

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

На правах рукописи

Сафрончик Мария Ильинична

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО  
ТЕЧЕНИЯ «ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ» ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД  
БИНГАМОВСКОГО ТИПА С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА «ПРИСТЕННОГО  
СКОЛЬЖЕНИЯ» НА БАЗЕ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЛИБАРА –  
ПАСЛАЯ**

Специальность 1.2.2 –  
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук, профессор  
Андрейченко Дмитрий Константинович

Саратов 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1 ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД С ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ.....	18
1.1 Реологические модели вязкопластических сред.....	18
1.2 Реологическая модель Слибара – Паслая .....	22
1.3 Особенности моделирования задач развития линейных течений с фазовыми превращениями.....	25
1.4 Численное интегрирование задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).....	26
1.4.1 Задача Коши для ОДУ .....	26
1.4.2 Явные методы Рунге-Кутта.....	28
1.4.3 Жесткие и нежесткие задачи.....	30
1.4.4 Явный и неявный многошаговые методы Адамса .....	30
1.4.5 ФДН-метод.....	32
1.4.6 ОДУ, линейные относительно производных .....	33
1.5 Сведения о программной реализации .....	26
ГЛАВА 2 МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ «ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО» ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА «ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ» .....	35
2.1 Этап развития течения без «проскальзывания».....	35
2.2 Этап развития течения с «проскальзыванием» .....	43
2.3 Переходный этап с «проскальзыванием» .....	43
2.4 Переходный этап без «проскальзывания».....	46

2.5 Этап угасания течения с восстановлением структуры с «проскальзыванием» .....	47
2.6 Этап угасания течения с восстановлением структуры без «проскальзывания» .....	49
2.7 Результаты численного моделирования .....	50
<b>ГЛАВА 3 МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ «ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО» ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА «ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ» .....</b>	<b>65</b>
3.1 Этап развития течения без «проскальзывания» .....	66
3.2 Этап развития течения с «проскальзыванием» .....	73
3.3 Переходный этап с «проскальзыванием» .....	74
3.4 Переходный этап без «проскальзывания» .....	76
3.5 Этап угасания течения с восстановлением структуры с «проскальзыванием» .....	77
3.6 Этап угасания течения с восстановлением структуры без «проскальзывания» .....	80
3.7 Результаты численного моделирования .....	81
<b>ГЛАВА 4 АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ .....</b>	<b>95</b>
4.1 Этап развития течения для плоскопараллельного движения .....	95
4.2 Этап интенсивного угасания течения с восстановлением структуры материала для плоскопараллельного движения .....	98
4.3 Этап плавного угасания течения с восстановлением структуры материала для плоскопараллельного движения .....	100

4.4 Сравнение аналитического и численного решений на этапе развития течения для плоскопараллельного движения. ....	101
4.5 Этап развития течения для осесимметричного движения.....	107
4.6 Этап торможения течения с восстановлением структуры для осесимметричного движения.....	111
4.7 Сравнение аналитического и численного решений на этапе развития течения для осесимметричного движения. ....	114
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	121
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	123

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность темы.**

В современных технологических процессах применяются материалы со сложной реологией, которые проявляют как свойства вязкости, так и пластичности. Механизмы течения таких сред весьма специфичны и значительно отличаются от обычных, ньютоновских жидкостей, что обусловлено наличием сложной внутренней структуры [83]. Такие материалы принято называть вязкопластическими и к ним можно отнести цементные и глинистые растворы, торфомассы, различные виды смол и битумов, масляные краски и т.д. Они часто используются в различных отраслях химической, нефтяной, пищевой промышленности, медицине и других и исследование поведения таких сред имеет большое прикладное значение для оптимизации различных технологических процессов. Существуют различные теоретические модели, описывающие поведения таких материалов краткое описание некоторых из них можно найти в монографиях по вязкой жидкости и реологии [31, 47, 48, 68, 88, 101].

Вязкопластические материалы относятся к неньютоновским средам, которые проявляют свойства жидкости по достижении определенного внутреннего касательного напряжения, называемого пределом текучести, ниже которого материал испытывает лишь упругие деформации и ведет себя как твердое тело. Такое поведение объясняется тем, что в состоянии покоя молекулы вещества образуют пространственную структуру, способную сопротивляться внешнему воздействию до некоторого предела. Общую теорию таких сред и более подробные обзоры различных реологических моделей представлены в работах [11, 50, 67, 89, 96, 104, 108].

Таким образом, при течении вязкопластических сред образуются два типа зон: зона течения, где среда проявляет свойства вязкой жидкости и зона, где среда ведет себя как твердое тело. Эти задачи относят к многофазным задачам типа

Стефана [51, 71, 91]. Часто именно поведение границ раздела зон представляет большой интерес в прикладных задачах.

В современной теории течений вязкопластических сред точные аналитические решения в основном получены для одномерных стационарных и нестационарных задач, которые можно привести к линейным уравнениям в областях со сравнительно простой геометрией и имеющих автомодельные решения [43, 60, 64, 65]. В случае стационарного движения проблему можно свести к задаче на собственные значения [30].

