля аналогично тому, как вводятся данные рассеяния в задаче рассеяния для операторов произвольного порядка на вещественной оси [66] (см. также Главу 2 настоящей работы). Доказательство соответствующей «частичной» теоремы единственности построено на комбинации идей работы [66] и метода спектральных отображений. Исследование единственности для задачи рассеяния на всем графе требует привлечения других подходов. Возникающие здесь трудности характерны для операторов с нераспадающимися краевыми условиями, – результаты по обратным задачам для таких операторов в случае, когда порядок оператора больше 2, нам неизвестны. Полученная в §3.3 теорема единственности для задачи рассеяния на всем графе (Теорема 3.8) утверждает, что для восстановления коэффициентов обоих операторов ℓ_1, ℓ_0 достаточно задания данных рассеяния, включающих в себя данные рассеяния J_1^χ, ассоциированные с лучом r_1, измеренные дважды со значениями $\chi = 0$ и $\chi = 1$, а также, вообще говоря, некоторые дополнительные данные, относящиеся оператору ℓ_0, рассматриваемому отдельно. Указанные дополнительные данные представляют собой конечный набор чисел, размер которого зависит от оператора; в частности, указанный набор может быть пустым.

В **Главе 4** изучаются обратные задачи для интегро-дифференциальных операторов специального вида. Как отмечалось выше, в задаче восстановления сверточной компоненты интегро-дифференциальных операторов достигнут значительный прогресс. В частности, удалось провести [77] весьма детальное исследование задачи восстановления оператора вида

$$\ell y(x) = y^{(n)}(x) + \int_0^x M(x-t) y^{(n-1)}(t)\, dt. \tag{28}$$

Полученные результаты включают глобальную теорему единственности, конструктивную процедуру решения, а также описание необходимых и достаточных условий разрешимости задачи.

Отметим, что, независимо от порядка n, для однозначного восстановления оператора (28) достаточно задания спектра какой-либо краевой задачи (например, задачи Дирихле). В настоящей работе показано, что аналогичные результаты могут быть до некоторой степени перенесены на случай операторов нецелого порядка $\alpha > 1$.

Опишем результаты Главы 4 более подробно. Во **втором параграфе** рассматривается обратная задача восстановления интегро-дифференциального оператора дробного порядка:

$$L = D^\alpha + M D^{\alpha-1},\ \alpha > 2, \alpha \notin \mathbb{N}, \tag{29}$$

где M – оператор свертки:

$$Mf(x) = (M * f)(x) = \int_0^x M(x-t) f(t) dt,$$

$M \in L_2(0,1)$, по заданному спектру краевой задачи:

$$Ly = \lambda y,\ D^{\alpha-k} y(0) = 0, k = \overline{2, [\alpha]+1},\ D^{\alpha-1} y(1) = 0. \tag{30}$$

Здесь D^α обозначает оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля, символ $[\alpha]$ обозначает целую часть числа α.

В **третьем параграфе** рассматривается интегро-дифференциальный оператор:

$$L = D^\alpha + M D^{\alpha-1},\ \alpha \in (1,2), \tag{31}$$

где M – интегральный оператор вида:

$$Mf(x) = \int_0^x M(x-t,t) f(t) dt,$$

$M(\eta,\xi)=N(\eta)p(\xi)$, $(\eta,\xi)\in\Pi=\{\eta,\xi\geq 0,\eta+\xi\leq 1\}$, $p(\cdot)$ – непрерывная строго положительная функция, $N\in L_\infty(0,1)$.

Изучаемая обратная задача состоит в восстановлении оператора (31) по заданному спектру краевой задачи:

$$Ly=\lambda y,\ D^{\alpha-2}y(0)=0,\ D^{\alpha-1}y(1)-D^{\alpha-1}y(0)=0, \tag{32}$$

причем функция $p(\cdot)$ предполагается известной априори.

Методы исследования обратных задач для нелокальных операторов существенно отличаются от классических методов теории обратных спектральных задач, большинство из которых малоэффективны в указанном случае. В частности, такие задачи не удается свести к линейным уравнениям, а возникающие при их решении нелинейные уравнения в общем случае обладают лишь локальной разрешимостью. Важной особенностью изучаемого класса операторов является замеченная С.А. Бутериным [77] глобальная разрешимость основного (нелинейного) уравнения обратной задачи.

В получении основного уравнения обратной задачи ключевую роль играет специальная структура оператора преобразования для решения уравнения $Ly=\lambda y$. В построении указанного оператора преобразования, в свою очередь, ключевую роль играют формулы умножения для функций:

$$\varphi(x,\lambda)=\left((Id-\lambda J^\alpha)^{-1}1\right)(x)=E_{1/\alpha}\left(\lambda x^{1/\alpha};1\right),$$

где J^α обозначает оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля, $E_\rho(x;\mu)$ – функцию типа Миттаг–Леффлера. Получению таких формул умножения посвящен **первый параграф** Главы 4. Полученные формулы (Теорема 4.1) можно рассматривать как обобщение использовавшихся И.Г. Хачатряном [51] при построении операторов преобразования для интегро-дифференциальных операторов высших порядков формул умножения:

$$\varphi(x,\lambda)\varphi(y,\lambda)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi\left(x+\omega^j y,\lambda\right),$$

в которых:

$$\omega=\exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right),\ \varphi(x,\lambda)=\left((Id-\lambda J^n)^{-1}1\right)(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\exp\left(\rho\omega^j x\right),\ \lambda=\rho^n.$$

Дальнейшее построение операторов преобразования приводит к результатам, сформулированным в Теоремах 4.2 и 4.6, существенно, что структура полученных операторов преобразования позволяет далее применять методы, использовавшиеся в [77], [79]. Итогом проведенного в §§4.2, 4.3 исследования является построение конструктивной процедуры решения соответствующих обратных задач (Теоремы 4.5 и 4.7).

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному консультанту Вячеславу Анатольевичу Юрко за постоянную поддержку и полезные обсуждения.

Глава 1 Решения типа Вейля для дифференциальных операторов с особенностью

§1.1 Некоторые обобщения интегральных преобразований Фурье – Ханкеля

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$y' = (B + x^{-1}A)y, \tag{1.1}$$

т.е., систему (6) в случае $q = 0$, $\rho = 1$. Всюду в дальнейшем будем предполагать выполненными следующие условия.

Условие 1. *Матрица A внедиагональна. Собственные значения $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ матрицы A различны и удовлетворяют условию $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$, кроме того, $Re\mu_1 < Re\mu_2 < \cdots < Re\mu_n$, $Re\mu_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$.*

Условие 2. $b_1, \ldots, b_n$ *– различные ненулевые комплексные числа, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и такие, что $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j = 0$.*

Как известно, при выполнении Условия 1, система (1.1) имеет фундаментальную матрицу вида $c(x) = (c_1(x), \ldots, c_n(x))$, где

$$c_k(x) = x^{\mu_k}\hat{c}_k(x),$$

$\hat{c}_k(\cdot)$ – целые функции, или, эквивалентно, $c(x) = \hat{c}(x)x^{\mu}$, где (как и всюду в дальнейшем) $\mu := diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\hat{c}(\cdot)$ – целая матрица-функция. Для функций $\hat{c}_k$ справедливы представления:

$$\hat{c}_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m H_{mk},\ H_{0k} = \mathfrak{h}_k,\ H_{mk} = ((\mu_k + m)I - A)^{-1} BH_{m-1,k}, \tag{1.2}$$

где $\mathfrak{h}_k$ – собственные векторы матрицы A. Заметим, в частности, что $\hat{c}_k(0) = \mathfrak{h}_k$. Матрица $c(x)$ зависит, очевидно, от выбора ветви степенной функции x^{μ_k}, а также от выбора собственных векторов $\mathfrak{h}_k$, матрица $\hat{c}(x)$ зависит только от выбора собственных векторов. Всюду далее будем считать систему собственных векторов $\{\mathfrak{h}_k\}_{k=1}^n$ фиксированной, причем $\det(\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_n) = 1$. Тогда, очевидно, выполнено $\det c(x) \equiv 1$, $\det \hat{c}(x) \equiv 1$.

Далее, при выполнении Условий 1, 2 в каждой открытой полуплоскости Ω такой, что $\mathrm{Re}(xb_j) \neq \mathrm{Re}(xb_k)$ при $j \neq k$, $x \in \partial\Omega$ (любая такая полуплоскость является сектором Стокса для системы (1.1)) существует [128], [49] также фундаментальная матрица $\mathcal{E}(x)$, представимая асимптотическим рядом:

$$\mathcal{E}(x) = (I + x^{-1}\mathcal{E}^{(1)} + x^{-2}\mathcal{E}^{(2)} + \ldots) \exp(xB).$$

Обозначим через Σ объединение прямых вида:

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j):j\neq k} \{z : \mathrm{Re}(zb_j) = \mathrm{Re}(zb_k)\}.$$

При выполнении Условия 2 для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ существует перестановка $R_1, \ldots, R_n$ чисел $b_1, \ldots, b_n$ такая. что $\mathrm{Re}(R_1 z) < \mathrm{Re}(R_2 z) < \cdots < \mathrm{Re}(R_n z)$. Пусть $\mathcal{S}$ – некоторый открытый сектор $\{z = r\exp(i\gamma), r \in (0, \infty), \gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)\}$, лежащий в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$. Тогда система (1.1) имеет фундаментальную матрицу $e(x) = (e_1(x), \ldots, e_n(x))$ аналитическую в секторе $\mathcal{S}$, непрерывную в $\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ и такую, что имеет место следующая асимптотика:

$$e_k(x) = \mathrm{e}^{xR_k}(\mathfrak{f}_k + x^{-1}\eta_k(x)),\ \eta_k(x) = O(1),\ x \to \infty,\ x \in \overline{\mathcal{S}}, \tag{1.3}$$

где $(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) = \mathfrak{f}$ – матрица перестановок, такая что $(R_1, \ldots, R_n) = (b_1, \ldots, b_n)\mathfrak{f}$.

Условие информативности. *Для любого открытого сектора* $\mathcal{S} \subset (\mathbb{C} \setminus \Sigma)$ *с вершиной в нуле и для всех* $k = \overline{2, n}$ *числа*

$$\Delta_k^0 := \det(e_1(x), \ldots, e_{k-1}(x), c_k(x), \ldots, c_n(x))$$

отличны от 0.

Отметим, что фундаментальная матрица $e(x)$ (в заданном секторе $\mathcal{S}$) определена не единственным образом. Действительно, для построения такой фундаментальной матрицы можно положить $e(x) := \mathcal{E}(x)\mathfrak{f}$, где фундаментальная матрица $\mathcal{E}$ построена в произвольном секторе Стокса, содержащем заданный сектор $\mathcal{S}$. Поскольку такой сектор Стокса можно выбрать не единственным образом, это означает неединственность фундаментальной матрицы e. Тем не менее, такая неединственность не влияет на выполнение условия информативности. Действительно, для любых двух фундаментальных матриц $e, \tilde{e}$ с заданной асимптотикой (1.3), имеем $\tilde{e}(x) = e(x)(I + u)$, где u – постоянная строго верхнетреугольная матрица. Отсюда $e_1(x) \wedge \dots \wedge e_k(x) = \tilde{e}_1(x) \wedge \dots \wedge \tilde{e}_k(x)$. Аналогично, неоднозначность выбора матрицы $c(x)$ также не влияет на выполнение условия информативности.

Условие информативности фактически представляет собой ограничение на матрицы A, B, условия такого типа часто появляются при исследовании дифференциальных систем на полуоси, см., например [56]. Важно отметить, что множество пар постоянных матриц A, B, удовлетворяющих Условиям 1,2 и таких, что выполнено условие информативности, непусто. Более того, справедливо следующее утверждение, показывающее, что условие информативности «как правило» выполняется.

Теорема 1.1. *Пусть A_0 – некоторая внедиагональная матрица с различными собственными значениями $\{\mu_j\}_{j=1}^n$, такими что $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$. Пусть, кроме того, все миноры матрицы $\mathfrak{h}$, составленной из собственных векторов $\mathfrak{h}_k, k = \overline{1, n}$ матрицы A_0, отличны от 0. Обозначим через $\mathcal{S}_0$ произвольный сектор такой, что $Re(z\mu_1) < \dots < Re(z\mu_n)$ при $z \in \mathcal{S}_0$. Рассмотрим следующую зависящую от параметра z систему*

$$y' = (B + x^{-1}A(z))y, \tag{1.4}$$

где $A(z) := zA_0$.

Условие информативности для системы (1.4) выполнено при всех комплексных $z \in \mathcal{S}_0$ за исключением, быть может, некоторого счётного множества.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого открытого сектора $\mathcal{S} \subset (\mathbb{C} \setminus \Sigma)$ с вершиной в нуле и любого $k \in \{2, \dots, n\}$ мероморфная по $z \in \mathcal{S}_0$ функция $\Delta_k^0(z)$ не является тождественным нулем. Для этого убедимся, что $\lim\limits_{z \to 0} \Delta_k^0(z) \neq 0$.

1) Поскольку собственные значения матрицы $A(z)$ суть $\{z\mu_k\}_{k=1}^n$, а соответствующие собственные вектора суть $\{\mathfrak{h}_k\}_{k=1}^n$, представления (1.2) для решений $c_k(x, z)$ системы (1.4) имеют вид:

$$c_k(x, z) = x^{z\mu_k} \hat{c}_k(x, z),$$

$$\hat{c}_k(x,z) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m H_{mk}(z), \tag{1.5}$$

где:

$$H_{0k}(z) \equiv \mathfrak{h}_k,\ \ H_{mk}(z) = ((z\mu_k + m)I - zA)^{-1} B H_{m-1,k}(z).$$

Для любого фиксированного $R > 0$ при $|z| \le R$ и $m > m_0(R)$ имеем

$$|z\mu_j - z\mu_k - m| \ge \frac{m}{2}$$

для всех j, k и следовательно:

$$\|\, (z\mu_k + m)I - zA)^{-1} \,\| \le \frac{M(R)}{m}.$$

Тогда:

$$\|H_{mk}(z)\| \le \frac{M^m(R)}{m!} \tag{1.6}$$

при $|z| \le R$, $m > m_0(R)$. Заметим, что каждая из функций $H_{mk}(z)$ голоморфна по $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}$, где:

$$\mathcal{Z} := \bigcup_{j \ne k} \left\{ z = \frac{\nu}{\mu_j - \mu_k}, \nu \in \mathbb{N} \right\}.$$

Заметим, что $\mathcal{Z}$ – счетное множество, не содержащее точки $z = 0$. В силу оценки (1.6) ряд (1.5) сходится равномерно на любом множестве вида $\{|x| \le R_x, |z| \le R_z, z \notin \mathcal{Z}\}$. Таким образом, функция $\hat{c}_k(x,z)$ голоморфна по совокупности переменных в области $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \mathcal{Z})$, где $\mathcal{Z}$ - счётное множество, не содержащее точки 0.

2) Как отмечалось выше, в качестве матрицы $e(x)$, $x \in \mathcal{S}$ для системы (1.1) может быть взята матрица вида $e(x) = \mathcal{E}(x)\mathfrak{f}$. Матрица $\mathcal{E}(x)$, в свою очередь, может быть представлена в виде [128], [49]: $\mathcal{E}(x) = (I + x^{-1}\hat{A})\hat{Y}(x)\exp(xB)$, где

$$\hat{A} = -(\mathrm{ad}B)^{-1}A,$$

а матрица-функция $\hat{Y}(x)$, $x \in \Omega$ (где Ω – произвольный фиксированный сектор Стокса, содержащий сектор $\mathcal{S}$) удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\hat{Y}_{jk}(x) = \delta_{jk} - \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{x+l_{jk}} \exp((b_j - b_k)(x-t))\hat{U}(t,A)\hat{Y}_{\nu k}(t)\,dt. \tag{1.7}$$

В уравнении (1.7) δ_{jk} обозначает символ Кронекера, $\hat{U}$ – матрицу-функцию вида

$$\hat{U}(x,A) = x^{-2}(I + x^{-1}\hat{A})^{-1}(A + I)\hat{A}$$

и лучи $l_{jk} = \{x = \tau\omega_{jk}, \tau \in (0, \infty)\}$, $\omega_{jk} \in \Omega$, $j, k = \overline{1, n}$ выбраны таким образом, что при всех $x \in l_{jk}$ выполнено условие $\mathrm{Re}((b_k - b_j)x) \le 0$.

Ряд, построенный по методу последовательных приближений для уравнения (1.7), сходится равномерно в области $\{|x| > M_0(\|A + I\| + 1)\|A\|\}$, где M_0 – некоторая константа, зависящая только от матрицы B, и в этой области справедлива (в частности) оценка: $\|\hat{Y}(x) - I\| \le M|x|^{-1}(\|A + I\| + 1)\|A\|$, в которой константа M также может быть выбрана не зависящей от A.

Применяя приведенные рассуждения к системе (1.4), получаем (в частности) асимптотику:

$$e_k(x, z) = \exp(xR_k)(\mathfrak{f}_k + O(z)) \tag{1.8}$$

при $z \to 0$ для любого фиксированного $x \in \mathcal{S}$.

3) В силу (1.8) имеем при $z \to 0$:

$$\Delta_k^0(z) = \prod_{\nu<k} \exp(xR_\nu) \left|(\mathfrak{f}_1 + O(z)) \wedge \cdots \wedge (\mathfrak{f}_{k-1} + O(z))\right.$$

$$\left.\wedge (x^{z\mu_k}\hat{c}_k(x, z)) \wedge \cdots \wedge (x^{z\mu_n}\hat{c}_n(x, z))\right|.$$

Откуда (поскольку $x^{z\mu_k} \to 1$ при $z \to 0$):

$$\lim_{z\to 0} \Delta_k^0(z) = \prod_{\nu<k} \exp(xR_\nu) \left|\mathfrak{f}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{f}_{k-1} \wedge \hat{c}_k(x, 0) \wedge \cdots \wedge \hat{c}_n(x, 0)\right|.$$

Поскольку $\hat{c}_\nu(x, 0) = \mathfrak{h}_\nu + o(1)$ при $x \to 0$ и по условиям Леммы имеем

$$|\mathfrak{f}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{f}_{k-1} \wedge \mathfrak{h}_k \wedge \cdots \wedge \mathfrak{h}_n| \ne 0,$$

в силу произвольности x получаем

$$\lim_{z\to 0} \Delta_k^0(z) \ne 0.$$

Таким образом, $\Delta_k^0(z)$ есть голоморфная функция от $z \in \mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{Z}$, не обращающаяся тождественно в 0.

$\square$

Всюду далее в данном параграфе $\mathcal{S}$ – некоторый (произвольный) фиксированный открытый сектор с вершиной в точке 0, лежащий в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$.

При выполнении условия информативности у системы (1.1) существует фундаментальная матрица $\psi_0(x) = (\psi_{01}(x), \ldots, \psi_{0n}(x))$, аналитическая в секторе $\mathcal{S}$, непрерывная в $\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ и такая, что выполнены следующие асимптотические равенства:

$$\psi_{0k}(xt) = \exp(xtR_k)(\mathfrak{f}_k + o(1)), t \to \infty, x \in \mathcal{S},$$
$$\psi_{0k}(x) = O(x^{\mu_k}), x \to 0. \quad (1.9)$$

Отметим, что, в отличие от $c(\cdot)$, $e(\cdot)$, фундаментальная матрица $\psi_0(\cdot)$ определена однозначно. Действительно, пусть фундаментальная матрица $\tilde{\psi}_0(\cdot)$ также удовлетворяет условиям (1.9). Тогда $\tilde{\psi}_0(x) = \psi_0(x)\gamma$, где γ – постоянная матрица. В силу (1.9) матрицы $\psi_0(x)x^{-\mu}$, $\tilde{\psi}_0(x)x^{-\mu}$ ограничены при $x \to 0$. Поскольку (также в силу (1.9)) $|\det \psi_0(x)| \equiv 1$, матрица $(\psi_0(x)x^{-\mu})^{-1}$ также ограничена при $x \to 0$. Таким образом, имеем:

$$\gamma = x^{-\mu} \left(\psi_0(x)x^{-\mu}\right)^{-1} \tilde{\psi}_0(x)x^{-\mu}x^{\mu} = x^{-\mu}\Gamma(x)x^{\mu},$$

где $\Gamma(x)$ ограничена при $x \to 0$. При $j < k$ имеем $\mathrm{Re}\mu_j < \mathrm{Re}\mu_k$ и, следовательно:

$$\gamma_{jk} = \lim_{x\to 0} x^{\mu_k-\mu_j}\Gamma_{jk}(x) = 0.$$

Аналогично, используя асимптотики $\psi_0(x)$, $\tilde{\psi}_0(x)$ при больших x, получаем при $j \geq k$ $\gamma_{jk} = \delta_{jk}$, где δ_{jk} – символ Кронекера. Таким образом, γ – единичная матрица.

Отметим, что матрица $\psi_0(x)x^{-\mu}$ не только ограничена в окрестности 0, но также допускает непрерывное продолжение в $\overline{\mathcal{S}}$. Действительно, в силу (1.9) справедливо представление $\psi_0(x) = c(x)l$, где l – некоторая постоянная нижнетреугольная матрица, откуда следует:

$$x^{-\mu_k}\psi_{0k}(x) = \sum_{j\geq k} l_{jk}x^{\mu_j-\mu_k}\hat{c}_j(x).$$

Учитывая, что $\hat{c}_j(\cdot)$ – целые функции и что $\mathrm{Re}(\mu_j - \mu_k) > 0$ при $j > k$, получаем требуемое.

Из условий (1.9) также вытекает оценка:

$$\|\psi_{0k}(x)\| \leq M \begin{cases} |x|^{Re\mu_k}, 0 < |x| \leq 1 \\ |\exp(xR_k)|, |x| > 1. \end{cases} \quad (1.10)$$

Заметим, что функция в правой части (1.10) терпит разрыв на дуге $\{x \in \overline{\mathcal{S}} : |x| = 1\}$. В дальнейшем нам будет удобнее описывать рост функций $\psi_{0k}(\cdot)$ при помощи непрерывных весовых функций. Определим функцию $W_0(\xi)$ следующим образом:

$$W_0(\xi) = (1 - |\xi|)\xi + |\xi|^2,\ |\xi| \le 1,\ W_0(\xi) := \left(W_0\left(\xi^{-1}\right)\right)^{-1},\ |\xi| > 1.$$

Заметим, что $W_0(\xi)$ непрерывна по $\xi \in \mathbb{C}$, не обращается в нуль при ξ отличных от нуля и справедлива двусторонняя оценка:

$$M_1|\xi| \le |W_0(\xi)| \le M_2|\xi|$$

при $\xi \in \mathbb{C}$. Кроме того, $W_0(\xi) = 1$ при $|\xi| = 1$ и имеет место асимптотика $W_0(\xi) = \xi(1 + o(1))$ при $\xi \to 0$ и $\xi \to \infty$.

Введём следующие весовые функции:

$$W_k(\xi) := \begin{cases} W_0\left(\xi^{\mu_k}\right)\exp(R_k\xi),\ |\xi| \le 1 \\ \exp(R_k\xi),\ |\xi| > 1. \end{cases}$$

В силу свойств функции $W_0(\cdot)$ весовые функции $W_k(\cdot), k = \overline{1,n}$ непрерывны в $\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$, не обращаются в нуль, и имеют место асимптотики $W_k(\xi) = \xi^{\mu_k}(1 + o(1))$ при $\xi \to 0$, из которых, в частности, следует, что диагональные матрицы-функции $W(\xi)\xi^{-\mu}$, $\xi^{\mu}(W(\xi))^{-1}$ (здесь и далее $W(\xi) := diag(W_1(\xi), \ldots, W_n(\xi))$) допускают непрерывное продолжение в $\overline{\mathcal{S}}$ и стремятся к единичной матрице I при $\xi \to 0$. Весовые функции $W_k(\xi)$ различаются по скорости роста при $\xi \to 0$ и при $\xi \to \infty$. Более точно при $j < k$ имеем:

$$|W_j(\xi)| \ge M|W_k(\xi)|,\ |\xi| \le 1; \quad |W_j(\xi)| \le M|W_k(\xi)|,\ |\xi| > 1. \tag{1.11}$$

С учетом описанных выше свойств матрицы $\psi_0(\cdot)$ можно утверждать, что матрица $\tilde{\psi}_0(x) := \psi_0(x)(W(x))^{-1}$, $x \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ ограничена и допускает непрерывное продолжение в замкнутый сектор $\overline{\mathcal{S}}$.

Используя введенные выше решения системы (1.1) определим следующие (матричные) функции двух переменных $x \in (0, \infty)$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$: $C(x, \rho) := c(\rho x)$, $E(x, \rho) := e(\rho x)$, $\Psi_0(x, \rho) := \psi_0(\rho x)$. Каждая из введенных функций является фундаментальной матрицей для системы

$$y' = (\rho B + x^{-1}A)y \tag{1.12}$$

со спектральным параметром ρ. Функцию $\Psi_{0k}(\cdot, \rho)$ (для каждого заданного $k = \overline{1,n}$) будем называть *k-м решением типа Вейля* для «невозмущенного» оператора

$$\ell y = B_0 \left(y' - x^{-1} A y\right).$$

При $\rho \in \mathcal{S}$ k-е решение типа Вейля $\Psi_{0k}(x,\rho)$, $x \in (0,\infty)$ есть единственное решение системы (1.12) такое, что:

$$\Psi_{0k}(x,\rho) = \exp(\rho x R_k)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x \to \infty,\ \Psi_{0k}(x,\rho) = O(x^{\mu_k}), x \to 0. \quad (1.13)$$

Из построения матрицы-функции $\Psi_0(\cdot,\cdot)$ и описанных выше свойств $\psi_0(\cdot)$ следует, в частности, что матрица функция $\tilde{\Psi}_0(x,\rho) := \Psi_0(x,\rho)(W(\rho x))^{-1}$ допускает непрерывное и ограниченное продолжение на множество $[0,\infty) \times \overline{\mathcal{S}}$.

Далее в данном параграфе исследуются некоторые интегральные преобразования с ядрами, построенными специальным образом по решениям системы (1.12).

Заметим, что из неравенств (1.11) следуют оценки:

$$\begin{cases} |W^\alpha(\xi)| \le M \left|\overrightarrow{W}^k(\xi)\right|, \ |\xi| \le 1, \alpha \in \mathcal{A}_k; \\ |W^\alpha(\xi)| \le M \left|\overleftarrow{W}^k(\xi)\right|, \ |\xi| > 1, \alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Тензорно-значные функции

$$T_k^0(x,\rho) = C_k(x,\rho) \wedge \cdots \wedge C_n(x,\rho),\ F_k^0(x,\rho) = E_1(x,\rho) \wedge \cdots \wedge E_k(x,\rho)$$

являются решениями вспомогательной системы

$$y' = (\rho B + x^{-1} A)^{(m)} y \quad (1.15)$$

при $m = k$ и $m = n - k + 1$ соответственно. В дальнейшем будем называть эти функции *фундаментальными тензорами* системы (1.12). Фундаментальные системы решений системы (1.15) могут быть построены с помощью введенных ранее решений системы (1.12). Так, например, каждая из следующих систем функций $\{C_\alpha(x,\rho)\}_{\alpha \in \mathcal{A}_m}$, $\{E_\alpha(x,\rho)\}_{\alpha \in \mathcal{A}_m}$, $\{\Psi_{0\alpha}(x,\rho)\}_{\alpha \in \mathcal{A}_m}$ является ФСР для (1.15). Заметим, что, в силу свойств функций $\tilde{\Psi}_{0k}(x,\rho)$, функции $\tilde{\Psi}_{0\alpha}(x,\rho)$ ограничены в $(0,\infty) \times \left(\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}\right)$ и допускают непрерывное продолжение на множество $[0,\infty) \times \overline{\mathcal{S}}$.

Для дальнейших рассмотрений существенно отметить, что, в силу специальной конструкции данных ФСР, коэффициенты переразложений каждой из них по любой из оставшихся не зависят ни от x, ни от спектрального параметра ρ, в частности, коэффициенты $T^0_{k\alpha}$ в разложении

$$T^0_k(x,\rho) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{n-k+1}} T^0_{k\alpha} E_\alpha(x,\rho) \tag{1.16}$$

суть числа, зависящие только от матриц A, B. Заметим, кроме того, что любое решение $y(\cdot)$ системы (1.15) допускает оценки

$$\begin{cases} \|y(x)\| \le M \left|\overrightarrow{W}^m(\rho x)\right|, \ |\rho x| \le 1, \\ \|y(x)\| \le M \left|\overleftarrow{W}^{n-m+1}(\rho x)\right|, \ |\rho x| > 1 \end{cases} \tag{1.17}$$

(которые следуют, например, из разложения $y(x)$ по ФСР $\{\Psi_{0\alpha}(x,\rho)\}_{\alpha\in\mathcal{A}_m}$). Фундаментальные тензоры $F^0_k(x,\rho)$, $T^0_k(x,\rho)$ имеют наименьший среди решений той же вспомогательной системы (1.15) рост при $|\rho x| \to \infty$ и $|\rho x| \to 0$ соответственно. Как следствие, оценки вида (1.17) для них сохраняют силу при всех значениях аргументов, т.е., имеем:

$$\|F^0_k(x,\rho)\| \le M \left|\overrightarrow{W}^k(\rho x)\right|, \ \|T^0_k(x,\rho)\| \le M \left|\overleftarrow{W}^k(\rho x)\right| \tag{1.18}$$

для всех $(x,\rho) \in (0,\infty) \times \left(\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}\right)$. Отметим, кроме того, что функции

$$\tilde{F}^0_k(x,\rho) := \left(\overrightarrow{W}^k(\rho x)\right)^{-1} F^0_k(x,\rho) = \tilde{\Psi}_{01}(x,\rho) \wedge \cdots \wedge \tilde{\Psi}_{0k}(x,\rho)$$

и

$$\tilde{T}^0_k(x,\rho) := \left(\overleftarrow{W}^k(\rho x)\right)^{-1} T^0_k(x,\rho) = \prod_{j=k}^{n} \frac{(\rho x)^{\mu_j}}{W_j(\rho x)} \hat{c}_k(\rho x) \wedge \cdots \wedge \hat{c}_n(\rho x)$$

допускают непрерывные продолжения на множество $[0,\infty) \times \overline{\mathcal{S}}$.

Для $k = 1, \ldots, n$ рассмотрим следующие интегральные преобразования:

$$\mathcal{T}_k(Q,x,\rho) = \int_0^x \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{n-k+1}} \sigma_\alpha \left| \left(Q(t) T^0_k(t,\rho)\right) \wedge C_{\alpha'}(t,\rho) \right| C_\alpha(x,\rho)\, dt, \tag{1.19}$$

$$\mathcal{F}_k(Q,x,\rho) = -\int_x^\infty \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k} \sigma_\alpha \left| \left(Q(t) F^0_k(t,\rho)\right) \wedge C_{\alpha'}(t,\rho) \right| C_\alpha(x,\rho)\, dt, \tag{1.20}$$

где $\sigma_\alpha = |\mathfrak{h}_\alpha \wedge \mathfrak{h}_{\alpha'}|$, функция $Q = Q(t), t \in (0,\infty)$ такова, что при каждом фиксированном t значение функции $Q(t)$ представляет собой оператор, действующий в $\wedge^{n-k+1}\mathbb{C}^n$ в случае преобразования (1.19) и в $\wedge^k\mathbb{C}^n$ в случае преобразования (1.20).

Всюду далее через $\mathcal{X}_p$ будем обозначать пространство $n\times n$ внедиагональных матриц-функций с элементами из X_p. Будем использовать также обозначение $\mathcal{X}_p^m$, где $Q(\cdot)\in\mathcal{X}_p^m$ означает по определению, что:

- при каждом фиксированном $t\in(0,\infty)$ $Q(t)$ есть линейный оператор, действующий в $\wedge^m\mathbb{C}^n$;
- для любой пары мультииндексов $\alpha,\beta\in\mathcal{A}_m$ функция $|(Q(\cdot)\mathfrak{e}_\beta)\wedge\mathfrak{e}_{\alpha'}|$ принадлежит X_p;
- для любого $\alpha\in\mathcal{A}_m$ $|(Q(t)\mathfrak{e}_\alpha)\wedge\mathfrak{e}_{\alpha'}|\equiv 0$.

Заметим, что если $q(\cdot)\in\mathcal{X}_p$, то $(q(\cdot))^{(m)}\in\mathcal{X}_p^m$, $m=\overline{1,n}$.

Следующий предварительный результат о поведении введенных выше интегральных преобразований показывает, что, после выделения соответствующего веса, они становятся убывающими функциями спектрального параметра.

Теорема 1.2. *Пусть $Q(\cdot)\in\mathcal{X}_p^{n-k+1}$. Тогда $\mathcal{T}_k(Q,x,\rho)$ определена при всех $x\in(0,\infty)$ и $\rho\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$, аналитична по $\rho\in\mathcal{S}$ и допускает представление*

$$\mathcal{T}_k(Q,x,\rho)=\overleftarrow{W}^k(\rho x)\omega_k(Q,x,\rho),$$

где $\omega_k(Q,x,\rho)$ непрерывна по $(x,\rho)\in[0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}}$ и

$$\lim_{\rho\to\infty,\rho\in\overline{\mathcal{S}}}\ \sup_{x\in[0,\infty)}\|\omega_k(Q,x,\rho)\|=0.$$

Аналогично, если $Q(\cdot)\in\mathcal{X}_p^k$, то $\mathcal{F}_k(Q,x,\rho)$ определена при всех $x\in(0,\infty)$ и $\rho\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$, аналитична по $\rho\in\mathcal{S}$ и допускает представление

$$\mathcal{F}_k(Q,x,\rho)=\overrightarrow{W}^k(\rho x)\omega_k^+(Q,x,\rho),$$

где $\omega_k^+(Q,x,\rho)$ непрерывна по $(x,\rho)\in[0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}}$ и

$$\lim_{\rho\to\infty,\rho\in\overline{\mathcal{S}}}\ \sup_{x\in[0,\infty)}\|\omega_k^+(Q,x,\rho)\|=0.$$

Теорема 1.3. *$\omega_k(\cdot,\cdot,\cdot)\in\mathcal{L}\left(\mathcal{X}_p^{n-k+1},BC\left([0,\infty),C_0(\overline{\mathcal{S}})\right)\right)$, причём для любого луча $\{\rho=zt,t\in[0,\infty)\}$, где $z\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ соответствующее ограничение $\omega_k|_l$ принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{X}_p^{n-k+1},BC([0,\infty),\mathcal{H}(l)))$, $\mathcal{H}(l):=C_0(l)\cap L_2(l)$.*

Аналогично, $\omega_k^+(\cdot,\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}\left(\mathcal{X}_p^k, BC\left([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}})\right)\right)$, *причём для любого луча* $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, *где* $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ *соответствующее ограничение* $\omega_k^+\big|_l$ *принадлежит* $\mathcal{L}(\mathcal{X}_p^k, BC([0,\infty), \mathcal{H}(l)))$.

Прежде, чем переходить непосредственно к доказательству Теорем 1.2, 1.3, сделаем ряд предварительных замечаний о конструкции рассматриваемых интегральных преобразований. Перепишем их в следующем виде:

$$\mathcal{T}_k(Q,x,\rho) = \int\limits_0^x G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(Q(t)T_k^0(t,\rho)\right)\,dt, \tag{1.21}$$

$$\mathcal{F}_k(Q,x,\rho) = -\int\limits_x^\infty G_k(x,t,\rho)\left(Q(t)F_k^0(t,\rho)\right)\,dt, \tag{1.22}$$

где $G_m(x,t,\rho)$ обозначает оператор, действующий (при заданных значениях x,t,ρ) в $\wedge^m\mathbb{C}^n$ следующим образом:

$$G_m(x,t,\rho)f = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_m} \sigma_\alpha \left|f \wedge C_{\alpha'}(t,\rho)\right| C_\alpha(x,\rho). \tag{1.23}$$

Ясно, что операторно-значная функция $G_m(x,t,\rho)$ определена и непрерывна на $(0,\infty)\times(0,\infty)\times(\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\})$; как функция $\rho\, G_m(x,t,\rho)$ голоморфна в секторе $\mathcal{S}$.

Функцию $G_m(x,t,\rho)$ можно рассматривать как формальную функцию Грина неоднородной системы

$$y' = (\rho B + x^{-1}A)^{(m)}y + f(x), \tag{1.24}$$

построенную с помощью стандартной схемы метода вариации произвольных постоянных с использованием ФСР $\{C_\alpha(x,\rho)\}_{\alpha\in\mathcal{A}_m}$ однородной системы (1.15). Из построения следует, в частности, что если для некоторой функции $f(\cdot)$ существует интеграл

$$Y(x) = \int\limits_0^x G_m(x,t,\rho)f(t)\,dt,$$

то $Y(\cdot)$ является решением (1.24); то же справедливо для интеграла

$$Y(x) = -\int\limits_x^\infty G_m(x,t,\rho)f(t)\,dt.$$

Используя другие ФСР однородной системы (1.15), получаем следующие представления для $G_m(x,t,\rho)$:

$$G_m(x,t,\rho)f = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_m} \chi_\alpha \left| f \wedge E_{\alpha'}(t,\rho) \right| E_\alpha(x,\rho), \tag{1.25}$$

$$G_m(x,t,\rho)f = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_m} \chi_\alpha \left| f \wedge \Psi_{0\alpha'}(t,\rho) \right| \Psi_{0\alpha}(x,\rho), \tag{1.26}$$

где $\chi_\alpha := |\mathfrak{f}_\alpha \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}|$.

Установим ряд вспомогательных утверждений, на которые будем опираться при доказательстве Теорем 1.2, 1.3. Для их формулировки введем ряд обозначений.

Пусть множество $\mathcal{P}\subset\mathbb{C}$ таково, что ∞ является его предельной точкой. Запись $f\in PC^{\pm}(\mathcal{P})$, где $f=f(x,\rho)$ – функция, заданная на $[0,\infty)\times\mathcal{P}$, всюду далее означает, что:

- f непрерывна и ограничена на множестве $([0,\infty)\times\mathcal{P})\cap\{(x,\rho): \pm(|\rho|x-1)>0\}$;
- f допускает непрерывное продолжение на множество $([0,\infty)\times\mathcal{P})\cap\{(x,\rho): \pm(|\rho|x-1)\geq 0\}$

Запись $f\in PC(\mathcal{P})$ означает, что принадлежит $f\in PC^{+}(\mathcal{P})$ и $f\in PC^{-}(\mathcal{P})$ одновременно. Если $f\in PC(\mathcal{P})$ и, кроме того,

$$\lim_{\rho\to\infty}\sup_{x\in[0,\infty)}\|f(x,\rho)\|=0,$$

то, по определению, $f\in PC_0(\mathcal{P})$.

Заметим, что, если $f\in BC\left([0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}}\right)$ и $f\in PC_0(\overline{\mathcal{S}})$, то $f\in BC\left([0,\infty),C_0(\overline{\mathcal{S}})\right)$.

Лемма 1.1. *Пусть функция $F(x,\rho)$, $(x,\rho)\in[0,\infty)\times l$ ($l=\{\rho=zt, t\in[0,\infty)\}$) такова, что:*

1. *$F\in PC(l)$;*
2. *для каждого фиксированного $x\in[0,\infty)$ $F(x,\cdot)\in L_2(l)$ и*

$$\sup_{x\in[0,\infty)}\|F(x,\cdot)\|_{L_2(l)}<\infty;$$

3. для каждого $T \in (0,\infty)$

$$\sup_{x\in[0,T]} \|F(x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} \to 0$$

при $R \to \infty$.

Тогда $F(\cdot,\cdot) \in BC([0,\infty), L_2(l))$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $x_0 > 0$ и пусть $x_1 \to x_0$. Обозначим через $\rho_\pm$ точки на луче l, такие что $|\rho_-| = \min\{x_0^{-1}, x_1^{-1}\}$, $|\rho_+| = \max\{x_0^{-1}, x_1^{-1}\}$.

Зафиксируем произвольное $T > x_0$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $R > 0$, такое что $\sup\limits_{x\in[0,T]} \|F(x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} < \varepsilon/4$. Для определённости будем считать, что $|\rho_+| < R$. Из свойств функции F следует, что:

$$\|F(x_1,\cdot) - F(x_0,\cdot)\|_{L_2(l^-(R)\cap l^+(|\rho_+|))} < \frac{\varepsilon}{4},\ \|F(x_1,\cdot) - F(x_0,\cdot)\|_{L_2(l^-(|\rho_-|))} < \frac{\varepsilon}{4}$$

для всех x_1 достаточно близких к x_0. Далее, поскольку $|\rho_+ - \rho_-| \to 0$ при $x_1 \to x_0$ и F ограничена, следующая оценка

$$\|F(x_1,\cdot) - F(x_0,\cdot)\|_{L_2(l^-(|\rho_+|)\cap l^+(|\rho_-|))} < \frac{\varepsilon}{4}$$

также справедлива для всех x_1 достаточно близких к x_0.

Рассмотрим случай $x_0 = 0$. Определив R так же, как в предыдущем случае, при $x_1 < R^{-1}$ запишем:

$$\|F(x_1,\cdot) - F(x_0,\cdot)\|_{L_2(l)} \le \|F(x_1,\cdot) - F(x_0,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} +$$

$$\|F(x_1,\cdot) - F(x_0,\cdot)\|_{L_2(l^-(R))}.$$

Первое слагаемое меньше, чем $\varepsilon/4$ в силу выбора R. Второе слагаемое меньше $3\varepsilon/4$ при всех x_1 достаточно близких к x_0, поскольку F непрерывна на множестве $([0,\infty)\times l) \cap \{(x,\rho) : (|\rho|x - 1) < 0\}$.

□

Доказанное утверждение допускает следующее очевидное обобщение.

Лемма 1.2. *Пусть скалярная функция $F = F(f, x, \rho)$ такова, что*

- *$F(f,\cdot,\cdot) \in BC([0,\infty), L_2(l))$ для любого фиксированного $f \in X_p$;*

- $F \in \mathcal{L}\left(X_p, BC([0,\infty), L_2(l))\right)$

и пусть $g = g(x,\rho)$ – скалярная функция из класса $PC(l)$.

Положим $\mathcal{F}(f,x,\rho) := g(x,\rho)F(f,x,\rho)$. Тогда для любого фиксированного $f \in X_p$ $\mathcal{F}(f,\cdot,\cdot) \in BC([0,\infty), L_2(l))$; более того,

$$\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X_p, BC([0,\infty), L_2(l))).$$

Утверждение остается справедливым в случае, если одна из рассматриваемых функций $F = F(f,x,\rho)$, $g = g(x,\rho)$ принимает значения в некотором конечномерном пространстве.

Лемма 1.3. *I. Рассмотрим следующее интегральное преобразование:*

$$F(f,x,\rho) = \int\limits_0^x f(t)\exp\left((\lambda_1(x-t)+\lambda_2 t)\rho\right)dt,$$

где $f \in X_p$, $p > 2$, λ_2, λ_1 таковы, что $Re(\lambda_1\rho) \le 0$, $Re(\lambda_2\rho) \le 0$ для всех $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$, причём в случае $\lambda_1 = \lambda_2$ для всех $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ выполнено строгое неравенство $Re(\lambda_1\rho) < 0$. Тогда:

1. *для любой фиксированной $f \in X_p$ имеем*

$$F(f,\cdot,\cdot) \in BC\left([0,\infty) \times \overline{\mathcal{S}}\right);$$

2. $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |F(f,x,\rho)| \to 0$ *при $\rho \to \infty$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$;*
3. *для любого луча вида $l = [0, z\cdot\infty)$, $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ имеем*

$$F(f,\cdot,\cdot) \in BC([0,\infty), L_2(l));$$

4. *для любого луча $l = [0, z\cdot\infty)$, $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ отображение $X_p \ni f \to F(f,\cdot,\cdot) \in BC([0,\infty), L_2(l) \cap C_0(l))$ есть линейный непрерывный оператор.*

II. Для интегрального преобразования:

$$F^+(f,x,\rho) = \int\limits_x^\infty f(t)\exp\left(\lambda(t-x)\rho\right)dt,$$

где $f \in X_p$, $p \ge 2$, $Re(\lambda\rho) \le 0$ для всех $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$ справедливы те же утверждения, что для $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ в пункте I.

III. Пусть

$$F_0(f,\rho) = \int\limits_{|\rho^{-1}|}^{\infty} f(t)\exp(\lambda\rho t)\,dt,$$

где $f \in X_p$, $p > 2$, $Re(\lambda\rho) \le 0$ *для всех* $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$. *Тогда* $F_0(f,\cdot) \in C_0(\overline{\mathcal{S}})$, *для любого луча вида* $l = [0, z\cdot\infty)$, $z \in \overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ $F_0(f,\cdot) \in L_2(l)$, *более того,* $F_0 \in \mathcal{L}(X_p, L_2(l))$.

Доказательство. I. 1. Утверждение очевидным образом следует из того, что $f \in L(0,\infty)$, $|\exp((\lambda_1(x-t)+\lambda_2 t)\rho)| \le 1$.

2. Утверждение очевидно в случае, когда f – гладкая функция с компактным носителем. Пусть теперь $f \in X_p$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется гладкая функция $\tilde f$ с компактным носителем, такая что $\|f - \tilde f\|_{L(0,\infty)} < \varepsilon/2$. Тогда $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |F(\tilde f, x,\rho) - F(f,x,\rho)| < \varepsilon/2$ для всех $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$. Далее, для выбранной таким образом $\tilde f$ по данному ε выберем такое $R(\varepsilon)$, что $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |F(\tilde f, x, \rho)| < \varepsilon/2$ при всех $\rho \in \overline{\mathcal{S}} : |\rho| > R(\varepsilon)$. Тогда при всех $\rho \in \overline{\mathcal{S}} : |\rho| > R(\varepsilon)$ получим $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |F(f,x,\rho)| < \varepsilon$.

3. и 4. Для любого луча l имеем $\lambda_k\rho = |\rho|(is_k - c_k)$, где c_k, s_k – некоторые вещественные числа, зависящие только от луча l, причём $c_k \ge 0$. Дальнейшее рассмотрение различно в случаях: $c_1 \ne c_2$ (причём не нарушая общности можно положить $c_2 > c_1$), $c_1 = c_2$, $s_1 \ne s_2$ и $\lambda_1 = \lambda_2$.

1) Случай $c_2 > c_1$.

Имеем:

$$|F(f,x,\rho)| \le \int\limits_{\tau_1 x}^{\tau_2 x} |f(\xi - \tau_1 x)| \exp(-c|\rho|\xi)\,d\xi = \mathcal{F}_L(f_x, c|\rho|),$$

где $c = c_2 - c_1$, $\tau_k = c_k/c$,

$$f_x(\xi) := \theta^+((\xi - \tau_1 x)(\tau_2 x - \xi))|f(\xi - \tau_1 x)|,$$

и $\mathcal{F}_L$ обозначает классическое преобразование Лапласа. Из результатов §4.2 [45] следует оценка:

$$\|F(f,x,\cdot)\|_{L_2(l)} \le M\|f_x\|_{L_2(0,\infty)} \le M\|f\|_{L_2(0,\infty)}. \tag{1.27}$$

Далее, используя неравенство Гёльдера, получаем оценку:

$$
|F(f,x,\rho)| \le \left\{ \int\limits_{\tau_1 x}^{\tau_2 x} |f(\xi - \tau_1 x)|^p d\xi \right\}^{1/p} \left\{ \int\limits_{\tau_1 x}^{\tau_2 x} \exp(-cp'|\rho|\xi)\, d\xi \right\}^{1-1/p}
$$

$$
\le M|\rho|^{-1+1/p},
$$

где $p' = p/(p-1)$.

Из полученной оценки, в свою очередь, следует:

$$
\sup_{x\in[0,\infty)} \|F(f,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} \le MR^{-1}. \tag{1.28}
$$

Оценки (1.27), (1.28) позволяют применить Лемму 1.1, что доказывает пункт 3. Пользуясь снова оценкой (1.27), получаем утверждение пункта 4.

2) Случай $c_1 = c_2$, $s_2 > s_1$. Имеем:

$$
F(f,x,\rho) = \exp(-c_1|\rho|x)F_0(f,x,\rho),
$$

$$
F_0(f,x,\rho) = \int\limits_0^x f(t)\exp(i|\rho|(s_1(x-t)+s_2 t))\, dt = \mathcal{F}(f_x, s|\rho|),
$$

где $\mathcal{F}$ обозначает классическое преобразование Фурье и

$$
f_x(\xi) := \theta^+((\xi-\tau_1 x)(\tau_2 x - \xi))f(\xi - \tau_1 x),
$$

$\tau_k := s_k/s$, $s = s_2 - s_1$. Заметим, что отображение $x \to f_x$ действует непрерывно из $[0,\infty)$ в $L_2(-\infty,\infty)$, более того, $\|f_x\|_{L_2(-\infty,\infty)} \le \|f\|_{L_2(0,\infty)}$. Справедливость доказываемых утверждений теперь следует из теоремы Планшереля и Леммы 1.2 с учетом $c_1 \ge 0$.

3) Случай $\lambda_1 = \lambda_2$. В этом случае имеем:

$$
F(f,x,\rho) = \exp(\lambda_1 x\rho) \int\limits_0^x f(t)\, dt,
$$

где $c > 0$, откуда вытекают оценки:

$$
|F(f,x,\rho)| \le \exp(-cx|\rho|) \int\limits_0^x |f(t)|\, dt,
$$

$$\|F(f,x,\cdot)\|_{L_2(l)} \le Mx^{-1/2}\int\limits_0^x |f(t)|\,dt,$$

$$\|F(f,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} \le M\exp(-cRx)x^{-1/2}\int\limits_0^x |f(t)|\,dt.$$

В силу $f \in X_p$, $p > 2$ имеем:

$$x^{-1/2}\int\limits_0^x |f(t)|\,dt \le \begin{cases} x^{1/2-1/p}\|f\|_{L_p(0,x)},\ x \in (0,\infty) \\ \|f\|_{L_p(0,1)} + \|f\|_{L_1(1,x)},\ x \in [1,\infty), \end{cases}$$

что даёт

$$\|F(f,x,\cdot)\|_{L_2(l)} \le M(\|f\|_{L_p(0,1)} + \|f\|_{L_1(1,\infty)}),$$
$$\|F(f,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} \le M\|f\|_{L_p(0,\infty)}R^{1/p-1/2}.$$

Применяя Лемму 1.1, получим требуемое утверждение.

II. Доказательство аналогично доказательству части I.

III. Включение $F_0(f,\cdot) \in C_0(\overline{\mathcal{S}})$ очевидно. Справедливость остальных утверждений удобнее установить для функции:

$$F_0^-(f,\rho) = \int\limits_0^{|\rho^{-1}|} f(t)\exp(\lambda\rho t)\,dt.$$

Заметим, что в условиях теоремы имеем $|F_0^-(f,\rho)| \le |\tilde{F}_0^-(f,|\rho|)|$, где:

$$\tilde{F}_0^-(f,r) := \int\limits_0^\infty \theta^-(rt-1)|f(t)|\,dt.$$

Поскольку

$$\int\limits_0^\infty \theta^-(rt-1)\,dr = t^{-1},$$

получаем:

$$\|\tilde{F}_0^-(f,\cdot)\|_{L_2(l)} \le \int\limits_0^\infty t^{-1/2}|f(t)|dt \le \left\{\frac{2}{2-p'}\right\}^{1/p'}\|f\|_{L_p(0,1)} + \|f\|_{L_1(0,\infty)},$$

$p' = p/(p-1) \in (0,2)$.

$\square$

Лемма 1.4. *Пусть для каждого фиксированного набора аргументов* x, t, ρ $\mathcal{G}(x,t,\rho)$ *– линейный оператор, действующий из* $\mathcal{L}\left(\wedge^m\mathbb{C}^n\right)$ *в* $\wedge^m\mathbb{C}^n$. *Предположим, что операторно-значная функция* $\mathcal{G}(\cdot,\cdot,\cdot)$ *обладает следующими свойствами:*

1. $\mathcal{G}(x, x\tau, \rho)$ *непрерывна по* $[0,\infty)\times[0,1]\times\overline{\mathcal{S}}$;
2. $\|\mathcal{G}(x,x\tau,\rho)\|\le M$, *где константа* M *не зависит от* $(x,\tau,\rho)\in[0,\infty)\times[0,1]\times\overline{\mathcal{S}}$.

Тогда для каждой из функций:

$$F^-(Q,x,\rho)=\theta^-(|\rho x|-1)\int\limits_0^x \mathcal{G}(x,t,\rho)Q(t)\,dt,$$

$$F^+(Q,x,\rho)=\theta^+(|\rho x|-1)\int\limits_0^{|\rho|^{-1}} \mathcal{G}(x,t,\rho)Q(t)\,dt,$$

при любом $p>2$ *справедливы следующие утверждения:*

1. *для любого фиксированного* $Q\in\mathcal{X}_p^m$ $F^\pm(Q,\cdot,\cdot)\in PC_0(\overline{\mathcal{S}})$;
2. *для любого фиксированного* $Q\in\mathcal{X}_p^m$ $F^\pm(Q,\cdot,\cdot)\in BC([0,\infty),L_2(l))$, *где* l *– луч вида* $l=\{\rho=zt, t\in[0,\infty)\}$ *с произвольным фиксированным* $z\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$;
3. $F^\pm\in\mathcal{L}(\mathcal{X}_p^m, BC([0,\infty),L_2(l)))$, *т.е., отображение*

$$\mathcal{X}_p^m\ni Q\to F^\pm(Q,\cdot,\cdot)\in BC([0,\infty),L_2(l))$$

есть линейный непрерывный оператор.

Доказательство. 1) Для любого $x>0$ справедлива оценка:

$$\|F^-(Q,x,\rho)\|\le M\theta^-(|\rho x|-1)\int\limits_0^x \|Q(t)\|\,dt$$

$$\le M\theta^-(|\rho x|-1)\int\limits_0^{|\rho|^{-1}} \|Q(t)\|\,dt, \tag{1.29}$$

Заметим далее, что $F^-(Q,0,\rho)\equiv 0$. При $x>0$ представление для $F^-(Q,x,\rho)$ перепишем в виде:

$$F^-(Q,x,\rho)=\theta^-(|\rho x|-1)\int\limits_0^1 \mathcal{G}(x,x\tau,\rho)Q(x\tau)x\,d\tau,$$

откуда, с учётом оценки (1.29) следует непрерывность $F^-(Q,\cdot,\cdot)$ на множестве $([0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}})\cap\{|\rho|x\le 1\}$ в случае непрерывной функции $Q(\cdot)$. Для произвольной $Q\in\mathcal{X}_p^m$ рассмотрим последовательность непрерывных Q_n, сходящуюся к Q в $\mathcal{X}_p^m$. Из линейности $F^-(Q,x,\rho)$ по $Q(\cdot)$ и оценки (1.29) следует, что последовательность $F^-(Q_n,x,\rho)$ сходится к $F^-(Q,x,\rho)$ равномерно на множестве $([0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}})\cap\{|\rho|x\le 1\}$. Таким образом, мы показали, что $F^-(Q,\cdot,\cdot)\in PC(\overline{\mathcal{S}})$.

Далее, из оценки (1.29) следует:

$$\lim_{\rho\to\infty}\sup_{x\in(0,\infty)}\|F^-(Q,x,\rho)\|=0.$$

Таким образом, мы получили $F^-(Q,\cdot,\cdot)\in PC_0(\overline{\mathcal{S}})$.

Далее, поскольку при $x>0$

$$\int\limits_0^\infty \theta^-(|\rho x|-1)d|\rho|=x^{-1},$$

из (1.29) и неравенства Коши–Буняковского следует оценка:

$$\|F^-(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l)}\le Mx^{-1/2}\int\limits_0^x \|Q(t)\|\,dt,$$

что даёт для произвольного $Q\in\mathcal{X}_p^m$:

$$\|F^-(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l)}\le M\left(\|Q\|_{L_2(0,1)}+\|Q\|_{L_1(1,\infty)}\right). \tag{1.30}$$

Далее, используя неравенства Коши–Буняковского и Гёльдера можно из (1.29) получить оценку:

$$\|F^-(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))}\le M\theta^-(Rx-1)(1-Rx)^{1/2}x^{-1/2}\int\limits_0^x \|Q(t)\|dt\le$$

$$M\theta^-(Rx-1)(1-Rx)^{1/2}x^{1/2-1/p}\|Q\|_{L_p(0,\infty)},$$

из которой следует:

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \|F^-(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} \le M \sup_{x\in[0,R^{-1}]} (1-Rx)^{1/2} x^{1/2-1/p} =$$

$$MR^{1/p-1/2} \sup_{t\in[0,1]} (1-t)^{1/2} t^{1/2-1/p}.$$

Поскольку $p > 2$, из полученной оценки вытекает:

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \|F^-(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} = 0.$$

В силу (1.30) и Леммы 1.1 получаем $F^-(Q,\cdot,\cdot) \in BC([0,\infty), L_2(l))$. Наконец, из оценки (1.30) следует $F^- \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_p^m, BC([0,\infty), L_2(l)))$.

2) Рассуждая аналогично предыдущему, получаем оценку:

$$\|F^+(Q,x,\rho)\| \le M\theta^+(|\rho x| - 1) \int_0^{|\rho|^{-1}} \|Q(t)\|\, dt, \tag{1.31}$$

из которой следует:

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \|F^+(Q,x,\rho)\| = 0.$$

Таким образом, имеем $F^+(Q,\cdot,\cdot) \in PC_0(\overline{\mathcal{S}})$.

Далее, из (1.31) следует:

$$\|F^+(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l)} \le M \left\{ \int_0^\infty \theta^+(|\rho x| - 1) \left(\int_0^{|\rho|^{-1}} \|Q(t)\|\, dt \right)^2 d|\rho| \right\}^{1/2}$$

$$\le M \int_0^\infty \|Q(t)\| \left\{ \int_0^{t^{-1}} d|\rho| \right\}^{1/2} = M \int_0^\infty t^{-1/2} \|Q(t)\|\, dt,$$

что даёт оценку:

$$\|F^+(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l)} \le M(\|Q\|_{L_p(0,1)} + \|Q\|_{L_1(1,\infty)}). \tag{1.32}$$

Рассуждая аналогично, получаем:

$$\|F^+(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} \le$$

$$M\left\{\int\limits_R^\infty \theta^+(rx-1)\left(\int\limits_0^\infty \theta^-(rt-1)\|Q(t)\|\,dt\right)^2 dr\right\}^{1/2} \le$$

$$\le M\int\limits_0^{R_+^{-1}}\|Q(t)\|\left\{\int\limits_{R_+}^{t^{-1}} dr\right\}^{1/2} dt \le M\int\limits_0^{R_+^{-1}}\|Q(t)\|(t^{-1}-R_+)^{1/2}\,dt \le$$

$$\le M\|Q\|_{L_p(0,R_+^{-1})}\left\{\int\limits_0^{R_+^{-1}}(t^{-1}-R_+)^{p'/2}\,dt\right\}^{1/p'}$$

$$= M\|Q\|_{L_p(0,R_+^{-1})}R_+^{1/p-1/2}\left\{\int\limits_0^1(\tau^{-1}-1)^{p'/2}\,d\tau\right\}^{1/p'},$$

где $p' = p/(p-1)$, $R_+ = R_+(R,x) := \max\{R, x^{-1}\}$. Поскольку $p > 2 > p'$, интегралы в полученных оценках сходятся и мы приходим к оценке:

$$\|F^+(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} \le MR_+^{1/p-1/2}\|Q\|_{L_p(0,\infty)}.$$

Заметим, что $\sup\limits_{x\in[0,\infty)}(R_+(R,x))^{1/p-1/2} = R^{1/p-1/2} \to 0$ при $R\to\infty$. Таким образом, из полученной оценки вытекает

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{x\in[0,\infty)}\|F^+(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} = 0.$$

Применяя Лемму 1.1, заключаем, что $F^+(Q,\cdot,\cdot) \in BC([0,\infty), L_2(l))$. Наконец, из оценки (1.32) следует $F^+ \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_p^m, BC([0,\infty), L_2(l)))$ $\square$

Лемма 1.5. *Пусть для каждого фиксированного набора аргументов x, t, ρ $\mathcal{G}(x,t,\rho)$ – линейный оператор, действующий из $\mathcal{L}(\wedge^m\mathbb{C}^n)$ в $\wedge^m\mathbb{C}^n$. Предположим, что операторно-значная функция $\mathcal{G}(\cdot,\cdot,\cdot)$ обладает следующими свойствами:*

1. *$\mathcal{G}(x,t,\rho)$ непрерывна по $\{(x,t,\rho) : \rho\in\overline{\mathcal{S}}, |\rho|^{-1} \le t \le x < \infty\}$;*
2. *$\|\mathcal{G}(x,t,\rho)\| \le M$, где константа M не зависит от (x,t,ρ).*

Тогда для функции

$$F(Q,x,\rho) = \theta^+(|\rho x|-1)\int\limits_{|\rho|^{-1}}^x (\rho t)^{-1}\mathcal{G}(x,t,\rho)Q(t)\,dt$$

при любом $p > 2$ справедливы те же утверждения, что для функций $F^{\pm}(\cdot,\cdot,\cdot)$ в Лемме 1.4.

Доказательство. Поскольку при $|\rho x| \geq 1$, $t \in [|\rho|^{-1}, x]$ имеем $|\rho t| \geq 1$, справедлива оценка:

$$\|F(Q,x,\rho)\| \leq M \int\limits_0^\infty \|Q(t)\|\,dt.$$

Таким образом, $F(Q,x,\rho)$ ограничена при $(x,\rho) \in [0,\infty) \times \overline{\mathcal{S}}$. Покажем, что $F(Q,\cdot,\cdot)$ непрерывна на каждом из множеств $\big([0,\infty) \times \overline{\mathcal{S}}\big) \cap \{(x,\rho) : \pm(|\rho|x - 1) > 0\}$ и допускает непрерывное продолжение на $\big([0,\infty) \times \overline{\mathcal{S}}\big) \cap \{(x,\rho) : \pm(|\rho|x - 1) \geq 0\}$. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, соответствующий верхнему знаку. Продолжение функции $F(Q,x,\rho)$ на множество $\big([0,\infty) \times \overline{\mathcal{S}}\big) \cap \{(x,\rho) : (|\rho|x - 1) \geq 0\}$ (которое будем обозначать тем же символом) естественно определить равенством:

$$F(Q,x,\rho) = \int\limits_{|\rho|^{-1}}^{x} (\rho t)^{-1} \mathcal{G}(x,t,\rho) Q(t)\,dt.$$

Пусть теперь (x_0,ρ_0) – произвольная точка множества $\big([0,\infty) \times \overline{\mathcal{S}}\big) \cap \{(x,\rho) : (|\rho|x - 1) \geq 0\}$, а $\{(x_n,\rho_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность точек того же множества, сходящаяся к (x_0,ρ_0). Полагая $Q(\cdot)$ фиксированной, запишем

$$F(Q,x_n,\rho_n) = \int\limits_0^\infty f_n(t)\,dt,$$

где

$$f_n(t) = \theta^+(|\rho_n t| - 1)\theta^-(t - x_n)\mathcal{G}(x_n,t,\rho_n)Q(t),\ n = \overline{0,\infty}.$$

Из свойств непрерывности и ограниченности функции $\mathcal{G}(\cdot,\cdot,\cdot)$ следует, что $f_n(t) \to f_0(t)$ при $n \to \infty$ для п.в. $t \in (0,\infty)$ и справедлива оценка $\|f_n(t)\| \leq M\|Q(t)\|$. Согласно теореме Лебега об ограниченной сходимости имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty f_n(t)\,dt = \int\limits_0^\infty f_0(t)\,dt,$$

что означает $F(Q,x_n,\rho_n) \to F(Q,x_0,\rho_0)$. Таким образом, мы показали, что $F(Q,\cdot,\cdot) \in PC(\overline{\mathcal{S}})$.

Далее, рассуждая как при доказательстве предыдущей леммы, получим:

$$\|F(Q,x,\rho)\| \le M\theta^+(|\rho x|-1)\int\limits_{|\rho|^{-1}}^{x} |\rho t|^{-1}\|Q(t)\|\,dt$$

$$\le M|\rho|^{-1/2}\int\limits_0^\infty t^{-1/2}\|Q(t)\|\,dt,$$

что даёт оценку:

$$\|F(Q,x,\rho)\| \le M|\rho|^{-1/2}(\|Q\|_{L_p(0,1)}+\|Q\|_{L_1(1,\infty)}). \tag{1.33}$$

Из (1.33) следует, в частности:

$$\lim_{\rho\to\infty}\sup_{x\in(0,\infty)}\|F(Q,x,\rho)\|=0.$$

Таким образом, имеем $F(Q,\cdot,\cdot)\in PC_0(\overline{\mathcal{S}})$.

Далее, имеем:

$$\|F(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l)} \le M\left\{\int\limits_{x^{-1}}^{\infty}\left(\int\limits_{|\rho|^{-1}}^{x}|\rho t|^{-1}\|Q(t)\|dt\right)^2 d|\rho|\right\}^{1/2} \le$$

$$\le M\int\limits_0^x\left\{\int\limits_{t^{-1}}^{\infty}|\rho t|^{-2}\|Q(t)\|^2\,d|\rho|\right\}^{1/2}dt = M\int\limits_0^x t^{-1/2}\|Q(t)\|\,dt,$$

откуда следует:

$$\|F(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l)} \le M(\|Q\|_{L_p(0,1)}+\|Q\|_{L_1(1,\infty)}). \tag{1.34}$$

Более того, рассуждая аналогично, получим для произвольного $R>0$:

$$\|F(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} \le$$

$$M\left\{\int\limits_R^\infty\theta^+(rx-1)\left(\int\limits_0^x\theta^+(rt-1)(rt)^{-1}\|Q(t)\|\,dt\right)^2dr\right\}^{1/2}$$

$$\le M\int\limits_0^x t^{-1}\|Q(t)\|\left\{\int\limits_R^\infty r^{-2}\theta^+(rx-1)\theta^+(rt-1)dr\right\}^{1/2}dt$$

$$= M \int\limits_0^x t^{-1}(R_+(R,t))^{-1/2}\|Q(t)\|\,dt,$$

где $R_+(R,t) = \max\{R, t^{-1}\}$. Таким образом, имеем:

$$\|F(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} \le M \int\limits_0^{R^{-1}} t^{-1/2}\|Q(t)\|\,dt + MR^{-1/2}\int\limits_{R^{-1}}^{x} t^{-1}\|Q(t)\|\,dt \le$$

$$\le M \int\limits_0^{R^{-1}} t^{-1/2}\|Q(t)\|\,dt + MR^{-1/2}\|Q\|_{L_p(0,\infty)}\left\{\int\limits_{R^{-1}}^{\infty} t^{-p'}dt\right\}^{1/p'} =$$

$$\le M \int\limits_0^{R^{-1}} t^{-1/2}\|Q(t)\|\,dt + MR^{1/p-1/2}\|Q\|_{L_p(0,\infty)},$$

где (как и ранее) $p' = p/(p-1)$. Поскольку $p > 2$ и (как следствие) $t^{-1/2}\|Q(t)\| \in L_1(0,\infty)$, из полученной оценки можно сделать вывод, что

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{x\in[0,\infty)}\|F(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} = 0.$$

В силу (1.34) и Леммы 1.1 отсюда следует, что $F(Q,\cdot,\cdot) \in BC([0,\infty), L_2(l))$. Далее, из оценки (1.34) следует $F \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_p^m, BC([0,\infty), L_2(l)))$.

$\square$

Лемма 1.6. *Пусть для каждого фиксированного набора аргументов x, t, ρ $\mathcal{G}(x,t,\rho)$ – линейный оператор, действующий из $\mathcal{L}(\wedge^m\mathbb{C}^n)$ в $\wedge^m\mathbb{C}^n$. Предположим, что операторно-значная функция $\mathcal{G}(\cdot,\cdot,\cdot)$ обладает следующими свойствами:*

1. *$\mathcal{G}(x,t,\rho)$ непрерывна по $\{(x,t,\rho) : \rho \in \overline{\mathcal{S}}, 0 \le x < t < \infty\}$;*
2. *$\|\mathcal{G}(x,t,\rho)\| \le M$, где константа M не зависит от (x,t,ρ).*

Тогда для функций

$$F^+(Q,x,\rho) = \theta^+(|\rho x| - 1)\int\limits_x^{\infty}(\rho t)^{-1}\mathcal{G}(x,t,\rho)Q(t)\,dt,$$

$$F^-(Q,x,\rho) = \theta^-(|\rho x| - 1)\int\limits_x^{|\rho^{-1}|}\mathcal{G}(x,t,\rho)Q(t)\,dt$$

при любом $p > 2$ справедливы те же утверждения, что для функций $F^{\pm}(\cdot,\cdot,\cdot)$ в Лемме 1.4.

Доказательство. 1) Непрерывность естественного продолжения функции $F^+(Q,\cdot,\cdot)$ на множество $([0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}})\cap\{(x,\rho) : |\rho x| \ge 1\}$ устанавливается при помощи теоремы Лебега аналогично тому, как это сделано при доказательстве Леммы 1.5. Также аналогично доказывается его ограниченность. Аналогичным образом устанавливаются оценки:

$$\|F^+(Q,x,\rho)\| \le M\theta^+(|\rho x|-1)\int\limits_x^\infty |\rho t|^{-1}\|Q(t)\|\,dt$$

$$\le M|\rho|^{-1/2}\int\limits_0^\infty t^{-1/2}\|Q(t)\|\,dt,$$

$$\|F^+(Q,x,\rho)\| \le M|\rho|^{-1/2}(\|Q\|_{L_p(0,1)} + \|Q\|_{L_1(1,\infty)}) \tag{1.35}$$

из которых следует, в частности, $F^+(Q,\cdot,\cdot) \in PC_0(\overline{\mathcal{S}})$.

Далее, имеем:

$$\|F^+(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l)} \le M\left\{\int\limits_{x^{-1}}^\infty \left(\int\limits_x^\infty |\rho t|^{-1}\|Q(t)\|dt\right)^2 d|\rho|\right\}^{1/2} \le$$

$$\le M\int\limits_x^\infty \left\{\int\limits_{t^{-1}}^\infty |\rho t|^{-2}\|Q(t)\|^2\,d|\rho|\right\}^{1/2} dt = M\int\limits_x^\infty t^{-1/2}\|Q(t)\|\,dt,$$

откуда следует:

$$\|F^+(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l)} \le M(\|Q\|_{L_p(0,1)} + \|Q\|_{L_1(1,\infty)}). \tag{1.36}$$

Более того, рассуждая аналогично, получим для произвольного $R > 0$:

$$\|F(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} \le M$$

$$\left\{\int\limits_R^\infty \theta^+(rx-1)\left(\int\limits_x^\infty \theta^+(rt-1)(rt)^{-1}\|Q(t)\|\,dt\right)^2 dr\right\}^{1/2}$$

$$\leq M \int_x^\infty t^{-1}\|Q(t)\| \left\{ \int_R^\infty r^{-2}\theta^+(rx-1)\theta^+(rt-1)dr \right\}^{1/2} dt$$

$$= M \int_x^\infty t^{-1}(R_+(R,t))^{-1/2}\|Q(t)\|\, dt,$$

где $R_+(R,t) = \max\{R, t^{-1}\}$. Таким образом, имеем:

$$\|F^+(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} \leq$$

$$M \int_0^{R^{-1}} t^{-1/2}\|Q(t)\|\, dt + MR^{-1/2} \int_{R^{-1}}^\infty t^{-1}\|Q(t)\|\, dt \leq$$

$$\leq M \int_0^{R^{-1}} t^{-1/2}\|Q(t)\|\, dt + MR^{-1/2}\|Q\|_{L_p(0,\infty)} \left\{ \int_{R^{-1}}^\infty t^{-p'} dt \right\}^{1/p'} =$$

$$\leq M \int_0^{R^{-1}} t^{-1/2}\|Q(t)\|\, dt + MR^{1/p-1/2}\|Q\|_{L_p(0,\infty)},$$

где (как и ранее) $p' = p/(p-1)$. Поскольку $p > 2$ и (как следствие) $t^{-1/2}\|Q(t)\| \in L_1(0,\infty)$, из полученной оценки можно сделать вывод, что

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \|F^+(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} = 0.$$

В силу (1.36) и Леммы 1.1 отсюда следует, что $F^+(Q,\cdot,\cdot) \in BC([0,\infty), L_2(l))$. Далее, из оценки (1.36) следует $F^+ \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_p^m, BC([0,\infty), L_2(l)))$.

2) Для произвольной последовательности $\{(x_n,\rho_n)\}_{n=0}^\infty$ такой, что $|\rho_n x_n| \leq 1$ и $(x_n,\rho_n) \to (x_0,\rho_0)$ при $n\to\infty$, в условиях теоремы имеем $f_n(t) \to f_0(t)$ при $n\to\infty$ для п.в. $t \in (0,\infty)$, где:

$$f_n(t) = \theta^-(|\rho_n t| - 1)\theta^+(t - x_n)\mathcal{G}(x_n, t, \rho_n)Q(t),\ n = \overline{0,\infty};$$

более того, $\|f_n(t)\| \leq M\|Q(t)\|$. Согласно теореме Лебега об ограниченной сходимости имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)\, dt = \int_0^\infty f_0(t)\, dt,$$

что означает $F^-(Q,x_n,\rho_n) \to F^-(Q,x_0,\rho_0)$. Таким образом, мы показали, что $F^-(Q,\cdot,\cdot) \in PC(\overline{\mathcal{S}})$.

Далее, справедлива оценка

$$\|F^-(Q,x,\rho)\| \le M\theta^-(|\rho x|-1)\int\limits_0^{|\rho|^{-1}} \|Q(t)\|\,dt,$$

из которой следует, в частности, что $F^-(Q,\cdot,\cdot) \in PC_0(\overline{\mathcal{S}})$. Из этой же оценки следует:

$$\|F^-(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l)} \le M\left\{\int\limits_0^\infty \theta^-(rx-1)\left(\int\limits_0^\infty \theta^-(rt-1)\|Q(t)\|\,dt\right)^2 dr\right\}^{1/2}$$

$$\le M\int\limits_0^\infty \|Q(t)\|\left\{\int\limits_0^{t^{-1}} dr\right\}^{1/2} = M\int\limits_0^\infty t^{-1/2}\|Q(t)\|\,dt,$$

что даёт оценку:

$$\|F^-(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l)} \le M(\|Q\|_{L_p(0,1)} + \|Q\|_{L_1(1,\infty)}). \tag{1.37}$$

Аналогично для произвольного $R>0$, $x>R^{-1}$ получаем:

$$\|F^-(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} \le$$

$$M\left\{\int\limits_R^\infty \theta^-(rx-1)\left(\int\limits_0^\infty \theta^-(rt-1)\|Q(t)\|\,dt\right)^2 dr\right\}^{1/2} \le$$

$$\le M\int\limits_0^\infty \|Q(t)\|\left\{\int\limits_R^\infty \theta^-(rt-1)\theta^-(rx-1)\,dr\right\}^{1/2} dt \le$$

$$\le M\int\limits_0^{R^{-1}} \left(t^{-1}-R\right)^{1/2}\|Q(t)\|\,dt \le M\|Q\|_{L_p(0,R^{-1})}\left\{\int\limits_0^{R^{-1}} (t^{-1}-R)^{p'/2}\,dt\right\}^{1/p'} =$$

$$= M\|Q\|_{L_p(0,R^{-1})}R^{1/p-1/2}\left\{\int\limits_0^1 (\tau^{-1}-1)^{p'/2}\,d\tau\right\}^{1/p'},$$

где $p' = p/(p-1)$. Поскольку $p > 2 > p'$, интегралы в полученных оценках сходятся и мы приходим к оценке:

$$\|F^{-}(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} \le MR^{1/p-1/2}\|Q\|_{L_p(0,\infty)},$$

из которой следует:

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \|F^{-}(Q,x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} = 0.$$

Применяя Лемму 1.1, заключаем, что $F^{-}(Q,\cdot,\cdot) \in BC([0,\infty), L_2(l))$. Наконец, из оценки (1.37) следует $F^{-} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_p^m, BC([0,\infty), L_2(l)))$.

□

Лемма 1.7. *Пусть для каждого фиксированного набора аргументов* (t,ρ) $g(t,\rho)$ *– линейный функционал на* $\mathcal{L}(\wedge^m \mathbb{C}^n)$, *причем как функция аргументов* (t,ρ) $g(t,\rho)$ *непрерывна и ограничена на* $[0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}}$. *Определим*

$$F(Q,\rho) := \int\limits_{|\rho|^{-1}}^{\infty} (\rho t)^{-1} g(t,\rho) Q(t)\, dt.$$

Тогда для каждой фиксированной $Q \in \mathcal{X}_p^m$, $p > 2$ *имеем* $F(Q,\cdot) \in C_0(\overline{\mathcal{S}})$, *для любого луча вида* $l = [0, z\cdot\infty)$, $z \in \overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ $F(Q,\cdot) \in L_2(l)$, *более того,* $F \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_p^m, L_2(l))$.

Доказательство. Непрерывность $F(Q,\cdot)$ устанавливается при помощи теоремы Лебега, аналогично тому, как это было сделано при доказательстве предыдущих лемм. Из очевидной оценки:

$$|F(Q,\rho)| \le M \int\limits_{|\rho|^{-1}}^{\infty} |\rho t|^{-1/2} \|Q(t)\|\, dt \le M(\|Q\|_{L_p(0,1)} + \|Q\|_{L_1(1,\infty)})|\rho|^{-1/2}$$

следует, что $F(Q,\rho) \to 0$ при $\rho\to\infty$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$.

Далее, имеем:

$$|F(Q,\cdot)|_{L_2(l)} \le M \left\{ \int\limits_0^{\infty} \left(\int\limits_0^{\infty} \theta^+(rt-1)(rt)^{-1}\|Q(t)\| dt \right)^2 dr \right\}^{1/2} \le$$

$$\le M \int\limits_0^{\infty} \left\{ \int\limits_{t^{-1}}^{\infty} (rt)^{-2} \|Q(t)\|^2\, dr \right\}^{1/2} dt = M \int\limits_0^{\infty} t^{-1/2}\|Q(t)\|\, dt,$$

откуда следует:

$$\|F(Q,\cdot)\|_{L_2(l)} \le M(\|Q\|_{L_p(0,1)} + \|Q\|_{L_1(1,\infty)}).$$

$\square$

Доказательство Теорем 1.2, 1.3.

1) Подынтегральное выражение в (1.19) можно представить в виде:

$$\overleftarrow{W}^k(\rho x) \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\alpha g_{k\alpha}(x,t,\rho) \left|(Q(t)\tilde{T}_k^0(t,\rho)) \wedge \tilde{\Psi}_{0\alpha'}(t,\rho)\right| \tilde{\Psi}_{0\alpha}(x,\rho),$$

где

$$g_{k\alpha}(x,t,\rho) = \frac{\overleftarrow{W}^k(\rho t)}{\overleftarrow{W}^k(\rho x)} \cdot W^\alpha(\rho x) W^{\alpha'}(\rho t). \qquad (1.38)$$

Ясно, что все функции $g_{k\alpha}(x,t,\rho)$ непрерывны по $(x,t,\rho) \in \{0 < t < x < \infty\} \times (\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\})$ и аналитичны по $\rho \in \mathcal{S}$. Покажем, что они также ограничены. Действительно, при $|\rho t| \le |\rho x| \le$ имеем:

$$|g_{k\alpha}(x,t,\rho)| \le M \left| \left(\frac{t}{x}\right)^{\overleftarrow{\mu}_k - \mu_\alpha} \right|,$$

что с учётом $t \le x$, $\mathrm{Re}(\overleftarrow{\mu}_k - \mu_\alpha) \ge 0$ дает $|g_{k\alpha}(x,t,\rho)| \le M$; далее, при $1 < |\rho t| \le |\rho x|$ имеем:

$$g_{k\alpha}(x,t,\rho) = \exp((t-x)\rho(\overleftarrow{R}_k - R_\alpha)),$$

что с учетом $x \ge t$, $\mathrm{Re}(\rho(\overleftarrow{R}_k - R_\alpha)) \ge 0$ дает $|g_{k\alpha}(x,t,\rho)| \le 1$; наконец, при $|\rho t| \le 1 < |\rho x|$ достаточно воспользоваться оценками (1.14). Таким образом, интеграл в (1.19) сходится абсолютно и равномерно на любом множестве вида $\{x \in [x_1, x_2], \rho \in K\}$, где $0 < x_1 < x_2 < \infty$, $K \subset \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ - компакт, и следовательно представляет собой непрерывную функцию от $(x,\rho) \in (0,\infty) \times (\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\})$, аналитическую по $\rho \in \mathcal{S}$.

Записав подынтегральное выражение в (1.20) в виде:

$$\overrightarrow{W}^k(\rho x) \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k} \chi_\alpha g^+_{k\alpha}(x,t,\rho) \left|(Q(t)\tilde{F}_k^0(t,\rho)) \wedge \tilde{\Psi}_{0\alpha'}(t,\rho)\right| \tilde{\Psi}_{0\alpha}(x,\rho),$$

где

$$g^+_{k\alpha}(x,t,\rho) = \frac{\overrightarrow{W}^k(\rho t)}{\overrightarrow{W}^k(\rho x)} \cdot W^\alpha(\rho x) W^{\alpha'}(\rho t), \qquad (1.39)$$

воспользовавшись непрерывностью и ограниченностью функций $g^+_{k\alpha}(x,t,\rho)$ при $0<x<t<\infty$, $\rho\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ приходим к аналогичным результатам относительно $\mathcal{F}_k(Q,x,\rho)$.

2) Имеем $\mathcal{T}_k(Q,x,\rho)=\overleftarrow{W}^k(\rho x)\omega_k(Q,x,\rho)$, где:

$$\omega_k(Q,x,\rho)=\int\limits_0^x \mathcal{G}_{n-k+1}(x,t,\rho)(Q(t)\tilde{T}^0_k(t,\rho))\,dt, \tag{1.40}$$

$$\mathcal{G}_{n-k+1}(x,t,\rho):=\frac{\overleftarrow{W}^k(\rho t)}{\overleftarrow{W}^k(\rho x)}G_{n-k+1}(x,t,\rho). \tag{1.41}$$

Переписав $g_{k\alpha}(x,t,\rho)$ в виде:

$$g_{k\alpha}(x,t,\rho)=\left(\frac{t}{x}\right)^{\overleftarrow{\mu}_k-\mu_\alpha}\cdot\frac{\overleftarrow{W}^k(\rho t)}{(\rho t)^{\overleftarrow{\mu}_k}}\cdot\frac{(\rho x)^{\overleftarrow{\mu}_k}}{\overleftarrow{W}^k(\rho x)}\cdot\frac{W^\alpha(\rho x)}{(\rho x)^{\mu_\alpha}}\cdot\frac{W^{\alpha'}(\rho t)}{(\rho t)^{\mu_{\alpha'}}},$$

с учётом свойств весовых функций $W_k(\cdot)$ заключаем, что функции $g_{k\alpha}(x,x\tau,\rho)$ допускают непрерывное продолжение на множество $\{(x,\tau,\rho): x\in[0,\infty),\tau\in[0,1],\rho\in\overline{\mathcal{S}}\}$. Поскольку $\tilde{\Psi}_{0\alpha}(x,\rho)$ допускают непрерывное продолжение на $[0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}}$, функция $\mathcal{G}_{n-k+1}(x,x\tau,\rho)$ допускает непрерывное продолжение на множество $\{(x,\tau,\rho): x\in[0,\infty),\tau\in[0,1],\rho\in\overline{\mathcal{S}}\}$. Тогда представление

$$\omega_k(Q,x,\rho)=\int\limits_0^1 \mathcal{G}_{n-k+1}(x,x\tau,\rho)(Q(x\tau)\tilde{T}^0_k(x\tau,\rho))x\,d\tau$$

дает непрерывное продолжение $\omega_k(Q,\cdot,\cdot)$ на $[0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}}$.

Далее, из представления:

$$\mathcal{G}_{n-k+1}(x,t,\rho)f=\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{n-k+1}}\chi_\alpha g_{k\alpha}(x,t,\rho)\left|f\wedge\tilde{\Psi}_{0\alpha'}(t,\rho)\right|\tilde{\Psi}_{0\alpha}(x,\rho)$$

следует ограниченность $\|\mathcal{G}_{n-k+1}(x,x\tau,\rho)\|$ на $\{(x,\tau,\rho): x\in[0,\infty),\tau\in[0,1],\rho\in\overline{\mathcal{S}}\}$, что даёт, в свою очередь, оценку:

$$\|\omega_k(Q,x,\rho)\|\le M\int\limits_0^x\|Q(t)\|\,dt \tag{1.42}$$

Из (1.42) следует, в частности $\omega_k\in\mathcal{L}\left(\mathcal{X}_p^{n-k+1},BC([0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}})\right)$.

Аналогично, имеем: $\mathcal{F}_k(Q,x,\rho) = \overrightarrow{W}^k(\rho x)\omega_k^+(Q,x,\rho)$, где:

$$\omega_k^+(Q,x,\rho) = -\int\limits_x^\infty \mathcal{G}_k^+(x,t,\rho)(Q(t)\tilde{F}_k^0(t,\rho))\,dt, \tag{1.43}$$

$$\mathcal{G}_k^+(x,t,\rho) := \frac{\overrightarrow{W}^k(\rho t)}{\overrightarrow{W}^k(\rho x)} G_k(x,t,\rho). \tag{1.44}$$

Из представления

$$\mathcal{G}_k^+(x,t,\rho)f = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k} \chi_\alpha g_{k\alpha}^+(x,t,\rho)\left|f\wedge\tilde{\Psi}_{0\alpha'}(t,\rho)\right|\tilde{\Psi}_{0\alpha}(x,\rho)$$

следует непрерывность и ограниченность операторной функции $\mathcal{G}_k^+(x,t,\rho)$ на множестве $\{(x,t,\rho) : 0 \le x < t < \infty, \rho\in\overline{\mathcal{S}}\}$, что даёт возможность непрерывного продолжения $\omega_k^+(Q,\cdot,\cdot)$ на $[0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}}$, а также оценку

$$\|\omega_k^+(Q,x,\rho)\| \le M\int\limits_x^\infty \|Q(t)\|\,dt, \tag{1.45}$$

из которой вытекает, в частности, $\omega_k^+ \in \mathcal{L}\left(\mathcal{X}_p^k, BC([0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}})\right)$.

3) Представим $\omega_k(Q,x,\rho)$ в виде суммы:

$$\omega_k(Q,x,\rho) = \omega_{k0}(Q,x,\rho) + \omega_{k1}(Q,x,\rho) + \omega_{k2}(Q,x,\rho),$$

где:

$$\omega_{k1}(Q,x,\rho) = \theta^-(|\rho x|-1)\int\limits_0^x \mathcal{G}_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(Q(t)\tilde{T}_k^0(t,\rho)\right)dt,$$

$$\omega_{k2}(Q,x,\rho) = \theta^+(|\rho x|-1)\int\limits_0^{|\rho|^{-1}} \mathcal{G}_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(Q(t)\tilde{T}_k^0(t,\rho)\right)dt,$$

$$\omega_{k0}(Q,x,\rho) =$$

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{n-k+1}} \theta^+(|\rho x|-1)\chi_\alpha\exp(-\rho x\overleftarrow{R}_k)$$

$$\int\limits_{|\rho|^{-1}}^x \left|\left(Q(t)T_k^0(t,\rho)\right)\wedge E_{\alpha'}(t,\rho)\right|E_\alpha(x,\rho)\,dt.$$

Используя Лемму 1.4, с учётом установленных выше свойств функции $\mathcal{G}_{n-k+1}(\cdot,\cdot,\cdot)$ получаем $\omega_{k\nu}(Q,\cdot,\cdot) \in PC_0(\overline{\mathcal{S}})$ и, более того, справедливо включение $\omega_{k\nu} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{X}_p^{n-k+1}, BC([0,\infty), L_2(l))\right)$, $\nu = 1, 2$.

Рассмотрим функцию ω_{k0}. Используя представление (1.16), запишем:

$$\omega_{k0}(Q,x,\rho) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}_{n-k+1}} \Gamma_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}(Q,x,\rho),$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}$ – некоторые абсолютные константы, и:

$$h_{\alpha\beta}(Q,x,\rho) =$$

$$\theta^+(|\rho x|-1)\exp(-\rho x \overleftarrow{R}_k) \int\limits_{|\rho|^{-1}}^{x} |(Q(t)E_\beta(t,\rho)) \wedge E_{\alpha'}(t,\rho)|\, E_\alpha(x,\rho)\,dt.$$

Функцию $h_{\alpha\beta}(\cdot,\cdot,\cdot)$ также удобно представить в виде суммы:

$$h_{\alpha\beta}(Q,x,\rho) = h^{(0)}_{\alpha\beta}(Q,x,\rho) + h^{(1)}_{\alpha\beta}(Q,x,\rho),$$

где:

$$h^{(1)}_{\alpha\beta}(Q,x,\rho) = \theta^+(|\rho x|-1) \int\limits_{|\rho|^{-1}}^{x} (\rho t)^{-1} H_{\alpha\beta}(x,t,\rho) Q(t)\,dt,$$

$$H_{\alpha\beta}(x,t,\rho)F := \exp(\rho x(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k) + \rho t(R_\beta - R_\alpha))\rho t \cdot$$
$$\left|\Big(F\tilde{E}_\beta(t,\rho)\Big) \wedge \tilde{E}_{\alpha'}(t,\rho) - (F\mathfrak{f}_\beta)\wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}\right| \tilde{E}_\alpha(x,\rho),$$

$$h^{(0)}_{\alpha\beta}(Q,x,\rho) =$$

$$\theta^+(|\rho x|-1)\int\limits_{|\rho|^{-1}}^{x} \exp(\rho x(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k) + \rho t(R_\beta - R_\alpha))\,|(Q(t)\mathfrak{f}_\beta)\wedge\mathfrak{f}_{\alpha'}|\,\tilde{E}_\alpha(x,\rho)\,dt =$$

$$(\tilde{h}^{(0)}_{\alpha\beta}(Q,x,\rho) + \hat{h}^{(0)}_{\alpha\beta}(Q,x,\rho))\theta^+(|\rho x|-1)\tilde{E}_\alpha(x,\rho).$$

Здесь

$$\tilde{h}^{(0)}_{\alpha\beta}(Q,x,\rho) := \int\limits_0^x \exp(\rho x(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k) + \rho t(R_\beta - R_\alpha))\,|(Q(t)\mathfrak{f}_\beta)\wedge\mathfrak{f}_{\alpha'}|\,dt,$$

$$\hat{h}^{(0)}_{\alpha\beta}(Q,x,\rho) := \int\limits_0^{|\rho|^{-1}} \exp(\rho x(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k) + \rho t(R_\beta - R_\alpha))\,|(Q(t)\mathfrak{f}_\beta)\wedge\mathfrak{f}_{\alpha'}|\,dt,$$

$\tilde{E}_\alpha(x,\rho) = \exp(-\rho x R_\alpha) E_\alpha(x,\rho)$ при $|\rho| x > 1$.

Рассмотрим выражение $\rho x(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k) + \rho t(R_\beta - R_\alpha)$. Переписав его в виде $\rho(x-t)(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k) + \rho t(R_\beta - \overleftarrow{R}_k)$, убеждаемся, что

$$\operatorname{Re}\Big(\rho(x-t)(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k) + \rho t(R_\beta - \overleftarrow{R}_k)\Big) \le 0 \tag{1.46}$$

для всех (x,t,ρ) таких, что $t \in [0,x]$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$. Далее, из асимптотик решений $E_k(t,\rho)$ следует справедливая при всех $(t,\rho) : |\rho t| \ge 1$ оценка:

$$\Big\| \Big(F\tilde{E}_\beta(t,\rho)\Big) \wedge \tilde{E}_{\alpha'}(t,\rho) - (F\mathfrak{f}_\beta) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'} \Big\| \le \frac{M}{|\rho| t} \|F\| \tag{1.47}$$

для любого действующего в $\wedge^{n-k+1}\mathbb{C}^n$ линейного оператора F, которая, в свою очередь, с учетом (1.46) влечет ограниченность (непрерывной) операторно - значной функции $H_{\alpha\beta}(x,t,\rho)$, $\{(x,t,\rho) : \rho \in \overline{\mathcal{S}}, |\rho^{-1}| \le t \le x < \infty\}$. В силу Леммы 1.5 заключаем, что $h^{(1)}_{\alpha\beta}(Q,\cdot,\cdot) \in PC_0(\overline{\mathcal{S}})$ и для любого луча $l = \{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$ с $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ справедливо $h^{(1)}_{\alpha\beta} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{X}_p^{n-k+1}, BC([0,\infty), L_2(l))\right)$. Из Леммы 1.4 следует аналогичное утверждение для $\hat{h}^{(0)}_{\alpha\beta}$.

Далее, заметим, что если $\alpha \ne \beta$, то, в силу Условия 2 имеем либо $R_\alpha - \overleftarrow{R}_k \ne R_\beta - \overleftarrow{R}_k$, либо $\operatorname{Re}(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k)\rho < 0$ для всех $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$. Следовательно, применяя Лемму 1.3, приходим к выводу, что $\tilde{h}^{(0)}_{\alpha\beta}(Q,\cdot,\cdot) \in PC_0(\overline{\mathcal{S}})$ и для любого луча $l = \{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$ с $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ справедливо $\tilde{h}^{(0)}_{\alpha\beta} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{X}_p^{n-k+1}, BC([0,\infty), L_2(l))\right)$ при $\alpha \ne \beta$. Поскольку $(Q(t)\mathfrak{f}_\alpha) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'} \equiv 0$ для любого мультииндекса $\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}$, имеем $\tilde{h}^{(0)}_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha = \beta$.

Таким образом, с учетом Леммы 1.2 установлено, что $\tilde{h}^0_{\alpha\beta}(Q,\cdot,\cdot) \in PC_0(\overline{\mathcal{S}})$, $\tilde{h}^0_{\alpha\beta} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{X}_p^{n-k+1}, BC([0,\infty), L_2(l))\right)$ для любой пары мультииндексов α, β из $\mathcal{A}_{n-k+1}$. С учётом доказанного ранее, то же справедливо и для всех $h_{\alpha\beta}$, а, следовательно, для ω_{k0} и для ω_k.

Наконец, из (1.42) следует, что $\omega_k \in \mathcal{L}\left(\mathcal{X}_p^{n-k+1}, BC([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}}))\right)$.

Таким образом, утверждения Теорем 1.2, 1.3 для функции $\mathcal{T}_k(\cdot,\cdot,\cdot)$ доказаны полностью.

4) Рассуждая аналогично предыдущему, запишем $\omega_k^+(Q,x,\rho)$ в виде:

$$\omega_k^+(Q,x,\rho) = \omega_{k0}^+(Q,x,\rho) + \omega_{k1}^+(Q,x,\rho) + \omega_{k2}^+(Q,x,\rho),$$

где:

$$\omega_{k0}^+(Q,x,\rho) = -\theta^+(|\rho x| - 1) \int_x^\infty \mathcal{G}_k^+(x,t,\rho)(Q(t)\tilde{F}_k^0(t,\rho))\,dt,$$

$$\omega_{k1}^{+}(Q,x,\rho) = -\theta^{-}(|\rho x|-1)\int\limits_{|\rho^{-1}|}^{\infty} \mathcal{G}_k^{+}(x,t,\rho)(Q(t)\tilde{F}_k^0(t,\rho))\,dt,$$

$$\omega_{k2}^{+}(Q,x,\rho) = -\theta^{-}(|\rho x|-1)\int\limits_{0}^{|\rho^{-1}|} \mathcal{G}_k^{+}(x,t,\rho)(Q(t)\tilde{F}_k^0(t,\rho))\,dt.$$

В силу ограниченности операторной функции $\mathcal{G}_k^{+}(x,t,\rho)$ Лемма 1.6, примененная к функции $\omega_{k2}^{+}(\cdot,\cdot,\cdot)$, дает $\omega_{k2}^{+}(Q,\cdot,\cdot) \in PC_0(\overline{\mathcal{S}})$ и для любого луча $l = \{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ $\omega_{k2}^{+} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{X}_p^k, BC([0,\infty), L_2(l))\right)$.

Далее, для $\omega_{k1}^{+}(Q,x,\rho)$ справедливо представление:

$$\omega_{k1}^{+}(Q,x,\rho) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k} \omega_{k1\alpha}^{+}(Q,x,\rho),$$

$$\omega_{k1\alpha}^{+}(Q,x,\rho) := -\chi_\alpha\theta^{-}(|\rho x|-1)h_{k1\alpha}^{+}(Q,\rho)\left(\overrightarrow{W}^k(\rho x)\right)^{-1}E_\alpha(x,\rho),$$

$$h_{k1\alpha}^{+}(Q,\rho) := \int\limits_{|\rho^{-1}|}^{\infty} \left|\left(Q(t)\tilde{F}_k^0(t,\rho)\right)\wedge\tilde{E}_{\alpha'}(t,\rho)\right|\exp\left(\rho t(\overrightarrow{R}_k - R_\alpha)\right)\,dt.$$

Представим $h_{k1\alpha}^{+}(Q,\rho)$ в виде суммы:

$$h_{k1\alpha}^{+}(Q,\rho) = \tilde{h}_{k1\alpha}^{+}(Q,\rho) + \hat{h}_{k1\alpha}^{+}(Q,\rho),$$

где

$$\tilde{h}_{k1\alpha}^{+}(Q,\rho) = \int\limits_{|\rho^{-1}|}^{\infty} \left|\left(Q(t)\mathfrak{f}_{\alpha_*(k)}\right)\wedge\mathfrak{f}_{\alpha'}\right|\exp\left(\rho t(\overrightarrow{R}_k - R_\alpha)\right)\,dt,$$

$$\hat{h}_{k1\alpha}^{+}(Q,\rho) = \int\limits_{|\rho^{-1}|}^{\infty} (\rho t)^{-1}\hat{H}_{k1\alpha}^{+}(t,\rho)Q(t)\,dt,$$

$\alpha_*(k) := (1,\ldots,k)$, $\hat{H}_{k1\alpha}^{+}(t,\rho)$ - функционал, действующий на элемент $F \in \mathcal{L}(\wedge^k\mathbb{C}^n)$ по формуле:

$$\hat{H}_{k1\alpha}^{+}(t,\rho)F :=$$
$$\rho t\left(\left|\left(F\tilde{F}_k^0(t,\rho)\right)\wedge\tilde{E}_{\alpha'}(t,\rho)\right| - \left|\left(F\mathfrak{f}_{\alpha_*(k)}\right)\wedge\mathfrak{f}_{\alpha'}\right|\right)\exp\left(\rho t(\overrightarrow{R}_k - R_\alpha)\right).$$

Из асимптотик $E_k(t,\rho)$ с учетом $\operatorname{Re}(\rho(\overrightarrow{R}_k - R_\alpha)) \le 0$, $\alpha \in \mathcal{A}_k$ следует ограниченность функции $\|\hat{H}_{k1\alpha}^{+}(t,\rho)\|$ при $|\rho t| > 1$, что дает возможность применить Лемму 1.7 к функции $\hat{h}_{k1\alpha}^{+}(\cdot,\cdot)$. Применяя к функции $\tilde{h}_{k1\alpha}^{+}(\cdot,\cdot)$ (с учетом $(Q(t)\mathfrak{f}_{\alpha_*(k)})\wedge$

$\mathfrak{f}_{\alpha_*(k)} \equiv 0$) Лемму 1.3.III и далее используя Лемму 1.2 (с учетом вытекающей из оценки (1.17) ограниченности функции $\theta^-(|\rho x|-1)\left(\overrightarrow{W}^k(\rho x)\right)^{-1}E_\alpha(x,\rho)$), приходим к выводу, что $\omega^+_{k1\alpha}(Q,\cdot,\cdot) \in PC_0(\overline{\mathcal{S}})$ и для любого луча $l=\{\rho = zt, t\in[0,\infty)\}$, $z\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ $\omega^+_{k1\alpha} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{X}^k_p, BC([0,\infty),L_2(l))\right)$. Очевидно, то же справедливо и для $\omega^+_{k1}(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Наконец, для $\omega^+_{k0}(Q,x,\rho)$ используем представления:

$$\omega^+_{k0}(Q,x,\rho) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k}\omega^+_{k0\alpha}(Q,x,\rho),$$

$$\omega^+_{k0\alpha}(Q,x,\rho) := -\chi_\alpha\theta^+(|\rho x|-1)h^+_{k0\alpha}(Q,x,\rho)\tilde{E}_\alpha(x,\rho),$$

$$h^+_{k0\alpha}(Q,x,\rho) :=$$

$$\int\limits_x^\infty \left|\left(Q(t)\tilde{F}^0_k(t,\rho)\right)\wedge\tilde{E}_{\alpha'}(t,\rho)\right|\exp\left(\rho(t-x)(\overrightarrow{R}_k - R_\alpha)\right)\,dt.$$

Представим $h^+_{k0\alpha}(Q,x,\rho)$ в виде суммы:

$$h^+_{k0\alpha}(Q,x,\rho) = \tilde{h}^+_{k0\alpha}(Q,x,\rho) + \hat{h}^+_{k0\alpha}(Q,x,\rho),$$

где

$$\tilde{h}^+_{k0\alpha}(Q,x,\rho) = \int\limits_x^\infty \left|\left(Q(t)\mathfrak{f}_{\alpha_*(k)}\right)\wedge\mathfrak{f}_{\alpha'}\right|\exp\left(\rho(t-x)(\overrightarrow{R}_k - R_\alpha)\right)\,dt,$$

$$\hat{h}^+_{k0\alpha}(Q,x,\rho) = \int\limits_x^\infty (\rho t)^{-1}\hat{H}^+_{k0\alpha}(x,t,\rho)Q(t)\,dt,$$

$\hat{H}^+_{k0\alpha}(x,t,\rho)$ - функционал, действующий на элемент $F\in\mathcal{L}(\wedge^k\mathbb{C}^n)$ по формуле:

$$\hat{H}^+_{k0\alpha}(x,t,\rho)F :=$$

$$\rho t\left(\left|\left(F\tilde{F}^0_k(t,\rho)\right)\wedge\tilde{E}_{\alpha'}(t,\rho)\right| - \left|\left(F\mathfrak{f}_{\alpha_*(k)}\right)\wedge\mathfrak{f}_{\alpha'}\right|\right)\exp\left(\rho(t-x)(\overrightarrow{R}_k - R_\alpha)\right).$$

Применяя Лемму 1.3.II, Лемму 1.6 и Лемму 1.2, приходим к выводу, что все $\omega^+_{k0\alpha}(Q,\cdot,\cdot)\in PC_0(\overline{\mathcal{S}})$ и для любого луча $l=\{\rho=zt, t\in[0,\infty)\}$, $z\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ справедливо $\omega^+_{k0\alpha}\big|_l \in \mathcal{L}\left(\mathcal{X}^k_p, BC([0,\infty),L_2(l))\right)$. Очевидно, то же справедливо и для $\omega^+_{k0}(\cdot,\cdot,\cdot)$.

$\square$

В случае классического преобразования Лапласа и многих его обобщений дополнительная гладкость функции–оригинала позволяет получить асимптотическое разложение по убывающим степеням спектрального параметра. Аналогичный эффект имеет место и в случае преобразований (1.19), (1.20), если помимо требований гладкости налагать дополнительные требования на скорость убывания функции-оригинала при $x \to 0$ и $x \to \infty$. Ниже мы доказываем простейший (но важный для дальнейших рассмотрений) результат в данном направлении.

Теорема 1.4. *I. Пусть $Q(\cdot)$ абсолютно непрерывна, $Q(0) = 0$. Пусть, далее, для каждого фиксированного $x \in [0, \infty)$ $\hat{Q}_o(x)$ – оператор, действующий в $\wedge^{n-k+1}\mathbb{C}^n$, внедиагональный в базисе $\{\mathfrak{e}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}}$ и такой, что $[B^{(n-k+1)}, \hat{Q}_o(x)] = -Q(x)$. Определим диагональный оператор $D(x)$: $D(x)\mathfrak{e}_\alpha = d_\alpha(x)\mathfrak{e}_\alpha$,*

$$d_\alpha(x) := \int_x^\infty t^{-1} a_\alpha(t)\, dt, \ \ a_\alpha(t) := |\mathfrak{e}_\alpha \wedge \mathfrak{e}_{\alpha'}| \left| \left(\left[\hat{Q}_o(t), A^{(n-k+1)} \right] \mathfrak{e}_\alpha \right) \wedge \mathfrak{e}_{\alpha'} \right|$$

и положим $\hat{Q}(x) := \hat{Q}_o(x) + D(x)$.

Пусть $\tilde{Q}(\cdot) \in \mathcal{X}_p^{n-k+1}$, где $\tilde{Q}(x) := \hat{Q}'(x) + x^{-1}\left[\hat{Q}(x), A^{(n-k+1)}\right]$. Тогда справедливо представление:

$$\rho \mathcal{T}_k(Q, x, \rho) = d_{0k} T_k^0(x, \rho) + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\alpha \left| (\hat{Q}(x) T_k^0(x, \rho)) \wedge E_{\alpha'}(x, \rho) \right| E_\alpha(x, \rho)$$

$$+ \overleftarrow{W}^k(\rho x) \tilde{\omega}_k(Q, x, \rho),$$

где

$$d_{0k} := -\sigma_{\alpha*(k)} \left| \left(D(0)\mathfrak{h}_{\alpha^*(k)} \right) \wedge \mathfrak{h}_{(\alpha^*(k))'} \right|,$$

$\alpha^*(k) = (k, \ldots, n)$; $\tilde{\omega}_k(Q, \cdot, \cdot) \in BC([0, \infty), C_0(\overline{\mathcal{S}}))$. Более того, для любого фиксированного $x > 0$ при $\rho \to \infty$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$ справедлива асимптотика:

$$\mathcal{T}_k(Q, x, \rho) =$$

$$\rho^{-1} d_{0k} T_k^0(x, \rho) + \rho^{-1} \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}_{n-k+1}} T_{k\beta}^0 \exp(\rho x R_\beta) \hat{Q}_{\alpha\beta}(x) \mathfrak{f}_\alpha + o\left(\rho^{-1} \exp(\rho x \overleftarrow{R}_k) \right).$$

Здесь $\{T_{k\alpha}^0\}$ – коэффициенты в разложении (1.16),

$$\hat{Q}_{\alpha\beta}(x) := \chi_\alpha \left| (\hat{Q}(x)\mathfrak{f}_\beta) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'} \right|,$$

$\chi_\alpha := |\mathfrak{f}_\alpha \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}|$.

II. Пусть $Q(\cdot)$ *абсолютно непрерывна,* $Q(0) = 0$. *Пусть, далее, для каждого фиксированного* $x \in [0, \infty)$ $\hat{Q}_o(x)$ *– оператор, действующий в* $\wedge^k \mathbb{C}^n$, *внедиагональный в базисе* $\{\mathfrak{e}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}_k}$ *и такой, что* $[B^{(k)}, \hat{Q}_o(x)] = -Q(x)$. *Определим диагональный оператор* $D(x)$: $D(x)\mathfrak{e}_\alpha = d_\alpha(x)\mathfrak{e}_\alpha$,

$$d_\alpha(x) := \int\limits_x^\infty t^{-1} a_\alpha(t)\, dt,\ a_\alpha(t) := |\mathfrak{e}_\alpha \wedge \mathfrak{e}_{\alpha'}| \left| \left(\left[\hat{Q}_o(t), A^{(k)} \right] \mathfrak{e}_\alpha \right) \wedge \mathfrak{e}_{\alpha'} \right|$$

и положим $\hat{Q}(x) := \hat{Q}_o(x) + D(x)$.

Пусть $\tilde{Q}(\cdot) \in \mathcal{X}_p^k$, *где* $\tilde{Q}(x) := \hat{Q}'(x) + x^{-1}\left[\hat{Q}(x), A^{(k)}\right]$. *Тогда справедливо представление:*

$$\rho \mathcal{F}_k(Q, x, \rho) =$$
$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k} \chi_\alpha \left| (\hat{Q}(x) F_k^0(x, \rho)) \wedge E_{\alpha'}(x, \rho) \right| E_\alpha(x, \rho) + \overrightarrow{W}^k(\rho x) \tilde{\omega}_k^+(Q, x, \rho),$$

где $\tilde{\omega}_k^+(Q, \cdot, \cdot) \in BC([0, \infty), C_0(\overline{\mathcal{S}}))$. *Более того, для любого фиксированного* $x > 0$ *при* $\rho \to \infty$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$ *справедлива асимптотика:*

$$\mathcal{F}_k(Q, x, \rho) = \rho^{-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k} \hat{Q}_{\alpha\alpha_*(k)}(x) \exp\left(\rho x \overrightarrow{R}_k\right) \mathfrak{f}_\alpha + o\left(\rho^{-1} \exp(\rho x \overrightarrow{R}_k)\right).$$

Здесь, как и выше, $\hat{Q}_{\alpha\beta}(x) := \chi_\alpha \left| (\hat{Q}(x)\mathfrak{f}_\beta) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'} \right|$, $\chi_\alpha := |\mathfrak{f}_\alpha \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}|$, $\alpha_*(k) = (1, \ldots, k)$.

Доказательство. I. Из уравнения (1.15) для функций $T_k^0(t, \rho)$, $E_{\alpha'}(t, \rho)$, следует тождество:

$$\rho(Q(t) T_k^0(t, \rho)) \wedge E_{\alpha'}(t, \rho) =$$
$$\frac{d}{dt}\left((\hat{Q}(t) T_k^0(t, \rho)) \wedge E_{\alpha'}(t, \rho) \right) - (\tilde{Q}(t) T_k^0(t, \rho)) \wedge E_{\alpha'}(t, \rho),$$

где $\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}$.

Интегрируя данное тождество, домножая на $E_\alpha(x, \rho)$ и суммируя по всем $\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}$, приходим к соотношению:

$$\rho \int\limits_{x_0}^x G_{n-k+1}(x, t, \rho) \left(Q(t) T_k^0(t, \rho) \right) dt = G_{n-k+1}(x, t, \rho) \left(\hat{Q}(t) T_k^0(t, \rho) \right) \Big|_{t=x_0}^{t=x} -$$
$$\int\limits_{x_0}^x G_{n-k+1}(x, t, \rho) \left(\tilde{Q}(t) T_k^0(t, \rho) \right) dt. \qquad (1.48)$$

В условиях теоремы выражения

$$G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(Q(t)T_k^0(t,\rho)\right),$$

$$G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(\tilde{Q}(t)T_k^0(t,\rho)\right)$$

суммируемы по t на $(0,x)$ (при фиксированных произвольных x,ρ). Покажем, что

$$\lim_{t\to 0} G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(\hat{Q}(t)T_k^0(t,\rho)\right)=0.$$

Заметим, что $\hat{Q}_o(0)=0$, следовательно:

$$\lim_{t\to 0} G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(\hat{Q}(t)T_k^0(t,\rho)\right)=\lim_{t\to 0} G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(D(t)T_k^0(t,\rho)\right).$$

Далее, при $\alpha\in\mathcal{A}_{n-k+1}$ справедлива оценка:

$$\|\left(D(t)T_k^0(t,\rho)\wedge C_{\alpha'}(t,\rho)\right)\|\le M\left|t^{\overrightarrow{\mu}_k-\mu_\alpha}\right|,$$

правая часть которой стремится к 0 при $\alpha\ne\alpha^*(k)$. Заметив, что $C_{\alpha^*(k)}(x,\rho)=T_k^0(x,\rho)$, получаем:

$$\lim_{t\to 0} G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(\hat{Q}(t)T_k^0(t,\rho)\right)=\lim_{t\to 0}\left|\left(D(t)T_k^0(t,\rho)\right)\wedge C_{(\alpha^*(k))'}(t,\rho)\right|T_k^0(x,\rho)$$
$$=\left|\left(D(0)\mathfrak{h}_{\alpha^*(k)}\right)\wedge\mathfrak{h}_{(\alpha^*(k))'}\right|T_k^0(x,\rho)=-d_{0k}T_k^0(x,\rho).$$

Переходя в (1.48) к пределу при $x_0\to 0$, получим:

$$\rho\mathcal{T}_k(Q,x,\rho)=d_{0k}T_k^0(x,\rho)+G_{n-k+1}(x,x,\rho)\left(\hat{Q}(x)T_k^0(x,\rho)\right)-\mathcal{T}_k(\tilde{Q},x,\rho).$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться представлениями (1.25), а также (1.16) и асимптотиками функций $E_k(x,\rho)$.

II. Рассуждая, как при доказательстве пункта I, приходим к тождеству:

$$\rho\int_x^{x_0} G_k(x,t,\rho)\left(Q(t)F_k^0(t,\rho)\right)dt=$$

$$G_k(x,t,\rho)\left(\hat{Q}(t)F_k^0(t,\rho)\right)\Big|_{t=x}^{t=x_0}-\int_x^{x_0} G_k(x,t,\rho)\left(\tilde{Q}(t)F_k^0(t,\rho)\right)dt. \qquad (1.49)$$

В отличие от случая, рассмотренного в пункте I, здесь имеем $\lim_{t\to\infty}\hat{Q}(t)=0$. Таким образом, переходя в (1.49) к пределу при $x_0\to\infty$, получим:

$$\rho\mathcal{F}_k(Q,x,\rho)=G_k(x,x,\rho)\left(\hat{Q}(x)F_k^0(x,\rho)\right)-\mathcal{F}_k(\tilde{Q},x,\rho).$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться представлениями (1.25) и асимптотиками функций $E_k(x,\rho)$.

$\square$

§1.2 Фундаментальные тензоры

В этом параграфе для системы вида

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y \tag{1.50}$$

с некоторой (произвольной) $n\times n$ матрицей-функцией $q(\cdot)$ будут построены и исследованы фундаментальные тензоры $T_k(x,\rho)$, $F_k(x,\rho)$. Эти объекты являются аналогами введённых в предыдущем параграфе для случая $q=0$ фундаментальных тензоров $T_k^0(x,\rho)$, $F_k^0(x,\rho)$. В частности, аналогично невозмущенному случаю, фундаментальные тензоры $T_k(x,\rho)$, $F_k(x,\rho)$ являются решениями вспомогательной системы вида

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))^{(m)}y \tag{1.51}$$

при $m=n-k+1$ и $m=k$ соответственно. Более того, их можно определить как решения (1.51), удовлетворяющие условиям:

$$T_k(x,\rho) - T_k^0(x,\rho) = o\left(x^{\overleftarrow{\mu}_k}\right), x\to 0,$$

$$F_k(x,\rho) - F_k^0(x,\rho) = o\left(\exp(\rho x \overrightarrow{R}_k)\right), x\to \infty.$$

Однако, по ряду причин построение фундаментальных тензоров в общем случае существенно отличается от случая $q=0$. В частности, в общем случае у системы (1.50) не существует решений, являющихся непосредственными аналогами решений $\{C_k(x,\rho)\}$. Решения с заданной асимптотикой при $x\to 0$ или $x\to\infty$ могут быть построены с помощью интегральных уравнений Фредгольма, но вопросы их существования, аналитических и асимптотических свойств нетривиальны. Более удобным оказывается построение фундаментальных тензоров непосредственно из интегральных уравнений, без использования какихлибо решений системы (1.50). Более того, напротив, все необходимые для наших дальнейших рассуждений решения системы (1.50) будут построены позднее при помощи фундаментальных тензоров.

Рассмотрим интегральные уравнения:

$$Y(x) = \int\limits_0^x G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(q^{(n-k+1)}(t)Y(t)\right)\,dt + T_k^0(x,\rho), \tag{1.52}$$

$$Y(x) = -\int\limits_x^\infty G_k(x,t,\rho)\left(q^{(k)}(t)Y(t)\right)\,dt + F_k^0(x,\rho). \tag{1.53}$$

Теорема 1.5. *Пусть* $q(\cdot) \in L_1(0,\infty)$. *Тогда:*

I. При каждом $\rho \in \overline{\mathcal{S}}\backslash\{0\}$ *уравнение* (1.52) *имеет единственное решение* $T_k(x,\rho)$ *в классе функций* $Y : (0,\infty) \to \wedge^{n-k+1}\mathbb{C}^n$ *таких, что*

$$\left(\overleftarrow{W}^k(\rho x)\right)^{-1} Y(x) \in L_\infty(0,\infty),$$

уравнение (1.53) *имеет единственное решение* $F_k(x,\rho)$ *в классе функций* $Y : (0,\infty) \to \wedge^k\mathbb{C}^n$ *таких, что*

$$\left(\overrightarrow{W}^k(\rho x)\right)^{-1} Y(x) \in L_\infty(0,\infty).$$

Нормы функций $\left(\overleftarrow{W}^k(\rho x)\right)^{-1} T_k(x,\rho)$, $\left(\overrightarrow{W}^k(\rho x)\right)^{-1} F_k(x,\rho)$ *в* $L_\infty(0,\infty)$ *ограничены в совокупности некоторой константой* M, *не зависящей от* ρ.

Функции $T_k(x,\rho)$, $F_k(x,\rho)$ – *аналитические по* $\rho \in \mathcal{S}$.

II. Функции $\rho^{-\overleftarrow{\mu}_k}T_k(x,\rho)$, $\rho^{-\overrightarrow{\mu}_k}F_k(x,\rho)$ *допускают непрерывные продолжения на множество* $(0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}}$. *Предельные значения*

$$\tau_k(x) := \lim_{\rho\to 0}\rho^{-\overleftarrow{\mu}_k}T_k(x,\rho), f_k(x) := \lim_{\rho\to 0}\rho^{-\overrightarrow{\mu}_k}F_k(x,\rho)$$

являются единственными в классах функций $y : x^{-\overleftarrow{\mu}_k}y(x) \in L_\infty(0,\infty)$, $y : x^{-\overrightarrow{\mu}_k}y(x) \in L_\infty(0,\infty)$ *соответственно решениями уравнений:*

$$y(x) = \int\limits_0^x G_{n-k+1}(x,t,0)\left(q^{(n-k+1)}(t)y(t)\right)\,dt + \overset{\circ}{T}_{k0}(x,0), \tag{1.54}$$

$$y(x) = -\int\limits_x^\infty G_k(x,t,0)\left(q^{(k)}(t)y(t)\right)\,dt + \overset{\circ}{F}_{k0}(x,0), \tag{1.55}$$

где $\overset{\circ}{T}_{k0}(x,\rho) := \rho^{-\overleftarrow{\mu}_k}T_k^0(x,\rho)$, $\overset{\circ}{F}_{k0}(x,\rho) := \rho^{-\overrightarrow{\mu}_k}F_k^0(x,\rho)$.

Доказательство. I. Применяя к уравнению (1.52) метод последовательных приближений, рассмотрим ряд:

$$\sum_{r=0}^{\infty} T_k^r(x,\rho),$$

$$T_k^{r+1}(x,\rho) := \int\limits_0^x G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(q^{(n-k+1)}(t)T_k^r(t,\rho)\right)\,dt. \qquad (1.56)$$

Из результатов предыдущего параграфа известно, что:

$$\|G_{n-k+1}(x,t,\rho)\| \le M\left|\frac{\overleftarrow{W}^k(\rho x)}{\overleftarrow{W}^k(\rho t)}\right|$$

при $t \le x$, откуда вытекает оценка:

$$\left\|G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(q^{(n-k+1)}(t)f\right)\right\| \le M_1\left|\frac{\overleftarrow{W}^k(\rho x)}{\overleftarrow{W}^k(\rho t)}\right|\|q(t)\|\|f\| \qquad (1.57)$$

с абсолютной константой M_1, где f – произвольный элемент из $\wedge^{n-k+1}\mathbb{C}^n$. С учетом полученной в предыдущем параграфе оценки $\|T_k^0(x,\rho)\| \le M_0\left|\overleftarrow{W}^k(\rho x)\right|$ (с абсолютной константой M_0) из неравенства (1.57) по индукции можно получить оценку:

$$\|T_k^r(x,\rho)\| \le M_0\left|\overleftarrow{W}^k(\rho x)\right|\frac{M_1^r}{r!}\left(\int_0^x \|q(t)\|dt\right)^r. \qquad (1.58)$$

Из полученной оценки следует сходимость ряда (1.56) и, следовательно, однозначная разрешимость уравнения (1.52) в указанном пространстве, а также оценка

$$\|T_k(x,\rho)\| \le M_0\left|\overleftarrow{W}^k(\rho x)\right|\exp\left(M_1\int_0^x \|q(t)\|dt\right),$$

в которой константы M_0, M_1 не зависят ни от ρ, ни от $q(\cdot)$.

Аналогично, справедливы оценки $\|F_k^0(x,\rho)\| \le M_0\left|\overrightarrow{W}^k(\rho x)\right|$,

$$\|G_k(x,t,\rho)\| \le M\left|\frac{\overrightarrow{W}^k(\rho x)}{\overrightarrow{W}^k(\rho t)}\right|,$$

$$\left\|G_k(x,t,\rho)\left(q^{(k)}(t)f\right)\right\| \le M_1\left|\frac{\overrightarrow{W}^k(\rho x)}{\overrightarrow{W}^k(\rho t)}\right|\|q(t)\|\|f\| \qquad (1.59)$$

при $t \geq x$. По индукции получаем оценку

$$\|F_k^r(x,\rho)\| \leq M_0 \left|\overrightarrow{W}^k(\rho x)\right| \frac{M_1^r}{r!} \left(\int_x^\infty \|q(t)\|dt\right)^r, \tag{1.60}$$

из которой следует сходимость ряда

$$\sum_{r=0}^\infty F_k^r(x,\rho), \quad F_k^{r+1}(x,\rho) := -\int\limits_x^\infty G_k(x,t,\rho)\left(q^{(k)}(t)F_k^r(t,\rho)\right)dt, \tag{1.61}$$

разрешимость уравнения (1.53) и оценка

$$\|F_k(x,\rho)\| \leq M_0 \left|\overrightarrow{W}^k(\rho x)\right| \exp\left(M_1 \int_x^\infty \|q(t)\|dt\right),$$

в которой константы M_0, M_1 не зависят ни от ρ, ни от $q(\cdot)$.

Наконец, заметим, что ряды (1.56), (1.61) сходятся равномерно на любом множестве вида $[x_1, x_2] \times K$, где $0 < x_1 < x_2 < \infty$, $K \subset \mathcal{S}$ – произвольный компакт, откуда следует аналитичность функций $T_k(x,\cdot)$, $F_k(x,\cdot)$.

II. 1) Прежде всего заметим, что функции $\overset{\circ}{T}_{k0}(x,\rho)$, $\overset{\circ}{F}_{k0}(x,\rho)$ допускают непрерывное (но не ограниченное, вообще говоря) продолжение на множество $(0,\infty) \times \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$. Действительно, имеем:

$$\overset{\circ}{T}_{k0}(x,\rho) = x^{\overleftarrow{\mu}_k} \hat{c}_k(\rho x) \wedge \dots \wedge \hat{c}_n(\rho x),$$

где все $\hat{c}_j(\cdot)$ – целые функции, что доказывает требуемое для $\overset{\circ}{T}_{k0}(x,\rho)$, причём

$$\overset{\circ}{T}_{k0}(x,0) = x^{\overleftarrow{\mu}_k} \mathfrak{h}_k \wedge \dots \wedge \mathfrak{h}_n. \tag{1.62}$$

Далее,

$$\overset{\circ}{F}_{k0}(x,\rho) = \overset{\circ}{\Psi}_{01}(x,\rho) \wedge \dots \wedge \overset{\circ}{\Psi}_{0k}(x,\rho), \tag{1.63}$$

где $\overset{\circ}{\Psi}_{0k}(x,\rho) := \rho^{-\mu_k}\Psi_{0k}(x,\rho)$. Из представления

$$\Psi_{0k}(x,\rho) = \sum_{j\geq k} l_{jk} C_j(x,\rho)$$

следует:

$$\overset{\circ}{\Psi}_{0k}(x,\rho) = \sum_{j\geq k} l_{jk}\rho^{\mu_j-\mu_k} x^{\mu_j} \hat{c}_j(\rho x), \tag{1.64}$$

где l_{jk}– некоторые абсолютные константы. Поскольку $\mathrm{Re}\mu_j > \mathrm{Re}\mu_k$ при $j > k$, из (1.64) следует, что функции $\overset{\circ}{\Psi}_{0k}(x,\rho)$, $k = \overline{1,n}$ допускают непрерывное продолжение на множество $\{x \in (0,\infty), \rho \in \overline{\mathcal{S}}\}$, в силу (1.63) то же справедливо для $\overset{\circ}{F}_{k0}(x,\rho)$. Заметим, что из (1.63) также следует, в частности, что:

$$\overset{\circ}{\Psi}_{0k}(x,0) = l_{kk}x^{\mu_k}\mathfrak{h}_k,$$

откуда:

$$\overset{\circ}{F}_{k0}(x,0) = \beta_k^0 x^{\overrightarrow{\mu}_k}\mathfrak{h}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{h}_k, \tag{1.65}$$

где β_k^0– некоторые абсолютные константы.

2) Рассмотрим при $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$ интегральные уравнения

$$Y(x) = \int\limits_0^x G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(q^{(n-k+1)}(t)Y(t)\right)dt + \overset{\circ}{T}_{k0}(x,\rho), \tag{1.66}$$

$$Y(x) = -\int\limits_x^\infty G_k(x,t,\rho)\left(q^{(k)}(t)Y(t)\right)dt + \overset{\circ}{F}_{k0}(x,\rho). \tag{1.67}$$

Уравнения (1.66), (1.67) отличаются от уравнений (1.52), (1.53) только свободным членом, однако именно это отличие позволяет рассматривать уравнения при $\rho = 0$, поскольку операторные функции $G_m(x,t,\rho)$ – целые по ρ для любых $x,t \in (0,\infty)$. Заметим, что уравнения (1.66), (1.67) при $\rho = 0$ совпадают с уравнениями (1.54), (1.55).

Применяя к уравнениям (1.66), (1.67) метод последовательных приближений аналогично тому, как это сделано выше при доказательстве пункта I, используя оценки (1.57), (1.59), а также представление

$$G_m(x,t,0)f = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_m} \sigma_\alpha \left(\frac{x}{t}\right)^{\mu_\alpha} |f \wedge \mathfrak{h}_{\alpha'}|\,\mathfrak{h}_\alpha, \tag{1.68}$$

из которого вытекают оценки

$$\|G_{n-k+1}(x,t,0)\| \le M\left|\left(\frac{x}{t}\right)^{\overleftarrow{\mu}_k}\right|,\ t \in (0,x), \tag{1.69}$$

$$\|G_k(x,t,0)\| \le M\left|\left(\frac{x}{t}\right)^{\overrightarrow{\mu}_k}\right|,\ t \in (x,\infty), \tag{1.70}$$

убеждаемся, что уравнения однозначно разрешимы в указанных пространствах и их решения $\overset{\circ}{T}_k(x,\rho)$, $\overset{\circ}{F}_k(x,\rho)$ представимы в виде рядов:

$$\sum_{r=0}^\infty \overset{\circ}{T}_{kr}(x,\rho),\ \overset{\circ}{T}_{k,r+1}(x,\rho) :=$$

$$\int\limits_0^x G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(q^{(n-k+1)}(t)\overset{\circ}{T}_{kr}(t,\rho)\right)dt, \tag{1.71}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\overset{\circ}{F}_{kr}(x,\rho),\ \overset{\circ}{F}_{k,r+1}(x,\rho):=-\int\limits_x^{\infty}G_k(x,t,\rho)\left(q^{(k)}(t)\overset{\circ}{F}_{kr}(t,\rho)\right)dt, \tag{1.72}$$

члены которых допускают оценки

$$\left\|\overset{\circ}{T}_{kr}(x,\rho)\right\|\le M_0\frac{M_1^r}{r!}\left(\int_0^x\|q(t)\|dt\right)^r\begin{cases}\left|\rho^{-\overleftarrow{\mu}_k}\overleftarrow{W}^k(\rho x)\right|,\ \rho\ne 0,\\ \left|x^{\overleftarrow{\mu}_k}\right|,\ \rho=0,\end{cases} \tag{1.73}$$

$$\left\|\overset{\circ}{F}_{kr}(x,\rho)\right\|\le M_0\frac{M_1^r}{r!}\left(\int_x^{\infty}\|q(t)\|dt\right)^r\begin{cases}\left|\rho^{-\overrightarrow{\mu}_k}\overrightarrow{W}^k(\rho x)\right|,\ \rho\ne 0,\\ \left|x^{\overrightarrow{\mu}_k}\right|,\ \rho=0,\end{cases} \tag{1.74}$$

где константы M_0, M_1 не зависят от x,ρ. Из оценок (1.73), (1.74) следует, что ряды (1.71), (1.72) сходятся равномерно на любом множестве вида $[x_1,x_2]\times K$, где $0<x_1<x_2<\infty$, $K\subset\overline{\mathcal{S}}$ – компакт. Действительно, данное утверждение очевидно, если компакт K не содержит точки $\rho=0$, поскольку в этом случае величины $\left|\rho^{-\overleftarrow{\mu}_k}\overleftarrow{W}^k(\rho x)\right|$ и $\left|\rho^{-\overrightarrow{\mu}_k}\overrightarrow{W}^k(\rho x)\right|$ равномерно ограничены на множестве указанного вида. В случае, когда $0\in K$, представим K в виде $K=K_0\cup K_1$, $K_0:=\{\rho\in K:|\rho x_2|\le 1\}$, $K_1:=K\setminus K_0$. На множестве $[x_1,x_2]\times K_1$ в силу сказанного выше равномерная сходимость рассматриваемых рядов имеет место. При $\rho\in K_0$, $x\in[x_1,x_2]$ имеем $|\rho x|\le 1$ и справедливы оценки $|W_j(\rho x)|\le M\left|(\rho x)^{\mu_j}\right|$, $j=\overline{1,n}$ с некоторой абсолютной константой M. В этом случае величины $\left|\rho^{-\overleftarrow{\mu}_k}\overleftarrow{W}^k(\rho x)\right|$ и $\left|\rho^{-\overrightarrow{\mu}_k}\overrightarrow{W}^k(\rho x)\right|$ ограничены величинами $M\left|x^{\overleftarrow{\mu}_k}\right|$, $M\left|x^{\overrightarrow{\mu}_k}\right|$ соответственно, что также гарантирует равномерную сходимость рядов (1.71), (1.72). Таким образом, функции $\overset{\circ}{T}_k(x,\rho)$, $\overset{\circ}{F}_k(x,\rho)$ непрерывны на $(0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}}$. Осталось заметить, что при $\rho\ne 0$ $\overset{\circ}{T}_k(x,\rho)=\rho^{-\overleftarrow{\mu}_k}T_k(x,\rho)$, $\overset{\circ}{F}_k(x,\rho)=\rho^{-\overrightarrow{\mu}_k}F_k(x,\rho)$.

$\square$

Следствие 1.1. *При каждом фиксированном $\rho\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ и $x\to 0$ справедливы асимптотики:*

$$F_k(x,\rho)=O\left((\rho x)^{\overrightarrow{\mu}_k}\right),$$

$$T_k(x,\rho)=T_k^0(x,\rho)+o\left((\rho x)^{\overleftarrow{\mu}_k}\right)=(\rho x)^{\overleftarrow{\mu}_k}\left(\mathfrak{h}_k\wedge\cdots\wedge\mathfrak{h}_n+o(1)\right).$$

При каждом фиксированном $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ и $x \to \infty$ справедливы асимптотики:

$$T_k(x,\rho) = O\left(\exp\left(\rho x \overleftarrow{R}_k\right)\right),$$

$$F_k(x,\rho) = F_k^0(x,\rho) + o\left(\exp\left(\rho x \overrightarrow{R}_k\right)\right) = \exp\left(\rho x \overrightarrow{R}_k\right)\left(\mathfrak{f}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{f}_k + o(1)\right).$$

Следующая теорема содержит более детальную информацию о поведении фундаментальных тензоров, в частности, о характере их убывания при больших ρ. При этом, помимо поведения фундаментальных тензоров как функций переменных (x,ρ), для наших дальнейших рассмотрений важно также их поведение в зависимости от потенциала $q(\cdot)$. В связи с этим всюду далее мы включаем потенциал в список аргументов, т.е. пишем $T_k(q,x,\rho)$ вместо $T_k(x,\rho)$ и $F_k(q,x,\rho)$ вместо $F_k(x,\rho)$.

Теорема 1.6. *Пусть $p > 2$. Тогда:*

I. Для функции $T_k(q,x,\rho)$, $q \in \mathcal{X}_p, x \in (0,\infty), \rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ справедливо представление:

$$T_k(q,x,\rho) = T_k^0(x,\rho) + \overleftarrow{W}^k(\rho x)\hat{T}_k(q,x,\rho),$$

где $\hat{T}_k(\cdot,\cdot,\cdot) \in C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty), C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)\right)$ и для любого луча $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, где $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ ограничение $\hat{T}_k\Big|_l$ принадлежит пространству

$$C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty), \mathcal{H}(l)\right)\right),$$

$\mathcal{H}(l) := C_0(l) \cap L_2(l)$.

II. Для функции $F_k(q,x,\rho)$, $q \in \mathcal{X}_p, x \in (0,\infty), \rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ справедливо представление:

$$F_k(q,x,\rho) = F_k^0(x,\rho) + \overrightarrow{W}^k(\rho x)\hat{F}_k(q,x,\rho),$$

где $\hat{F}_k(\cdot,\cdot,\cdot) \in C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty), C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)\right)$ и для любого луча $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, где $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ ограничение $\hat{F}_k\Big|_l$ принадлежит пространству

$$C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty), \mathcal{H}(l)\right)\right).$$

Доказательство. I. Рассматривая искомое представление как замену переменных в уравнении (1.52), перепишем указанное уравнение в операторном виде $\hat{T}_k(q,\cdot,\cdot) = \mathcal{K}(q)\hat{T}_k(q,\cdot,\cdot) + \hat{T}_k^1(q,\cdot,\cdot)$, где $\hat{T}_k^1(q,x,\rho) = \omega_k\left(q^{(n-k+1)},x,\rho\right)$ и, в силу Теоремы 1.2 предыдущего параграфа имеем

$$\hat{T}_k^1 \in C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty), C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)\right)$$

и для любого луча $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, где $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ ограничение $\hat{T}_k^1\Big|_l$ принадлежит $C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty), \mathcal{H}(l)\right)\right)$; $\mathcal{K}(q)$ – линейный оператор, отображающий функцию $f = f(x,\rho)$ в функцию

$$(\mathcal{K}(q)f)(x,\rho) = \int\limits_0^x \mathcal{G}_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(q^{(n-k+1)}(t)f(t,\rho)\right)dt. \tag{1.75}$$

Здесь и далее $\mathcal{G}_m(x,t,\rho)$, $\mathcal{G}_m^+(x,t,\rho)$ суть операторно-значные функции (1.41), (1.44), введенные в предыдущем параграфе при доказательстве Теорем 1.2, 1.3. Для простоты обозначений мы будем использовать один и тот же символ $\mathcal{K}(q)$ для обозначения операторов действующих по формуле (1.75) как на функции, определенные на $[0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}}$, так и на функции, определенные на $[0,\infty)\times l$, где l – некоторый луч $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$.

I. 1) Убедимся, что оператор $\mathcal{K}(q)$ непрерывно действует в пространстве $BC\left([0,\infty), C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)$.

Заметим, прежде всего, что если $f(\cdot,\cdot) \in BC\left([0,\infty), C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)$, то, пользуясь представлением

$$(\mathcal{K}(q)f)(x,\rho) = \int\limits_0^1 \mathcal{G}_{n-k+1}(x,x\tau,\rho)\left(q^{(n-k+1)}(x\tau)f(x\tau,\rho)\right)xd\tau$$

и непрерывностью функции $\mathcal{G}_{n-k+1}(x,x\tau,\rho)$ несложно доказать непрерывность функции $(\mathcal{K}(q)f)(x,\rho)$ при $(x,\rho) \in [0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}}$. Далее, из ограниченности функции $\mathcal{G}_{n-k+1}(x,x\tau,\rho)$ следует оценка:

$$\|(\mathcal{K}(q)f)(x,\rho)\| \le M\int\limits_0^x \|q(t)\|\|f(t,\rho)\|\,dt. \tag{1.76}$$

Из (1.76) следует, в частности, что:

$$\|(\mathcal{K}(q)f)(x,\rho)\| \le M\sup_{t\in[0,x]}\|f(t,\rho)\|\int\limits_0^x \|q(t)\|\,dt. \tag{1.77}$$

В силу $f(\cdot,\cdot) \in BC\left([0,\infty), C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)$ имеем $\lim\limits_{\rho\to\infty,\rho\in\overline{\mathcal{S}}} \sup\limits_{t\in[0,x]} \|f(t,\rho)\| = 0$ и (1.77) позволяет сделать вывод, что $(\mathcal{K}(q)f)(x,\cdot) \in C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)$, более того, $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|\mathcal{K}f(t,\rho)\| \to 0$ при $\rho \to \infty$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$ для любого конечного $T > 0$. С учетом непрерывности функции $(\mathcal{K}(q)f)(x,\rho)$ по совокупности переменных, это означает, что $(\mathcal{K}(q)f)(\cdot,\cdot) \in C([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}}))$. Наконец, из оценки (1.77) очевидным образом следует неравенство

$$\|(\mathcal{K}(q)f)(x,\rho)\| \leq M\|f\|_{BC([0,\infty),C_0(\overline{\mathcal{S}}))} \cdot \|q\|_{L_1(0,\infty)}. \tag{1.78}$$

Из неравенства (1.78) можно заключить, что функция $(\mathcal{K}(q)f)(\cdot,\cdot) \in BC([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}}))$, а $\mathcal{K}(q) \in \mathcal{L}\left(BC([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}}))\right)$. Более того, поскольку соответствие $q \to \mathcal{K}(q)$ представляет собой линейный оператор, то из (1.78) следует также непрерывная зависимость оператора $\mathcal{K}(q) \in \mathcal{L}\left(BC([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}}))\right)$ от потенциала $q \in \mathcal{X}_p$.

I. 2) Из оценки (1.76) индукцией по $r = 0, 1, \ldots$ выводим следующую оценку для итерированного оператора $\mathcal{K}^r(q)$:

$$\|(\mathcal{K}^r(q)f)(x,\rho)\| \leq \frac{M^r}{r!}\left(\int\limits_0^x \|q(t)\|\,dt\right)^r \sup_{\tau\in[0,x]} \|f(\tau,\rho)\|, \tag{1.79}$$

из которой вытекает:

$$\|\mathcal{K}^r(q)\| \leq \frac{M^r}{r!}\|q\|^r_{L_1(0,\infty)}, \tag{1.80}$$

где норма в левой части обозначает норму в $\mathcal{L}\left(BC([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}}))\right)$. Таким образом, можно утверждать, что оператор $Id - \mathcal{K}(q)$ обратим в $BC([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}}))$ для любого $q \in \mathcal{X}_p$, более того, обратный оператор $(Id - \mathcal{K}(q))^{-1}$ непрерывно зависит от q. Поскольку

$$\hat{T}_k(q) = (Id - \mathcal{K}(q))^{-1}\hat{T}_k^1(q),$$

это завершает доказательство того, что $\hat{T}_k \in C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty), C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)\right)$.

I. 3) Пусть теперь l – произвольный луч вида $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, где $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$. Для произвольной $f \in BC([0,\infty), \mathcal{H}(l))$ (и следовательно, в частности, $f \in BC([0,\infty), C_0(l))$) очевидным образом повторяются рассуждения из пункта I. 1). В частности, можно утверждать, что $(\mathcal{K}(q)f)(x,\rho)$ непрерывна по $(x,\rho) \in [0,\infty) \times l$. Кроме того, при $\rho \in l$ справедливы неравенства (1.76), (1.77), из которых следует, что $(\mathcal{K}(q)f)(\cdot,\cdot) \in BC([0,\infty), C_0(l))$.

Далее, из оценок:

$$\|(\mathcal{K}(q)f)(x,\cdot)\|_{L_2(l)} \le M \int\limits_0^x \|q(t)\|\|f(t,\cdot)\|_{L_2(l)}\,dt, \tag{1.81}$$

$$\|(\mathcal{K}(q)f)(x,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))} \le M \int\limits_0^x \|q(t)\|\|f(t,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))}\,dt,$$

где $R > 0$ произвольно в силу Леммы 1.1 следует $(\mathcal{K}(q)f)(x,\cdot) \in L_2(l)$ при всех $x \in [0,\infty)$, $(\mathcal{K}(q)f)(\cdot,\cdot) \in BC\left([0,\infty), L_2(l)\right)$. Более того, из (1.77), (1.81) следует:

$$\|(\mathcal{K}(q)f)(x,\rho)\| \le M\|f\|_{BC([0,\infty),C_0(l))} \cdot \|q\|_{L_1(0,\infty)},$$

$$\|(\mathcal{K}(q)f)(x,\cdot)\|_{L_2(l)} \le M\|f\|_{BC([0,\infty),L_2(l))} \cdot \|q\|_{L_1(0,\infty)},$$

что позволяет утверждать, что $\mathcal{K}(q) \in \mathcal{L}\left(BC([0,\infty),\mathcal{H}(l))\right)$ и непрерывно зависит от $q \in \mathcal{X}_p$.

I. 4) Далее, из оценки (1.81) индукцией по $r = 0, 1, \ldots$ могут быть получены оценки:

$$\|(\mathcal{K}^r(q)f)(x,\cdot)\|_{L_2(l)} \le \frac{M^r}{r!}\left(\int\limits_0^x \|q(t)\|\,dt\right)^r \sup_{\tau\in[0,x]} \|f(\tau,\cdot)\|_{L_2(l)},$$

из которых, вместе с оценками (1.79) (остающимися в силе для любых $\rho \in l$), следуют оценки вида (1.80), где, в отличие от пункта I. 2), норма в левой части понимается как норма в $\mathcal{L}\left(BC([0,\infty),\mathcal{H}(l))\right)$. Повторяя рассуждения из пункта I. 2), заключаем, что $\hat{T}_k \in C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty),\mathcal{H}(l)\right)\right)$.

II. 1) Рассуждая, как в пункте I. 1), замечаем, что $\hat{F}_k(q,\cdot,\cdot)$ есть решение уравнения $\hat{F}_k(q) = \mathcal{K}^+(q)\hat{F}_k(q) + \hat{F}_k^1(q)$, где $\hat{F}_k^1(q,x,\rho) = \omega_k^+(q^{(k)},x,\rho)$ и в силу Теорем 1.2, 1.3 предыдущего параграфа имеем

$$\hat{F}_k^1 \in C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty), C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)\right)$$

и для любого луча $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, где $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ ограничение $\hat{F}_k^1\Big|_l$ принадлежит $C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty),\mathcal{H}(l)\right)\right)$; $\mathcal{K}^+(q)$ – линейный оператор, отображающий функцию $f = f(x,\rho)$ в функцию

$$(\mathcal{K}^+(q)f)(x,\rho) = -\int\limits_x^\infty \mathcal{G}_k(x,t,\rho)\left(q^{(k)}(t)f(t,\rho)\right)\,dt. \tag{1.82}$$

Поскольку функция $\mathcal{G}_k(x,t,\rho)$ непрерывна по совокупности переменных (x,t,ρ): $0 \le x < t < \infty$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$, пользуясь теоремой Лебега об ограниченной сходимости можно показать, что для любой функции $f(\cdot,\cdot) \in BC\left([0,\infty), C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)$ функция $(\mathcal{K}^+(q)f)(x,\rho)$ непрерывна по совокупности переменных $x \in [0,\infty)$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$. Далее, из ограниченности функции $\mathcal{G}_k(x,t,\rho)$ следует оценка:

$$\left\|(\mathcal{K}^+(q)f)(x,\rho)\right\| \le M \int\limits_x^\infty \|q(t)\| \|f(t,\rho)\|\, dt. \tag{1.83}$$

Покажем, что

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \left\|(\mathcal{K}^+(q)f)(x,\rho)\right\| = 0. \tag{1.84}$$

Для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем $T_* = T_*(\varepsilon)$, такое что

$$M\|f\| \int\limits_{T_*}^\infty \|q(t)\|\, dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\|f\| = \|f\|_{BC([0,\infty),C_0(\overline{\mathcal{S}}))}$. Далее, для выбранного (конечного) T_* найдется R такое, что

$$M\|f(x,\rho)\| \int\limits_0^{T_*} \|q(t)\|\, dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $x \in [0,T_*]$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} : |\rho| > R$. Тогда при $x \in [0,T_*]$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} : |\rho| > R$ имеем $\|(\mathcal{K}^+(q)f)(x,\rho)\| < \varepsilon$, а при $x \in [T_*,\infty]$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$ $\|(\mathcal{K}^+(q)f)(x,\rho)\| < \varepsilon/2$. Таким образом, (1.84) доказано. С учетом непрерывности функции $(\mathcal{K}^+(q)f)(x,\rho)$ по совокупности переменных $x \in [0,\infty)$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$ это доказывает, что $(\mathcal{K}^+(q)f)(\cdot,\cdot) \in BC\left([0,\infty), C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)$. Наконец, из неравенства (1.83) вытекает оценка

$$\left\|(\mathcal{K}^+(q)f)(x,\rho)\right\| \le M\|q\|_{L_1(0,\infty)}\|f\|_{BC\left([0,\infty),C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)},$$

из которой следует, что оператор $\mathcal{K}^+(q) \in \mathcal{L}\left(BC\left([0,\infty), C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)\right)$ и непрерывно зависит от $q \in \mathcal{X}_p$.

II. 2) Из оценки (1.83) индукцией по $r = 0, 1, \ldots$ выводим следующую оценку:

$$\left\|((\mathcal{K}^+(q))^r f)(x,\rho)\right\| \le \frac{M^r}{r!} \left(\int\limits_x^\infty \|q(t)\|\, dt\right)^r \sup_{\tau\in[x,\infty)} \|f(\tau,\rho)\|, \tag{1.85}$$

из которой вытекает:

$$\left\|(\mathcal{K}^+(q))^r\right\| \leq \frac{M^r}{r!}\|q\|^r_{L_1(0,\infty)}, \tag{1.86}$$

где норма в левой части обозначает норму в $\mathcal{L}\left(BC([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}}))\right)$. Таким образом, можно утверждать, что оператор $Id-\mathcal{K}^+(q)$ обратим в $BC([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}}))$ для любого $q \in \mathcal{X}_p$, более того, обратный оператор $(Id-\mathcal{K}^+(q))^{-1}$ непрерывно зависит от q. Поскольку

$$\hat{F}_k(q) = (Id-\mathcal{K}^+(q))^{-1}\hat{F}^1_k(q),$$

это завершает доказательство того, что $\hat{F}_k \in C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty), C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)\right)$.

II. 3) Пусть теперь l – произвольный луч вида $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, где $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$. Для произвольной $f \in BC([0,\infty), \mathcal{H}(l))$ очевидным образом повторяются рассуждения из пункта II. 1). В частности, можно утверждать, что $(\mathcal{K}(q)f)(\cdot,\cdot) \in BC\left([0,\infty), C_0(l)\right)$. В частности, при $\rho \in l$ справедливо неравенство (1.83), из которого следует оценка:

$$\left\|(\mathcal{K}^+(q)f)(x,\rho)\right\| \leq M\|q\|_{L_1(0,\infty)}\|f\|_{BC([0,\infty),C_0(l))}. \tag{1.87}$$

Далее, из оценок:

$$\left\|(\mathcal{K}^+(q)f)(x,\cdot)\right\|_{L_2(l)} \leq M\int\limits_x^\infty \|q(t)\|\|f(t,\cdot)\|_{L_2(l)}\,dt, \tag{1.88}$$

$$\left\|(\mathcal{K}^+(q)f)(x,\cdot)\right\|_{L_2(l^+(R))} \leq M\int\limits_x^\infty \|q(t)\|\|f(t,\cdot)\|_{L_2(l^+(R))}\,dt,$$

где $R > 0$ произвольно, в силу Леммы 1.1 следует $(\mathcal{K}^+(q)f)(x,\cdot) \in L_2(l)$ при всех $x \in [0,\infty)$, $(\mathcal{K}^+(q)f)(\cdot,\cdot) \in BC\left([0,\infty), L_2(l)\right)$. Более того, из оценки (1.87) и неравенства

$$\left\|(\mathcal{K}^+(q)f)(x,\cdot)\right\|_{L_2(l)} \leq M\|f\|_{BC([0,\infty),L_2(l))}\cdot\|q\|_{L_1(0,\infty)},$$

следует, что $\mathcal{K}^+(q) \in \mathcal{L}\left(BC([0,\infty), \mathcal{H}(l))\right)$ и непрерывно зависит от $q \in \mathcal{X}_p$.

II. 4) Далее, из оценки (1.88) индукцией по $r = 0, 1, \ldots$ могут быть получены оценки:

$$\left\|((\mathcal{K}^+(q))^r f)(x,\cdot)\right\|_{L_2(l)} \leq \frac{M^r}{r!}\left(\int\limits_x^\infty \|q(t)\|\,dt\right)^r \sup_{\tau\in[x,\infty)}\|f(\tau,\cdot)\|_{L_2(l)},$$

из которых, вместе с оценками (1.85) (для $\rho \in l$), следуют оценки вида (1.86), где норма в левой части понимается как норма в $\mathcal{L}\left(BC([0,\infty),\mathcal{H}(l))\right)$. Повторяя рассуждения из пункта II. 2), заключаем, что

$$\hat{F}_k \in C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty),\mathcal{H}(l)\right)\right).$$

$\square$

Теорема 1.7. *Пусть $q(\cdot)$ – абсолютно непрерывная внедиагональная матрица - функция, причём $q(0)=0$. Обозначим через $\hat{q}_o(\cdot)$ внедиагональную матрицу-функцию такую, что $[B,\hat{q}_o(x)] = -q(x)$ при всех $x>0$ (здесь $[\cdot,\cdot]$ обозначает коммутатор матриц). Определим диагональную матрицу - функцию $d(x) = diag(d_1(x),\ldots,d_n(x))$, где*

$$d_k(x) := \int\limits_x^\infty t^{-1}\left([\hat{q}_o(t),A]\right)_{kk}\,dt$$

и положим: $\hat{q}(x) := \hat{q}_o(x) + d(x)$.

Предположим, что все функции $q_{ij}(\cdot), q'_{ij}(\cdot)$ и $\tilde{q}_{ij}(\cdot)$, где $\tilde{q}(x) := \hat{q}'(x) + x^{-1}[\hat{q}(x),A]$ принадлежат $X_p := L_1(0,\infty)\cap L_p(0,\infty)$, $p>2$.

Тогда для каждого фиксированного $x>0$ при $\rho\to\infty$, $\rho\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ справедливы асимптотики:

$$\rho(\tilde{T}_k(x,\rho) - \tilde{T}^0_k(x,\rho)) =$$

$$d_{0k}\tilde{T}^0_k(x,\rho) + \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}_{n-k+1}} T^0_{k\beta} g_{k\alpha\beta}(x)\exp(\rho x(R_\beta - \overleftarrow{R}_k))\mathfrak{f}_\alpha + o(1),$$

$$\rho\left(\tilde{F}_k(x,\rho) - \tilde{F}^0_k(x,\rho)\right) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k} f_{k\alpha}(x)\mathfrak{f}_\alpha + o(1).$$

Здесь

$$d_{0k} = -\sigma_{\alpha^*(k)}\left|\left(d^{(n-k+1)}(0)\mathfrak{h}_{\alpha^*(k)}\right)\wedge\mathfrak{h}_{(\alpha^*(k))'}\right|,$$

$\alpha^*(k) := (k,\ldots,n)$ и коэффициенты представлений определяются по формулам:

$$f_{k\alpha}(x) = \chi_\alpha\left|\left(\hat{q}^{(k)}(x)\mathfrak{f}_{\alpha_*(k)}\right)\wedge\mathfrak{f}_{\alpha'}\right|$$

для $\alpha\neq\alpha_*(k) := (1,\ldots,k)$,

$$f_{k,\alpha_*(k)}(x) = -\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k}\int\limits_x^\infty \chi_{\alpha_*(k)}\left|\left(q^{(k)}(t)\mathfrak{f}_\alpha\right)\wedge\mathfrak{f}_{\alpha'_*(k)}\right|\chi_\alpha\left|(\hat{q}^{(k)}(t)\mathfrak{f}_{\alpha_*(k)})\wedge\mathfrak{f}_{\alpha'}\right|\,dt;$$

$$g_{k\alpha\beta}(x) = \chi_\alpha \left| \left(\hat{q}^{(n-k+1)}(x)\mathfrak{f}_\beta \right) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'} \right|$$

для $\beta \neq \alpha$,

$$g_{k\beta\beta}(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \int\limits_0^x \chi_\beta \left| \left(q^{(n-k+1)}(t)\mathfrak{f}_\alpha \right) \wedge \mathfrak{f}_{\beta'} \right| \chi_\alpha \left| (\hat{q}^{(n-k+1)}(t)\mathfrak{f}_\beta) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'} \right| dt.$$

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве Теоремы 1.6, воспользуемся для функции $\hat{T}_k(x,\rho) := \tilde{T}_k(x,\rho) - \tilde{T}_k^0(x,\rho)$ представлением: $\hat{T}_k(\cdot,\rho) = (Id + \mathcal{K}(\rho))^{-1}\hat{T}_k^1(\cdot,\rho)$, где $\mathcal{K}(\rho)$ – оператор, действующий по формуле:

$$\left(\mathcal{K}(\rho)f\right)(x) := \int\limits_0^x \mathcal{G}_{n-k+1}(x,t,\rho) \left(q^{(n-k+1)}(t) f(t) \right) dt$$

в пространстве $L_\infty(0,\infty)$. Здесь, как и ранее:

$$\mathcal{G}_{n-k+1}(x,t,\rho) := \frac{\overleftarrow{W}^k(\rho t)}{\overleftarrow{W}^k(\rho x)} G_{n-k+1}(x,t,\rho),$$

$\hat{T}_k^1(x,\rho) = \omega_k\left(q^{(n-k+1)}, x, \rho\right)$. В условиях теоремы к функции $\hat{T}_k^1(\cdot,\cdot)$ можно применить Теорему 1.4, что даёт:

$$\rho\hat{T}_k^1(x,\rho) = d_{0k}\tilde{T}_k^0(x,\rho) + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\alpha \left| (\hat{q}^{(n-k+1)}(x)\tilde{T}_k^0(x,\rho)) \wedge E_{\alpha'}(x,\rho) \right| E_\alpha(x,\rho) - \omega_k\left(\tilde{q}^{(n-k+1)}, x, \rho \right). \quad (1.89)$$

Поскольку по построению матрицы $\tilde{q}$ имеем $\tilde{q}_{jj} = 0$, $j = \overline{1,n}$, из (1.89) и Теоремы 1.2 следует (в частности) оценка:

$$\|\hat{T}_k^1(\cdot,\rho)\|_{BC[0,\infty)} = O(\rho^{-1}), \rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}. \quad (1.90)$$

Используя ограниченность $\mathcal{G}_{n-k+1}(x,t,\rho)$ и рассуждая, как при доказательстве Теоремы 2, можно получить оценки:

$$\|\mathcal{K}^r(\rho)\| \leq M_0 \frac{M_1^r}{r!} \left(\int_0^T \|q(t)\| dt \right)^r,$$

где $\|\mathcal{K}^r(\rho)\|$ обозначает норму оператора, действующего в $L_\infty(0,\infty)$. Отсюда, как и ранее, выводится оценка $\|(Id - \mathcal{K}(\rho))^{-1}\| = O(1)$, равномерная по $\rho \in$

$\overline{\mathcal{S}}\backslash\{0\}$. Таким образом, с учетом (1.90), приходим к следующей предварительной оценке функции $\hat{T}_k(\cdot,\cdot)$:

$$\|\hat{T}_k(\cdot,\rho)\|_{L_\infty(0,\infty)} = O(\rho^{-1}), \rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}. \tag{1.91}$$

Представим оператор $\mathcal{K}(\rho)$ в виде $\mathcal{K}(\rho) = \mathcal{K}_0(\rho) + \mathcal{K}_1(\rho)$, где:

$$\mathcal{K}_0(\rho)f(x) :=$$

$$\theta^+(|\rho x|-1) \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\alpha \cdot \int\limits_{|\rho|^{-1}}^{x} \exp(\rho(x-t)(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k)) \left|\left(q^{(n-k+1)}(t)f(t)\right) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}\right| \mathfrak{f}_\alpha \, dt.$$

Лемма 1.8. *В условиях Теоремы 1.7 справедлива оценка* $\|\mathcal{K}_1(\rho)\| = O\left(\rho^{-1}\right)$.

Доказательство Леммы 1.8. Представим оператор в виде суммы: $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_0^{(1)} + \mathcal{K}_1^{(1)} + \mathcal{K}_2^{(1)}$, где:

$$(\mathcal{K}_0^{(1)}f)(x) = \theta^-(|\rho x|-1) \int_0^x \mathcal{G}_{n-k+1}(x,t,\rho) \left(q^{(n-k+1)}(t)f(t)\right) dt,$$

$$(\mathcal{K}_1^{(1)}f)(x) = \theta^+(|\rho x|-1) \int_0^{|\rho|^{-1}} \mathcal{G}_{n-k+1}(x,t,\rho) \left(q^{(n-k+1)}(t)f(t)\right) dt.$$

В силу ограниченности $\mathcal{G}_{n-k+1}(x,t,\rho)$ имеем:

$$\|\mathcal{K}_1^{(1)}f\| \le M\|f\| \cdot \int_0^{|\rho|^{-1}} \|q(t)\| \, dt \le M|\rho|^{-1}\|f\| \cdot \|q(\cdot)\|_{L_\infty(0,\infty)}.$$

Рассуждая аналогично с учетом того, что $(\mathcal{K}_0^{(1)}f)(x) \neq 0$ только, если $|\rho x| \le 1$, получаем аналогичную оценку для $\|\mathcal{K}_0^{(1)}f\|$.

Рассмотрим оператор $\mathcal{K}_2^{(1)}$. Используя представление для $G_{n-k+1}(x,t,\rho)$ в терминах функций $\{E_j(\cdot,\cdot)\}$, асимптотики

$$E_\alpha(x,\rho) = \exp(\rho x R_\alpha)(\mathfrak{f}_\alpha + O\left((\rho x)^{-1}\right)),$$

равномерные в области $|\rho x| \ge 1$, и учитывая, что $\mathrm{Re}(\rho(x-t)(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k)) \le 0$ при всех $0 \le t \le x$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}$, приходим к следующей оценке:

$$\theta^+(|\rho x|-1)\theta^+(|\rho t|-1)\theta^+(x-t) \Bigg\| \mathcal{G}_{n-k+1}(x,t,\rho) \left(q^{(n-k+1)}(t)f(t)\right) -$$

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\alpha \exp(\rho(x-t)(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k)) \left|\left(q^{(n-k+1)}(t)f(t)\right) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}\right| \mathfrak{f}_\alpha \Bigg\|$$

$$\le \frac{M}{|\rho t|}\|q(t)\|.$$

Поскольку в условиях теоремы $t^{-1}\|q(t)\| \in L_1(0,\infty)$ из полученной оценки следует:

$$\|\mathcal{K}_2^{(1)} f\| \le M|\rho|^{-1}\|f\| \cdot \int_0^\infty t^{-1}\|q(t)\|\, dt$$

откуда $\|\mathcal{K}_2^{(1)}\| = O(\rho^{-1})$.

□

Лемма 1.9. *В условиях Теоремы 1.7 справедлива оценка* $\|\mathcal{K}_0^2(\rho)\| = O\left(\rho^{-1}\right)$.

Доказательство Леммы 1.9. Имеем:

$$(\mathcal{K}_0^2 f)(x) = \theta^+(|\rho x|-1)\cdot$$

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{n-k+1}} \int_{|\rho|^{-1}}^x \exp(\rho(x-t)(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k))\chi_\alpha \left|\left(q^{(n-k+1)}(t)(\mathcal{K}_0 f)(t)\right) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}\right| \mathfrak{f}_\alpha\, dt,$$

$$\chi_\alpha \left|\left(q^{(n-k+1)}(t)(\mathcal{K}_0 f)(t)\right) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}\right| =$$

$$\theta^+(|\rho t|-1) \sum_{\beta\in\mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\beta \int_{|\rho|^{-1}}^t \exp(\rho(t-\tau)(R_\beta - \overleftarrow{R}_k))$$

$$\left|\left(q^{(n-k+1)}(\tau) f(\tau)\right) \wedge \mathfrak{f}_{\beta'}\right| Q_{\alpha\beta}(t)\, d\tau,$$

где

$$Q_{\alpha\beta}(t) := \chi_\alpha \left|\left(q^{(n-k+1)}(t)\mathfrak{f}_\beta\right) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}\right|.$$

Таким образом,

$$(\mathcal{K}_0^2 f)(x) = \theta^+(|\rho x|-1) \sum_{\alpha\beta\in\mathcal{A}_{n-k+1}} \int_{|\rho|^{-1}}^x \left|\left(q^{(n-k+1)}(\tau) f(\tau)\right) \wedge \mathfrak{f}_{\beta'}\right|$$

$$H_{\alpha\beta}(x,\tau,\rho)\, d\tau,$$

где:

$$H_{\alpha\beta}(x,\tau,\rho) = \int_\tau^x Q_{\alpha\beta}(t) \exp(\rho(x-t)(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k) + \rho(t-\tau)(R_\beta - \overleftarrow{R}_k))\mathfrak{f}_\alpha\, dt.$$

Заметим, что $\mathrm{Re}(\rho(x-t)(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k) + \rho(t-\tau)(R_\beta - \overleftarrow{R}_k)) \le 0$ для любых $0 \le \tau \le t \le x$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$, $\alpha,\beta \in \mathcal{A}_{n-k+1}$. Кроме того, в условиях Теоремы 1.7 функции $Q_{\alpha\beta}(\cdot)$ функции абсолютно непрерывны и $Q_{\alpha\beta}(t) \equiv 0$ при $\alpha = \beta$. Отсюда вытекает оценка:

$$\theta^+(|\rho\tau|-1) H_{\alpha\beta}(x,\tau,\rho) = O(\rho^{-1}) \tag{1.92}$$

равномерно при $0 \le \tau \le x$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$. Действительно, если $R_\alpha \ne R_\beta$, требуемая оценка получается интегрированием по частям. В случае же $R_\alpha = R_\beta$ в силу Условия 2 имеем $\mathrm{Re}(\rho(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k)) < 0$ строго при всех $0 \le \tau \le x$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$. В этом случае имеем

$$H_{\alpha\beta}(x,\tau,\rho) = \exp\left(\rho(x-\tau)\left(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k\right)\right) \int\limits_\tau^x Q_{\alpha\beta}(t)\,dt,$$

при этом $\left|\exp\left(\rho(x-\tau)\left(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k\right)\right)\right| = \exp(-c(x-\tau)|\rho|)$, $c > 0$,

$$\int_\tau^x |Q_{\alpha\beta}(t)|\ dt \le M\|q\|_{L_\infty(0,\infty)}(x-\tau).$$

Учитывая, что $t\exp(-t) < 1$ при $t > 0$, приходим к (1.92). Таким образом, оценка (1.92) справедлива для всех пар мультииндексов α, β, что завершает доказательство леммы.

$\square$

Завершение доказательства Теоремы 1.7. Имеем $\hat{T}_k(\cdot,\rho) = \hat{T}_k^1(\cdot,\rho) + \mathcal{K}(\rho)\hat{T}_k^1(\cdot,\rho) + \mathcal{K}^2(\rho)\hat{T}_k(\cdot,\rho)$.

Заметим, что:

$$(\mathcal{K}(\rho)\tilde{T}_k^0(\cdot,\rho))(x) =$$

$$\int\limits_0^x \mathcal{G}_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(q^{(n-k+1)}(t)\tilde{T}_k^0(t,\rho)\right) = \hat{T}_k^1(x,\rho) = O(\rho^{-1})$$

равномерно по $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$, $x \in (0,\infty)$.

Из полученной оценки, представления (1.89), предварительной оценки (1.91), оценки (1.90) и Лемм 1.8, 1.9 получаем:

$$\hat{T}_k(\cdot,\rho) = \hat{T}_k^1(\cdot,\rho) + \mathcal{K}_0(\rho)u_k(\cdot,\rho) + O\left(\rho^{-2}\right), \tag{1.93}$$

где

$$\rho u_k(x,\rho) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\alpha \left|(\hat{q}^{(n-k+1)}(x)\tilde{T}_k^0(x,\rho)) \wedge E_{\alpha'}(x,\rho)\right| E_\alpha(x,\rho) - \omega_k\left(\tilde{q}^{(n-k+1)}, x, \rho\right), \tag{1.94}$$

равномерно по $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$, $x \in (0, \infty)$.

Из Теоремы 1.2 и (1.94) вытекает:

$$\rho u_k(x,\rho) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\alpha \left| (\hat{q}^{(n-k+1)}(x)\tilde{T}_k^0(x,\rho)) \wedge E_{\alpha'}(x,\rho) \right| E_\alpha(x,\rho) + o(1),$$

откуда при $\rho \to \infty$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$:

$$\theta^+(|\rho t| - 1)\rho u_k(t,\rho) =$$

$$\theta^+(|\rho t| - 1) \sum_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}_{n-k+1}} T_{k\beta}^0 \exp(\rho t(R_\beta - \overleftarrow{R}_k))\hat{Q}_{\alpha\beta}(t)\mathfrak{f}_\alpha + \rho^{-1}\hat{u}_k(t,\rho) + o(1),$$

где:

$$\hat{Q}_{\alpha\beta}(t) = \chi_\alpha \left| (\hat{q}^{(n-k+1)}(t)\mathfrak{f}_\beta) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'} \right|,$$

оценка $o(\cdot)$ равномерна по $t \in (0,\infty)$ и величина $t\hat{u}_k(t,\rho)$ равномерно ограничена на множестве $\{|\rho t| \ge 1\}$.