Основные математические трудности при решении задач о нестационарных многофазных течениях вязкопластических жидкостей связаны с тем, что приходится решать краевые задачи в областях с неизвестными, изменяющимися во времени границами раздела зон течения, а в определяющих соотношениях среды отсутствует информация о распределении напряжений в твердой зоне. Часто такие задачи допускают лишь численно-аналитические решения. Следовательно, актуальна проблема развития методов численного моделирования неустановившихся течений вязкопластических сред с подвижными границами раздела фаз.

Обзор имеющихся точных и приближенных решений задач о нестационарном течении вязкопластических сред можно найти в статьях и фундаментальных монографиях [19, 22–27, 43, 54, 58, 59, 60, 67, 108, 115, 117].

В этих исследованиях при изучении вязкопластических течений часто используют реологическую модель Шведова – Бингама [106, 107, 124] для случая одномерного течения или её обобщение на пространственный случай модель Генки – Ильюшина [21, 36, 37]. Такие жидкости в литературе принято называть бингамовскими. Однако такая модель не учитывает интересного феномена, выявленного экспериментальным путем в реодинамике некоторых вязкопластических сред. Это свойство гистерезиса при восстановлении структуры, т.е. разрушение структуры таких материалов происходит при одном пределе

текучести, а восстановление при другом, значительно меньшем. Такое своеобразное «запаздывание» восстановления структуры послужило поводом называть течения таких сред запаздывающими. Данное свойство хорошо учитывается в модели Слибара – Паслая [125], и для оптимизации ряда технологических процессов требуется развитие подобных математических моделей и соответствующих методов компьютерного моделирования.

Также во множестве работ по течению вязкопластических жидкостей задается условие прилипания на твердых стенках, однако, в результате интенсивных экспериментальных исследований, было выявлено аномальное поведение материала у твердых стенок, заключающимся в резком изменении сопротивления при определенных скоростях движения и скольжении жидкости вдоль твердых стенок [12, 48, 49, 94]. Это явление получило название «эффекта пристенного скольжения» и важность его влияния на различные характеристики течений, особенно в случае неньютоновских жидкостей, отмечается во многих работах [9, 38, 114, 116, 121]. Далее в работе данный эффект назовем «проскальзыванием» вдоль твердой стенки.

Такой эффект обычно объясняют возникновением у стенки слоя вязкой жидкости с более низкой вязкостью, чем остальная среда. Теоретические исследования совместного неустановившегося течения вязкой и вязкопластической жидкостей для простейшего случая плоской трубы выполнено в работах [61, 74].

В данной работе реализуется другой подход, идея которого принадлежит основоположнику гидродинамической теории смазки Н.П. Петрову [66].

В качестве методов, применяемых для исследования поведения вязкопластических сред, можно указать регуляризацию определяющих соотношений [112, 128], вариационное исчисление и последующее применение различных численных методов [35, 56, 57, 95, 98, 127, 110], модифицированный метод «мгновенных собственных функций», разработанный В.Г. Меламедом для

решения задачи Стефана [53, 78–80], модифицированный метод Колоднера, позволяющий находить аналитическое решение [39, 40, 55, 71–74, 76, 77, 81, 82, 118]. Все они имеют свои преимущества и недостатки.

Регуляризованная модель в случае нестационарных течений может неправильно отражать поведение материала при  $t \rightarrow \infty$ . Поскольку для регуляризованной модели понятие жёсткой зоны не определено, то она вводится искусственным образом [62].

Методом, применяемым в [78, 79] решаются задачи в случаях, когда собственные числа можно задать в явном виде. При условиях третьего рода и в осесимметричных задачах этот метод не применим.

Модифицированный метод Колоднера позволяет получить в явном виде уравнения для искомой границы, но эти уравнения, как правило, являются сложными интегро-дифференциальными уравнениями, которые не имеют эффективных методов решения. В некоторых случаях удастся построить численное решение [81] или применить метод обратных задач [76]. Решениям обратных задач о нестационарном движении вязкопластических сред также посвящены работы [1, 20, 123].

Начально-краевые задачи для пространственных областей с динамически изменяющейся во времени конфигурацией, и соответствующие численные методы математической физики рассмотрены в фундаментальной монографии [70]. Для решения таких типов задач используются методы сквозного счёта на основе сглаживания коэффициентов [15], методы с выделением границ фазовых переходов [16], с помощью построения адаптивной сетки [34]. Также исследованиям задач со свободной границей, возникающим при моделировании физических процессов с фазовыми переходами посвящены работы [18, 28, 29, 42, 46, 52, 63].

Показано, что, с точки зрения численных реализаций, наиболее эффективно преобразование соответствующих начально-краевых задач к «деформированным»



пространственным координатам, в которых конфигурация пространственных областей остается неизменной.

Особый интерес представляет задача развития течения из состояния покоя, когда область течения отсутствует в начальный момент и приходится решать начально-краевые задачи с вырождением области начального существования фазы в особую точку [6].

После преобразования к деформированным координатам соответствующие модельные уравнения в частных производных будут содержать особенности в начальный момент времени. Следовательно, корректная постановка начальных условий для (всех или части) фазовых переменных и дальнейшее использование эффективных численных методов требуют предварительного применения методов асимптотического интегрирования модельных начально-краевых задач [6, 83, 84, 85, 90, 93, 122].