В условиях теоремы имеем

$$\int_0^\infty t^{-1}\|q(t)\|\,dt < \infty,$$

поэтому $\|\mathcal{K}_0(\rho)\hat{u}_k(\cdot,\rho)\|_{L_\infty(0,\infty)} = O(1)$ и таким образом, мы получили:

$$(\mathcal{K}_0(\rho)u_k(\cdot,\rho))(x) = \rho^{-1}\theta^+(|\rho x| - 1) \sum_{\alpha,\beta,\gamma \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\gamma T_{k\beta}^0 \cdot$$

$$\int_{|\rho|^{-1}}^x \exp(\rho(x-t)(R_\gamma - \overleftarrow{R}_k) + \rho t(R_\beta - \overleftarrow{R}_k))\hat{Q}_{\alpha\beta}(t) \cdot$$

$$\left| \left(q^{(n-k+1)}(t)\mathfrak{f}_\alpha \right) \wedge \mathfrak{f}_{\gamma'} \right| \mathfrak{f}_\gamma\,dt + o(\rho^{-1}) =$$

$$\rho^{-1}\theta^+(|\rho x| - 1) \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{A}_{n-k+1}} T_{k\beta}^0 \int_{|\rho|^{-1}}^x \exp(\rho(x-t)(R_\gamma - \overleftarrow{R}_k) + \rho t(R_\beta - \overleftarrow{R}_k))\tilde{Q}_{\gamma\beta}(t)\mathfrak{f}_\gamma\,dt$$

$$+o(\rho^{-1}),$$

где:

$$\tilde{Q}_{\gamma\beta}(t) := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} Q_{\gamma\alpha}(t)\hat{Q}_{\alpha\beta}(t), \quad Q_{\gamma\alpha}(t) = \chi_\gamma \left| \left(q^{(n-k+1)}(t)\mathfrak{f}_\alpha \right) \wedge \mathfrak{f}_{\gamma'} \right|$$

и оценка $o(\cdot)$ понимается по норме $L_\infty(0,\infty)$.

В условиях теоремы функции $Q_{\alpha\beta}$ и $\hat{Q}_{\alpha\beta}$ (для любой пары мультииндексов α,β) абсолютно непрерывны. Рассуждая, как при доказательстве Леммы 1.9, получаем при $\gamma \ne \beta$:

$$\int\limits_{|\rho|^{-1}}^{x} \exp(\rho(x-t)(R_\gamma - \overleftarrow{R}_k) + \rho t(R_\beta - \overleftarrow{R}_k))\tilde{Q}_{\gamma\beta}(t)\,dt = O(\rho^{-1}),$$

откуда:

$$(\mathcal{K}_0(\rho)u_k(q,\cdot,\rho))(x) =$$

$$\rho^{-1}\theta^+(|\rho x|-1)\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{n-k+1}} T^0_{k\beta}\exp(\rho x(R_\beta - \overleftarrow{R}_k))\int\limits_{|\rho|^{-1}}^{x}\tilde{Q}_{\beta\beta}(t)\,dt\mathfrak{f}_\beta + o(\rho^{-1}).$$

Подставляя полученную асимптотику в представление (1.93), получаем:

$$\hat{T}_k(x,\rho) = \hat{T}^1_k(x,\rho) +$$

$$\rho^{-1}\theta^+(|\rho x|-1)\sum_{\beta\in\mathcal{A}_{n-k+1}} T^0_{k\beta}\exp(\rho x(R_\beta - \overleftarrow{R}_k))\int\limits_{|\rho|^{-1}}^{x}\tilde{Q}_{\beta\beta}(t)\,dt\mathfrak{f}_\beta + o(\rho^{-1}). \quad (1.95)$$

Здесь, как и ранее, оценка $o(\cdot)$ понимается по норме $L_\infty(0,\infty)$. Но все величины, входящие в (1.95), представляют собой абсолютно непрерывные функции по $x \in (|\rho^{-1}|,\infty)$. Следовательно, представление (1.95) справедливо при $\rho\to\infty$ для каждого фиксированного $x>0$.

Заметим теперь, что

$$\int\limits_{|\rho|^{-1}}^{x}\tilde{Q}_{\beta\beta}(t)\,dt \to \int\limits_{0}^{x}\tilde{Q}_{\beta\beta}(t)\,dt = g_{k\beta\beta}(x)$$

при $\rho\to\infty$. Используя данное наблюдение, а также представление (1.89) для $\hat{T}^1_k(x,\rho)$, получаем из (1.95) требуемую асимптотику.

$\square$

§1.3 Построение и исследование решений типа Вейля

Данный параграф посвящен построению и исследованию решений типа Вейля для операторов вида (5). Решения типа Вейля возникают как решения эквивалентной уравнению $\ell y = \rho y$ системы

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y =: U(x,\rho)y \tag{1.96}$$

с заданным асимптотическим поведением при $x \to 0$ и $x \to \infty$. Эти решения, которые можно считать прямым аналогом решений, рассматривавшихся в работах Р. Билса и В.А. Юрко, играют ключевую роль в различных вопросах спектральной теории, в частности, в теории обратных задач.

В отличие от традиционных методов, мы не используем никаких вспомогательных ФСР системы (1.96), основным инструментом в наших построениях выступают построенные в предыдущем параграфе фундаментальные тензоры. Одним из ключевых результатов, излагаемых далее, является возможность представления фундаментальных тензоров как внешних произведений некоторых специальных решений системы (1.96). Построение самих решений при этом сводится к решению некоторых (вообще говоря, переопределенных) СЛАУ. Для работы с такими системами мы будем использовать следующее утверждение (этот результат хорошо известен, см., например Лемму 7.1 [68], тем не менее, для удобства читателя мы приводим здесь его доказательство).

Утверждение 1.1. *Рассмотрим уравнение*

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_m \wedge f = g$$

относительно неизвестного вектора $f \in \mathbb{C}^n$, где $g \in \wedge^{m+1}\mathbb{C}^n$ и система линейно независимых векторов $\{u_1, \ldots, u_m\}$ заданы.

Данная задача имеет решение тогда и только тогда, когда $g \wedge u_j = 0$, $j = \overline{1,m}$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Дополнив систему $\{u_1, \ldots, u_m\}$ произвольным образом до базиса $\{u_1, \ldots, u_n\}$ в $\mathbb{C}^n$, перепишем рассматриваемое уравнение в виде

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j (u_1 \wedge \cdots \wedge u_m \wedge u_j) = g,$$

что эквивалентно СЛАУ:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\alpha j}\beta_j = g_\alpha, \ \alpha \in \mathcal{A}_{m+1}$$

относительно коэффициентов $\{\beta_j\}_{j=1}^n$, где:

$$a_{\alpha j} = |u_1 \wedge \cdots \wedge u_m \wedge u_j \wedge u_{\alpha'}|\,,\ g_\alpha = |g \wedge u_{\alpha'}|\,.$$

Для любого мультииндекса $\alpha \in \mathcal{A}_{m+1}$ такого, что $\alpha' \cap (1, \ldots, m) \neq \varnothing$ имеем $a_{\alpha j} = 0$ для всех $j = \overline{1, n}$, при этом и $g_\alpha = 0$, и соответствующая строка в СЛАУ представляет собой тождество. После исключения всех таких строк СЛАУ приводится к виду

$$a_{\alpha j}\beta_j = g_\alpha,\ j = \overline{m+1, n},$$

где $\alpha = (1, \ldots, m, j)$, $a_{\alpha j} = |u_1 \wedge \cdots \wedge u_m \wedge u_j \wedge u_{\alpha'}| \neq 0$.

$\square$

Замечание 1.1. *В условиях Утверждения 1.1 искомый вектор f определен с точностью до произвольной линейной комбинации векторов $u_1, \ldots, u_m$, т.е. рассматриваемая задача не является однозначно разрешимой. Для получения однозначно разрешимой задачи можно дополнить уравнение некоторой системой соотношений, однозначно фиксирующей компоненту из $span\{u_1, \ldots, u_m\}$. Например, при выполнении условий $g \wedge u_j = 0$, $j = \overline{1, m}$ однозначно разрешимой является задача (СЛАУ) вида:*

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_m \wedge f = g,\ (f, u_j) = 0,\ j = \overline{1, m},$$

где $(\cdot, \cdot)$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$.

Следующий результат вспомогательного характера показывает, что фундаментальные тензоры являются поточечно (т.е. для каждой фиксированной пары аргументов (x, ρ)) разложимыми.

Лемма 1.10. *Пусть $q(\cdot) \in L_1(0, \infty)$. Тогда существуют (однозначно определяемые) наборы функций $\{v_1(x, \rho), \ldots, v_n(x, \rho)\}$ и $\{w_1(x, \rho), \ldots, w_n(x, \rho)\}$, $x \in (0, \infty)$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ такие, что:*

- *для любых фиксированных x, ρ векторы $\{v_1, \ldots, v_n\}$ попарно ортогонально, векторы $\{w_1, \ldots, w_n\}$ также попарно ортогональны;*
- *фундаментальные тензоры допускают разложения вида: $T_k = w_k \wedge \cdots \wedge w_n$, $F_k = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$;*
- *для любых фиксированных x, ρ и для всех $s \leq k$ справедливы соотношения: $v_s \wedge F_k = 0$, $w_k \wedge T_s = 0$;*

- *справедливы соотношения:*

$$(w_k' - U(x,\rho)w_k) \wedge T_{k+1} = 0,\ F_{k-1} \wedge (v_k' - U(x,\rho)v_k) = 0;$$

- *имеют место асимптотики:*

$$v_k = \exp(\rho R_k x)(\mathfrak{f}_k + o(1)),\ x \to \infty, w_k = (\rho x)^{\mu_k}(\mathfrak{g}_k + o(1)),\ x \to 0,$$

где $\{\mathfrak{g}_k\}_{k=1}^n$ *– не зависящие от* x, ρ *ортогональные векторы, такие, что:* $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{h}_n,\ \mathfrak{g}_k - \mathfrak{h}_k \in span\{\mathfrak{g}_j\}_{j>k}$.

Доказательство. 1) Положим $w_n(x,\rho) := T_n(x,\rho)$. Убедимся, что $w_n \wedge T_j = 0$ при всех $j < n$, x, ρ. При $j = 1$ утверждение очевидно. Пусть $j > 1$. Обозначив $w_n \wedge T_j =: y$, заметим, что $y(\cdot,\rho)$ удовлетворяет уравнению:

$$y' = (\rho B + x^{-1}A)^{(n-j+2)}y + q^{(n-j+2)}(x)y \tag{1.97}$$

и допускает оценку:

$$\|y(x,\rho)\| \le M(\rho)\left|(\rho x)^{\overleftarrow{\mu_j}+\mu_n}\right|,\ |\rho x| \le 1. \tag{1.98}$$

Рассматривая (1.97) как неоднородное уравнение с правой частью $q^{(n-j+2)}(x)y$, получим представление:

$$y(x,\rho) = \int\limits_{x_0}^{x} G_{n-j+2}(x,t,\rho)\left(q^{(n-j+2)}(t)y(t)\right)dt +$$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-j+2}} A_\alpha(x_0,\rho)\Psi_{0\alpha}(x,\rho), \tag{1.99}$$

где константы $A_\alpha(x_0,\rho)$ определяются из соотношения:

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-j+2}} A_\alpha(x_0,\rho)\Psi_{0\alpha}(x_0,\rho) = y(x_0,\rho). \tag{1.100}$$

Из (1.100) следует представление:

$$|A_\alpha(x_0,\rho)| = ||y(x_0,\rho) \wedge \Psi_{0\alpha'}(x_0,\rho)||\,,$$

из которого с учетом (1.98) вытекает оценка:

$$|A_\alpha(x_0,\rho)| \le M(\rho)\left|(\rho x_0)^{\overleftarrow{\mu_j}+\mu_n-\mu_\alpha}\right|,\ x_0 < |\rho^{-1}|.$$

Переходя к пределу при $x_0 \to 0$ (при произвольном фиксированном ρ) и учитывая, что при всех $\alpha \in \mathcal{A}_{n-j+2}$ имеем

$$\mathrm{Re}\,(\overleftarrow{\mu_j} + \mu_n - \mu_\alpha) = \mathrm{Re}\,(\overleftarrow{\mu}_{j-1} - \mu_\alpha + \mu_n - \mu_{j-1}) \geq \mathrm{Re}(\mu_n - \mu_{j-1}) > 0,$$

получаем $A_\alpha(x_0, \rho) \to 0$. Переходя теперь к пределу при $x_0 \to 0$ в представлении (1.99), заключаем, что $y(\cdot, \rho)$ удовлетворяет следующему однородному вольтерровскому уравнению:

$$y(x, \rho) = \int\limits_0^x G_{n-j+2}(x, t, \rho) \left(q^{(n-j+2)}(t) y(t, \rho) \right) dt. \tag{1.101}$$

Из уравнения (1.101) и оценки (1.98) по индукции выводится следующая оценка при $m = 1, 2, \ldots$:

$$\|y(x, \rho)\| \leq M(\rho) \frac{M_1^m}{m!} \cdot \left| (\rho x)^{\overleftarrow{\mu_j} + \mu_n} \right| \cdot \left(\int\limits_0^x \|q(t)\| dt \right)^m, \ |\rho x| \leq 1.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем $y(x, \rho) = 0$ при $x \in (0, |\rho^{-1}|)$. Поскольку $y(x, \rho)$ является решением однородной системы дифференциальных уравнений (1.97), отсюда следует, что $y(x, \rho) \equiv 0$.

2) Далее используем индукцию по $k = n-1, \ldots, 1$. Предположим, что уже построены вектор-функции $\{w_{k+1}, \ldots, w_n\}$, обладающие указанными свойствами, в частности: $T_{k+1} = w_{k+1} \wedge \cdots \wedge w_n$ и при $j > k$ $w_j(x, \rho) \wedge T_k(x, \rho) \equiv 0$. Для выполнения шага индукции требуется доказать существование и единственность функции $w_k = w_k(x, \rho)$, $x \in (0, \infty)$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ такой, что:

а) $w_k \wedge T_{k+1} = T_k$, $(w_k, w_j) = 0$, $j = \overline{k+1, n}$ для любых фиксированных x, ρ;

б) выполнено соотношение $(w_k' - U(x, \rho) w_k) \wedge T_{k+1} = 0$;

в) имеет место указанная в лемме асимптотика при $x \to 0$ для любого фиксированного $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$;

г) $w_k(x, \rho) \wedge T_j(x, \rho) \equiv 0$ при всех $j \leq k$.

а) Разрешимость системы $w \wedge T_{k+1} = T_k$ следует из предположения индукции и Утверждения 1.1. Обозначим через w_k единственное (см. Замечание 1.1.) решение данной системы, удовлетворяющее дополнительному условию $(w, w_j) = 0$, $j = \overline{k+1, n}$.

б) Дифференцируя соотношение $w_k \wedge T_{k+1} = T_k$ и учитывая, что функция $T_m(\cdot, \rho)$ удовлетворяет уравнению $T_m' = U^{(n+1-m)} T_m$, получим требуемое соотношение $(w_k' - U(x, \rho) w_k) \wedge T_{k+1} = 0$.

в) Пусть $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ фиксировано, $x \to 0$. В силу асимптотик функций $C_1, \dots, C_k$ (из §1.1) и $w_{k+1}, \dots, w_n$ (из предположения индукции) векторы $C_1, \dots, C_k, w_{k+1}, \dots, w_n$ при всех достаточно малых x линейно независимы, и справедливо представление:

$$w_k(x, \rho) = \sum_{j>k} \beta_j(x, \rho) w_j(x, \rho) + \sum_{j \le k} \gamma_j(x, \rho) C_j(x, \rho). \tag{1.102}$$

Подставляя w_k в виде (1.102) в уравнение $w_k \wedge T_{k+1} = T_k$ (при каждом фиксированном x и ρ), получим:

$$\sum_{j \le k} \gamma_j C_j \wedge T_{k+1} = T_k,$$

откуда:

$$\gamma_j \left| C_1 \wedge \dots \wedge C_k \wedge T_{k+1} \right| =$$
$$(-1)^{\chi_j} \left| C_1 \wedge \dots \wedge C_{j-1} \wedge C_{j+1} \wedge \dots \wedge C_k \wedge T_k \right|, \ \chi_j \in \{0, 1\}, \chi_k = 0.$$

Из асимптотик $C_j(x, \rho)$, $T_j(x, \rho)$ при $x \to 0$ следует, что:

$$\gamma_k = 1 + o(1), \ \gamma_j = o(\left|(\rho x)^{\mu_k - \mu_j}\right|), \ j < k$$

откуда:

$$w_k^1(x, \rho) := \sum_{j \le k} \gamma_j(x, \rho) C_j(x, \rho) = (\rho x)^{\mu_k} (\mathfrak{h}_k + o(1)). \tag{1.103}$$

Соотношения $(w_k, w_j) = 0$, $j = \overline{k+1, n}$ перепишем следующим образом:

$$\beta_j(w_j, w_j) + (w_k^1, w_j) = 0.$$

Отсюда, с учетом (1.103) и предположения индукции, получаем:

$$\beta_j(x, \rho) = (\beta_j^0 + o(1))(\rho x)^{\mu_k - \mu_j}, \ \beta_j^0(\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_j) + (\mathfrak{h}_k, \mathfrak{g}_j) = 0. \tag{1.104}$$

Подставляя представления (1.103), (1.104) в (1.102), приходим к требуемой асимптотике:

$$w_k(x, \rho) = (\rho x)^{\mu_k} (\mathfrak{g}_k + o(1)), \ \mathfrak{g}_k = \mathfrak{h}_k + \sum_{j>k} \beta_j^0 \mathfrak{g}_j,$$

причём при $j > k$ имеем: $(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_j) = (\mathfrak{h}_k, \mathfrak{g}_j) + \beta_j^0(\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_j) = 0$ в силу (1.104).

г) Рассуждая, как в пункте 1), рассмотрим функцию $w_k \wedge T_j =: y$, где $j \le k$. Так же, как и в п. 1) $y(\cdot, \rho)$ удовлетворяет уравнению:

$$y' = (\rho B + x^{-1} A)^{(n-j+2)} y + q^{(n-j+2)}(x) y$$

и допускает оценку:

$$\|y(x)\| \le C \left|(\rho x)^{\overleftarrow{\mu_j}+\mu_k}\right|, \ |\rho x| \le 1.$$

Повторяя те же рассуждения, что в п.1) и учитывая, что

$$\operatorname{Re}(\overleftarrow{\mu_j} + \mu_k - \mu_\alpha) = \operatorname{Re}(\overleftarrow{\mu}_{j-1} - \mu_\alpha + \mu_k - \mu_{j-1}) \ge \operatorname{Re}(\mu_k - \mu_{j-1}) > 0,$$

мы заключаем, что $y(x,\cdot)$ удовлетворяет однородному вольтерровскому уравнению:

$$y(x,\rho) = \int_0^x G_{n-j+2}(x,t,\rho)\left(q^{(n-j+2)}(t)y(t,\rho)\right)dt,$$

из которого по индукции выводим оценку (где $m = 1, 2, \dots$):

$$\|y(x,\rho)\| \le M(\rho)\frac{M_1^m}{m!} \cdot \left|(\rho x)^{\overleftarrow{\mu_j}+\mu_k}\right| \cdot \left(\int_0^x \|q(t)\|dt\right)^m, \ |\rho x| \le 1.$$

Из полученной оценки вытекает $y(x,\rho) \equiv 0$. Тем самым, шаг индукции завершён.

3) Доказательство утверждений о функциях $\{v_k(\cdot,\cdot)\}$ использует в основном те же соображения, что изложены в п.1), 2). Положив $v_1(x,\rho) := F_1(x,\rho)$, для функции $y(x,\rho) := F_j(x,\rho) \wedge v_1(x,\rho)$ при $j = \overline{1, n-1}$ (случай $j = n$ тривиален) получим однородное волльтерровское уравнение

$$y(x,\rho) = -\int_x^\infty G_{j+1}(x,t,\rho)\left(q^{(j+1)}(t)y(t,\rho)\right)\,dt,$$

из которого следуют оценки ($m = 0, 1, \dots$)

$$\|y(x,\rho)\| \le M(\rho)\left|\exp\left(\rho x(R_1 + \overrightarrow{R}_j)\right)\right| \cdot \frac{M_1^m}{m!}\left(\int_x^\infty \|q(t)\|dt\right)^m, \ x > |\rho|^{-1},$$

откуда заключаем, что $y(x,\rho) \equiv 0$, т.е. $F_j(x,\rho) \wedge v_1(x,\rho) \equiv 0$ при всех $j \ge 1$.

Далее рассуждаем по индукции. Шаг индукции сводится к тому, чтобы из существования функций $v_1(\cdot,\cdot), \dots, v_{k-1}(\cdot,\cdot)$, обладающих указанными свойствами, вывести существование функции $v_k = v_k(x,\rho)$, $x \in (0,\infty)$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ такой, что:

а) $F_{k-1} \wedge v_k = F_k$, $(v_k, v_j) = 0$, $j = \overline{1, k-1}$ для любых фиксированных x, ρ;
б) выполнено соотношение $F_{k-1} \wedge (v_k' - U(x,\rho)v_k) = 0$;
в) имеет место указанная в лемме асимптотика при $x \to \infty$ для любого фиксированного $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$;
г) $v_k(x,\rho) \wedge F_j(x,\rho) \equiv 0$ при всех $j \geq k$.

Пункт а), как и ранее, следует из Утверждения 1.1 с учетом Замечания 1.1. Пункт б) получается дифференцированием равенства $F_{k-1} \wedge v_k = F_k$ с учетом уравнения $F_m' = U^{(m)} F_m$.

в) Для исследования асимптотики при $x \to \infty$ воспользуемся представлением

$$v_k(x,\rho) = \sum_{j<k} \beta_j(x,\rho) v_j(x,\rho) + \sum_{j \geq k} \beta_j(x,\rho) E_j(x,\rho). \tag{1.105}$$

Из соотношения $F_{k-1} \wedge v_k = F_k$ находим коэффициенты β_j, $j \geq k$:

$$\beta_j \left| F_{k-1} \wedge E_j \wedge E_k \wedge \cdots \wedge E_{j-1} \wedge E_{j+1} \wedge \cdots \wedge E_n \right| =$$

$$\left| F_k \wedge E_k \wedge \cdots \wedge E_{j-1} \wedge E_{j+1} \wedge \cdots \wedge E_n \right|.$$

При $x \to \infty$ получаем: $\beta_k = 1 + o(1)$, $\beta_j = o(\exp(\rho x(R_k - R_j)))$, $j > k$. Это влечёт, в свою очередь, асимптотику

$$v_k^1(x,\rho) = \exp(\rho x R_k)(\mathfrak{f}_k + o(1))$$

для функции

$$v_k^1(x,\rho) := \sum_{j \geq k} \beta_j(x,\rho) E_j(x,\rho).$$

Далее, из соотношений $(v_j, v_k) = 0$ находим представления для β_j, $j < k$:

$$\beta_j (v_j, v_j) = -(v_k^1, v_j).$$

С учетом предположения индукции и полученной аситптотики для функции $v_k^1(x,\rho)$ имеем:

$$(v_j, v_j) = \exp(x(\rho R_j + \bar{\rho} \bar{R}_j))(1 + o(1)),$$

$$(v_k^1, v_j) = \exp(x(\rho R_k + \bar{\rho} \bar{R}_j))((\mathfrak{f}_k, \mathfrak{f}_j) + o(1)),$$

откуда $\beta_j = o(\exp(\rho x(R_k - R_j)))$, $j < k$. Подставляя найденные асимптотики коэффициентов $\beta_j(x,\rho)$, $j = \overline{1,n}$ в представление (1.105), получим требуемую асимптотику для $v_k(x,\rho)$, $x \to \infty$.

г) Рассуждения аналогичные приведенным выше приводят к уравнению

$$y(x,\rho) = -\int\limits_x^\infty G_{j+1}(x,t,\rho)\left(q^{(j+1)}(t)y(t,\rho)\right)\,dt$$

для функции $y(x,\rho) := F_j(x,\rho)\wedge v_k(x,\rho)$ при $j=\overline{k,n-1}$, из которого следуют оценки ($m = 0,1,\dots$):

$$\|y(x,\rho)\| \le M(\rho)\left|\exp\left(\rho x(R_k+\overrightarrow{R}_j)\right)\right|\cdot\frac{M_1^m}{m!}\left(\int\limits_x^\infty \|q(t)\|dt\right)^m,\ x>|\rho|^{-1},$$

откуда заключаем, что $y(x,\rho)\equiv 0$, т.е. $F_j(x,\rho)\wedge v_k(x,\rho)\equiv 0$ при всех $j\ge k$.

$\square$

Наш следующий шаг – представить фундаментальные тензоры как внешние произведения функций, являющихся решениями системы (1.96) (ни $v_k(\cdot,\rho)$, ни $w_k(\cdot,\rho)$ системе (1.96), вообще говоря, не удовлетворяют). Это оказывается возможным при условии не обращения в нуль некоторых функций, которые естественно назвать *характеристическими функциями.* Мы определим их соотношениями

$$\Delta_k(\rho) := \left|F_{k-1}(x,\rho)\wedge T_k(x,\rho)\right|,$$

$k=\overline{2,n}$, $\Delta_1(\rho) := |T_1(x,\rho)| = 1$.

Теорема 1.8. *Пусть $q(\cdot)\in L_1(0,\infty)$. Зафиксируем произвольное $k\in\{2,\dots,n\}$. Тогда для любого $\rho\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ такого, что $\Delta_k(\rho)\ne 0$ существует и единственна функция $\Psi_k(\cdot,\rho):(0,\infty)\to\mathbb{C}^n$ со следующими свойствами:*

1. *для каждого фиксированного $x\in(0,\infty)$ выполняются соотношения $F_{k-1}\wedge\Psi_k = F_k$, $\Psi_k\wedge T_k = 0$;*
2. *$\Psi_k' = U(x,\rho)\Psi_k$, т.е., $\Psi_k(\cdot,\rho)$ является решением системы (1.96);*
3. *справедливы асимптотики:*

$$\Psi_k(x,\rho) = O((\rho x)^{\mu_k}), x\to 0,$$

$$\Psi_k(x,\rho) = O\left(\exp(\rho x R_k)\right),\ x\to\infty$$

$$\mathfrak{f}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{f}_{k-1}\wedge\Psi_k(x,\rho) = \exp(\rho x R_k)\left(\mathfrak{f}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{f}_k + o(1)\right),\ x\to\infty.$$

4. Если ρ таково, что $Re(\rho R_{k-1}) < Re(\rho R_k)$ (например, если $\rho \in \mathcal{S}$), то имеет место асимптотика:

$$\Psi_k(x,\rho) = \exp(\rho R_k x)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x \to \infty.$$

Доказательство. В силу установленной в Лемме 1.10 разложимости фундаментальных тензоров, соотношения $F_{k-1} \wedge \Psi_k = F_k$, $\Psi_k \wedge T_k = 0$ эквивалентны соотношениям (при произвольных фиксированных значениях x, ρ):

$$v_k - \Psi_k = \sum_{j<k} \beta_j v_j, \;\; \Psi_k = \sum_{j \geq k} \gamma_j w_j, \tag{1.106}$$

где $\{v_k(\cdot,\rho)\}$, $\{w_k(\cdot,\rho)\}$ – функции из Леммы 1.10. Соотношения (1.106) эквивалентны системе линейных уравнений:

$$\sum_{j<k} \beta_j v_j + \sum_{j \geq k} \gamma_j w_j = v_k. \tag{1.107}$$

относительно коэффициентов $\{\beta_j\}_{j<k}$, $\{\gamma_j\}_{j\geq k}$. Определитель системы (1.107) совпадает с $\Delta_k(\rho)$ и при выполнении условия $\Delta_k(\rho) \neq 0$ система (1.107) однозначно разрешима. Тем самым мы доказали существование функции $\Psi_k(\cdot,\rho)$, обладающей свойством 1. Далее, дифференцируя соотношения $F_{k-1} \wedge \Psi_k = F_k$, $\Psi_k \wedge T_k = 0$ и действуя, как при доказательстве Леммы 1.10, приходим к соотношениям $F_{k-1} \wedge (\Psi_k' - U(x,\rho)\Psi_k) = 0$, $(\Psi_k' - U(x,\rho)\Psi_k) \wedge T_k = 0$, что эквивалентно:

$$\Psi_k' - U(x,\rho)\Psi_k = -\sum_{j<k} \beta_j v_j, \;\; \Psi_k' - U(x,\rho)\Psi_k = \sum_{j \geq k} \gamma_j w_j.$$

Из данных соотношений вытекает, что числа $\left\{\{\beta_j\}_{j<k}, \{\gamma_j\}_{j=k}^n\right\}$ удовлетворяют однородной системе линейных уравнений

$$\sum_{j<k} \beta_j v_j + \sum_{j \geq k} \gamma_j w_j = 0,$$

которая при выполнении условия $\Delta_k(\rho) \neq 0$ имеет лишь тривиальное решение. Это означает, что $\Psi_k' - U(x,\rho)\Psi_k = 0$ и тем самым доказано свойство 2.

Рассмотрим асимптотику $\Psi_k(x,\rho)$ при $x \to 0$. Из системы (1.107) получаем представление:

$$\gamma_j \Delta_k = (-1)^{\chi_j} \left| F_k \wedge w_k \wedge \ldots w_{j-1} \wedge w_{j+1} \wedge \cdots \wedge w_n \right|, \;\; \chi_j \in \{0,1\}.$$

Из асимптотик F_k (Следствие 1.1) и w_j (Лемма 1.10) вытекает: $\gamma_j = O\left((\rho x)^{\mu_k-\mu_j}\right)$ при $x \to 0$, что даёт $\Psi_k(x,\rho) = O\left((\rho x)^{\mu_k}\right)$ при $x \to 0$.

Рассмотрим поведение $\Psi_k(x,\rho)$ при $x \to \infty$. Из (1.107) имеем представление:

$$\beta_j\Delta_k = \chi_j \left|v_1 \wedge \ldots v_{j-1} \wedge v_{j+1} \wedge \cdots \wedge v_{k-1} \wedge v_k \wedge T_k\right|, \ \chi_j \in \{-1,1\}. \qquad (1.108)$$

Прежде всего, заметим, что с учетом асимптотик T_k (Следствие 1.1) и v_j (Лемма 1.10) вытекает:

$$\beta_j(x,\rho) = O(\exp(\rho x(R_k - R_j))), \ \mathfrak{f}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{f}_{k-1} \wedge (\beta_j v_j) = o(\exp(\rho x R_k)).$$

Подставляя полученные оценки в представление (1.106), получим асимптотику из пункта 3 теоремы.

Рассмотрим поведение $\Psi_k(x,\rho)$ при $x \to \infty$ более подробно. Используя асимптотики $v_1, v_2, \ldots$ и T_k, можем получить представление:

$$\beta_j(x,\rho)\Delta_k(\rho) = (-1)^{\chi_j}\delta_j(x,\rho) + o(\exp(\rho x(R_k - R_j))), \qquad (1.109)$$

где

$$\delta_j := \left|F^0_{k,j} \wedge T_k\right|, \ F^0_{k,j} := E_1 \wedge \cdots \wedge E_{j-1} \wedge E_{j+1} \wedge \cdots \wedge E_k.$$

Величина $\delta_j(x,\rho)$ допускает представление

$$\delta_j(x,\rho) = \delta^0_j + \hat{\delta}_j(x,\rho), \qquad (1.110)$$

где:

$$\delta^0_j = \left|F^0_{k,j}(x,\rho) \wedge T^0_k(x,\rho)\right|$$

представляет собой вронскиан системы функций $\left\{\{E_j(x,\rho)\}_{j<k}, \{C_j(x,\rho)\}_{j=k}^n\right\}$, составленной из решений невозмущенной системы и поэтому не зависит от x,ρ (см. §1.1). Далее, имеем:

$$\hat{\delta}_j(x,\rho) = \left|F^0_{k,j}(x,\rho) \wedge (T_k(x,\rho) - T^0_k(x,\rho))\right| =$$

$$\int\limits_0^x \left|F^0_{k,j}(x,\rho) \wedge \left(G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(q^{(n-k+1)}(t)T_k(t,\rho)\right)\right) dt\right|.$$

Используя представление для оператора Грина, представим подынтегральное выражение в виде:

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\alpha \left|\left(q^{(n-k+1)}(t)T_k(t,\rho)\right) \wedge E_{\alpha'}(t,\rho)\right| \cdot \left|F^0_{k,j}(x,\rho) \wedge E_\alpha(x,\rho)\right|,$$

$\chi_\alpha = |\mathfrak{f}_\alpha \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}|$. Заметим, что $\left|F^0_{k,j}(x,\rho) \wedge E_\alpha(x,\rho)\right| = \chi_{\alpha'}$, если $\alpha = (j, k+1, \dots, n)$ и 0 для всех остальных мультииндексов $\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}$. Таким образом, имеем:

$$\hat{\delta}_j(x,\rho) = \int\limits_0^x \left| \left(q^{(n-k+1)}(t) T_k(t,\rho) \right) \wedge F^0_{k,j}(t,\rho) \right| \, dt.$$

Далее, разбивая правую часть на два интеграла, запишем:

$$\hat{\delta}_j(x,\rho) = \hat{\delta}_{j0}(\rho) + \hat{\delta}_{j1}(x,\rho), \tag{1.111}$$

где:

$$\hat{\delta}_{j0}(\rho) = \int\limits_0^{|\rho^{-1}|} \left| \left(q^{(n-k+1)}(t) T_k(t,\rho) \right) \wedge F^0_{k,j}(t,\rho) \right| \, dt,$$

$$\hat{\delta}_{j1}(x,\rho) = \int\limits_{|\rho^{-1}|}^x \left| \left(q^{(n-k+1)}(t) T_k(t,\rho) \right) \wedge F^0_{k,j}(t,\rho) \right| \, dt.$$

Используя оценки для $T_k(x,\rho)$ и $E_k(x,\rho)$ при $|\rho x| \ge 1$, получим неравенство:

$$|\hat{\delta}_{j1}(x,\rho)| \le M \int\limits_{|\rho|^{-1}}^x \|q(t)\| \cdot |\exp(\rho t(R_k - R_j))| dt.$$

Перепишем полученную оценку в виде:

$$|\hat{\delta}_{j1}(x,\rho) \exp(\rho x(R_j - R_k))|$$

$$\le M \int\limits_{|\rho|^{-1}}^x \|q(t)\| \cdot |\exp(\rho(x-t)(R_j - R_k)| dt. \tag{1.112}$$

При выполнении условия $\mathrm{Re}(\rho R_{k-1}) < \mathrm{Re}(\rho R_k)$ имеем также $\mathrm{Re}(\rho R_j) < \mathrm{Re}(\rho R_k)$ для любого $j < k$. В этом случае правая часть (1.112) стремится к 0 при $x \to \infty$. Таким образом, имеем $\hat{\delta}_{j1}(x,\rho) = o(\exp(\rho x(R_k - R_j)))$ при $x \to \infty$. В силу (1.111), (1.110), (1.109) это означает, что $\beta_j(x,\rho) = \beta^0_j(\rho) + o(\exp(\rho x(R_k - R_j)))$ при $x \to \infty$. Подставляя полученную асимптотику в представление (1.106) и учитывая, что $\mathrm{Re}(\rho R_j) < \mathrm{Re}(\rho R_k)$ при $j < k$, получим асимптотику, указанную в свойстве 4.

$\square$

Всюду далее обозначение $\Psi_k(\cdot,\cdot)$, $k=\overline{2,n}$ будет использоваться для обозначения функций из Теоремы 1.8. Положим $\Psi_1(x,\rho):=F_1(x,\rho)$. Отметим, что для $\Psi_1(\cdot,\cdot)$ справедливы асимптотики

$$\Psi_1(x,\rho)=O((\rho x)^{\mu_1}), x\to 0,\ \Psi_1(x,\rho)=\exp(\rho x R_1)(\mathfrak{f}_1+o(1)), x\to\infty.$$

Таким образом, свойствами 3, 4 обладают все функции $\Psi_k(\cdot,\cdot)$, $k=\overline{1,n}$. Следующий результат показывает, что эти свойства являются в определенном смысле характеристическими.

Лемма 1.11. *Пусть $q(\cdot)\in L_1(0,\infty)$. Зафиксируем произвольное $k\in\{1,\dots,n\}$. Пусть $\rho\in\mathcal{S}$ таково, что $\Delta_k(\rho)\neq 0$.*

Тогда любое решение $y(\cdot)$ системы (1.96), удовлетворяющее условиям:

$$y(x)=O((\rho x)^{\mu_k}), x\to 0,\ y(x)=\exp(\rho R_k x)(\mathfrak{f}_k+o(1)), x\to\infty,$$

совпадает с $\Psi_k(\cdot,\rho)$.

Доказательство. Рассуждения аналогичны использовавшимся в доказательстве Леммы 1.10. Пусть $k\geq 2$. Рассмотрим функции: $Y_-(x):=(y(x)-\Psi_k(x,\rho))\wedge T_k(x,\rho)$ и $Y_+(x):=F_{k-1}(x,\rho)\wedge(y(x)-\Psi_k(x,\rho))$.

Для Y_- выполнено уравнение

$$Y_-'=(\rho B+x^{-1}A)^{(n-k+2)}Y_-+q^{(n-k+2)}(x)Y_-$$

и справедливы оценки:

$$\|Y_-(x)\|\leq C\left|(\rho x)^{\overleftarrow{\mu_k}+\mu_k}\right|,\ |\rho x|\leq 1.$$

Рассуждая, как при доказательстве Леммы 1.10, убеждаемся, что $Y_-(x)$ является решением следующего однородного вольтерровского уравнения:

$$Y_-(x)=\int\limits_0^x G_{n-k+2}(x,t,\rho)\left(q^{(n-k+2)}(t)Y_-(t)\right)dt,$$

откуда выводим, что $Y_-=0$.

Аналогично, для Y_+ имеем:

$$Y_+'=(\rho B+x^{-1}A)^{(k)}Y_++q^{(k)}(x)Y_+,\ Y_+(x)=o\left(\exp\left(\rho x\overrightarrow{R}_k\right)\right),\ x\to\infty.$$

Отсюда вытекает:

$$Y_+(x) = \int\limits_{x_0}^{x} G_k(x,t,\rho)\left(q^{(k)}(t)Y_+(t)\right)dt + \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k} A_\alpha(x_0)\Psi_{0\alpha}(x,\rho),$$

$$|A_\alpha(x_0)| = ||Y_+(x_0)\wedge\Psi_{0\alpha'}(x_0,\rho)||\,.$$

В силу асимптотик Y_+ имеем $A_\alpha(x_0) = o(1)$ при $x_0\to\infty$ для всех $\alpha\in\mathcal{A}_k$. Таким образом, переходя к пределу при $x_0\to\infty$, получаем однородное вольтерровское уравнение:

$$Y_+(x) = -\int\limits_{x}^{\infty} G_k(x,t,\rho)\left(q^{(k)}(t)Y_+(t)\right)dt,$$

из которого с учетом асимптотики $Y_+(x)$ при $x\to\infty$ следует $Y_+ = 0$.

Таким образом, имеем $F_{k-1}\wedge(y-\Psi_k) = 0$, $(y-\Psi_k)\wedge T_k = 0$. Поскольку $F_{k-1}\wedge T_k \neq 0$, это означает $y - \Psi_k = 0$.

Рассмотрим случай $k=1$. Определив $Y_+(x) := y(x) - \Psi_1(x,\rho)$, заметим, что Y_+ удовлетворяет системе (1.96) и допускает оценку $Y_+(x) = o\left(\exp(\rho x R_1)\right)$ при $x\to\infty$. Проводя рассуждения аналогичные использованным ранее, приходим к уравнению:

$$Y_+(x) = -\int\limits_{x}^{\infty} G_1(x,t,\rho)\left(q(t)Y_+(t)\right)dt,$$

из которого получаем $Y_+ = 0$, т.е., $y - \Psi_1 = 0$.

$\square$

Определение 1.1. *Зафиксируем произвольные $k\in\overline{1,n}$ и $\rho\in\mathcal{S}$. Решение $y(x)$, $x\in(0,\infty)$ уравнения $\ell y = \rho y$ назовем k-м решением типа Вейля для оператора* (5)*, если для него имеют место асимптотики:*

$$y(x) = O(x^{\mu_k}), x\to 0,\ \ y(x) = \exp(\rho R_k x)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x\to\infty.$$

Из Теоремы 1.8 и Леммы 1.11 вытекает, что для всех $\rho\in\mathcal{S}$ таких, что $\Delta_k(\rho)\neq 0$ k-е решение типа Вейля существует, единственно и совпадает с $\Psi_k(\cdot,\rho)$. Поскольку фундаментальные тензоры аналитичны в $\mathcal{S}$ и непрерывны в $\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$, из построения функций $\{\Psi_k(\cdot,\rho)\}_{k=1}^n$ следует, что k-е решение типа Вейля $\Psi_k(\cdot,\rho)$ аналитично по $\rho\in\mathcal{S}\setminus\{\rho:\Delta_k(\rho)=0\}$ и допускает непрерывное продолжение на множество $(\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\})\setminus\{\rho:\Delta_k(\rho)=0\}$. Для всех $\rho\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ таких, что $\prod\limits_{k=1}^{n}\Delta_k(\rho)\neq 0$, фундаментальные тензоры $F_k(x,\rho)$, $k=\overline{1,n}$ допускают разложения вида $F_k(x,\rho)=\Psi_1(x,\rho)\wedge\cdots\wedge\Psi_k(x,\rho)$. Симметричный результат может быть получен для фундаментальных тензоров $T_k(x,\rho)$. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.8'. *Пусть $q(\cdot)\in L_1(0,\infty)$. Зафиксируем произвольное $k\in\{1,\dots,n-1\}$. Тогда для любого $\rho\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ такого, что $\Delta_{k+1}(\rho)\neq 0$ существует и единственна функция $\Phi_k(\cdot,\rho):(0,\infty)\to\mathbb{C}^n$ со следующими свойствами:*

1. *для каждого фиксированного $x\in(0,\infty)$ выполняются соотношения $F_k\wedge\Phi_k=0$, $\Phi_k\wedge T_{k+1}=T_k$;*
2. *$\Phi_k'=U(x,\rho)\Phi_k$, т.е., $\Phi_k(\cdot,\rho)$ является решением системы (1.96);*
3. *справедливы асимптотики:*

$$\Phi_k(x,\rho)=(\rho x)^{\mu_k}\left(\mathfrak{h}_k+o(1)\right), x\to 0,$$

$$\Phi_k(x,\rho)=O\left(\exp(\rho x R_k)\right),\ x\to\infty.$$

Доказательство. Рассуждения в основном повторяют доказательство Теоремы 1.8. Некоторые отличия возникают при получении асимптотик из п.3. Рассмотрим этот элемент доказательства более подробно. Определим (числовую) матрицу $u:=\mathfrak{h}\mathfrak{g}^{-1}-I$, где $\mathfrak{h}=(\mathfrak{h}_1,\dots,\mathfrak{h}_n)$, $\mathfrak{g}=(\mathfrak{g}_1,\dots,\mathfrak{g}_n)$. В силу Леммы 1.10 u – строго нижнетреугольная матрица. Положим $\hat{w}_j(x,\rho):=(I+u)w_j(x,\rho)$, $j=\overline{1,n}$. Тогда $\hat{w}_k\wedge\cdots\wedge\hat{w}_n=w_k\wedge\cdots\wedge w_n$, $k=\overline{1,n}$ и при каждом k имеет место асимптотика $\hat{w}_k(x,\rho)=(\rho x)^{\mu_k}\left(\mathfrak{h}_k+o(1)\right), x\to 0$.

Для функции $\Phi_k(x,\rho)$ (при произвольных фиксированных значениях аргументов) справедливы представления:

$$\Phi_k=\hat{w}_k-\sum_{j>k}\beta_j\hat{w}_j,\ \Phi_k=\sum_{j\le k}\beta_j v_j, \tag{1.113}$$

где коэффициенты $\{\beta_j\}$ удовлетворяют СЛАУ:

$$\sum_{j\le k}\beta_j v_j+\sum_{j>k}\beta_j\hat{w}_j=\hat{w}_k. \tag{1.114}$$

При $j\le k$ из системы (1.114) получаем представления

$$\beta_j\Delta_{k+1}=$$

$$|v_1 \wedge \cdots \wedge v_{j-1} \wedge \hat{w}_k \wedge v_{j+1} \wedge \cdots \wedge v_k \wedge T_{k+1}|\,,$$

откуда вытекает оценка

$$|\beta_j \Delta_{k+1}| = ||v_1 \wedge \cdots \wedge v_{j-1} \wedge v_{j+1} \wedge \cdots \wedge v_k \wedge T_k||$$

$$= O(\exp(\rho x(R_k - R_j))),\ x \to \infty.$$

Подставляя полученный результат во второе из представлений (1.113), получим требуемую оценки при $x \to \infty$.

Аналогично при $j > k$ из (1.114) имеем:

$$\beta_j \Delta_{k+1} =$$

$$|F_k \wedge \hat{w}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \hat{w}_{j-1} \wedge \hat{w}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \hat{w}_n|\,.$$

В силу асимптотик $\{\hat{w}_j(x,\rho)\}$, $F_k(x,\rho)$ при $x \to 0$, получаем:

$$\beta_j(x,\rho)\Delta_{k+1}(\rho) = \delta_j(x,\rho) + o\left(x^{\mu_k - \mu_j}\right), \tag{1.115}$$

где

$$\delta_j = \left|F_k \wedge T^0_{k,j}\right|,\ T^0_{k,j} := C_k \wedge \cdots \wedge C_{j-1} \wedge C_{j+1} \wedge \cdots \wedge C_n.$$

Используя интегральное уравнения для F_k, получим представление:

$$\delta_j(x,\rho) = \delta^0_j + \hat{\delta}_j(x,\rho), \tag{1.116}$$

$\delta^0_j = \left|F^0_k \wedge T^0_{k,j}\right|$,

$$\hat{\delta}_j(x,\rho) = -\int_x^{\infty} \left(G_k(x,t,\rho)\left(q^{(k)}(t)F_k(t,\rho)\right)\right) \wedge T^0_{k,j}(x,\rho)\,dt.$$

Используя представление для оператора Грина $G_k(x,t,\rho)$ и рассуждая, как при доказательстве Теоремы 1.8, получим (при $x < |\rho|^{-1}$):

$$\hat{\delta}_j(x,\rho) = \hat{\delta}_{j0}(\rho) + \hat{\delta}_{j1}(x,\rho), \tag{1.117}$$

$$\hat{\delta}_{j0}(\rho) = -\sigma_\alpha \left|C_\alpha(x,\rho) \wedge T^0_{k,j}(x,\rho)\right| \int_{|\rho|^{-1}}^{\infty} \left|\left(q^{(k)}(t)F_k(t,\rho)\right) \wedge C_{\alpha'}(t,\rho)\right| dt,$$

$$\hat{\delta}_{j1}(x,\rho) = -\sigma_\alpha \left|C_\alpha(x,\rho) \wedge T^0_{k,j}(x,\rho)\right| \int_x^{|\rho|^{-1}} \left|\left(q^{(k)}(t)F_k(t,\rho)\right) \wedge C_{\alpha'}(t,\rho)\right| dt.$$

Здесь $\alpha = (1, \dots, k-1, j)$. Поскольку в этом случае $\left\|C_\alpha(x,\rho) \wedge T^0_{k,j}(x,\rho)\right\| \equiv 1$, из полученного представления и оценок фундаментальных тензоров следует неравенство:

$$|\hat{\delta}_{j1}(x,\rho)| \le M \int\limits_x^{|\rho|^{-1}} \left|(\rho t)^{\mu_k-\mu_j}\right|.$$

Отсюда непосредственным вычислением получаем:

$$|\hat{\delta}_{j1}(x,\rho)(\rho x)^{\mu_j-\mu_k}| \le M\left(|\rho|^{-1}|\rho x|^{Re\mu_j-Re\mu_k}+x\right).$$

При $j>k$ имеем $\mathrm{Re}\mu_j-\mathrm{Re}\mu_k>0$ и правая часть полученного неравенства стремится к 0 при $x\to 0$. Таким образом, имеем $\hat{\delta}_{j1}(x,\rho)=o(x^{\mu_k-\mu_j})$ при $x\to 0$. С учетом (1.117), (1.116), (1.115) отсюда вытекает $\beta_j(x,\rho) = o(x^{\mu_k-\mu_j})$ при $x\to 0$. Подставляя полученный результат в первое из представлений (1.113), получаем требуемую асимптотику $\Phi_k(x,\rho)$ при $x\to 0$.

Определение 1.1'. *Зафиксируем произвольные $k\in\overline{1,N}$ и $\rho\in\mathcal{S}$. Решение $y(x)$, $x\in(0,\infty)$ уравнения $\ell y=\rho y$ назовем k-м решением Вейля для оператора* (5), *если для него имеют место асимптотики:*

$$y(x)=x^{\mu_k}\left(\mathfrak{h}_k+o(1)\right), x\to 0,\ y(x)=O(\exp(\rho R_k x)), x\to\infty.$$

Следствие 1.2. *Пусть $q(\cdot)\in L_1(0,\infty)$. Тогда:*

1. *при $\rho\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ таких, что $\Delta_{k+1}(\rho)\ne 0$ k-е решение Вейля существует, единственно и совпадает с функцией $\overset{\circ}{\Phi}_k(\cdot,\rho):=\rho^{-\mu_k}\Phi_k(\cdot,\rho)$;*
2. *при $\rho\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ таких, что $\Delta_k(\rho)\Delta_{k+1}(\rho)\ne 0$ справедливо равенство $\overset{\circ}{\Phi}_k(x,\rho)=\delta_k(\rho)\Psi_k(x,\rho)$.*

Доказательство. Доказательство пункта 1 полностью аналогично доказательству Леммы 1.11.

Далее, из асимптотик $\Psi_k(x,\rho)$ при $x\to\infty$ и оценки при $x\to\infty$ решения Вейля $\overset{\circ}{\Phi}_k(x,\rho)$ следует разложение

$$\overset{\circ}{\Phi}_k(x,\rho)=\sum_{j\le k}u_{jk}(\rho)\Psi_j(x,\rho)$$

(напомним, что $\{\Psi_j(\cdot,\rho)\}$ и $\{\overset{\circ}{\Phi}_j(\cdot,\rho)\}$ являются решениями (1.96)). Аналогично, рассматривая асимптотики при $x\to 0$, получаем разложение

$$\Psi_k(x,\rho)=\sum_{j\ge k}l_{jk}(\rho)\overset{\circ}{\Phi}_j(x,\rho).$$

Таким образом, имеем $\overset{\circ}{\Phi}(x,\rho) = \Psi(x,\rho)u(\rho)$, $\Psi(x,\rho) = \overset{\circ}{\Phi}(x,\rho)l(\rho)$, где $l(\rho)$ – нижнетреугольная, а $u(\rho)$ – верхнетреугольная матрицы. Объединяя, заключаем, что $(\Psi(x,\rho))^{-1}\overset{\circ}{\Phi}(x,\rho)$ – не зависящая от x диагональная матрица.

□

Замечание 1.2. *Решения типа Вейля и решения Вейля не зависят от выбора ветви аргумента, непрерывной в* $\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ *и, соответственно, от выбора ветви степенной функции.*

В случае $\rho = 0$ использованные выше рассуждения, строго говоря, неприменимы. Однако, можно показать, что свойства решений типа Вейля в окрестности точки $\rho = 0$ также определяются поведением характеристических функций. Прежде всего, заметим, что характеристические функции

$$\Delta_k(\rho) = |F_{k-1}(x,\rho) \wedge T_k(x,\rho)| = \left|\overset{\circ}{F}_{k-1}(x,\rho) \wedge \overset{\circ}{T}_k(x,\rho)\right|$$

непрерывно продолжимы в $\overline{\mathcal{S}}$.

Теорема 1.9. *Пусть* $\Delta_k(0) \neq 0$, $k = \overline{1,n}$. *Тогда для всех* $k = \overline{1,n}$ *функции* $\overset{\circ}{\Psi}_k(x,\rho) := \rho^{-\mu_k}\Psi_k(x,\rho)$ *как функции* ρ *допускают непрерывное продолжение на множество вида* $\overline{\mathcal{S}} \cap \{\rho : |\rho| \le \delta\}$ *с некоторой положительной* δ.

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по k. Заметим, прежде всего, что функция $\overset{\circ}{\Psi}_1(x,\rho) = \overset{\circ}{F}_1(x,\rho)$ обладает требуемым свойством в силу результатов §1.2.

В условиях теоремы имеем $\Delta_k(\rho) \neq 0$, $k = \overline{1,n}$ при $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \cap \{\rho : |\rho| \le \delta\}$ для некоторой $\delta > 0$. Пусть, далее, доказано, что функции $\overset{\circ}{\Psi}_j(x,\rho)$, $j = \overline{1,k-1}$ допускают непрерывное продолжение на множество $\{\rho \in \overline{\mathcal{S}} : |\rho| \le \delta\}$. Покажем, что $\overset{\circ}{\Psi}_k(x,\rho)$ также допускает непрерывное продолжение на множество $\{\rho \in \overline{\mathcal{S}} : |\rho| \le \delta\}$.

В силу Теоремы 1.8 из $\Delta_k(\rho) \neq 0$, $k = \overline{1,n}$ при $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \cap \{\rho : |\rho| \le \delta\}$ следует:

$$\overset{\circ}{F}_k(x,\rho) = \overset{\circ}{\Psi}_1(x,\rho) \wedge \cdots \wedge \overset{\circ}{\Psi}_k(x,\rho), \rho \in (\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}) \cap \{\rho : |\rho| \le \delta\}. \tag{1.118}$$

С другой стороны, в силу предположения индукции имеем:

$$\overset{\circ}{F}_{k-1}(x,\rho) = \overset{\circ}{\Psi}_1(x,\rho) \wedge \cdots \wedge \overset{\circ}{\Psi}_{k-1}(x,\rho), \rho \in \overline{\mathcal{S}} \cap \{\rho : |\rho| \le \delta\}.$$

Из (1.118) вытекает

$$\overset{\circ}{\Psi}_j (x,\rho) \wedge \overset{\circ}{F}_k (x,\rho) = 0,\ j = \overline{1,k-1}, \rho \in (\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}) \cap \{\rho : |\rho| \le \delta\}. \quad (1.119)$$

Но согласно предположению индукции левая часть в (1.119) для каждого $j = \overline{1,k-1}$ непрерывна на множестве $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \cap \{\rho : |\rho| \le \delta\}$. Следовательно, имеем:

$$\overset{\circ}{\Psi}_j (x,\rho) \wedge \overset{\circ}{F}_k (x,\rho) = 0,\ j = \overline{1,k-1}, \rho \in \overline{\mathcal{S}} \cap \{\rho : |\rho| \le \delta\}.$$

Используя Лемму 1.10 с учетом Замечания 1.1, из полученного равенства выводим факт существования единственной вектор-функции $f(x,\rho)$, являющейся при каждом фиксированном $x \in (0,\infty)$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \cap \{\rho : |\rho| \le \delta\}$ решением следующей однозначно разрешимой СЛАУ:

$$\overset{\circ}{F}_{k-1} \wedge f = \overset{\circ}{F}_k,\ (f, \overset{\circ}{\Psi}_j) = 0,\ j = \overline{1,k-1}.$$

Из однозначной разрешимости указанной СЛАУ и непрерывности функций $\overset{\circ}{F}_{k-1} (x,\rho)$, $\overset{\circ}{F}_k (x,\rho)$, $\overset{\circ}{\Psi}_j (x,\rho)$, $j = \overline{1,k-1}$, $x \in (0,\infty)$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \cap \{\rho : |\rho| \le \delta\}$ следует, что $f(x,\rho)$ также непрерывна при $x \in (0,\infty)$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \cap \{\rho : |\rho| \le \delta\}$.

Далее, при $\rho \in (\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}) : |\rho| \le \delta$ имеем $\overset{\circ}{F}_{k-1} \wedge \overset{\circ}{\Psi}_k = \overset{\circ}{F}_{k-1} \wedge f = \overset{\circ}{F}_k$, т.е. $\overset{\circ}{F}_{k-1} \wedge (\overset{\circ}{\Psi}_k - f) = 0$, откуда вытекает следующее представление:

$$\overset{\circ}{\Psi}_k (x,\rho) = f(x,\rho) - \sum_{j<k} \beta_j(x,\rho)\, \overset{\circ}{\Psi}_j (x,\rho),\ \rho \in (\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}) \cap \{|\rho| \le \delta\}. \quad (1.120)$$

Подставляя (1.120) в соотношение $\overset{\circ}{\Psi}_k \wedge \overset{\circ}{T}_k = 0$, получаем:

$$\sum_{j<k} \beta_j(x,\rho)\, \overset{\circ}{\Psi}_j (x,\rho) \wedge \overset{\circ}{T}_k (x,\rho) = f(x,\rho) \wedge \overset{\circ}{T}_k (x,\rho),$$

что позволяет вычислить коэффициенты

$$\beta_j \Delta_k = (-1)^{\chi_j} \left| f \wedge \overset{\circ}{\Psi}_1 \wedge \dots \wedge \overset{\circ}{\Psi}_{j-1} \wedge \overset{\circ}{\Psi}_{j+1} \dots \wedge \overset{\circ}{\Psi}_{k-1} \wedge \overset{\circ}{T}_k \right|,\ \chi_j \in \{0,1\}. \quad (1.121)$$

Поскольку $\Delta_k(\rho) \ne 0$ при $|\rho| \le \delta$ и в силу предположения индукции правая часть в (1.121) допускает непрерывное продолжение на множество $\{\rho \in \overline{\mathcal{S}} : |\rho| \le \delta\}$, из представления (1.121) можно сделать вывод, что и коэффициенты $\beta_j(x,\rho)$ также допускают непрерывное продолжение на множество $\{\rho \in \overline{\mathcal{S}} : |\rho| \le \delta\}$. В силу представления (1.120) то же справедливо и для $\overset{\circ}{\Psi}_k (x,\rho)$.

$\square$

В оставшейся части параграфа мы исследуем дальнейшие свойства построенных выше решений типа Вейля, в частности, их поведение как функций спектрального параметра, а также их зависимость от потенциала. В связи с этим мы добавим потенциал в список аргументов, т.е. будем писать $\Psi_k(q,x,\rho)$ вместо $\Psi_k(x,\rho)$ и т.п.

Прежде всего отметим следующее свойство характеристических функций, непосредственно вытекающее из их определения и Теоремы 1.6.

Утверждение 1.2. *Справедливо представление*

$$\Delta_k(q,\rho) = \Delta_{0k} + \hat{\Delta}(q,\rho),$$

где $\Delta_{0k} = \Delta_k(0,\rho) = \det(e_1(\rho x),\dots,e_{k-1}(\rho x),c_k(\rho x),\dots,c_n(\rho x))$, $\hat{\Delta}_k(\cdot,\cdot) \in C(\mathcal{X}_p, C_0(\overline{\mathcal{S}}))$ *для любого* $p>2$. *Более того, для любого луча* $l=\{\rho = zt, t\in[0,\infty)\}$, $z\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ *имеем* $\hat{\Delta}_k(\cdot,\cdot)\in C(\mathcal{X}_p,\mathcal{H}(l))$.

Одним из непосредственных следствий этого результата является следующее утверждение касающееся свойств коэффициентов $\delta_k(q,\rho)$ из Следствия 1.2.

Следствие 1.3.

$$\lim_{\rho\to\infty,\rho\in\overline{\mathcal{S}}} \frac{\delta_k(q,\rho)}{\delta_k(0,\rho)} = 1.$$

Более того, для любого луча $l=\{\rho=zt, t\in[0,\infty)\}$, $z\in\overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ *и любого* $q(\cdot)\in G_0^p(l)$ *имеем:*

$$\frac{\delta_k(q,\cdot)}{\delta_k(0,\cdot)} - 1 \in \mathcal{H}(l).$$

Доказательство. Пусть $k\in\{2,\dots,n-1\}$ (случаи $k=1$, $k=n$ требуют незначительных изменений). Имеем:

$$\Delta_k = |F_{k-1}\wedge T_k| = \rho^{\mu_k}|F_{k-1}\wedge \overset{\circ}{\Phi}_k \wedge T_{k+1}| =$$

$$\rho^{\mu_k}\delta_k|F_{k-1}\wedge\Psi_k\wedge T_{k+1}| = \rho^{\mu_k}\delta_k\Delta_{k+1}.$$

Таким образом, справедливо представление:

$$\delta_k(q,\rho) = \rho^{-\mu_k}\frac{\Delta_k(q,\rho)}{\Delta_{k+1}(q,\rho)} \tag{1.122}$$

(при $k = 1$ и $k = n$ следует положить $\Delta_1 = 1$, $\Delta_{n+1} = 1$ соответственно). Используя Утверждение 1.2, выводим из (1.122):

$$\delta_k(q,\rho) = \rho^{-\mu_k}\frac{\Delta_k(q,\rho)}{\Delta_{k+1}(q,\rho)} = \rho^{-\mu_k}\frac{\Delta_{0k}+o(1)}{\Delta_{0,k+1}+o(1)} = \delta_k(0,\rho)(1+o(1))$$

при $\rho \to \infty$. Аналогично получается и второе утверждение следствия.

$\square$

Всюду далее будем обозначать $\tilde{\Psi}(q,x,\rho) := \Psi(q,x,\rho)(W(\rho x))^{-1}$.

Теорема 1.10. *Пусть $p > 2$. Тогда для элементов матрицы:*

$$\beta(q,x,\rho) := (\tilde{\Psi}_0(x,\rho))^{-1}\tilde{\Psi}(q,x,\rho)$$

справедливы представления

$$\beta_{jk}(q,x,\rho) = \frac{\delta_{j,k} + d_{jk}(q,x,\rho)}{1 + d_k(q,x,\rho)},$$

где $\delta_{j,k}$–символ Кронекера, $d_{jk}(\cdot,\cdot,\cdot), d_k(\cdot,\cdot,\cdot) \in C(\mathcal{X}_p, BC([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}}))$ и для любого луча $l = \{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ ограничения $d_{jk}|_l$, $d_k|_l$ принадлежат $C(\mathcal{X}_p, BC([0,\infty), \mathcal{H}(l)))$.

Доказательство. Определение матрицы $\beta(q,x,\rho)$ эквивалентно представлениям:

$$\tilde{\Psi}_k(q,x,\rho) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk}(q,x,\rho)\tilde{\Psi}_{0j}(x,\rho)$$

для каждого фиксированного $k = \overline{1,n}$. Подставляя эти представления в соотношения:

$$\tilde{F}_{k-1} \wedge \tilde{\Psi}_k = \tilde{F}_k,\ \ \tilde{\Psi}_k \wedge \tilde{T}_k = 0,$$

получаем:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{jk}\tilde{F}_{k-1} \wedge \tilde{\Psi}_{0j} = \tilde{F}_k, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{jk}\tilde{\Psi}_{0j} \wedge \tilde{T}_k = 0, \end{cases}$$

откуда как следствие вытекает следующая СЛАУ относительно $\{\beta_{jk}\}_{j=1}^{k}$ (здесь и далее произвольное k фиксировано)

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\beta_{jk} = u_i, \tag{1.123}$$

$$m_{ij} = \left|\tilde{F}_{k-1} \wedge \tilde{\Psi}_{0j} \wedge \tilde{\Psi}_{0k} \wedge \cdots \wedge \tilde{\Psi}_{0,i-1} \wedge \tilde{\Psi}_{0,i+1} \wedge \cdots \wedge \tilde{\Psi}_{0n}\right|, i = \overline{k,n}, \tag{1.124}$$

$$m_{ij} = \left|\tilde{\Psi}_{01} \wedge \cdots \wedge \tilde{\Psi}_{0,i-1} \wedge \tilde{\Psi}_{0,i+1} \wedge \cdots \wedge \tilde{\Psi}_{0,k-1} \wedge \tilde{\Psi}_{0,j} \wedge \tilde{T}_k\right|,\ i = \overline{1,k-1}, \tag{1.125}$$

$$u_i = \left|\tilde{F}_k \wedge \tilde{\Psi}_{0k} \wedge \cdots \wedge \tilde{\Psi}_{0,i-1} \wedge \tilde{\Psi}_{0,i+1} \wedge \cdots \wedge \tilde{\Psi}_{0n}\right|,\ i = \overline{k,n} \tag{1.126}$$

$$u_i = 0,\ i = \overline{1,k-1}. \tag{1.127}$$

С учётом Теоремы 1.6, Леммы 1.2 и свойств матрицы $\tilde{\Psi}_0(\cdot,\cdot)$, из (1.123) следует, что

$$m_{ij}(q,x,\rho) = \left(m_{ij}^0 \frac{W_i(\rho x)}{W_j(\rho x)} + \hat{m}_{ij}(q,x,\rho)\right) \cdot \frac{1}{\overrightarrow{\overrightarrow{W}}^n(\rho x)},$$

$$u_i(q,x,\rho) = \left(u_i^0 \frac{W_i(\rho x)}{W_k(\rho x)} + \hat{u}_i(q,x,\rho)\right) \cdot \frac{1}{\overrightarrow{\overrightarrow{W}}^n(\rho x)},$$

где скалярные функции $\hat{m}_{ij} = \hat{m}_{ij}(q,x,\rho)$, $\hat{u}_i = \hat{u}_i(q,x,\rho)$ таковы, что $\hat{m}_{ij}(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\hat{u}_i(\cdot,\cdot,\cdot) \in C(\mathcal{X}_p, BC([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}}))$ и для любого луча $l = \{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ ограничения $\hat{m}_{ij}|_l, \hat{u}_i|_l \in C(\mathcal{X}_p, BC([0,\infty), \mathcal{H}(l)))$.

Поскольку скалярные функции с такими свойствами, как у $\hat{m}_{ij}(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\hat{u}_i(\cdot,\cdot,\cdot)$, образуют алгебру относительно поточечного умножения, применяя к системе (1.123) правило Крамера и учитывая, что

$$m_{ij}^0 = \delta_{i,j}(-1)^{i-k+1}\Delta_{0k},\ i = \overline{1,k-1},$$

$$m_{ij}^0 = \delta_{i,j}(-1)^{i-k}|\mathfrak{f}|,\ i = \overline{k,n},$$

$$u_i^0 = \delta_{i,k}|\mathfrak{f}|$$

($\delta_{i,j}$ – символ Кронекера), получаем требуемые представления.

□

Полученный результат допускает естественное уточнение в случае, если характеристические функции не обращаются в 0 на некотором (заданном) множестве.

Определение 1.2. *Пусть L– некоторое (вообще говоря, неограниченное) подмножество сектора $\overline{\mathcal{S}}$. Будем говорить, что $q \in \mathcal{X}_p$ принадлежит классу $G_0^p(L)$, если $\prod\limits_{k=1}^{n} \Delta_k(\rho) \neq 0$ для всех $\rho \in L$.*

Лемма 1.12. *В представлении*

$$\Psi_k(q,x,\rho) = \Psi_{0k}(x,\rho) + W_k(\rho x)\hat{\Psi}_k(q,x,\rho)$$

для любого отрезка $[0,T], 0 < T < \infty$ и любого замкнутого множества $L \subset \overline{\mathcal{S}}$ справедливо $\hat{\Psi}_k(\cdot,\cdot,\cdot) \in C(G_0^p(L), C([0,T], C_0(L)))$.

Для доказательства леммы нам понадобится следующее обобщение результата о непрерывной зависимости решений невырожденных СЛАУ от параметров.

Лемма 1.13. *Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$, где A - $N \times n$, $n \le N$ матрица, $b \in \mathbb{C}^N$. Пусть $A = A(p,t)$, $b = b(p,t)$, $p \in P$, $t \in T$, где P, T - метрические пространства, причём T - компакт. Предположим, что СЛАУ зависит от параметров непрерывно в том смысле, что $A(p,\cdot) \in C(T)$, $b(p,\cdot) \in C(T)$ для любого фиксированного $p \in P$ и $A \in C(P, C(T))$, $b \in C(P, C(T))$. Предположим, кроме того, что СЛАУ однозначно разрешима при любых $p \in P, t \in T$, обозначим её решение $x(p,t)$. Тогда $x \in C(P, C(T))$.*

Доказательство. 1) Случай $n = N$ очевиден. Далее полагаем $N > n$.

2) Зафиксируем произвольное $p^* \in P$. Пусть $a_\nu(p,t) (\in \mathbb{C}^N)$ обозначает ν-й столбец матрицы $A(p,t)$. Из однозначной разрешимости СЛАУ следует, что $a_1(p^*,t) \wedge \cdots \wedge a_n(p^*,t) \neq 0$ для всех t. Отсюда для каждого t_0 найдутся векторы $a_{n+1}^{(0)}, \ldots, a_N^{(0)}$ $\delta_0 > 0$ такие что $a_1(p^*,t) \wedge \cdots \wedge a_n(p^*,t) \wedge a_{n+1}^{(0)} \wedge \cdots \wedge a_N^{(0)} \neq 0$ при всех $t : \operatorname{dist}(t,t_0) \le \delta_0$. В силу компактности T существует конечное разбиение $T = \bigcup\limits_{j=1}^{m} T_j$ такое что:

- T_j - компакт;
- для каждого $j = \overline{1,m}$ найдутся векторы $a_{n+1}^{(j)}, \ldots, a_N^{(j)}$ такие что $a_1(p^*,t) \wedge \cdots \wedge a_n(p^*,t) \wedge a_{n+1}^{(j)} \wedge \cdots \wedge a_N^{(j)} \neq 0$ при всех $t \in T_j$.

Определим матрицу $\tilde{A}^{(j)}(t) := (a_1(p^*,t), \ldots, a_n(p^*,t), a_{n+1}^{(j)}, \ldots, a_N^{(j)})$ и вектор $\tilde{x}^j(t) := (x_1(p^*,t), \ldots, x_n(p^*,t), 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{C}^N$. Тогда при каждом $t \in T_j$ $\tilde{x}^{(j)}(t)$

есть единственное решение СЛАУ $\tilde{A}^{(j)}(t)x^{(j)}(t) = b(p^*, t)$. В силу пункта 1 имеем $\tilde{x}^{(j)} \in C(T_j)$, $j = \overline{1, m}$, и следовательно, $x(p^*, \cdot) \in C(T)$.

3) Пусть $p_k \to p^*$ в P. Покажем, что для каждого $j = \overline{1, m}$ $x(p_k, t) \to x(p^*, t)$ равномерно по $t \in T_j$.

Определим матрицу $\tilde{A}^{(j)}(p, t) := (a_1(p, t), \dots, a_n(p, t), a_{n+1}^{(j)}, \dots, a_N^{(j)})$ и вектор $\tilde{x}^j(p, t) := (x_1(p, t), \dots, x_n(p, t), 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{C}^N$. Тогда при каждом $t \in T_j$, $p \in P$ $\tilde{x}^{(j)}(p, t)$ есть решение СЛАУ $\tilde{A}^{(j)}(p, t)\tilde{x}^{(j)}(p, t) = b(p, t)$. Поскольку функция $\det \tilde{A}^{(j)}(p, t)$ принадлежит классу $C(P, C(T_j))$ и $\inf\limits_{t \in T_j} |\det \tilde{A}^{(j)}(p^*, t)| > 0$, то найдется окрестность P_j точки p^* такая, что $\det \tilde{A}^{(j)}(p, t) \neq 0$ для всех $p \in P_j$, $t \in T_j$. Но тогда в силу пункта 1 имеем $\tilde{x}^{(j)} \in C(P_j, C(T_j))$, что даёт требуемую равномерную сходимость $x(p_k, t) \to x(p^*, t)$.

$\square$

Доказательство Леммы 1.12. 1) Заметим, прежде всего, что для любого $q \in G_0^p(L)$ функция $\tilde{\Psi}_k(q, x, \rho) := (W_k(\rho x))^{-1}\Psi_k(q, x, \rho)$ допускает непрерывное продолжение на $[0, \infty) \times L$ и всюду на указанном множестве имеют место разложения $\tilde{F}_k = \tilde{\Psi}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\Psi}_k$, $\tilde{T}_k = \tilde{\Phi}_k \wedge \dots \wedge \tilde{\Phi}_n$, $k = \overline{1, n}$ (обоснование этого утверждения дословно повторяет доказательство Теоремы 1.9). В силу указанной разложимости тензоров F_k, T_k, $k = \overline{1, n}$ условие $\Delta_k(\rho) \neq 0$, $\rho \in L$ гарантирует однозначную разрешимость для всех $(x, \rho) \in [0, \infty) \times L$ системы:

$$\tilde{F}_{k-1} \wedge \tilde{\Psi}_k = \tilde{F}_k, \ \tilde{\Psi}_k \wedge \tilde{T}_k = 0.$$

Применяя Лемму 1.13, заключаем, что $\tilde{\Psi}_k(\cdot, \cdot, \cdot) \in C(G_0^p(L), C([0, T] \times K))$ для любого отрезка $[0, T]$, $0 < T < \infty$ и любого компакта $K \subset L$. Заметим, что такое включение эквивалентно $\tilde{\Psi}_k(\cdot, \cdot, \cdot) \in C(G_0^p(L), C([0, T], C(K)))$. В силу произвольности компакта K отсюда следует также, что $\hat{\Psi}_k(q, \cdot, \cdot) \in C([0, T] \times L)$.

2) Из Теоремы 1.10 следует, что для любого фиксированного $q \in \mathcal{X}_p$ $\hat{\Psi}_k(q, x, \rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$ равномерно по $x \in [0, T]$ для любого отрезка $[0, T], 0 < T < \infty$. Таким образом имеем $\hat{\Psi}_k(q, \cdot, \cdot) \in C([0, T], C_0(L))$ для любого фиксированного $q \in G_0^p(L)$.

3) Зафиксируем произвольный $q_0 \in G_0^p(L)$ и пусть последовательность $q_m \in G_0^p(L)$ такова, что $q_m \to q_0$ по норме $\mathcal{X}_p$.

В силу Теоремы 1.10 имеем (в тех же обозначениях)

$$d_k(q_0, \cdot, \cdot) \in BC([0, \infty), C_0(\overline{\mathcal{S}})).$$

Следовательно, найдется $R > 0$ такое, что $|d_k(q_0, x, \rho)| \ge 1/2$ при всех $x \in [0, T]$, $\rho \in L : |\rho| > R$. Тогда в силу

$$\sup_{x\in[0,T]} \sup_{\rho\in\overline{\mathcal{S}},|\rho|>R} |d_k(q_m, x, \rho) - d_k(q_0, x, \rho)| \to 0,$$

$$\sup_{x\in[0,T]} \sup_{\rho\in\overline{\mathcal{S}},|\rho|>R} |d_{jk}(q_m, x, \rho) - d_{jk}(q_0, x, \rho)| \to 0,$$

(что следует из Теоремы 1.10) получаем:

$$\sup_{x\in[0,T]} \sup_{\rho\in\overline{\mathcal{S}},|\rho|>R} |\beta_{jk}(q_m, x, \rho) - \beta_{jk}(q_0, x, \rho)| \to 0$$

при $m \to \infty$. С учетом непрерывности и равномерной ограниченности $\tilde{\Psi}_0(x, \rho)$ отсюда заключаем

$$\sup_{x\in[0,T]} \sup_{\rho\in\overline{\mathcal{S}},|\rho|>R} \|\hat{\Psi}_k(q_m, x, \rho) - \hat{\Psi}_k(q_0, x, \rho)\| \to 0,\ m \to \infty.$$

В то же время из пункта 1 следует, что

$$\sup_{x\in[0,T]} \sup_{\rho\in L,|\rho|\le R} \|\hat{\Psi}_k(q_m, x, \rho) - \hat{\Psi}_k(q_0, x, \rho)\| \to 0,\ m \to \infty.$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{m\to\infty} \|\hat{\Psi}_k(q_m, \cdot, \cdot) - \hat{\Psi}_k(q_0, \cdot, \cdot)\|_{C([0,T],C_0(L))} = 0.$$

$\square$

Теорема 1.11. *Пусть $p > 2$. Тогда справедливо представление*

$$\Psi_k(q, x, \rho) = \Psi_{0k}(x, \rho) + W_k(\rho x)\hat{\Psi}_k(q, x, \rho),$$

где $\hat{\Psi}_k(\cdot, \cdot, \cdot) \in C(G_0^p(l), C([0, T], \mathcal{H}(l)))$ для любого луча $l = \{\rho = zt, t \in [0, \infty)\}$, $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ и любого отрезка $[0, T], 0 < T < \infty$.

Доказательство. Подставляя в СЛАУ:

$$F_{k-1} \wedge \Psi_k = F_k,\ \Psi_k \wedge T_k = 0$$

фундаментальные тензоры в виде (здесь и далее в рамках данного доказательства W обозначает $W(\rho x)$):

$$F_{k-1} = F_{k-1}^0 + \overrightarrow{W}^{k-1}\hat{F}_{k-1},\ F_k = F_k^0 + \overrightarrow{W}^k\hat{F}_k,\ T_k = T_k^0 + \overleftarrow{W}^k\hat{T}_k$$

и выполнив замену $\Psi_k = \Psi_{0k} + W_k\hat{\Psi}_k$, преобразуем исходную систему к следующему виду:

$$\tilde{F}^0_{k-1} \wedge \hat{\Psi}_k = f_k,\ \ \hat{\Psi}_k \wedge \tilde{T}^0_k = g_k, \tag{1.128}$$

где:

$$f_k = \hat{F}_k - \hat{F}_{k-1} \wedge \tilde{\Psi}_{0k} - \hat{F}_{k-1} \wedge \hat{\Psi}_k,\ g_k = -\tilde{\Psi}_{0k} \wedge \hat{T}_k - \hat{\Psi}_k \wedge \hat{T}_k.$$

Из Теоремы 1.6 известно, что функции $\hat{F}_{k-1}(\cdot,\cdot,\cdot), \hat{F}_k(\cdot,\cdot,\cdot), \hat{T}_k(\cdot,\cdot,\cdot)$ принадлежат $C(\mathcal{X}_p, BC([0,\infty),\mathcal{H}(l)))$.

В силу Леммы 1.12 имеем $\hat{\Psi}_k(\cdot,\cdot,\cdot) \in C(G^p_0(l), C([0,T], C_0(l)))$. С учетом непрерывности и ограниченности функции $\tilde{\Psi}_{0k}(x,\rho)$ заключаем, что функции $f_k(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $g_k(\cdot,\cdot,\cdot)$ принадлежат $C(G^p_0(l), C([0,T],\mathcal{H}(l)))$

Далее, будем искать $\hat{\Psi}_k(q,x,\rho)$ в виде:

$$\hat{\Psi}_k(q,x,\rho) = \sum_{j=1}^{n} \hat{\beta}_{jk}(q,x,\rho)\tilde{\Psi}_{0j}(x,\rho). \tag{1.129}$$

Подстановка (1.129) в систему (1.128) приводит к следующим представлениям для коэффициентов разложения:

$$\hat{\beta}_{jk} =$$

$$(-1)^{j-k}\left(\Delta_{0k}\overrightarrow{W}^n\right)^{-1} \cdot \left|\tilde{\Psi}_{01} \wedge \cdots \wedge \tilde{\Psi}_{0,j-1} \wedge \tilde{\Psi}_{0,j+1} \wedge \cdots \wedge \tilde{\Psi}_{0,k-1} \wedge g_k\right|, j<k,$$

$$\hat{\beta}_{jk} =$$

$$(-1)^{j-k}|\mathfrak{f}|\left(\overrightarrow{W}^n\right)^{-1} \cdot \left|f_k \wedge \tilde{\Psi}_{0k} \wedge \cdots \wedge \tilde{\Psi}_{0,j-1} \wedge \tilde{\Psi}_{0,j+1} \wedge \cdots \wedge \tilde{\Psi}_{0n}\right|, j=\overline{k,n},$$

из которых, с учетом доказанного выше и свойств функции $\overrightarrow{W}^n(\rho x)$ (см. §1.1), заключаем, что $\hat{\beta}_{jk}(\cdot,\cdot,\cdot) \in C(G^p_0(l), C([0,T],\mathcal{H}(l)))$. Теперь, используя снова свойства функций $\tilde{\Psi}_{0j}(\cdot,\cdot)$, из (1.129) получаем требуемое утверждение.

□

Также дальнейшее уточнение полученных результатов возможно при условии дополнительной гладкости и убывания потенциала при $x \to 0$.

Обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ множество функций, представимых в виде:

$$F(\rho) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)\exp(\lambda\rho),$$

где конечное множество Λ (своё для каждой функции $F \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$) таково, что $\mathrm{Re}(\lambda\rho) < 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$, $\rho \in \mathcal{S}$. Заметим, что множество скалярных функций из $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ образует алгебру относительно поточечных арифметических операций.

Теорема 1.12. *Пусть $q(\cdot)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1.7.*

Тогда при каждом фиксированном $x > 0$ и $\rho \to \infty$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}}$ справедлива асимптотика

$$\rho(\Psi(q, x, \rho) - \Psi_0(x, \rho)) \exp(-\rho x R) = \mathfrak{f}\Gamma(x) + \hat{q}(x)\mathfrak{f} + \mathcal{E}(x, \rho) + o(1),$$

где $\Gamma(x)$ – некоторая диагональная матрица-функция, $\mathcal{E}(x, \cdot) \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$.

Доказательство. В силу Теоремы 1.7 справедливы асимптотики:

$$\rho\tilde{F}_k(q, x, \rho) = \rho\tilde{F}_k^0(x, \rho) + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k} f_{k,\alpha}(x)\mathfrak{f}_\alpha + \mathcal{E}(x, \rho) + o(1),$$

$$\rho\tilde{T}_k(q, x, \rho) = \rho\tilde{T}_k^0(x, \rho) + d_{0k}\tilde{T}_k^0(x, \rho) + \\ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} T^0_{k,\alpha^*(k)} g_{k,\alpha,\alpha^*(k)}(x)\mathfrak{f}_\alpha + \mathcal{E}(x, \rho) + o(1), \quad (1.130)$$

$$\tilde{\Psi}_{0k}(x, \rho) = \mathfrak{f}_k + \mathcal{E}(x, \rho) + O\left(\rho^{-1}\right), \quad (1.131)$$

где $\alpha^*(k) := (k, \dots, n)$, $\alpha_*(k) := (1, \dots, k)$. Здесь и далее одним и тем же символом $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)$ обозначаются различные функции такие, что $\mathcal{E}(x, \cdot) \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$.

Перепишем соотношения, определяющие решения типа Вейля в виде:

$$\tilde{F}_{k-1} \wedge \tilde{\Psi}_k = \tilde{F}_k, \ \tilde{\Psi}_k \wedge \tilde{T}_k = 0.$$

Подставив в эти соотношения $\tilde{\Psi}_k$ в виде

$$\tilde{\Psi}_k = \tilde{\Psi}_{0k} + \hat{\Psi}_k, \quad (1.132)$$

получим:

$$\tilde{F}_{k-1} \wedge \hat{\Psi}_k = \tilde{F}_k - \tilde{F}_{k-1} \wedge \tilde{\Psi}_{0k}, \ \hat{\Psi}_k \wedge \tilde{T}_k = -\tilde{\Psi}_{0k} \wedge \tilde{T}_k.$$

Полученные соотношения преобразуем в СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\gamma_{jk} = u_i, \ i = \overline{1, n} \quad (1.133)$$

относительно коэффициентов $\{\gamma_{jk}\}$ разложения:

$$\hat{\Psi}_k(x, \rho) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{jk}(x, \rho)\mathfrak{f}_j. \quad (1.134)$$

Коэффициенты в системе (1.133) определяются следующими соотношениями:

$$m_{ij} = \left|\tilde{F}_{k-1} \wedge \mathfrak{f}_j \wedge \mathfrak{f}_\alpha\right|,$$

$$u_i = \left|(\tilde{F}_k - \tilde{F}_{k-1} \wedge \tilde{\Psi}_{0k}) \wedge \mathfrak{f}_\alpha\right|,\ \alpha = \alpha^*(k) \setminus i, \quad i = \overline{k,n},$$

$$m_{ij} = \left|\mathfrak{f}_\alpha \wedge \mathfrak{f}_j \wedge \tilde{T}_k\right|,\ u_i = -\left|\mathfrak{f}_\alpha \wedge \tilde{\Psi}_{0k} \wedge \tilde{T}_k\right|,\ \alpha = \alpha_*(k-1) \setminus i, \quad i = \overline{1,k-1}.$$

Пользуясь (1.130), (1.131) и учитывая, что

$$\tilde{F}^0_{k-1} \wedge \tilde{\Psi}_{0k} = \tilde{F}^0_k,\ \tilde{\Psi}_{0k} \wedge \tilde{T}^0_k = 0,$$

получим следующие асимптотики для коэффициентов СЛАУ (1.133) при $\rho \to \infty$:

$$m_{ij}(x,\rho) = O\left(\rho^{-1}\right), j \neq i, \tag{1.135}$$

$$m_{ii}(x,\rho) = m^0_{ii} + O\left(\rho^{-1}\right),\ m^0_{ii} = (-1)^{k-i}|\mathfrak{f}|,\ i = \overline{k,n}, \tag{1.136}$$

и

$$m_{ij}(x,\rho) = m^0_{ij} + O\left(\rho^{-1}\right),\ i = \overline{1,k-1},\ j = \overline{1,k-1},$$

$$m_{ij}(x,\rho) = m^0_{ij} + \mathcal{E}(x,\rho) + O\left(\rho^{-1}\right),\ i = \overline{1,k-1},\ j = \overline{k,n},$$

где:

$$m^0_{ij} = T^0_{k,\alpha^*(k)}|\mathfrak{f}_\alpha \wedge \mathfrak{f}_j \wedge \mathfrak{f}_{\alpha^*(k)}|,\ \alpha = \alpha_*(k-1) \setminus i,$$

откуда:

$$m_{ij}(x,\rho) = O\left(\rho^{-1}\right),\ j \neq i,\ j < k, \tag{1.137}$$

$$m_{ij}(x,\rho) = \mathcal{E}(x,\rho) + O\left(\rho^{-1}\right),\ j = \overline{k,n}, \tag{1.138}$$

$$m_{ii}(x,\rho) = m^0_{ii} + O\left(\rho^{-1}\right),\ m^0_{ii} = (-1)^{k-1-i}|\mathfrak{f}|T^0_{k,\alpha^*(k)} \tag{1.139}$$

для $i = \overline{1,k-1}$.

Аналогично вычисляем:

$$\rho u_i(x,\rho) = u^1_i(x) + \mathcal{E}(x,\rho) + o(1), \tag{1.140}$$

$$u^1_i(x) =$$

$$(-1)^{k-i}|\mathfrak{f}|f_{k,\alpha}(x) - \delta_{i,k}|\mathfrak{f}|f_{(k-1),\alpha_*(k-1)}(x),\ \alpha = \alpha_*(k-1) \cup \{i\},\ i = \overline{k,n}, \tag{1.141}$$

где $\delta_{i,k}$ - символ Кронекера,

$$u^1_i(x) =$$

$$-(-1)^{k-i}\,|\mathfrak{f}|\,T^0_{k,\alpha^*(k)}g_{k,\beta,\alpha^*(k)}(x),\ \beta=\alpha'\setminus k, \alpha=\alpha_*(k-1)\setminus i,\ i=\overline{1,k-1}. \quad (1.142)$$

Используя полученные асимптотики, из СЛАУ (1.133) получаем предварительную оценку $\gamma_{ik}(x,\rho)=O\left(\rho^{-1}\right)$ при $\rho\to\infty$. Подставляя в (1.133) $\gamma_{ik}(x,\rho)$ виде $\gamma_{ik}(x,\rho)=\rho^{-1}\hat{\gamma}_{ik}(x,\rho)$, где $\hat{\gamma}_{ik}(x,\rho)=O(1)$, получим при $i=\overline{k,n}$:

$$m_{ii}(x,\rho)\hat{\gamma}_{ik}(x,\rho)=u^1_i(x)+\mathcal{E}(x,\rho)-\sum_{j\neq i}m_{ij}(x,\rho)\hat{\gamma}_{jk}(x,\rho)+o(1),$$

что, с учетом (1.135), (1.140) приводит к асимптотическим формулам:

$$\hat{\gamma}_{ik}(x,\rho)=\gamma^1_{ik}(x)+\mathcal{E}(x,\rho)+o(1),\ \gamma^1_{ik}(x)=\frac{u^1_i(x)}{m^0_{ii}}, \quad (1.143)$$

$i=\overline{k,n}$.

Аналогично, для $i<k$ имеем:

$$m_{ii}(x,\rho)\hat{\gamma}_{ik}(x,\rho)=u^1_i(x)+\mathcal{E}(x,\rho)-\\ \sum_{j\geq k}m_{ij}(x,\rho)\hat{\gamma}_{jk}(x,\rho)-\sum_{j<k,j\neq i}m_{ij}(x,\rho)\hat{\gamma}_{jk}(x,\rho)+o(1). \quad (1.144)$$

В силу (1.137) данное соотношение преобразуется к виду:

$$m^0_{ii}\hat{\gamma}_{ik}(x,\rho)=u^1_i(x)+\mathcal{E}(x,\rho)-\sum_{j\geq k}m_{ij}(x,\rho)\hat{\gamma}_{jk}(x,\rho)+o(1).$$

Пользуясь снова (1.137) и полученными выше асимптотиками (1.143) для $i=\overline{k,n}$, убеждаемся, что формулы (1.143) верны и для $i<k$.

Далее, для $i=\overline{k,n}$ из (1.143), (1.141), (1.135) получаем:

$$\gamma^1_{ik}(x)=\delta_{i,k}\tilde{\gamma}^1_{ik}(x)+f_{k,\alpha}(x),\ \alpha=\alpha_*(k-1)\cup i. \quad (1.145)$$

Из Теоремы 1.7:

$$f_{k,\alpha}(x)=\chi_\alpha\left|\left(\hat{q}^{(k)}(x)\mathfrak{f}_{\alpha_*(k)}\right)\wedge\mathfrak{f}_{\alpha'}\right|.$$

Напомним, что (произвольный) линейный оператор V, действующий в $\mathbb{C}^n$, может быть продолжен на внешнюю алгебру $\wedge\mathbb{C}^n$ таким образом, что равенство

$$V(h_1\wedge\cdots\wedge h_m)=(Vh_1)\wedge\cdots\wedge(Vh_m)$$

справедливо для любого набора векторов $h_1,\dots,h_m$, $m\leq n$; при этом для любого $h\in\wedge^n\mathbb{C}^n$ имеем $Vh=|V|h$ (где $|V|$ обозначает определитель матрицы оператора V в стандартном базисе $\{\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n\}$). В последующих выкладках $\mathfrak{f}$ обозначает соответствующее расширение оператора, порожденного матрицей перестановок $\mathfrak{f}$. Будем учитывать, кроме того, что $(\mathfrak{f}^{-1}V\mathfrak{f})^{(k)} = \mathfrak{f}^{-1}V^{(k)}\mathfrak{f}$ для любой $n \times n$ матрицы V. С учетом сказанного имеем:

$$f_{k,\alpha}(x) = \chi_\alpha \left| \left(\mathfrak{f} \left(\mathfrak{f}^{-1} \hat{q}^{(k)}(x) \mathfrak{f} \mathfrak{e}_{\alpha_*(k)} \right) \right) \wedge (\mathfrak{f}\mathfrak{e}_{\alpha'}) \right| =$$

$$= |\mathfrak{f}_\alpha \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}| |\mathfrak{f}| \left| \left(\mathfrak{f}^{-1} \hat{q}^{(k)}(x) \mathfrak{f} \mathfrak{e}_{\alpha_*(k)} \right) \wedge \mathfrak{e}_{\alpha'} \right| = |\mathfrak{e}_\alpha \wedge \mathfrak{e}_{\alpha'}| \left| \left(\left(\mathfrak{f}^{-1} \hat{q}(x) \mathfrak{f} \right)^{(k)} \mathfrak{e}_{\alpha_*(k)} \right) \wedge \mathfrak{e}_{\alpha'} \right|.$$

Заметим, далее, что для мультииндекса $\alpha = \alpha_*(k-1) \cup i$ и произвольной $n \times n$ матрицы V справедливо равенство (проверяемое непосредственным вычислением):

$$|\mathfrak{e}_\alpha \wedge \mathfrak{e}_{\alpha'}| \left| \left(V^{(k)} \mathfrak{e}_{\alpha_*(k)} \right) \wedge \mathfrak{e}_{\alpha'} \right| = V_{ik}.$$

Подставляя полученные соотношения в (1.145), получаем:

$$\gamma^1_{ik}(x) = \delta_{i,k} \tilde{\gamma}^1_{ik}(x) + \left(\mathfrak{f}^{-1} \hat{q}(x) \mathfrak{f} \right)_{ik}, \ i = \overline{k,n}. \tag{1.146}$$

Аналогично из (1.137), (1.142) получаем для $i < k$:

$$\gamma^1_{ik}(x) = g_{k,\beta,\alpha^*(k)}(x), \ \beta = \alpha' \setminus k, \alpha = \alpha_*(k-1) \setminus i. \tag{1.147}$$

Из Теоремы 1.7 следует:

$$g_{k,\alpha,\beta}(x) = \chi_\alpha \left| \left(\hat{q}^{(n-k+1)}(x) \mathfrak{f}_\beta \right) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'} \right|$$

для $\beta \neq \alpha$. Повторяя рассуждения, приведенные выше, получим:

$$g_{k,\alpha,\beta}(x) = |\mathfrak{e}_\alpha \wedge \mathfrak{e}_{\alpha'}| \left| \left(\left(\mathfrak{f}^{-1} \hat{q}(x) \mathfrak{f} \right)^{(n-k+1)} \mathfrak{e}_\beta \right) \wedge \mathfrak{e}_{\alpha'} \right|.$$

В частности имеем:

$$g_{k,\beta,\alpha^*(k)} = |\mathfrak{e}_\beta \wedge \mathfrak{e}_{\beta'}| \left| \left(\left(\mathfrak{f}^{-1} \hat{q}(x) \mathfrak{f} \right)^{(n-k+1)} \mathfrak{e}_{\alpha^*(k)} \right) \wedge \mathfrak{e}_{\beta'} \right|.$$

Наконец, для $\beta = \alpha' \setminus k, \alpha = \alpha_*(k-1) \setminus i$, $i < k$ и произвольной $n \times n$ матрицы V имеем:

$$|\mathfrak{e}_\beta \wedge \mathfrak{e}_{\beta'}| \left| \left(V^{(n-k+1)} \mathfrak{e}_{\alpha^*(k)} \right) \wedge \mathfrak{e}_{\beta'} \right| = V_{ik}.$$

Подставляя полученные соотношения в (1.147), получаем:

$$\gamma^1_{ik}(x) = \left(\mathfrak{f}^{-1} \hat{q}(x) \mathfrak{f} \right)_{ik}, \ i = \overline{1, k-1}. \tag{1.148}$$

Подставляя (1.148) и (1.146) в (1.143) приходим к равенствам:

$$\rho\gamma_{ik}(x,\rho) = \hat{\gamma}_{ik}(x,\rho) = \delta_{i,k}\tilde{\gamma}^1_{ik}(x) + \big(\mathfrak{f}^{-1}\hat{q}(x)\mathfrak{f}\big)_{ik} + \mathcal{E}(x,\rho) + o(1),$$

что в терминах матрицы $\gamma = (\gamma_{ik})_{i,k=\overline{1,n}}$ запишется в виде:

$$\rho\gamma(x,\rho) = \Gamma(x) + \mathfrak{f}^{-1}\hat{q}(x)\mathfrak{f} + \mathcal{E}(x,\rho) + o(1),$$

где $\Gamma(x)$ – диагональная матрица. Наконец, переписав (1.134) в матричном виде как $\hat{\Psi}(x,\rho) = \mathfrak{f}\gamma(x,\rho)$, получаем окончательно требуемый результат.

$\square$

Глава 2 Обратная задача рассеяния для дифференциальных операторов с особенностью

§2.1 Свойства данных рассеяния

Представим $\mathbb{C}\setminus\Sigma$ как объединение непересекающихся открытых секторов $\bigcup\limits_{\nu=1}^{N}\mathcal{S}_\nu$. Будем считать, что секторы занумерованы в положительном направлении, для удобства обозначений положим $\mathcal{S}_{N+1} := \mathcal{S}_1$. Через Σ_ν будем обозначать открытый луч, разделяющий секторы $\mathcal{S}_\nu$ и $\mathcal{S}_{\nu+1}$. Обозначим $\bar{\Sigma}_\nu := \Sigma_\nu \cup \{0\}$, $\Sigma' := \bigcup\limits_{\nu=1}^{N}\Sigma_\nu = \Sigma \setminus \{0\}$.

Для (произвольной) функции $f = f(\rho)$, определенной на $\mathbb{C}\setminus\Sigma$ договоримся при $\rho \in \Sigma'$ через $f^{\pm}(\rho)$ обозначать пределы:

$$f^{\pm}(\rho) = \lim_{\varepsilon\to+0} f(\rho \pm i\varepsilon s),\ \ s = \frac{\rho}{|\rho|}.$$

Договоримся для краткости обозначений в некоторых случаях при описанных условиях опускать знак «минус», т.е., писать $f(\rho)$ вместо $f^{-}(\rho)$ (где $\rho \in \Sigma'$).

Использованные в предыдущей главе обозначения R_k также будут использоваться и в дальнейшем, однако, в отличие от предыдущей главы величины R_k будут рассматриваться не как функции сектора $\mathcal{S}_\nu$, а как кусочно–постоянные функции от $\rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$; в соответствии с этим будут использоваться обозначения $R_k^{\pm}(\rho)$, $R_k(\rho)$ при $\rho \in \Sigma'$, при этом аргумент для краткости будет (как правило) опускаться, т.е., будут использованы обозначения $R_k^{\pm}$, R_k.

Пусть $q(\cdot) \in L_1(0,\infty)$ – произвольная фиксированная матрица функция, $\Psi = \Psi(x,\rho)$, $x \in (0,\infty)$, $\rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$ – матрица, построенная из решений типа Вейля в каждом из секторов $\mathcal{S}_\nu$, $\nu = \overline{1,N}$. Если $\rho \in \Sigma_\nu$ таково, что $\Delta_k(\rho) \neq 0$, $\Delta_k^{+}(\rho) \neq 0$, $k = \overline{1,n}$, то, согласно результатам предыдущей главы существуют пределы $\Psi^{\pm}(x,\rho)$ и определена не зависящая от x матрица $v=v(\rho)$ такая, что

$$\Psi^{+}(x,\rho)=\Psi^{-}(x,\rho)v(\rho).$$

Лемма 2.1.

1. *при $j<k$ имеем: $v_{jk}(\rho)\equiv 0$;*

2. *при $j>k$ имеем: $v_{jk}(\rho)\equiv 0$, если $Re(\rho R_j)>Re(\rho R_k)$.*

Доказательство. Из соотношения

$$\Psi_k^{+}(x,\rho)=\sum_{j=1}^{n} v_{jk}(\rho)\Psi_j(x,\rho)$$

очевидным образом вытекает представление:

$$v_{jk}|\mathfrak{f}|=\left|\Psi_1\wedge\dots\wedge\Psi_{j-1}\wedge\Psi_k^{+}\wedge\Psi_{j+1}\wedge\dots\wedge\Psi_n\right|. \tag{2.1}$$

Переходя к пределу при $x\to 0$, в силу п.3 Теоремы 1.8 предыдущей главы получаем:

$$|v_{jk}(\rho)|=O\left(x^{\mu_k-\mu_j}\right).$$

Поскольку при $j<k$ правая часть полученной оценки стремится к 0, это доказывает первое из утверждений леммы.

Аналогично, при $j>k$ из п.3 Теоремы 1.8 предыдущей главы вытекает оценка

$$|v_{jk}(\rho)|=O\left(\exp(\rho x(R_k^{+}-R_j))\right),\ x\to\infty.$$

Поскольку $\mathrm{Re}(\rho R_k^{+})=\mathrm{Re}(\rho R_k)$, из $\mathrm{Re}(\rho R_j)>\mathrm{Re}(\rho R_k)$ следует, что правая часть полученной оценки стремится к 0 при $x\to\infty$, откуда, с учетом независимости v_{jk} от x, получаем $v_{jk}(\rho)=0$.

□

Введем при $\rho\in\Sigma'$ матрицу перестановок $\Pi(\rho)$ такую, что

$$(R_1^{+}(\rho),\dots,R_n^{+}(\rho))=(R_1^{-}(\rho),\dots,R_n^{-}(\rho))\Pi(\rho),$$

или, эквивалентно, $R^{+}(\rho)=\Pi^{-1}(\rho)R^{-}(\rho)\Pi(\rho)$, где, как и всюду далее, если иное не оговорено,

$$R:=diag(R_1,\dots,R_n).$$

Ясно, что $\Pi(\rho)$ представляет собой блочно–диагональную матрицу, постоянную на каждом из лучей Σ_ν. Из Леммы 2.1 вытекает, что матрица $v(\rho)$ имеет такую же блочную структуру, как и матрица $\Pi(\rho)$.

В дальнейшем блочно-диагональные матрицы с такой блочной структурой будем называть Π-*диагональными.* С учетом Условия 2 блочная структура матрицы $\Pi(\rho)$ и, соответственно, $v(\rho)$, может быть описана более явным образом. Заметим, прежде всего, что в двойном неравенстве $\mathrm{Re}(\rho R_{k-1}) \le \mathrm{Re}(\rho R_k) \le \mathrm{Re}(\rho R_{k+1})$ знак равенства возможен не более, чем в одной позиции. Обозначим через I_0 множество таких индексов k, для которых $\mathrm{Re}(\rho R_{k-1}) < \mathrm{Re}(\rho R_k) < \mathrm{Re}(\rho R_{k+1})$ ($\mathrm{Re}(\rho R_k) < \mathrm{Re}(\rho R_{k+1})$ в случае $k = 1$). Таким индексам в матрице $\Pi(\rho)$ соответствуют «тривиальные» 1×1 диагональные блоки, причем $\Pi_{kk}(\rho) = 1$. Далее, определим I_- как множество k таких, что $\mathrm{Re}(\rho R_k) = \mathrm{Re}(\rho R_{k+1})$ (при этом $\mathrm{Re}(\rho R_{k-1}) < \mathrm{Re}(\rho R_k)$, если $k > 1$). Отметим, что для $k \in I_-$ имеем $R_k^+ = R_{k+1}$, $R_{k+1}^+ = R_k$, иначе говоря, таким k в матрице $\Pi(\rho)$ соответствует 2×2 блок вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

расположенный в строках и столбцах с номерами k и $k+1$. Наконец, определим $I_+ := \{1, \dots, n\} \setminus (I_0 \cup I_-)$ и заметим, что $k \in I_+$ тогда и только тогда когда $k - 1 \in I_-$.

Следующая теорема содержит дальнейшее уточнение результата Леммы 2.1 с учетом сделанных выше наблюдений.

Теорема 2.1. *При каждом* $\rho \in \Sigma'$ $v(\rho)$ – *нижнетреугольная* Π - *диагональная матрица. Кроме того, для каждого индекса* $k \in I_-$ *имеем:*

1. $v_{k+1,k}(\rho) \equiv 1$*;*
2. $v_{kk}(\rho) v_{k+1,k+1}(\rho) \equiv -1$.

Доказательство. 1) Представление (2.1) при $j = k$ даёт:

$$v_{k+1,k} \cdot |\mathfrak{f}| = \left| \Psi_1 \wedge \dots \wedge \Psi_k \wedge \Psi_k^+ \wedge \Psi_{k+2} \wedge \dots \wedge \Psi_n \right|.$$

Если $k \in I_-$, то $\mathrm{Re}(\rho R_k^+) = \mathrm{Re}(\rho R_{k+1}) > \mathrm{Re}(\rho R_{k-1}) = \mathrm{Re}(\rho R_{k-1}^+)$, поэтому

$$\Psi_k^+(x, \rho) = \exp(\rho x R_k^+)(\mathfrak{f}_k^+ + o(1)) = \exp(\rho x R_{k+1})(\mathfrak{f}_{k+1} + o(1))$$

при $x \to \infty$, откуда получаем:

$$v_{k+1,k} \cdot |\mathfrak{f}| = |F_k \wedge (\exp(\rho x R_{k+1})(\mathfrak{f}_{k+1} + o(1))) \wedge \Psi_{k+2} \wedge \dots \wedge \Psi_n| =$$

$$\Big|\exp(\rho x \overrightarrow{R}_k)(\mathfrak{f}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{f}_k + o(1)) \wedge (\exp(\rho x R_{k+1})(\mathfrak{f}_{k+1} + o(1)))$$

$$\wedge \Psi_{k+2} \wedge \dots \wedge \Psi_n| =$$

$$\Big|(F_{k+1} + o(\exp(\rho x \overrightarrow{R}_{k+1}))) \wedge \Psi_{k+2} \wedge \dots \wedge \Psi_n\Big| = |\mathfrak{f}| + o(1).$$

Учитывая, что $v_{k+1,k}$ не зависит от x, заключаем, что $v_{k+1,k} = 1$.

2) С учетом установленной выше нижнетреугольности и Π - диагональности матрицы $v(\rho)$ имеем для $k \in I_-$ (воспользуемся также уже доказанным для таких k равенством $v_{k+1,k}(\rho) \equiv 1$):

$$\Psi_k^+(x,\rho) = v_{kk}(\rho)\Psi_k(x,\rho) + \Psi_{k+1}(x,\rho), \;\; \Psi_{k+1}^+(x,\rho) = v_{k+1,k+1}(\rho)\Psi_{k+1}(x,\rho),$$

откуда следует:

$$\Psi_k^+ \wedge \Psi_{k+1}^+ = v_{kk}v_{k+1,k+1}\Psi_k \wedge \Psi_{k+1} \tag{2.2}$$

Равенство (2.2) умножим на

$$\exp(\rho x \overrightarrow{R}_{k-1})\mathfrak{f}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{f}_{k-1}.$$

Переходя в полученном равенстве к пределу при $x \to \infty$, в силу п.3 Теоремы 1.8 получим:

$$\exp(\rho x \overrightarrow{R}_{k-1})\mathfrak{f}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{f}_{k-1} \wedge \Psi_k^+ \wedge \Psi_{k+1}^+ =$$
$$v_{kk}v_{k+1,k+1}\exp(\rho x \overrightarrow{R}_{k+1})(\mathfrak{f}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{f}_{k+1} + o(1)). \tag{2.3}$$

Заметим, что $\overrightarrow{R}_{k-1} = \overrightarrow{R}^+_{k-1}$, $\overrightarrow{R}_{k+1} = \overrightarrow{R}^+_{k+1}$, $R_k^+ = R_{k+1}$, $R_{k+1}^+ = R_k$, $\mathfrak{f}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{f}_{k-1} = \chi_k \mathfrak{f}_1^+ \wedge \dots \wedge \mathfrak{f}_{k-1}^+$. С учетом этих наблюдений, применяя снова п.3 Теоремы 1.8, получим:

$$\exp(\rho x \overrightarrow{R}_{k-1})\mathfrak{f}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{f}_{k-1} \wedge \Psi_k^+ \wedge \Psi_{k+1}^+ =$$

$$\exp(\rho x \overrightarrow{R}^+_{k-1})\chi_k \mathfrak{f}_1^+ \wedge \dots \wedge \mathfrak{f}_{k-1}^+ \wedge \Psi_k^+ \wedge \Psi_{k+1}^+ =$$

$$\exp(\rho x \overrightarrow{R}^+_{k+1})\chi_k(\mathfrak{f}_1^+ \wedge \dots \wedge \mathfrak{f}_{k+1}^+ + o(1))$$

при $x \to \infty$. Подставляя полученную асимптотику в (2.3), приходим к равенству:

$$\chi_k \mathfrak{f}_1^+ \wedge \dots \wedge \mathfrak{f}_{k+1}^+ = v_{kk}v_{k+1,k+1}\mathfrak{f}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{f}_{k+1}.$$

Заметив, что $\mathfrak{f}_k = \mathfrak{f}_{k+1}^+$, $\mathfrak{f}_k^+ = \mathfrak{f}_{k+1}$, откуда $\mathfrak{f}_k \wedge \mathfrak{f}_{k+1} = -\mathfrak{f}_k^+ \wedge \mathfrak{f}_{k+1}^+$, получим окончательно:

$$\chi_k \mathfrak{f}_1^+ \wedge \dots \wedge \mathfrak{f}_{k-1}^+ \wedge \mathfrak{f}_k^+ \wedge \mathfrak{f}_{k+1}^+ = v_{kk} v_{k+1,k+1} \chi_k \mathfrak{f}_1^+ \wedge \dots \wedge \mathfrak{f}_{k-1}^+ \wedge (-\mathfrak{f}_k^+ \wedge \mathfrak{f}_{k+1}^+).$$

$\square$

Таким образом, каждому нетривиальному диагональному блоку вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицы $\Pi(\rho)$, расположенному в строках и столбцах с номерами k и $k+1$ (где $k \in I_-$), соответствует диагональный блок вида

$$\begin{pmatrix} v_{kk} & 0 \\ 1 & v_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

матрицы $v(\rho)$, причем $v_{kk} v_{k+1,k+1} = -1$.

Рассуждая аналогично, для $\rho \in \Sigma'$ таких, что $\prod\limits_{k=1}^{n} \Delta_k(\rho) \neq 0$, $\prod\limits_{k=1}^{n} \Delta_k^+(\rho) \neq 0$ введём матрицы, связывающие граничные значения решений Вейля:

$$\overset{\circ}{\Phi}{}^{+}(x, \rho) = \overset{\circ}{\Phi}{}^{-}(x, \rho) v^{\#}(\rho).$$

Для матрицы $v^{\#}(\rho)$ справедлив следующий результат, являющийся аналогом Теоремы 2.1.

Теорема 2.1'. *Матрица $v^{\#}(\rho)$ – нижнетреугольная, Π - диагональная, причём $v_{kk}^{\#}(\rho) \equiv 1$ для всех k.*

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве Теоремы 2.1, воспользуемся следующим представлением, аналогичным (2.1):

$$v_{jk}^{\#} = \left| \overset{\circ}{\Phi}_1 \wedge \dots \wedge \overset{\circ}{\Phi}_{j-1} \wedge \overset{\circ}{\Phi}{}_k^{+} \wedge \overset{\circ}{\Phi}_{j+1} \wedge \dots \wedge \overset{\circ}{\Phi}_n \right|. \tag{2.4}$$

Из асимптотик решений Вейля

$$\overset{\circ}{\Phi}_k (x, \rho) = x^{\mu_k} (\mathfrak{h}_k + o(1)), \ x \to 0$$

имеем

$$v_{jk}^{\#}(\rho) = x^{\mu_k - \mu_j} \left(|\mathfrak{h}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{h}_{j-1} \wedge \mathfrak{h}_k \wedge \mathfrak{h}_{j+1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{h}_n| + o(1) \right)$$

при $x \to 0$. Поскольку при $j < k$ имеем $\mathrm{Re}\mu_j < \mathrm{Re}\mu_k$, из полученной асимптотики (с учетом $|\mathfrak{h}| = 1$) следует, что $v^{\#}_{jk} = \delta_{j,k}$ при $j \le k$ (здесь $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера).

Аналогично, при $x \to \infty$ из (2.4) получаем оценку:

$$\left| v^{\#}_{jk}(\rho) \right| = O\left(\exp(\rho x (R^+_k - R_j)) \right), \ x \to \infty.$$

Поскольку $\mathrm{Re}(\rho R^+_k) = \mathrm{Re}(\rho R_k)$, из $\mathrm{Re}(\rho R_j) > \mathrm{Re}(\rho R_k)$ следует, что правая часть полученной оценки стремится к 0 при $x \to \infty$, откуда, с учетом независимости $v^{\#}_{jk}$ от x, получаем $v^{\#}_{jk}(\rho) = 0$.

$\square$

Таким образом, каждому нетривиальному диагональному блоку вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицы $\Pi(\rho)$, расположенному в строках и столбцах с номерами k и $k+1$ (где $k \in I_-$), соответствует диагональный блок вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v^{\#}_{k+1,k} & 1 \end{pmatrix}$$

матрицы $v^{\#}(\rho)$.

Между матрицами $v(\rho)$ и $v^{\#}(\rho)$ имеется связь, вытекающая из пропорциональности функций $\Psi_k(x,\rho)$ и $\overset{\circ}{\Phi}_k(x,\rho)$. Действительно, согласно Следствию 1.2 для $\rho \in \Sigma'$ таких, что $\prod\limits_{k=1}^{n} \Delta^{\pm}_k(\rho) \neq 0$ имеем

$$\overset{\circ}{\Phi}{}^{\pm}(x,\rho) = \Psi^{\pm}(x,\rho)\delta^{\pm}(\rho),$$

откуда вытекает:

$$v(\rho)\delta^+(\rho) = \delta^-(\rho) v^{\#}(\rho).$$

Рассматривая элементы на главной диагонали матриц в правой и левой частях полученного равенства, приходим к следующему утверждению.

Утверждение 2.1. *Для всех $\rho \in \Sigma'$ таких, что $\prod\limits_{k=1}^{n} \Delta^{\pm}_k(\rho) \neq 0$ справедливо равенство:*

$$\delta^-_k(\rho) = v_{kk}(\rho)\delta^+_k(\rho), \ k = \overline{1,n}.$$

Теорема 2.2. *Пусть для всех* $\nu = \overline{1, N}$ *выполнено условие*

$$\lim_{\rho \to 0, \rho \in \overline{\mathcal{S}}_\nu} \prod_{k=1}^{n} \Delta_k(\rho) \neq 0.$$

Тогда для всех $\nu = \overline{1, N}$ *существуют пределы* $\lim\limits_{\rho \to 0, \rho \in \Sigma_\nu} v(\rho)$, *зависящие только от матриц* A, B.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть только диагональные элементы матрицы v. Подставляя в (2.1) $\Psi_k^{\pm}(x, \rho)$ в виде $\Psi_k^{\pm}(x, \rho) = \rho^{\mu_k} \overset{\circ}{\Psi}{}_k^{\pm} (x, \rho)$ и учитывая, что $\rho^{\overrightarrow{\mu}_n} = 1$, получим представление:

$$v_{kk} |\mathfrak{f}| = \left| \overset{\circ}{\Psi}_1 \wedge \cdots \wedge \overset{\circ}{\Psi}_{k-1} \wedge \overset{\circ}{\Psi}{}_k^{+} \wedge \overset{\circ}{\Psi}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \overset{\circ}{\Psi}_n \right|,$$

где $\rho \in \Sigma_\nu$, ν произвольно (здесь учтено, что, поскольку решения типа Вейля не зависят от выбора ветви степенной функции, можно считать, что ρ^{μ_k} непрерывна в $\mathcal{S}_\nu \cup \Sigma_\nu \cup \mathcal{S}_{\nu+1}$). В силу Теоремы 1.9 правая часть полученного представления имеет предел при $\rho \to 0$ и справедливо равенство:

$$\lim_{\rho \to 0, \rho \in \Sigma_\nu} v_{kk}(\rho) =$$

$$= s_\nu \left| \overset{\circ}{\psi}_{1\nu} \wedge \cdots \wedge \overset{\circ}{\psi}_{k-1,\nu} \wedge \overset{\circ}{\psi}_{k,\nu+1} \wedge \overset{\circ}{\psi}_{k+1,\nu} \wedge \cdots \wedge \overset{\circ}{\psi}_{n\nu} \right|, \tag{2.5}$$

где

$$\overset{\circ}{\psi}_{k\nu} (x) := \lim_{\rho \to 0, \rho \in \mathcal{S}_\nu} \overset{\circ}{\Psi}_k (x, \rho), \;\; s_\nu := |\mathfrak{f}| \big|_{\rho \in \mathcal{S}_\nu}.$$

Переписав определяющую решения типа Вейля СЛАУ

$$F_{k-1} \wedge \Psi_k = F_k, \;\; \Psi_k \wedge T_k = 0$$

в виде

$$\overset{\circ}{F}_{k-1} \wedge \overset{\circ}{\Psi}_k = \overset{\circ}{F}_k, \;\; \overset{\circ}{\Psi}_k \wedge \overset{\circ}{T}_k = 0,$$

перейдем в ней к пределу при $\rho \to 0$, $\rho \in \mathcal{S}_\nu$, что даёт:

$$f_{k-1,\nu} \wedge \overset{\circ}{\psi}_{k\nu} = f_{k\nu}, \;\; \overset{\circ}{\psi}_{k\nu} \wedge \tau_k = 0. \tag{2.6}$$

Здесь (см. часть II Теоремы 1.5) $f_{k\nu}(x), \tau_k(x)$ суть единственные в классах функций $y : x^{-\overleftarrow{\mu}_k} y(x) \in L_\infty(0, \infty)$, $y : x^{-\overrightarrow{\mu}_k} y(x) \in L_\infty(0, \infty)$ соответственно решения следующих интегральных уравнений:

$$f_{k\nu}(x) = f_{k\nu}^0(x) - \int_x^\infty G_k(x, t, 0) \left(q^{(k)}(t) f_{k\nu}(t) \right) dt, \tag{2.7}$$

$$\tau_k(x) = \tau_k^0(x) + \int\limits_0^x G_{n-k+1}(x,t,0)\left(q^{(n-k+1)}(t)\tau_k(t)\right)\,dt,$$

в которых

$$\tau_k^0(x) := \lim_{\rho\to 0} \overset{\circ}{T}_{k0}(x,\rho) = x^{\overleftarrow{\mu}_k}\hat{c}_k(0)\wedge\dots\wedge\hat{c}_n(0) = x^{\overleftarrow{\mu}_k}\mathfrak{h}_k\wedge\dots\wedge\mathfrak{h}_n,$$

$$f_{k\nu}^0(x) := \lim_{\rho\to 0,\rho\in\mathcal{S}_\nu} \overset{\circ}{F}_{k0}(x,\rho) = \beta_{k\nu}x^{\overrightarrow{\mu}_k}\mathfrak{h}_1\wedge\dots\wedge\mathfrak{h}_k$$

и абсолютные константы $\beta_{k\nu}\neq 0$ зависят только от матриц A, B.

Заметим, что вольтерровские уравнения (2.7) при различных ν различаются только свободным членом. В силу их однозначной разрешимости из равенства

$$f_{k,\nu+1}^0(x) = \frac{\beta_{k,\nu+1}}{\beta_{k\nu}}f_{k\nu}^0(x)$$

следует

$$f_{k,\nu+1}(x) = \frac{\beta_{k,\nu+1}}{\beta_{k\nu}}f_{k\nu}(x). \tag{2.8}$$

Из (2.8) и однозначной разрешимости СЛАУ (2.6) следует, в свою очередь, равенство:

$$\overset{\circ}{\psi}_{k,\nu+1}(x) = \gamma_{k\nu}\overset{\circ}{\psi}_{k\nu}(x),\ \gamma_{k\nu} = \frac{\beta_{k,\nu+1}\beta_{k-1,\nu}}{\beta_{k\nu}\beta_{k-1,\nu+1}}. \tag{2.9}$$

Здесь константы $\gamma_{k\nu}$, как и $\beta_{k\nu}$ ранее, зависят только от матриц A, B.

Подставляя (2.9) в представление (2.5), получим:

$$\lim_{\rho\to,\rho\in\Sigma_\nu} v_{kk}(\rho) = s_\nu\gamma_{k\nu}\left|\overset{\circ}{\psi}_{1\nu}\wedge\dots\wedge\overset{\circ}{\psi}_{k-1,\nu}\wedge\overset{\circ}{\psi}_{k,\nu}\wedge\overset{\circ}{\psi}_{k+1,\nu}\wedge\dots\wedge\overset{\circ}{\psi}_{n\nu}\right| = \gamma_{k\nu},$$

т.к.

$$\left|\overset{\circ}{\psi}_{1\nu}\wedge\dots\wedge\overset{\circ}{\psi}_{k-1,\nu}\wedge\overset{\circ}{\psi}_{k,\nu}\wedge\overset{\circ}{\psi}_{k+1,\nu}\wedge\dots\wedge\overset{\circ}{\psi}_{n\nu}\right| =$$

$$\lim_{\rho\to 0,\rho\in\mathcal{S}_\nu}|\Psi_1(x,\rho)\wedge\dots\wedge\Psi_n(x,\rho)| = \lim_{\rho\to 0,\rho\in\mathcal{S}_\nu}|\mathfrak{f}(\rho)| = s_\nu$$

и $s_\nu^2 = 1$.

□

В дальнейшем будем использовать обозначение $v_0(\rho) := v(0,\rho)$ (т.е. матрица v_0 соответствует «простейшему» случаю $q = 0$).

Следствие 2.1. *В условиях Теоремы 2.2 имеем* $\lim\limits_{\rho\to 0,\rho\in\Sigma'}(v(q,\rho) - v_0(\rho)) = 0.$

Определение 2.1. *Будем говорить, что* $q \in \mathcal{X}_p$ *принадлежит классу* $G_0^p(\Sigma)$, *если*

$$\prod_{k=1}^{n} \Delta_k^{\pm}(q,\rho) \neq 0$$

для всех $\rho \in \Sigma$ *(при* $\rho = 0$ *подразумеваются все предельные значения при* $\rho \to 0$, $\rho \in \Sigma_\nu$, *существующие согласно результатам §1.3).*

Определим пространство $\mathcal{H}(\Sigma)$ как пространство, состоящее из функций $\varphi \in L_2(\Sigma)$, таких что для каждого $\nu = \overline{1,N}$ ограничение $\varphi(\rho)\big|_{\rho\in\Sigma_\nu}$ непрерывно и существуют $\lim\limits_{\rho\to 0,\rho\in\Sigma_\nu} \varphi(\rho)$ и $\lim\limits_{\rho\to\infty,\rho\in\Sigma_\nu} \varphi(\rho)$, причем

$$\lim_{\rho\to\infty,\rho\in\Sigma_\nu} \varphi(\rho) = 0.$$

Иначе говоря, ограничение $\varphi(\rho)\big|_{\rho\in\Sigma_\nu}$ допускает продолжение на $\overline{\Sigma}_\nu$ до элемента пространства $C_0(\overline{\Sigma}_\nu)$. Для $\varphi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ положим $\|\varphi\| := \|\varphi\|_{L_2(\Sigma)} + \|\varphi\|_{C_0(\Sigma)}$. Через $\mathcal{H}_0(\Sigma)$ обозначим замкнутое подпространство, состоящее из таких $\varphi(\cdot) \in \mathcal{H}(\Sigma)$, что для каждого $\nu = \overline{1,N}$ $\lim\limits_{\rho\to 0,\rho\in\Sigma_\nu} \varphi(\rho) = 0$. Заметим, что $\mathcal{H}_0(\Sigma)$ совпадает с замыканием по норме $\mathcal{H}(\Sigma)$ класса $C_{00}^\infty(\Sigma)$ бесконечно гладких функций на Σ, обращающихся в 0 вне некоторого кольца $\{\rho : 0 < r_1 \le |\rho| \le r_2 < \infty\}$ (своего для каждой функции).

Теорема 2.3. *Пусть* $p > 2$. *Тогда* $v(\cdot,\cdot) - v_0(\cdot) \in C(G_0^p(\Sigma), \mathcal{H}_0(\Sigma))$.

Доказательство. Поскольку матрица $v(q,\rho) - v_0(\rho)$ диагональна для любых q, ρ, достаточно рассмотреть диагональные элементы. Имеем:

$$|\mathfrak{f}| v_{kk} = \left|\Psi_1 \wedge \cdots \wedge \Psi_{k-1} \wedge \Psi_k^+ \wedge \Psi_{k+1} \wedge \cdots \wedge \Psi_n\right| =$$

$$\Big|(\Psi_{01} + W_1\hat{\Psi}_1) \wedge \cdots \wedge (\Psi_{0,k-1} + W_{k-1}\hat{\Psi}_{k-1}) \wedge (\Psi_{0k}^+ + W_k^+\hat{\Psi}_k^+)$$

$$\wedge(\Psi_{0,k+1} + W_{k+1}\hat{\Psi}_{k+1}) \wedge \cdots \wedge (\Psi_{0n} + W_n\hat{\Psi}_n)\Big|,$$

где (как и ниже в настоящем доказательстве) $W^\pm := W^\pm(\rho x)$.

Учитывая, что

$$\left|\Psi_{01} \wedge \cdots \wedge \Psi_{0,k-1} \wedge \Psi_{0k}^+ \wedge \Psi_{0,k+1} \wedge \cdots \wedge \Psi_{0n}\right| = |\mathfrak{f}| v_{0,kk},$$

получаем

$$v_{kk} = v_{0,kk} + \overrightarrow{W}^n(\rho x)\frac{W_k^+(\rho x)}{W_k(\rho x)}(v_{1,kk} + v_{2,kk}), \tag{2.10}$$

где

$$v_{1,kk} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}'_k} \chi'_\alpha \left|\hat{\Psi}^+_k \wedge \tilde{\Psi}_{0\alpha} \wedge \hat{\Psi}_\beta\right|, v_{2,kk} = \sum_{\beta\in\mathcal{A}''_k} \chi''_\alpha \left|\tilde{\Psi}^+_{0k} \wedge \tilde{\Psi}_{0\alpha} \wedge \hat{\Psi}_\beta\right|. \qquad (2.11)$$

Здесь $\mathcal{A}'_k$ - множество всех мультииндексов (включая пустой мультииндекс), не содержащих k, $\mathcal{A}''_k$ - множество непустых мультииндексов из $\mathcal{A}'_k$, $\chi'_\alpha, \chi''_\alpha \in \{-1, 1\}$; в обеих суммах в каждом слагаемом мультииндексы α и β связаны условием $\alpha \cup \beta = (1, \dots, k-1, k+1, \dots n)$.

В силу Теоремы 1.11 в представлениях:

$$\Psi^\pm_k(q, x, \rho) = \Psi^\pm_{0k}(x, \rho) + W^\pm_k(\rho x)\hat{\Psi}^\pm_k(q, x, \rho),$$

для каждого $\nu = \overline{1, N}$ и произвольного фиксированного x имеем $\hat{\Psi}^\pm_k(\cdot, x, \cdot) \in C\left(G^p_0(\Sigma), \mathcal{H}(\Sigma_\nu)\right)$. Отсюда, используя представления (2.10), (2.11), с учетом Следствия 2.1, приходим к требуемому утверждению.

$\square$

§2.2 Решение обратной задачи рассеяния в классе G^p_0

Определение 2.2. *Будем говорить, что $q(\cdot) \in \mathcal{X}_p$ принадлежит классу G^p_0, если для каждого $\nu = \overline{1, N}$ справедливо $q(\cdot) \in G^p_0\left(\overline{\mathcal{S}}_\nu\right)$.*

В дальнейшем в настоящей главе изучается следующая обратная задача рассеяния.

Задача 1. *Восстановить $q(\cdot) \in G^p_0$ по заданной матрице-функции $v(q, \rho)$, $\rho \in \Sigma'$.*

В дальнейшем матрицу-функцию $v(q, \rho)$ будем называть *данными рассеяния.*

Прежде всего убедимся, что потенциал из класса G^p_0 однозначно определяется заданием данных рассеяния.

Теорема 2.4. *Если $q_1(\cdot) \in G^p_0$ и $q_2(\cdot) \in G^p_0$ таковы, что $v(q_1, \cdot) = v(q_2, \cdot)$, то $q_1 = q_2$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение следующую *матрицу спектральных отображений*:

$$P(q_1, q_2, x, \rho) := \Psi(q_1, x, \rho)(\Psi(q_2, x, \rho))^{-1}$$

В силу Теоремы 1.11 имеем, в частности:

$$\Psi(q_j, x, \rho) = (I + \hat{\Psi}(q_j, x, \rho)(\tilde{\Psi}_0(x, \rho))^{-1})\Psi_0(x, \rho) = (I + o(1))\Psi_0(x, \rho)$$

при $\rho \to \infty$, $\rho \in \mathcal{S}_\nu$ для любого ν. Отсюда следует асимптотика $P(q_1, q_2, x, \rho) = I + o(1)$ при $\rho \to \infty$, $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$.

Далее, при $\rho \in \Sigma'$ имеем:

$$P^+(q_1, q_2, x, \rho) = \Psi^+(q_1, x, \rho)(\Psi^+(q_2, x, \rho))^{-1} =$$

$$\Psi^-(q_1, x, \rho)v(q_1, \rho)(v(q_2, \rho))^{-1}(\Psi^-(q_2, x, \rho))^{-1}.$$

Из совпадения $v(q_1, \cdot) = v(q_2, \cdot)$ следует:

$$P^+(q_1, q_2, x, \rho) = \Psi^-(q_1, x, \rho)(\Psi^-(q_2, x, \rho))^{-1} = P^-(q_1, q_2, x, \rho).$$

Далее, в силу Теоремы 1.10 имеем

$$\Psi(q_j, x, \rho) = \overset{\circ}{\Psi}(q_j, x, \rho)\rho^{\mu},$$

где $\overset{\circ}{\Psi}(q_j, x, \rho)$ допускают непрерывное продолжение в $\overline{\mathcal{S}}_\nu$ для любого $\nu = \overline{1, N}$. Следовательно, для каждого $\nu = \overline{1, N}$ существует конечный предел

$$\lim_{\rho \to 0, \rho \in \overline{\mathcal{S}}_\nu \setminus \{0\}} P(q_1, q_2, x, \rho) = \overset{\circ}{\Psi}(q_1, x, 0)(\overset{\circ}{\Psi}(q_2, x, 0))^{-1}.$$

Таким образом, для каждого фиксированного $x > 0$ функция $P(q_1, q_2, x, \rho) - I$ голоморфна по $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ограничена при $\rho \to 0$ и стремится к 0 при $\rho \to \infty$. Согласно теореме Лиувилля заключаем, что $P(q_1, q_2, x, \rho) - I = 0$, т.е., $\Psi(q_1, x, \rho) \equiv \Psi(q_2, x, \rho)$, откуда следует $q_1 = q_2$.

$\square$

Покажем, что Задача 1 может быть сведена к решению некоторого линейного интегрального уравнения, зависящего как от параметра от $x > 0$.

Зафиксируем произвольную $q(\cdot) \in G_0^p$ и положим $P(x, \rho) = P(q, x, \rho)$, где $P(q, x, \rho) := \Psi(q, x, \rho)\Psi_0^{-1}(x, \rho)$.

Условимся, что для каждого $\nu = \overline{1, N}$ открытые лучи Σ_ν ориентированы в направлении от 0 к ∞. Под Σ_ν^+ и Σ_ν^- понимаются берега (проведенного по Σ_ν) разреза, принадлежащие границе сектора $\mathcal{S}_{\nu+1}$ и сектора $\mathcal{S}_\nu$ соответственно. Условимся считать, что Σ_ν^+ ориентированы от 0 к ∞, а Σ_ν^- – от ∞ к 0. Обозначим через γ контур, составленный из всех Σ_ν^+ и Σ_ν^-, $\nu = \overline{1, N}$. Положим $\gamma_r := \gamma \cap \{\rho : |\rho| \le r\}$ и $\Gamma_r := \gamma_r \cup C_r$, где контур C_r представляет собой окружность радиуса r, ориентированную в положительном направлении.

Применяя интегральную формулу Коши, запишем для произвольного $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, $|\rho| < r$:

$$P(x, \rho) - I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} (P(x, \zeta) - I). \tag{2.12}$$

Как при доказательстве Теоремы 2.4, имеем $P(q, x, \zeta) - I \to 0$ при $\zeta \to \infty$, следовательно, переходя в (2.12) к пределу при $r \to \infty$, получим:

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{C_R} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} (P(x, \zeta) - I) = 0,$$

что дает

$$P(x, \rho) - I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} (P(x, \zeta) - I). \tag{2.13}$$

Заметив, что для каждого $\nu = \overline{1, N}$ в силу выбранной ориентации контуров Σ_ν, Σ_ν^+ и Σ_ν^- имеем:

$$\int\limits_{\Sigma_\nu^- \cup \Sigma_\nu^+} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} (P(x, \zeta) - I) = \int\limits_{\Sigma_\nu} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} (P^+(x, \zeta) - P^-(x, \zeta)),$$

преобразуем (3.26) к виду:

$$P(x, \rho) - I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} (P^+(x, \zeta) - P^-(x, \zeta)), \ \rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma.$$

Обозначим через $Cf(\rho)$ интеграл Коши:

$$Cf(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} f(\zeta), \ \rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma;$$

через $C^\pm f(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ обозначим предельные значения $C^\pm f(\rho) := (Cf)^\pm(\rho)$.

Во введенных обозначениях полученное выше представление для $P(x, \rho)$ перепишется в виде:

$$P(x, \rho) = I + C\hat{P}(x, \rho), \ \rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma, \tag{2.14}$$

где $\hat{P}(x, \rho) := P^+(x, \rho) - P^-(x, \rho)$.

Заметим, что из

$$\Psi^+(x, \rho) = \Psi^-(x, \rho) v(\rho)$$

следует

$$P^+(x, \rho) = P^-(x, \rho) V(x, \rho),$$

где

$$V(x, \rho) := \Psi_0(x, \rho) v(\rho) v_0^{-1}(\rho) \Psi_0^{-1}(x, \rho). \tag{2.15}$$

Беря в (2.14) соответствующие предельные значения и учитывая полученное соотношение, получаем:

$$\left(C^+\hat{P}(x, \cdot)\right)(\rho) - \left(C^-\hat{P}(x, \cdot)\right)(\rho) V(x, \rho) = V(x, \rho) - I, \ \rho \in \Sigma'. \tag{2.16}$$

В контексте решения обратной задачи рассеяния мы будем рассматривать полученное соотношение как линейное уравнение относительно функции $\hat{P}(x, \cdot)$ (для каждого фиксированного $x > 0$, выступающего как параметр); величина $V(x, \rho)$, также входящая в соотношение (2.16), может быть найдена по явной формуле (2.15), исходя из известных данных рассеяния $v(\rho)$. Для обоснования конструктивной процедуры решения обратной задачи рассмотрим (2.16) как уравнение в $L_2(\Sigma)$ и установим его корректную разрешимость для каждого фиксированного $x > 0$.

Теорема 2.5. *Для каждого фиксированного $x > 0$:*

1. *$\hat{P}(x, \cdot)$ является единственным в пространстве $L_2(\Sigma)$ решением уравнения $\mathbf{A}(x)\varphi = \hat{V}(x, \cdot)$, где $\hat{V}(x, \rho) := V(x, \rho) - I$, $\mathbf{A}(x)$ – линейный оператор, действующий в $L_2(\Sigma)$ по формуле:*

$$\mathbf{A}(x)\varphi(\rho) := \left(C^+\varphi\right)(\rho) - \left(C^-\varphi\right)(\rho) V(x, \rho);$$

2. *оператор $\mathbf{A}(x)$ обратим.*

Доказательство. 1. В этом пункте достаточно убедиться, что для любого $q(\cdot) \in G_0^p$ соответствующие функции $\hat{P}(x,\cdot)$, $\hat{V}(x,\cdot)$ принадлежат $L_2(\Sigma)$, а оператор $\mathbf{A}(x)$ действует в этом же пространстве.

Рассуждая, как при доказательстве Теоремы 2.4 из представления

$$\Psi^{\pm}(x,\rho) = (I + \hat{\Psi}^{\pm}(x,\rho)(\tilde{\Psi}_0^{\pm}(x,\rho))^{-1})\Psi_0^{\pm}(x,\rho),$$

где $\hat{\Psi}^{\pm}(x,\cdot) \in L_2(\Sigma)$ при каждом фиксированном $x > 0$, выводим $P^{\pm}(x,\cdot) - I \in L_2(\Sigma)$, откуда $\hat{P}(x,\cdot) \in L_2(\Sigma)$.

Рассмотрим

$$\hat{V}(x,\rho) = \Psi_0(x,\rho)\hat{v}(\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho),\ \hat{v}(\rho) := (v(\rho) - v_0(\rho))v_0^{-1}(\rho).$$

Из Теоремы 2.3 следует, что $\hat{v}(\cdot) \in \mathcal{H}_0(\Sigma)$. Запишем $\hat{V}(x,\rho)$ в виде $\hat{V}(x,\rho) = \tilde{\Psi}_0(x,\rho)w(x,\rho)\tilde{\Psi}_0^{-1}(x,\rho)$, где

$$w_{jk}(x,\rho) = \frac{W_j(\rho x)}{W_k(\rho x)}\hat{v}_{jk}(\rho).$$

При $j < k$ $\hat{v}_{jk} = 0$, в противном случае имеем

$$\left|\frac{W_j(\rho x)}{W_k(\rho x)}\right| \le M\left|(\rho x)^{\mu_j - \mu_k}\right| \le M,\ |\rho| \le x^{-1}$$

поскольку при $j \ge k$ $\mathrm{Re}\mu_j \ge \mathrm{Re}\mu_k$. Таким образом, $w(x,\rho)$ ограничена при $\rho \to 0$. Далее, поскольку матрица $\hat{v}(\rho)$ П-диагональна, $\hat{v}_{jk}(\rho)$ отлична от тождественного нуля лишь для таких позиций j,k, для которых $\mathrm{Re}(\rho R_j) = \mathrm{Re}(\rho R_k)$. Но в этом случае

$$\left|\frac{W_j(\rho x)}{W_k(\rho x)}\right| = 1,\ |\rho| > x^{-1},$$

т.е., $|w_{jk}(x,\rho)| = |\hat{v}_{jk}(\rho)|$. С учетом ограниченности матриц-функций $\tilde{\Psi}_0(x,\rho)$, $\tilde{\Psi}_0^{-1}(x,\rho)$ из приведенных рассуждений следует, что $\hat{V}(x,\cdot) \in L_2(\Sigma)$, более того $\hat{V}(x,\rho)$ ограничена по $\rho \in \Sigma'$ и стремится к 0 при $\rho \to \infty$. Отсюда, в частности, следует, что функция $V(x,\rho)$ ограничена по $\rho \in \Sigma$ и, следовательно, оператор умножения на эту функцию непрерывен в $L_2(\Sigma)$. Поскольку операторы $C^{\pm}$ непрерывны в $L_2(\Sigma)$, заключаем, что $\mathbf{A}(x)$ непрерывен в $L_2(\Sigma)$.

Приведенное в теореме уравнение есть записанное в операторной форме соотношение (2.16), единственность его решения следует из утверждения пункта 2.

2. Для удобства обозначений в последующем рассуждении мы не указываем (произвольный фиксированный) $x > 0$ в списках аргументов. Пусть $P(\rho) = P(x,\rho) = \Psi(x,\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho)$. Обозначим $\tilde{P}(\rho) := P^{-1}(\rho)$. Введем в рассмотрение оператор

$$\tilde{\mathbf{A}}f = C^+(f\tilde{P}^+)P^+ - C^-(f\tilde{P}^+)P^-.$$

a) Убедимся, что $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = Id$. Пусть $f(\cdot) \in L_2(\Sigma)$ произвольна, $g = \tilde{\mathbf{A}}f = f + C^-\left(f\tilde{P}^+\right)(P^+ - P^-)$.

Пользуясь свойством

$$\int\limits_\Sigma d\zeta \left(C^\pm f_1\right)(\zeta) f_2(\zeta) = -\int\limits_\Sigma d\zeta f_1(\zeta)\left(C^\mp f_2\right)(\zeta), \tag{2.17}$$

где $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in L_2(\Sigma)$ произвольны, запишем для произвольного фиксированного $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$:

$$Cg(\rho) = Cf(\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Sigma \frac{d\zeta}{\zeta - \rho}[C^-(f\tilde{P}^+)](\zeta)(P^+(\zeta) - P^-(\zeta)) =$$

$$= Cf(\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Sigma d\zeta (f\tilde{P}^+)(\zeta)[C^+F_\rho](\zeta), \tag{2.18}$$

где

$$F_\rho(\xi) := \frac{1}{\rho - \xi}(P^+(\xi) - P^-(\xi)),\ \xi \in \Sigma.$$

Рассуждая как при выводе (2.14), с учетом асимптотики $P(\xi) = I + o(1)$ при $\xi \to \infty$, приходим к соотношению:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Sigma \frac{d\xi}{(\rho - \xi)(\xi - \zeta)}(P^+(\xi) - P^-(\xi)) =$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{d\xi}{(\rho - \xi)(\xi - \zeta)}(P^+(\xi) - P^-(\xi)) =$$

$$\frac{1}{\rho - \zeta}P(\zeta) - \frac{1}{\rho - \zeta}P(\rho),\ \rho, \zeta \in \mathbb{C} \setminus \Sigma,$$

что эквивалентно представлению

$$\left(CF_\rho\right)(\zeta) = \frac{1}{\rho - \zeta}P(\zeta) - \frac{1}{\rho - \zeta}P(\rho),\ \rho, \zeta \in \mathbb{C} \setminus \Sigma.$$

Переходя к соответствующим предельным значениям, получим:

$$\left(C^+F_\rho\right)(\zeta) = \frac{1}{\rho-\zeta}P^+(\zeta) - \frac{1}{\rho-\zeta}P(\rho),\ \rho\in\mathbb{C}\setminus\Sigma,\ \zeta\in\Sigma.$$

Подставляя полученное представление в представление (2.18), приходим к равенствам:

$$Cg(\rho) = \left(C(f\tilde{P}^+)\right)(\rho)P(\rho),\ \rho\in\mathbb{C}\setminus\Sigma,$$

$$(C^\pm g)(\rho) = \left(C^\pm(f\tilde{P}^+)\right)(\rho)P^\pm(\rho),\ \rho\in\Sigma.$$

Тогда, учитывая, что $P^-V = P^+$, получаем:

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}f = \mathbf{A}g = C^+g - (C^-g)V = \left\{(C^+ - C^-)(f\tilde{P}^+)\right\}P^+ = f.$$

Таким образом, доказано, что $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = Id$.

б) Пусть теперь $f = \mathbf{A}\varphi$, где $\varphi(\cdot)\in L_2(\Sigma)$ произвольна. Тогда, учитывая, что $P^-V = P^+$, имеем:

$$f\tilde{P}^+ = \left(C^+\varphi\right)\tilde{P}^+ - \left(C^-\varphi\right)\tilde{P}^- = \varphi\tilde{P}^+ + \left(C^-\varphi\right)(\tilde{P}^+ - \tilde{P}^-),$$

$$\left(C\left(f\tilde{P}^+\right)\right)(\rho) = \left(C\left(\varphi\tilde{P}^+\right)\right)(\rho) +$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Sigma \frac{d\zeta}{\zeta-\rho}\left(C^-\varphi\right)(\zeta)(\tilde{P}^+(\zeta) - \tilde{P}^-(\zeta)).$$

Рассуждая, как в пункте а), преобразуем:

$$\left(C\left(f\tilde{P}^+\right)\right)(\rho) = \left(C\left(\varphi\tilde{P}^+\right)\right)(\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Sigma d\zeta\varphi(\zeta)\left(C^+\tilde{F}_\rho\right)(\zeta), \tag{2.19}$$

где

$$\tilde{F}_\rho(\xi) := \frac{1}{\rho-\xi}(\tilde{P}^+(\xi) - \tilde{P}^-(\xi)),\ \xi\in\Sigma.$$

Также аналогично предыдущему получаются представления:

$$\left(C\tilde{F}_\rho\right)(\zeta) = \frac{1}{\rho-\zeta}\tilde{P}(\zeta) - \frac{1}{\rho-\zeta}\tilde{P}(\rho),\ \rho,\zeta\in\mathbb{C}\setminus\Sigma,$$

$$\left(C^+\tilde{F}_\rho\right)(\zeta) = \frac{1}{\rho-\zeta}\tilde{P}^+(\zeta) - \frac{1}{\rho-\zeta}\tilde{P}(\rho),\ \rho\in\mathbb{C}\setminus\Sigma,\ \zeta\in\Sigma.$$

Подставляя последнее равенство в (2.19), получим: $C(f\tilde{P}^+) = (C\varphi)\tilde{P}$, откуда:

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}\varphi = \tilde{\mathbf{A}}f = \left(C^+(f\tilde{P}^+)\right)P^+ - \left(C^-(f\tilde{P}^+)\right)P^- =$$

$$(C^+\varphi)\tilde{P}^+P^+ - (C^-\varphi)\tilde{P}^-P^- = \varphi.$$

С учетом произвольности φ заключаем $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = Id$.

$\square$

Замечание 2.1. При доказательстве п.1. Теоремы 2.5 было установлено следующее утверждение, которое будет часто использоваться в дальнейшем: *Для произвольной нижнетреугольной* Π-*диагональной матрицы и при* $\rho \in \Sigma'$ *справедлива оценка*

$$\|\Psi_0(x,\rho)u\Psi_0^{-1}(x,\rho)\| \le M\|u\|$$

с некоторой константой M*, зависящей только от матриц* A *и* B*.*

Для завершения конструктивной процедуры решения обратной задачи мы построим явную формулу, позволяющую восстановить потенциал $q(\cdot)$ по известному (найденному из основного уравнения) $\hat{P}(x,\rho) = \hat{P}(q,x,\rho)$.

Сначала рассмотрим случай гладких убывающих в нуле потенциалов.

Лемма 2.2. *Пусть потенциал* $q(\cdot) \in G_0^p$ *удовлетворяет условиям Теоремы 1.7. Тогда справедлива следующая формула восстановления:*

$$q(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma}\left[B, \hat{P}(x,\rho)\right]d\rho,$$

где $\hat{P}(x,\rho) = \hat{P}(q,x,\rho)$ *и интеграл понимается как (существующий для каждого* $x > 0$*) предел:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma}\left[B, \hat{P}(x,\rho)\right]d\rho := \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma}\left[B, \hat{P}(x,\rho)\right]\theta^-(|\rho| - r)d\rho.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$F(x,\rho) := \rho[B, P(x,\rho)] + q(x).$$

В силу Теоремы 1.12 для каждого $\nu = \overline{1,N}$ при $\rho \to \infty$, $\rho \in \mathcal{S}_\nu$ справедливы асимптотики

$$\hat{\Psi}(x,\rho) = \rho^{-1}(\mathfrak{f}\Gamma_\nu(x) + \hat{q}(x)\mathfrak{f} + \mathcal{E}_\nu(x,\rho) + o(1)),$$

где $\Gamma_\nu(x)$ – некоторые диагональные матрицы, функции $\mathcal{E}_\nu(x,\cdot) \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_\nu)$ (используются обозначения упомянутой теоремы). Для $\tilde{\Psi}_0(x,\rho)$ при $\rho \to \infty$, $\rho \in \mathcal{S}_\nu$ имеем:

$$\tilde{\Psi}_0(x,\rho) = \mathfrak{f} + \mathcal{E}_\nu(x,\rho) + o(1)$$

(мы используем один и тот же символ для обозначения различных функций из класса $\mathcal{P}(\mathcal{S}_\nu)$). Поскольку $|\det\tilde{\Psi}_0| = 1$ при $|\rho x| > 1$, справедлива также асимптотика:

$$\tilde{\Psi}_0^{-1}(x,\rho) = \mathfrak{f}^{-1} + \mathcal{E}_\nu(x,\rho) + o(1).$$

Тогда асимптотика при $\rho \to \infty$, $\rho \in \mathcal{S}_\nu$ для $P(x,\rho) = I + \hat{\Psi}(x,\rho)\tilde{\Psi}_0^{-1}(x,\rho)$ имеет вид:

$$P(x,\rho) = I + \rho^{-1}(\mathfrak{f}\Gamma_\nu(x)\mathfrak{f}^{-1} + \hat{q}(x) + \mathcal{E}_\nu(x,\rho) + o(1)),$$

что дает:

$$F(x,\rho) = \mathcal{E}_\nu(x,\rho) + o(1). \tag{2.20}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, что использовались при выводе (2.14), в частности, используются те же обозначения для введенных в том рассмотрении контуров. Из асимптотики (2.20) следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{C_r} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} F(x,\zeta) = 0,$$

где $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ произвольна. Таким образом, интегральная формула Коши (где $r > |\rho|$)

$$F(x,\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} F(x,\zeta)$$

преобразуется к виду:

$$F(x,\rho) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} (F^+(x,\zeta) - F^-(x,\zeta))\theta^-(|\zeta| - r).$$

Учитывая, что $F^+(x,\zeta) - F^-(x,\zeta) = \zeta[B, \hat{P}(x,\zeta)]$, получаем:

$$F(x,\rho) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} \zeta[B, \hat{P}(x,\zeta)]\theta^-(|\zeta| - r). \tag{2.21}$$

С другой стороны, подставляя (2.14) непосредственно в определение функции $F(x,\rho)$, получаем:

$$F(x,\rho) = q(x) + \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} \rho[B, \hat{P}(x,\zeta)]\theta^-(|\zeta| - r).$$

Сравнивая полученное выражение с (2.21), приходим к требуемому результату.

□

Переходя к общему случаю, заметим, что в силу Теоремы 2.5 справедливо равенство:

$$\hat{P} = \left(C^{-}\hat{P}\right)\hat{V} - \hat{V}. \tag{2.22}$$

Окончательно искомая формула восстановления будет получена при помощи предельного перехода от потенциалов, удовлетворяющих условиям Леммы 2.2, с учетом соотношения (2.22).

Обозначим через $L_2^+(\Sigma)$ пространство П-верхнетреугольных (нестрого) матриц-функций с элементами из $L_2(\Sigma)$, $\mathcal{H}_0^+(\Sigma) := \mathcal{H}_0(\Sigma) \cap L_2^+(\Sigma)$. Через $\mathcal{H}_0^\Pi(\Sigma)$ будем обозначать пространство нижнетреугольных П - диагональных матриц-функций с элементами из $\mathcal{H}_0(\Sigma)$. Пространство непрерывных функций $C[0,\infty)$ всюду далее рассматривается с топологией, порожденной системой полунорм $\|\cdot\|_{C[0,T]}$, $T \in (0,\infty)$.

Лемма 2.3. *Определим билинейный оператор:*

$$\mathbf{\Phi}(u,\varphi)(x) := \frac{1}{2\pi i}\left[B, \int\limits_{\Sigma} d\rho \left(C^{-}\varphi(x,\cdot)\right)(\rho)\hat{V}(u,x,\rho)\right],$$

где

$$\hat{V}(u,x,\rho) := \Psi_0(x,\rho)u(\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho).$$

Тогда:

1. $\mathbf{\Phi} : \mathcal{H}_0^\Pi(\Sigma) \times C([0,\infty), L_2(\Sigma)) \to C[0,\infty)$ *непрерывен;*
2. *Для любых* $u \in \mathcal{H}_0^\Pi(\Sigma)$, $\varphi \in C([0,\infty), L_2(\Sigma))$ *при* $r \to \infty$ $\mathbf{\Phi}_r(u,\varphi) \to \mathbf{\Phi}(u,\varphi)$, *где*

$$\mathbf{\Phi}_r(u,\varphi)(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^{-}(|\rho| - r)\left[B, \left(C^{-}\varphi(x,\cdot)\right)(\rho)\hat{V}(u,x,\rho)\right].$$

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве Теоремы 2.5 (см. Замечание 2.1), замечаем, что из нижнетреугольности и П-диагональности u следует оценка

$$|\hat{V}_{jk}(u,x,\rho)| \leq M|u_{jk}(\rho)|$$

для всех ненулевых позиций матрицы u и для любой $u(\cdot) \in \mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)$ $\hat{V}(u,\cdot,\cdot) \in C([0,\infty), L_2(\Sigma))$. Таким образом,

$$\hat{V}(\cdot,\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma), C([0,\infty), L_2(\Sigma))).$$

С учетом непрерывности линейного оператора $C^- : L_2(\Sigma) \to L_2(\Sigma)$ и билинейного функционала $\varphi_1 \in L_2(\Sigma), \varphi_2 \in L_2(\Sigma) \to \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \in \mathbb{C}$:

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int\limits_{\Sigma} d\rho\, \varphi_1(\rho)\varphi_2(\rho)$$

дальнейшее очевидно.

$\square$

Обозначим через $L_{2,loc}(0,\infty]$ пространство функций, принадлежащих $L_2(\delta,\infty)$ для любого $\delta > 0$, с топологией, определяемой системой полунорм $\|\cdot\|_\delta = \|\cdot\|_{L_2(\delta,\infty)}$.

Лемма 2.4. *Определим семейство линейных операторов:*

$$\mathbf{E}_r f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^+(|\rho|x-1)\theta^-(|\rho|-r)\left[B, E(x,\rho)f(\rho)E^{-1}(x,\rho)\right],$$

$r > 0$. *Тогда*

1. *для каждого* $r > 0$ $\mathbf{E}_r \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^+(\Sigma), L_{2,loc}(0,\infty]\right)$*;*
2. *существует сильный предел* $\mathbf{E} = s - \lim\limits_{r\to\infty} \mathbf{E}_r \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^+(\Sigma), L_{2,loc}(0,\infty]\right)$.

Доказательство. Представим оператор в виде суммы:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_r^{(0)} + \mathbf{E}_r^{(1)} + \mathbf{E}_r^{(2)},$$

где:

$$\mathbf{E}_r^{(0)} f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^-(|\rho|-r)\left[B, \mathfrak{f}(\rho)\exp(\rho x R)f(\rho)\exp(-\rho x R)\mathfrak{f}^{-1}(\rho)\right],$$

$$\mathbf{E}_r^{(1)} f(x) :=$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^-(|\rho|x-1)\theta^-(|\rho|-r)\left[B, \mathfrak{f}(\rho)\exp(\rho x R)f(\rho)\exp(-\rho x R)\mathfrak{f}^{-1}(\rho)\right].$$

В силу представления

$$E(x,\rho)=\big(\mathfrak{f}+(\rho x)^{-1}\eta(\rho x)\big)\exp(\rho xR),$$

где $\eta(z)$ ограничена при $|z|>1$, оператор $\mathbf{E}_r^{(2)}$ можно представить в виде:

$$\mathbf{E}_r^{(2)}f(x):=$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma}d\rho\,\theta^+(|\rho|x-1)\theta^-(|\rho|-r)(\rho x)^{-1}\mathbf{M}(x,\rho)\left(\exp(\rho xR)f(\rho)\exp(-\rho xR)\right), \tag{2.23}$$

где при каждых фиксированных значениях x,ρ $\mathbf{M}(x,\rho)$ есть некоторый линейный оператор в пространстве $n\times n$ матриц, причем $\|\mathbf{M}(x,\rho)\|$ равномерно ограничена при $|\rho x|>1$. Из П-верхнетреугольности $f(\rho)$ следует, что $\mathrm{Re}(\rho(R_j-R_k))\le 0$ для всех ненулевых элементов $f_{jk}(\rho)$, откуда вытекает

$$\|\left(\exp(\rho xR)f(\rho)\exp(-\rho xR)\right)\|\le\|f(\rho)\|. \tag{2.24}$$

Таким образом, имеет место неравенство:

$$\|\mathbf{E}_r^{(2)}f(x)\|\le M\int\limits_{\Sigma}|d\rho|\,\theta^+(|\rho|x-1)\theta^-(|\rho|-r)|\rho x|^{-1}\|f(\rho)\|,$$

из которого вытекает оценка:

$$\|\mathbf{E}_r^{(2)}f(\cdot)\|_{L_2(\delta,\infty)}\le M\int\limits_{\Sigma}|d\rho||\rho|^{-1}\|f(\rho)\|\left\{\int\limits_{\delta}^{\infty}\theta^+(|\rho|x-1)x^{-2}\,dx\right\}^{1/2}=$$
$$=M\int\limits_{\Sigma}\theta^-(|\rho\delta|-1)|\rho|^{-1/2}\|f(\rho)\|\,|d\rho|+M\int\limits_{\Sigma}\theta^+(|\rho\delta|-1)|\rho|^{-1}\|f(\rho)\|\,|d\rho|$$
$$\le M(\delta)\|f\|_{\mathcal{H}_0^+(\Sigma)}.$$

Рассуждая аналогично, для оператора

$$\mathbf{E}^{(2)}f(x):=$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma}d\rho\,\theta^+(|\rho|x-1)(\rho x)^{-1}\mathbf{M}(x,\rho)\left(\exp(\rho xR)f(\rho)\exp(-\rho xR)\right),$$

где оператор $\mathbf{M}(x,\rho)$ тот же, что в (2.23), получаем оценку

$$\|\mathbf{E}^{(2)}f(\cdot)\|_{L_2(\delta,\infty)}\le M(\delta)\|f\|_{\mathcal{H}_0^+(\Sigma)},$$

из которой следует, что $\mathbf{E}^{(2)} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^+(\Sigma), L_{2,loc}(0,\infty]\right)$. Более того, имеем:

$$\|\mathbf{E}^{(2)}f(x) - \mathbf{E}_r^{(2)}f(x)\| \le M \int\limits_{\Sigma} |d\rho|\, \theta^+(|\rho|x-1)\theta^+(|\rho|-r)|\rho x|^{-1}\|f(\rho)\|,$$

откуда для любой фиксированной $\delta > 0$ при $x > \delta$ и достаточно больших $r > 0$:

$$\|\mathbf{E}^{(2)}f(x) - \mathbf{E}_r^{(2)}f(x)\| \le Mx^{-1}\|f\|_{L_2(\Sigma^+(r))}$$

и, следовательно,

$$\|\mathbf{E}^{(2)}f(\cdot) - \mathbf{E}_r^{(2)}f(\cdot)\|_{L_2(\delta,\infty)} \le M\|x^{-1}\|_{L_2(\delta,\infty)}\|f\|_{L_2(\Sigma^+(r))},$$

что означает $\mathbf{E}^{(2)} = s - \lim\limits_{r\to\infty} \mathbf{E}_r^{(2)}$ в $\mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^+(\Sigma), L_{2,loc}(0,\infty]\right)$. Таким образом, полностью доказаны утверждения п.1, 2 для операторов $\mathbf{E}_r^{(2)}$.

Рассмотрим операторы $\mathbf{E}_r^{(1)}$. Используя оценку (2.24), получаем:

$$\|\mathbf{E}_r^{(1)}f(x)\| \le M \int\limits_{\Sigma} |d\rho|\, \theta^-(|\rho x|-1)\theta^-(|\rho|-r)\|f(\rho)\| \le Mx^{-1}\|f\|_{\mathcal{H}_0^+(\Sigma)}.$$

Аналогичная оценка, очевидно, имеет место и для оператора:

$$\mathbf{E}^{(1)}f(x) := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^-(|\rho|x-1)\left[B, \mathfrak{f}(\rho)\exp(\rho xR)f(\rho)\exp(-\rho xR)\mathfrak{f}^{-1}(\rho)\right].$$

Далее, для произвольной фиксированной $\delta > 0$ при $x > \delta$, $r > \delta^{-1}$ имеем $\mathbf{E}^{(1)}f(x) = \mathbf{E}_r^{(1)}f(x)$. Таким образом, установлено, что $\mathbf{E}^{(1)} = s - \lim\limits_{r\to\infty} \mathbf{E}_r^{(1)}$ в $\mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^+(\Sigma), L_{2,loc}(0,\infty]\right)$. Тем самым полностью доказаны утверждения п.1, 2 для операторов $\mathbf{E}_r^{(1)}$.

Наконец, записав оператор $\mathbf{E}_r^{(0)}$ в виде

$$\mathbf{E}_r^{(0)} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{E}_{\nu,r}^{(0)},$$

$$\mathbf{E}_{\nu,r}^{(0)}f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma_\nu} d\rho\, \theta^-(|\rho|-r)\left[B, \mathfrak{f}(\rho)\exp(\rho xR)f(\rho)\exp(-\rho xR)\mathfrak{f}^{-1}(\rho)\right],$$

заметим, что матрицы-функции $\mathfrak{f}(\rho)$ постоянны на каждом из Σ_ν и, следовательно, справедливы представления

$$\mathbf{E}_{\nu,r}^{(0)}f(x) := \frac{1}{2\pi i}\mathfrak{f}\int\limits_{\Sigma_\nu} d\rho\, \theta^-(|\rho|-r)\exp(\rho xR)\left[R, f(\rho)\right]\exp(-\rho xR)\mathfrak{f}^{-1},$$

или в покомпонентной записи:

$$\left(\mathfrak{f}^{-1}\mathbf{E}_{\nu,r}^{(0)}f(x)\mathfrak{f}\right)_{jk} := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma_\nu} d\rho\,\theta^-(|\rho|-r)\exp(\rho x(R_j-R_k))(R_j-R_k)f_{jk}(\rho).$$

В силу П-верхнетреугольности матрицы $f(\rho)$ для всех j,k, для которых функция $(R_j-R_k)f_{jk}(\rho)$ не обращается тождественно в нуль, справедливо $\mathrm{Re}\rho(R_j-R_k)\le 0$, $\rho\in\Sigma_\nu$. Требуемые утверждения для операторов $\mathbf{E}_{\nu,r}^{(0)}$ теперь следуют из классических теорем Планшереля и Седлецкого [45].

□

Лемма 2.5. *Определим семейство линейных операторов:*

$$\mathbf{F}_r f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\,\theta^-(|\rho|-r)\left[B,\Psi_0(x,\rho)f(\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho)\right],$$

$r>0$. *Тогда*

1. *для каждого* $r>0$ $\mathbf{F}_r\in\mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma),L_{2,loc}(0,\infty]\right)$*;*
2. *существует сильный предел*

$$\mathbf{F} = s-\lim_{r\to\infty}\mathbf{F}_r\in\mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma),L_{2,loc}(0,\infty]\right).$$

Доказательство. Представим оператор в виде $\mathbf{F}_r=\mathbf{F}_r^{(0)}+\mathbf{F}_r^{(1)}$, где:

$$\mathbf{F}_r^{(0)}f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\,\theta^-(|\rho|-r)\theta^-(|\rho x|-1)\left[B,\Psi_0(x,\rho)f(\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho)\right],$$

$$\mathbf{F}_r^{(1)}f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\,\theta^-(|\rho|-r)\theta^+(|\rho x|-1)\left[B,\Psi_0(x,\rho)f(\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho)\right].$$

Поскольку из $f(\cdot)\in\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)$ следует оценка

$$\|\Psi_0(x,\rho)f(\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho)\|\le M\|f(\rho)\|,$$

справедливы неравенства:

$$\|\mathbf{F}_r^{(0)}f(x)\|\le M\int\limits_{\Sigma}|d\rho|\|f(\rho)\|\theta^-(|\rho x|-1)\le Mx^{-1}\|f\|_{\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)},$$

$$\|\mathbf{F}^{(0)}f(x)\|\le Mx^{-1}\|f\|_{\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)},$$

$$\mathbf{F}^{(0)}f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\,\theta^{-}(|\rho x|-1)\left[B, \Psi_0(x,\rho)f(\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho)\right],$$

откуда вытекает:

$$\|\mathbf{F}_r^{(0)}f(\cdot)\|_{L_2(\delta,\infty)} \le M\delta^{-1/2}\|f\|_{\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)},\ \|\mathbf{F}^{(0)}f(\cdot)\|_{L_2(\delta,\infty)} \le M\delta^{-1/2}\|f\|_{\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{F}_r^{(0)} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma), L_{2,loc}(0,\infty]\right),\ \mathbf{F}^{(0)} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma), L_{2,loc}(0,\infty]\right).$$

Более того, аналогичное рассмотрение приводит к неравенству:

$$\|(\mathbf{F}^{(0)} - \mathbf{F}_r^{(0)})f(\cdot)\|_{L_2(\delta,\infty)} \le M\delta^{-1/2}\sup_{\rho\in\Sigma^{+}(r)}\|f(\rho)\|.$$

Поскольку из $f(\cdot) \in \mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)$ следует, в частности, $\lim\limits_{\rho\to\infty} f(\rho) = 0$, из полученного неравенства вытекает $\mathbf{F}_r^{(0)}f \to \mathbf{F}^{(0)}f$ при $r \to \infty$ для любой $f(\cdot) \in \mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)$. Таким образом, справедливость утверждений леммы для операторов $\mathbf{F}_r^{(0)}$ доказана.

Далее, воспользовавшись тем, что $\Psi_0(x,\rho) = E(x,\rho)\gamma(\rho)$, где невырожденная верхнетреугольная матрица $\gamma(\rho)$ постоянна на каждом из лучей Σ_ν, запишем:

$$\mathbf{F}_r^{(1)}f = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_r^{(1)}f_\nu = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{E}_r g_\nu = \mathbf{E}_r g,$$

где:

$$f_\nu(\rho) := \begin{cases} f(\rho), \rho \in \Sigma_\nu, \\ 0, \rho \in \Sigma\setminus\Sigma_\nu, \end{cases}$$

$$g_\nu(\rho) := \gamma_\nu f_\nu(\rho)\gamma_\nu^{-1},\ \gamma_\nu := \gamma(\rho)\big|_{\rho\in\Sigma_\nu},$$

$$g(\rho) := g_\nu(\rho), \rho \in \Sigma_\nu.$$

Ясно, что для любой $f(\cdot) \in \mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)$ имеем $g(\cdot) \in \mathcal{H}_0^{+}(\Sigma)$ и соответствие $\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma) \ni f(\cdot) \to g(\cdot) \in \mathcal{H}_0^{+}(\Sigma)$ есть линейный непрерывный оператор. Справедливость утверждений леммы для операторов $\mathbf{F}_r^{(1)}$ вытекает, таким образом, из Леммы 2.4.