Методы асимптотического интегрирования краевых и начально-краевых задач применительно к проблемам гидроаэродинамики изложены в классических монографиях [17, 45].

Для некоторых видов простых одномерных течений при переходных процессах, когда область течения остается постоянной, а напряжение на границе падает до динамического предела текучести, при котором начинается восстановление среды, возможно нахождение точного решения операционным методом [80].

Применение методов вариационного исчисления для задач о стационарных течениях вязкопластических сред с «проскальзыванием» вдоль твердой стенки исследуется в работах [7, 8].

Применение методов численного моделирования к решению конкретных задач нестационарных вязкопластических течений описано в работах [61, 62, 103, 105, 111, 119, 126].

В условиях современного развития технологий, требуется более детальное изучение законов поведения подобных материалов для правильного выбора режимов работы технологического оборудования и эффективного управления процессами, в особенности быстротечными, связанными с транспортом и переработкой этих сред.

В связи с этим возникла потребность в исследовании особенностей нестационарных течений «запаздывающих» вязкопластических сред, построении математических моделей, описывающих такие течения и развитии соответствующих численно-аналитических методов с привлечением современных вычислительных технологий для компьютерного моделирования данного класса задач.

**Целью данной работы** является разработка метода компьютерного моделирования для задач неустановившегося течения вязкопластических сред с подвижной границей раздела фаз, обладающих свойством гистерезиса при восстановлении структуры, а также эффектом «проскальзывания» вдоль твердых стенок при превышении определенного порога скорости течения.

**Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:**

1. обзор реологических моделей, математических и численных методов моделирования особенностей динамики вязкопластических сред;
2. постановка и решение ряда начально-краевых задач течения «запаздывающих» вязкопластических сред с учетом эффекта «пристенного скольжения»;
3. построение аналитических решений начально-краевых задач развития течений вязкопластических сред для начальных моментов времени методами асимптотического интегрирования;
4. развитие проекционного метода Галеркина для численного интегрирования начально-краевых задач в областях с динамически изменяющейся границей;

5. разработка программного комплекса для моделирования динамики многофазных течений вязкопластических сред.

**Объектом** исследования являются вязкопластические среды и возникающие в них при технологических процессах неустановившиеся течения с подвижными границами раздела фаз.

**Предметом** исследования являются математические модели неустановившихся течений вязкопластических сред с подвижными границами раздела фаз в форме начально-краевых задач типа Стефана, соответствующие численные методы и алгоритмы компьютерного моделирования.

**Методы исследования.** В работе использованы методы механики вязкопластических сред, а также аналитические и численные методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается корректной математической постановкой задач, адекватно описывающей рассматриваемые физические процессы, применением апробированных методов качественного и численного анализа математических моделей и подтверждается расчетами на основе численного моделирования, а также согласованием полученных результатов с данными экспериментальных и численных исследований других авторов.

#### **Научная новизна.**

Научная новизна работы состоит в следующих новых результатах.

1. Предложена математическая модель неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред на основе модели Слибара – Паслая, отличающаяся от известных аналогов учетом возможного «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки.
2. Предложен метод численного моделирования для решения задач неустановившегося течения вязкопластических сред, отличающийся от

известных решений отображением области с подвижной границей на неподвижную область, применением дискретизации по независимой пространственной переменной на основе проекционного метода Галеркина, и дальнейшим численным интегрированием по времени задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. По результатам сравнения с найденными точными автомодельными решениями показана высокая точность метода.

3. Научной новизной предложенного метода является возможность определить положение границы раздела фаз течения и его применимость на всех этапах компьютерного моделирования (развитие течения, переходные этапы, восстановление структуры).
4. Для корректной постановки задачи развития течения из состояния покоя, когда возникающая область течения характеризуется бесконечно малой протяженностью в начальный момент, и требуется решать начально-краевые задачи с особой точкой, предложено использовать методы асимптотического интегрирования в малой окрестности особой точки.
5. На основе предложенных методов и алгоритмов разработан и реализован программный комплекс моделирования неустановившихся течений вязкопластических сред с подвижными границами раздела фаз.
6. Для задач с гистерезисом деформации и возможным «проскальзыванием» вдоль твердой стенки на основе численного моделирования впервые исследовано движение границы раздела фаз, что дает возможность более точного предсказания динамики поведения среды в различных фазах течения.
7. На основе компьютерного моделирования впервые исследовано влияние «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки на параметры течения на основе специально разработанного комплекса программ.

#### **Теоретическая значимость.**

Тематика работы обусловлена выполнением исследований по гранту РФФИ

«Математические модели и компьютерное моделирование течений вязкопластических жидкостей» (проект РФФИ № 20-31-90040).

Развита теория, проведена постановка задач, разработаны математические модели и методы численного моделирования в задачах нестационарных многофазных течений вязкопластических сред с подвижными границами. Проведенная разработка является основой для дальнейшего развития методов численного анализа и компьютерного моделирования для начально-краевых задач типа Стефана с подвижной границей, в том числе и для сред с более сложными свойствами.

#### **Практическая значимость.**

Практическая значимость связана с тем, что полученные результаты могут быть использованы при проектировании и математическом моделировании технологических процессов в различных производствах, таких как добыча нефти и торфа, изготовление цемента, пластмасс, стекла, различных пищевых продуктов, прокат металлов и других связанных с использованием вязкопластических материалов.

Разработанный комплекс программ (свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2023662977) позволяет решать практико-ориентированные задачи исследования течения вязкопластических жидкостей по системам коммуникаций, моделирование технологических процессов в нефтяной, пищевой и других отраслях промышленности.

Результаты работы могут быть использованы в высшей школе для компьютерного моделирования при изучении курсов прикладной гидромеханики неньютоновских жидкостей.

**На защиту выносятся** следующие основные положения и результаты:

1. Разработана математическая модель неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред на основе модели Слибара – Паслая в

которой учтено возможное «проскальзывание» вязкопластической среды вдоль твердой стенки.

2. Предложен и применен метод численного моделирования при решении задач неустановившихся течений вязкопластических сред, основанный на отображении области с подвижной границей на неподвижную область и дальнейшей дискретизации по независимой пространственной переменной на основе проекционного метода Галеркина.
3. Предложена методика корректной постановки начально-краевых задач развития вязкопластических течений на основе асимптотического интегрирования в окрестности особой точки возникновения области течения.
4. На основе предложенных математических моделей, методов и алгоритмов разработан программный комплекс моделирования неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред с подвижными границами, обладающих свойствами гистерезиса деформаций и возможностью учета «проскальзывания» вдоль твердых стенок.
5. С помощью разработанного программного комплекса получены результаты численного моделирования неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред на основе модели Слибара – Паслая с учетом возможного «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки.

**Апробация работы.** Работа докладывалась на Международной научной конференции «Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении» (Саратов, 2002 г.), Международной научной конференции имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Саратов, 2019), X Научной конференции молодых ученых «Presenting Academic Achievements to the World. Natural Science» (Саратов, 2019), на Международной научной конференции «Компьютерные науки и информационные технологии» (Саратов, 2019), а также на научных семинарах кафедры математической кибернетики и компьютерных наук и кафедры

математического и компьютерного моделирования ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского».

**Личный вклад автора:** разработка математической модели неустановившихся многофазных течений вязкопластичных сред на основе модели Слибара – Паслая с учетом возможного «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки [6, 76–85]; разработка и реализация метода численного моделирования в задачах численного моделирования неустановившихся течений вязкопластических сред, основанного на отображении области с подвижной границей на неподвижную область и применении дискретизации по независимой пространственной переменной на основе проекционного метода Галеркина [6, 83–85]; метод корректной постановки начально-краевых задач развития вязкопластических течений на основе асимптотического интегрирования [6, 83–85]; разработка проблемно-ориентированного комплекса программ моделирования неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред с подвижными границами [86]; результаты численного моделирования неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред на основе модели Слибара – Паслая с учетом возможного «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки [6, 83–85].

**Публикации.** По результатам исследования опубликовано 13 статей в рецензируемых изданиях, из них 3 в изданиях, рекомендованных ВАК РФ (две [6, 85] категория К2 и одна категория К1 [81]).

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и приложения. Работа содержит 41 рисунок и 4 таблицы. Список литературы содержит 128 наименований.

В первой главе приводится обзор различных реологических моделей вязкопластических сред и обосновывается выбор модели Слибара – Паслая в качестве основы для построения математической модели неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред с учетом гистерезиса деформации

при нагружении и разгрузке. Рассматривается эффект возможного «проскальзывания» вдоль твердой стенки и для его учета в модели предлагается использовать подход, аналогичный гипотезе Н.П. Петрова для вязкой жидкости. Описываются особенности моделирования задач развития линейных течений с фазовыми превращениями, основанные на отображении области с подвижной границей на неподвижную область и применении дискретизации по независимой пространственной переменной на основе проекционного метода Галеркина, а также корректной постановки начально-краевых задач путем их асимптотического интегрирования. Приводится обзор методов численного интегрирования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также сведения о программной реализации проблемно-ориентированного комплекса для моделирования неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред с подвижными границами раздела фаз.

Во второй главе поставлена и решена задача о моделировании неустановившегося «запаздывающего» течения вязкопластической жидкости по наклонной плоскости с учетом эффекта пристенного скольжения. Рассмотрены все возможные этапы течения, приведены результаты численного моделирования.

В третьей главе поставлена и решена задача о моделировании неустановившегося «запаздывающего» течения вязкопластической жидкости в неподвижной трубе круглого сечения под действием перепада давления с учетом эффекта пристенного скольжения. Рассмотрены все возможные этапы течения, приведены результаты численного моделирования.