$\square$

Теорема 2.6. *Пусть $v(\rho) = v(q,\rho)$, где $q(\cdot) \in G_0^p$, $\hat{v}(\rho) = v(\rho)v_0^{-1}(\rho) - I$, $\hat{P}(x,\rho) = P^{+}(q,x,\rho) - P^{-}(q,x,\rho)$. Тогда справедлива формула восстановления:*

$$q = \mathbf{\Phi}(\hat{v},\hat{P}) + \mathbf{F}\hat{v}.$$

Доказательство. 1) Пусть потенциал $q(\cdot) \in G_0^p$ удовлетворяет условиям Теоремы 1.7. Тогда в силу Леммы 2.2 и пункта 1 Теоремы 2.5 имеем:

$$q(x) = \lim_{r\to\infty} q_r(x) \tag{2.25}$$

при каждом $x \in (0,\infty)$, где $q_r(x) = (\mathbf{\Phi}_r(\hat{v},\hat{P}))(x) + (\mathbf{F}_r\hat{v})(x)$. В силу Лемм 2.3, 2.5 существуют пределы $\mathbf{\Phi}(\hat{v},\hat{P}) = \lim\limits_{r\to\infty} \mathbf{\Phi}_r(\hat{v},\hat{P})$, $\mathbf{F} = s - \lim\limits_{r\to\infty} \mathbf{F}_r$. Обозначим $q_*(x) = (\mathbf{\Phi}(\hat{v},\hat{P}))(x) + (\mathbf{F}\hat{v})(x)$. Тогда при $r \to \infty$ $q_r \to q_*$ в $L_{2,loc}(0,\infty)$, но отсюда с учетом (2.25) вытекает $q(x) = q_*(x)$ п.в. на $(0,\infty)$. Таким образом, в рассматриваемом случае формула восстановления доказана.

2) Для произвольного потенциала $q(\cdot) \in G_0^p$ рассмотрим сходящуюся к $q(\cdot)$ по норме $\mathcal{X}_p$ последовательность $\{q_m(\cdot)\}_{m\geq 1}$ таких, что для каждого из $q_m(\cdot)$ выполнены условия Теоремы 1.7. Из Утверждения 1.2 следует, что G_0^p открыто в $\mathcal{X}_p$, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что все $q_m(\cdot) \in G_0^p$. Тогда, по доказанному в пункте 1 имеем

$$q_m = \mathbf{\Phi}(\hat{v}_m,\hat{P}_m) + \mathbf{F}\hat{v}_m, \tag{2.26}$$

где $\hat{P}_m(x,\rho) = P^+(q_m,x,\rho) - P^-(q_m,x,\rho)$, $\hat{v}_m(\rho) = v(q_m,\rho)v_0^{-1}(\rho) - I$.

В силу Теорем 2.1–2.3 при $m \to \infty$ $\hat{v}_m(\cdot) \to \hat{v}(\cdot)$ в $\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)$. В силу Леммы 2.5 это влечёт $\mathbf{F}\hat{v}_m \to \mathbf{F}\hat{v}$ в $L_{2,loc}(0,\infty]$.

Далее, из Теоремы 1.11 следует, что при $m \to \infty$ $\hat{P}_m(\cdot,\cdot) \to \hat{P}(\cdot,\cdot)$ в $C\left([0,\infty), L_2(\Sigma)\right)$. В силу Леммы 2.3 отсюда следует $\mathbf{\Phi}(\hat{v}_m,\hat{P}_m) \to \mathbf{\Phi}(\hat{v},\hat{P})$ в $C[0,\infty)$.

Переходя в (2.26) к пределу при $m \to \infty$, получаем требуемую формулу восстановления (понимаемую в общем случае как равенство двух элементов $L_{2,loc}(0,\infty)$).

$\square$

Замечание 2.2. При доказательстве Теоремы 2.5 фактически показано, что операторно-значная функция $\mathbf{A}(\cdot)$ непрерывна по x, причем допускает непрерывное продолжение на $[0,\infty)$: $\mathbf{A}(\cdot) \in C\left([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma))\right)$. Из Теоремы 1.11 следует, что то же справедливо для построенного при доказательстве п.2 Теоремы 2.5 оператора $\tilde{\mathbf{A}}(x)$: $\tilde{\mathbf{A}}(\cdot) \in C\left([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma))\right)$. Отсюда вытекает, в частности, обратимость оператора $\mathbf{A}(0)$.

§2.3 Характеризация данных рассеяния потенциалов класса G_0^p

Вопрос, изучаемый в данном параграфе, можно сформулировать следующим образом. Пусть дана некоторая матрица-функция $v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$. Выполнение каких условий является необходимым и достаточным для того, чтобы $v(\cdot)$ являлась данными рассеяния некоторого оператора вида (5) с потенциалом $q(\cdot) \in G_0^p$?

Во избежание дублирования обозначений, мы будем использовать жирный шрифт для обозначения данных рассеяния, т.е., данные рассеяния для оператора (5) с потенциалом $q(\cdot)$ будут обозначаться $\mathbf{v}(q, \cdot)$.

Определим следующий класс матриц-функций, заданных на Σ': будем говорить, что матрица-функция $v = v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ принадлежит классу $\mathbf{V}$, если

1. $v(\cdot) - v_0(\cdot) \in \mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)$;
2. нетривиальные диагональные блоки матрицы $v(\rho)$ расположены в строках с номерами k и $k+1$, где $k \in I_-$, и имеют вид

$$\begin{pmatrix} v_{kk} & 0 \\ 1 & v_{k+1,k+1} \end{pmatrix},$$

причем $v_{kk}v_{k+1,k+1} = -1$.

Из результатов §2.1 следует, что, если $v(\cdot) = \mathbf{v}(q, \cdot)$ для некоторого $q(\cdot) \in G_0^p$, то необходимо $v(\cdot) \in \mathbf{V}$. Мы будем рассматривать $\mathbf{V}$ как метрическое пространство с метрикой $dist(v_1, v_2) := \|v_1 - v_2\|_{\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)}$, корректно определенной в силу равенства $v_1 - v_2 = (v_1 - v_0) - (v_2 - v_0)$.

Для заданной матрицы-функции $v = v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ определим:

$$\hat{v}(\rho) := v(\rho)v_0^{-1}(\rho) - I,$$

$$V = V(v, x, \rho) := \Psi_0(x, \rho)v(\rho)v_0^{-1}(\rho)(\Psi_0(x, \rho))^{-1},$$

$$\hat{V}(v, x, \rho) := V(v, x, \rho) - I = \Psi_0(x, \rho)\hat{v}(\rho)(\Psi_0(x, \rho))^{-1}.$$

Из непрерывности и ограниченности в $[0, \infty) \times \overline{\mathcal{S}}_\nu$ ($\nu = \overline{1, N}$) матриц-функций $\tilde{\Psi}_0(x, \rho)$, $\tilde{\Psi}_0^{-1}(x, \rho)$ следует (см. также Замечание 2.1), что

$$\hat{V}(v, \cdot, \cdot) \in BC([0, \infty), \mathcal{H}_0(\Sigma))$$

для любой $v(\cdot) \in \mathbf{V}$, более того,

$$\hat{V}(\cdot,\cdot,\cdot) \in C(\mathbf{V}, BC([0,\infty), \mathcal{H}_0(\Sigma))).$$

Введем зависящие от параметров $v(\cdot) \in \mathbf{V}$, $x \in [0,\infty)$ операторы

$$\mathbf{A}(v,x)f(\rho) := C^+ f(\rho) - (C^- f)(\rho)V(v,x,\rho) = f(\rho) - (C^- f)(\rho)\hat{V}(v,x,\rho).$$

Из свойств матриц-функций $\hat{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$, $V(\cdot,\cdot,\cdot)$ следует, что для любых $v(\cdot) \in \mathbf{V}$, $x \in [0,\infty)$ $\mathbf{A}(v,x) \in \mathcal{L}(L_2(\Sigma))$; более того, при каждом фиксированном $v(\cdot) \in \mathbf{V}$ имеем $\mathbf{A}(v,\cdot) \in BC\left([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma))\right)$, причем

$$\mathbf{A}(\cdot,\cdot) \in C\left(\mathbf{V}, BC\left([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma))\right)\right).$$

Далее, определим (при тех значениях параметров, при которых правая часть имеет смысл):

$$\mathbf{p}(v,x,\cdot) := (\mathbf{A}(v,x))^{-1}\hat{V}(v,x,\cdot),$$

$$\mathbf{q}(v,\cdot) := \mathbf{\Phi}(\hat{v}(\cdot), \mathbf{p}(v,\cdot,\cdot)) + \mathbf{F}\hat{v}(\cdot).$$

Следующая теорема содержит основной результат данного параграфа.

Теорема 2.7. *Пусть $v(\cdot) \in \mathbf{V}$. Для того, чтобы $v(\cdot) = \mathbf{v}(q,\cdot)$ для некоторого $q(\cdot) \in G_0^p$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *для каждого $x \in [0,\infty)$ оператор $\mathbf{A}(v,x)$ обратим;*
2. *для каждого $k = \overline{1,n}$ найдется функция $\delta_k(\rho)$, $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, аналитическая в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ и такая, что:*
   - *для каждого $\nu = \overline{1,N}$ существует непрерывное продолжение функции $\rho^{\mu_k}\delta_k(\rho)$ в $\overline{\mathcal{S}}_\nu$;*
   - *$\rho^{\mu_k}\delta_k(\rho)$ не обращается в нуль ни для каких $\rho \in \overline{\mathcal{S}}_\nu$, $\nu = \overline{1,N}$;*
   - *при $\rho \in \Sigma'$ справедливы формулы сопряжения $\delta_k^-(\rho) = v_{kk}(\rho)\delta_k^+(\rho)$;*
   - *при $\rho \to \infty$, $\rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$ справедлива асимптотика $\delta(\rho) = \delta_0(\rho)(I + o(1))$, кроме того, $\delta^\pm(\cdot)(\delta_0^\pm(\cdot))^{-1} - I \in L_2(\Sigma)$. Здесь $\delta_0(\rho)$ – диагональная матрица, такая что $\overset{\circ}{\Phi}_0(x,\rho) = \Psi_0(x,\rho)\delta_0(\rho)$.*
3. *$\mathbf{q}(v,\cdot) \in \mathcal{X}_p$.*

Доказательству Теоремы 2.7 предпошлём ряд лемм, некоторые из которых могут представлять также и самостоятельный интерес.

Для заданной матрицы-функции $v(\cdot) \in \mathbf{V}$ определим строго верхнетреугольные Π-диагональные матрицы-функции $w_\pm(\cdot)$ следующим образом: ненулевые диагональные блоки матриц $w_\pm(\rho)$ соответствуют нетривиальным диагональным блокам матрицы $v(\rho)$, при этом диагональному блоку

$$\begin{pmatrix} v_{kk} & 0 \\ 1 & v_{k+1,k+1} \end{pmatrix},$$

матрицы $v(\rho)$ соответствует диагональный блок вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & -v_{kk} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицы $w_-(\rho)$ и блок вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & v_{k+1,k+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицы $w_+(\rho)$. Отметим, что по построению справедливо равенство:

$$v(\rho) = (I - w_-(\rho))\Pi(\rho)(I + w_+(\rho)). \tag{2.27}$$

Обозначим $\mathbf{V}_{00} := (v_0 + C_{00}^\infty(\Sigma)) \cap \mathbf{V}$.

Лемма 2.6. *Пусть $h_\lambda(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ – функция вида*

$$h_\lambda(\rho) = \exp(-i\alpha_\nu \lambda \rho),$$

где $\alpha_\nu, \nu = \overline{1, N}$ – комплексные константы, такие что $\alpha_\nu \rho \in (0, \infty)$ для всех $\nu = \overline{1, N}$, $\rho \in \Sigma_\nu$. Тогда для любой $f(\cdot) \in C_{00}^\infty(\Sigma)$ справедлива оценка

$$\left\| C^\pm \left(h_\lambda(\cdot) f(\cdot) \right) \right\|_{L_\infty(\Sigma)} = O(|\lambda|^{-m})$$

при $\pm\lambda \to \infty$, где целое неотрицательное число m произвольно.

Доказательство.

Утверждение леммы близко к утверждению Леммы 8.1 из [67], тем не менее, поскольку формулировка заключения содержит ряд существенных отличий, мы приведем независимое доказательство.

1) Рассмотрим предварительно аналогичное утверждение для случая, когда в качестве контура интегрирования выступает вещественная ось. А именно, рассмотрим операторы Коши:

$$(C_0f)(\rho) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{\zeta-\rho}f(\zeta),\ \rho\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ (C_0^{\pm}f)(\rho) := (C_0f)^{\pm}(\rho),\ \rho\in\mathbb{R}.$$

Для произвольной бесконечно-дифференцируемой финитной функции $f(\cdot)$ определим функцию $f_\lambda(\cdot)$ по формуле:

$$f_\lambda(\rho) := \exp(-i\lambda\rho)f(\rho),\ \rho\in\mathbb{R},$$

зависящую от параметра $\lambda\in\mathbb{R}$. Покажем, что

$$\left\|C_0^{\pm}f_\lambda\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = O(|\lambda|^{-m})$$

при $\pm\lambda\to\infty$, где m – произвольное неотрицательное целое число.

Действительно, для любой функции $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$ имеем:

$$(C_0^{\pm}f)\hat{}(\xi) = \theta^{\pm}(\xi)\hat{f}(\xi),$$

где $\hat{f}(\cdot)$ обозначает (только в рамках настоящего рассуждения) преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\xi\rho)d\xi f(\xi).$$

Поскольку

$$\hat{f}_\lambda(\xi) = \hat{f}(\xi+\lambda),$$

имеем:

$$(C_0^{\pm}f_\lambda)(\xi) = \theta^{\pm}(\xi)\hat{f}(\xi+\lambda).$$

Для бесконечно-дифференцируемых финитных $f(\cdot)$ преобразование Фурье $\hat{f}(\cdot)$ принадлежит пространству Шварца быстро убывающих функций, откуда следуют оценки:

$$\left\|C_0^{+}f_\lambda\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le \left\|\left(C_0^{+}f_\lambda\right)\hat{}\,\right\|_{L_1(\mathbb{R})} \le \|\hat{f}\|_{L_1(\lambda,\infty)} \le \frac{M}{\lambda^m},$$

$$\left\|C_0^{-}f_\lambda\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le \left\|\left(C_0^{-}f_\lambda\right)\hat{}\,\right\|_{L_1(\mathbb{R})} \le \|\hat{f}\|_{L_1(-\infty,\lambda)} \le \frac{M}{|\lambda|^m}$$

при $\pm\lambda \to \infty$, где целое неотрицательное m произвольно.

2) Перейдем к доказательству утверждения леммы. Записав интересующее нас выражение в виде:

$$C\left(h_\lambda(\cdot)f(\cdot)\right)(\rho) = \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu(\lambda,\rho),\ F_\nu(\lambda,\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma_\nu}\frac{d\zeta}{\zeta-\rho}\exp(-i\lambda\alpha_\nu\zeta)f(\zeta),$$

рассмотрим по отдельности каждую из функций $F_\nu(\lambda,\rho)$. Пусть луч Σ_ν представлен в виде $\Sigma_\nu = \{\rho = \omega_\nu t, t \in (0,\infty)\}$ с произвольной фиксированной $\omega_\nu \neq 0$. Пользуясь гладкостью и финитностью функции $f(\cdot)$ (с учетом $0 \notin \mathrm{supp} f$), выполнив необходимое количество раз интегрирование по частям, получим оценку:

$$\int\limits_{\Sigma_\nu}\frac{d\zeta}{\zeta-\rho}\exp(-i\lambda\alpha_\nu\zeta)f(\zeta) \to 0$$

при $\pm\lambda \to \infty$ равномерно по ρ : $\left|\arg(\rho\omega_\nu^{-1})\right| > \varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$. Таким образом, при $\pm\lambda \to \infty$ имеем:

$$\|F_\nu(\lambda,\cdot)\|_{L_\infty(\Sigma\setminus\Sigma_\nu)} = O(|\lambda|^{-m}).$$

Наконец, при $\rho \in \Sigma_\nu$, применяем результат пункта 1, заметив, что:

$$(F_\nu(\lambda,\cdot))^{\pm}(\rho) = (C_0^{\pm}\tilde f_\nu(\lambda,\cdot))(\rho\omega_\nu^{-1}),$$

где

$$\tilde f_\nu(\lambda,r) = \begin{cases} f(\omega_\nu r)\exp(-i\alpha_\nu\omega_\nu\lambda r),\ r>0 \\ 0, r \le 0 \end{cases}$$

и в условиях леммы $\tilde f_\nu(\lambda,\cdot)$ – бесконечно-дифференцируемая финитная функция.

$\square$

Лемма 2.7. *Определим матрицы функции $P_\pm = P_\pm(v,x,\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ по формулам:*

$$P_\pm := \mathfrak{f}^{\pm}\exp(\rho x R^{\pm})(I+\hat w_\pm)\exp(-\rho x R^{\pm})(\mathfrak{f}^{\pm})^{-1},$$

где $\hat w_\pm := w_\pm - w_\pm^0$, $w_\pm$, $w_\pm^0$ – матрицы из представлений (2.27) и аналогичного представления для $v_0(\cdot)$: $v_0(\rho) = (I - w_-^0(\rho))\Pi(\rho)(I + w_+^0(\rho))$.

Введем оператор $\mathbf{B}f := C^+(fP_+^{-1})P_+ - C^-(fP_+^{-1})P_-$. Предположим, что $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{00}$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\|\mathbf{B}(v,x)\mathbf{A}(v,x) - Id\| = 0,$$

где $\|\cdot\|$ *- операторная норма в* $\mathcal{L}(L_2(\Sigma))$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{00}$; далее обозначаем $V(x,\rho) := V(v,x,\rho)$, $\mathbf{B}(x) := \mathbf{B}(v,x)$, $\mathbf{A}(x) := \mathbf{A}(v,x)$

1) Пусть $f(x,\rho) = (\mathbf{A}(x)\varphi)(\rho) = (C^+\varphi)(\rho) - (C^-\varphi)(\rho)V(x,\rho)$, где $\varphi(\cdot) \in L_2(\Sigma)$ – произвольна.

Для подсчёта $\mathbf{B}(x)f(x,\cdot)$, заметим, прежде всего, что справедливо равенство:

$$fP_+^{-1} = \varphi P_+^{-1} + (C^-\varphi)(P_+^{-1} - P_-^{-1}) - (C^-\varphi)V_1, \tag{2.28}$$

где

$$V_1(x,\rho) := V(x,\rho)P_+^{-1}(x,\rho) - P_-^{-1}(x,\rho), \quad \rho \in \Sigma'. \tag{2.29}$$

Далее, для произвольного фиксированного $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ имеем:

$$C\left((C^-\varphi)(P_+^{-1} - P_-^{-1})\right)(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} \frac{d\xi}{\xi - \rho}(C^-\varphi)(\xi)(P_+^{-1} - P_-^{-1})(\xi) =$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\xi (C^-\varphi)(\xi)F_\rho(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\zeta \varphi(\zeta)(C^+F_\rho)(\zeta),$$

где:

$$F_\rho(\xi) := \frac{1}{\rho - \xi}(P_+^{-1}(\xi) - P_-^{-1}(\xi)),\ \rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma, \xi \in \Sigma$$

и произвольный фиксированный $x \geq 0$ для краткости опущен. Определим функцию $\tilde{P}(x,\rho) := I + C(P_+^{-1}(x,\cdot) - P_-^{-1}(x,\cdot))(\rho)$, $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$. Заметим, что:

$$P_\pm^{-1}(x,\rho) = \mathfrak{f}^\pm(\rho)\exp(\rho x R^\pm)(I - \hat{w}_\pm(\rho))\exp(-\rho x R^\pm)(\mathfrak{f}^\pm(\rho))^{-1}, \tag{2.30}$$

откуда, с учетом финитности функций $\hat{w}_\pm(\cdot)$ следует, в частности, что $\tilde{P}(x,\rho) := I + o(1)$ при $\rho \to \infty$. Используя рассуждения, аналогичные приведенным ранее (например, при доказательстве п. 1 Теоремы 2.5), выводим для $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, $\zeta \neq \rho$ равенство:

$$(CF_\rho)(\zeta) = \frac{1}{\rho - \zeta}(\tilde{P}(\zeta) - \tilde{P}(\rho))$$

(здесь и далее произвольный фиксированный $x \geq 0$ также для краткости опущен). Переходя к пределу, получаем:

$$(C^+F_\rho)(\zeta) = \frac{1}{\rho - \zeta}(\tilde{P}^+(\zeta) - \tilde{P}(\rho)),$$

что дает окончательно:

$$C\left((C^-\varphi)(P_+^{-1}-P_-^{-1})\right)(\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma}d\zeta\varphi(\zeta)\left\{\frac{1}{\rho-\zeta}\tilde{P}^+(\zeta)-\frac{1}{\rho-\zeta}\tilde{P}(\rho)\right\}=$$

$$(C\varphi)(\rho)\tilde{P}(\rho)-\Big(C(\varphi\tilde{P}^+)\Big)(\rho)$$

при $\rho\in\mathbb{C}\setminus\Sigma$. Переходя к соответствующим пределам, получаем:

$$C^\pm\left((C_-\varphi)(P_+^{-1}-P_-^{-1})\right)=(C^\pm\varphi)\tilde{P}^\pm-C^\pm(\varphi\tilde{P}^+).$$

Пользуясь полученным равенством и соотношением (2.28), приходим к равенству:

$$C^\pm(fP_+^{-1})=C^\pm(\varphi P_+^{-1})+(C^\pm\varphi)\tilde{P}^\pm-C^\pm(\varphi\tilde{P}^+)-C^\pm\left((C^-\varphi)V_1\right),\qquad(2.31)$$

пользуясь которым подсчитаем $\mathbf{B}f=C^+(fP_+^{-1})P_+-C^-(fP_+^{-1})P_-$. Имеем:

$$C^+(\varphi P_+^{-1})P_+-C^-(\varphi P_+^{-1})P_-=\varphi+\left(C^-(\varphi P_+^{-1})\right)(P_+-P_-);\qquad(2.32)$$

$$C^+(\varphi)\tilde{P}^+P_+-C^-(\varphi)\tilde{P}^-P_-=\varphi\tilde{P}^+P_++(C^-\varphi)(\tilde{P}^+P_+-\tilde{P}^-P_-);\qquad(2.33)$$

$$C^-(\varphi\tilde{P}^+)P_--C^+(\varphi\tilde{P}^+)P_+=-\varphi\tilde{P}^+P_++\Big(C^-(\varphi\tilde{P}^+)\Big)(P_--P_+).\qquad(2.34)$$

Из соотношений (2.31), (2.32), (2.33), (2.34) следует:

$$\mathbf{BA}\varphi=\mathbf{B}f=\varphi+\Big(C^-(\varphi(P_+^{-1}-\tilde{P}^+))\Big)(P_+-P_-)+$$
$$(C^-\varphi)(\tilde{P}^+P_+-\tilde{P}^-P_-)+C^-\left((C^-\varphi)V_1\right)P_--C^+\left((C^-\varphi)V_1\right)P_+.\quad(2.35)$$

2) В силу П-диагональности матрицы $v(\rho)$ справедлива оценка:

$$\|P_+(x,\rho)-P_-(x,\rho)\|\le(\|w_+\|_{L_\infty(\Sigma)}+\|w_-\|_{L_\infty(\Sigma)}),$$

равномерная по $(x,\rho)\in[0,\infty)\times\Sigma'$. Таким образом, имеем:

$$\left\|\Big(C^-(\varphi(P_+^{-1}(x,\cdot)-\tilde{P}^+(x,\cdot)))\Big)(P_+-P_-)(x,\cdot)\right\|_{L_2(\Sigma)}\le$$
$$M\|\varphi\|_{L_2(\Sigma)}\left\|P_+^{-1}(x,\cdot)-\tilde{P}^+(x,\cdot)\right\|_{L_\infty(\Sigma)},\quad(2.36)$$

где константа M не зависит от x.

Далее, из определения функции $\tilde{P}(x,\rho)$, с учетом финитности и гладкости функций $P_{\pm}^{-1}(x,\cdot)-I$ вытекает равенство:

$$\tilde{P}^{+}(x,\rho)=I+\left(C^{+}(P_{+}^{-1}(x,\cdot)-I)\right)(\rho)-\left(C^{+}(P_{-}^{-1}(x,\cdot)-I)\right)(\rho),\ \ \rho\in\Sigma'.$$

Вычитая из данного соотношения очевидное тождество (эквивалентное формуле Сохоцкого)

$$P_{+}^{-1}(x,\rho)-I=\left(C^{+}(P_{+}^{-1}(x,\cdot)-I)\right)(\rho)-\left(C^{-}(P_{+}^{-1}(x,\cdot)-I)\right)(\rho),$$

приходим к соотношению:

$$P_{+}^{-1}(x,\rho)-\tilde{P}^{+}(x,\rho)=\left(C^{+}(P_{-}^{-1}(x,\cdot)-I)\right)(\rho)-\left(C^{-}(P_{+}^{-1}(x,\cdot)-I)\right)(\rho)$$

Из представления (2.30) следует, что при каждом $\rho\in\Sigma_{\nu}$ (где $\nu\in\{1,\ldots,n\}$ произвольно) ненулевые элементы матриц

$$(\mathfrak{f}^{\pm})^{-1}\left(P_{\pm}^{-1}(x,\rho)-I\right)\mathfrak{f}^{\pm}$$

имеют вид:

$$-(\hat{\omega}_{\pm}(\rho))_{k,k+1}\exp(\rho x(R_k^{\pm}-R_{k+1}^{\pm})),$$

где $k\in I_{-}$ (т.е., $\mathrm{Re}(\rho R_{k-1}^{-})<\mathrm{Re}(\rho R_{k}^{-})=\mathrm{Re}(\rho R_{k+1}^{-})$ и $R_k^{\pm}=R_{k+1}^{\mp}$). Таким образом, число $\rho(R_k^{\pm}-R_{k+1}^{\pm})$ чисто мнимое и, как нетрудно заметить, $\pm\mathrm{Im}(\rho(R_k^{\pm}-R_{k+1}^{\pm}))>0$. Переписав $\rho x(R_k^{\pm}-R_{k+1}^{\pm})$ в виде $\rho x(R_k^{\pm}-R_{k+1}^{\pm})=-i\alpha_{\nu}\lambda\rho$, где $\alpha_{\nu}=\mp i(R_k^{\pm}-R_{k+1}^{\pm})$, $\lambda=\mp x$, применяем Лемму 2.6, что возможно, поскольку $\alpha_{\nu}\rho=\pm\mathrm{Im}(\rho(R_k^{\pm}-R_{k+1}^{\pm}))>0$ для всех $\rho\in\Sigma_{\nu}$.

Лемма 2.6 гарантирует, что

$$\left\|C^{\pm}(P_{\mp}^{-1}(x,\cdot)-I)\right\|_{L_{\infty}(\Sigma)}\to 0,$$

при $\pm\lambda=\pm(\pm x)=x\to\infty$, откуда следует, что

$$\left\|P_{+}^{-1}(x,\cdot)-\tilde{P}^{+}(x,\cdot)\right\|_{L_{\infty}(\Sigma)}\to 0$$

при $x\to\infty$.

3) Аналогично, переписав функцию $\tilde{P}^{+}P_{+}-\tilde{P}^{-}P_{-}$ в виде:

$$\tilde{P}^{+}P_{+}-\tilde{P}^{-}P_{-}=\left(C^{+}(I-P_{-}^{-1})+C^{-}(P_{+}^{-1}-I)\right)(P_{+}-P_{-})$$

и повторяя рассуждения предыдущего пункта, получаем:

$$\left\|(C^-\varphi)(\tilde P^+P_+ - \tilde P^-P_-)\right\|_{L_2(\Sigma)} \le M\|\varphi\|_{L_2(\Sigma)}\left\|\tilde P^+P_+ - \tilde P^-P_-\right\|_{L_\infty(\Sigma)},$$

в то время как:

$$\left\|\tilde P^+P_+ - \tilde P^-P_-\right\|_{L_\infty(\Sigma)} \le M\left\|C^+(I-P_-^{-1}) + C^-(P_+^{-1}-I)\right\|_{L_\infty(\Sigma)},$$

и, по доказанному выше, правая часть полученной оценки стремится к нулю при $x\to\infty$.

4) Рассмотрим функцию $V_1(x,\rho)$. Прежде всего, переписав в виде:

$$V_1(x,\rho) = \hat V(x,\rho)P_+^{-1}(x,\rho) + P_+^{-1}(x,\rho) - P_-^{-1}(x,\rho),$$

убеждаемся, что в условиях леммы функция $V_1(x,\cdot)$ финитна, причём $\mathrm{supp}V_1(x,\cdot)\subset\{r_0\le|\rho|\le r_1\}$, где r_0, r_1 не зависят от x.

Далее, представим функцию в виде:

$$V_1(x,\rho) = \left(V(x,\rho) - P_-^{-1}(x,\rho)P_+(x,\rho)\right)P_+^{-1}(x,\rho) = \tilde V_1(x,\rho)P_+^{-1}(x,\rho). \quad (2.37)$$

Поскольку функция $P_+^{-1}(x,\rho)$ равномерно ограничена по $(x,\rho)\in[0,\infty)\times\Sigma'$, достаточно рассмотреть функцию $\tilde V_1(x,\rho)$.

Для решений типа Вейля $\Psi_0^\pm(x,\rho)$ простейшей задачи имеет место представление:

$$\Psi_0^\pm(x,\rho) = E^\pm(x,\rho)(\gamma^\pm(\rho) + \hat\gamma^\pm(\rho)), \quad (2.38)$$

где $\gamma^\pm(\rho)$ – П-диагональная, $\hat\gamma^\pm(\rho)$ – П-строго верхнетреугольная матрицы; нетривиальные диагональные блоки матрицы $\gamma^\pm(\rho)$ имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma^\pm_{k,k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

где $k\in I_-$; матрицы $\gamma^\pm(\rho)$, $\hat\gamma^\pm(\rho)$ постоянны на каждом луче Σ_ν и, следовательно, ограничены (в частности) на Σ'. Заметим, что:

$$(\gamma^\pm(\rho) + \hat\gamma^\pm(\rho))^{-1} = (\gamma^\pm(\rho))^{-1} + \tilde\gamma^\pm(\rho),$$

где $\tilde\gamma^\pm(\rho)$ – строго П- верхнетреугольная матрица, ограниченная по $\rho\in\Sigma'$, и из (2.38) следует:

$$\left(\Psi_0^-(x,\rho)\right)^{-1} = \left((\gamma^-(\rho))^{-1} + \tilde\gamma^-(\rho)\right)\left(E^-(x,\rho)\right)^{-1}. \quad (2.40)$$

Поскольку сектор Стокса при построении решений $E(x,\rho)$ можно выбрать таким, чтобы он включал оба сектора $\mathcal{S}_\nu$, $\mathcal{S}_{\nu+1}$, можно считать, что $E^+(x,\rho) = E^-(x,\rho)\Pi(\rho)$ для любого $\rho \in \Sigma_\nu$ при произвольном ν. Тогда, из (2.38), (2.40) следует:

$$v_0 = (\Psi_0^-)^{-1}\Psi_0^+ = ((\gamma^-)^{-1} + \tilde{\gamma}^-)\Pi(\gamma^+ + \hat{\gamma}^+) = (\gamma^-)^{-1}\Pi\gamma^+ + \tilde{v}_0,$$

где $\tilde{v}_0$ – строго Π-верхнетреугольная матрица. С другой стороны, известно, что матрица v_0 Π-диагональна и представима в виде (2.27). С учетом блочной структуры (2.39) матриц $\gamma^\pm(\rho)$ это означает, что $\gamma^\pm = I + w_\pm^0$. Подставляя в представления (2.38), (2.40), получим представление для $V(x,\rho)$ в следующем виде:

$$V(x,\rho) = E^-(x,\rho)(I + w_-^0(\rho) + \hat{\gamma}(\rho))v(\rho)((I + w_+^0(\rho))^{-1} + \tilde{\gamma}^+(\rho))(E^+(x,\rho))^{-1},$$

которое с учетом (2.27) и вытекающих из блочной структуры соответствующих матриц равенств $(I+w_+)(I+w_+^0)^{-1} = I+\hat{w}_+$, $(I+w_-^0)(I-w_-) = (I-w_-^0)^{-1}(I-w_-) = I - \hat{w}_-$ может быть преобразовано следующим образом:

$$V = E^-(I - \hat{w}_-)\Pi(I + \hat{w}_+)(E^+)^{-1} + E^-\hat{\Gamma}(E^+)^{-1}, \tag{2.41}$$

где матрица $\hat{\Gamma}(\rho)$ строго Π-верхнетреугольная и ограниченная по $\rho \in \Sigma'$. Из строгой Π- верхнетреугольности и ограниченности $\hat{\Gamma}(\rho)$ вытекает равномерная по $(x,\rho) \in [0,\infty) \times \Sigma : |\rho x| > 1$ оценка:

$$E^-(x,\rho)\hat{\Gamma}(\rho)(E^+(x,\rho))^{-1} = O\left(\exp(-\tau|\rho|x)\right) \tag{2.42}$$

с некоторым положительным τ. Далее, используя асимптотики

$$E^\pm(x,\rho) = \left(\mathfrak{f}^\pm(\rho) + O((\rho x)^{-1})\right)\exp(\rho x R^\pm),$$

где $O(\cdot)$ равномерно по $(x,\rho) : |\rho x| > 1$, получаем асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} &E^-(x,\rho)(I - \hat{w}_-(\rho))\Pi(\rho)(I + \hat{w}_+(\rho))(E^+(x,\rho))^{-1} = \\ &\qquad \mathfrak{f}^-(\rho)\exp(\rho x R^-)(I - \hat{w}_-(\rho))\Pi(\rho)(I + \hat{w}_+(\rho))\exp(-\rho x R^+)(\mathfrak{f}^+(\rho))^{-1} \\ &\qquad\qquad + O\left((\rho x)^{-1}\right), \end{aligned} \tag{2.43}$$

где $O(\cdot)$ также равномерно по $(x,\rho) : |\rho x| > 1$.

Наконец, из определения матриц $P_{\pm}(x,\rho)$ и равенства (2.30) непосредственным вычислением получаем:

$$P_-^{-1}(x,\rho)P_+(x,\rho) =$$
$$\mathfrak{f}^-(\rho)\exp(\rho x R^-)(I-\hat{w}_-(\rho))\Pi(\rho)(I+\hat{w}_+(\rho))\exp(-\rho x R^+)(\mathfrak{f}^+(\rho))^{-1}. \quad (2.44)$$

Объединяя (2.41), (2.42), (2.43) и (2.44), приходим к оценке

$$\|\tilde{V}_1(x,\rho)\| \le \frac{M}{|\rho x|}, \ |\rho x| > 1$$

с константой M, не зависящей от x, ρ. В силу (2.37) аналогичная оценка справедлива и для функции $V_1(x,\rho)$. Поскольку, как отмечалось выше, $V_1(x,\rho) = 0$ при всех $\rho \in \Sigma' : |\rho| < r_0$, где r_0 не зависит от x, из полученной оценки следует, что $\|V_1(x,\cdot)\|_{L_\infty(\Sigma)} \to 0$ при $x \to \infty$. Поскольку

$$\left\| C^{\pm}\left((C^-\varphi(\cdot))V_1(x,\cdot)\right) P_{\pm}(x,\cdot)\right\|_{L_2(\Sigma)} \le$$

$$M\|V_1(x,\cdot)\|_{L_\infty(\Sigma)}\|P_{\pm}(x,\cdot)\|_{L_\infty(\Sigma)}\|\varphi\|_{L_2(\Sigma)},$$

с учетом представления (2.35) и доказанного в пунктах 2 и 3, полученный результат завершает доказательство леммы.

□

Обозначим через $\mathbf{V}_0$ множество таких $v(\cdot) \in \mathbf{V}$, что оператор $\mathbf{A}(v,x)$ обратим в $L_2(\Sigma)$ для всех $x \in [0,\infty)$ (иначе говоря, таких $v(\cdot) \in \mathbf{V}$, для которых выполнено условие 1 Теоремы 2.7).

Лемма 2.8. *Для каждой* $v(\cdot) \in \mathbf{V}_0$ *справедливо включение* $(\mathbf{A}(v,\cdot))^{-1} \in BC\left([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma))\right)$*; более того,* $(\mathbf{A}(\cdot,\cdot))^{-1} \in C\left(\mathbf{V}_0, BC\left([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma))\right)\right)$.

Доказательство.

1) Пусть $\mathbf{A}(x) := \mathbf{A}(v,x)$, где $v(\cdot) \in \mathbf{V}_0$ произвольна. Покажем, что $(\mathbf{A}(\cdot))^{-1} \in BC([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma)))$. Заметим, что включение

$$(\mathbf{A}(\cdot))^{-1} \in C([0,T], \mathcal{L}(L_2(\Sigma)))$$

для любого конечного $T > 0$ очевидно. Таким образом, для доказательства утверждения $(\mathbf{A}(\cdot))^{-1} \in BC\left([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma))\right)$ достаточно показать, что

$$\sup_{x\in[T,\infty)} \|(\mathbf{A}(x))^{-1}\| < \infty \quad (2.45)$$

для некоторого $T > 0$.

Пусть $\{v_m(\cdot)\}$ - последовательность из $\mathbf{V}_{00}$ (не обязательно лежащая в $\mathbf{V}_0$) такая, что $v_m(\cdot) \to v(\cdot)$ в метрике $\mathbf{V}$, не нарушая общности, можно полагать, что $\sup\limits_m \|v_m\|_{L_\infty(\Sigma)} =: M_0 < \infty$. Пусть $\mathbf{A}_m(x) := \mathbf{A}(v_m, x)$, $\mathbf{B}_m(x) := \mathbf{B}(v_m, x)$, где операторы $\mathbf{B}(\cdot,\cdot)$ определены в Лемме 2.7.

Поскольку $\mathbf{A}(\cdot,\cdot) \in C\left(\mathbf{V}, BC\left([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma))\right)\right)$, из сходимости $v_m(\cdot) \to v(\cdot)$ в метрике $\mathbf{V}$ следует, что $\mathbf{A}_m(\cdot) \to \mathbf{A}(\cdot)$ по норме $BC([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma)))$. Далее, из конструкции оператора $\mathbf{B}(\cdot,\cdot)$ следует оценка $\|\mathbf{B}_m(x)\| \leq M_0$ для всех m и всех $x \in [0,\infty)$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x,\cdot) = (\mathbf{A}(x))^{-1} f(\cdot)$, где $f(\cdot) \in L_2(\Sigma)$ – произвольная. Иначе говоря, мы предполагаем, что $\varphi(x,\cdot)$ является решением уравнения:

$$\mathbf{A}(x)\varphi(x) = f.$$

Действуя на данное уравнение оператором $\mathbf{B}_m(x)$, преобразуем его к виду:

$$(Id + \mathbf{H}_m(x) + \mathbf{B}_m(x)\hat{\mathbf{A}}_m(x))\varphi(x) = \mathbf{B}_m(x) f, \tag{2.46}$$

где $\hat{\mathbf{A}}_m(x) = \mathbf{A}(x) - \mathbf{A}_m(x)$, $\mathbf{H}_m(x) = \mathbf{B}_m(x)\mathbf{A}_m(x) - Id$ и в силу Леммы 2.7 для каждого фиксированного m имеем:

$$\lim_{x\to\infty} \|\mathbf{H}_m(x)\| = 0. \tag{2.47}$$

Выберем и зафиксируем m такое, что $\|\mathbf{B}_m(x)\hat{\mathbf{A}}_m(x)\| < 1/4$ для всех $x \in [0,\infty)$, что возможно, поскольку $\mathbf{A}_m(\cdot) \to \mathbf{A}(\cdot)$ в $BC([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma)))$ и $\|\mathbf{B}_m(x)\| \leq M_0$ для всех m и всех $x \in [0,\infty)$.

Далее, при выбранном m в силу (2.47) найдется $T > 0$ такое, что

$$\sup_{x\in[T,\infty)} \|\mathbf{H}_m(x)\| < 1/4.$$

Тогда из (2.46) при всех $x \geq T$ будет следовать оценка:

$$\|\varphi(x)\| \leq 2\|\mathbf{B}_m(x)\|\|f\| \leq 2M_0\|f\|,$$

из которой в силу произвольности $f \in L_2(\Sigma)$ вытекает (2.45).

2) Убедимся теперь, что $(\mathbf{A}(\cdot,\cdot))^{-1} \in C\left(\mathbf{V}_0, BC\left([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma))\right)\right)$. Пусть $\{v_m(\cdot)\}$ - произвольная последовательность из $\mathbf{V}_0$, сходящаяся к $v(\cdot) \in \mathbf{V}_0$. Тогда, в обозначениях аналогичных предыдущему пункту, имеем $\mathbf{A}_m(x) \to \mathbf{A}(x)$

в $\mathcal{L}(L_2(\Sigma))$ равномерно по $x \in [0,\infty)$, при этом по доказанному выше имеем:

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \|(\mathbf{A}(x))^{-1}\| =: M_1 < \infty.$$

Тогда при всех достаточно больших m имеем $\|\hat{\mathbf{A}}_m(x)\| \le \varepsilon := M_1^{-1}/2$ для любых $x \in [0,\infty)$ и:

$$\|(\mathbf{A}_m(x))^{-1} - (\mathbf{A}(x))^{-1}\| \le \frac{M_1^2}{1 - M_1\varepsilon}\|\hat{\mathbf{A}}_m(x)\|.$$

$\square$

Из полученного результата непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.9. $\mathbf{p}(\cdot,\cdot,\cdot) \in C(\mathbf{V}_0, BC([0,\infty), L_2(\Sigma)))$.

Определим

$$\psi(v,x,\rho) := (I + (C\mathbf{p}(v,x,\cdot))(\rho))\,\Psi_0(x,\rho),\ x > 0, \rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma.$$

В дальнейшем мы будем часто использовать следующий очевидный факт, который для удобства сформулируем явно.

Лемма 2.10. *Для произвольного фиксированного $\rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$ и любой функции $f(\cdot) \in L_2(\Sigma)$ справедлива оценка:*

$$\|\,(Cf)\,(\rho)\| \le M(\rho)\|f\|_{L_2(\Sigma)},$$

где константа $M(\rho)$ зависит от ρ, но не от функции $f(\cdot) \in L_2(\Sigma)$.

Доказательство. Применяя неравенство Коши–Буняковского к интегралу

$$(Cf)(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma}\frac{d\zeta}{\zeta-\rho}f(\zeta),$$

получаем:

$$\|(Cf)(\rho)\| \le \|f\|_{L_2(\Sigma)}\|\kappa_\rho\|_{L_2(\Sigma)},$$

где функция $\kappa_\rho(\cdot)$:

$$\kappa_\rho(\zeta) := \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\zeta-\rho}$$

принадлежит $L_2(\Sigma)$ для любого фиксированного $\rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$.

$\square$

Лемма 2.11. *При каждом фиксированном* $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ *справедлива асимптотика*

$$\psi(v, x, \rho) = (\mathfrak{f} + o(1)) \exp(\rho x R), \ x \to \infty.$$

Доказательство. 1) Зафиксируем произвольную $v(\cdot) \in \mathbf{V}_0 \cap \mathbf{V}_{00}$. Обозначим $\psi(x, \rho) := \psi(v, x, \rho)$, $\mathbf{A}(x) := \mathbf{A}(v, x)$, $\mathbf{B}(x) := \mathbf{B}(v, x)$ (оператор из Леммы 2.7), $\mathbf{p}(x, \rho) := \mathbf{p}(v, x, \rho)$.

Имеем

$$\mathbf{p}(x) = \mathbf{B}(x)\hat{V}(x) + \mathbf{H}(x)\mathbf{B}(x)\hat{V}(x),$$

где силу Леммы 2.7 $\|\mathbf{H}(x)\| = o(1)$ при $x \to \infty$, откуда

$$\|\mathbf{H}(x)\mathbf{B}(x)\hat{V}(x)\|_{L_2(\Sigma)} = o(1), \ x \to \infty.$$

Далее, по построению оператора $\mathbf{B}(x)$ имеем (в обозначениях Леммы 2.7):

$$\mathbf{B}\hat{V} = C^+(\hat{V}P_+^{-1})(P_+ - I) - C^-(\hat{V}P_+^{-1})(P_- - I) + \hat{V}P_+^{-1}.$$

Таким образом, $\mathbf{p}(x, \rho)$ может быть записана в виде:

$$\mathbf{p}(x, \rho) = \varphi_0(x, \rho) + \varphi_+(x, \rho) - \varphi_-(x, \rho) + \hat{\varphi}(x, \rho), \tag{2.48}$$

где

$$\hat{\varphi}(x) = \mathbf{H}(x)\mathbf{B}(x)\hat{V}(x),$$

$$\varphi_\pm(x, \rho) = C^\pm(\hat{V}(x, \cdot)P_+^{-1}(x, \cdot))(\rho)(P_\pm(x, \rho) - I),$$

$$\varphi_0(x, \rho) = \hat{V}(x, \rho)P_+^{-1}(x, \rho).$$

Зафиксируем произвольное $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$.

По доказанному выше

$$\|\hat{\varphi}(x, \cdot)\|_{L_2(\Sigma)} = o(1), \ x \to \infty,$$

поэтому, в силу Леммы 2.10 имеем:

$$\lim_{x \to \infty} \left(C\hat{\varphi}(x)\right)(\rho) = 0. \tag{2.49}$$

Далее, преобразуем:

$$\left(C\varphi_\pm(x)\right)(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Sigma \frac{d\zeta}{\zeta - \rho}[C^\pm(\hat{V}(x, \cdot)P_+^{-1}(x, \cdot))](\zeta)(P_\pm(x, \zeta) - I) =$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma}\frac{d\zeta}{\zeta-\rho}(\hat{V}(x,\zeta)P_+^{-1}(x,\zeta))[C^{\mp}(P_{\pm}(x,\cdot)-I)](\zeta).$$

Как при доказательстве Леммы 2.7, из Леммы 2.6 выводим что $\|C_{\mp}(P_{\pm}(x,\cdot)-I)\|_{L_\infty(\Sigma)}\to 0$ при $x\to\infty$. С учетом финитности $\hat{V}(x,\cdot)$ и равномерной ограниченности по (x,ζ) функций $\hat{V}(x,\zeta)$, $P_+^{-1}(x,\zeta)$), это влечет

$$\lim_{x\to\infty}\left(C\varphi_{\pm}(x)\right)(\rho)=0. \tag{2.50}$$

Рассмотрим функцию $\varphi_0(x,\rho)$. Повторяя рассуждения из доказательства Леммы 2.7, запишем (в тех же обозначениях):

$$\varphi_0(x,\rho)=\varphi_{00}(x,\rho)+V_1(x,\rho),$$

где:

$$\varphi_{00}(x,\rho)=-(P_+^{-1}(x,\rho)-P_-^{-1}(x,\rho))=P_+(x,\rho)-P_-(x,\rho)=$$
$$\mathfrak{f}^+\exp(\rho xR^+)\hat{w}_+(\rho)\exp(-\rho xR^+)(\mathfrak{f}^+)^{-1}-$$
$$\mathfrak{f}^-\exp(\rho xR^-)\hat{w}_-(\rho)\exp(-\rho xR^-)(\mathfrak{f}^-)^{-1}.$$

При доказательстве Леммы 2.7 было показано, что $V_1(x,\rho)$ допускает оценку

$$V_1(x,\rho)=O((\rho x)^{-1}),\ |\rho x|>1,$$

причем в случае $v\in\mathbf{V}_{00}$ $\mathrm{supp}V_1(x,\cdot)\subset\{\rho: r_0\le|\rho|\le r_1\}$ с r_0, r_1 не зависящими от x.

Для функции $V_1(x,\rho)$, таким образом, имеем

$$\|V_1(x,\cdot)\|_{L_2(\Sigma)}=O(x^{-1}),\ x\to\infty,$$

откуда, в силу Леммы 2.10, следует:

$$\left(C\varphi_0(x,\cdot)\right)(\rho)=-\left(C\varphi_{00}(x,\cdot)\right)(\rho)+o(1),\ x\to\infty.$$

В силу строгой верхнетреугольности и П-диагональности матриц $\hat{w}_{\pm}(\rho)$ ненулевые элементы $(C\varphi_{00}(x,\rho))_{jk}$ матрицы $C\varphi_{00}(x,\rho)$ могут быть представлены в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N}\int\limits_{\Sigma_\nu}\frac{d\zeta}{\zeta-\rho}\exp(i\lambda_{jk\nu}^{+}x|\zeta|)f_{jk\nu}^{+}(\zeta)+\sum_{\nu=1}^{N}\int\limits_{\Sigma_\nu}\frac{d\zeta}{\zeta-\rho}\exp(i\lambda_{jk\nu}^{-}x|\zeta|)f_{jk\nu}^{-}(\zeta),$$

где все $\lambda^{\pm}_{jk\nu}$ вещественны и все функции $f^{\pm}_{jk\nu}(\cdot)$ – финитные бесконечно гладкие. Таким образом, ненулевые элементы матрицы $\varphi_{00}(x,\rho)$ (где, напомним, $\rho\in\mathbb{C}\setminus\Sigma$ фиксировано) могут быть записаны как линейные комбинации, где каждое слагаемое представлет собой преобразование Фурье гладкой финитной функции. Следовательно $\left(C\varphi_{00}(x)\right)(\rho)\to 0$ при $x\to\infty$. Теперь, объединяя данный результат с (2.48), (2.49), (2.50), получаем $(C\mathbf{p}(x,\cdot))(\rho)\to 0$ при $x\to\infty$, что эквивалентно требуемой асимптотике для $\psi(x,\rho)$, $x\to\infty$.

2) Зафиксируем теперь произвольную $v(\cdot)\in\mathbf{V}_0$. Пусть $\{v_m(\cdot)\}$ последовательность из $\mathbf{V}_{00}$, сходящаяся к $v(\cdot)$. Поскольку при этом $\mathbf{A}(v_m,\cdot)\to\mathbf{A}(v,\cdot)$ в пространстве $BC([0,\infty),\mathcal{L}(L_2(\Sigma)))$ и, согласно Лемме 2.8 имеем

$$\mathbf{A}^{-1}(v,\cdot)\in BC([0,\infty),\mathcal{L}(L_2(\Sigma))),$$

начиная с некоторого номера m все операторы $\mathbf{A}(v_m,x)$ обратимы для всех $x\in[0,\infty)$. Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что все $v_m(\cdot)\in\mathbf{V}_0$.

Обозначим $\mathbf{p}_m(x,\cdot):=\mathbf{p}(v_m,x,\cdot)$, $\mathbf{p}(x,\cdot):=\mathbf{p}(v,x,\cdot)$.

В силу Леммы 2.9

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{x\in[0,\infty)}\|\mathbf{p}(x,\cdot)-\mathbf{p}_m(x,\cdot)\|_{L_2(\Sigma)}=0.$$

Согласно Лемме 2.10, отсюда следует $\left(C\mathbf{p}_m(x)\right)(\rho)\to\left(C\mathbf{p}(x)\right)(\rho)$ при $m\to\infty$ для любого фиксированного $\rho\in\mathbb{C}\setminus\Sigma$ равномерно по $x\in[0,\infty)$. Согласно п.1 $\left(C\mathbf{p}_m(x)\right)(\rho)\to 0$ при $x\to\infty$. Но тогда и $\left(C\mathbf{p}(x)\right)(\rho)\to 0$ при $x\to\infty$.

□

Лемма 2.12. *Зафиксируем произвольные* $v(\cdot)\in\mathbf{V}_0$, $\rho\in\mathbb{C}\setminus\Sigma$, *обозначим* $\psi(x):=\psi(v,x,\rho)$. *Тогда* $\psi(\cdot)$ *удовлетворяет уравнению* $\psi'=(x^{-1}A+\rho B+q(x))\psi$, *где* $q(x)=\mathbf{q}(v,x)$.

Доказательство. 1) Предположим сначала, что $v(\cdot)\in\mathbf{V}_0\cap\mathbf{V}_{00}$.

Дифференцируя по x уравнение

$$\mathbf{A}(x)\mathbf{p}(x,\cdot)(\zeta):=(C^+\mathbf{p}(x,\cdot))(\zeta)-(C^-\mathbf{p}(x,\cdot))(\zeta)V(x,\zeta)=V(x,\zeta)-I \qquad (2.51)$$

и учитывая, что

$$V'(x,\zeta)=\left[U_0(x,\zeta),V(x,\zeta)\right],\ U_0(x,\zeta):=\zeta\left[B,V(x,\zeta)\right]+x^{-1}[A,V(x,\zeta)],$$

приходим к соотношению:

$$C^+\mathbf{p}' - (C^-\mathbf{p})V - (C^-\mathbf{p})[U_0, V] = [U_0, V].$$

В то же время из исходного уравнения (2.51) следует:

$$[U_0, C^+\mathbf{p}] - [U_0, (C^-\mathbf{p})V] = [U_0, V].$$

Таким образом, справедливо равенство:

$$C^+\mathbf{p}' - [U_0, C^+\mathbf{p}] + [U_0, (C^-\mathbf{p})V] - (C^-\mathbf{p}')V - (C^-\mathbf{p})[U_0, V] = 0,$$

которое может быть преобразовано к виду:

$$C^+\mathbf{p}' - [U_0, C^+\mathbf{p}] - (C^-\mathbf{p}')V + [U_0, C^-\mathbf{p}]V = 0. \tag{2.52}$$

Рассмотрим выражение $[U_0(x,\zeta), (C\mathbf{p}(x,\cdot))(\zeta)]$. Пусть сначала $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$. Поскольку $\hat{V}(x,\zeta)$ финитна по ζ, $\mathbf{p}(x,\zeta)$ также финитна и справедливы равенства:

$$\zeta[B, (C\mathbf{p}(x,\cdot))(\zeta)] = \zeta(C[B, \mathbf{p}(x,\cdot)])(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} \frac{\zeta d\xi}{\xi - \zeta}[B, \mathbf{p}(x,\xi)] =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} \frac{d\xi}{\xi - \zeta}[\xi B, \mathbf{p}(x,\xi)] - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\xi[B, \mathbf{p}(x,\xi)]$$

(первое из приведенных равенств справедливо, поскольку B не зависит от ζ). Учитывая, что в случае финитных $\hat{v}(\cdot)$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\xi[B, \mathbf{p}(v,x,\xi)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\xi[B, \hat{V}(v,x,\xi)] +$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\xi[B, (C^-\mathbf{p}(x,\cdot))(\xi)\hat{V}(v,x,\xi)] = \mathbf{q}(v,x)$$

(поскольку все интегралы фактически берутся по компактному контуру), приходим к соотношению:

$$\zeta[B, (C\mathbf{p}(x,\cdot))(\zeta)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} \frac{d\xi}{\xi - \zeta}[\xi B, \mathbf{p}(x,\xi)] - q(x).$$

Принимая во внимание, что матрица A не зависит от ζ, из полученного равенства выводим:

$$[U_0(x,\zeta),(C\mathbf{p}(x,\cdot))(\zeta)] = (C[U_0(x,\cdot),\mathbf{p}(x,\cdot)])\,(\zeta) - q(x),\ \zeta\in\mathbb{C}\setminus\Sigma, \tag{2.53}$$

переходя в котором к соответствующим предельным значениям, получаем:

$$[U_0(x,\zeta),(C^{\pm}\mathbf{p}(x,\cdot))(\zeta)] = \left(C^{\pm}[U_0(x,\cdot),\mathbf{p}(x,\cdot)]\right)(\zeta) - q(x),\ \zeta\in\Sigma'. \tag{2.54}$$

Пользуясь (2.54) и соотношением (также вытекающим из (2.51))

$$q(x)(V(x,\zeta)-I) = C^{+}(q(x)\mathbf{p}(x,\cdot))(\zeta) - C^{-}(q(x)\mathbf{p}(x,\cdot))(\zeta)V(x,\zeta),$$

преобразуем (2.52) к виду $\mathbf{A}(x)\hat{\mathbf{p}}(x,\cdot)=0$, где

$$\hat{\mathbf{p}}(x,\zeta) = \mathbf{p}'(x,\zeta) - [U_0(x,\zeta),\mathbf{p}(x,\zeta)] - q(x)\mathbf{p}(x,\zeta).$$

В силу обратимости оператора $\mathbf{A}(x)$ отсюда вытекает $\hat{\mathbf{p}}(x,\cdot)=0$, т.е.:

$$\mathbf{p}'(x,\zeta) = [U_0(x,\zeta),\mathbf{p}(x,\zeta)] + q(x)\mathbf{p}(x,\zeta). \tag{2.55}$$

Воспользуемся (2.55) для подсчета $\psi'(x)$:

$$\psi' = (C\mathbf{p}')\Psi_0 + (I+C\mathbf{p})\Psi_0' = q(C\mathbf{p})\Psi_0 + (C[U_0,\mathbf{p}])\,\Psi_0 + (I+C\mathbf{p})U_0\Psi_0.$$

Используя снова соотношение (2.53), получаем:

$$\psi' = q(C\mathbf{p})\Psi_0 + [U_0,C\mathbf{p}]\Psi_0 + q\Psi_0 + (I+C\mathbf{p})U_0\Psi_0 = (q+U_0)\psi,$$

что доказывает утверждение леммы в рассматриваемом случае.

2) Пусть теперь $v(\cdot)\in\mathbf{V}_0$ и пусть $\{v_m(\cdot)\}$ – последовательность матриц-функций из $\mathbf{V}_{00}$, сходящаяся к $v(\cdot)$ в метрике $\mathbf{V}$. Как отмечалось выше при доказательстве Леммы 2.12, не нарушая общности можно считать, что $v_m(\cdot)\in\mathbf{V}_0$. Обозначим $\mathbf{p}_m(x,\zeta) := \mathbf{p}(v_m,x,\zeta)$, $q_m(x) := \mathbf{q}(v_m,x)$. В силу Леммы 2.9 при $m\to\infty$ $\mathbf{p}_m\to\mathbf{p}$ в $BC([0,\infty),L_2(\Sigma))$. Отсюда в силу Леммы 2.3 следует $\mathbf{\Phi}(\hat{v}_m,\mathbf{p}_m)\to\mathbf{\Phi}(\hat{v},\mathbf{p})$ в $C[0,\infty)$. Аналогично, в силу Леммы 2.5 из сходимости $v_m\to v$ в $\mathbf{V}$ следует сходимость $\mathbf{F}\hat{v}_m\to\mathbf{F}\hat{v}$ в $L_{2,loc}(0,\infty]$. Таким образом, имеем $q_m\to q$ в $L_{2,loc}(0,\infty)$.

Из сходимости $\mathbf{p}_m\to\mathbf{p}$ в пространстве $BC([0,\infty),L_2(\Sigma))$ в силу Леммы 2.10 вытекает сходимость

$$\psi_m(x) = (I+C\mathbf{p}_m(x,\cdot))(\rho)\Psi_0(x,\rho) \to (I+C\mathbf{p}(x,\cdot))(\rho)\Psi_0(x,\rho) = \psi(x)$$

равномерно по $x \in [x_1, x_2]$ для любых $0 < x_1 < x_2 < \infty$. Зафиксируем произвольный отрезок $[x_1, x_2]$.

По доказанному в предыдущем пункте, $\psi_m(\cdot)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\psi_m'(x) = (\rho B + x^{-1} A + q_m(x))\psi_m(x). \tag{2.56}$$

Из уравнений (2.56) с учетом сказанного выше следует фундаментальность в $L_2(x_1, x_2)$ последовательности $\psi_m'(\cdot)$. Пусть функция $\psi^*(x)$, $x \in (x_1, x_2)$ такова, что $\psi_m' \to \psi^*$ в $L_2(x_1, x_2)$. Но тогда для любого $x \in (x_1, x_2)$ имеем:

$$\int_{x_1}^{x} dt \psi_m'(t) \to \int_{x_1}^{x} dt \psi^*(t),$$

а с другой стороны:

$$\int_{x_1}^{x} dt \psi_m'(t) = \psi_m(x) - \psi_m(x_1) \to \psi(x) - \psi(x_1)$$

в силу установленной выше равномерной сходимости $\psi_m(x) \rightrightarrows \psi(x)$, $x \in [x_1, x_2]$. Таким образом, получили для любого $x \in (x_1, x_2)$:

$$\int_{x_1}^{x} dt \psi^*(t) = \psi(x) - \psi(x_1),$$

откуда следует, что $\psi(\cdot)$ абсолютно непрерывна и $\psi' = \psi^*$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можем считать, что $\psi_m'(x) \to \psi'(x)$, $q_m(x) \to q(x)$ п.в. на $[x_1, x_2]$. Переходя теперь к пределу при $m \to \infty$ в уравнении (2.56), получаем требуемое.

$\square$

Для заданной матрицы-функции $v(\cdot) \in \mathbf{V}$, удовлетворяющей условию 2 Теоремы 2.7, определим:

$$v^{\#}(\rho) := (\delta^-(\rho))^{-1} v(\rho) \delta^+(\rho), \rho \in \Sigma',$$

$$\hat{v}^{\#}(\rho) := v^{\#}(\rho)(v_0^{\#}(\rho))^{-1} - I.$$

$$V^{\#}(v, x, \rho) := \overset{\circ}{\Phi}_0 (x, \rho) v^{\#}(\rho)(v_0^{\#}(\rho))^{-1}(\overset{\circ}{\Phi}_0 (x, \rho))^{-1},$$

$$\hat{V}^{\#}(v, x, \rho) := \overset{\circ}{\Phi}_0 (x, \rho) \hat{v}^{\#}(\rho)(\overset{\circ}{\Phi}_0 (x, \rho))^{-1}.$$

Заметим, что по построению матрица $v^{\#}(\rho)$ – нижнетреугольная Π - диагональная, нетривиальные диагональные блоки имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v^{\#}_{k+1,k} & 1 \end{pmatrix},$$

где $v^{\#}_{k+1,k}(\rho) = \delta^+_k(\rho)/\delta^-_{k+1}(\rho)$, $k \in I_-$, а нетривиальные блоки матрицы $\hat{v}^{\#}(\rho)$ имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v^{\#}_{k+1,k} - (v^{\#}_0)_{k+1,k} & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим следующий зависящий от параметра $x \geq 0$ оператор:

$$\mathbf{A}^{\#}(x)f(\rho) := (C^+f)(\rho) - (C^-f)(\rho)V^{\#}(x,\rho) = f(\rho) - (C^-f)(\rho)\hat{V}^{\#}(x,\rho),$$

где $V^{\#}(x,\rho) := V^{\#}(v,x,\rho)$.

Лемма 2.13. *Предположим, что $v(\cdot) \in \mathbf{V}$ удовлетворяет условию 2 Теоремы 2.7. Тогда:*

1. $\hat{V}^{\#}(x,\cdot) \in \left(\bigoplus\limits_{\nu=1}^{N} C_0(\overline{\Sigma}_\nu)\right) \cap L_2(\Sigma)$ *для каждого* $x \in [0,\infty)$, *более того,* $\hat{V}^{\#}(\cdot,\cdot) \in C\left([0,\infty), \left(\bigoplus\limits_{\nu=1}^{N} C_0(\overline{\Sigma}_\nu)\right) \cap L_2(\Sigma)\right)$, *причём* $\hat{V}^{\#}(0,\rho) \equiv 0$;
2. $\mathbf{A}^{\#}(x) \in \mathcal{L}(L_2(\Sigma))$, $\mathbf{A}^{\#}(\cdot) \in C([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma)))$, *причём* $\mathbf{A}^{\#}(0) = Id$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\nu \in \{1,\ldots,N\}$. При $\rho \in \Sigma_\nu$ $\delta^{\pm}_{0k}(\rho) = d^{\pm}_k \rho^{-\mu_k}$, где $d^{\pm}_k$– некоторые ненулевые константы.

Из свойств функций $\delta_k(\cdot)$ следует:

$$v^{\#}_{k+1,k}(\rho) = \delta^+_k(\rho)/\delta^-_{k+1}(\rho) = \rho^{\mu_{k+1}-\mu_k}\left(\frac{d^+_k}{d^-_{k+1}} + \hat{u}_{k+1,k}(\rho)\right),$$

где $\hat{u}_{k+1,k}(\cdot) \in C_0(\overline{\Sigma}_\nu) \cap L_2(\Sigma_\nu)$. Тогда:

$$v^{\#}_{k+1,k}(\rho) - (v^{\#}_0)_{k+1,k}(\rho) = \rho^{\mu_{k+1}-\mu_k}\hat{u}_{k+1,k}(\rho)$$

или в матричной форме:

$$\hat{v}^{\#}(\rho) = \rho^{\mu}\hat{u}(\rho)\rho^{-\mu},$$

где матрица-функция $\hat{u}(\cdot) \in C_0(\overline{\Sigma}_\nu) \cap L_2(\Sigma_\nu)$ – Π-диагональная, строго нижнетреугольная. Теперь из представления:

$$\hat{V}^{\#}(x,\rho) = \overset{\circ}{\Phi}_0(x,\rho)\rho^{\mu}\hat{u}(\rho)\rho^{-\mu}(\overset{\circ}{\Phi}_0(x,\rho))^{-1} =$$

$$\hat{c}(\rho x)x^{\mu}lx^{-\mu}(\rho x)^{\mu}\hat{u}(\rho)(\rho x)^{-\mu}\left(\hat{c}(\rho x)x^{\mu}lx^{-\mu}\right)^{-1},$$

где l – постоянная нижнетреугольная обратимая матрица, следует, что $\hat{V}^{\#}(x,\rho)$ продолжается до непрерывной функции от $(x,\rho)\in[0,\infty)\times\overline{\Sigma}_{\nu}$. Поскольку $\hat{u}(\rho)$ строго нижнетреугольная, из $\mathrm{Re}\mu_k<\mathrm{Re}\mu_{k+1}$, $k=\overline{1,n-1}$ следует, что

$$(\rho x)^{\mu}\hat{u}(\rho)(\rho x)^{-\mu}\to 0,\ x^{\mu}lx^{-\mu}\to l_0:=diag(l_{11},\ldots,l_{nn})$$

при $x\to 0$, таким образом, получаем $\hat{V}^{\#}(0,\rho)\equiv 0$.

Далее, имеем:

$$\hat{V}^{\#}(x,\rho)=\overset{\circ}{\Phi}_0(x,\rho)\rho^{\mu}\hat{u}(\rho)\rho^{-\mu}(\overset{\circ}{\Phi}_0(x,\rho))^{-1}=\tilde{\Psi}_0(x,\rho)\hat{u}^{\#}(x,\rho)\tilde{\Psi}_0^{-1}(x,\rho),\quad(2.57)$$

где

$$\hat{u}^{\#}(x,\rho)=W(\rho x)d\hat{u}(\rho)d^{-1}(W(\rho x))^{-1}.$$

Заметим, что, в силу диагональности матриц $W(\rho x)$ и d, все ненулевые элементы $\hat{u}^{\#}(x,\rho)$ находятся в позициях $(k+1,k)$, $k\in I_-$ и равны:

$$\hat{u}^{\#}(x,\rho)=\frac{d_{k+1}}{d_k}\cdot\frac{W_{k+1}(\rho x)}{W_k(\rho x)}\cdot\hat{u}_{k+1,k}(\rho).\qquad(2.58)$$

Напомним, что для $k\in I_-$ имеем, в частности, $\mathrm{Re}(\rho R_{k+1})=\mathrm{Re}(\rho R_k)$ $(\rho\in\Sigma_{\nu})$, что с учетом $\mathrm{Re}\mu_{k+1}\geq\mathrm{Re}\mu_k$ означает, что дробь

$$\frac{W_{k+1}(\rho x)}{W_k(\rho x)}$$

допускает непрерывное ограниченное продолжение на $[0,\infty)\times\overline{\Sigma}_{\nu}$. Таким образом, из представления (2.58) вытекает $\hat{u}^{\#}(\cdot,\cdot)\in C([0,\infty),C_0(\overline{\Sigma}_{\nu})\cap L_2(\Sigma_{\nu}))$. Тогда из (2.57) следует $\hat{V}^{\#}(\cdot,\cdot)\in C([0,\infty),C_0(\overline{\Sigma}_{\nu})\cap L_2(\Sigma_{\nu}))$.

□

Зафиксируем теперь произвольную $v(\cdot)\in\mathbf{V}_0$, удовлетворяющую условию 2 Теоремы 2.7. Определим

$$\varphi(x,\rho):=(I+(C\mathbf{p}^{\#}(x,\cdot))(\rho))\,\overset{\circ}{\Phi}_0(x,\rho),$$

где $\mathbf{p}^{\#}(x,\cdot):=(\mathbf{A}^{\#}(x))^{-1}\hat{V}^{\#}(x,\cdot)$. Отметим, что в силу п.2 Леммы 2.13 найдётся $x_0>0$ такое, что оператор $(\mathbf{A}^{\#}(x))^{-1}$ существует при всех $x\in[0,x_0]$.

Лемма 2.14. *Для всех $x\in(0,x_0]$ и $\rho\in\mathbb{C}\setminus\Sigma$ справедливо равенство $\varphi(x,\rho)=\psi(x,\rho)\delta(\rho)$ (здесь, как и ранее в Леммах 2.11, 2.12 $\psi(x,\rho)=\psi(v,x,\rho)$).*

Доказательство. 1) Определим матрицу-функцию:

$$D(x,\rho) := \Psi_0(x,\rho)\delta(\rho)\left(\overset{\circ}{\Phi}_0(x,\rho)\right)^{-1}, \ \rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma. \tag{2.59}$$

Заметим, что, в силу свойств функции $\delta(\cdot)$, при $\rho \in \Sigma'$ существуют предельные значения $D^{\pm}(x,\rho)$ и справедливо равенство:

$$V^{\#}(x,\rho) = (D^{-}(x,\rho))^{-1}V(x,\rho)D^{+}(x,\rho). \tag{2.60}$$

Переписав $D(x,\rho)$ в виде:

$$D(x,\rho) = \Psi_0(x,\rho)\delta(\rho)(\delta_0(\rho))^{-1}\left(\Psi_0(x,\rho)\right)^{-1},$$

воспользовавшись диагональностью и асимптотикой матрицы-функции $\delta(\cdot)$, получим:

$$D(x,\rho) = I + o(1), \ \rho \to \infty, \rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma. \tag{2.61}$$

Рассуждая, как при доказательстве п.2 Теоремы 2.5, из асимптотики (2.61) выводим:

$$D(x,\rho) - I = \left\{C(D^{+}(x,\cdot) - D^{-}(x,\cdot))\right\}(\rho), \rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma, \tag{2.62}$$

а также равенство:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma}\frac{d\xi}{(\rho-\xi)(\xi-\zeta)}(D^{+}(\xi) - D^{-}(\xi)) =$$

$$\frac{1}{\rho-\zeta}D(\zeta) - \frac{1}{\rho-\zeta}D(\rho), \ \rho,\zeta \in \mathbb{C}\setminus\Sigma,$$

что эквивалентно представлению

$$\left(CF_{\rho}\right)(\zeta) = \frac{1}{\rho-\zeta}D(\zeta) - \frac{1}{\rho-\zeta}D(\rho), \ \rho,\zeta \in \mathbb{C}\setminus\Sigma,$$

где

$$F_{\rho}(\xi) := \frac{1}{\rho-\xi}(D^{+}(\xi) - D^{-}(\xi)), \ \xi \in \Sigma.$$

Здесь и далее в данном доказательстве для краткости в списке аргументов опущен произвольный $x \in (0, x_0]$.

Повторяя дальнейшие рассуждения из доказательства п.2 Теоремы 2.5, из полученных равенств получаем следующее (где $f(\cdot) \in L_2(\Sigma)$ произвольна):

$$C\left\{\left(C^{-}f\right)\left(D^{+} - D^{-}\right)\right\}(\rho) = \left(Cf\right)(\rho)D(\rho) - C\left\{\left(fD^{+}\right)\right\}(\rho). \tag{2.63}$$

2) Введем функцию

$$h(\rho) := D^+(\rho) - D^-(\rho) + (C^-\mathbf{p})(\rho)(D^+(\rho) - D^-(\rho)) + \mathbf{p}(\rho)D^+(\rho).$$

Из (2.62), (2.63) следует:

$$(Ch)(\rho) = D(\rho) - I + (C\mathbf{p})(\rho)D(\rho),\ \ \rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma. \tag{2.64}$$

Из (2.64), переходя к соответствующим пределам, вычисляем:

$$\mathbf{A}^{\#}h = (D^+ - I) - D^-V^{\#} + V^{\#} + (C^+\mathbf{p})D^+ - (C^-\mathbf{p})D^-V^{\#}.$$

Учитывая, что $D^-V^{\#} = VD^+$ и $C^+\mathbf{p} + (C^-\mathbf{p})V = \mathbf{A}\mathbf{p} = V - I$, получаем $\mathbf{A}^{\#}h = V^{\#} - I$, откуда следует, что при $x \in [0, x_0]$ $\mathbf{p}^{\#} = h$.

Теперь, используя снова (2.64), получаем:

$$\varphi(x,\rho) = (I + (C\mathbf{p}^{\#}(x,\cdot))(\rho))\ \overset{\circ}{\Phi}_0 (x,\rho) =$$
$$(D(x,\rho) + (C\mathbf{p})(\rho)D(x,\rho))\ \overset{\circ}{\Phi} (x,\rho) =$$
$$(I + (C\mathbf{p})(\rho))D(x,\rho\ \overset{\circ}{\Phi} (x,\rho) =$$
$$(I + (C\mathbf{p})(\rho))\Psi_0(x,\rho)\delta(\rho)\left(\overset{\circ}{\Phi}_0 (x,\rho)\right)^{-1}\ \overset{\circ}{\Phi} (x,\rho) = \psi(x,\rho)\delta(\rho).$$

□

Доказательство Теоремы 2.7. Необходимость условий теоремы фактически доказана ранее в параграфах 2.1, 2.2, а также 1.3, см. Следствия 1.2, 1.3. Будем доказывать достаточность. Пусть фиксирована произвольная матрица-функция $v(\cdot) \in \mathbf{V}$, удовлетворяющая условиям 1–3.

1) Рассмотрим функцию $\psi(x,\rho) = \psi(v,x,\rho)$. По построению данная функция – аналитическая по ρ в каждом из секторов $\mathcal{S}_\nu$.

Согласно Лемме 2.12 как функция переменной x $\psi(x,\rho)$ почти всюду на $(0,\infty)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\psi' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))\psi, \tag{2.65}$$

где $q(x) := \mathbf{q}(v,x)$ и в силу условия 3 $q(\cdot) \in \mathcal{X}_p$, $p > 2$.

Далее, в силу Леммы 2.11 при каждом $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ имеет место асимптотика

$$\psi(x,\rho) = (\mathfrak{f}(\rho) + o(1))\exp(\rho x R),\ \ x \to \infty. \tag{2.66}$$

Поскольку, кроме того, из Леммы 2.9 следует включение

$$\mathbf{p}(v, \cdot, \cdot) \in BC([0, \infty), L_2(\Sigma)),$$

мы имеем, в частности

$$\|\mathbf{p}(v, x, \cdot)\|_{L_2(\Sigma)} = O(1)$$

при $x \to 0$. Отсюда, с учетом Леммы 2.10, вытекает следующая оценка для k-го столбца $\psi_k(x, \rho)$:

$$\psi_k(x, \rho) = O(x^{\mu_k}), \ x \to 0. \tag{2.67}$$

Сопоставляя (2.65), (2.66), (2.67) с определением решений типа Вейля, убеждаемся, что $\psi_k(x, \rho) = \Psi_k(q, x, \rho)$ для всех $x \in (0, \infty)$ и $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ таких, что $\prod\limits_{k=1}^{n} \Delta_k(q, \rho) \neq 0$.

2) Рассмотрим функцию $\varphi(x, \rho)$. В силу Леммы 2.13 имеем $\mathbf{p}^{\#}(0, \rho) \equiv I$, откуда следует асимптотика для k-го столбца:

$$\varphi_k(x, \rho) = x^{\mu_k}(\mathfrak{h}_k + o(1)), \ x \to 0. \tag{2.68}$$

Далее, из Леммы 2.14 имеем $\varphi_k(x, \rho) = \delta_k(\rho)\psi_k(x, \rho)$, что дает продолжение $\varphi(x, \rho)$ на все $x > 0$, причем после такого продолжения будет выполняться оценка:

$$\varphi_k(x, \rho) = O(\exp(\rho x R_k)), \ x \to \infty. \tag{2.69}$$

Кроме того, из соотношения $\varphi_k(x, \rho) = \delta_k(\rho)\psi_k(x, \rho)$ вытекает, что $\varphi_k(x, \rho)$ (для каждого k) удовлетворяют той же системе дифференциальных уравнений (2.65) (и с той же матрицей $q(\cdot)$), что и $\psi_k(x, \rho)$. С учетом (2.68), (2.69) это означает, что $\varphi_k(x, \rho) = \overset{\circ}{\Phi}_k (q, x, \rho)$ для всех $x \in (0, \infty)$ и $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ таких, что $\prod\limits_{k=1}^{n} \Delta_k(q, \rho) \neq 0$.

3) Пусть $\nu \in \{1, \dots, N\}$ произвольно. Для любого $\rho \in \overline{\mathcal{S}}_\nu$ такого, что $\prod\limits_{k=1}^{n} \Delta_k(q, \rho) \neq 0$ имеем:

$$\Delta_k(q, \rho) =$$
$$\left| \Psi_1(q, x, \rho) \wedge \dots \wedge \Psi_{k-1}(q, x, \rho) \wedge (\rho^{\mu_k} \overset{\circ}{\Phi}_k (q, x, \rho)) \wedge \dots \wedge (\rho^{\mu_n} \overset{\circ}{\Phi}_n (q, x, \rho)) \right|,$$

где $k \in \{1, \dots, n\}$ также произвольно. Пользуясь результатами пунктов 1,2, перепишем данное представление в следующем виде:

$$\Delta_k(q, \rho) = \prod_{j=k}^{n} (\rho^{\mu_j} \delta_j(\rho)) \, |\mathfrak{f}| \, . \tag{2.70}$$

Заметим, что по принципу аналитического продолжения представление (2.70) справедливо для всех $\rho \in \overline{\mathcal{S}}_\nu$, и в силу свойств функций $\delta_j(\cdot)$ из (2.70) следует, что $\Delta_k(q,\rho) \neq 0$ для всех $\rho \in \overline{\mathcal{S}}_\nu$, $\nu = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,n}$. Таким образом, $q(\cdot) \in G_0^p$.

4) При п.в. $\rho \in \Sigma'$ существуют предельные значения $\psi^\pm(x,\rho)$, равные, по построению, $(I + (C^\pm \mathbf{p}(x,\cdot))(\rho))\Psi_0^\pm(x,\rho)$. Уравнение $\mathbf{A}(x)\mathbf{p}(x,\cdot) = \hat{V}(x,\cdot)$, эквивалентное соотношению

$$I + (C^+\mathbf{p}(x,\cdot))(\rho) = (I + (C^-\mathbf{p}(x,\cdot))(\rho))V(x,\rho)$$

(для п.в. $\rho \in \Sigma'$), влечет равенство $\psi^+(x,\rho) = \psi^-(x,\rho)v(\rho)$ для п.в. $\rho \in \Sigma'$. Но по доказанному в п. 1 $\psi(x,\rho) = \Psi(q,x,\rho)$, таким образом, для п.в. $\rho \in \Sigma'$ имеем:

$$\Psi^+(q,x,\rho) = \Psi^-(q,x,\rho)v(\rho). \tag{2.71}$$

Из результатов §1.3 Главы 1 известно, что для $q(\cdot) \in G_0^p$ (а это свойство установлено выше в п.3) предельные значения $\Psi^\pm(q,x,\rho)$ существуют для всех $\rho \in \Sigma'$ и представляют собой непрерывные функции от $\rho \in \Sigma'$. Следовательно, соотношение (2.71) справедливо для всех $\rho \in \Sigma'$, что означает $v(\rho) = \mathbf{v}(q,\rho)$.

$\square$

Следующая теорема показывает, что в случае $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{00}$ выполнение наиболее трудно проверяемого условия 3 следует из выполнения условия 1.

Теорема 2.8. *Пусть $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{00}$ такова, что выполнено условие 1 Теоремы 2.7. Тогда $\mathbf{q}(v,x)$ непрерывна по $x \in [0,\infty)$ и справедлива оценка $\mathbf{q}(v,x) = O(x^{-m})$ при $x \to \infty$, где $m \geq 0$ произвольно.*

Доказательство. В условиях теоремы формула восстановления принимает вид (см. также доказательство Леммы 2.12, п.1):

$$\mathbf{q}(v,x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma}[B, \mathbf{p}(v,x,\rho)]d\rho.$$

Введем функции:

$$P_\pm(x,\rho) := E^\pm(x,\rho)(I + \hat{w}_\pm(\rho))(E^\pm(x,\rho))^{-1},$$

где матрицы-функции $\hat{w}_\pm(\cdot)$ – те же, что в Лемме 2.7 (функции $P_\pm(\cdot,\cdot)$ теперь строятся иначе!). Построим по этим функциям зависящий от параметра $x \in [0,\infty)$ оператор $\mathbf{B}(x)$:

$$(\mathbf{B}(x)f)(\rho) =$$

$$(C^+(f(\cdot)P_+^{-1}(x,\cdot)))(\rho)P_+(x,\rho) - (C^-(f(\cdot)P_+^{-1}(x,\cdot)))(\rho)P_-(x,\rho).$$

Тогда для $\mathbf{p}(x) = \mathbf{p}(v,x)$ имеем представление:

$$\mathbf{p}(x) + \mathbf{H}(x)\mathbf{p}(x) = \mathbf{B}(x)\hat{V}(x), \tag{2.72}$$

где:

$$\mathbf{H}(x) := \mathbf{B}(x)\mathbf{A}(x) - Id.$$

Заметив, что:

$$P_\pm^{-1}(x,\rho) := E^\pm(x,\rho)(I - \hat{w}_\pm(\rho))(E^\pm(x,\rho))^{-1},$$

и повторяя вычисления, использовавшиеся при доказательстве Леммы 2.7, получим для произвольной $\varphi \in L_2(\Sigma)$:

$$\mathbf{BA}\varphi = \varphi + \left(C^-\left(\varphi\left(C^+(P_-^{-1} - I) - C^-(P_+^{-1} - I)\right)\right)\right)(P_+ - P_-) +$$
$$(C^-\varphi)\left(C^+(I - P_-^{-1}) + C^-(P_+^{-1} - I)\right)(P_+ - P_-) +$$
$$C^-\left((C^-\varphi)V_1\right)P_- - C^+\left((C^-\varphi)V_1\right)P_+.$$

Таким образом, для оператора $\mathbf{H}(x)$ справедливо представление:

$$\mathbf{H}(x)\varphi = C^-(\varphi\hat{P})(P_+ - P_-) - (C^-\varphi)\hat{P}(P_+ - P_-) +$$
$$C^-\left((C^-\varphi)V_1\right)(P_- - P_+) - (C^-\varphi)V_1P_+, \tag{2.73}$$

где

$$\hat{P}(x,\rho) := \hat{P}_+(x,\rho) - \hat{P}_-(x,\rho),$$
$$\hat{P}_+ := C^+(P_-^{-1} - I),\ \hat{P}_- := C^-(P_+^{-1} - I),\ V_1 = VP_+^{-1} - P_-^{-1}.$$

Далее, имеем:

$$\mathbf{B}\hat{V} = C^+(\hat{V}P_+^{-1})(P_+ - I) - C^-(\hat{V}P_+^{-1})(P_- - I) + \hat{V}P_+^{-1}. \tag{2.74}$$

Исходя из представлений (2.72), (2.73), (2.74), запишем $q(x) = \mathbf{q}(v,x)$ в виде суммы:

$$q(x) = [B, q_0(x)] + [B, q_1(x)] + [B, q_2(x)], \tag{2.75}$$

где

$$q_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Sigma d\rho\,\hat{V}(x,\rho)P_+^{-1}(x,\rho), \tag{2.76}$$

$$q_1(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\,(\mathbf{H}(x)\mathbf{p}(x,\cdot))(\rho), \tag{2.77}$$

$$q_2(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\zeta\left(C^+\left(\hat{V}(x,\cdot)P_+^{-1}(x,\cdot)\right)\right)(\zeta)(P_+(x,\zeta)-I)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\zeta\left(C^-\left(\hat{V}(x,\cdot)P_+^{-1}(x,\cdot)\right)\right)(\zeta)(P_-(x,\zeta)-I).$$

Последнее представление преобразуем к виду:

$$q_2(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\zeta(\hat{V}P_+^{-1})(x,\zeta)\hat{P}_-(x,\zeta)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\zeta(\hat{V}P_+^{-1})(x,\zeta)\hat{P}_+(x,\zeta). \tag{2.78}$$

Используя представление (2.41) и оценку (2.42), получаем:

$$\left(\hat{V}P_+^{-1}\right)(x,\rho) = E^+(x,\rho)\hat{w}_+(\rho)(E^+(x,\rho))^{-1}$$

$$-E^-(x,\rho)\hat{w}_-(\rho)(E^-(x,\rho))^{-1} + O(\exp(-\tau|\rho|x)),\ \tau>0 \tag{2.79}$$

равномерно по $(x,\rho) : |\rho x| > 1$, т.е., в частности, по $\rho \in \operatorname{supp}(v(\cdot)-v_0(\cdot))$ при всех достаточно больших x. Отметим, что из полученного результата вытекает, в частности, оценка:

$$V_1(x,\rho) = \hat{V}(x,\rho)P_+^{-1}(x,\rho) + P_+^{-1}(x,\rho) - P_-^{-1}(x,\rho)$$

$$= O(\exp(-\tau|\rho|x)),\ \tau>0 \tag{2.80}$$

равномерно по $\rho \in \operatorname{supp}(v(\cdot)-v_0(\cdot))$ при всех достаточно больших x.