В четвертой главе рассматриваются пять автомодельных решений для задач течений вязкопластических сред: для этапа развития течения по одному решению для плоскопараллельного и осесимметричного движения среды, два решения для этапа восстановления структуры при плоскопараллельном движении и одно решение для этапа восстановления структуры при осесимметричном движении среды. Приводятся результаты тестирования алгоритмов компьютерного



моделирования для проверки точности предложенных численных методов решения начально-краевых задач на основе автомодельных решений для этапа разгона среды. Для проверки корректности численных алгоритмов данные решения модифицировались так, чтобы учесть влияние распределенных по объему внешних сил в плоскопараллельном случае и градиента давления – в осесимметричном.

*Выражаю свою глубокую благодарность Александру Израилевичу Сафрончику, моему дедушке, который заложил основу моих исследований в области гидродинамики неньютоновских жидкостей, а также сформировал обоснование постановки ряда задач, вошедших в диссертацию.*

## ГЛАВА 1 ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД С ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ

### 1.1 Реологические модели вязкопластических сред

Основы современной гидродинамики неньютоновских сред были заложены в начале прошлого столетия, когда внимание исследователей и инженеров привлекли текучие среды, реологически более сложные, чем ньютоновские жидкости. Такие среды, в общем случае, обладают сразу несколькими нелинейными фундаментальными свойствами такими как вязкость, пластичность, упругость, а напряжение является непрерывной функцией тензора скоростей деформаций и не зависит от других кинематических и динамических параметров.

Среди неньютоновских сред выделяют класс вязкопластических материалов, которые ведут себя как твердое тело до достижения определенного внутреннего предельного значения напряжения, а после его достижения уже как несжимаемая вязкая жидкость. Большинство таких неньютоновских жидкостей разжижаются при сдвиге и их вязкость снижается при увеличении скорости сдвига.

Изучением реологических свойств сред, обладающих вязкостью и пластичностью, впервые начали заниматься А.Ж.К. Сен-Венан (Adhémar Barré de Saint-Venant), Ф.Н. Шведов, Е. Бингам (E.C. Bingham), Х. Грин (H. Green), М.П. Воларович и др. В 40-х годах двадцатого века Олдройд (J.G. Oldroyd) поместил эти модели в основы механики сплошной среды [120].

Первая модель вязкопластического течения была предложена в 1922 году Бингамом, но аналогичная зависимость была выявлена профессором Одесского университета Ф. Н. Шведовым задолго до появления работ Бингама. В итоге в отечественной литературе эту модель принято называть моделью жидкости Шведова – Бингама [106, 107, 124].

Вообще, при моделировании реодинамических процессов в вязкопластических жидкостях важным является выбор реологического уравнения состояния. В настоящее время не существует общепринятой точки зрения на

природу неньютоновского поведения тех или иных сред. Наиболее распространенное явление сдвигового разжижения объясняется достаточно большим количеством различных моделей. Ни одна из известных реологических моделей не обеспечивает хорошего количественного согласия с экспериментом для достаточно большого числа систем. Отсутствует прямое соответствие между теоретической моделью и типом текучей системы [50].

При исследовании течений вязкопластических сред наиболее часто применяемыми реологическими моделями являются:

*модель Шведова – Бингама* (в случае чистого сдвига)

$$\begin{aligned} \tau - \tau_0 &= \eta \frac{\partial V}{\partial n} && \text{при } \tau > \tau_0 \\ 0 &= \frac{\partial V}{\partial n} && \text{при } \tau \leq \tau_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\tau$  – касательное напряжение,  $\tau_0$  – предельное напряжение сдвига,  $\eta$  – структурная вязкость,  $V$  – скорость,  $n$  – нормаль к направлению скорости.

Бингамовская жидкость имеет предельное напряжение сдвига и линейную зависимость сдвигового напряжения от градиента скоростей деформации. Такое поведение можно объяснить тем, что структурными элементами среды являются высокомолекулярные соединения и твёрдые частицы различной формы, которые образуют жесткую пространственную структуру, способную сопротивляться деформации до преодоления предела. После разрушения структуры деформирование происходит по линейному закону.

Позднее эта модель была обобщена на общий пространственный случай Г. Генки и А. А. Ильюшиным [21, 36, 37].

$$\begin{aligned}
P_{xx} &= -p + 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\frac{\partial V_x}{\partial x} & P_{xy} &= \left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) \\
P_{yy} &= -p + 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\frac{\partial V_y}{\partial y} & P_{xz} &= \left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) \\
P_{zz} &= -p + 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\frac{\partial V_z}{\partial z} & P_{yz} &= \left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right)^2},$$

где  $P_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $p$  – гидростатическое давление,  $V_i$  – компоненты скорости, а  $h$  – интенсивность касательных напряжений.

Возникнув как эмпирическое выражение, уравнение Шведова – Бингама теоретически обосновано различными микрореологическими моделями.

У некоторых сред на реологических кривых при малых скоростях деформаций вначале наблюдается нелинейный участок выравнивания длинных молекул вдоль линий тока, после чего деформация также происходит по линейному закону.

Для одновременного учета нелинейности кривой течения и наличия предельного напряжения в 1926 году Уинслоу Гершелем и Рональдом Балкли была предложена эмпирическая формула [113]:

*модель Гершеля – Балкли*

$$\begin{aligned}
\tau - \tau_0 &= K \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^m & \text{при } \tau \geq \tau_0 \\
0 &= \frac{\partial V}{\partial n} & \text{при } \tau < \tau_0
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Жидкость Гершеля – Балкли представляет собой модель неньютоновской жидкости, в которой деформация, испытываемая жидкостью, связана с напряжением нелинейным образом. Эту зависимость характеризуют три параметра: консистенция  $K$  – это простая константа пропорциональности,

показатель текучести  $m$  измеряет степень разжижения или сгущения жидкости и предел текучести. Если напряжение при сдвиге меньше предела текучести, то среда ведет себя как твердое недеформируемое тело, в противном случае она ведет себя как жидкость. При  $m < 1$  происходит разжижение при сдвиге, при  $m > 1$  происходит сгущение при сдвиге. Трехпараметрическая формула Гершеля – Балкли не имеет микрореологического обоснования. Это уравнение хорошо аппроксимирует многие экспериментальные данные, хотя физический смысл всех трех коэффициентов уравнения неясен [50]. Стоит отметить, что для модели Гершеля – Балкли отсутствуют аналитические зависимости для потерь давления и перехода режимов течения.

Еще одной моделью, часто используемой для описания реологических свойств крови, является модель Кэссона, которая для чистого сдвига даёт соотношение [109]:

*модель Кэссона*

$$\begin{aligned} \tau^{1/2} - \tau_0^{1/2} &= K \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)^{1/2} && \text{при } \tau \geq \tau_0 \\ 0 &= \frac{\partial V}{\partial n} && \text{при } \tau < \tau_0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\tau_0$  – пластическая составляющая течения,  $K$  – параметр, связанный с вязкой составляющей (кэссоновский коэффициент вязкости).

Модель Кэссона может приводить к неправдоподобно большим значениям характерных параметров течения и практически непригодна при расчетах нестационарных переходных процессов [50].

Модель Шульмана является наиболее общим феноменологическим реологическим уравнением [102]:

*модель Шульмана*

$$\tau = \begin{cases} \left( \tau_0^{1/q} + K \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)^{1/m} \right)^q & \text{при } \tau \geq \tau_0 \\ 0 = \frac{\partial V}{\partial n} & \text{при } \tau < \tau_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Большинство известных реологических уравнений можно получить из (1.5), выбирая значения показателей степени  $q$  и  $m$ . Например, уравнение Шведова – Бингама (1.1) получается при  $m = q = 1$ , уравнение Кэссона (1.4) – при  $q = m = 2$ , уравнение Гершеля – Балкли (1.3) получается, если  $m = 1$ .

Все перечисленные модели не учитывают явление гистерезиса деформаций, наблюдаемого экспериментально для некоторых вязкопластических сред. К тому же использование нелинейных реологических моделей значительно усложняет численное моделирование динамики среды в начальные моменты времени, но при определенных достаточно больших скоростях деформации в технологических процессах такие модели имеют одинаковый вид с линейной моделью и не оказывают значительного влияния на моделирование эффекта «проскальзывания» вязкопластического материала вдоль твердой стенки. В силу этого, в работе используется реологическая модель (1.6).

## 1.2 Реологическая модель Слибара – Паслая

Реологическая модель, учитывающая различие в поведении материала при нагружении и разгрузке, была предложена А. Слибаром и П. Паслаем в 1959 году. На базе этой модели ими были решены некоторые стационарные задачи [125].

Реологическая модель Слибара – Паслая для случая чистого сдвига имеет вид:

$$\begin{array}{ll} \text{Нагружение} & \text{Разгрузка} \\ \tau - \tau_d = \eta \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| \text{sign} \frac{\partial V}{\partial n} & \text{при } \tau > \tau_s \quad \tau - \tau_d = \eta \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| \text{sign} \frac{\partial V}{\partial n} & \text{при } \tau > \tau_d \\ 0 = \frac{\partial V}{\partial n} & \text{при } \tau \leq \tau_s \quad 0 = \frac{\partial V}{\partial n} & \text{при } \tau \leq \tau_d \end{array} \quad (1.6)$$

Здесь  $\tau_s$  – статический предел текучести,  $\tau_d$  – динамический предел текучести,  $\eta$  – структурная вязкость,  $V$  – скорость,  $n$  – нормаль к направлению скорости.

Все постановки задач в работе строятся на базе этой реологической модели.

В ряде случаев при движении вязкопластических жидкостей наблюдается аномалия в законах сопротивления. Сопротивление резко уменьшается при определенных скоростях движения и материал начинает скользить вдоль твердой стенки. Во всех рассматриваемых задачах в работе учитывается этот возможный эффект.

Для учета данного эффекта предлагается использовать гипотезу, аналогичную гипотезе Н.П. Петрова [66], согласно которой при достижении на твердой стенке касательным напряжением некоторого критического значения  $\tau^*$ , материал начинает скользить вдоль этой стенки. Скорость скольжения предлагается считать пропорциональной разнице между фактическим и критическим напряжениями

$$\begin{aligned} \tau - \tau^* &= \lambda |V_{fluid} - V_{wall}|, & \tau > \tau^* \\ V_{fluid} &= V_{wall}, & \tau \leq \tau^* \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $V_{fluid}$  – скорость жидкости,  $V_{wall}$  – скорость твердой стенки. При этом коэффициент  $\lambda$  можно условно назвать коэффициентом «внешнего» трения вязкопластической среды о твердую стенку.