Рассмотрим теперь подробнее функции $E^{\pm}(x,\rho)\hat{w}_{\pm}(\rho)(E^{\pm}(x,\rho))^{-1}$. Пусть $\rho \in \Sigma_\nu$, где $\nu \in \{1,\ldots,n\}$ произвольно. Тогда справедливо представление:

$$\exp(\rho x R^{\pm})\hat{w}_{\pm}(\rho)\exp(-\rho x R^{\pm}) = \sum_{k\in I_-}\exp(\rho x(R_k^{\pm}-R_{k+1}^{\pm}))(\hat{w}_{\pm}(\rho))_{k,k+1}\mathfrak{e}_{k,k+1},$$

где $\mathfrak{e}_{jk}$ – матрица, единственный ненулевой элемент которой равен 1 и находится в позиции (j,k). Пользуясь асимптотиками функций $E^{\pm}(x,\rho)$, после очевидных преобразований приходим к выражению:

$$E^{\pm}(x,\rho)\hat{w}_{\pm}(\rho)(E^{\pm}(x,\rho))^{-1} =$$

$$\sum_{k\in I_-}\exp(\rho x(R_k^\pm - R_{k+1}^\pm))(\hat w_\pm(\rho))_{k,k+1}\sum_{s=0}^{m-1}(\rho x)^{-s}\mathbf{M}_{ks}^\pm + O\left(x^{-m}\right),$$

в котором $\mathbf{M}_{ks}^\pm$ некоторые постоянные матрицы и $O(\cdot)$ равномерно по $\rho\in\operatorname{supp}(v(\cdot)-v_0(\cdot))$ при всех достаточно больших x. Полученное представление можно, в свою очередь, преобразовать к виду:

$$E^\pm(x,\rho)\hat w_\pm(\rho)(E^\pm(x,\rho))^{-1} = \\ \sum_{k\in I_-}\sum_{s=0}^{m-1} x^{-s}\exp(\rho x(R_k^\pm - R_{k+1}^\pm))f_{ks}^\pm(\rho) + O\left(x^{-m}\right), \quad (2.81)$$

где $f_{ks}^\pm(\cdot)$ – некоторые бесконечно дифференцируемые матрицы-функции.

Поскольку для каждого $\nu=\overline{1,N}$ имеем:

$$\int\limits_{\Sigma_\nu} d\rho\exp(\rho x(R_k^\pm - R_{k+1}^\pm))f_{ks}^\pm(\rho) = O\left(x^{-m}\right)$$

при $x\to\infty$ (интеграл в левой части есть фактически преобразование Фурье-Лапласа от финитной бесконечно дифференцируемой функции), из (2.81) и (2.79) следует оценка

$$q_0(x) = O\left(x^{-m}\right).$$

Далее, пользуясь Леммой 2.6 (см. доказательство Леммы 2.7), получаем оценки:

$$\left\|C^\mp\left(F_{ks}^\pm(x,\cdot)\right)\right\|_{L_\infty(\Sigma)} = O\left(x^{-m}\right),$$

где

$$F_{ks}^\pm(x,\rho) = \exp(\rho x(R_k^\pm - R_{k+1}^\pm))f_{ks}^\pm(\rho),$$

откуда вытекает:

$$\|\hat P^\pm(x,\cdot)\|_{L_\infty(\Sigma)} = O\left(x^{-m}\right). \quad (2.82)$$

В силу представления (2.78) из (2.82) и (2.79) следует оценка:

$$q_2(x) = O\left(x^{-m}\right).$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы осталось рассмотреть функцию $q_1(\cdot)$. Прежде всего заметим, что в силу представления (2.73) и оценок (2.80), (2.82) следует:

$$\|\mathbf{H}(x)\| = O\left(x^{-m}\right). \quad (2.83)$$

Но тогда $\left\|(Id+\mathbf{H}(x))^{-1}\right\| = O(1)$ и из (2.72), (2.74) следует оценка $\|\mathbf{p}(x,\cdot)\|_{L_2(\Sigma)} = O(1)$. Теперь из представления (2.77) и оценки (2.83) с учетом финитности по ρ функции $(\mathbf{H}(x)\mathbf{p}(x,\cdot))(\rho)$ (см. (2.73)) вытекает оценка

$$q_1(x) = O\left(x^{-m}\right).$$

$\square$

Пользуясь результатом Теоремы 2.8, можно получить *достаточные* условия разрешимости изучаемой обратной задачи.

Следствие 2.2. *Существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое что любая* $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{00}$*:* $\|v - v_0\|_{L_\infty(\Sigma)} < \varepsilon_0$ *является данными рассеяния для некоторого оператора вида* (5) *с потенциалом* $q(\cdot) \in G_0^p$.

Доказательство. Поскольку, с учетом Замечания 2.1, имеем:

$$\|(\mathbf{A}(v,x) - Id)\varphi\|_{L_2(\Sigma)} = \|(C_-\varphi)\hat{V}(\hat{v},x,\cdot)\|_{L_2(\Sigma)} \le M\|v - v_0\|_{L_\infty(\Sigma)}\|\varphi\|_{L_2(\Sigma)},$$

ясно, что все $v(\cdot) \in \mathbf{V}$ с достаточно малой нормой $\|v - v_0\|_{L_\infty(\Sigma)}$ принадлежат $\mathbf{V}_0$.

Убедимся, что любая $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{00}$ с достаточно малой нормой $\|v - v_0\|_{L_\infty(\Sigma)}$ удовлетворяет условию 2 Теоремы 2.7.

Зафиксируем произвольное $k \in \{1,\dots,n\}$. Для каждого $\nu = 1,\dots,N$ функция

$$\frac{v_{kk}(\rho)}{v_{0,kk}} - 1,\ \rho \in \Sigma_\nu$$

финитна (напомним, что $v_{0,kk}(\cdot)$ - отличная от нуля постоянная на каждом из лучей Σ_ν). Отсюда следует, в частности, что

$$\Delta_{\Sigma_\nu} \arg\left(\frac{v_{kk}(\rho)}{v_{0,kk}}\right) = 2\pi m_\nu,\ m_\nu \in \mathbb{Z}.$$

Если норма $\|v - v_0\|_{L_\infty(\Sigma)}$ достаточно мала, то $m_\nu = 0$ для всех ν. Это позволяет в определении функции

$$u_k(\rho) := \log\frac{v_{kk}(\rho)}{v_{0,kk}},\ \rho \in \Sigma_\nu$$

для каждого $\nu = 1,\dots,N$ выбрать ветвь логарифма таким образом, чтобы $u_k(\cdot)$ была финитной на Σ_ν.

Определим функцию $\delta_k(\rho) = \delta_{0k}(\rho)\exp(-Cu_k(\rho))$, $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$. Поскольку $u_k(\rho)$ по построению - бесконечно дифференцируемая функция с носителем в некотором кольце $\{\rho \in [r_1, r_2]\}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, справедлива асимптотика $\delta_k(\rho)/\delta_{0k}(\rho) = 1 + o(1)$, $\rho \to \infty$, причем $\delta_k(\cdot)/\delta_{0k}(\cdot) - 1 \in L_2(\Sigma)$. Кроме того, в каждой точке $\rho \in \Sigma'$ существуют пределы $\delta_k^{\pm}(\rho) = \delta_{0k}^{\pm}(\rho)\exp(-C^{\pm}u_k(\rho))$. Непосредственным вычислением проверяется, что

$$\frac{\delta_k^-(\rho)}{\delta_k^+(\rho)} = v_{kk}(\rho).$$

Выполнение прочих условий на $\delta_k(\cdot)$ следует из свойств $\delta_{0k}(\cdot)$.

Поскольку согласно Теореме 2.8 условие 3 Теоремы 2.7 при указанных условиях выполнено автоматически, следствие доказано полностью.

$\square$

Глава 3 Обратные задачи рассеяния на некомпактных графах

§3.1 Задача рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля с бесселевой особенностью на некомпактном квантовом графе–звезде

Рассмотрим некомпактный метрический граф - звезду Γ, состоящий из конечного набора лучей $\{\mathcal{R}_k\}_{k=1}^p$, выходящих из общей внутренней вершины. Функцию y, заданную на луче $\mathcal{R}_k$, будем рассматривать как функцию локального параметра $x \in [0,\infty)$, причем значение параметра $x=0$ соответствует вершине. Функция y, заданная на Γ, будет рассматриваться как набор функций $\{y_k\}_{k=1}^p$ (где функция $y_k = y\,|_{\mathcal{R}_k}$ рассматривается как функция на $[0,\infty)$, как указано выше).

На каждом луче $\mathcal{R}_k$, $k=\overline{1,p}$ задано дифференциальное уравнение:

$$\ell_k y := -y'' + \left(\frac{\nu_{k0}}{x^2} + q_k(x)\right) y = \lambda y = \rho^2 y, \tag{3.1}$$

где $\nu_{k0} = \nu_k^2 - 1/4$, $\mathrm{Re}\nu_k > 1/2$, $\nu_k \notin \mathbb{N}$ и функция $q_k(\cdot)$ удовлетворяет условию:

$$\int\limits_0^1 \left|x^{1-2\nu_k} q_k(x)\right| dx + \int\limits_1^\infty |x q_k(x)|\, dx < \infty. \tag{3.2}$$

Комплексные (вообще говоря) числа ν_{k0} могут быть различными для различных лучей; но следующее условие предполагается выполненным всюду в данном параграфе.

Условие 1. *Если $\nu_j \neq \nu_k$, то $Re\nu_j \neq Re\nu_k$.*

Через $C_{kj}(x,\lambda)$ обозначаются решения невозмущенного уравнения:

$$-y'' + \frac{\nu_{0k}}{x^2} y = \lambda y = \rho^2 y, \tag{3.3}$$

представимые в виде рядов:

$$C_{kj}(x,\lambda) = x^{\mu_{kj}} \sum_{n=0}^{\infty} c_{jn}^{(k)} \lambda^n x^{2n},\ c_{10}^{(k)} c_{20}^{(k)} = (2\nu_k)^{-1}, \tag{3.4}$$

где

$$c_{jn}^{(k)} = (-1)^n c_{j0}^{(k)} \left(\prod_{s=1}^{n} ((2s+\mu_{kj})(2s+\mu_{kj}-1) - \nu_{0k}) \right)^{-1},$$

$\mu_{k1} = 1/2 - \nu_k$, $\mu_{k2} = 1/2 + \nu_k$. Заметим, что функции $C_{kj}(x,\lambda)$ являются целыми функциями спектрального параметра λ.

Через $S_{kj}(x,\lambda)$, $j = 1,2$ обозначим решения уравнения (3.1), удовлетворяющие интегральным уравнениям:

$$S_{kj}(x,\lambda) = C_{kj}(x,\lambda) - \int_0^x g_k(x,t,\lambda) q_k(t) S_{kj}(t,\lambda)\, dt, \tag{3.5}$$

где через $g_k(x,t,\lambda)$ обозначены функции Грина невозмущенного уравнения: $g_k(x,t,\lambda) = C_{k1}(x,\lambda)C_{k2}(t,\lambda) - C_{k2}(x,\lambda)C_{k1}(t,\lambda)$. При выполнении условия (3.2) уравнения (3.5) однозначно разрешимы для всех значений λ, решения $S_{kj}(x,\lambda)$ являются целыми функциями λ.

Через $f_k(x,\rho)$ будем обозначать решения Йоста уравнения (3.1), удовлетворяющее асимптотикам $f_k^{(\xi)}(x,\rho) = \mathrm{e}^{i\rho x}((i\rho)^\xi + o(1))$, $x \to \infty$, $\xi = 0,1$. Решения Йоста существуют (и единственны) при выполнении условия $xq_k(x) \in L_1(1,\infty)$ (и, следовательно, при выполнении (3.2)), аналитичны по параметру $\rho \in \mathbb{C}^+ := \{\rho : \mathrm{Im}\rho > 0\}$, функции $\rho^{-\mu_{k1}} f_k^{(\xi)}(x,\rho)$ непрерывны по $\rho \in \overline{\mathbb{C}}^+$.

Для решений Йоста имеет место разложение:

$$f_k(x,\rho) = b_{k1}(\rho) S_{k1}(x,\lambda) + b_{k2}(\rho) S_{k2}(x,\lambda),$$

где коэффициенты $b_{kj}(\rho)$, $j = 1,2$ называются *множителями Стокса*. Отношение $b_{k2}(\rho)/b_{k1}(\rho)$ совпадает с функцией Вейля $m_k(\lambda)$ (для луча $\mathcal{R}_k$, отождествляемого с полуосью $(0,\infty)$); задание функции Вейля $m_k(\cdot)$ однозначно определяет потенциал $q_k(\cdot)$.

Следующие свойства множителей Стокса вытекают непосредственно из хорошо известных свойств решений Йоста $f_k(x, \rho)$.

Утверждение 3.1. *При $\rho \to \infty$ справедливы асимптотики:*

$$b_{kj}(\rho) = \rho^{\mu_{kj}} \left(b_{kj}^{\infty} + O(\rho^{-1}) \right),$$

причем константы $b_{kj}^{\infty} \neq 0$ не зависят от потенциала $q_k(\cdot)$.

При $\rho \to 0$ выполняются асимптотики:

$$b_{kj}(\rho) = \rho^{\mu_{k1}} \left(b_{kj}^{0} + o(1) \right)$$

с некоторыми константами b_{kj}^{0} (зависящими, вообще говоря, от $q_k(\cdot)$).

Предположим, что некоторая функция $y(x)$, $x \in [0, \infty)$ удовлетворяет уравнению (3.1). Тогда определители Вронского $\langle S_{k1}, y \rangle$ и $\langle y, S_{k2} \rangle$ не зависят от x и, следовательно, однозначно определены следующие лиейные формы:

$$U_{k1}(y) := \sigma_k \langle y, S_{k2} \rangle,$$

$$U_{k2}(y) := \sigma_{k1} \langle y, S_{k2} \rangle + \sigma_{k2} \langle S_{k1}, y \rangle.$$

Всюду далее предполагается, что $\sigma_k \neq 0, \sigma_{k2} \neq 0$, $k = \overline{1, p}$.

Пусть заданная на Γ функция $y = \{y_k\}_{k=1}^{p}$ такова, что функции y_k, $k = \overline{1, p}$ удовлетворяют уравнениям (3.1). Определим *условия склейки* в вершине Γ следующим образом:

$$U_{j1}(y_j) = U_{k1}(y_k), j \neq k, \ \sum_{j=1}^{p} U_{j2}(y_j) = 0. \tag{3.6}$$

Определение 3.1. *Зафиксируем произвольное $\rho \in \mathbb{C}^+$. Функция $\psi_k(\rho) = \{\psi_{kj}(x, \rho)\}_{j=1}^{p}$, $x \in [0, \infty)$ называется решением типа Вейля, ассоциированным с лучом $\mathcal{R}_k$, если:*

- *функции $\psi_{kj}(\cdot, \rho)$, $j = \overline{1, p}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\ell_j \psi_{kj} = \rho^2 \psi_{kj}$;*
- $\psi_{kj}(x, \rho) = O\left(\exp(i\rho x)\right)$ *при $x \to \infty$, $j \neq k$;*
- $\psi_{kk}(x, \rho) = \exp(-i\rho x)(1 + o(1))$ *при $x \to \infty$;*
- $\psi_k(\rho)$ *удовлетворяет условиям склейки* (3.6).

Зафиксируем произвольное k.

Ясно, что любая функция, представимая в виде:

$$\psi_{kj}(x,\rho)=\gamma_{kj}(\rho)f_j(x,\rho), j\neq k,$$
$$\psi_{kk}(x,\rho)=\gamma_{kk}(\rho)f_k(x,\rho)+\frac{2i\rho}{b_{k1}(\rho)}S_{k2}(x,\lambda), \quad (3.7)$$

независимо от выбора коэффициентов $\gamma_{kj}(\rho)$ удовлетворяет всем условиям Определения 3.1, за исключением условия склейки (3.6). Подставляя (3.7) в (3.6) и учитывая, что $\langle f_j, S_{j2}\rangle = b_{j1}$, $\langle S_{j1}, f_j\rangle = b_{j2}$, приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sigma_j b_{j1}\gamma_{kj}+\beta_k=0,\ j=\overline{1,p},\ \sum_{j=1}^{p}(\sigma_{j1}b_{j1}+\sigma_{j2}b_{j2})\gamma_{kj}=-\sigma_{k2}\delta_k,\ \delta_k=\frac{2i\rho}{b_{k1}} \quad (3.8)$$

относительно коэффициентов $\gamma_{kj}, j=\overline{1,p}$, β_k. Решая (3.8) по правилу Крамера и подставляя полученный результат в представление (3.7), заключаем, что $\psi_k(\rho)$ существует (и единственна) для всех значений $\rho\in\overline{\mathbb{C}}^{+}$, не являющихся корнями функции $b_{k1}(\rho)\Delta(\rho)$, где:

$$\Delta(\rho)=\sum_{s=1}^{p}(\sigma_{s1}b_{s1}(\rho)+\sigma_{s2}b_{s2}(\rho))\prod_{j\neq s}\sigma_j b_{j1}(\rho) \quad (3.9)$$

Всюду далее предполагается выполненным следующее условие.

Условие 2. *Все корни функций $b_{k1}(\rho)\Delta(\rho)$, $k=\overline{1,p}$ простые, все ненулевые корни невещественны.*

Пусть $\{1,...,p\}=\bigcup\limits_{\xi=1}^{m} I_\xi$, где попарно непересекающиеся подмножества I_ξ таковы, что для любого ξ, $j,k\in I_\xi$ выполнено $\nu_j=\nu_k=:\tau_\xi$ и $\mathrm{Re}\tau_1>\cdots>\mathrm{Re}\tau_m$.

Следующие свойства характеристической функции $\Delta(\cdot)$ вытекают непосредственно из представления (3.9) и Утверждения 3.1.

Лемма 3.1. *При $\rho\to\infty$ справедлива асимптотика:*

$$\Delta(\rho)=\sum_{\xi=1}^{m}\rho^{\mu_1+2\tau_\xi}\left(a_\xi^\infty+O(\rho^{-1})\right),$$

где

$$a_\xi^\infty=\sum_{s\in I_\xi}\sigma_{s2}b_{s2}^\infty\prod_{j\neq s}\sigma_j b_{j1}^\infty,\ \mu_1:=\sum_{j=1}^{p}\mu_{j1}.$$

При $\rho \to 0$ имеет место асимптотика:

$$\Delta(\rho) = \rho^{\mu_1}(d^0 + o(1)), \; d^0 = \sum_{s=1}^{p}(\sigma_{s1}b^0_{s1} + \sigma_{s2}b^0_{s2})\prod_{j\neq s}\sigma_j b^0_{j1}.$$

Всюду далее предполагаются выполненными следующие условия, которые можно интерпретировать как условие «регулярности» (являющиеся в некотором смысле обобщением классических условий регулярности по Биркгофу) и условие «общего положения» при $\rho \to 0$ (являющееся аналогом условия «genericity at 0» [68]).

Условие 3. $a^\infty_1 \neq 0$.

Условие 4. $b^0_{j1} \neq 0$, $j = \overline{1,p}$, $d^0 \neq 0$.

Рассмотрим подробнее функцию ψ_{kk}. Используя (3.7) и представления:

$$\gamma_{kk}(\rho) = \delta_k(\rho)\cdot\frac{\Delta_k(\rho)}{\Delta(\rho)}, \; \delta_k(\rho) = \frac{2i\rho}{b_{k1}(\rho)}, \; \Delta_k(\rho) = (\sigma_k)^2\prod_{j\neq k}\sigma_j b_{j1}(\rho), \tag{3.10}$$

вытекающие из (3.8), выводим следующее утверждение.

Лемма 3.2. *При выполнении Условия 4 имеют место асимптотики:*

$$\gamma_{kk}(\rho) = O\left(\rho^{1-2\mu_{k1}}\right)$$

при $\rho \to 0$,

$$\psi^{(\xi-1)}_{kk}(x,\rho) = O\left(\rho^{\mu_{k2}}\right), \; \xi = 0, 1$$

при $\rho \to 0$ для любого фиксированного $x > 0$.

Из Утверждения 3.1 и Леммы 3.1 следует, что, при выполнении Условий 2–4 функция $b_{k1}(\rho)\Delta(\rho)$ имеет конечное (возможно, пустое) множество простых корней, функция $\psi_{kk}(x,\rho)$ имеет в этих точках простой полюс или устранимую особенность. Обозначим множество полюсов функции $\psi_{kk}(x,\rho)$ через Z^+_k.

Из представлений (3.7), (3.10) следует, что для $\rho_0 \in Z^+_k$ справедливо:

$$\mathrm{res}_{\rho=\rho_0}\psi_{kk}(x,\rho) = \alpha_k(\rho_0)f_k(x,\rho_0) = \alpha_k(\rho_0)\exp(i\rho_0 x)(1+o(1)), x\to\infty, \tag{3.11}$$

где $\alpha_k(\rho_0)$ – некоторые постоянные. Действительно, при выполнении Условия 2 функции $\Delta(\rho)$ и $b_{k1}(\rho)$ не имеют общих корней; в случае, когда $\Delta(\rho_0) = 0$ (3.11) очевидно; если же ρ_0 является корнем функции $b_{k1}(\rho)$, то $S_{k2}(x,\rho_0)$ пропорционально $f_k(x,\rho_0)$ и представление (3.7) также приводит к (3.11).

Далее, для ненулевых вещественных ρ функции $\{f_k(\cdot,\rho), f_k(\cdot,-\rho)\}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.1), что приводит к следующему тождеству, аналогичному тождеству рассеяния классической теории рассеяния на вещественной оси:

$$\psi_{kk}(x,\rho) = f_k(x,-\rho) + r_k(\rho) f_k(x,\rho) = \exp(-i\rho x) + r_k(\rho)\exp(i\rho x) + o(1), x \to \infty. \tag{3.12}$$

Определение 3.2. *Функцию $r_k(\rho)$, $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ будем называть коэффициентом отражения, ассоциированным с лучом $\mathcal{R}_k$. Набор*

$$J_k := \{r_k(\cdot), Z_k^+, \alpha_k(\rho), \rho \in Z_k^+\}$$

будем называть данными рассеяния, ассоциированными с лучом $\mathcal{R}_k$. Набор $J = \{J_k\}_{k=1}^{p-1}$ будем называть данными рассеяния для графа Γ.

Мы начнем исследование обратной задачи рассеяния на Γ со следующей частичной обратной задачи. Зафиксируем произвольное $k \in \{1,\dots,p\}$.

Задача $IP(k)$**.** *По заданным данным рассеяния J_k, ассоциированным с лучом $\mathcal{R}_k$, $k \in \{1,\dots,p\}$ найти потенциал $q_k(\cdot)$ на этом луче.*

Договоримся о некоторых обозначениях, которые будут использоваться всюду далее в настоящем параграфе. Обозначим через L заданную на графе Γ задачу, состоящую из дифференциальных уравнений (3.1) на каждом из лучей $\mathcal{R}_j$, $j = \overline{1,p}$ и условий склейки (3.6). Наряду с задачей L рассмотрим задачу $\tilde{L}$, состоящей также (3.1), (3.6), но с другими потенциалами $\tilde{q}_j(\cdot)$, $j = \overline{1,p}$; при этом будем предполагать, что $\tilde{\nu}_{k0} = \nu_{k0}$, $\tilde{\sigma}_k = \sigma_k$, $\tilde{\sigma}_{k\nu} = \sigma_{k\nu}$. Кроме того, мы предположим, что Условия 2–4 выполнены для обеих задач L и $\tilde{L}$. Условимся, что если символ η обозначает некоторый объект, относящийся к задаче L, то $\tilde{\eta}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к задаче $\tilde{L}$, и $\hat{\eta} := \eta - \tilde{\eta}$.

Договоримся, кроме того, использовать следующие обозначения. Если A обозначает некоторую матрицу, то A_j обозначает ее j-ю строку. Если некоторая функция $f(\cdot)$ голоморфна в проколотой окрестности точки ρ_0, то символы $f_{\langle m\rangle}(\rho_0)$ коэффициенты ее ряда Лорана:

$$f(\rho) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\rho-\rho_0)^m f_{\langle m\rangle}(\rho_0).$$

Если некоторая функция $f(\cdot)$ мероморфна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то для вещественных ρ используются обозначения: $f^{\pm}(\rho) := \lim\limits_{\varepsilon\to+0} f(\rho \pm i\varepsilon)$ (при условии существования соответствующих пределов).

Введем в рассмотрение матрицу спектральных отображений

$$P(x,\rho) := \Psi(x,\rho)\tilde{\Psi}^{-1}(x,\rho),$$

где:

$$\Psi(x,\rho) := \begin{pmatrix} \psi_{kk}(x,\rho) & f_k(x,\rho) \\ \psi'_{kk}(x,\rho) & f'_k(x,\rho) \end{pmatrix}, \ \rho \in \mathbb{C}^+,$$

$$\Psi(x,\rho) := \Psi(x,-\rho), \ \rho \in \mathbb{C}^- := \{\rho : \mathrm{Im}\rho < 0\}. \quad (3.13)$$

Лемма 3.3. *Для каждого фиксированного $x > 0$ матрица-функция $P(x,\rho)$ ограничена при $\rho \to 0$ и $\rho \to \infty$. Более того, при $\rho \to \infty$ справедлива асимптотика $P_1(x,\rho) = I_1 + O(\rho^{-1})$ (где I обозначает единичную матрицу).*

Доказательство. В силу симметрии достаточно рассмотреть $\rho \in \overline{\mathbb{C}}^+$. Для ненулевых $\rho \in \overline{\mathbb{C}}^+$ имеем $\det\Psi = \det\tilde{\Psi} = 2i\rho$ и таким образом:

$$2i\rho P_{\xi 1}(x,\rho) = \psi_{kk}^{(\xi-1)}(x,\rho)\tilde{f}'_k(x,\rho) - f_k^{(\xi-1)}(x,\rho)\tilde{\psi}'_{kk}(x,\rho),$$

$$2i\rho P_{\xi 2}(x,\rho) = f_k^{(\xi-1)}(x,\rho)\tilde{\psi}_{kk}(x,\rho) - \psi_{kk}^{(\xi-1)}(x,\rho)\tilde{f}_k(x,\rho).$$

Из Леммы 3.2 и оценок $f_k^{(\xi-1)}(x,\rho) = O\left(|\rho^{\mu_{k1}}|\right)$ вытекает ограниченность $P(x,\rho)$ при $\rho \to 0$.

При $\rho \to \infty$ справедливы асимптотики:

$$f_k^{(\xi)}(x,\rho) = (i\rho)^{\xi} \exp(i\rho x)[1],$$

$$S_{k2}^{(\xi)}(x,\lambda) = \beta_{k0}\rho^{-\mu_{k2}} \left((-i\rho)^{\xi} \exp(-i\rho x)[1] + (i\rho)^{\xi}\gamma_{k0} \exp(i\rho x)[1]\right), \quad (3.14)$$

где $[1] := 1 + O(\rho^{-1})$, а константы β_{k0}, γ_{k0} зависят только от ν_{k0} (и, следовательно, совпадают для задач L и $\tilde{L}$). Из асимптотик (3.14) вытекают, в частности, оценки:

$$\hat{f}_k^{(\xi)}(x,\rho) = O\left((i\rho)^{\xi-1} \exp(i\rho x)\right), \ \hat{S}_{k2}^{(\xi)}(x,\lambda) = O\left(\rho^{-\mu_{k2}+\xi-1} \exp(-i\rho x)\right). \quad (3.15)$$

Далее, из Леммы 3.1 следуют оценки:

$$\hat{\Delta}(\rho) = O\left(\rho^{\mu_1+2\tau_1-1}\right), \ \Delta^{-1}(\rho) = O\left(\rho^{-\mu_1-2\tau_1}\right). \quad (3.16)$$

С другой стороны, в силу (3.9) справедливы асимптотики:

$$\Delta_k(\rho) = \rho^{\mu_1-\mu_{k1}}(d_k^\infty + O(\rho^{-1})),\ d_k^\infty = \sigma_k^2 \prod_{j\neq k} \sigma_j b_{j1}^\infty,$$

из которых, пользуясь представлением (3.10), Утверждением 3.1 и оценками (3.16) выводим:

$$\gamma_{kk}(\rho) = O\left(\rho^{2\nu_{k1}-2\tau_1}\right) = O(1),\ \hat{\gamma}_{kk}(\rho) = O(\rho^{-1}). \tag{3.17}$$

Из асимптотик (3.14), (3.15), (3.17) следуют оценки:

$$\psi_{kk}^{(\xi)}(x,\rho) = O\left(\rho^\xi \exp(-i\rho x)\right),\ \hat{\psi}_{kk}^{(\xi)}(x,\rho) = O\left(\rho^{\xi-1}\exp(-i\rho x)\right). \tag{3.18}$$

Вместе с (3.14), (3.15), оценки (3.18) доказывают требуемую ограниченность $P(x,\rho)$ при $\rho\to\infty$ и оценку $P_{12}(x,\rho) = O(\rho^{-1})$. Оценим $P_{11}(x,\rho)-1$, используя равенство:

$$2i\rho P_{11}(x,\rho) = \psi_{kk}(x,\rho)\tilde{f}_k'(x,\rho) - f_k(x,\rho)\tilde{\psi}_{kk}'(x,\rho) =$$

$$2i\rho + \hat{\psi}_{kk}(x,\rho)\tilde{f}_k'(x,\rho) - \hat{f}_k(x,\rho)\tilde{\psi}_{kk}'(x,\rho)$$

(где было учтено, что $\langle\tilde{\psi}_{kk}, \tilde{f}_k\rangle = 2i\rho$) и (3.14), (3.15), (3.18).

$\square$

Ясно, что матрица-функция $P(x,\rho)$ мероморфна по $\rho\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ и при выполнении Условия 2 для всех ненулевых вещественных ρ существуют пределы $P^\pm(x,\rho)$, являющиеся, в свою очередь, непрерывными ограниченными функциями $\rho\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Множество полюсов (возможно, пустое) функции $P(x,\rho)$ является подмножеством (возможно, собственным) множества $\check{Z}_k := Z_k \cup \tilde{Z}_k$, где $Z_k = \{\pm\rho, \rho\in Z_k^+\}$.

Лемма 3.4. *Каждая точка $\rho_0\in\check{Z}_k$ является либо простым полюсом, либо устранимой особенностью функции $P(x,\rho)$. Справедливо представление:*

$$P_{\langle -1\rangle}(x,\rho_0) = \Psi_{\langle 0\rangle}(x,\rho_0)\hat{v}(\rho_0)(\tilde{\Psi}^{-1})_{\langle 0\rangle}(x,\rho_0),$$

где $v(\rho_0) := 0$, если $\rho_0\notin Z_k$, и

$$v(\rho_0) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_k(\rho_0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

если $\rho_0 \in Z_k$. *Здесь (и далее)* $\alpha_k(\rho_0)$ *при* $\rho_0 \in Z_k^+$ *обозначают константы из* (3.11), *а при* $\rho_0 \in Z_k \cap \mathbb{C}^-$ $\alpha_k(\rho_0) := -\alpha_k(-\rho_0)$.

Доказательство. Произвольная точка $\rho_0 \in \check{Z}_k$ является простым полюсом или устранимой особенностью функции $\Psi(x,\rho)$, причем по определению матрицы $v(\rho_0)$ имеем:

$$\Psi_{\langle -1\rangle}(x,\rho_0) = \Psi_{\langle 0\rangle}(x,\rho_0)v(\rho_0). \tag{3.19}$$

Более того, поскольку $\det\Psi = \det\tilde{\Psi} = \pm 2i\rho$ при $\pm\rho \in \mathbb{C}^+$, матрица $\tilde{\Psi}^{-1}(x,\rho)$ также имеет в точке ρ_0 простой полюс или устранимую особенность. Из соотношения $\tilde{\Psi}\tilde{\Psi}^{-1} = I$ получаем представление:

$$(\tilde{\Psi}^{-1})_{\langle -1\rangle}(x,\rho_0) = -\tilde{v}(\rho_0)(\tilde{\Psi}^{-1})_{\langle 0\rangle}(x,\rho_0). \tag{3.20}$$

Таким образом, кратность полюса функции $P(x,\rho)$ в точке ρ_0 не превосходит 2. Но $P_{\langle -2\rangle} = \Psi_{\langle -1\rangle}(\tilde{\Psi}^{-1})_{\langle -1\rangle} = -\Psi_{\langle 0\rangle}v\tilde{v}(\tilde{\Psi}^{-1})_{\langle 0\rangle}$. Заметив, что $v(\rho_0)\tilde{v}(\rho_0) = 0$, приходим к выводу $P_{\langle -2\rangle}(x,\rho_0) = 0$. Вычисляя $P_{\langle -1\rangle} = \Psi_{\langle -1\rangle}(\tilde{\Psi}^{-1})_{\langle 0\rangle} + \Psi_{\langle 0\rangle}(\tilde{\Psi}^{-1})_{\langle -1\rangle}$ с помощью представлений (3.19), (3.20), получаем требуемое.

□

Сформулируем теорему единственности решения задачи $IP(k)$.

Теорема 3.1. *Если* $J_k = \tilde{J}_k$, *то* $q_k(x) = \tilde{q}_k(x)$ *для п.в.* $x > 0$. *Таким образом, задание данных рассеяния, ассоциированных с лучом* $\mathcal{R}_k$ *однозначно определяет потенциал* q_k *на этом луче.*

Доказательство. Из тождеств (3.12) вытекает условие сопряжения для матриц $\Psi^{\pm}(x,\rho)$:

$$\Psi_+(x,\rho) = \Psi_-(x,\rho)v(\rho), \ \ \rho \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{3.21}$$

где матрица сопряжения дается формулой:

$$v(\rho) = \begin{pmatrix} r_k(\rho) & 1 \\ 1 - r_k(\rho)r_k(-\rho) & -r_k(-\rho) \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Из (3.22) видно, что совпадение $\tilde{r}_k = r_k$ влечет равенство $\tilde{v}(\rho) = v(\rho)$ для всех $\rho \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и, следовательно, равенство $P^+(x,\rho) = P^-(x,\rho)$ для каждого фиксированного $x > 0$ и всех ненулевых вещественных ρ. Таким образом, если $\tilde{J}_k = J_k$,то матрица-функция $P(x,\rho)$ мероморфна по $\rho \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, причем множество ее полюсов является подмножеством множества $\check{Z}_k$.

Далее, совпадение $\tilde{J}_k = J_k$ подразумевает также $\check{Z}_k = \tilde{Z}_k = Z_k$ и $\tilde{v}(\rho_0) = v(\rho_0)$ для всех $\rho_0 \in Z_k$. Согласно Лемме 3.4 имеем $P_{\langle -1 \rangle}(x, \rho_0) = 0$, т.е. $P(x, \rho)$ имеет в точке $\rho_0 \in Z_k$ устранимую особенность. Таким образом, $P(x, \rho)$ голоморфна по $\rho \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ и в силу Леммы 3.3 ограничена при $\rho \to 0$ и $\rho \to \infty$. Более того, из Леммы 3.3 известно, что $P_1(x, \rho) - I_1 \to 0$ при $\rho \to \infty$. Это означает, что $P_1(x, \rho) - I_1$ тождественно равна 0. Таким образом, имеем $P_1(x, \rho) \equiv I_1$, что влечет $f_k(x, \rho) \equiv \tilde{f}_k(x, \rho)$ и, как следствие, $q_k(x) = \tilde{q}_k(x)$ для п.в. $x > 0$.

$\square$

Перейдем к построению конструктивной процедуры решения задачи $IP(k)$. Всюду далее полагаем, что числа ν_{j0}, $j = \overline{1,p}$ и коэффициенты линейных форм U_{j1}, U_{j2} в условиях склейки (3.6) известны. Через $\tilde{L}$ обозначим известную априори «модельную» задачу с известными $q_j(\cdot), j = \overline{1,p}$.

Ниже мы покажем, что решение обратной задачи $IP(k)$ может быть сведено, в определенном смысле, к решению линейного уравнения («основного уравнения») в некотором банаховом пространстве и докажем однозначную корректную разрешимость этого уравнения.

Рассмотрим снова матрицу спектральных отображений $P(x, \rho)$. В силу Леммы 3.3 имеем:

$$\int\limits_{|\mu|=R} \frac{d\mu}{\mu - \rho}(P_1(x, \mu) - I_1) \to 0$$

при $R \to \infty$, откуда, применяя интегральную формулу Коши, выводим следующее соотношение:

$$P_1(x, \rho) - I_1 = \sum_{\mu \in \check{Z}_k} (\rho - \mu)^{-1} P_{1, \langle -1 \rangle}(x, \mu) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{\mu - \rho} \left(P_1^+(x, \mu) - P_1^-(x, \mu) \right), \tag{3.23}$$

где $\rho \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \check{Z}_k)$ произвольно.

По матрице сопряжения $v(\cdot)$ построим матрицу

$$V(x, \rho) := \left(P^-(x, \rho) \right)^{-1} P^+(x, \rho) = \tilde{\Psi}^-(x, \rho) v(\rho) \left(\tilde{\Psi}^+(x, \rho) \right)^{-1},$$

$\rho \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Заметим, что матрица V однозначно определяется заданием модельной задачи $\tilde{L}$ и данных рассеяния J_k. Заметим, кроме того, что в силу Леммы 3.3, с учетом очевидного равенства $\det P = 1$, можно утверждать, что $V(x, \rho)$ непрерывна и ограничена по $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ при каждом фиксированном $x > 0$.

Определим матрицы:

$$d_1(x,\rho,\mu_0) = \left[(\rho-\mu)^{-1}\Psi^{-1}(x,\mu)\right]_{\langle 0\rangle}\Big|_{\mu=\mu_0},\ \rho\in\mathbb{C}\setminus\check{Z}_k, \mu_0\in\check{Z}_k$$

$$d_2(x,\rho_0,\mu) = \left[(\rho-\mu)^{-1}\Psi(x,\rho)\right]_{\langle 0\rangle}\Big|_{\rho=\rho_0},\ \mu\in\mathbb{C}\setminus\check{Z}_k, \rho_0\in\check{Z}_k$$

$$D(x,\rho,\mu) := (\rho-\mu)^{-1}\Psi^{-1}(x,\mu)\Psi(x,\rho),\ \rho\neq\mu, \rho,\mu\in\mathbb{C}\setminus\check{Z}_k,$$

$$D(x,\rho,\mu_0) := [D(x,\rho,\mu)]_{\langle 0\rangle}\Big|_{\mu=\mu_0},\ \rho\in\mathbb{C}\setminus\check{Z}_k, \mu_0\in\check{Z}_k$$

$$D(x,\rho_0,\mu) := [D(x,\rho_0,\mu)]_{\langle 0\rangle}\Big|_{\rho=\rho_0},\ \mu\in\mathbb{C}\setminus\check{Z}_k, \rho_0\in\check{Z}_k$$

$$D(x,\rho_0,\mu_0) := [D(x,\rho,\mu_0)]_{\langle 0\rangle}\Big|_{\rho=\rho_0} = [D(x,\rho_0,\mu)]_{\langle 0\rangle}\Big|_{\mu=\mu_0},\ \rho_0\in\check{Z}_k,\ \mu_0\in\check{Z}_k,$$

а также матрицы $\tilde{d}_j(x,\rho,\mu),\ j=1,2,\ \tilde{D}(x,\rho,\mu)$ по аналогичным формулам, в которых $\Psi(x,\rho)$ заменены на $\tilde{\Psi}(x,\rho)$. Также определим:

$$\tilde{A}(x,\rho,\mu) := \tilde{D}(x,\rho,\mu)\hat{v}(\rho),\ A(x,\rho,\mu) := -D(x,\rho,\mu)\hat{v}(\rho),\ \rho\in\check{Z}_k,\ \mu\in\check{Z}_k.$$

Лемма 3.5. *При $\mu\in\check{Z}_k$, $\rho\notin\check{Z}_k$ справедливы равенства:*

$$(\rho-\mu)^{-1}P_{\langle -1\rangle}(x,\mu) = \Psi_{\langle 0\rangle}(x,\mu)\hat{v}(\mu)\tilde{d}_1(x,\rho,\mu),$$

$$(\rho-\mu)^{-1}P_{\langle -1\rangle}(x,\mu)\tilde{\Psi}(x,\rho) = \Psi_{\langle 0\rangle}(x,\mu)\hat{v}(\mu)\tilde{D}(x,\rho,\mu).$$

При $\xi\in\check{Z}_k$, $\rho,\mu\notin\check{Z}_k$ справедливо равенство:

$$(\rho-\xi)^{-1}(\xi-\mu)^{-1}\Psi^{-1}(x,\mu)P_{\langle -1\rangle}(x,\xi)\tilde{\Psi}(x,\rho) = D(x,\xi,\mu)\hat{v}(\xi)\tilde{D}(x,\rho,\xi).$$

Доказательство. Все соотношения проверяются непосредственным вычислением. Имеем, например,

$$\tilde{d}_1(x,\rho,\mu_0) = \left[(\rho-\mu)^{-1}\tilde{\Psi}^{-1}(x,\mu)\right]_{\langle 0\rangle}\Big|_{\mu=\mu_0} =$$

$$(\rho-\mu_0)^{-1}(\tilde{\Psi}^{-1})_{\langle 0\rangle}(x,\mu_0) + \left[(\rho-\mu)^{-1}\right]_{\langle 1\rangle}\Big|_{\mu=\mu_0}\cdot(\tilde{\Psi}^{-1})_{\langle -1\rangle}(x,\mu_0).$$

Домножая получившееся равенство на $\Psi_{\langle 0\rangle}(x,\mu_0)\hat{v}(\mu_0)$, используя далее Лемму 3.4, соотношение (3.20), и учитывая, что $\hat{v}(\mu_0)\tilde{v}(\mu_0)=0$, получаем первое из требуемых равенств. Остальные могут быть получены аналогично.

□

Следующее утверждение вытекает непосредственно из определения матриц $d_j(x,\rho,\mu)$.

Лемма 3.6. *Для каждого фиксированного $\mu \in \check{Z}_k$ матрица-функция $d_1(x,\rho,\mu)$ голоморфна по $\rho \in \mathbb{C}\setminus \check{Z}_k$. В частности, для вещественных ρ имеем $d_1(x,\rho+i0,\mu) = d_1(x,\rho-i0,\mu) = d_1(x,\rho,\mu)$, более того, $d_1(x,\cdot,\mu) \in L_2\left(\mathbb{R},\mathbb{C}^2\right)$. Аналогично, для каждого фиксированного $\rho \in \check{Z}_k$ матрица-функция $d_2(x,\rho,\mu)$ голоморфна по $\mu \in \mathbb{C}\setminus \check{Z}_k$, $d_2(x,\rho,\cdot) \in L_2\left(\mathbb{R},\mathbb{C}^2\right)$. Здесь и далее элементы пространства $\mathbb{C}^2$ рассматриваются как вектор-строки.*

Введем в рассмотрение интегральные операторы Коши:

$$(Cf)(\rho) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{\mu-\rho} f(\mu),\ \rho \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R},$$

$$(C^{\pm}f)(\rho) := (Cf)^{\pm}(\rho),\ \rho \in \mathbb{R}.$$

Напомним, что операторы $C^{\pm}$ непрерывны в $L_2(\mathbb{R},\mathcal{M})$ для любого конечномерного пространства $\mathcal{M}$; следующее соотношение справедливо для произвольных матриц-функций $F_1(\cdot), F_2(\cdot)$ (согласованных соответствующим образом размерностей) с элементами из $L_2(\mathbb{R})$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu (C^{\pm}F_1)(\mu)F_2(\mu) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu F_1(\mu)(C^{\mp}F_2)(\mu). \tag{3.24}$$

Определим:

$$\Phi(x,\rho) := \begin{cases} P_1^+(x,\rho) - P_1^-(x,\rho),\ \rho \in \mathbb{R}, \\ \Psi_{1,\langle 0\rangle}(x,\rho)\hat{v}(\rho),\ \rho \in \check{Z}_k \end{cases} \tag{3.25}$$

Из Леммы 3.3 следует $\Phi(x,\cdot)|_{\mathbb{R}} \in L_2\left(\mathbb{R},\mathbb{C}^2\right)$. Вернемся к соотношению (3.23); используя (3.25) и Лемму 3.5, перепишем его следующим образом:

$$P_1(x,\rho) - I_1 = \sum_{\mu\in\check{Z}_k} \Phi(x,\mu)\tilde{d}_1(x,\rho,\mu) + (C\Phi(x,\cdot))(\rho),\ \rho \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\check{Z}_k). \tag{3.26}$$

Переходя в (3.26) к пределам при $\pm\mathrm{Im}\rho \to 0$ и подставляя полученный результат в условие сопряжения $P_1^+ - P_1^- V = 0$, we arrive at:

$$\begin{gathered}(C^+\Phi(x,\cdot))(\rho) - (C^-\Phi(x,\cdot))(\rho)V(x,\rho) + \\ \sum_{\mu\in\check{Z}_k} \Phi(x,\mu)\tilde{d}_1(x,\rho,\mu)(I - V(x,\rho)) + I_1 - V_1(x,\rho) = 0,\ \rho \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.\end{gathered} \tag{3.27}$$

В случае $\check{Z}_k = \varnothing$ соотношение (3.27) при каждом фиксированном $x > 0$ можно рассматривать как линейное уравнение относительно $\Phi(x, \cdot) \in L_2\left(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2\right)$. В общем случае для получения замкнутой системы уравнений (3.27) следует дополнить некоторыми соотношениями в точках $\rho \in \check{Z}_k$. Для их получения воспользуемся следующими соображениями. Домножив (3.26) на $\tilde{\Psi}(x, \rho)$ и пользуясь Леммой 3.5, получим:

$$\Psi_1(x, \rho) - \tilde{\Psi}_1(x, \rho) = \sum_{\mu \in \check{Z}_k} \Psi_{1,\langle 0 \rangle}(x, \mu)\hat{v}(\mu)\tilde{D}(x, \rho, \mu) + \left(C\Phi(x)\right)(\rho)\tilde{\Psi}(x, \rho),$$

$\rho \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \check{Z}_k)$. Домножим получившееся соотношение на $\hat{v}(\rho_0)$, где $\rho_0 \in \check{Z}_k$ произвольно. Таким образом, мы пришли к равенству:

$$\Psi_1(x, \rho)\hat{v}(\rho_0) - \tilde{\Psi}_1(x, \rho)\hat{v}(\rho_0) =$$

$$\sum_{\mu \in \check{Z}_k} \Psi_{1,\langle 0 \rangle}(x, \mu)\hat{v}(\mu)\tilde{D}(x, \rho, \mu)\hat{v}(\rho_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{\mu - \rho}\Phi(x, \mu)\tilde{\Psi}(x, \rho)\hat{v}(\rho_0).$$

Взяв коэффициент $[\ldots]_{\langle 0 \rangle}\Big|_{\rho=\rho_0}$ рядов Лорана правой и левой частей и пользуясь снова Леммой 3.5, получаем:

$$\Phi(x, \rho_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu \Phi(x, \mu)\tilde{d}_2(x, \rho_0, \mu)\hat{v}(\rho_0) - \sum_{\mu \in \check{Z}_k} \Phi(x, \mu)\tilde{A}(x, \rho_0, \mu) =$$
$$\tilde{\Psi}_{1,\langle 0 \rangle}(x, \rho_0)\hat{v}(\rho_0), \rho_0 \in \check{Z}_k. \quad (3.28)$$

Соотношения (3.27), (3.28) будем рассматривать в совокупности как систему линейных уравнений относительно $\Phi(x, \rho)$, $\rho \in \mathbb{R} \cup \check{Z}_k$. Перепишем полученную систему уравнений как линейное уравнение в банаховом пространстве $\mathcal{H} := \mathcal{H}_r \oplus \mathcal{H}_d$, где $\mathcal{H}_r = L_2\left(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2\right)$, $\mathcal{H}_d = \left(\mathbb{C}^2\right)^{\check{Z}_k}$. Приведенные выше рассуждения показывают, что для каждого фиксированного $x > 0$ $\Phi(x, \cdot) \in \mathcal{H}$. Таким образом, система, образованная соотношениями (3.27), (3.28), эквивалентна при каждом $x > 0$ уравнению $\mathbf{A}(x)\Phi(x, \cdot) = G(x, \cdot)$, где

$$G(x, \rho) := \begin{cases} V_1(x, \rho) - I_1, \ \rho \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\Psi}_{1,\langle 0 \rangle}(x, \rho)\hat{v}(\rho), \rho \in \check{Z}_k, \end{cases}$$

$\mathbf{A}(x)$ – действующий в $\mathcal{H}$ линейный оператор, задаваемый операторной матрицей:

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{rr}(x) & \mathbf{A}_{rd}(x) \\ \mathbf{A}_{dr}(x) & \mathbf{A}_{dd}(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{rr}(x)\varphi = C^+\varphi - (C^-\varphi)V,\ (\mathbf{A}_{rd}(x)\varphi)(\rho) = \sum_{\mu\in\check{Z}_k}\varphi(\mu)\tilde{d}_1(x,\rho,\mu)(I-V(x,\rho)),\ \rho\in\mathbb{R},$$

$$(\mathbf{A}_{dr}(x)\varphi)(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\tilde{d}_2(x,\rho,\xi)\hat{v}(\rho)d\xi,\ \rho\in\check{Z}_k,$$

$$(\mathbf{A}_{dd}(x)\varphi)(\rho) = \varphi(\rho) - \sum_{\mu\in\check{Z}_k}\varphi(\mu)\tilde{A}(x,\rho,\mu),\ \rho\in\check{Z}_k.$$

Следующий результат играет центральную роль в построении конструктивной процедуры решения Задачи $IP(k)$.

Теорема 3.2. *Для каждого фиксированного $x > 0$:*

1. *$\Phi(x,\cdot)$ является единственным в пространстве $\mathcal{H}$ решением уравнения*

$$\mathbf{A}(x)\varphi = G(x,\cdot);$$

2. *оператор $\mathbf{A}(x)$ имеет ограниченный обратный.*

Доказательство. Фактически в доказательстве на данный момент нуждается только пункт 2. Проверим, что действующий в $\mathcal{H}$ ограниченный оператор, задаваемый следующей операторной матрицей:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{rr} & \mathbf{B}_{rd} \\ \mathbf{B}_{dr} & \mathbf{B}_{dd} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{rr}f = C^+(f\tilde{P}^+)P^+ - C^-(f\tilde{P}^+)P^-,$$

$$(\mathbf{B}_{rd}f)(\rho) = \sum_{\mu\in\check{Z}_k} f(\mu)d_1(\rho,\mu)(P^+(\rho) - P^-(\rho)),\ \rho\in\mathbb{R},$$

$$(\mathbf{B}_{dr}f)(\rho) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\tilde{P}^+(\xi)d_2(\rho,\xi)\hat{v}(\rho)d\xi,\ \rho\in\check{Z}_k,$$

$$(\mathbf{B}_{dd}f)(\rho) = f(\rho) - \sum_{\mu\in\check{Z}_k} f(\mu)A(x,\rho,\mu),\ \rho\in\check{Z}_k,$$

является обратным к оператору $\mathbf{A}$. Здесь и далее в рамках настоящего доказательства для краткости обозначений мы опускаем в списках аргументов произвольный $x > 0$. Символ P здесь и далее обозначает введенную выше матрицу спектральных отображений, $\tilde{P} := P^{-1}$.

Лемма 3.7. *Справедливы соотношения:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{(\rho-\xi)(\xi-\mu)}(P^+(\xi)-P^-(\xi))=$$

$$\frac{1}{\rho-\mu}P(\mu)-\frac{1}{\rho-\mu}P(\rho)+\sum_{\xi\in\check{Z}_k}d_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)\tilde{d}_1(\rho,\xi)$$

при невещественных $\rho\neq\mu$, $\rho,\mu\in\mathbb{C}\setminus\check{Z}_k$*;*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\rho-\xi}d_1(\xi,\mu)(P^+(\xi)-P^-(\xi))=\tilde{d}_1(\rho,\mu)-d_1(\rho,\mu)P(\rho)-\sum_{\xi\in\check{Z}_k}A(\xi,\mu)\tilde{d}_1(\rho,\xi),$$

$\rho\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\check{Z}_k),\mu\in\check{Z}_k$*;*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi-\mu}(P^+(\xi)-P^-(\xi))\tilde{d}_2(\rho,\xi)\hat{v}(\rho)=$$

$$P(\mu)\tilde{d}_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho)-d_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho)+\sum_{\xi\in\check{Z}_k}d_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)\tilde{A}(\rho,\xi),$$

$\mu\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\check{Z}_k),\rho\in\check{Z}_k$*;*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d_1(\xi,\mu)(P^+(\xi)-P^-(\xi))\tilde{d}_2(\rho,\xi)\hat{v}(\rho)d\xi=\tilde{A}(\rho,\mu)+A(\rho,\mu)-\sum_{\xi\in\check{Z}_k}A(\xi,\mu)\tilde{A}(\rho,\xi),$$

$\rho,\mu\in\check{Z}_k$*;*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{(\rho-\xi)(\xi-\mu)}(\tilde{P}^+(\xi)-\tilde{P}^-(\xi))=$$

$$\frac{1}{\rho-\mu}\tilde{P}(\mu)-\frac{1}{\rho-\mu}\tilde{P}(\rho)-\sum_{\xi\in\check{Z}_k}\tilde{d}_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)d_1(\rho,\xi),$$

$\rho,\mu\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\check{Z}_k)$*,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\rho-\xi}\tilde{d}_1(\xi,\mu)(\tilde{P}^+(\xi)-\tilde{P}^-(\xi))=d_1(\rho,\mu)-\tilde{d}_1(\rho,\mu)\tilde{P}(\rho)-\sum_{\xi\in\check{Z}_k}\tilde{A}(\xi,\mu)d_1(\rho,\xi),$$

$\rho\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\check{Z}_k),\mu\in\check{Z}_k$*,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi-\mu}(\tilde{P}^+(\xi)-\tilde{P}^-(\xi))d_2(\rho,\xi)\hat{v}(\rho)=$$

$$\tilde{P}(\mu)d_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho)-\tilde{d}_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho)+\sum_{\xi\in\check{Z}_k}\tilde{d}_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)A(\rho,\xi),$$

$\mu\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\check{Z}_k), \rho\in\check{Z}_k,$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{d}_1(\xi,\mu)(\tilde{P}^+(\xi)-\tilde{P}^-(\xi))d_2(\rho,\xi)\hat{v}(\rho)d\xi=$$

$$\tilde{A}(\rho,\mu)+A(\rho,\mu)-\sum_{\xi\in\check{Z}_k}\tilde{A}(\xi,\mu)A(\rho,\xi),$$

$\rho,\mu\in\check{Z}_k.$

Доказательство Леммы 3.7. Все перечисленные соотношения получаются аналогичным образом из следующего базового равенства:

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|\xi|=R}\frac{d\xi}{(\rho-\xi)(\xi-\mu)}P(\xi)=0,\ \ \rho,\mu\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\check{Z}_k), \tag{3.29}$$

вытекающего из Леммы 3.3.

Проиллюстрируем соответствующие вычисления на примере получения четвертого равенства. Домножая (3.29) на матрицу $\Psi^{-1}(\mu)$ слева, на матрицу $\tilde{\Psi}(\rho)$ справа, и вычисляя интеграл с помощью теоремы о вычетах, получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{(\rho-\xi)(\xi-\mu)}\Psi^{-1}(\mu)(P^+(\xi)-P^-(\xi))\tilde{\Psi}(\rho)=$$

$$\sum_{\xi\in\check{Z}_k}\frac{1}{(\rho-\xi)(\xi-\mu)}\Psi^{-1}(\mu)P_{\langle-1\rangle}(\xi)\tilde{\Psi}(\rho)+\frac{1}{\rho-\mu}\tilde{\Psi}^{-1}(\mu)\tilde{\Psi}(\rho)-\frac{1}{\rho-\mu}\Psi^{-1}(\mu)\Psi(\rho),$$

$\rho,\mu\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\check{Z}_k)$. Пользуясь Леммой 3.5, перепишем полученное равенство следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{(\rho-\xi)(\xi-\mu)}\Psi^{-1}(\mu)(P^+(\xi)-P^-(\xi))\tilde{\Psi}(\rho)=$$

$$\sum_{\xi\in\check{Z}_k}D(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)\tilde{D}(\rho,\xi)+\tilde{D}(\rho,\mu)-D(\rho,\mu),\ \ \rho,\mu\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\check{Z}_k).$$

Вычисляя при произвольных фиксированных $\rho \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \check{Z}_k)$, $\mu_0 \in \check{Z}_k$ коэффициенты $[...]_{\langle 0 \rangle}\big|_{\mu=\mu_0}$ рядов Лорана левой и правой частей, получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\rho - \xi} d_1(\xi, \mu_0)(P^+(\xi) - P^-(\xi))\tilde{\Psi}(\rho) =$$

$$-\sum_{\xi \in \check{Z}_k} A(\xi, \mu_0)\tilde{D}(\rho, \xi) + \tilde{D}(\rho, \mu_0) - D(\rho, \mu_0),\ \mu_0 \in \check{Z}_k, \rho \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \check{Z}_k).$$

Вычисляя (для произвольных $\rho_0, \mu_0 \in \check{Z}_k$) коэффициенты $[...]_{\langle 0 \rangle}\big|_{\rho=\rho_0}$ рядов Лорана обеих частей равенства и домножая их справа на $\hat{v}(\rho_0)$, приходим к требуемому равенству.

$\square$

Доказательство Теоремы 3.2 (продолжение). Ограниченность оператора $\mathbf{B}$ следует из Леммы 3.6, ограниченности операторов $C^{\pm}$ и ограниченности функций $V(x, \rho), P^{\pm}(x, \rho), \tilde{P}^{\pm}(x, \rho)$. Дальнейшее доказательство сводится к непосредственному подсчету элементов операторных матриц $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$.

Позиция (r,r). Пусть $\varphi = \mathcal{B}_{rr} f$, что эквивалентно:

$$\varphi(\rho) = f(\rho) + \left(C^-(f\tilde{P}^+)\right)(\rho)(P^+(\rho) - P^-(\rho)).$$

Тогда $(C\varphi)(\rho)$ для произвольного невещественного $\rho \in \mathbb{C} \setminus \check{Z}_k$ может быть записано в виде:

$$(C\varphi)(\rho) = (Cf)(\rho) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu \left(C^-(f\tilde{P}^+)\right)(\mu)F_\rho(\mu),$$

где $F_\rho(\mu) := (\rho - \mu)^{-1}(P^+(\mu) - P^-(\mu))$. Пользуясь равенством (3.24), запишем:

$$(C\varphi)(\rho) = (Cf)(\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu (f\tilde{P}^+)(\mu)(C^+F_\rho)(\mu).$$

Рассмотрим выражение $(CF_\rho)(\mu)$. При невещественных $\mu \in \mathbb{C} \setminus \check{Z}_k$, используя Лемму 3.7, вычисляем:

$$(CF_\rho)(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\rho - \xi)(\xi - \mu)}(P^+(\xi) - P^-(\xi)) =$$

$$\frac{1}{\rho-\mu}P(\mu)-\frac{1}{\rho-\mu}P(\rho)+\sum_{\xi\in\check{Z}_k} d_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)\tilde{d}_1(\rho,\xi).$$

Переходя к пределу при $\mathrm{Im}\mu\to+0$ (и фиксированном $\rho\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\check{Z}_k)$), получаем:

$$(C^+F_\rho)(\mu)=\frac{1}{\rho-\mu}P^+(\mu)-\frac{1}{\rho-\mu}P(\rho)+\sum_{\xi\in\check{Z}_k} d_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)\tilde{d}_1(\rho,\xi).$$

Таким образом, имеем:

$$(C\varphi)(\rho)=(Cf)(\rho)+$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu(f\tilde{P}^+)(\mu)\left\{\frac{1}{\rho-\mu}P^+(\mu)-\frac{1}{\rho-\mu}P(\rho)+\sum_{\xi\in\check{Z}_k} d_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)\tilde{d}_1(\rho,\xi)\right\}=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu(f\tilde{P}^+)(\mu)\left\{\sum_{\xi\in\check{Z}_k} d_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)\tilde{d}_1(\rho,\xi)\right\}+\left(C(f\tilde{P}^+)\right)(\rho)P(\rho),$$

что приводит к равенству:

$$(\mathbf{A}_{rr}\mathbf{B}_{rr}f)(\rho)=(\mathbf{A}_{rr}\varphi)(\rho)=\left(C_+(f\tilde{P}^+)\right)(\rho)P^+(\rho)-\left(C_-(f\tilde{P}^+)\right)(\rho)P^-(\rho)V(\rho)+$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu(f\tilde{P}^+)(\mu)\left\{\sum_{\xi\in\check{Z}_k} d_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)\tilde{d}_1(\rho,\xi)\right\}(I-V(\rho)).$$

С другой стороны, непосредственный подсчет по определению соответствующих операторов дает:

$$(\mathbf{A}_{rd}\mathbf{B}_{dr}f)(\rho)=\sum_{\xi\in\check{Z}_k}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu f(\mu)\tilde{P}_+(\mu)d_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)\right\}\tilde{d}_1(\rho,\xi)(I-V(\rho)).$$

Таким образом, справедливо соотношение:

$$(\mathbf{A}_{rr}\mathbf{B}_{rr}f)(\rho)+(\mathbf{A}_{rd}\mathbf{B}_{dr}f)(\rho)=\left(C^+(f\tilde{P}^+)\right)(\rho)P^+(\rho)-\left(C^-(f\tilde{P}^+)\right)(\rho)P^-(\rho)V(\rho).$$

Учитывая, что $P^+=P^-V$ и $\tilde{P}=P^{-1}$, получаем окончательно $(\mathbf{A}_{rr}\mathbf{B}_{rr}f)(\rho)+(\mathbf{A}_{rd}\mathbf{B}_{dr}f)(\rho)=\left((C^+-C^-)(f\tilde{P}^+)\right)(\rho)P^+(\rho)=f(\rho)$.

Пусть теперь $f=\mathbf{A}_{rr}\varphi$. Тогда $(f\tilde{P}^+)(\rho)=(\varphi\tilde{P}^+)(\rho)+(C^-\varphi)(\rho)(\tilde{P}^+(\rho)-\tilde{P}^-(\rho))$. Рассмотрим функцию $\left(C(f\tilde{P}^+)\right)(\rho)$. Повторяя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем:

$$\left(C(f\tilde{P}^+)\right)(\rho)=\left(C(\varphi\tilde{P}^+)\right)(\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu\varphi(\mu)\left(C^+\tilde{F}_\rho\right)(\mu),$$

где $\tilde{F}_\rho(\mu) := (\rho-\mu)^{-1}(\tilde{P}^+(\mu) - \tilde{P}^-(\mu))$. Пользуясь Леммой 3.5, вычисляем:

$$\left(C^+\tilde{F}_\rho\right)(\mu) = \frac{1}{\rho-\mu}\tilde{P}^+(\mu) - \frac{1}{\rho-\mu}\tilde{P}(\rho) - \sum_{\xi\in\check{Z}_k}\tilde{d}_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)d_1(\rho,\xi),$$

$$\left(C(f\tilde{P}^+)\right)(\rho)P(\rho) = (C\varphi)(\rho) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu\varphi(\mu)\left\{\sum_{\xi\in\check{Z}_k}\tilde{d}_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)d_1(\rho,\xi)\right\}P(\rho),$$

что приводит к равенству:

$$(\mathbf{B}_{rr}\mathbf{A}_{rr}\varphi)(\rho) = (\mathbf{B}_{rr}f)(\rho) =$$

$$\varphi(\rho) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu\varphi(\mu)\left\{\sum_{\xi\in\check{Z}_k}\tilde{d}_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)d_1(\rho,\xi)\right\}(P^+(\rho) - P^-(\rho)).$$

С другой стороны, имеем:

$$(\mathbf{B}_{rd}\mathbf{A}_{dr}\varphi)(\rho) = \sum_{\xi\in\check{Z}_k}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu\varphi(\mu)\tilde{d}_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)\right\}d_1(\rho,\xi)(P^+(\rho) - P^-(\rho)).$$

Таким образом, $(\mathbf{B}_{rr}\mathbf{A}_{rr}\varphi)(\rho) + (\mathbf{B}_{rd}\mathbf{A}_{dr}\varphi)(\rho) = \varphi(\rho)$.

Позиция (r,d). Пусть $\varphi = \mathbf{B}_{rd}f$. Тогда:

$$\mathbf{A}_{rr}\varphi(\rho) = \sum_{\mu\in\check{Z}_k} f(\mu)\left(C^+R_\mu - (C^-R_\mu)V\right)(\rho),$$

где $R_\mu(\rho) := d_1(\rho,\mu)(P^+(\rho) - P^-(\rho))$. Рассмотрим при невещественных $\rho \in \mathbb{C}\setminus\check{Z}_k$ функцию:

$$CR_\mu(\rho) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\rho-\xi}d_1(\xi,\mu)(P^+(\xi) - P^-(\xi)).$$

Пользуясь Леммой 3.7, перепишем ее в следующем виде:

$$CR_\mu(\rho) = -\tilde{d}_1(\rho,\mu) + d_1(\rho,\mu)P(\rho) + \sum_{\xi\in\check{Z}_k}A(\xi,\mu)\tilde{d}_1(\rho,\xi).$$

Переходя к пределам при $\pm\mathrm{Im}\rho \to 0$, получим:

$$\left(C^+R_\mu - (C^-R_\mu)V\right)(\rho) = -\tilde{d}_1(\rho,\mu)(I - V(\rho)) + d_1(\rho,\mu)(P^+(\rho) - P^-(\rho)V(\rho))$$

$$+\sum_{\xi\in\check{Z}_k} A(\xi,\mu)\tilde{d}_1(\rho,\xi)(I-V(\rho)).$$

Учитывая, что $P^+ = P^- V$, приходим к равенству:

$$(\mathbf{A}_{rr}\mathbf{B}_{rd})(\rho) = \left\{\sum_{\mu\in\check{Z}_k} f(\mu)F(\rho,\mu)\right\}(I-V(\rho)),$$

где:

$$F(\rho,\mu) = \sum_{\xi\in\check{Z}_k} A(\xi,\mu)\tilde{d}_1(\rho,\xi) - \tilde{d}_1(\rho,\mu).$$

С другой стороны, непосредственное вычисление по определению соответствующих операторов дает:

$$(\mathbf{A}_{rd}\mathbf{B}_{dd}f)(\rho) = \left\{\sum_{\xi\in\check{Z}_k}\left(f(\xi) - \sum_{\mu\in\check{Z}_k} f(\mu)A(\xi,\mu)\tilde{d}_1(\rho,\xi)\right)\right\}(I-V(\rho)),$$

что может быть переписано в виде:

$$(\mathbf{A}_{rd}\mathbf{B}_{dd})(\rho) = -\left\{\sum_{\mu\in\check{Z}_k} f(\mu)F(\rho,\mu)\right\}(I-V(\rho)).$$

Таким образом, имеем: $\mathbf{A}_{rr}\mathbf{B}_{rd} + \mathbf{A}_{rd}\mathbf{B}_{dd} = 0$. Симметричные вычисления доказывают, что также и $\mathbf{B}_{rr}\mathbf{A}_{rd} + \mathbf{B}_{rd}\mathbf{A}_{dd} = 0$.

Позиция (d,r). Пусть $\varphi = \mathbf{B}_{dr}f$. Тогда $\mathbf{A}_{dd}\varphi(\rho)$ может быть представлена в виде:

$$\mathbf{A}_{dd}\varphi(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu f(\mu)\tilde{P}^+(\mu)\left\{-d_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho) + \sum_{\xi\in\check{Z}_k} d_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)\tilde{A}(\rho,\xi)\right\}.$$

Рассмотрим функцию $R_\rho(\mu) := (P^+(\mu) - P^-(\mu))\tilde{d}_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho)$ (где $\rho \in \check{Z}_k$). В силу Леммы 3.7 имеем при $\mu \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \check{Z}_k)$:

$$(CR_\rho)(\mu) = P(\mu)\tilde{d}_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho) - d_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho) + \sum_{\xi\in\check{Z}_k} d_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)\tilde{A}(\rho,\xi).$$

Переходя к пределам при $\mathrm{Im}\mu \to +0$, получим при вещественных μ:

$$(C^+R_\rho)(\mu) = P^+(\mu)\tilde{d}_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho) - d_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho) + \sum_{\xi\in\check{Z}_k} d_2(\xi,\mu)\hat{v}(\xi)\tilde{A}(\rho,\xi).$$

Таким образом, имеем:

$$\mathbf{A}_{dd}\varphi(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu f(\mu)\tilde{P}^{+}(\mu)\Big\{(C^{+}R_{\rho})(\mu) - P^{+}(\mu)\tilde{d}_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho)\Big\} =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu f(\mu)\tilde{P}^{+}(\mu)(C^{+}R_{\rho})(\mu) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu f(\mu)\tilde{d}_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho).$$

Пользуясь соотношением (3.24) , получаем:

$$(\mathbf{A}_{dd}\mathbf{B}_{dr}f)\rho =$$

$$\mathbf{A}_{dd}\varphi(\rho) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu \left(C^{-}(f\tilde{P}^{+})\right)(\mu)R_{\rho}(\mu) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu f(\mu)\tilde{d}_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho) =$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu \left(C^{-}(f\tilde{P}^{+})\right)(\mu)(P^{+}(\mu) - P^{-}(\mu))\tilde{d}_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho) -$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu f(\mu)\tilde{d}_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho).$$

Пусть теперь $\varphi = \mathbf{B}_{rr}f$. Переписав это выражение в виде $\varphi(\mu) = f(\mu) + C^{-}\left((f\tilde{P}^{+})\right)(\mu)(P^{+}(\mu) - P^{-}(\mu))$, получаем:

$$(\mathbf{A}_{dr}\mathbf{B}_{rr}f)(\rho) = (\mathbf{A}_{dr}\varphi)(\rho) =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu f(\mu)\tilde{d}_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu \left(C^{-}(f\tilde{P}^{+})\right)(\mu)(P^{+}(\mu) - P^{-}(\mu))\tilde{d}_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho).$$

Аналогичные вычисления дают:

$$(\mathbf{B}_{dd}\mathbf{A}_{dr}\varphi)(\rho) =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu \left(C^{-}\varphi\right)(\mu)(\tilde{P}^{+}(\mu) - \tilde{P}^{-}(\mu))d_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu \varphi(\mu)\tilde{P}^{+}(\mu)d_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho).$$

С другой стороны, если $f = \mathbf{A}_{rr}\varphi$, то $(f\tilde{P}^{+})(\mu) = \varphi(\mu)\tilde{P}^{+}(\mu) + (C^{-}\varphi)(\mu)(\tilde{P}^{+}(\mu) - \tilde{P}^{-}(\mu))$ и:

$$(\mathbf{B}_{dr}\mathbf{A}_{rr}\varphi)(\rho) = (\mathbf{B}_{dr}f)(\rho) =$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu\varphi(\mu)\tilde{P}^{+}(\mu)d_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho)-$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu\left(C^{-}\varphi\right)(\mu)(\tilde{P}^{+}(\mu)-\tilde{P}^{-}(\mu))d_2(\rho,\mu)\hat{v}(\rho).$$

Таким образом, получаем: $\mathbf{B}_{dd}\mathbf{A}_{dr}+\mathbf{B}_{dr}\mathbf{A}_{rr}=0$.

Позиция (d,d). Пусть $\varphi=\mathbf{B}_{rd}f$. Тогда:

$$(\mathbf{A}_{dr}\varphi)(\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi\left\{\sum_{\mu\in\check{Z}_k} f(\mu)d_1(\xi,\mu)\right\}(P^{+}(\xi)-P^{-}(\xi))\tilde{d}_2(\rho,\xi)\hat{v}(\rho).$$

Пользуясь Леммой 3.7, перепишем это выражение следующим образом:

$$(\mathbf{A}_{dr}\mathbf{B}_{rd}f)(\rho)=(\mathbf{A}_{dr}\varphi)(\rho)=\sum_{\mu\in\check{Z}_k} f(\mu)\left\{\tilde{A}(\rho,\mu)+A(\rho,\mu)-\sum_{\xi\in\check{Z}_k}A(\xi,\mu)\tilde{A}(\rho,\xi)\right\}.$$

С другой стороны, имеем:

$$(\mathbf{A}_{dd}\mathbf{B}_{dd}f)(\rho)=f(\rho)-\sum_{\mu\in\check{Z}_k} f(\mu)A(\rho,\mu)-\sum_{\xi\in\check{Z}_k}\left\{f(\xi)-\sum_{\mu\in\check{Z}_k} f(\mu)A(\xi,\mu)\right\}\tilde{A}(\rho,\xi)$$

и таким образом получаем: $(\mathbf{A}_{dr}\mathbf{B}_{rd}f)(\rho)+(\mathbf{A}_{dd}\mathbf{B}_{dd}f)(\rho)=f(\rho)$. Симметричные вычисления дают: $\mathbf{B}_{dr}\mathbf{A}_{rd}+\mathbf{B}_{dd}\mathbf{A}_{dd}=Id$.

$\square$

Опишем конструктивную процедуру решения Задачи $IP(k)$.

Алгоритм 3.1. *Заданы данные рассеяния J_k (для некоторого фиксированного $k\in\{1,\ldots,p\}$), а также $\nu_{0j},\sigma_j,\sigma_{j1},\sigma_{j2}$, $j=\overline{1,p}$.*

1. *Выбираем модельную задачу $\tilde{L}$ с теми же значениями величин $\nu_{0j},\sigma_j,\sigma_{j1},\sigma_{j2}$, $j=\overline{1,p}$, удовлетворяющую Условиям 2–4.*
2. *Вычисляем $v(\rho)$, $\rho\in\mathbb{R}\cup\check{Z}_k$, пользуясь (3.22) и выражением из Леммы 3.4.*
3. *По $v(\rho)$, $\rho\in\mathbb{R}\cup\check{Z}_k$ и $\tilde{L}$ находим $V(x,\rho)$, $\tilde{d}_j(x,\rho,\mu), j=1,2$, $\tilde{A}(x,\rho,\mu)$.*
4. *Для каждого $x>0$ находим $\Phi(x,\rho),\rho\in\mathbb{R}\cup\check{Z}_k$ как решение линейной системы (3.27), (3.28).*

5. *По* $\Phi(x,\rho)$ *вычисляем* $P_1(x,\rho)$, $x>0$, $\rho\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\cup\check{Z}_k$ *из представления* (3.23).
6. *Используя найденную* $P_1(x,\rho)$, *находим*

$$f_k(x,\rho)=P_{11}(x,\rho)\tilde{f}_k(x,\rho)+P_{12}(x,\rho)\tilde{f}'_k(x,\rho),$$

$$\psi_{kk}(x,\rho)=P_{11}(x,\rho)\tilde{\psi}_{kk}+P_{12}(x,\rho)\tilde{\psi}'_{kk}(x,\rho).$$

7. *Вычисляем* $q_k(x)=f''_k(x,\rho)/f_k(x,\rho)+\rho^2-\nu_{0k}x^{-2}$ *(где* ρ *для каждого* $x>0$ *произвольное такое, что* $f_k(x,\rho)\neq 0$*).*

Перейдем теперь к рассмотрению обратной задачи рассеяния на всем графе Γ.

Задача $IP(\Gamma)$**.** *По заданным данным рассеяния* J *(=* $\{J_k\}_{k=1}^{p-1}$*) найти функции* $q_k(\cdot), k=\overline{1,p}$ *(иначе говоря, восстановить оператор на всем графе* Γ*).*

Приступая к исследованию Задачи $IP(\Gamma)$, заметим, прежде всего, что, применяя Алгоритм 3.1, можно по заданным $\{J_k\}_{k=1}^{p-1}$ (однозначно) восстановить потенциалы $q_k(\cdot), k=\overline{1,p-1}$. Таким образом, для завершения решения Задачи $IP(\Gamma)$ требуется найти $q_p(\cdot)$. Рассмотрим условия склейки для решения типа Вейля $\psi_1(\rho)$. Следующее соотношение вытекает непосредственно из (3.6):

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{U_{j2}(\psi_{1j}(\cdot,\rho))}{U_{j1}(\psi_{1j}(\cdot,\rho))}=0. \tag{3.30}$$

Поскольку для $j=\overline{2,p}$ имеем $\psi_{kj}(x,\rho)=\gamma_{kj}(\rho)f_j(x,\rho)$, справедливо равенство:

$$\frac{U_{j2}(\psi_{1j}(\cdot,\rho))}{U_{j1}(\psi_{1j}(\cdot,\rho))}=\frac{\sigma_{j1}+\sigma_{j2}m_j(\lambda)}{\sigma_j},$$

где $m_j(\lambda)=b_{j2}(\rho)/b_{j1}(\rho)$ представляют собой "локальные"функции Вейля на лучах $\mathcal{R}_j$, иначе говоря, функции Вейля для операторов ℓ_j на полуоси. Перепишем (3.30) в следующем виде:

$$\frac{\sigma_{p1}+\sigma_{p2}m_p(\lambda)}{\sigma_p}=-\sum_{j=2}^{p-1}\frac{\sigma_{j1}+\sigma_{j2}m_j(\lambda)}{\sigma_j}-\frac{U_{12}(\psi_{11}(\cdot,\rho))}{U_{11}(\psi_{11}(\cdot,\rho))}. \tag{3.31}$$

Заметим теперь, что все функции Вейля $m_j, j=\overline{2,p-1}$ можно считать известными, поскольку соответствующие потенциалы $q_j(\cdot)$ восстановлены при решении задач $IP(j), j=\overline{2,p-1}$. Далее, решение типа Вейля $\psi_{11}(x,\rho)$ также можно считать известным (найденным при решении задачи $IP(1)$). Таким образом, все величины в правой части (3.31) известны, и мы можем использовать равенство (3.31) для восстановления "локальной"функции Вейля $m_p(\cdot)$.

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 3.3. *Задание данных рассеяния J однозначно определяет потенциал на графе Γ. Функции $q_k(\cdot), k = \overline{1,p}$ могут быть найдены по следующему алгоритму.*

1. *Для $k = \overline{1, p-1}$ решить Задачи $IP(k)$ с помощью Алгоритма 3.1 и восстановить функции $q_k(\cdot)$. Для $k = 1$ найти также $\psi_{11}(x, \rho)$ (в ходе решения Задачи $IP(1)$).*
2. *Найти $m_p(\cdot)$ из (3.31).*
3. *По найденной функции $m_p(\cdot)$ восстановить $q_p(x), x \in (0, \infty)$, решив (локальную) обратную спектральную задачи на полуоси $x > 0$.*

§3.2 Задача рассеяния на некомпактном квантовом графе с циклом

Рассмотрим геометрический граф G, состоящий из гладкой замкнутой кривой $\mathcal{R}_0$ длины π и лучей $\{\mathcal{R}_k\}_{k=1}^p$, $p \geq 2$, выходящих из некоторой точки $v \in \mathcal{R}_0$.

Функцию y, заданную на луче $\mathcal{R}_k$, $k \in \{1, \dots, p\}$ будем рассматривать как функцию локального параметра $x \in [0, \infty)$, причем значение параметра $x = 0$ соответствует вершине v, функция на ребре $\mathcal{R}_0$ рассматривается, соответственно, как функция на $[0, \pi]$. Функция y, заданная на G, будет рассматриваться как набор функций $\{y_k\}_{k=0}^p$.

На каждом ребре зададим дифференциальное выражение:

$$\ell_j y_j := -y_j'' + q_j(x) y_j, \tag{3.32}$$

где функция $q = \{q_j\}_{j=0}^p$ предполагается вещественно-значной и удовлетворяющей условию:

$$\int_0^\pi |q_0(x)|\ dx + \sum_{j=1}^p \int_0^\infty (1+x)|q_j(x)|\ dx < \infty. \tag{3.33}$$

Следующее условие в вершине v будем называть *стандартным условием склейки*:

$$\sum_{j=0}^{p} y_j'(0) = y_0'(\pi). \tag{3.34}$$

В пространстве $L_2(G) \cap C(G)$ рассмотрим оператор Штурма–Лиувилля $L = L(q, G)$, порожденный дифференциальным выражением (3.32) и условием склейки (3.34).