Наиболее вероятным соотношением между реологическими параметрами является  $\tau_d < \tau_s < \tau^*$ .

В отличие от общепринятого подхода к учету пристенного скольжения путем введения вязкого пристенного слоя с меньшей вязкостью, чем вязкость основной среды, предлагаемый подход не требует знания толщины пристенного слоя и его вязкости. Существующие в настоящее время гипотезы возникновения аномалии в сопротивлении за счет «проскальзывания» не позволяют связать толщину и свойства пристенного слоя с остальными параметрами процесса. Поэтому

известные решения задач о совместном движении вязкой и вязкопластической жидкостей дают лишь качественную оценку этому явлению.

Предлагаемая гипотеза позволяет описать естественное физическое условие плавного перехода от «прилипания» к «проскальзыванию», а входящие в неё параметры могут быть определены опытным путем [81].

При воздействии на вязкопластическую среду немонотонной нагрузкой, можно выделить несколько характерных временных этапов её поведения [75]. Примерная схема развития и угасания течения изображена на рисунке 1.1. Постановка задач на этих этапах различна.

По оси абсцисс время, по оси ординат нагрузка.

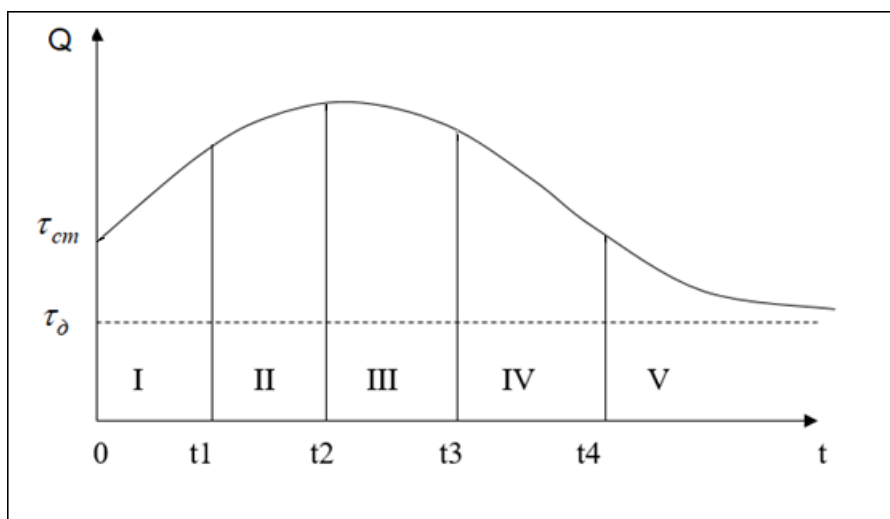


Рисунок 1.1 – Характерные временные этапы развития и угасания течения

I – разрушение структуры без «пристенного скольжения»

II – разрушение структуры со скольжением

III – переходный этап со скольжением

IV – переходный этап без скольжения

V – восстановление структуры

В работе рассматривается ряд задач о развитии и угасании плоскопараллельного и осесимметричного течения вязкопластической среды при немонотонном изменении нагрузки.



### **1.3 Особенности моделирования задач развития линейных течений с фазовыми превращениями**

Для того, чтобы эффективно выполнить численное моделирование на этапе развития течения и движения границ, разделяющих области с различными фазами, модельные начально-краевые задачи преобразуются к деформированным независимым пространственным переменным, в которых конфигурация занимаемых различными фазами областей течения остается постоянной. Такое преобразование приводит к тому, что модельные уравнения в частных производных содержат особенности в начальный момент времени, если выполняется моделирование возникновения областей, занятых отдельными фазами течения.

В таком случае, корректная постановка начально-краевых задач требует задания дополнительных начальных условий для некоторых фазовых переменных, которые обеспечивают отсутствие особенностей искомого решения. С этой целью предложено использовать методы асимптотического интегрирования начально-краевых задач.

Применение методов асимптотического интегрирования позволяет получить асимптотическое разложение достаточно высокого порядка искомого решения в малые, но конечные моменты времени и преобразовать с требуемой асимптотической точностью начально-краевую задачу для уравнений в частных производных с особенностью в нулевой начальный момент времени в начально-краевую задачу с начальными условиями в малый, но конечный момент времени для уравнений в частных производных, не содержащих особенностей.

После подобных преобразований численное интегрирование модельных начально-краевых задач эффективно реализуется посредством дискретизации по независимым пространственным переменным на основе апробированных вариантов проекционного метода Бубнова – Галеркина [97]. Поскольку искомое решение является непериодическим по пространственным переменным, в качестве

базисных функций проекционного метода целесообразно использовать смещенные ортогональные полиномы Чебышева первого рода и их произведения [87, 92].