Определение 3.2. *Функцию $\Phi(\lambda)$, определенную на графе G, при всех (как минимум) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ назовем решением Вейля, если:*

1) $\Phi(\lambda) \in L_2(G) \cap C(G)$ и $\Phi(\lambda)\,\big|_v = 1$;
2) при каждом $j = \overline{0,p}$ выполняется уравнение $\ell_j \Phi_j = \lambda \Phi_j$.

Величину

$$M(\lambda) := \sum_{j=0}^{p} \Phi_j'(0,\lambda) - \Phi_0'(\pi,\lambda)$$

назовем функцией Вейля.

Лемма 3.8. $M(\cdot)$ – *неванлинновская функция.*

Доказательство. Для построения решения Вейля можно воспользоваться стандартной техникой, использующей «локальные» ФСР уравнений $\ell_j y = \lambda y$ на каждом ребре [52]. При этом коэффициенты СЛАУ, к которой сводится условие 1 Определения 3.2, будут голоморфными функциями от $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Таким образом, $\Phi(\lambda)$ существует и единственна при всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ за исключением, возможно, некоторого счетного множества, и как функция λ мероморфна в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

Далее, из вещественности q стандартным образом выводится равенство $M(\bar{\lambda}) = \overline{M(\lambda)}$, из которого вытекает, в частности, что все возможные полюса $M(\cdot)$ вещественны. Кроме того, для произвольной $\lambda = \sigma + i\tau$ имеем:

$$\tau \int_0^{\pi} |\Phi_0|^2 dx = \operatorname{Im}\left(\overline{\Phi_0(0)}\Phi_0'(0)\right) - \operatorname{Im}\left(\overline{\Phi_0(\pi)}\Phi_0'(\pi)\right),$$

$$\tau \int_0^{\infty} |\Phi_j|^2 dx = \operatorname{Im}\overline{\Phi_j(0)}\Phi_j'(0) \quad j = \overline{1,p}$$

Суммируя выписанные равенства и пользуясь условием 1 Определения 3.2, получаем:

$$\tau \int_0^{\pi} |\Phi_0|^2 dx + \tau \sum_{j=1}^{p} \int_0^{\infty} |\Phi_j|^2 dx = \mathrm{Im}\, M(\lambda),$$

откуда следует, что $\mathrm{Im}\, M(\lambda)$ и $\mathrm{Im}\, \lambda$ – величины одного знака.

$\square$

Всюду далее $C_j(\cdot, \lambda)$, $S_j(\cdot, \lambda)$, $j = \overline{0, p}$ обозначают решения уравнений $\ell_j y = \lambda y$ при начальных условиях $C_j(0, \lambda) = S_j'(0, \lambda) = 1$, $S_j(0, \lambda) = C_j'(0, \lambda) = 0$. Кроме этих решений, на лучах $\mathcal{R}_j$, $j = \overline{1, p}$ мы будем использовать решения Йоста $e_j(\cdot, \rho)$ уравнений $\ell_j y = \rho^2 y$ с асимптотиками $e_j(x, \rho) = \exp(i\rho x)(1 + o(1))$ при $x \to \infty$.

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора L. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ является собственным значением. Тогда соответствующая собственная функция может быть представлена в виде:

$$y_j(x) = \gamma_j e_j(x, \rho), j = \overline{1, p},$$

$$y_0(x) = \alpha_0 C_0(x, \lambda) + \beta_0 S_0(x, \lambda),$$

где $\lambda = \rho^2$, $\rho \in \mathbb{C}^+ := \{\rho :\ \mathrm{Im}\rho > 0\}$. Условия склейки (3.34), рассматриваемые совместно с условием $y(\cdot) \in C(G)$, эквивалентны некоторой СЛАУ относительно величин $\{\alpha_0, \beta_0\}$ and $\{\gamma_j\}_{j=\overline{1,p}}$. Определитель этой СЛАУ обозначим $\Delta(\lambda)$ и будем называть в дальнейшем *характеристической функцией* оператора L. По построению $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ является собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда $\Delta(\lambda) = 0$.

Следующая лемма может быть получена непосредственным подсчетом.

Лемма 3.9. *Справедливо представление:*

$$M(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)},$$

где

$$d(\lambda) := \prod_{j=0}^{p} d_j(\lambda),\ d_j(\lambda) := e_j(0, \rho), j = \overline{1, p},\ d_0(\lambda) := S_0(\pi, \lambda).$$

Обозначим через Λ множество собственных значений оператора L. Поскольку L самосопряжен (в $L_2(G)$), все его собственные значения вещественны.

Запишем множество Λ как объединение: $\Lambda = \Lambda^- \cup \Lambda^+$, где $\Lambda^- = \Lambda \cap (-\infty, 0)$. Обозначим $n_- = \mathrm{card}(\Lambda^-)$, и N_- – число отрицательных корней функции $\Delta(\cdot)$ с учетом их кратностей.

Лемма 3.10. *Справедлива оценка:*

$$n_- \le N_- \le N_0 + Q,$$

где

$$Q = \sum_{j=1}^{p} \int_0^\infty x\,|q_j(x)|\ dx$$

и число N_0 зависит только от потенциала $q_0(\cdot)$ на ребре $\mathcal{R}_0$.

Доказательство. Из Леммы 3.9 и неванлинновости функции Вейля следует, что отрицательные корни функции $\Delta(\cdot)$ перемежаются с отрирцательными корнями функции $d(\cdot)$. Известно, что число отрицательных корней функции $d_0(\cdot)$ (т.е., число отрицательных собственных значений периодической задачи для оператора, порожденного выражением ℓ_0) конечно, а число отрицательных корней функции $d_j(\cdot)$ оценивается величиной [21]:

$$Q_j = \int_0^\infty x\,|q_j(x)|\ dx.$$

$\square$

Введем в рассмотрение графы G^k, $k = \overline{0,p}$, каждый из которых имеет единственную вершину v, а набор ребер графа G^k есть $\{\mathcal{R}_j\}_{j=\overline{0,p}\setminus\{k\}}$. Обозначим через $\Delta^k(\cdot)$ характеристическую функцию для оператора L на G^k, а через $M_k(\cdot)$ – функцию Вейля. Применяя к G^k Лемму 3.9, получаем представления:

$$M_k(\lambda) = \frac{\Delta^k(\lambda)}{\Delta_k(\lambda)},$$

где

$$\Delta_k(\lambda) := \prod_{j=\overline{0,p}\setminus\{k\}} d_j(\lambda).$$

Введем, кроме того,функции:

$$d^k(\lambda) = e_k'(0,\rho),\ k = \overline{1,p}, \quad d^0(\lambda) = 2 - C_0(\pi,\lambda) - S_0'(\pi,\lambda).$$

Заметим, что следующие функции:

$$m_k(\lambda) := \frac{d^k(\lambda)}{d_k(\lambda)}$$

суть классические функции Вейля на $\mathcal{R}_k$; в частности, все они являются неванлинновскими функциями.

Непосредственные вычисления приводят к следующему результату.

Лемма 3.11. *Справедливо следующее представление:*

$$\Delta(\lambda) = d_k(\lambda)\Delta^k(\lambda) + d^k(\lambda)\Delta_k(\lambda).$$

Здесь $k \in \{0, \ldots, p\}$ произвольно.

Замечание 3.1. *Всюду далее, если не оговорено иное, мы полагаем, что $\lambda = \rho^2$. При этом, если $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, подразумевается, что $\lambda = \rho^2 + sgn\rho \cdot i0$, т.е., для фигурирующих в формуле функций от λ берется соответствующее предельное значение.*

Лемма 3.12. *Для п.в. $\lambda \in (0, \infty)$ имеем $\pm ImM_k(\lambda \pm i0) > 0$. Если $k = 0$, то данная оценка справедлива для всех $\lambda \in (0, \infty)$.*

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из представления:

$$M(\lambda) = \sum_{j=0}^{p} m_j(\lambda)$$

и аналогичных представлений для $M_k(\lambda)$. Напомним, что [139]:

$$\pm \mathrm{Im} m_j(\lambda \pm i0) > 0,\ \ \lambda \in (0, \infty),\ \ j = \overline{1, p}.$$

$$\square$$

Лемма 3.13. *Справедливы оценки:*

$$|\Delta(\lambda)| \geq |\Delta_k(\lambda)| \cdot |d_k(\lambda)| \cdot |\mathrm{Im}\ m_k(\lambda)|\,,\ \ k = \overline{1, p},$$

$$|\Delta(\lambda)| \geq \left|\Delta^k(\lambda)\right| \cdot \left|d^k(\lambda)\right| \cdot \left|\mathrm{Im}\frac{1}{m_k(\lambda)}\right|,\ \ k = \overline{1, p};$$

$$|\Delta(\lambda)| \geq |\Delta_0(\lambda)| \cdot |d_0(\lambda)| \cdot |\mathrm{Im}\ M_0(\lambda)|\,,$$

$$|\Delta(\lambda)| \geq \left|\Delta^0(\lambda)\right| \cdot \left|d^0(\lambda)\right| \cdot \left|\mathrm{Im}\frac{1}{M_0(\lambda)}\right|,$$

где $\lambda = \rho^2$, $\rho \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Пусть λ такая, что $\Delta_0(\lambda) d_0(\lambda) \neq 0$. Из Лемм 3.11, 3.9 следует:

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_0(\lambda) d_0(\lambda)} = M_0(\lambda) + m_0(\lambda).$$

Поскольку $M_0(\cdot)$ и $m_0(\cdot)$ – неванлинновские функции, величины Im $M_0(\lambda)$ и Im $m_0(\lambda)$ – одного знака. Таким образом, имеем:

$$|M_0(\lambda) + m_0(\lambda)| \geq |\text{Im } M_0(\lambda) + \text{Im } m_0(\lambda)| \geq |\text{Im } M_0(\lambda)| .$$

Остальные оценки получаются аналогично.

$\square$

Лемма 3.14. *Если $\lambda \in (0, +\infty)$ такова, что $\Delta(\lambda) = 0$, то $\lambda \in \Lambda$. Обратно, если $\lambda \in \Lambda^+$, то $\Delta(\lambda) = 0$.*

Замечание 3.2. *В общем случае для $\lambda \in (0, +\infty)$ существуют два различных предельных значения $\Delta(\lambda \pm i0)$. Тем не менее, из соотношения $\Delta(\overline{\lambda}) = \overline{\Delta(\lambda)}$ следует, что $\Delta(\lambda + i0) = 0$ влечет $\Delta(\lambda - i0) = 0$ и обратно. Таким образом, использование в Лемме 3.14 и ее доказательстве обозначения $\Delta(\lambda)$ не приводит к противоречию.*

Доказательство Леммы 3.14. Из Леммы 3.13 следует, что равенство $\Delta(\lambda) = 0$ при вещественном положительном значении λ возможно только в случае, когда $d_0(\lambda) = d^0(\lambda) = 0$. Это означает, что данная λ является собственным значением для задачи Дирихле и периодической задачи на $\mathcal{R}_0$ одновременно. В этом случае решение $S_0(\cdot, \lambda)$ удовлетворяет периодическим граничным условиям и, следовательно, функция $y = \{y_j\}_{j=0}^p$, где:

$$y_j(x) = \begin{cases} 0, j = \overline{1, p}, \\ S_0(x, \lambda), j = 0 \end{cases}$$

является собственной функцией оператора L, соответствующей собственному значению λ.

Обратно, если вещественная неотрицательная λ является собственным значением оператора L на G, то соответствующая собственная функция необходимо является тождественным 0 на каждом из лучей $\mathcal{R}_j$, $j = \overline{1, p}$. Следовательно, на ребре $\mathcal{R}_0$ она должна быть пропорциональна решению $S_0(\cdot, \lambda)$. В этом случае условие склейки (3.34) эквивалентно, фактически, периодическим условиям на $S_0(\cdot,\lambda)$. Это означает, что такая λ необходимо является собственным значением задачи Дирихле и одновременно периодической задачи на $\mathcal{R}_0$, откуда $d_0(\lambda) = d^0(\lambda) = 0$, что, в силу Леммы 3.11 влечет справедливость доказываемого утверждения.

□

Лемма 3.15. *Для* $\lambda = \rho^2$, $|\rho| > \rho^*$, $\rho \in \overline{\mathbb{C}^+_\delta} = \{\rho \in \overline{\mathbb{C}^+} : |\rho - n| \geq \delta, n \in \mathbb{Z}\}$ *справедливы оценки:*

$$C_\delta \exp(\tau\pi) \leq |\Delta(\lambda)| \leq C \exp(\tau\pi),$$

где $\tau = Im\ \rho$.

Более того, имеет место асимптотика:

$$\Delta(\lambda) = -\frac{p+2}{2}\exp(-i\rho\pi) + O\left(\frac{1}{\rho}\exp(\tau\pi)\right),\ \rho \to \infty,\ arg\,\rho \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon],\ \varepsilon \in (0, \pi/2).$$

Доказательство. Из Леммы 3.11 имеем представление:

$$\Delta(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} d^k(\lambda) \prod_{j=\overline{1,p}\setminus\{k\}} d_k(\lambda).$$

Подставляя в него классические асимптотики:

$$d_k(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right),\ d^k(\lambda) = i\rho\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right),\ k = \overline{1,p}$$

и

$$d_0(\lambda) = \frac{\sin\rho\pi}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\exp(\tau\pi)\right),\ d^0(\lambda) = 2 - 2\cos(\rho\pi) + O\left(\frac{1}{\rho}\exp(\tau\pi)\right)$$

приходим к представлению:

$$\Delta(\lambda) = 2 - 2\cos(\rho\pi) + ip\sin\rho\pi + O\left(\frac{1}{\rho}\exp(\tau\pi)\right).$$

Дальнейшие рассуждения стандартны [21], [139], [57].

□

Зафиксируем произвольный луч $\mathcal{R}_k$, $k \in \overline{1,p}$.

Определение 3.3. *Функцию на графе* G $\psi_k(\rho) = \{\psi_{kj}(\cdot,\rho)\}_{j=0}^p$, $\rho \in \mathbb{C}^+$ *назовем решением типа Вейля, ассоциированным с* $\mathcal{R}_k$, *если:*

1) она непрерывна на G и удовлетворяет условию склейки (3.34);
2) выполняются уравнения $\ell_j\psi_{kj} = \rho^2\psi_{kj}$, $j = \overline{0,p}$;
3) $\psi_{kj}(x,\rho) = O\left(\exp(i\rho x)\right)$ при $x \to \infty$, $j = \overline{1,p} \setminus \{k\}$;
4) $\psi_{kk}(x,\rho) = \exp(-i\rho x)(1 + o(1))$ при $x \to \infty$.

Для построения $\psi_k(\rho)$ воспользуемся представлениями:

$$\psi_{kj}(x,\rho) = \gamma_{kj}(\rho)e_j(x,\rho), \quad j = \overline{1,p} \setminus \{k\}; \tag{3.35}$$

$$\psi_{kk}(x,\rho) = \gamma_{kk}(\rho)e_k(x,\rho) + \delta_k(\rho)S_k(x,\lambda). \tag{3.36}$$

Заметим, что представления (3.35), (3.36) гарантируют выполнение условий 2) – 3) Определения 3.3 независимо от выбора констант $\{\gamma_{kj}(\rho)\}$, $\delta_k(\rho)$. Условие 4) при этом сводится к:

$$\delta_k(\rho) = -\frac{2i\rho}{e_k(0,\rho)}. \tag{3.37}$$

Наконец, условие 1) сводится к системе линейных уравнений относительно $\{\gamma_{kj}\}$, определитель которой совпадает со значением характеристической функции $\Delta(\lambda)$. Решая получившуюся СЛАУ, получаем, в частности, представление:

$$\gamma_{kk}(\rho) = \frac{2i\rho}{e_k(0,\rho)} \cdot \frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{3.38}$$

где функции $\Delta_k(\lambda)$ введены выше.

Полученное представление можно также переписать следующим образом:

$$\gamma_{kk}(\rho) = \frac{2i\rho}{e_k^2(0,\rho)} \cdot \frac{1}{M_k(\lambda)}. \tag{3.39}$$

Из приведенных рассуждений вытекает, в частности, следующее утверждение.

Лемма 3.16. *Функция $\psi_{kk}(\cdot,\rho)$ мероморфна по $\rho \in \mathbb{C}^+$, все ее полюса лежат на мнимой оси.*

В дальнейшем через Z_k^- будем обозначать множество полюсов функции $\psi_{kk}(x,\rho)$. По построению ясно, что это множество не зависит от x.

Лемма 3.17. *1) Если $\rho_0 \in Z_k^-$, то $\lambda_0 = \rho_0^2 \in \Lambda^-$.*
2) Множество Z_k^- конечно.

Доказательство. Из представлений (3.38), (3.37) следует, что данная $\rho_0 \in \mathbb{C}^+$ может быть полюсом функции $\psi_{kk}(x,\rho)$ лишь при условии, что $\lambda_0 = \rho_0^2$ является корнем функции $d_k(\lambda)\Delta(\lambda)$. Предположим, что $d_k(\lambda_0) = 0$, но $\Delta(\lambda_0) \neq 0$. Поскольку функция $e_k(0,\rho)$ имеет лишь простые корни, функция $\psi_{kk}(x,\rho)$ имеет в точке $\rho = \rho_0$ простой полюс или устранимую особенность. Вычисляя вычет, получаем:

$$\mathrm{res}_{\rho=\rho_0}\psi_{kk}(x,\rho) = \frac{2i\rho_0}{\dot{e}_k(0,\rho_0)} \cdot \frac{\Delta_k(\lambda_0)}{\Delta(\lambda_0)} \cdot e_k(x,\rho_0) - \frac{2i\rho_0}{\dot{e}_k(0,\rho_0)} \cdot S_k(x,\lambda_0),$$

где точка обозначает производную по ρ. Примем во внимание, что, в силу Леммы 3.11, имеем $\Delta(\lambda_0) = e_k'(0,\rho_0)\Delta_k(\lambda_0)$, причем $0 = d_k(\lambda_0) = e_k(0,\rho_0)$ влечет $e_k(x,\rho_0) = e_k'(0,\rho_0)S_k(x,\lambda_0)$ и мы получаем окончательно: $\mathrm{res}_{\rho=\rho_0}\psi_{kk}(x,\rho) = 0$. Таким образом, ρ_0 является устранимой особенностью. Полученное противоречие показывает, что $\rho_0 \in Z_k^-$ необходимо влечет $\Delta(\lambda_0) = 0$. Тем самым доказано первое из утверждений леммы. Но теперь второе утверждение немедленно следует из Леммы 3.10.

□

Лемма 3.18. *Все полюса функции $\psi_{kk}(x,\rho)$ простые. Для вычетов $\mathrm{res}_{\rho=\rho_0}\psi_{kk}(x,\rho)$, $\rho_0 \in Z_k^-$ справедливы следующие асимптотические представления:*

$$\mathrm{res}_{\rho=\rho_0}\psi_{kk}(x,\rho) = i\alpha_k(\rho_0)\exp(i\rho_0 x)(1+o(1)), \quad x \to \infty.$$

Числа $\alpha_k(\rho_0)$ вещественны и положительны.

Доказательство. Пусть $\rho_0 \in Z_k^-$ таково, что $e_k(0,\rho_0) \neq 0$. Тогда $\lambda_0 = \rho_0^2$ является корнем $\Delta(\cdot)$ и простым корнем функции $M_k(\cdot)$ из представления (3.39). Поскольку $M_k(\cdot)$ – неванлинновская функция, имеем:

$$\frac{1}{M_k(\lambda)} = \frac{a(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} + O(1),\ \lambda \to \lambda_0,$$

где $a(\lambda_0)$ вещественно и положительно. Из полученного равенства, в свою очередь, следует:

$$\gamma_{kk}(\rho) = \frac{2i\rho_0}{e_k^2(0,\rho_0)} \cdot \frac{a(\lambda_0)}{\rho^2 - \rho_0^2} + O(1),\ \rho \to \rho_0,$$

откуда заключаем, что $\gamma_{kk}(\rho)$ имеет простой полюс в точке $\rho = \rho_0$ и:

$$\mathrm{res}_{\rho=\rho_0}\gamma_{kk}(\rho) = i\alpha_k(\rho_0),\ \alpha_k(\rho_0) = \frac{a(\lambda_0)}{e_k^2(0,\rho_0)}. \tag{3.40}$$

Далее, поскольку $e_k^2(0,\rho_0)\in(0,+\infty)$, имеем: $\alpha_k(\rho_0)\in(0,+\infty)$. Теперь из (3.39), (3.40) выводим:

$$\mathrm{res}_{\rho=\rho_0}\psi_{kk}(x,\rho)=i\alpha_k(\rho_0)e_k(x,\rho_0),$$

что доказывает требуемое.

Рассмотрим случай $e_k(0,\rho_0)=0$. В этом случае можно повторить рассуждения, аналогичные приведенным выше, заменив в них решение $S_k(\cdot,\lambda)$ решением $S_k^0(\cdot,\lambda)$, для которого (аналогичные) начальные условия налагаются в точке $x=x^0$, такой что $e_k\left(x^0,\rho_0\right)\neq 0$.

□

В дальнейшем величины $\alpha_k(\rho_0)$, $\rho_0\in Z_k^-$ будем называть *весовыми числами.*

Замечание 3.3. *Фактически было доказано представление:*

$$\mathrm{res}_{\rho=\rho_0}\psi_{kk}(x,\rho)=i\alpha_k(\rho_0)e_k(x,\rho_0),\rho_0\in Z_k^-.$$

Рассмотрим теперь поведение $\psi_{kk}(x,\rho)$, при $\mathrm{Im}\,\rho\to+0$. Обозначим через Z_0^+ множество всех $\rho\in\mathbb{R}$ таких, что $\lambda=\rho^2\in\Lambda$.

Лемма 3.19. *Если $\rho_0\in\mathbb{R}\backslash\left(\{0\}\cup Z_0^+\right)$, то существует предел $\psi_{kk}(x,\rho_0):=\lim\limits_{\rho\to\rho_0,\rho\in\Omega_+}\psi_{kk}(x,\rho_0)$. Если $\rho_0\in Z_0^+$, то $\psi_{kk}(x,\rho)$ и $\psi'_{kk}(x,\rho)$ ограничены при $\rho\to\rho_0,\rho\in\mathbb{C}^+$.*

Доказательство. Утверждение леммы следует непосредственно из (3.36)–(3.38) и Лемм 3.13, 3.11. □

Используя стандартные методы классической теории рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля на оси, приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.20. *Для $\psi_{kk}(x,\rho)$, $\rho\in\mathbb{R}\setminus\left(\{0\}\cup Z_0^+\right)$ имеет место представление:*

$$\psi_{kk}(x,\rho)=e_k(x,-\rho)+s_k(\rho)e_k(x,\rho).$$

Следствие 3.1. *Для $\psi_{kk}(x,\rho)$, $\rho\in\mathbb{R}\setminus\left(\{0\}\cup Z_0^+\right)$ справедлива асимптотика:*

$$\psi_{kk}(x,\rho)=\exp(-i\rho x)+s_k(\rho)\exp(i\rho x)+o(1),\quad x\to\infty.$$

Функцию $s_k(\rho)$, $\rho\in\mathbb{R}\setminus\left(\{0\}\cup Z_0^+\right)$ в дальнейшем будем называть *коэффициентом отражения, ассоциированным с лучом $\mathcal{R}_k$.*

Лемма 3.21. *Для п.в.* $\rho \in \mathbb{R} \setminus \left(\{0\} \cup Z_0^+\right)$ *справедлива оценка* $|s_k(\rho)| < 1$. *Кроме того, выполнено соотношение* $s_k(-\rho) = \overline{s_k(\rho)}$.

Доказательство. Используя соотношения (3.36) – (3.38), получаем:

$$s_k(\rho) = -\frac{e_k(0,-\rho)}{e_k(0,\rho)} \cdot \frac{M_k(\lambda) + \overline{m_k(\lambda)}}{M_k(\lambda) + m_k(\lambda)}. \tag{3.41}$$

Из полученного представления непосредственно вытекает соотношение $s_k(-\rho) = \overline{s_k(\rho)}$. Далее, из Леммы 3.12 следует:

$$\left|\frac{M_k(\lambda) + \overline{m_k(\lambda)}}{M_k(\lambda) + m_k(\lambda)}\right| < 1,$$

причем из классической теории операторов Штурма–Лиувилля известно, что:

$$\left|\frac{e_k(0,-\rho)}{e_k(0,\rho)}\right| = 1.$$

Подставляя указанные оценки в представление (3.41), получаем требуемое.

$\square$

Лемма 3.22. *Справедлива оценка:*

$$|\gamma_{kk}(\rho)| \le A_k, \quad \rho \to \infty, \rho \in \overline{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\},$$

где $\gamma_{kk}(\rho)$ *определяется соотношением* (3.38), *а константа* A_k *определяется геометрией графа* G *и не зависит от потенциала* $q(\cdot)$.

Если, кроме того, потенциал $q(\cdot)$ *имеет компактный носитель, то указанная оценка допускает следующее уточнение:*

$$|g_k(\rho)| \le A_k, \quad g_k(\rho) := \gamma_{kk}(\rho) \prod_{\rho_0 \in Z_k^-} \frac{\rho - \rho_0}{\rho - \overline{\rho}_0}, \ \rho \in \overline{\mathbb{C}}^+.$$

Доказательство. Первая часть утверждения вытекает непосредственно из представления (3.38) и Леммы 3.15.

Пусть теперь потенциал $q(\cdot)$ имеет компактный носитель. Поскольку при $\rho, \rho_0 \in \overline{\mathbb{C}}^+$ $|\rho - \rho_0| \le |\rho - \overline{\rho_0}|$, оценка, полученная для $\gamma_{kk}(\rho)$, остается справедливой и для $g_k(\rho)$. Таким образом, для достаточно больших $\rho \in \overline{\mathbb{C}}^+$ имеем: $|g_k(\rho)| \le A_k$.

Рассмотрим $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Поскольку

$$s_k(\rho) = \gamma_{kk}(\rho) - \frac{e_k(0,-\rho)}{e_k(0,\rho)},$$

справедлива оценка:

$$|g_k(\rho)| = |\gamma_{kk}(\rho)| \le 2, \ \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3.42}$$

В силу компактности носителя $q(\cdot)$ функция $g_k(\rho)$ голоморфна в окрестности 0 и, следовательно, оценка (3.42) остается справедливой при всех $\rho \in \mathbb{R}$. Поскольку (см. Лемму 3.18) все полюса функции $\gamma_{kk}(\rho)$ простые и принадлежат Z_k^-, функция $g_k(\rho)$ голоморфна в $\mathbb{C}^+$. Доказательство леммы завершается применением принципа максимума модуля к аналитической функции $g_k(\rho)$ в области $\mathbb{C}^+ \cap \{\rho : |\rho| < R\}$ с достаточно большим $R > 0$.

$\square$

Замечание 3.4. *Поскольку для $\rho \in \overline{\mathbb{C}}^+$, $\rho_0 \in \overline{\mathbb{C}}^+$ выполнено неравенство:*

$$\left| \frac{\rho - \rho_0}{\rho - \overline{\rho}_0} \right| \le 1,$$

оценка из Леммы 3.22 допускает следующее обобщение:

$$|f(\rho)| \le A_k, \quad f(\rho) := \gamma_{kk}(\rho) \prod_{\rho_0 \in Z} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho - \overline{\rho}_0} \right)^{\nu(\rho_0)},$$

где Z – произвольное конечное подмножество $\overline{\mathbb{C}}^+$, такое что $Z_k^- \subseteq Z$, и $\nu(\rho_0)$, $\rho_0 \in Z$ суть произвольные неотрицательные целые числа, положительные для $\rho_0 \in Z_k^-$.

Лемма 3.23. *$\psi_{kk}(x, \rho)$, $\psi'_{kk}(x, \rho)$ ограничены при $\rho \to 0$, $\rho \in \overline{\mathbb{C}}^+$.*

Доказательство. В случае потенциала $q(\cdot)$ с компактным носителем требуемое утверждение следует непосредственно из Леммы 3.22.

Рассмотрим общий случай. Введем в рассмотрение следующее семейство операторов $L^{(T)} = L\left(q^{(T)}(x), G\right)$ с параметром $T > 0$:

$$q_0^{(T)}(x) = q_0(x);$$

$$q_j^{(T)}(x) = q_j(x), \ x \le T; \ q_j^{(T)}(x) = 0, \ x > T, \ j = \overline{1, p}.$$

Из результатов классической теории операторов Штурма–Лиувилля следует, что $\Delta^{(T)}(\lambda) \to \Delta(\lambda)$ при $T \to \infty$ равномерно по $\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) : \varepsilon < |\lambda| < R\}$ для произвольных $0 < \varepsilon < R < \infty$. Более того, считая, что Λ^- представлено в виде $\Lambda^- = \{\lambda_\nu = \rho_\nu^2\}_{\nu = \overline{1, n_-}}$, можно утверждать, что $\gamma_{kk}^{(T)}(\rho) \to \gamma_{kk}(\rho)$ при $T \to +\infty$ равномерно по $\{\rho \in \mathbb{C}^+ : |\rho| \ge \varepsilon, |\rho - \rho_\nu| \ge \varepsilon, \nu = \overline{1, n_-}\}$.

Обозначим через κ_ν, $\nu \in \overline{1, n_-}$ кратности корней λ_ν характеристической функции $\Delta(\lambda)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $T > T_\varepsilon$ множество всех корней функции $\Delta^{(T)}(\lambda)$ может быть представлено в виде: $\lambda_{\nu j}^{(T)} = \left(\rho_{\nu j}^{(T)}\right)^2$, $j = \overline{1, \kappa_\nu}$, $\nu = \overline{1, n_-}$, $\lambda_{0j}^{(T)} = \left(\rho_{0j}^{(T)}\right)^2$, $j = \overline{1, \kappa_0^{(T)}}$, где $\left|\rho_{\nu j}^{(T)} - \rho_\nu\right| < \varepsilon$, $\left|\rho_{0j}^{(T)}\right| < \varepsilon$. Несмотря на то, что $\kappa_0^{(T)}$ зависит от T, из Леммы 3.10 следует, что $\kappa_0^{(T)} \le N^*$, где оценка N^* уже не зависит от T. Положим $\rho_{0j}^{(T)} = 0$, $j = \overline{\kappa_0^{(T)} + 1, N^*}$.

Рассмотрим следующее семейство функций:

$$f^{(T)}(\rho) = \gamma_{kk}^{(T)}(\rho) \cdot \prod_{\nu=1}^{n_-} \prod_{j=1}^{\kappa_\nu} \frac{\rho - \rho_{\nu j}^{(T)}}{\rho - \overline{\rho}_{\nu j}^{(T)}} \cdot \prod_{j=1}^{N^*} \frac{\rho - \rho_{0j}^{(T)}}{\rho - \overline{\rho}_{0j}^{(T)}}.$$

Ясно, что $\rho_{\nu j}^{(T)} \to \rho_\nu$, $\rho_{0j}^{(T)} \to 0$ при $T \to \infty$. Таким образом, для каждого фиксированного $\rho \in \mathbb{C}^+$ имеем $f^{(T)}(\rho) \to f(\rho)$, где:

$$f(\rho) = \gamma_{kk}(\rho) \prod_{\nu=1}^{n_-} \left(\frac{\rho - \rho_\nu}{\rho - \overline{\rho}_\nu}\right)^{\kappa_\nu}.$$

Поскольку в силу Леммы 3.22 и Замечания 3.3 справедлива оценка $\left|f^{(T)}(\rho)\right| \le A_k$, заключаем, что $|f(\rho)| \le A_k$.

Из полученного результата следует, в частности, что $\gamma_{kk}(\rho) = O(1)$ при $\rho \to 0, \rho \in \mathbb{C}^+$. Учитывая, что $\delta_k(\rho) = O(1)$ при $\rho \to 0, \rho \in \mathbb{C}^+$ приходим к требуемому утверждению.

$\square$

Наряду с оператором $L = L(q, G)$ будем рассматривать оператор $\tilde{L} = L(\tilde{q}, G)$ на том же графе G, но с другим, вообще говоря, потенциалом $\tilde{q}(x)$. Условимся, что если некоторый символ ξ обозначает объект, относящийся к L, то этот же символ с тильдой $\tilde{\xi}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}$, и $\hat{\xi} := \xi - \tilde{\xi}$.

Лемма 3.24. *Для* $\rho \in \overline{\mathbb{C}}_\delta^+$ *справедливы оценки:*

$$\psi_{kk}(x, \rho) = O\left(\exp(-i\rho x)\right), \ \psi'_{kk}(x, \rho) = O\left(\rho \exp(-i\rho x)\right),$$
$$\hat{\psi}_{kk}(x, \rho) = O\left(\frac{1}{\rho} \exp(-i\rho x)\right).$$

Доказательство. Применяя Лемму 3.15 и пользуясь принципом Фрагмена–Линделефа, нетрудно получить оценки:

$$\hat{\Delta}(\lambda) = O\left(\frac{1}{\rho} \exp(\tau\pi)\right), \ \hat{\Delta}_k(\lambda) = O\left(\frac{1}{\rho^2} \exp(\tau\pi)\right).$$

С учетом указанных оценок, для доказательства леммы достаточно воспользоваться представлениями (3.36), (3.38) и классическими оценками:

$$e_k(x,\rho) = O(\exp(i\rho x)),\ \hat{e}_k(x,\rho) = O\left(\frac{1}{\rho}\exp(i\rho x)\right),$$

$$S_k(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{\rho}\exp(-i\rho x)\right),\ \hat{S}_k(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{\rho^2}\exp(-i\rho x)\right).$$

$\square$

Определение 3.4. Набор данных

$$J_k := \{s_k(\rho), \rho\in\mathbb{R}\setminus\left(\{0\}\cup Z_0^+\right), Z_k^-, \alpha_k(\rho), \rho\in Z_k^-\}$$

будем называть *данными рассеяния, ассоциированными с лучом* $\mathcal{R}_k$.

Следующая теорема утверждает, что задание данных рассеяния, ассоциированных с лучом $\mathcal{R}_k$ однозначно определяет потенциал $q_k(\cdot)$ на этом луче.

Теорема 3.4. *Предположим, что операторы L, $\tilde{L}$ на графе G с вещественнозначными потенциалами $q(\cdot)$, $\tilde{q}(\cdot)$ удовлетворяющими* (3.33)*, таковы, что $J_k = \tilde{J}_k$. Тогда $q_k(x) = \tilde{q}_k(x)$ для п.в. $x\in(0,\infty)$.*

Доказательство. Рассмотрим при $\lambda\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ функции:

$$\varphi_1(x,\lambda) := \psi_{kk}(x,\rho),\quad \varphi_2(x,\lambda) := e_k(x,\rho),\quad \lambda=\rho^2, \rho\in\mathbb{C}^+.$$

Введем в рассмотрение матрицы-функции:

$$\Psi(x,\lambda) := \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) & \varphi_2(x,\lambda) \\ \varphi_1'(x,\lambda) & \varphi_2'(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

и $\tilde{\Psi}(x,\lambda)$, а также следующую *матрицу спектральных отображений*:

$$P(x,\lambda) := \Psi(x,\lambda)\tilde{\Psi}^{-1}(x,\lambda).$$

Из Леммы 3.20 следует, что предельные значения $\Psi^{\pm}(x,\lambda) := \Psi(x,\lambda\pm i0)$, $\lambda\in(0,+\infty)\setminus\Lambda$ удовлетворяют следующему условию сопряжения:

$$\Psi^-(x,\lambda) = \Psi^+(x,\lambda)w(\lambda),$$

где

$$w(\lambda) = \begin{pmatrix} \overline{s_k(\rho)} & 1 \\ 1-|s_k(\rho)|^2 & -s_k(\rho) \end{pmatrix},\quad \lambda=\rho^2, \rho\in(0,+\infty).$$

Предположим, что $s_k = \tilde{s}_k$. Тогда $w = \tilde{w}$ и, следовательно, $P^+(x, \lambda) = P^-(x, \lambda)$, $\lambda \in (0, +\infty) \setminus (\Lambda \cup \tilde{\Lambda})$. Это означает, что матрица-функция $P(x, \lambda)$ голоморфна по $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Big(\{0\} \cup \Lambda \cup \tilde{\Lambda}\Big)$. Зафиксируем произвольное $\lambda_0 \in (0, +\infty) \cap (\Lambda \cup \tilde{\Lambda})$. Из Леммы 3.19 следует, что $P(x, \lambda)$ ограничена в окрестности λ_0, таким образом, λ_0 является устранимой особенностью для $P(x, \lambda)$.

Далее, совпадение $J_k = \tilde{J}_k$ означает, в частности, что $\Lambda^- = \tilde{\Lambda}^-$. Взяв произвольное $\lambda_0 \in \Lambda^-$, можем утверждать, что λ_0 является либо полюсом, либо устранимой особенностью для $P(x, \lambda)$. Рассмотрим функции $P_{11}(x, \lambda)$ и $P_{12}(x, \lambda)$. Имеем:

$$P_{11}(x, \lambda) = \frac{1}{2i\rho} \Big(\psi_{kk}(x, \rho) \tilde{e}_k'(x, \rho) - \tilde{\psi}_{kk}'(x, \rho) e_k(x, \rho) \Big),$$

$$P_{12}(x, \lambda) = \frac{1}{2i\rho} \Big(\tilde{\psi}_{kk}(x, \rho) e_k(x, \rho) - \psi_{kk}(x, \rho) \tilde{e}_k(x, \rho) \Big).$$

Подставляя сюда представления

$$\psi_{kk}(x, \rho) = \frac{i\alpha_k(\rho_0)}{\rho - \rho_0} e_k(x, \rho_0) + O(1), \quad \rho \to \rho_0,$$

$$\tilde{\psi}_{kk}(x, \rho) = \frac{i\tilde{\alpha}_k(\rho_0)}{\rho - \rho_0} \tilde{e}_k(x, \rho_0) + O(1), \quad \rho \to \rho_0,$$

и принимая во внимание, что $\alpha_k(\rho_0) = \tilde{\alpha}_k(\rho_0)$, получаем $P_{11}(x, \lambda) = O(1)$, $P_{12}(x, \lambda) = O(1)$ в окрестности λ_0. Таким образом, точка λ_0 является устранимой особенностью.

Далее, пользуясь Леммой 3.24 и классическими асимптотиками решений Йоста $e_k(x, \rho)$, получаем оценки:

$$P_{11}(x, \lambda) - 1 = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad P_{12}(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \lambda \to \infty, \rho^2 = \lambda, \rho \in \overline{\mathbb{C}}_\delta^+.$$

В то же время, из Леммы 3.23 следует:

$$P_{11}(x, \lambda) - 1 = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad P_{12}(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \lambda \to 0, \rho^2 = \lambda.$$

Рассматривая полученные оценки совместно, заключаем, что $P_{11}(x, \lambda) - 1 = 0$, $P_{12}(x, \lambda) = 0$, т.е., $\varphi_\nu(x, \lambda) = \tilde{\varphi}_\nu(x, \lambda)$, $\nu = 1, 2$ и, следовательно, $q_k(x) = \tilde{q}_k(x)$ для п.в. $x \in [0, \infty)$.

$\square$

Сформулируем следующую «частичную» обратную задачу.

Задача $IP(k)$**.** *По заданным данным рассеяния J_k, ассоциированным с лучом $\mathcal{R}_k$, найти $q_k(\cdot)$.*

Согласно предыдущей теореме данная задача имеет не более одного решения. Нашей следующей целью является построение конструктивного алгоритма решения этой задачи. Покажем, что решение Задачи $IP(k)$ может быть сведено к решению линейного уравнения в некотором гильбертовом пространстве.

Всюду далее считаем, что выбран некоторый модельный оператор $\tilde{L}$, причем для простоты будем считать, что $\tilde{Z}_k^- = \varnothing$.

Преобразуем тождества из Леммы 3.20, записанные для операторов L и $\tilde{L}$, следующим образом:

$$\hat{\psi}_{kk}(x,\rho) = \hat{e}_k^-(x,\rho) + s_k(\rho)\hat{e}_k(x,\rho) + \hat{s}_k(\rho)\tilde{e}_k(x,\rho),$$

где (как и всюду далее) используются обозначения $e_k^-(x,\rho) := e_k(x,-\rho)$. Интегрируя, получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-N-1/2}^{N+1/2} \frac{\mathrm{e}^{i\mu x}}{\mu-\rho}\hat{\psi}_{kk}(x,\mu)\,d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-N-1/2}^{N+1/2} \frac{\mathrm{e}^{i\mu x}}{\mu-\rho}\hat{e}_k^-(x,\mu)\,d\mu +$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-N-1/2}^{N+1/2} \frac{\mathrm{e}^{i\mu x}}{\mu-\rho}s_k(\mu)\hat{e}_k(x,\mu)\,d\mu + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-N-1/2}^{N+1/2} \frac{\mathrm{e}^{i\mu x}}{\mu-\rho}\hat{s}_k(\mu)\tilde{e}_k(x,\mu)\,d\mu, \quad (3.43)$$

где $\rho \in \mathbb{C}^-$ произвольное фиксированное, N – целое положительное число. Перейдем к пределу при $N \to \infty$. Из Леммы 3.24 следует, что:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-N-1/2}^{N+1/2} \frac{\mathrm{e}^{i\mu x}}{\mu-\rho}\hat{\psi}_{kk}(x,\mu)\,d\mu = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N^+} \frac{\mathrm{e}^{i\mu x}}{\mu-\rho}\hat{\psi}_{kk}(x,\mu)\,d\mu =$$

$$\sum_{\mu\in Z_k^-} i\alpha_k(\mu)\frac{\mathrm{e}^{i\mu x}}{\mu-\rho}e_k(x,\mu),$$

где $\Gamma_N^+ = [-N-1/2, N+1/2] \cup \{(N+1/2)\exp(i\beta),\ \beta\in(0,\pi)\}$ ориентирован в положительном направлении. Аналогичным образом получаем:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-N-1/2}^{N+1/2} \frac{\mathrm{e}^{i\mu x}}{\mu-\rho}\hat{e}_k^-(x,\mu)\,d\mu =$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N^-}\frac{\mathrm{e}^{i\mu x}}{\mu-\rho}\hat{e}_k^-(x,\mu)\,d\mu=-\hat{e}_k^-(x,\rho)\mathrm{e}^{i\rho x},$$

где $\Gamma_N^-=[-N-1/2,N+1/2]\cup\{(N+1/2)\exp(i\beta),\ \beta\in(-\pi,0)\}$ ориентирован в отрицательном направлении.

Далее, из оценок $|s_k(\rho)|<1$, $\hat{e}_k(x,\rho)=O(\rho^{-1})$ следует, что:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-N-1/2}^{N+1/2}\frac{\mathrm{e}^{i\mu x}}{\mu-\rho}s_k(\mu)\hat{e}_k(x,\mu)\,d\mu=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\mu x}}{\mu-\rho}s_k(\mu)\hat{e}_k(x,\mu)\,d\mu,$$

причем интеграл в правой части сходится абсолютно. С учетом полученных результатов, из (3.43) вытекает существование предела:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-N-1/2}^{N+1/2}\frac{\mathrm{e}^{i\mu x}}{\mu-\rho}\hat{s}_k(\mu)\tilde{e}_k(x,\mu)\,d\mu=:G_k(x,\rho).\tag{3.44}$$

Теперь (3.43) может быть переписано в следующем виде:

$$\hat{e}_k^-(x,\rho)=\sum_{\mu\in Z_k^-}i\alpha_k(\mu)\frac{\mathrm{e}^{i(\mu-\rho)x}}{\rho-\mu}\hat{e}_k(x,\mu)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i(\mu-\rho)x}}{\mu-\rho}s_k(\mu)\hat{e}_k(x,\mu)\,d\mu+$$
$$G_k(x,\rho)\mathrm{e}^{-i\rho x}+\sum_{\mu\in Z_k^-}i\alpha_k(\mu)\frac{\mathrm{e}^{i(\mu-\rho)x}}{\rho-\mu}\tilde{e}_k(x,\mu),\quad \rho\in\mathbb{C}_-\tag{3.45}$$

Напомним, что модельный оператор $\tilde{L}$ известен и, следовательно, известны все величины, входящие в равенство (3.45), за исключением $\hat{e}_k(x,\rho)$. Нашей ближайшей целью является получение из (3.45) замкнутой системы уравнений относительно $\hat{e}_k(x,\rho)$. С этой целью выберем произвольным образом в (3.45) $\rho\in -Z_k^-$, а затем (независимо) выполним в том же (исходном) соотношении предельный переход $\mathrm{Im}\rho\to -0$. Полученную таким образом систему из двух соотношений запишем как линейное уравнение в некотором гильбертовом пространстве.

Определим следующие величины:

$$g_k(x,\rho):=G_k(x,\rho)\mathrm{e}^{-i\rho x}+\sum_{\mu\in Z_k^-}i\alpha_k(\mu)\frac{\mathrm{e}^{i(\mu-\rho)x}}{\rho-\mu}\tilde{e}_k(x,\mu),\quad \rho\in -Z_k^-,\tag{3.46}$$

$$g_k(x,\rho) := \lim_{\varepsilon\to+0} G_k(x,\rho-i\varepsilon)\mathrm{e}^{-i(\rho-i\varepsilon)x} + \sum_{\mu\in Z_k^-} i\alpha_k(\mu)\frac{\mathrm{e}^{i(\mu-\rho)x}}{\rho-\mu}\tilde{e}_k(x,\mu), \quad \rho\in\mathbb{R}. \tag{3.47}$$

Отметим, что предел в (3.47) существует, поскольку существуют пределы всех остальных слагаемых в (3.45).

В дальнейшем символом C будем обозначать оператор Коши:

$$Cf(\rho) := \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\mu)\,d\mu}{\mu-\rho}, \quad \rho\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},$$

символами $C^{\pm}$ – следующие действующие в $L_2(\mathbb{R})$ операторы:

$$C^{\pm}f(\rho) := \lim_{\varepsilon\to+0}(Cf)(\rho\pm i\varepsilon). \tag{3.20}$$

Введем, кроме того, следующие линейные операторы, также действующие в $L_2(\mathbb{R})$:

$$U_kf(\rho) := s_k(\rho)f(\rho),\ V_k(x)f(\rho) := \mathrm{e}^{i\rho x}f(\rho),\ Tf(\rho) := f(-\rho). \tag{3.48}$$

Обозначим через $\mathcal{H}$ пространство функций $f(\rho), \rho\in\mathbb{R}\cup(-Z_k^-)$ таких, что $f\,|_{\mathbb{R}}\in L_2(\mathbb{R})$. Мы будем рассматривать $\mathcal{H}$ как гильбертово пространство со скалярным произведением:

$$(f_1,f_2) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\rho)\overline{f_2(\rho)}\,d\rho + \sum_{\rho\in -Z_k^-}\alpha_k(-\rho)f_1(\rho)\overline{f_2(\rho)}. \tag{3.49}$$

Введем в пространстве $\mathcal{H}$ следующие операторы (зависящие от параметра x):

$$H_k(x)f(\rho) := V_k^{-1}(x)C^-U_kV_k(x)Tf(\rho) + \sum_{\mu\in Z_k^-} i\alpha_k(\mu)\frac{\mathrm{e}^{i(\mu-\rho)x}}{\rho-\mu}f(-\mu), \quad \rho\in\mathbb{R} \tag{3.50}$$

$$H_k(x)f(\rho) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{\infty} s_k(\mu)\frac{\mathrm{e}^{i(\mu-\rho)x}}{\mu-\rho}f(-\mu)\,d\mu + \sum_{\mu\in Z_k^-} i\alpha_k(\mu)\frac{\mathrm{e}^{i(\mu-\rho)x}}{\rho-\mu}f(-\mu), \quad \rho\in Z_k^-. \tag{3.51}$$

Таким образом, соотношение (3.45) можно переписать в следующем операторном виде:

$$\hat{e}_k^-(x) = H_k(x)\hat{e}_k^-(x) + g_k(x), \tag{3.52}$$

где x рассматривается как параметр, $\hat{e}_k^-(x)$ обозначает функцию $\hat{e}_k^-(x,\cdot)$, рассматриваемую как элемент пространства $\mathcal{H}$. Поскольку оператор $H_k(x)$ непрерывен в пространстве $\mathcal{H}$, функция $g_k(x,\rho), \rho\in\mathbb{R}\cup(-Z_k^-)$ принадлежит $\mathcal{H}$, мы обозначаем через $g_k(x)$ соответствующий элемент данного пространства.

Теорема 3.5. *Для каждого фиксированного $x\in[0,\infty)$ $\hat{e}_k^-(x)$ является единственным решением уравнения* (3.52) *в пространстве $\mathcal{H}$.*

Доказательство. С учетом рассуждений приведенных выше, для доказательства теоремы достаточно показать единственность решения уравнения (3.52). С этой целью рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$f = H_k(x)f \tag{3.53}$$

для произвольного фиксированного x. Заметим, прежде всего, что из симметрий $s_k(-\rho)=\overline{s_k(\rho)}, \rho\in\mathbb{R}$, $\alpha_k(\rho)=\overline{\alpha_k(\rho)}, \rho\in Z_k^-$ вытекает следующий факт: если f является решением (3.53), то функция φ, определяемая как:

$$\varphi(\rho) := i(\overline{f(\rho)} - f(-\rho)), \rho\in\mathbb{R}, \quad \varphi(\rho) := i(\overline{f(\rho)} - f(\rho)), \rho\in -Z_k^-$$

также является решением (3.53). Следовательно, не нарушая общности, можно считать, что рассматриваемое далее произвольное решение $\varphi\in\mathcal{H}$ уравнения (3.53) удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi(-\rho) = \overline{\varphi(\rho)},\ \rho\in\mathbb{R}, \quad \varphi(\rho) = \overline{\varphi(\rho)},\ \rho\in -Z_k^-. \tag{3.54}$$

Имеем, далее:

$$(\varphi,\varphi) = (H_k(x)\varphi,\varphi) = A_{11} + A_{22} + A_{12} + A_{21},$$

где:

$$A_{11} = \frac{1}{2\pi}\left((H_k(x)\varphi)\left|_{\mathbb{R}}\right., \varphi\left|_{\mathbb{R}}\right.\right)_{L_2(\mathbb{R})},$$

$$A_{22} = \sum_{\rho\in -Z_k^-} \alpha_k(-\rho)\overline{\varphi(\rho)} \sum_{\mu\in Z_k^-} i\alpha_k(\mu)\varphi(-\mu)\frac{e^{i(\mu-\rho)x}}{\rho-\mu},$$

$$A_{12} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{\mu\in Z_k^-} i\alpha_k(\mu)\frac{e^{i(\mu-\rho)x}}{\rho-\mu}\varphi(-\mu)\overline{\varphi(\rho)}\,d\rho,$$

$$A_{21} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{\rho\in -Z_k^-} \alpha_k(-\rho)s_k(\mu)\frac{e^{i(\mu-\rho)x}}{\mu-\rho}\varphi(-\mu)\overline{\varphi(\rho)}\,d\mu.$$

Прежде всего, пользуясь (3.54) и формулой:

$$\frac{\mathrm{e}^{i(\mu-\rho)x}}{i(\mu-\rho)} = -\int\limits_x^\infty \mathrm{e}^{i(\mu-\rho)t}\,dt, \quad \mathrm{Im}\mu > \mathrm{Im}\rho,$$

преобразуем A_{22} к виду:

$$A_{22} = -\int\limits_x^\infty \Phi^2(t)\,dt, \quad \Phi(t) = \sum_{\rho\in -Z_k^-} \alpha_k(-\rho)\varphi(\rho)\mathrm{e}^{-i\rho t}. \tag{3.55}$$

Рассуждая аналогичным образом, получим после некоторых преобразований:

$$A_{12} + A_{21} = -\int\limits_x^\infty \Phi(t)\Psi(t)\,dt, \tag{3.56}$$

где:

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi}\, l.i.m._{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} f(\rho)\mathrm{e}^{i\rho t}\,d\rho, \quad f(\rho) := \varphi(\rho) + s_k(\rho)\varphi(-\rho).$$

Рассмотрим (3.53) при $\rho \in \mathbb{R}$. Из соотношения $C^+ - C^- = Id$ получаем:

$$\varphi(\rho) + s_k(\rho)\varphi(-\rho) = \sum_{\mu\in Z_k^-} i\alpha_k(\mu)\frac{\mathrm{e}^{i(\mu-\rho)x}}{\rho-\mu}\varphi(-\mu) + V_k^{-1}(x)C^+U_kV_k(x)T\varphi(\rho).$$

Поскольку преобразование Фурье последнего слагаемого обращается в 0 тождественно при всех $t > x$, из полученного равенство следует:

$$\Psi(t) = -\sum_{\mu\in Z_k^-} \alpha_k(\mu)\varphi(-\mu)\mathrm{e}^{i\mu t} = -\Phi(t),\ t > x.$$

Подставляя полученное равенство в (3.55), (3.56), получаем $A_{12}+A_{21}+A_{22} = 0$.

Далее, из соотношений (3.54), $s_k(-\rho) = \overline{s_k(\rho)}$ и оценки $|s_k(\rho)| < 1$ следует, что для $\varphi \neq 0$ выполнено неравенство:

$$|A_{11}| = \frac{1}{2\pi}\left|\left((H_k(x)\varphi)\,|_{\mathbb{R}}\,, \varphi\,|_{\mathbb{R}}\right)_{L_2(\mathbb{R})}\right| < \frac{1}{2\pi}\left(\varphi\,|_{\mathbb{R}}\,, \varphi\,|_{\mathbb{R}}\right)_{L_2(\mathbb{R})} \leq (\varphi,\varphi).$$

С другой стороны, как показано выше, $\varphi = H_k(x)\varphi$ влечет $(\varphi,\varphi) = (H_k(x)\varphi,\varphi) = A_{11}$. Полученное противоречие доказывает, что $\varphi = 0$.

$\square$

Теорема 3.5 позволяет обосновать следующую процедуру решения Задачи $IP(k)$.

Алгоритм 3.2. *Заданы данные рассеяния J_k, ассоциированные с лучом $\mathcal{R}_k$.*

1. Выбираем модельный оператор с вещественнозначным потенциалом $\tilde{q}$, удовлетворяющим (3.33) *и такой, что $Z_k^- = \varnothing$. Например, можно положить $\tilde{q}_j = 0$, $j = \overline{0,p}$.*

2. Для каждого фиксированного $x \in [0,\infty)$ строим оператор $H_k(x)$, используя формулы (3.48), (3.50), (3.51), *а также вычисляем $g_k(x)$ по формулам* (3.46), (3.47).

3. Для каждого фиксированного $x \in [0,\infty)$ находим $\hat{e}_k^-(x)$, решая уравнение (3.52).

4. Выбираем произвольное $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для каждого фиксированного $x \in [0,\infty)$ вычисляем $e_k^-(x,\rho) = \tilde{e}_k^-(x,\rho) + \hat{e}_k^-(x,\rho)$.

5. Восстанавливаем потенциал по формуле $q_k(x) = (e_k^-(x,\rho))''/e_k^-(x,\rho) + \rho^2$.

В оставшейся части параграфа мы покажем, что для восстановления оператора на всем графе G нужно задать все «частичные» данные рассеяния J_k, $k = \overline{1,p}$ и, кроме того, некоторую дополнительную информацию относительно потенциала на цикле.

Обозначим через Λ^0 и Λ_0 спектры периодической задачи и однородной задачи Дирихле, соответственно, поставленных на (рассматриваемом отдельно) цикле $\mathcal{R}_0$. Определим функцию $\omega(\lambda), \lambda \in \Lambda^-$, положив $\omega(\lambda) = 1$, если $\lambda \in \Lambda^0 \cap \Lambda_0$ и $\omega(\lambda) = 0$ в противном случае. Представим спектр периодической задачи в виде: $\lambda_0^0 < \lambda_3^0 \le \lambda_4^0 < \lambda_7^0 \le \lambda_8^0 < \ldots$, а спектр антипериодической задачи в виде: $\lambda_1^0 \le \lambda_2^0 < \lambda_5^0 \le \lambda_6^0 < \ldots$. Обозначим через $\sigma_n^0, n = \overline{1,\infty}$ последовательность знаков для спектра $\Lambda_0 = \{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ задачи Дирихле (полагая $\sigma_n^0 = 0$, если $\lambda_{2n-1}^0 = \lambda_{2n}^0$).

Определение 3.5. *Набор данных*

$$J = \{J_k, k = \overline{1,p};\ \Lambda;\ \omega(\lambda), \lambda \in \Lambda^-;\ \sigma_n^0, n = \overline{1,\infty}\}$$

назовем глобальными данными рассеяния.

Рассмотрим обратную задачу рассеяния на графе G в следующей постановке.

Задача IP. *По заданным глобальным данным рассеяния J найти потенциалы $q_k(\cdot)$, $k = \overline{0,p}$.*

Изложенная выше процедура решения «частичных» обратных задач позволяет, очевидно, по J построить потенциалы на лучах, т.е., $q_k(\cdot)$, $k = \overline{1,p}$. Завершающий шаг в решении Задачи IP состоит в восстановлении $q_0(x), x \in [0,\pi]$. Покажем, каким образом указанная задача может быть сведена к классической обратной периодической задаче.

Заметим, прежде всего, что в рассматриваемом контексте решения Йоста $e_j(x,\rho), j = \overline{1,p}$ можно считать известными. Это позволяет, в частности, вычислить локальные функции Вейля для лучей $\mathcal{R}_j$, рассматриваемых отдельно:

$$m_j(\lambda) = \frac{e_j'(0,\rho)}{e_j(0,\rho)}, \ \rho \in \overline{\mathbb{C}}^+, \ j = \overline{1,p}. \tag{3.57}$$

Кроме того, мы можем вычислить значения $\psi_{kk}(0,\rho)$, $\psi_{kk}'(0,\rho)$, $\rho \in \overline{\mathbb{C}}^+$, где $k \in \overline{1,p}$ произвольно. Для этого можно воспользоваться соотношениями из Леммы 3.20 для вещественных ρ, после чего выполнить аналитическое продолжение. Теперь можно переписать условия склейки (3.34) для $\psi_k(x,\rho)$ следующим образом:

$$m_0(\lambda) = -\frac{\psi_{kk}'(0,\rho)}{\psi_{kk}(0,\rho)} - \sum_{j=\overline{1,p}\setminus\{k\}} m_j(\lambda), \quad \lambda = \rho^2, \rho \in \mathbb{C}^+. \tag{3.58}$$

Полученное соотношение позволяет найти $m_0(\cdot)$. Обозначим через Z_0 множество полюсов функции $m_0(\cdot)$. Заметим, что: $\Lambda_0 = Z_0 \cup \Lambda^+ \cup \{\lambda \in \Lambda^- : \omega(\lambda) = 1\}$. Таким образом, мы можем восстановить спектр задачи Дирихле Λ_0 и ее характеристическую функцию $d_0(\cdot)$ по формуле [57]:

$$d_0(\lambda) = \pi \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n - \lambda}{n^2}. \tag{3.59}$$

Рассмотрев снова функцию $m_0(\cdot)$, заметим, что, зная $d_0(\cdot)$, можно восстановить характеристическую функцию периодической задачи $d^0(\cdot)$. В свою очередь, зная Λ_0, Λ^0 и последовательность знаков $\{\sigma_n^0\}$, мы располагаем достаточным набором данных для постановки классической периодической задачи.

Таким образом, мы приходим к следующей процедуре конструктивного решения Задачи IP.

Алгоритм 3.3. *Заданы глобальные данные рассеяния J.*

1. Для каждого $k = \overline{1,p}$ строим $q_k(\cdot)$, решая Задачу $IP(k)$ с помощью Алгоритма 3.2.

2. Вычисляем $e_k(x,\rho)$, $x \in [0,\infty)$, $\rho \in \overline{\mathbb{C}}^+$, $k = \overline{1,p}$.

3. Выбираем и фиксируем произвольное $k \in \overline{1,p}$.

4. Находим $\psi_{kk}(0,\rho)$, $\psi'_{kk}(0,\rho)$ с помощью Леммы 3.20 и аналитического продолжения.

5. Вычисляем $m_0(\cdot)$ с помощью (3.57), (3.58).

6. Находим множество Z_0 полюсов функции $m_0(\cdot)$ и строим множество $\Lambda_0 = Z_0 \cup \Lambda^+ \cup \{\lambda \in \Lambda^- : \omega(\lambda) = 1\} =: \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$.

7. Вычисляем $d_0(\cdot)$ по формуле (3.59) и $d^0(\cdot)$ по формуле $d^0(\lambda) = m_0(\lambda)d_0(\lambda)$.

8. По заданным $d_0(\cdot)$, $d^0(\cdot)$ и $\{\sigma_n^0\}_{n=1}^{\infty}$ восстанавливаем $q_0(\cdot)$, решая обратную периодическую задачу.

Теорема 3.6. *Оператор L однозначно определяется заданием глобальных данных рассеяния и может быть восстановлен по указанным данным с помощью Алгоритма 3.3.*

§3.3 Обратная задача для операторов переменного порядка на простейшем некомпактном графе с циклом

Пусть Γ - геометрический граф, состоящий из замкнутой кривой r_0 длины T и луча r_1, исходящего из некоторой точки $v_1 \in r_0$. Функцию y на графе Γ будем трактовать как пару функций $(y_0(x), x \in [0,T], y_1(x), x \in [0,\infty))$.

На цикле r_0 рассмотрим уравнение

$$\ell_0 y_0 \equiv D^3 y_0 + p_{01}(x) D y_0 + p_{00}(x) y_0 = \rho^3 y_0, \tag{3.60}$$

где ρ - спектральный параметр, $D = -id/dx$ и коэффициенты $p_{00}(x)$, $p_{01}(x)$ таковы, что $\ell_0^* = \ell_0$.

На луче r_1 рассмотрим уравнение

$$\ell_1 y_1 \equiv D^N y_1 + \sum_{s=0}^{N-2} p_{1s}(x) D^s y_1 = \rho^N y_1, \tag{3.61}$$

где $N \geq 3$ и для некоторого $\tau > 0$ выполнено условие:

$$\int_0^\infty |p_{1s}(x)| \exp(\tau x)\, dx < \infty. \qquad (3.62)$$

Введем в рассмотрение следующие линейные формы:

$$U_\nu(y) := \sigma_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \sum_{s=0}^{\nu-2} \sigma_{\nu s} y^{(s)}(0), u_{\xi\nu}(y) = (-1)^{\chi_{\xi\nu}} y^{(\nu-1)}(\xi),$$

где $\xi \in \{0, T\}$, $\chi_{0\nu} = 0$, $\chi_{T\nu} = \chi$, $\nu = 1, 2$, $\chi_{T3} = \chi + 1$, $\chi \in \{0, 1\}$. Для функции $y = (y_0, y_1)$ на Γ и $\nu \in \overline{1, N}$ определим условие склейки $C(\nu)$ как равенство $u_{0\nu}(y_0) = u_{T\nu}(y_0) = U_\nu(y_1)$, а условие $K(\nu)$ равенством $u_{0\nu}(y_0) + u_{T\nu}(y_0) + U_\nu(y_1) = 0$ при $\nu \leq 3$ и $U_\nu(y_1) = 0$ при $\nu > 3$.

Пусть $S_l := \{\arg(i\rho) \in \left((l-1)\frac{\pi}{N}, l\frac{\pi}{N}\right)\}$. Для фиксированного l через R_k, $k = \overline{1, N}$ обозначим корни N-й степени из 1, занумерованные таким образом, что $\mathrm{Re}(i\rho R_1) < \mathrm{Re}(i\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}(i\rho R_N)$ для всех $\rho \in S_l$.

Зафиксируем $\chi \in \{0, 1\}$. Для каждого $k = \overline{1, N}$ в каждом из секторов S_l определим *решение типа Вейля порядка* k как решение системы (3.60), (3.61) $\psi_k(\rho) = (\psi_{k0}(x, \rho), \psi_{k1}(x, \rho))$ со следующими свойствами:
1) $\psi_{k1}(x, \rho) = \exp(i\rho R_k x)(1 + o(1))$, $x \to \infty$;
2) для $\psi_k(\rho)$ выполнены условия склейки $C(\nu)$, $\nu = \overline{1, \nu_k - 1}, \nu_k = \min\{k, 3\}$, $K(\nu)$, $\nu = \overline{\nu_k, k}$.

Используя разложения $\psi_{k0}(x, \rho)$, $\psi_{k1}(x, \rho)$ по фундаментальным системам решений уравнений (3.60) и (3.61) соответственно, можно показать, что $\psi_k(\rho)$ существует и единственна при всех $\rho \in \bar{S}_l$ за исключением некоторого не более, чем счетного множества, не имеющего конечных предельных точек кроме, возможно, точки 0. В дальнейшем мы будем считать, что эта последняя возможность исключена, более точно, мы предполагаем выполненным следующее условие.

Условие G_0. *При каждом* k $\psi_{k1}(x, \rho)$ *голоморфна в* $S_l \cap \{|\rho| < \delta\}$ *при некоторой* $\delta > 0$, *непрерывна в* $\bar{S}_l \cap \{|\rho| < \delta\} \setminus \{0\}$ *и* $\psi_{k1}^{(\nu-1)}(x, \rho) = O\left(\rho^{-M}\right)$, $k, \nu = \overline{1, N}$ *при* $\rho \to 0$, *где* $M < \infty$.

Обозначим через $Y_{k1}^\alpha(x, \rho)$, $k = \overline{1, N}$ функции, образующие фундаментальную систему решений (свою для каждого сектора S_l) уравнения (3.61), построенную аналогично ФСР B_α^0 [57], § 3.1. Напомним следующие свойства функций

$Y^\alpha_{k1}(x,\rho)$:
1) при каждом $x \ge 0$ $Y^\alpha_{k1}(x,\rho)$ голоморфны по ρ в $S_l \cap \{|\rho| > \rho_\alpha\}$, причем $\rho_\alpha \to 0$ при $\alpha \to \infty$;
2) $\lim\limits_{x\to\infty} Y^\alpha_{k1}(x,\rho)\exp(-i\rho R_k x) = 1$;
3) $D^\nu Y^\alpha_{k1}(x,\rho) = (\rho R_k)^\nu \exp(i\rho R_k x)[1]$, $[1] := \big(1 + O(\rho^{-1})\big)$, $x \ge \alpha$, $\rho \to \infty$.

Зафиксируем α такое, что $Y^\alpha_{k1}(x,\rho)$ голоморфны в $S_l \cap \{|\rho| > \delta/2\}$ и непрерывны в $\bar S_l \cap \{|\rho| \ge \delta/2\}$. Тогда при $\rho \in \bar S_l \cap \{|\rho| \ge \delta/2\}$ с учетом условия 1 определения решений типа Вейля имеют место представления:

$$\psi_{k1}(x,\rho) = Y^\alpha_{k1}(x,\rho) + \sum_{j<k} \gamma^\alpha_{jk}(\rho) Y^\alpha_{j1}(x,\rho). \tag{3.63}$$

Для $\psi_{k0}(x,\rho)$ воспользуемся представлениями вида:

$$\psi_{k0}(x,\rho) = \sum_{j=1}^{3} \beta_{jk}(\rho) C_j(x,\lambda), \tag{3.64}$$

где $\lambda = \rho^3$ и $C_j(x,\lambda)$ суть решения уравнения $\ell_0 y = \lambda y$ при условиях $C_j^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{j,\nu}$.

Подставляя (3.63), (3.64) в условия склейки из условия 2 определения решений типа Вейля, получим некоторую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\gamma^\alpha_{jk}(\rho)$, $\beta_{jk}(\rho)$. Обозначим через $\Delta_k(\rho)$ определители этих СЛАУ и через Z_{kl} множества их нулей, лежащих в $\bar S_l \setminus \{0\}$ при $k \in \overline{2,N}$ и в $\bar S_l$ при $k = 1$. Ясно, что $\psi_k(\rho)$ непрерывны на $\bar S_l \setminus (\{0\} \cup Z_{kl})$ и голоморфны в $S_l \setminus Z_{kl}$. Заметим, что при выполнении условия (3.62) функции $Y^\alpha_{k1}(x,\rho)$ допускают аналитическое продолжение в некоторую область вида $S^\varepsilon_l \setminus \{|\rho| \le \rho_\alpha\}$, где $S^\varepsilon_l := S_l + i\varepsilon \exp\left(i\left(l - \frac12\right)\frac{\pi}{N}\right)$. Следовательно, для любого $\rho_0 \in Z_{kl}$ $\psi_{kj}(x,\rho)$ допускают голоморфное продолжение в некоторую проколотую окрестность ρ_0. Всюду далее предполагаем выполненным следующее условие.

Условие G_1. *Множества Z_{kl} при различных k не пересекаются. Каждое $\rho_0 \in Z_{kl}$ есть простой нуль $\Delta_k(\rho)$ и простой полюс $\psi_{kj}(x,\rho)$ (хотя бы при одном $j \in \{0,1\}$). Последнее означает, что существуют функции $\psi_{kj,<-1>}(x,\rho_0)$, $j = 0,1$, хотя бы одна из которых не является тождественным 0, такие, что функции*

$$\psi_{kj}(x,\rho) - (\rho-\rho_0)^{-1}\psi_{kj,<-1>}(x,\rho_0)$$

голоморфны в окрестности ρ_0.

Замечание 3.5. *Поскольку* $Y_{11}^{\alpha}(x,\rho)$ *не зависит от* α *и при выполнении* (3.62) *допускает аналитическое продолжение в окрестность 0, определитель* $\Delta_1(\rho)$ *также допускает аналитическое продолжение в окрестность 0. Поэтому мы допускаем возможность* $0 \in Z_{1l}$, *условие* G_1 *в этом случае требует, чтобы 0 был простым нулем* $\Delta_1(\rho)$ *и простым полюсом* $\psi_1(\rho)$ *(фактически,* $\psi_{10}(x,\rho)$*).*

Из представления (3.63) вытекает, что для $\rho_0 \in Z_{kl}$.

$$\psi_{k1,<-1>}(x,\rho_0) = \sum_{j<k} \gamma_{jk,<-1>}^{\alpha}(\rho_0) Y_{j1}^{\alpha}(x,\rho_0).$$

В силу условия G_1 все $\psi_{j1}(x,\rho)$, $j<k$ голоморфны в окрестности ρ_0, а представления (3.63) можно обратить следующим образом:

$$Y_{j1}^{\alpha}(x,\rho_0) = \psi_{j1}(x,\rho_0) + \sum_{s<j} g_{sj}(\rho_0)\psi_{s1}(x,\rho_0),$$

что приводит к следующему утверждению.

Лемма 3.25. *Для любого* $\rho_0 \in Z_{kl}$ *существуют (единственные) числа* $v_{jk}^{l}(\rho_0)$, $j<k$ *такие, что функции*

$$D^{\nu-1}\psi_{k1}(x,\rho) - (\rho-\rho_0)^{-1}\sum_{j<k} v_{jk}^{l}(\rho_0) D^{\nu-1}\psi_{j1}(x,\rho_0),\ \ \nu = \overline{1,N}$$

голоморфны в окрестности ρ_0.

Для исследования поведения решений типа Вейля при больших ρ запишем их в виде:

$$\psi_{k1}(x,\rho) = Y_{k1}(x,\rho) + \sum_{j<k} \gamma_{jk}(\rho) Y_{j1}(x,\rho), \tag{3.65}$$

$$\psi_{k0}(x,\rho) = \sum_{j=1}^{3} \beta_{jk}(\rho) Y_{j0}(x,\rho). \tag{3.66}$$

Через $Y_{k1}(x,\rho)$ в (3.65) обозначены $Y_{k1}^{\alpha}(x,\rho)$ при $\alpha = 0$. Через $Y_{k0}(x,\rho)$ в (3.66) обозначены решения Бирхгофа уравнения (3.60) [57], § 3.1. Напомним, что для решений $Y_{k0}(x,\rho)$ справедливы асимптотики следующего вида:

$$D^{\nu} Y_{s0}(x,\rho) = (\rho\omega^s)^{\nu-1}\exp\left(i\rho\omega^s x\right)[1],\ \ \omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$$

при $\rho \to \infty$ по любому замкнутому сектору в ρ-плоскости такому, что выражения $\mathrm{Re}(i\rho(\omega^s - \omega^j))$ для любых j, s сохраняют знак в этом секторе.

Подставляя (3.65), (3.66) в условия склейки из условия 2 определения решений типа Вейля, получим некоторую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\gamma_{jk}(\rho)$, $\beta_{jk}(\rho)$. Строку этой системы, содержащую U_ν и (или) $Y_{j0}^{(\nu-1)}$, поделим на $(i\rho)^{\nu-1}$ (нетрудно заметить, что выражения такого вида в пределах одной строки соответствуют одному и тому же ν). Решая полученную таким образом СЛАУ по правилу Крамера, получим представления:

$$\gamma_{sk}(\rho) = -\frac{D_{sk}(\rho)}{D_k(\rho)}, \tag{3.67}$$

где $D_k(\rho)$ - определитель системы, а $D_{sk}(\rho)$ могут быть получены из $D_k(\rho)$ формальной заменой Y_{s1} на Y_{k1}.

Рассмотрим следующую СЛАУ (она получается из описанной выше заменой Y_{kj} главными частями их асимптотик):

$$\begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)} = (-1)^{\chi_{T\nu}} \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)} \exp(i\rho\omega^s T) = \\ \sigma_\nu \left(\sum\limits_{s=1}^{k-1} \gamma_{ks} R_s^{\nu-1} + R_k^{\nu-1} \right), \ \nu = \overline{1, \nu_k - 1} \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)} + (-1)^{\chi_{T\nu}} \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)} \exp(i\rho\omega^s T) + \\ \sigma_\nu \left(\sum\limits_{s=1}^{k-1} \gamma_{ks} R_s^{\nu-1} + R_k^{\nu-1} \right) = 0, \ \nu = \overline{\nu_k, 3} \\ \sum\limits_{s=1}^{k-1} \gamma_{ks} R_s^{\nu-1} + R_k^{\nu-1} = 0, \nu = \overline{4, k}. \end{cases}$$

Обозначим ее определитель через $D_k^0(\rho)$. Нетрудно показать, что для $D_k^0(\rho)$ имеют место представления следующего вида:

$$D_k^0(\rho) = A_{k0} + \sum_{m=1}^{3} \left(A_{km}^+ \exp\left(i\rho\omega^m T\right) + A_{km}^- \exp\left(-i\rho\omega^m T\right) \right), \tag{3.68}$$

где числа A_{k0}, $A_{km}^\pm$ зависят только от коэффициентов σ_ν форм U_ν и сектора S_l. Для определителей $D_k(\rho)$, $D_{sk}(\rho)$ аналогично получаются следующие асимптотические представления:

$$D_k(\rho) = [A_{k0}] + \sum_{m=1}^{3} \left([A_{km}^+] \exp\left(i\rho\omega^m T\right) + [A_{km}^-] \exp\left(-i\rho\omega^m T\right) \right), \tag{3.69}$$

$$D_{sk}(\rho) = [A_{sk0}] + \sum_{m=1}^{3} \left([A^{+}_{skm}] \exp\left(i\rho\omega^m T\right) + [A^{-}_{skm}] \exp\left(-i\rho\omega^m T\right) \right), \qquad (3.70)$$

где числа A_{sk0}, $A^{\pm}_{skm}$ также зависят только от коэффициентов σ_ν форм U_ν и сектора S_l. Пусть выполнено следующее условие регулярности.

Условие R. $A^{\pm}_{km} \neq 0$ *для всех* k, m, l.

Тогда из [28], теорема 5.8 вытекают (в частности) следующие утверждения.

Лемма 3.26. *Число элементов множества* Z_{kl} *в кольце* $\{t \leq |\rho| \leq t+1\}$ *ограничено некоторым числом, не зависящим от* t.

Лемма 3.27. *При* $\rho \to \infty$, $\rho \in \bar{S}_l$, $dist(\rho, Z_{kl}) > \varepsilon$ *(где* $\varepsilon > 0$ *произвольно) справедливы асимптотики:*

$$D_k(\rho) = D^0_k(\rho)[1], \ |D_{sk}(\rho)| \leq C|D^0_k(\rho)|, \ |D_{sk}(\rho) - D^0_{sk}(\rho)| \leq C|\rho|^{-1}|D^0_k(\rho)|,$$

где

$$D^0_{sk}(\rho) := A_{sk0} + \sum_{m=1}^{3} \left(A^{+}_{skm} \exp\left(i\rho\omega^m T\right) + A^{-}_{skm} \exp\left(-i\rho\omega^m T\right) \right).$$

Из леммы 3.27 и представлений (3.65), (3.67) вытекает, в свою очередь, следующее утверждение.

Лемма 3.28. *При* $\rho \to \infty$, $\rho \in \bar{S}_l$, $dist(\rho, Z_{kl}) > \varepsilon$ *справедливы асимптотики:*

$$D^{\nu-1}\psi_{k1}(x,\rho) =$$
$$(\rho R_k)^\nu \exp(i\rho R_k x)[1] - \sum_{s<k} \left(\frac{D^0_{sk}(\rho)}{D^0_k(\rho)} + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right) (\rho R_s)^\nu \exp(i\rho R_s x).$$

Пусть $\chi \in \{0,1\}$ фиксировано и $\psi_k(\rho)$, $k = \overline{1,N}$ - решения типа Вейля, построенные, как описано в предыдущем разделе, с выбранным значением χ в условиях склейки $C(\nu)$, $K(\nu)$. Исходя из свойств решений типа Вейля мы определим данные рассеяния, ассоциированные с лучом r_1 и покажем, что эти данные однозначно определяют коэффициенты уравнения (3.61).

Определим матрицу $\Psi = (\Psi_{\nu k})_{k,\nu=\overline{1,N}}$($\nu$ - номер строки):

$$\Psi_{\nu k}(x,\rho) := D^{\nu-1}\psi_{k1}(x,\rho).$$

Для $\rho_0 \in \Sigma_l \setminus (Z_l \cup Z_{l+1})$ (где $\Sigma_l := \bar{S}_l \cap \bar{S}_{l+1}$, $Z_l := \bigcup\limits_k Z_{kl}$) определим:

$$\Psi_-(x_1,\rho_0) := \lim_{\rho\to\rho_0, \rho\in S_l} \Psi(x,\rho), \Psi_+(x,\rho_0) := \lim_{\rho\to\rho_0, \rho\in S_{l+1}} \Psi(x,\rho)$$

и матрицу

$$v(\rho_0) := \Psi_-^{-1}(x,\rho_0)\Psi_+(x,\rho_0).$$

Далее, для $\rho_0 \in Z_{kl}$ определим матрицы $v_l(\rho_0) := \left(v^l_{jk}(\rho_0)\right)_{j,k=\overline{1,N}}$ (j - номер строки), где $v^l_{jk}(\rho_0)$ - числа из утверждения леммы 1.

Определение 3.6. *Данными рассеяния, ассоциированными с лучом r_1, назовем набор*

$$J_1^\chi = \left\{v(\rho), \rho \in \Sigma_l \setminus (Z_l \cup Z_{l+1}), Z_{kl}, v_l(\rho), \rho \in Z_{kl}, k = \overline{1,N}, l = \overline{1,2N}\right\}.$$

Наряду с уравнениями (3.60), (3.61) рассмотрим уравнения того же вида, но с другими коэффициентами $\tilde{p}_{sj}$. Через $\tilde{\psi}_k(\rho)$ обозначим соответствующие решения типа Вейля (построенные при тех же условиях склейки). Предположим, что условия G_0, G_1 также выполнены, тогда можно определить данные рассеяния $\tilde{J}_1^\chi$.

Теорема 3.7 *При выполнении условий G_0, G_1 и условия регулярности склейки R из $\tilde{J}_1^\chi = J_1^\chi$ следует $\tilde{p}_{1s} = p_{1s}$, $s = \overline{0, N-2}$. Кроме того, $\tilde{\Psi} = \Psi$.*

Доказательство.

Рассмотрим следующую *матрицу спектральных отображений* [66], [57]:

$$P(x,\rho) := \Psi(x,\rho)\tilde{\Psi}^{-1}(x,\rho).$$

В силу равенств $\tilde{Z}_{kl} = Z_{kl}$ и $\tilde{v}(\rho) = v(\rho)$, $\rho \in \Sigma_l \setminus (Z_l \cup Z_{l+1})$ матрица $P(x,\rho)$ голоморфна по ρ в $\mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{k,l} Z_{kl} \setminus \{0\}$.

Из леммы 3.25 следует, что для любого $\rho_0 \in Z_{kl}$ матрица

$$\Psi(x,\rho)\left(I - (\rho-\rho_0)^{-1}v_l(\rho_0)\right),$$

где I - единичная матрица, голоморфна в окрестности ρ_0, и аналогичное утверждение справедливо для $\tilde{\Psi}$. В силу $\tilde{v}^l(\rho_0) = v^l(\rho_0)$ отсюда следует, что $P(x,\rho)$ ограничена в окрестности ρ_0, т.е.ρ_0 является устранимой особенностью $P(x,\rho)$. Таким образом, в условиях теоремы $P(x,\rho)$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Далее, из асимптотик леммы 3.28 вытекают оценки:

$$P_{jk}(x,\rho) = O\left(\rho^{j-k}\right), \rho \to \infty,\ \operatorname{dist}\left(\rho, \bigcup_{k,l} Z_{kl}\right) > \varepsilon, \tag{3.71}$$

а из условия G_0 - оценка

$$P_{jk}(x,\rho) = O\left(\rho^{-M_1}\right),\ M_1 < \infty,\ \rho \to 0. \tag{3.72}$$

С учетом леммы 3.26 из (3.71), (3.72) следует, что $P(x,\rho)$ представима в виде:

$$P(x,\rho)=\sum_{\nu=-M_1}^{N-1}\rho^{\nu}P_{<\nu>}(x). \qquad (3.73)$$

Из условия 1 определения решений типа Вейля следует:

$$\lim_{x\to\infty}P_{<\nu>}(x)=0,\nu\neq 0,\ \lim_{x\to\infty}P_{<0>}(x)=I.$$

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 3.54 [66] выводим отсюда, что $P_{<\nu>}(x)\equiv 0$ при $\nu\neq 0$, а рассуждая, как при доказательстве леммы 3.59 [66], заключаем, что при $j\leq k$ $P_{<0>,jk}(x)\equiv\delta_{j,k}$. С учетом (3.73) это означает, в частности, что $P_{1k}(x,\rho)\equiv\delta_{1,k}$, то есть, первые строки матриц $\tilde{\Psi}$ и Ψ тождественно равны. А поскольку остальные строки в этих матрицах получаются дифференцированием первой строки, матрицы $\tilde{\Psi}$ и Ψ совпадают.

$\square$

Для восстановления коэффициентов уравнения (3.60) нам понадобятся два набора данных рассеяния, ассоциированных с лучом r_1 J_1^0, J_1^1 и, возможно, некоторый конечный набор чисел, связанных с (3.60) непосредственно.

Обозначим через $\Lambda^{\pm}$ спектры краевых задач для уравнения $\ell_0 y=\lambda y$ с условиями $y^{(\nu-1)}(0)\pm y^{(\nu-1)}(T)=0$, $\nu=\overline{1,3}$, через $\Lambda_s^{\pm}$, $s=1,2$ - спектры задач для этого же уравнения с условиями $y^{(s-1)}(0)=y^{(s-1)}(T)=y^{(2-s)}(0)\pm y^{(2-s)}(T)=0$ (все собственные значения берутся с учетом их алгебраической кратности). Характеристические функции указанных задач обозначим через $\Delta_{30}^{\pm}(\lambda)$ и $\Delta_{3s}^{\pm}(\lambda)$ соответственно. Определим $\Lambda_{3s}^{\pm}:=\Lambda^{\pm}\cap\Lambda_s^{\pm}$.

Определение 3.7. *Глобальными данными рассеяния* назовем набор

$$J=\{J_1^0,J_1^1,\Lambda_{31}^+,\Lambda_{31}^-,\Lambda_{32}^+,\Lambda_{32}^-\}.$$

Теорема 3.8. *При выполнении условий G_0, G_1 и условия регулярности склейки R из $\tilde{J}=J$ следует $\tilde{p}_{1s}=p_{1s}$, $s=\overline{0,N-2}$, $\tilde{p}_{0s}=p_{0s}$, $s=0,1$.*

Доказательство.

В силу теоремы 3.7 из совпадения данных рассеяния следует совпадение коэффициентов уравнения (3.61) и решений типа Вейля на луче r_1. Теперь единственность восстановления коэффициентов уравнения (3.60) следует из единственности решения классической обратной задачи на конечном отрезке по матрице Вейля [57], гл. 3. Покажем это.

Пусть $\Phi_k(x,\lambda)$, $k=1,2$ суть решения Вейля для уравнения $\ell_0 y=\lambda y$, удовлетворяющие краевым условиям:

$$\Phi_1(0,\lambda)=1,\ \Phi_1(T,\lambda)=\Phi_1'(T,\lambda)=0,$$

$$\Phi_2(0,\lambda)=0,\ \Phi_2'(0,\lambda)=1,\ \Phi_2(T,\lambda)=0.$$

Определим функции Вейля $M_{k\nu}(\lambda):=\Phi_k^{(\nu-1)}(0,\lambda)$. Имеют место представления [57], § 3.1:

$$M_{12}(\lambda)=-\frac{d_{12}(\lambda)}{d_1(\lambda)},\ M_{13}(\lambda)=-\frac{d_{13}(\lambda)}{d_1(\lambda)}, \tag{3.74}$$

где

$$d_1=\begin{vmatrix} C_2 & C_3\\ C_2' & C_3'\end{vmatrix},\ d_{12}=\begin{vmatrix} C_1 & C_3\\ C_1' & C_3'\end{vmatrix},\ d_{13}=\begin{vmatrix} C_2 & C_1\\ C_2' & C_1'\end{vmatrix}. \tag{3.75}$$

Здесь для краткости в выражениях вида $C_j^{(\nu)}(T,\lambda)$ аргументы (T,λ) опущены. Отметим, кроме того, что в силу самосопряженности дифференциального выражения ℓ_0, имеет место связь $M_{23}(\lambda)=\overline{M_{12}(\bar\lambda)}$.

Вернемся к доказательству теоремы. Условия склейки для решения $\psi_3(\rho)$ приводят к следующим соотношениям (где различные знаки соответствуют разным $\chi\in\{0,1\}$):

$$\begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{3}\beta_{s3}\left(\delta_{s,1}\pm C_s(T,\lambda)\right)=0,\\ \sum\limits_{s=1}^{3}\beta_{s3}\left(\delta_{s,2}\pm C_s'(T,\lambda)\right)=0,\\ \sum\limits_{s=1}^{3}\beta_{s3}\left(\delta_{s,3}\pm C_s''(T,\lambda)\right)=-U_3(\psi_{31}^{\pm}),\\ \beta_{13}=U_1(\psi_{31}^{\pm}),\\ \beta_{23}=U_2(\psi_{31}^{\pm}),\end{cases} \tag{3.76}$$

Применяя к (3.76) теорему Кронекера-Капелли (как к СЛАУ относительно β_{s3}, $s=1,2,3$), получим соотношения:

$$\begin{vmatrix} C_1\pm1 & C_2 & C_3 & 0\\ C_1' & C_2'\pm1 & C_3' & 0\\ C_1'' & C_2'' & C_3''\pm1 & \mp U_3(\psi_{31}^{\pm})\\ 1 & 0 & 0 & U_1(\psi_{31}^{\pm})\end{vmatrix}=0, \tag{3.77}$$

$$\begin{vmatrix} C_1 \pm 1 & C_2 & C_3 & 0 \\ C_1' & C_2' \pm 1 & C_3' & 0 \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \pm 1 & \mp U_3(\psi_{31}^{\pm}) \\ 0 & 1 & 0 & U_2(\psi_{31}^{\pm}) \end{vmatrix} = 0. \tag{3.78}$$

Соотношения (3.77), (3.78) могут быть переписаны в терминах характеристических функций $\Delta_{3s}^{\pm}(\lambda)$, введенных в начале раздела. С учетом представлений:

$$\Delta_{30}^{\pm} = \pm \begin{vmatrix} C_1 \pm 1 & C_2 & C_3 \\ C_1' & C_2' \pm 1 & C_3' \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \pm 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{31}^{\pm} = \begin{vmatrix} C_2 & C_3 \\ C_2' \pm 1 & C_3' \end{vmatrix}, \Delta_{32}^{\pm} = \begin{vmatrix} C_1 \pm 1 & C_3 \\ C_1' & C_3' \end{vmatrix},$$

эти соотношения принимают вид:

$$U_1(\psi_{31}^{\pm})\Delta_{30}^{\pm} \mp U_3(\psi_{31}^{\pm})\Delta_{31}^{\pm} = U_2(\psi_{31}^{\pm})\Delta_{30}^{\pm} \pm U_3(\psi_{31}^{\pm})\Delta_{32}^{\pm} = 0,$$

что приводит к соотношениям:

$$\frac{\Delta_{31}^{\pm}}{\Delta_{30}^{\pm}} = \pm\frac{U_1(\psi_{31}^{\pm})}{U_3(\psi_{31}^{\pm})},\ \frac{\Delta_{32}^{\pm}}{\Delta_{30}^{\pm}} = \mp\frac{U_2(\psi_{31}^{\pm})}{U_3(\psi_{31}^{\pm})}.$$

В условиях теоремы, как уже замечено выше, $\tilde{\psi}_{31}^{\pm} = \psi_{31}^{\pm}$ и, следовательно,

$$\frac{\tilde{\Delta}_{31}^{\pm}}{\tilde{\Delta}_{30}^{\pm}} = \frac{\Delta_{31}^{\pm}}{\Delta_{30}^{\pm}},\ \frac{\tilde{\Delta}_{32}^{\pm}}{\tilde{\Delta}_{30}^{\pm}} = \frac{\Delta_{32}^{\pm}}{\Delta_{30}^{\pm}}. \tag{3.79}$$

Фигурирующие в (3.79) характеристические функции $\Delta_{3s}^{\pm}(\lambda)$ однозначно определяются заданием своих нулей, а в силу (3.79) и условия $\tilde{\Lambda}_{3s}^{\pm} = \Lambda_{3s}^{\pm}$ эти множества совпадают (с учетом кратностей). Таким образом, в условиях теоремы имеем:

$$\tilde{\Delta}_{3s}^{\pm} = \Delta_{3s}^{\pm},\ s = \overline{0,2}. \tag{3.80}$$

Учитывая, что

$$d_1 = \frac{1}{2}\left(\Delta_{31}^{+} + \Delta_{31}^{-}\right),\ d_{12} = \frac{1}{2}\left(\Delta_{32}^{+} + \Delta_{32}^{-}\right),$$

из (3.80) следует, что $\tilde{d}_1 = d_1$, $\tilde{d}_{12} = d_{12}$. Это влечет, в свою очередь $\tilde{M}_{12} = M_{12}$, $\tilde{M}_{23} = M_{23}$.

Осталось показать, что функция Вейля M_{13} также однозначно восстанавливается по глобальным данным рассеяния. Рассмотрим решение типа Вейля $\psi_1(\rho)$. Для него условия склейки приводят к системе вида:

$$\begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s1} \left(\delta_{s,1} \pm C_s(T,\lambda)\right) + U_1(Y_{11}) = 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s1} \left(\delta_{s,2} \pm C'_s(T,\lambda)\right) + U_2(Y_{11}) = 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s1} \left(\delta_{s,3} \mp C''_s(T,\lambda)\right) + U_3(Y_{11}) = 0 \end{cases} \tag{3.81}$$

Определитель системы (3.81) представляет собой целую функцию $\Delta^{\pm}_{10}(\lambda)$ вида

$$\Delta^{\pm}_{10} = \pm \begin{vmatrix} C_1 \pm 1 & C_2 & C_3 \\ C'_1 & C'_2 \pm 1 & C'_3 \\ C''_1 & C''_2 & C''_3 \mp 1 \end{vmatrix}.$$

В силу условия G_1 $\Delta^{\pm}_{10}(\lambda)$ имеет только простые нули, совпадающие с 3-ми степенями элементов множества $\bigcup\limits_l Z_{1l}$, и таким образом, в условиях теоремы $\tilde{\Delta}^{\pm}_{10}(\lambda) = \Delta^{\pm}_{10}(\lambda)$. Заметим теперь, что

$$\frac{1}{2}\left(\Delta^{\pm}_{10} - \Delta^{\pm}_{30}\right) = d_{13} \mp (C_1 + C'_2). \tag{3.82}$$

С учетом установленных ранее равенств $\tilde{\Delta}^{\pm}_{10}(\lambda) = \Delta^{\pm}_{10}(\lambda)$, $\tilde{\Delta}^{\pm}_{30}(\lambda) = \Delta^{\pm}_{30}(\lambda)$ (3.82) влечет $\tilde{d}_{13} = d_{13}$, и, следовательно, $\tilde{M}_{13} = M_{13}$.

□

Глава 4 Обратные спектральные задачи для интегро-дифференциальных операторов

§4.1 Формула умножения для функций одного вида

Пусть символ J^α обозначает оператор дробного интегрирования Римана – Лиувилля:

$$(J^\alpha f)(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)\,dt.$$

Всюду в дальнейшем мы будем полагать $\alpha > 1$, $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Введем в рассмотрение функцию $\varphi(\cdot,\lambda) := (Id - J^\alpha)^{-1}\,1$, где символ Id обозначает тождественный оператор, а 1 – функцию, равную 1 тождественно. Функция $\varphi(\cdot,\lambda)$ играет важную роль в конструкции операторов преобразования [13] для интегральных вольтерровских операторов и интегро-дифференциальных операторов. В частности, большое значение имеют формулы умножения, доказательству одной из которых посвящен данный параграф.

Теорема 4.1. *Для произвольных $x, y > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливо следующее соотношение:*

$$\varphi(x,\lambda)\varphi(y,\lambda) = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=-m}^{m} \varphi\left(x + \omega^j y, \lambda\right) +$$

$$\int_0^x g(x-t,y)\varphi(t,\lambda)dt + \int_0^y g(y-t,x)\varphi(t,\lambda)dt,$$

где $m = [\alpha/2]$, $g(\cdot,\cdot)$ – функция вида:

$$g(x,y) = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{x^{\alpha-1}y^\alpha}{x^{2\alpha} - 2x^\alpha y^\alpha\cos\alpha\pi + y^{2\alpha}}.$$

Доказательство. Поскольку обе части требуемого равенства – целые функции по λ, достаточно установить его справедливость при вещественных $\lambda \in (0, +\infty)$.

Для доказательства теоремы воспользуемся аппаратом двумерного преобразования Лапласа. Всюду далее запись

$$f(x,y) \overset{x,y}{\div} F(p,q),\ (p,q) \in Q$$

означает:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) \exp(-px-qy)\, dx\, dy = F(p,q),\ (p,q) \in Q.$$

Аналогично, записи

$$f(x,y) \overset{x}{\div} F(p,y),\ p \in P,\ f(x,y) \overset{y}{\div} F(x,q),\ q \in Q$$

означают, соответственно:

$$\int_0^\infty f(x,y) \exp(-px)\, dx = F(p,y),\ p \in P,$$

$$\int_0^\infty f(x,y) \exp(-qy)\, dy = F(x,q),\ q \in Q.$$

С учетом известных теорем единственности для преобразования Лапласа (см., напр., Теорему 6 [9], с.22) достаточно доказать равенство двумерных изображений правой и левой частей требуемого равенства для $p \in (\lambda^{1/\alpha}, +\infty)$, $q \in (\lambda^{1/\alpha}, +\infty)$, $p \neq q$.

1) Поскольку имеют место оценка:

$$|\varphi(z,\lambda)| \leq C \exp\left(\lambda^{1/\alpha}|z|\right) \tag{4.1}$$

и следующее равенство, вытекающее непосредственно из определения функции $\varphi(\cdot,\lambda)$:

$$\int_0^\infty \varphi(x,\lambda) \exp(-px)\, dx = \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda},\ p > \lambda^{1/\alpha}, \tag{4.2}$$

заключаем:

$$\varphi(x,\lambda)\varphi(y,\lambda) \overset{x,y}{\div} \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda} \cdot \frac{q^{\alpha-1}}{q^\alpha - \lambda},\ p, q \in (\lambda^{1/\alpha}, +\infty). \tag{4.3}$$

2) Для вещественных положительных s в силу (2.36) [9], с.58 справедливо соотношение

$$\varphi(x+sy,\lambda) \overset{x,y}{\div} \frac{1}{sp-q}\left(\frac{sq^{\alpha-1}}{q^{\alpha}-\lambda s^{\alpha}}-\frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha}-\lambda}\right),\ p,q\in(\lambda^{1/\alpha},+\infty),\ p\neq q. \quad (4.4)$$

Заметим теперь, что для любых фиксированных $p,q\in(\lambda^{1/\alpha},+\infty),\ p\neq q$ правая часть (4.4) является аналитической функцией по $s\in\{|s|\in(1-\delta,1+\delta),\arg s\in(-\pi,\pi)\}$ при достаточно малой $\delta>0$. В силу оценки (4.1) то же справедливо для интеграла

$$\int\limits_0^\infty \varphi(x+sy,\lambda)\exp(-px-qy)\,dx\,dy.$$

Согласно принципу аналитического продолжения, это означает, что (4.4) остается справедливым для всех s таких, что $|s|=1$, $\arg s\in(-\pi,\pi)$. В частности, имеем ($j=\overline{-m,m}$):

$$\varphi\left(x+\omega^j y,\lambda\right) \overset{x,y}{\div} \frac{1}{p-q\omega^{-j}}\cdot\frac{q^{\alpha-1}}{q^{\alpha}-\lambda}-\frac{1}{p\omega^j-q}\cdot\frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha}-\lambda},\ p,q\in(\lambda^{1/\alpha},+\infty),\ p\neq q. \quad (4.5)$$

3) Рассмотрим при вещественных $\rho\in(0,+\infty)$ функцию:

$$\varphi_1(x,\rho):=\varphi\left(x,\rho^{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha}\sum_{j=-m}^{m}\exp\left(\rho\omega^j x\right).$$

Применяя формулу обращения преобразования Лапласа, получим из (4.2) после смены контура интегрирования и применения теоремы о вычетах:

$$\varphi\left(x,\rho^{\alpha}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^*}\frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha}-\rho^{\alpha}}\exp(px)\,dp+\frac{1}{\alpha}\exp\left(\rho\omega^j x\right),$$

где:

$$C^*=\{p=t\exp(-i\pi),t\in(+\infty,\varepsilon]\}\cup\{p=\varepsilon\exp(i\gamma),\gamma\in(-\pi,\pi)\}$$

$$\cup\{p=t\exp(i\pi),t\in[\varepsilon,+\infty)\}.$$

Таким образом, для функции $\varphi_1(x,\rho)$ справедливо представление:

$$\varphi_1(x,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^*}\frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha}-\rho^{\alpha}}\exp(px)\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^*}\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1}\exp(\rho sx)\,ds$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - 1} \right) \Bigg|_{s=\tau\exp(i\pi)}^{s=\tau\exp(-i\pi)} \exp(-\rho\tau x)\, d\tau$$

(в последнем переходе было учтено, что в силу $\alpha > 1$ интеграл по дуге стремится к 0 при $\varepsilon \to +0$). После подсчета разности значений на берегах разреза получаем:

$$\varphi_1(x,\rho) = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau^{\alpha-1}}{\tau^{2\alpha} - 2\tau^\alpha \cos\alpha\pi + 1} \exp(-\rho\tau x)\, d\tau,$$

что после замены $\tau x = t$ приводит к равенству:

$$\varphi_1(x,\rho) = \int\limits_0^{\infty} g(t,x) \exp(-\rho t)\, dt. \tag{4.6}$$

Равенство (4.6) означает, что:

$$g(x,y) \overset{x}{\div} \varphi_1(y,p),\ p \in (0,+\infty)\,.$$

С другой стороны, из определения $\varphi_1(x,\rho)$ и (4.2) следует, что:

$$\varphi_1(y,p) \overset{y}{\div} \frac{q^{\alpha-1}}{q^\alpha - p^\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=-m}^{m} \frac{1}{q - p\omega^j},\ p,q \in (0,+\infty)\,, p \neq q.$$

Таким образом, можно заключить, что:

$$g(x,y) \overset{x,y}{\div} \frac{q^{\alpha-1}}{q^\alpha - p^\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=-m}^{m} \frac{1}{q - p\omega^j},\ p,q \in (0,+\infty)\,, p \neq q. \tag{4.7}$$

4) Из (4.7) и (4.2) согласно теореме о свертке (Теорема 13 [9], с.37) следует соотношение:

$$\int\limits_0^{x} g(x-t,y)\varphi(t,\lambda)\, dt + \int\limits_0^{y} g(y-t,x)\varphi(t,\lambda)\, dt \overset{x,y}{\div}$$
$$\left(\frac{q^{\alpha-1}}{q^\alpha - p^\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=-m}^{m} \frac{1}{q - p\omega^j} \right) \frac{p^\alpha - 1}{p^\alpha - \lambda} +$$
$$\left(\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - q^\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=-m}^{m} \frac{1}{p - q\omega^j} \right) \frac{q^\alpha - 1}{q^\alpha - \lambda},\ p,q \in \left(\lambda^{1/\alpha}, +\infty\right), p \neq q. \tag{4.8}$$

Объединяя равенства (4.3), (4.5), (4.8), получаем требуемое.

$\square$

§4.2 Восстановление интегро-дифференциальных операторов порядка $\alpha > 2$

Пусть символ D^α обозначает оператор дробного интегрирования, M – оператор свертки:

$$Mf(x) = (M * f)(x) = \int\limits_0^x M(x-t)f(t)dt,$$

$M \in L_2(0,1)$. В данном параграфе рассматривается обратная задача восстановления интегро-дифференциального оператора дробного порядка:

$$L = D^\alpha + MD^{\alpha-1},\ \alpha > 2, \alpha \notin \mathbb{N} \tag{4.9}$$

по заданному спектру краевой задачи:

$$Ly = \lambda y,\ D^{\alpha-k}y(0) = 0, k = \overline{2, [\alpha]+1},\ D^{\alpha-1}y(1) = 0. \tag{4.10}$$

Здесь и всюду далее символ $[\alpha]$ обозначает целую часть числа α.

Метод решения рассматриваемой обратной задачи опирается на специальную структуру используемого оператора преобразования. Рассмотрим решение $y(x,\lambda)$ следующей задачи Коши:

$$Ly = \lambda y,\ D^{\alpha-k}y(0) = \delta_{k,1}, k = \overline{1, [\alpha]+1}, \tag{4.11}$$

где $\delta_{j,k}$ обозначает символ Кронекера.

Ясно, что спектр задачи (4.9)-(4.10) совпадает с множеством корней *характеристической функции* $\Delta(\lambda) := D^{\alpha-1}y(1,\lambda)$. Введем функцию $\psi(x,\lambda) := D^{\alpha-1}y(x,\lambda)$. Тогда $\Delta(\lambda) = \psi(1,\lambda)$. Обозначим через $\tilde{y}(x,\lambda)$ решение следующей "простейшей"задачи Коши:

$$D^\alpha y = \lambda y,\ D^{\alpha-k}y(0) = \delta_{k,1}, k = \overline{1, [\alpha]+1}. \tag{4.12}$$

Для функции $\hat{y} := y - \tilde{y}$ справедливо соотношение:

$$D^\alpha \hat{y} - \lambda \hat{y} = -MD^{\alpha-1}y = M\psi.$$

Поскольку $D^{\alpha-k}\hat{y}(0) = 0, k = \overline{1, [\alpha]+1}$, отсюда вытекает:

$$\hat{y} = -J^\alpha(Id - \lambda J^\alpha)^{-1}M\psi,$$

где
$$Jf(x) := \int_0^x f(t)dt$$
обозначает оператор интегрирования, а J^α – оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля. Действуя на обе части полученного равенства оператором $D^{\alpha-1}$, получим следующее интегральное уравнение относительно функции $\psi(x,\lambda)$:
$$\psi = -\Phi_\lambda M\psi + \varphi, \tag{4.13}$$
где $\Phi_\lambda = (Id - \lambda J^\alpha)^{-1}J$, $\varphi = D^{\alpha-1}\tilde{y} = (Id - \lambda J^\alpha)^{-1}1$, или более подробно:
$$\varphi(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)},\ \Phi_\lambda f(x) = \int\limits_0^x \varphi(x-t,\lambda) f(t)dt.$$

Применяя метод последовательных приближений, получим решение уравнения (4.13) в виде следующего ряда:
$$\psi(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \varphi_n(x,\lambda),\ \varphi_0 = \varphi,\ \varphi_{n+1} = \Phi_\lambda M\varphi_n.$$

Применяя Теорему 4.1, получим для функций $\varphi_1(x,\lambda), \varphi_2(x,\lambda), \ldots$ последовательно следующие представления:
$$\varphi_n(x,\lambda) = \int_0^x K_n(x-t,t)\varphi(t,\lambda)dt, \tag{4.14}$$
$$K_n(\eta,\xi) = \theta_n(\xi)M^{*n}(\eta) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \theta_\nu(\xi)\left(A_{n\nu} * M^{*n}\right)(\eta), \tag{4.15}$$
Здесь (и всюду далее) мы используем обозначения:
$$f^{*n} := f * f^{*(n-1)}, f^{*1} := f,\ \theta_n(\xi) := \frac{1}{n!}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^n = 1^{*n}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right).$$

Коэффициенты $A_{n\nu}(\eta)$ в соотношениях (4.15) вычисляются рекуррентно по формулам:
$$A_{10} = -\frac{2}{\alpha}\left[\frac{\alpha}{2}\right] + g_{10} + g_{20}, \tag{4.16}$$
$$A_{n+1,n} = A_{n,n-1} + \frac{1}{\alpha}\sum_{0<|j|<\alpha/2} \frac{\omega^j}{1-\omega^j} + g_{20}, \tag{4.17}$$

$$A_{n+1,\nu} = A_{n,\nu-1} + \frac{1}{\alpha} \sum_{0<|j|<\alpha/2} \frac{\omega^j}{1-\omega^j} \left(\theta_{n-\nu,j} + \sum_{\mu=\nu}^{n-1} \theta_{\mu-\nu,j} * A_{n\mu} \right) +$$

$$g_{2,n-\nu} + \sum_{\mu=\nu}^{n-1} g_{2,\mu-\nu} * A_{n\mu}, \ \nu = \overline{1, n-1}, \quad (4.18)$$

$$A_{n+1,0} = -\frac{1}{\alpha} \sum_{0<|j|<\alpha/2} \left(\theta_{n,j} + \sum_{\mu=0}^{n-1} \theta_{\mu,j} * A_{n\mu} \right) + g_{2n} + g_{1n} + \sum_{\mu=0}^{n-1} (g_{2\mu} + g_{1\mu}) * A_{n\mu}, \quad (4.19)$$

где

$$g_{1\nu}(\eta) := \int_0^\eta g(\eta - t, t)\theta_\nu(t)dt, \ g_{2\nu}(\eta) := \int_0^\eta g(t, \eta - t)\theta_\nu(t)dt, \quad (4.20)$$

$$\theta_{nj}(\xi) := \theta_n \left(\frac{\xi}{1-\omega^j} \right). \quad (4.21)$$

Заметив, что:

$$g_{1\nu}(\eta) = \gamma_{1\nu}\theta_\nu(\eta), \ g_{2\nu}(\eta) = \gamma_{2\nu}\theta_\nu(\eta),$$

где константы $\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}$ остаются ограниченными при $\nu \to \infty$, и пользуясь рекуррентными формулами (4.16)-(4.21), несложно получить следующие оценки:

$$\max_{\eta \in (0,1)} |A_{n\nu}(\eta)| \le C^n. \quad (4.22)$$

Из (4.15) и (4.22) следует, что ряд $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n K_n(\eta, \xi)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве $\{\eta, \xi \ge 0, \eta + \xi \le 1\}$. Таким образом, нами получен следующий результат.

Теорема 4.2. *Для функции $\psi(x, \lambda)$ справедливо интегральное представление:*

$$\psi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_0^x K(x-t, t)\varphi(t, \lambda)dt,$$

где:

$$K(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left(\theta_n(\xi) M^{*n}(\eta) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \theta_\nu(\xi) \left(A_{n\nu} * M^{*n} \right)(\eta) \right).$$

Перейдем непосредственно к изучаемой обратной задаче. Пусть $\tilde{\Delta}(\lambda) = \varphi(1, \lambda)$ – характеристическая функция краевой задачи (4.10) с простейшим оператором $\tilde{L} = D^\alpha$. Поскольку $\varphi(t, \lambda) = E_{1/\alpha}\left(\lambda t^{1/\alpha}; 1\right)$, приведенные ниже свойства функции $\varphi(t, \lambda)$, характеристической функции $\tilde{\Delta}(\lambda)$ и соответствующего спектра могут быть получены из хорошо известных свойств функций Миттаг–Леффлера $E_p(z;\mu)$ и их корней [37].

Лемма 4.1. *Характеристическая функция $\tilde{\Delta}(\lambda)$ имеет счетное множество $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ корней. Все корни простые и вещественные. При $k\to\infty$ имеет место следующая асимптотика:*

$$\tilde{\lambda}_k=\tilde{\rho}_k^{\alpha},\ \ \tilde{\rho}_k=\exp\left(i\frac{\pi}{\alpha}\right)\frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)}\left(k-\frac{1}{2}\right)+O(\exp(-\gamma k)),$$

где $\gamma>0$.

Лемма 4.2. *Справедливо представление:*

$$\varphi(t,\lambda)=\frac{1}{\alpha}\sum_{j=-[\alpha/2]}^{[\alpha/2]}\exp(\rho\omega^j t)+\int_0^{\infty}g(t,x)\exp(-\rho x)dx,\ \ \lambda=\rho^{\alpha}, Re\rho>0,$$

где функция $g(\cdot,\cdot)$ – та же, что в Теореме 4.1.

Рассмотрим теперь характеристическую функцию $\Delta(\lambda)$ краевой задачи (4.10) в общем случае. Из Теоремы 4.2 вытекает представление:

$$\Delta(\lambda)=\tilde{\Delta}(\lambda)+\int_0^1 w(1-t)\varphi(t,\lambda)dt, \tag{4.23}$$

где $w(t)=K(t,1-t)\in L_2(0,1)$. Используя Леммы 4.1, 4.2, представление (4.23) и теорему Руше, приходим к выводу, что характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ имеет счетное множество корней, причем эти корни (пронумерованные с учетом кратности) $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеют следующую асимптотику:

$$\lambda_k=\rho_k^{\alpha},\ \ \rho_k=\tilde{\rho}_k+o(1). \tag{4.24}$$

Более того, подставляя

$$\lambda_k=\left(z_k\exp\left(i\frac{\pi}{\alpha}\right)\right)^{\alpha}$$

в уравнение $\Delta(\lambda_k)=0$ и пользуясь асимптотикой (при $k\to\infty$):

$$z_k=\frac{\pi}{s}\left(k-\frac{1}{2}\right)+o(1),\ \ \Delta(\lambda_k)=\frac{2}{\alpha}\exp(cz_k)\cos(sz_k)+O\left(\exp(cz_k)k^{-1/2}\right),$$

$$c:=\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right),\ \ s:=\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$$

вытекающей из (4.23), (4.24) и Лемм 4.1, 4.2, мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.3. *Краевая задача* (4.10) *имеет счетное множество* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *собственных значений. Для собственных значений справедливо представление:*

$$\lambda_k = \rho_k^{\alpha},\ \rho_k = \tilde{\rho}_k + \hat{\rho}_k,\ k^{-1}\hat{\rho}_k \in l_1.$$

Дадим теперь точную формулировку изучаемой обратной задачи.

Задача IP. По заданной последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, где собственные значения задачи (4.10) λ_k занумерованы с учетом их алгебраической кратности, найти $M(\eta)$, $\eta \in (0,1)$.

Первый шаг в конструктивном решении поставленной обратной задачи состоит в восстановлении характеристической функции $\Delta(\lambda)$ по заданному спектру $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Из теоремы Адамара следует представление:

$$\Delta(\lambda) = C\lambda^r \prod_{k=r+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right). \tag{4.25}$$

Поскольку $\tilde{\Delta}(0) = \varphi(1,0) = 1$, аналогичное представление для $\tilde{\Delta}(\lambda)$ имеет вид:

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_k}\right). \tag{4.26}$$

Для восстановления характеристической функции $\Delta(\lambda)$ требуется найти константу C в (4.25). С этой целью заметим, что в силу (4.23) и Лемм 4.1, 4.2, имеем:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\Delta(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} = 1.$$

С другой стороны, из Теоремы 4.3 следует, что бесконечное произведение

$$\prod_{k=r+1}^{\infty} (\tilde{\lambda}_k / \lambda_k)$$

сходится и

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \prod_{k=r+1}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda - \tilde{\lambda}_k} = 1.$$

Таким образом, получаем:

$$C = \prod_{k=1}^{r} \left(\frac{-1}{\tilde{\lambda}_k}\right) \prod_{k=r+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\tilde{\lambda}_k}\right),$$

что приводит окончательно к искомому представлению:

$$\Delta(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\tilde{\lambda}_k}. \tag{4.27}$$

Заметим теперь, что если характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ известна, то функция $w(t) := K(t, 1-t)$ определяется однозначно равенством (4.23), поскольку система функций $\{\varphi(t,\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ полна в $L_2(0,1)$.

Далее, из Теоремы 4.2 следует соотношение:

$$w(t) = K(t, 1-t) = -\theta_1(1-t)M(t) - (A_{10} * M)(t) +$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \left(\theta_n(1-t)M^{*n}(t) + \sum_{\nu=0}^{n-1}\theta_\nu(1-t)\left(A_{n\nu} * M^{*n}\right)(t)\right).$$

Мы перепишем его следующим образом:

$$M(t) = -\frac{\alpha}{1-t}w(t) - A_{10}\int_0^t \frac{\alpha}{1-t}M(\tau)d\tau +$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \left\{\frac{\alpha\theta_n(1-t)}{1-t}M^{*n}(t) + \int_0^t \left(\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\alpha\theta_\nu(1-t)}{1-t}A_{n\nu}(t-\tau)\right)M^{*n}(\tau)d\tau\right\} \tag{4.28}$$

и будем рассматривать как нелинейное интегральное уравнение относительно искомой функции $M(\cdot)$.

Теорема 4.4. *Для каждого фиксированного* $T \in (0,1)$ *уравнение* (4.28) *однозначно разрешимо в* $L_2(0,T)$.

Теорема следует из оценок (4.22) и следующей общей леммы [78].

Лемма 4.3. *Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение:*

$$y(t) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n(t)y^{*n}(t) + \int_0^t F_n(t,\tau)y^{*n}(\tau)d\tau\right),$$

в котором

$$\|f_n\|_{L_2(0,T)} \le C^n, \ \|F_n\|_{L_2((0,T)\times(0,T))} \le C^n.$$

Пусть $f_1(t) \equiv 0$. *Тогда для любой функции* $f \in L_2(0,T)$ *уравнение имеет единственное решение в* $L_2(0,T)$.

Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.5 *Задание спектра* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *краевой задачи* (4.10) *однозначно определяет оператор* (4.9). *Ядро* $M(\cdot)$ *может быть найдено с помощью следующей процедуры:*
1) Строим функцию $\Delta(\cdot)$ *по формуле* (4.27).
2) Находим $w(\cdot)$ *из* (4.23).
3) Находим $M(\cdot)$, *решая основное уравнение* (4.28).

§4.3 Восстановление интегро-дифференциальных операторов порядка $\alpha \in (1,2)$

Пусть M – интегральный оператор вида:

$$Mf(x) = \int\limits_0^x M(x-t,t)f(t)dt,$$

где $M(\eta,\xi) = N(\eta)p(\xi)$, $(\eta,\xi) \in \Pi = \{\eta,\xi \geq 0, \eta+\xi \leq 1\}$, $p(\cdot)$ – непрерывная строго положительная функция, $N \in L_\infty(0,1)$.

В данном параграфе рассматривается обратная задача восстановления интегро-дифференциального оператора дробного порядка

$$L = D^\alpha + MD^{\alpha-1},\ \alpha \in (1,2) \tag{4.29}$$

по заданному спектру краевой задачи:

$$Ly = \lambda y,\ D^{\alpha-2}y(0) = 0,\ D^{\alpha-1}y(1) - D^{\alpha-1}y(0) = 0, \tag{4.30}$$

причем функция $p(\cdot)$ предполагается известной априори.

Предлагаемая процедура конструктивного решения рассматриваемой обратной задачи существенно опирается на специальную структуру возникающих здесь операторов преобразования.

Обозначим через $y(x,\lambda)$ решение следующей задачи Коши:

$$Ly = \lambda y,\ D^{\alpha-k}y(0) = \delta_{k,1}, k = \overline{1,2}, \tag{4.31}$$

где $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера. Ясно, что спектр краевой задачи (4.29)-(4.30) слвпадает с множеством корней *характеристической функции* $\Delta(\lambda) := D^{\alpha-1}y(1,\lambda) - 1$. Введем функцию $\psi(x,\lambda) := D^{\alpha-1}y(x,\lambda)$. Тогда $\Delta(\lambda) = \psi(1,\lambda) - 1$.

Определим $\tilde{y}(x,\lambda)$ как решение "простейшей"задачи Коши:

$$D^\alpha y = \lambda y,\ D^{\alpha-k}y(0) = \delta_{k,1}, k = \overline{1,2}. \tag{4.32}$$

Тогда для функции $\hat{y} := y - \tilde{y}$ имеем:

$$D^\alpha \hat{y} - \lambda \hat{y} = -MD^{\alpha-1}y = -M\psi.$$

Поскольку $D^{\alpha-k}\hat{y}(0) = 0, k = 1,2$, отсюда вытекает:

$$\hat{y} = -J^\alpha (Id - \lambda J^\alpha)^{-1} M\psi,$$

где символ J^α обозначает оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля. Действуя на полученное равенство оператором $D^{\alpha-1}$, получаем следующее интегральное уравнение относительно функции $\psi(x,\lambda)$:

$$\psi = -\Phi_\lambda M\psi + \varphi, \tag{4.33}$$

где $\Phi_\lambda = (Id - \lambda J^\alpha)^{-1}J$, $\varphi = D^{\alpha-1}\tilde{y} = (Id - \lambda J^\alpha)^{-1}1$ или, более подробно:

$$\varphi(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)},\ \Phi_\lambda f(x) = \int_0^x \varphi(x-t,\lambda) f(t)dt.$$

Используя метод последовательных приближений, построим решение уравнения (4.33) в виде ряда:

$$\psi(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x,\lambda),\ \varphi_0 = \varphi,\ \varphi_{n+1} = -\Phi_\lambda M\varphi_n.$$

Пользуясь Теоремой 4.1, можно получить следующий важный для дальнейших построений результат.

Лемма 4.4. *Предположим, что функция $f(x,\lambda)$ допускает представление вида:*

$$f(x,\lambda) = \int_0^x F(x-t,t)\varphi(t,\lambda)dt$$

с некоторой функцией $F \in C(\Pi)$. Тогда функция $h = \Phi_\lambda f$ допускает аналогичное представление

$$h(x,\lambda) = \int_0^x H(x-t,t)\varphi(t,\lambda)dt,$$

где:

$$H(\eta,\xi) = H_0(\eta,\xi) + \tilde{H}(\eta,\xi) + \hat{H}(\eta),$$

$$H_0(\eta,\xi) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\xi F(\eta,t)dt,$$

$$\tilde{H}(\eta,\xi) = \int_0^\eta dt\int_0^t g(t-\tau,\eta-t)F(\tau,t-\tau+\xi)d\tau,$$

$$\tilde{H}(\eta,\xi) = \int_0^\eta dt\int_0^t g(\eta-t,t-\tau)F(\tau,t-\tau)d\tau.$$

Пользуясь утверждениями Теоремы 4.1 и Леммы 4.4, получаем для функций $\varphi_1(x,\lambda), \varphi_2(x,\lambda), \ldots$ последовательно следующие представления:

$$\varphi_n(x,\lambda) = \int_0^x K_n(x-t,t)\varphi(t,\lambda)dt, \tag{4.34}$$

где:

$$K_1(\eta,\xi) = -\frac{1}{\alpha}N(\eta)\int_0^\xi p(t)dt - \int_0^\eta dt\int_0^t g(\eta-t,t-\tau)N(\tau)p(t-\tau)d\tau -$$
$$\int_0^\eta dt\int_0^t g(t-\tau,\eta-t)N(\tau)p(t-\tau+\xi)d\tau, \tag{4.35}$$

$$K_{n+1}(\eta,\xi) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\xi M_n(\eta,t)dt - \int_0^\eta dt\int_0^t g(\eta-t,t-\tau)M_n(\tau,t-\tau)d\tau -$$
$$\int_0^\eta dt\int_0^t g(t-\tau,\eta-t)M_n(\tau,t-\tau+\xi)d\tau, \tag{4.36}$$

$$M_n(\eta,\xi) = \int_0^\eta N(\eta-\tau)p(\xi+\tau)K_n(\tau,\xi)d\tau. \tag{4.37}$$

Из рекуррентных формул (4.35)–(4.37) вытекают оценки:

$$|M_n(\eta,\xi)| \le \frac{C^n\eta^{n-1}}{(n-1)!}\|N\|^n_{L_\infty(0,\eta)},\ |K_n(\eta,\xi)| \le \frac{C^n\eta^{n-1}}{(n-1)!}\|N\|^n_{L_\infty(0,\eta)}, \tag{4.38}$$

где константа C не зависит ни от η,ξ, ни от функции $N(\cdot)$.

В силу оценок (4.38) определена функция:

$$K(\eta,\xi) = \int_0^\eta dt\int_0^t g(\eta-t,t-\tau)N(\tau)p(t-\tau)d\tau +$$

$$\int_0^\eta dt\int_0^t g(t-\tau,\eta-t)N(\tau)p(t-\tau+\xi)d\tau + \sum_{n=2}^\infty K_n(\eta,\xi)$$

и мы, таким образом, получили следующий результат.

Теорема 4.6. *Для функции $\psi(x,\lambda)$ справедливо интегральное представление:*

$$\psi(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+\int_0^x \left(N(x-t)p_1(t)+K(x-t,t)\right)\varphi(t,\lambda)dt,$$

где

$$p_1(\xi):=-\frac{1}{\alpha}\int_0^\xi p(t)dt$$

и функция $K(\eta,\xi)=K(N;\eta,\xi)$ непрерывна на Π.

Установим некоторые нужные для дальнейших рассуждений свойства нелинейного отображения $N(\cdot)\to K(N;\cdot,\cdot)$.

Лемма 4.5. *Для произвольного $T\in[0,1]$ обозначим: $\Pi_T:=\Pi\cap\{\eta\in[0,T]\}$. Существует $r>0$ такое, что если $RT<r$, где*

$$R=\max\{\|N\|_{L_\infty(0,T)},\|\tilde N\|_{L_\infty(0,T)}\},$$

то справедлива оценка:

$$\|K(N)-K(\tilde N)\|_{C(\Pi_T)}\le CRT\|N-\tilde N\|_{L_\infty(0,T)},$$

где константа C не зависит ни от T, ни от функций $N,\tilde N$.

Доказательство. Из рекуррентных формул (4.35)–(4.37) следуют оценки:

$$|K_{n+1}(N;\eta,\xi)-K_{n+1}(\tilde N;\eta,\xi)|\le C_1\|M_n(N)-M_n(\tilde N)\|_{C(\Pi_\eta)}, \tag{4.39}$$

$$|M_n(N;\eta,\xi)-M_n(\tilde N;\eta,\xi)|\le$$
$$C_2\eta\left(\|N-\tilde N\|_{L_\infty(0,\eta)}\|K_n(N)\|_{C(\Pi_\eta)}+\|\tilde N\|_{L_\infty(0,\eta)}\|K_n(N)-K_n(\tilde N)\|_{C(\Pi_\eta)}\right) \tag{4.40}$$

С помощью оценки

$$\left|\int_0^\eta dt\int_0^t \hat N(\tau)\left(g(\eta-t,t-\tau)p(t-\tau)+g(t-\tau,\eta-t)p(t-\tau+\xi)\right)d\tau\right|$$
$$\le C_0\eta\|N-\tilde N\|_{L_\infty(0,\eta)}$$

(где $\hat N(\tau):=N(\tau)-\tilde N(\tau)$) получаем требуемое из (4.39), (4.40) непосредственным вычислением.

$\square$

Зафиксируем произвольное $T \in (0,1)$. Определим:

$$N^+(\eta) := \left\{ \begin{array}{c} 0,\ \eta < T/2, \\ N(\eta),\ \eta \geq T/2 \end{array} \right.,\ N^-(\eta) := N(\eta) - N^+(\eta).$$

Лемма 4.6. *Справедливо следующее представление:*

$$K(N;\eta,\xi) = K(N^-;\eta,\xi) + \int_0^\eta A(N^-;\eta,\xi,\tau)N^+(\tau)d\tau,\ (\eta,\xi) \in \Pi_T.$$

Здесь $A(N^-;\eta,\xi,\tau)$ – L_∞-функция на $S_T := \{(\eta,\xi,\tau) : (\eta,\xi) \in \Pi_T, \tau \in [0,\eta]\}$. $A(N^-;\eta,\xi,\tau)$ зависит от $N^-(\cdot)$, но не зависит от $N^+(\cdot)$.

Доказательство. Пользуясь снова рекуррентными формулами (4.35)–(4.37), замечаем, что:

$$K_n(N;\eta,\xi) = K_n(N^-;\eta,\xi) + \int_0^\eta A_n(N^-;\eta,\xi,\tau)N^+(\tau)d\tau,\ (\eta,\xi) \in \Pi_T, \quad (4.41)$$

где:

$$A_1(N^-;\eta,\xi,\tau) =$$
$$-\int_\tau^\eta g(\eta-t,t-\tau)p(t-\tau)dt - \int_\tau^\eta g(t-\tau,\eta-t)p(t-\tau+\xi)dt, \quad (4.42)$$

$$A_{n+1}(N^-;\eta,\xi,\tau) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\xi B_n(N^-;\eta,t,\tau)dt -$$
$$\int_\tau^\eta dt \int_\tau^t g(t-s,\eta-t)B_n(N^-;s,t-s+\xi,\tau)ds -$$
$$\int_\tau^\eta dt \int_\tau^t g(\eta-t,t-s)B_n(N^-;s,t-s,\tau)ds, \quad (4.43)$$

$$B_n(N^-;\eta,\xi,\tau) =$$
$$\int_\tau^\eta N^-(\eta-\tau)p(\xi+t)A_n(N^-;t,\xi,\tau)dt + p(\xi+\eta-\tau)K_n(N^-;\eta-\tau,\xi). \quad (4.44)$$

Из (4.43) вытекает оценка:

$$|A_{n+1}(N^-;\eta,\xi,\tau)| \leq C_0 \|B_n(N^-;\cdot,\cdot,\cdot)\|_{L_\infty(S_\eta)}$$

с некоторой абсолютной константой C_0. Пользуясь этой оценкой, а также (4.42), (4.38) и (4.44) выводим по индукции неравенство:

$$|A_n(N^-;\eta,\xi,\tau)| \le C^n \frac{(\eta-\tau)^{n-2}}{(n-2)!}\|N^-\|^n_{L_\infty(0,\eta)},\ (\eta,\xi,\tau)\in S_T,\ n\ge 2. \tag{4.45}$$

Положив:

$$A(N^-;\eta,\xi,\tau) := \sum_{n=1}^{\infty} A_n(N^-;\eta,\xi,\tau),$$

(заметив предварительно, что ряд в правой части сходится равномерно на S_T в силу (4.45)), мы получаем требуемое представление.

□

Приступая к исследованию обратной задачи, мы начнем с некоторых рассмотрений вспомогательного характера. Заметим, прежде всего, что функция $\varphi(t,\lambda)$ может быть записана в терминах функций Миттаг–Леффлера: $\varphi(t,\lambda) = E_{1/\alpha}(\lambda t^\alpha;1)$. Пользуясь этим наблюдением, мы выведем из представлений, полученных в работе [37], следующие представления:

$$\varphi(t,\lambda) = \frac{1}{\alpha}\exp(\rho t) + \int_0^\infty g(t,x)\exp(-\rho x)dx,\ \lambda=\rho^\alpha, \mathrm{Re}\rho>0, \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}\varphi(t,\lambda) = \frac{1}{\alpha}\left(\exp(tz\exp(i\pi/\alpha)) + \exp(tz\exp(-i\pi/\alpha))\right) + \\ \int_0^\infty q(t,x)\exp(-zx)dx,\ \lambda=-z^\alpha, \arg z\in[\pi/2-\pi/\alpha, \pi/\alpha-\pi/2].\end{aligned} \tag{4.47}$$

Здесь функция $g(\cdot,\cdot)$ – та же, что в Теореме 4.1, а функция $q(\cdot,\cdot)$ определяется следующим образом:

$$q(x,y) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{x^{\alpha-1}y^\alpha}{x^{2\alpha}+2x^\alpha y^\alpha\cos\alpha\pi + y^{2\alpha}}.$$

Далее, из Теоремы 4.6 вытекает следующее представление:

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_0^1 \left(N(1-t)p_1(t) + K(N;1-t,t)\right)\varphi(t,\lambda)dt, \tag{4.48}$$

где $\Delta_0(\lambda) := \varphi(1,\lambda) - 1$ – характеристическая функция, соответствующая "простейшему"оператору с $N=0$. Пользуясь (4.46)–(4.48), с помощью теоремы Руше приходим к утверждению, что характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ имеет счетное множество корней; для указанных корней, пронумерованных с учетом кратности, $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ справедлива асимптотика:

$$\lambda_k = (\log\alpha + 2\pi ki)^{\alpha} + o(1),\ k \to \pm\infty.$$

С учетом сказанного, обратная задача может быть сформулирована следующим образом.

Задача IP**.** По заданному спектру $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ краевой задачи (4.30) при известной функции $p(\cdot)$ найти функцию $N(\cdot)$.

Приступая к решению обратной задачи, заметим, прежде всего, что характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ однозначно восстанавливается по спектру $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Действительно, $\Delta(\lambda)$ является целой функцией порядка $1/\alpha < 1$ и согласно теореме Адамара имеем (при $\Delta(0) \neq 0$, случай $\Delta(0) = 0$ требует незначительных изменений):

$$\Delta(\lambda) = C\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right). \tag{4.49}$$

Однозначное восстановление характеристическое функции требует знания константы C в (4.49). Для ее нахождения заметим, что, в силу (4.47), (4.48) имеем $\Delta(\lambda) \to -1$ при $\lambda \to -\infty$. Отсюда следует:

$$C = -\left(\lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\right)^{-1}. \tag{4.50}$$

Следующим шагом в решении рассматриваемой обратной задачи будет восстановление функции $w(t) := N(t)p_1(1-t)+K(N;t,1-t)$ по (уже найденной) характеристической функции $\Delta(\cdot)$. Перепишем соотношение (4.48) следующим образом:

$$\int_0^1 w(1-t)\varphi(t,\lambda)dt = \Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda). \tag{4.51}$$

Пользуясь снова представлением $\varphi(t,\lambda) = E_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha};1)$, рассмотрим левую часть (4.51) как интегральное преобразованием с ядром, выражаемым через функции типа Миттаг–Леффлера. Соответствующая формула обращения (см., например, [32], Теорема 2) дает:

$$w(1-t) = \frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp(-ity)}{iy}\left(\Delta((iy)^{\alpha}) - \Delta_0((iy)^{\alpha})\right)dy. \tag{4.52}$$

Таким образом, мы можем далее считать функцию $w(\cdot)$ известной. Завершающий шаг решения Задачи IP состоит в восстановлении непосредственно функции $N(\cdot)$. Из рассуждений, приведенных выше, известно, что она связана с найденной ранее функцией $w(\cdot)$ соотношением:

$$w(t) = p_1(1-t)N(t) + K(N; t, 1-t). \tag{4.53}$$

Будем рассматривать (4.53) как нелинейное уравнение относительно $N(\cdot)$.

Теорема 4.6. *Для каждого фиксированного* $T \in (0,1)$ *уравнение* (4.53) *имеет единственное решение в* $L_\infty(0,T)$.

Доказательство. Поскольку $\inf_{t\in[0,1]} p(t) > 0$, имеем $\inf_{t\in[0,T]} p_1(1-t) > 0$ для любого $T \in (0,1)$. Следовательно, из Леммы 4.5 можно сделать вывод, что для любого достаточно большого фиксированного $R > 0$ отображение

$$N(t),\ t \in (0,T) \to \frac{w(t)}{p_1(1-t)} - \frac{K(N;t,1-t)}{p_1(t)},\ t \in (0,T)$$

является сжимающим в шаре $\|f\| \le R$ пространства $L_\infty(0,T)$ для всех $T < T_0(R)$. Это доказывает утверждение теоремы для всех достаточно малых $T > 0$.

Рассмотрим теперь произвольное $T \in (0,1)$ и выберем $m \in \mathbb{N}$ таким, чтобы уравнение (4.53) было однозначно разрешимым в $L_\infty(0,\delta)$, где $\delta := 2^{-m}T$. Обозначим соответствующее решение через $y_0(\cdot)$ и положим:

$$y(t) := \begin{cases} y_0(t), t \in (0,\delta), \\ y_1(t), t \in [\delta, 2\delta), \end{cases} \tag{4.54}$$

где функция $y_1(t), t \in [\delta, 2\delta)$ будет выбрана ниже. В силу Леммы 4.6, при $\eta \in (0, 2\delta)$ имеем:

$$K(y;\eta,\xi) = K(y_0;\eta,\xi) + \int_0^\eta A(y_0;\eta,\xi,\tau)y_1(\tau)d\tau,$$

где предполагается, что $y_0(t) := 0, t \in [\delta, 2\delta)$, $y_1(t) := 0, t \in (0,\delta)$. В частности, справедливо равенство:

$$K(y;t,1-t) = K(y_0;t,1-t) + \int_\delta^t A(y_0;t,1-t,\tau)y_1(\tau)d\tau,\ t \in [\delta, 2\delta).$$

Определим теперь функцию $y_1(t), t \in [\delta, 2\delta]$ как (единственное) решение следующего *линейного* вольтерровского уравнения второго рода:

$$w(t) = p_1(1-t)y_1(t) + K(y_0;t,1-t) + \int_\delta^t A(y_0;t,1-t,\tau)y_1(\tau)d\tau,\ t \in (\delta, 2\delta). \tag{4.55}$$

Тогда функция $y(t), t \in (0, 2\delta)$, определяемая соотношениями (4.54), будет (единственным) решением уравнения (4.53) в пространстве $L_\infty(0, 2\delta)$. Продолжая рассуждать указанным образом, установим однозначную разрешимость (4.53) последовательно на интервалах $(0, 4\delta), \ldots, (0, T/2), (0, T)$.

□

Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.7. *Задание спектра* $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ *краевой задачи* (4.30) *и функции* $p(\cdot)$ *однозначно определяет оператор* (4.29). *Функция* $N(\cdot)$ *может быть восстановлена по указанным данным с помощью следующей процедуры:*
1) Строим $\Delta(\cdot)$ *по формулам* (4.49), (4.50).
2) Вычисляем $w(\cdot)$ *с помощью* (4.52).
3) Находим $N(\cdot)$, *решая уравнение* (4.53).

Заключение

В диссертационной работе исследованы:

1. Задача рассеяния для матричного дифференциального оператора первого порядка с регулярной особенностью:

$$\ell y = B_0 \left(y' - (x^{-1}A + q(x))y \right), \tag{5.1}$$

2. Задачи рассеяния для операторов Штурма – Лиувилля на некомпактных графах,

3. Задача рассеяния для оператора переменного порядка на некомпактном графе с циклом,

4. Обратные спектральные задачи для интегро - дифференциальных операторов дробного порядка:

$$L = D^\alpha + MD^{\alpha-1},\ \alpha \in (1,2),\ Mf(x) = \int\limits_0^x M(x-t,t)f(t)dt. \tag{5.2}$$

Получены следующие результаты.

1. Введены и исследованы интегральные преобразования, ядра которых строятся по решениям дифференциальных систем с регулярной особенностью. Данные преобразования естественным образом возникают при решении неоднородного уравнения с невозмущенным уравнением в левой части. Разработанные методы могут быть использованы при решении задач математической физики, обладающих пространственной симметрией типа вращения.

2. Предложен метод построения и исследования решений типа Вейля для операторов (5.1), основанный на использовании тензорно-значных решений

построенных специальным образом вспомогательных дифференциальных систем. Исследование решений типа Вейля является важнейшим этапом решения обратных спектральных задач, а также исследования полноты и базисности обобщенных собственных функций оператора (5.1).

3. Предложена и обоснована конструктивная процедура решения обратной задачи рассеяния для операторов (5.1) в случае отсутствия дискретного спектра. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи, в частности выявлено условие, отвечающее за отсутствие дискретного спектра у восстановленного оператора.

4. Разработана конструктивная процедура решения обратной задачи рассеяния на графе-звезде для оператора Штурма – Лиувилля с бесселевой особенностью в вершине. Предложена конструктивная процедура решения обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля на некомпактном графе с циклом. Указанные результаты могут быть использованы при моделировании и синтезе сетеподобных структур, задачи такого типа возникают в таких областях естествознания и техники, как органическая химия, теория волноводов, теория электрических сетей, нанотехнологии и др.

5. Доказана теорема единственности решения обратной задачи рассеяния для оператора переменного порядка на простейшем некомпактном графе с циклом.

6. Получены формулы умножения для функций типа Миттаг - Леффлера. Функции указанного типа возникают, в частности, при описании резольвенты оператора дробного интегрирования Римана – Лиувилля. Полученные формулы могут найти применение в теории указанных операторов и в приложениях дробного исчисления.

7. Разработана конструктивная процедура решения обратной задачи для некоторых интегро-дифференциальных операторов дробного порядка (5.2).

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и систем, а также при построении математических моделей различных прикладных задач. Результаты диссертационной работы могут быть интересны специалистам, работающим в МГУ им. М.В. Ломоносова, Математическом институте им В.А. Стеклова РАН, Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, СПбГУ и других высших учебных заведениях и научных центрах. Результаты диссертации могут составить содержании специальных курсов для студентов старших курсов и аспирантов.

Все представленные в диссертации методы решения обратных задач конструктивны. На их основе могут быть разработаны численные алгоритмы, полезные для приложений дифференциальных операторов в таких областях, как механика, оптика, геофизика, астрофизика, нанотехнологии.

Дальнейшее развитие разработанных в диссертации методов позволит получить новые результаты в таких важных направлениях, как спектральная теория дифференциальных операторов высших порядков с коэффициентами-распределениями и дифференциальных систем общего вида с сингулярными коэффициентами, теория рассеяния на некомпактных квантовых графах, спектральная теория интегро-дифференциальных операторов дробного порядка.

Литература

[1] Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур — М: Мир, 1987. — 480 с.

[2] де Альфаро, В. Потенциальное рассеяние / В. де Альфаро, Т. Редже — М.: Мир, 1966. — 274 С.

[3] Агранович, З.С. Обратная задача теории рассеяния / З.С. Агранович, В.А. Марченко — Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1960. — 268 с.

[4] Владимиров, А. А. О сходимости последовательностей обыкновенных дифференциальных операторов / А.А. Владимиров // Матем. заметки. — 2004. — Т. 75, №6. — С. 941 – 943.

[5] Гасымов, М. Г. Определение уравнения Штурма-Лиувилля с особенностью по двум спектрам / М.Г. Гасымов // ДАН СССР. — 1965. — Т.161, №2. — С.274–276.

[6] Гельфанд, И.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции / И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан // Известия АН СССР, сер. матем. — 1951. — Т.15. — С. 309 – 360.

[7] Герасименко, Н.И. Обратные задачи рассеяния на некомпактных графах / Н.И. Герасименко // Теор. Мат.Физ. — 1988. — Т. 74, № 2. — С. 187 – 200.

[8] Гольденвейзер, А.Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А.Л. Гольденвейзер, В.Б. Лидский, П.Е. Товстик — М.: Наука, 1979. — 384 с.

[9] Диткин, В.А. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения / В.А. Диткин, А.П. Прудников — М.: Физматгиз, 1958. — 178 с.

[10] Делицын, А. Л. Быстрые алгоритмы решения обратной задачи рассеяния для системы уравнений Захарова-Шабата и их приложения / А. Л. Делицын // Матем. заметки. — 2022. — Т. 112, №2. — С. 198 – 217.

[11] Еремин, М.С. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения второго порядка с особенностью / М.С. Еремин // Диф. уравн. — 1988. — Т. 24, № 2. — С. 350 – 351.

[12] Теория солитонов: Метод обратной задачи / В.Е. Захаров [и др.]. — М: Наука, 1980. — 319 с.

[13] Игнатьев, М.Ю. О подобии вольтерровых операторов и операторах преобразования для интеро-дифференциальных операторов дробного порядка / М.Ю. Игнатьев // Мат. заметки. — 2003. — Т.73, №2. — С. 206 – 216.

[14] Игнатьев, М. Ю. Единственность решения обратной задачи рассеяния для дифференциального уравнения переменного порядка на простейшем некомпактном графе с циклом / М. Ю. Игнатьев // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2014 — Т.14, №4(2) — С. 542 – 549.

[15] Игнатьев, М.Ю. Обратная задача рассеяния для систем дифференциальных уравнений с особенностью / М.Ю. Игнатьев — Саратов, Изд-во Саратовского университета. — 2020. — 156 с.

[16] Игнатьев, М.Ю. О данных рассеяния дифференциальных систем с особенностью / М.Ю. Игнатьев // Мат. заметки. — 2022. — Т. 111, №6. — С. 846 – 863.

[17] Ишкин, Х. К. Критерий локализации спектра оператора Штурма–Лиувилля на кривой / Х. К. Ишкин // Алгебра и анализ. — 2016. — Т. 28, №1 — С. 52 – 88.

[18] Ишкин, Х. К. О критерии локализации собственных чисел спектрально неустойчивого оператора / Х. К. Ишкин // Докл. АН. — 2009. — Т. 429, №3. — С. 301 – 304.

[19] Казарян, Ф.Р. Об обратной задаче рассеяния для дифференциального оператора произвольного порядка с суммируемыми на всей оси коэффициента-

ми I / Ф.Р. Казарян, И.Г. Хачатрян // Известия АН Армении, сер. матем. — 1994. — Т. 29, №5. — С. 50 – 75.

[20] Казарян, Ф.Р. Об обратной задаче рассеяния для дифференциального оператора произвольного порядка с суммируемыми на всей оси коэффициентами II / Ф.Р. Казарян, И.Г. Хачатрян // Известия АН Армении, сер. матем. — 1995. — Т. 30, №1. — С. 39 – 65.

[21] Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н.Левинсон — М: Издательство иностраннной литературы, 1958. — 474 с.

[22] Крейн, М.Г. Решение обратной задачи Штурма – Лиувилля / М.Г. Крейн // ДАН СССР. — 1951. — Т. 76, №1. — С. 21 – 24.

[23] Крейн, М.Г. Об одном методе эффективного решения обратной задачи / М.Г. Крейн // ДАН СССР. — 1954. — Т. 94, №6. — С. 987 – 990.

[24] Кудишин, П.М. Обратная задача для дифференциальных операторов высших порядков с особенностью: дис.... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 / Кудишин Павел Михайлович. — Саратов, 1999. — 108 с.

[25] Курышова, Ю.В. Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов / Ю.В. Курышова // Мат. заметки. — 2007 — Т. 81, № 6. — С. 855 – 866.

[26] Лейбензон, З.Л. Обратная задача спектрального анализа для дифференциальных операторов высших порядков / З.Л. Лейбензон // Труды моск. матем. об-ва. — 1966. — Т.15. — С. 70 – 144.

[27] Лейбензон, З.Л. Спектральные разложения отображений систем краевых задач / З.Л. Лейбензон // Труды моск. матем. об-ва. — 1971. — Т. 25. — С. 15 – 58.

[28] Леонтьев, А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент / А.Ф. Леонтьев — М.: Физматлит. — 1983. — 176 с.

[29] Маламуд, М.М. О некоторых обратных задачах / М.М. Маламуд // Краевые задачи математической физики: Сб. науч.тр. — Киев, 1979. — С. 116 – 124.

[30] Маламуд, М.М. Подобие вольтерровых операторов и смежные вопросы теории дифференциальных уравнений дробных порядков / М.М. Маламуд // Тр. ММО — 1994. — Т.55. — С. 73 – 148.

[31] Маламуд, М.М. Вопросы единственности в обратных задачах для систем дифференциальных уравнений на конечном интервале / М.М. Маламуд // Тр. ММО. — 1999. — Т. 60. — С. 199 – 258.

[32] Мартиросян, В.М. Интегральные преобразования с ядрами типа Миттаг-Леффлера в классах $L_p(0, +1)$, $1 < p \leq 2$ / В.М. Мартиросян // Матем. сб. — 1986 — Т. 129(171), № 1. — С. 90 – 103.

[33] Марченко, В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В.А. Марченко — Киев, Наукова Думка, 1977. — 329 с.

[34] Мирзоев, К. А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями / К. А. Мирзоев, А. А. Шкаликов // Матем. заметки. — 2016 — Т. 99, №5. — С. 788 – 793.

[35] Павлов, Б.С. Модель свободных электронов и задача рассеяния / Б.С. Павлов, М.Д. Фаддеев // Теор. Мат. Физ. — 1983 — Т. 55, №2. — С. 257 – 269.

[36] Покорный, Ю. В. О функции Грина для локально взаимодействующей системы обыкновенных уравнений разного порядка / Ю.В. Покорный, Т.В. Белоглазова, Е.В. Дикарева, Т.В. Перловская // Матем. заметки. — 2003. — Т. 74, № 1. — С. 146 – 148.

[37] Попов, А.Ю. Распределение корней функций Миттаг – Леффлера / А.Ю. Попов, А.М. Седлецкий // СМФН — 2011. — Т. 40. — С. 3 – 171.

[38] Савчук, А.М. Прямые и обратные спектральные задачи для операторов Штурма–Лиувилля и системы Дирака: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.М. Савчук. — Москва, 2019. — 334 с.

[39] Савчук, А.М. Оператор типа Кальдерона – Зигмунда и его связь с асимптотическими оценками для обыкновенных дифференциальных операторов / А.М. Савчук // СМФН — 2017. — Т. 63, № 4. — С. 689 – 702.

[40] Савчук, А. М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, №6. — С. 897 – 912.

[41] Савчук, А. М. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Функц. анализ и его прил. — 2010. — Т. 44, №4. — С. 34 – 53.

[42] Савчук, А. М. Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Матем. сб. — 2020. — Т. 211, № 11. — С. 129 – 166.

[43] Садовничий, В. А. Обратная задача Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями на геометрическом графе / В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, А. М. Ахтямов // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 193 – 202.

[44] Сахнович, Л.А. Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами / Л.А. Сахнович // Матем. сб. — 1958. — Т. 46, №1. — С. 61 – 76.

[45] Седлецкий, А.М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации / А.М. Седлецкий — М.: Физматлит. — 2005. — 504 с.

[46] Сташевская, В.В. Об обратной задаче спектрального анализа для некоторого класса дифференциальных уравнений / В. В. Сташевская // ДАН СССР. — 1953. — Т. 93. — С. 409 – 412.

[47] Тихонов, А.Н. О единственности решения задачи электроразведки / А.Н. Тихонов // ДАН СССР. — 1949 — Т. 69, №6. — С. 797 – 800.

[48] Фаддеев, Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния / Л.Д. Фаддеев // Успехи мат. наук. — 1959. — Т. 14, №4. — С. 57 – 119.

[49] Федорюк, М. В. Изомонодромные деформации уравнений с иррегулярными особенностями / М. В. Федорюк // Матем. сб. — 1990. — Т.181, № 12 — С. 1623 – 1639.

[50] Хачатрян, И.Г. О некоторых обратных задачах для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси / И.Г. Хачатрян // Функц. анализ и его прилож. — 1983. — Т. 17, №1. — С. 40 – 52.

[51] Хачатрян, И.Г. Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков / И.Г. Хачатрян // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. — 1978. — Т.13 №3 — С. 215 – 237.

[52] Юрко, В.А. Восстановление несамосопряженных дифференциальных операторов на полуоси по матрице Вейля / В.А. Юрко // Матем. сб. — 1991 — Т. 182, №3. — С. 431 – 456.

[53] Юрко, В.А. Обратная задача для интегральных операторов / В.А. Юрко // Мат. заметки. — 1985. — Т. 37. — С. 378 – 385.

[54] Юрко, В.А. Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов / В.А. Юрко // Мат. заметки. — 1991. — Т. 50, №. 5. — С. 134 – 144.

[55] Юрко, В.А. О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью / В.А. Юрко // Матем. сб. — 1995. — Т. 186, №6. — С. 133 – 160.

[56] Юрко, В.А., Обратная задача для сингулярных несамосопряженных дифференциальных систем / В.А. Юрко // Матем. сб. — 2004. — Т. 195, №12. — С. 123 – 156.

[57] Юрко, В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач / В.А. Юрко — М.: Физматлит, 2007. — 384 с.

[58] Юрко, В. А. Обратные задачи для дифференциальных операторов произвольных порядков на деревьях / В. А. Юрко // Матем. заметки. — 2008. — Т. 83, №1. — С. 139 – 152.

[59] Юрко, В.А. Восстановление дифференциальных операторов на звездообразном графе с разными порядками на разных ребрах / В.А. Юрко // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 1. — С. 112 – 116.

[60] Юрко, В. А. Восстановление дифференциальных операторов переменных порядков на звездообразном графе по спектрам / В. А. Юрко // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, №12. — С. 1537 – 1548.

[61] Albeverio, S. Scattering theory for Schrödinger operators with Bessel-type potentials / S. Albeverio, R. Hryniv, Ya. Mykytyuk // J. Reine und Angew. Math. — 2012. — V.666. — P.83 – 113.

[62] Albeverio, S. Reconstruction of radial Dirac operators / S. Albeverio, R. Hryniv, Ya. Mykytyuk // J. Math. Phys. — 2007. — V.48. — 043501 — 14p.

[63] Albeverio, S. Reconstruction of radial Dirac and Schrödinger operators from two spectra / S. Albeverio, R. Hryniv, Ya. Mykytyuk // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — V.339. — P. 45 – 57.

[64] Ambarzumian, W. A. Über eine Frage der Eigenverttheorie / W. A. Ambarzumian // Zeitschr. für Physik. — 1929. — T. 53. — C. 690 – 695.

[65] Avdonin, S. Inverse problems for quantum trees / S. Avdonin, P. Kurasov // Inverse Problems and Imaging. — 2008. — V.2. — P.1 – 21.

[66] Beals, R. The inverse problem for ordinary differential operators / R.Beals // Amer. J. Math. — 1985. — V.107. — P.281 – 366.

[67] Beals, R. Scattering and inverse scattering for first order systems / R.Beals, R.R.Coifman // Comm. Pure Appl. Math. — 1984. — V.38. — P. 39 – 90.

[68] Beals, R. Direct and inverse scattering on the line: Math. Surveys and Monographs, V.28 / R.Beals, P.Deift, C.Tomei — Providence, RI: American Mathematical Society, 1988. — 209 p.

[69] Belishev, M.I. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method / M.I. Belishev // Inverse Problems. — 2004. — V.20. — P. 647 – 672.

[70] Birkhoff, G. D. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations / G. D. Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. — 1908. — V.9, №4. — P.373 – 395.

[71] Bondarenko, N. Inverse problems for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges / N. Bondarenko // Tamkang J. Math. — 2015. — V.46, №3. — P. 229 – 243.

[72] Bondarenko, N. Matrix Sturm–Liouville equation with a Bessel-type singularity on a finite interval / N. Bondarenko // Anal.Math.Phys. — 2017. — V.7. — P. 77 – 92.

[73] Bondarenko, N.P. Inverse spectral problems for arbitrary-order differential operators with distribution coefficients / N.P. Bondarenko // Mathematics — 2021. — Vol.9. — 2989.

[74] Borg, G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe / G.Borg // Acta Math. — 1946. — V.78. — P. 1 – 96.

[75] Brown, B. M. A Borg–Levinson theorem for trees / B. M. Brown, R. Weikard // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 2005. — V.461. — P. 3231 – 3243.

[76] Brunnhuber, R. Singular Weyl-Titchmarsh-Kodaira theory for one-dimensional Dirac operators / R. Brunnhuber, A. Kostenko, G. Teschl // Monatshefte für Mathematik. — 2014. — DOI: 10.1007/s00605-013-0563-5.

[77] Buterin, S. On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator / S. Buterin // Results. Math. — 2007. — V. 50, №3 – 4. — P. 173 – 181.

[78] Buterin, S.A. The Inverse Problem of Recovering the Volterra Convolution Operator from the Incomplete Spectrum of Its Rank-One Perturbation / S.A. Buterin // Inverse Problems — 2006. — V. 22. — P. 2223 – 2236.

[79] Buterin, S.A. On the Reconstruction of a Convolution Perturbation of the Sturm–Liouville Operator from the Spectrum / S.A. Buterin // Differential Equations. — 2010. — V. 46, №1. — P. 150 – 154.

[80] Buterin, S. Uniform full stability of recovering convolutional perturbation of the Sturm–Liouville operator from the spectrum / S. Buterin // // Journal of Differential Equations — 2021. — V.282, №2. — P.67 – 103.

[81] Buterin, S. A. Inverse spectral-scattering problem for the Sturm– Liouville operator on a noncompact star-type graph / S. A. Buterin, G. Freiling // Tamkang J. Math. — 2013. — V.44, №3. — P. 327 – 349.

[82] Carlson, R. Inverse eigenvalue problems on directed graphs / R. Carlson // Trans. Amer. Math. Soc. — 1999. — V.351, №10. — P. 4069 – 4088.

[83] Carlson, R. Inverse spectral theory for some singular Sturm-Liouville problems / R. Carlson // Journal of Differential Equations. — 1993. — V.106. — P. 121 – 140.

[84] Carlson, R. Spectral rigidity for radial Schrödinger operators / R. Carlson, C. Shubin // Journal of Differential Equations. — 1994. — V.113. — P. 338 – 354.

[85] Carlson, R. A Borg-Levinson theorem for Bessel operators / R. Carlson // Pacific Journal of Mathematics. — 1997. — V.177. — P. 1 – 26.

[86] Christ, C. S. An inverse problem for the Schrödinger equation with a radial potential / C. S. Christ // Journal of Differential Equations. — 1993. — V.103. — P. 247 – 259.

[87] Clarkson, P.A. Rational solutions of the Boussinesq equation and applications to rogue waves / P.A. Clarkson, E. Dowie // Transactions of Mathematics and Its Applications. — 2017. — V. 1, № 1. — tnx003, https://doi.org/10.1093/imatrm/tnx003.

[88] Constantin, A. On the scattering problem for the Camassa-Holm equation / A. Constantin // R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 2001. — V.457, №2008. — P. 953 – 970.

[89] Coz, M. The Riemann solution and the inverse quantum mechanical problem / M. Coz and C. Coudray // J. Math. Phys. — 1976. — V.17. — P. 888 – 893.

[90] Coz, M. A Marchenko equation for complex interactions with a regular analytic continuation / M. Coz // J. Math. Anal. Appl. — 1983. — V.92. — P. 66 – 95.

[91] Deift, P. Inverse scattering and the Boussinesq equation / P. Deift, C. Tomei, E. Trubowitz // Comm. Pure Appl. Math. — 1982. — V.35. — P. 567 – 628.

[92] Deift, P. Direct and inverse scattering on the line with arbitrary spectral singularities / P. Deift, X. Zhou // Comm. Pure Appl. Math. — 1991. — V.44, №5. — P. 485 – 533.

[93] Exner, P. Contact interactions on graph superlattices / P. Exner // J . Phys. A: Math. Gen. — 1996. — V.29. — P. 87 – 102.

[94] Fedoseev, A. E. Inverse problems for differential equations on the half-line having a singularity in an interior point / A.E. Fedoseev // Tamkang J. of Math. — 2011. — V.42, №3. — P. 343 – 354.

[95] Freiling, G. Half-Range Expansions for an Astrophysical Problem / G. Freiling, M. Vietri, V. Yurko // Letters in Mathematical Physics. — 2003. — V.64. — P. 65 – 73.

[96] Freiling, G. Boundary value problems with regular singularities and singular boundary conditions / G. Freiling, V. Yurko // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2005. — V. 2005, №9. — P. 1481 – 1495.

[97] Freiling, G. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on noncompact trees / G. Freiling, V. Yurko // Results Math. — 2007. — V.50, №3-4. — P. 195 – 212.

[98] Frödberg, C. E. Calculation of the Interaction between Two Particles from the Asymptotic Phase / C.E. Frödberg // Physical Review. — 1947. — V. 72, №6.

[99] Gardner, G. A method for solving the Korteweg–de Vries equation / G. Gardner, J. Green, M. Kruscal, R. Miura // Phys. Rev. Letters. — 1967. — V.19. — P. 1095 – 1098.

[100] Gorbunov, O.B. Dirac system with a singularity in an interior point / O.B. Gorbunov, C.-T. Shieh, V.A. Yurko // Applicable Analysis. — 2015. — DOI: 10.1080/00036811.2015.1091069. — 17p.

[101] Guillot, J. C. Inverse spectral theory for a singular Sturm-Liouville operator on [0, 1] / J. C. Guillot, J. V. Ralston // Journal of Differential Equations. — 1998. — V. 76. — P. 353 – 373.

[102] Hone, A. N. W. Prolongation algebras and Hamiltonian operators for peakon equations / A. N. W. Hone, J. P. Wang // Inverse Problems. — 2003. — V. 19, № 1. — P. 129 – 145.

[103] Hryniv, R.O. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials / R.O. Hryniv Ya.V. Mykytyuk // Inverse Problems. — 2003. — V.19. — P. 665 – 684.

[104] Hylleraas, E.A. Calculation of a Perturbing Central Field of Force from the Elastic Scattering Phase Shift / E.A. Hylleraas // Physical Review. — 1948. — V.74, №1. — P.48 – 52.

[105] Ignatyev, M. Inverse scattering problem for Sturm–Liouville operator on one-vertex noncompact graph with a cycle / M. Ignatyev // Tamkan J. of Mathematics. — 2011. — V.42, №3. — P. 365 – 384.

[106] Ignatyev, M. Inverse scattering problem for Sturm–Liouville operators with Bessel singularities on noncompact star-type graphs / M. Ignatyev // Inverse Problems. — 2015. — V.31, №12. — DOI: 10.1088/0266-5611/31/12/125006.

[107] Ignatyev, M. Spectral Analysis for Differential Systems with a Singularity / M. Ignatyev // Results. Math. — 2017. — V.71. — P. 1531 – 1555.

[108] Ignatyev, M. On an Inverse Spectral Problem for the Convolution Integro-Differential Operator of Fractional Order / M. Ignatyev // Results. Math. — 2018. — V. 73, №34. — https://doi.org/10.1007/s00025-018-0800-2.

[109] Ignatiev, M. On an inverse spectral problem for one integro-differential operator of fractional order / M. Ignatiev // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. — 2018. — V.27, №1. — P. 17 – 23.

[110] Ignatiev, M. Integral transforms connected with differential systems with a singularity / M. Ignatiev // Tamkang Journal of Mathematics. — 2019. — V. 50. — P. 253 – 268.

[111] Ignatiev, M. Yu. Asymptotics of Solutions of Some Integral Equations Connected with Differential Systems with a Singularity [Игнатьев М. Ю. Асимптотики решений некоторых интегральных уравнений, связанных с дифференциальными системами с особенностью] / M. Yu. Ignatiev // Изв. Сарат.

ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2020. — Т. 20, вып. 1. — С. 17 – 28.

[112] Ignatiev, M. Yu. On Weyl-type Solutions of Differential Systems with a Singularity. The Case of Discontinuous Potential / M. Yu. Ignatiev // Mathematical Notes. — 2020. — V. 108, №6. — P. 814 – 826.

[113] Ignatiev, M. Yu. Reconstruction Formula for Differential Systems with a Singularity [Игнатьев М. Ю. Формула восстановления для систем дифференциальных уравнений с особенностью] / M. Yu. Ignatiev // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2021. — Т. 21, вып. 3. — С. 282 – 293. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-282-293

[114] Kostenko, A. Inverse eigenvalue problems for perturbed spherical Schrödinger operators / A. Kostenko, A. Sakhnovich, G. Teschl // Inverse Problems. — 2010. — V.26. — 105013. — 14 p.

[115] Kostenko, A. Spectral asymptotics for perturbed spherical Schrödinger operators and applications to quantum scattering / A. Kostenko, G. Teschl // Comm. Math. Phys. — 2013. — V.322. — P. 255 – 275.

[116] Kottos, T. Quantum chaos on graphs / T. Kottos, U. Smilansky // Phys. Rev. Lett. — 1997. — V. 79. — P. 4794 – 4797.

[117] Kurasov, P. Inverse problems for Aharonov-Bohm rings / P. Kurasov // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2010. — V. 148. — P. 331 – 362.

[118] Kurasov, P. Inverse scattering for lasso graph / P. Kurasov // J. Math. Phys. — 2013. — V.54, №4. — 042103. — 14 p.

[119] Kurasov, P. On the inverse scattering problem on branching graphs / P. Kurasov, F. Sternberg // J.Phys. A. — 2002. — V.35. — P. 101 – 121.

[120] Kuchment, P. Quantum graphs / P. Kuchment // Waves Random Media. — 2004. — V. 14. — S107 – S128.

[121] Langese, J. Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures / J. Langese, G.Leugering, J. Schmidt — Boston: BirkhËauser, 1994.

[122] Levinson, N. The inverse Sturm – Liouville problem / N. Levinson // Math. Tidsskr. — 1949. — V.13. — P.25 – 30.

[123] Levinson, N. Certain relations between phase shifts and scattering potential / N. Levinson // Phys. Rev. — 1953. — V.89.

[124] Liu, Y. Incomplete inverse spectral problems for Dirac-Bessel operators / Y. Liu, G. Shi, J. Yan // Journal of Mathematical Physics. — 2019. — V. 60. — 083503.

[125] Pokornyi, Yu.V. Differential equations on networks (geometric graphs) / Yu.V. Pokornyi, A.V. Borovskikh // J. Math. Sci. (N.Y.) — 2004. — V.119, №.6. — P. 691 – 718.

[126] Rundell, W. Reconstruction of a radially symmetric potential from two spectral sequences / W. Rundell, P. Sacks // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2001. — V.264. — P. 354 – 381.

[127] Serier, F. The inverse spectral problem for radial Schrödinger operators on [0,1] / F. Serier // Journal of Differential Equations. — 2007. — V.235. — P. 101 – 126.

[128] Sibuya, Y. Stokes phenomena / Y. Sibuya // Bull. Amer. Math. Soc. — 1977. — V.83. — P. 1075 – 1077.

[129] Trooshin, I. Inverse scattering on a graph containing circle / I. Trooshin, V. Marchenko , K. Mochizuki // Analytic methods of analysis and DEs: AMADE 2006, 237 – 243, Camb. Sci. Publ., Cambridge, 2008.

[130] Trooshin, I. Spectral problems and scattering on noncompact star-shaped graphs containing finite rays / I. Trooshin, K. Mochizuki // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2015. — V.23, №1. — P. 23 – 40.

[131] Yurko, V.A. On higher-order differential operators with a singular point / V.A. Yurko // Inverse Problems. — 1993. — V.9. — P. 495 – 502.

[132] Yurko, V.A. On integral transforms connected with differential operators having singularities inside the interval / V.A. Yurko // Integral Transforms and Special Functions. — 1997. — V.5, №3-4. — P. 309 – 322.

[133] Yurko, V.A. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators on graphs / V.A. Yurko // Inverse Problems. — 2005. — V. 21. — P. 1075 – 1086.

[134] Yurko, V.A. Inverse spectral problem for differential operators on arbitrary compact graphs / V.A. Yurko // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2010. — V. 18, №3. — DOI: 10.1515/jiip.2010.009.

[135] Yurko, V.A. Inverse spectral problems for arbitrary order differential operators on noncompact trees / V.A. Yurko // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2012. - V.20, №1. — P. 111 – 131.

[136] Yurko, V.A. Inverse problems for differential systems on graphs with regular singularities / V.A. Yurko // Math. Notes. — 2014. — V. 96, №3-4. — P. 617 – 621.

[137] Yurko, V. Inverse problems for differential operators of variable orders on star-type graphs: general case / V. Yurko // Anal. Math. Phys. — 2014. — V.4, №3. — P. 247 – 262.

[138] Yurko, V. A. Inverse problems for variable order differential operators with regular singularities on graphs / V.A. Yurko // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. — 2015. — V. 23, № 6. — P. 647 – 656.

[139] Zettl, A., Sturm – Liouville theory: Mathematical Surveys and Monographs, V.121 / A. Zettl. — Providence, RI: American Mathematical Society, 2005.

[140] Zhabko, A. P. Uniqueness solution to the inverse spectral problem with distributed parameters on the graph-star / A. P. Zhabko, K. B. Nurtazina, V. V. Provotorov // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. — 2020. — V. 16, № 2. — P. 129 – 143.

[141] Zhornitskaya, L. A. Inverse eigenvalue problems for a singular Sturm-Liouville operator on [0, 1]. / L. A. Zhornitskaya, V. S. Serov // Inverse Problems. — 1994. — V.10. — P. 975 – 987.

[142] Zhou, X. Direct and inverse scattering transforms with arbitrary spectral singularities / X. Zhou // Comm. Pure Appl. Math. — 1989. — V. 42, №7. — P. 895 – 938.

[143] Zhura, N.A. On a representation of the solution of the inverse Sturm – Liouville problem on the entire line / N.A. Zhura, A.P. Soldatov // Diff. Equat. — 2015. — V. 51. — P. 1022 — 1032.