После дискретизации по независимым пространственным переменным исходные начально-краевые задачи сводятся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности и интегрируются численно [99, 100]. При этом в полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений входят уравнения относительно координат границ областей, занимаемых различными фазами, что позволяет более достоверно моделировать движение границ.

Данный метод позволяет моделировать динамику поля скоростей среды и движение границы раздела, а также находить моменты времени, соответствующие началу «проскальзывания» среды [83].

#### **1.4 Численное интегрирование задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)**

Обсуждению одно- и многошаговым, явным и неявным методам, а также жёстким и алгебро-дифференциальным уравнениям посвящены следующие монографии [4, 10, 41, 99, 100].

##### **1.4.1 Задача Коши для ОДУ**

Пусть  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $\dot{(\ )} = d(\ ) / dt$ . Требуется найти решение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  нормальной системы ОДУ.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (1.8)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.9)$$

Пусть

$$\exists G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N : \forall (t, \mathbf{x}) \in G \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| < M \quad (1.10)$$

Полагаем  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ . Из (1.10) следует существование отрезка Пеано, рисунок 1.2.

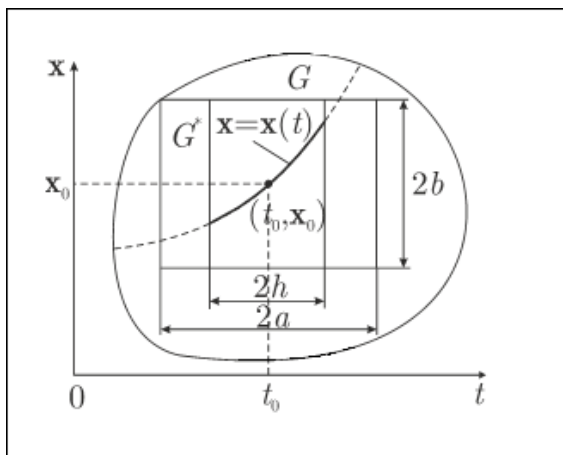


Рисунок 1.2 – Геометрическая интерпретация

$$|t - t_0| \leq h, \quad h = h(t_0, \mathbf{x}_0) \quad (1.11)$$

$$G^* = \{(t, \mathbf{x}) : |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b\} \in G, \quad h = \min\{a, b / M\} \quad (1.12)$$

Пусть выполнено условие Липшица по  $\mathbf{x}$

$$\forall (t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in G \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq L \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad (1.13)$$

**Теорема Коши.** Из (1.10), (1.12), (1.13) следует, что решение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  задачи Коши (1.8), (1.9) существует и единственно по крайней мере в пределах отрезка Пеано (1.11) [4]. Доказательство теоремы, как известно, сводится к преобразованию исходной задачи Коши к интегральной форме записи

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau \quad (1.14)$$

и применению процесса последовательных приближений Пикара

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}_m(t), \quad |t - t_0| \leq h \\ \mathbf{x}_{m+1}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_m(\tau)) d\tau, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Скорость роста искомого решения оценивается следующим образом

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| \leq \text{Const} \cdot e^{L|t-t_0|} \quad (1.16)$$

Аналогично рассматривается случай, когда правые части ОДУ (1.8) являются комплекснозначными:  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ ,  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ .

Пусть  $t \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ ,  $\mathbf{f} : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  - аналитична в  $G \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$  по всем

своим переменным. Тогда решение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  аналитично в шаре (1.11), т.е.

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{x}^{(m)}(t_0)(t - t_0)^m / m! \quad (1.17)$$

Последнее обстоятельство существенно для проектирования методов высокого порядка численного интегрирования ОДУ (1.8).

#### 1.4.2 Явные методы Рунге-Кутты

Известно  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Требуется найти  $\mathbf{x}_1 \approx \mathbf{x}(t_0 + h) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{x}^{(m)}(t_0)h^m / m!$

Пусть  $s \in \mathbb{N}$  - число «стадий»,  $a_{21}, a_{31}, a_{32}, \dots, a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{s,s-1}, b_1, \dots, b_s, c_2, \dots, c_s$  - действительные константы, причем  $c_i = \sum_j a_{ij}$

Явный  $s$ -стадийный метод Рунге-Кутты и его схема имеют вид

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0) & 0 \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_0 + c_2 h, \mathbf{x}_0 + h a_{21} \mathbf{k}_1) & c_2 \quad | \quad a_{21} \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t_0 + c_3 h, \mathbf{x}_0 + h(a_{31} \mathbf{k}_1 + a_{32} \mathbf{k}_2)) & c_3 \quad | \quad a_{31} \quad a_{32} \\ \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \mathbf{k}_s = \mathbf{f}\left[t_0 + c_s h, \mathbf{x}_0 + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} \mathbf{k}_j\right] & c_s \quad | \quad a_{s1} \quad a_{s2} \quad \dots \quad a_{s,s-1} \\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h(b_1 \mathbf{k}_1 + b_2 \mathbf{k}_2 + \dots + b_s \mathbf{k}_s) & - \quad | \quad - \quad - \quad - \quad - \\ & | \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{s-1} \quad b_s \end{array} \quad (1.18)$$

Параметры  $a_{21}, a_{31}, a_{32}, \dots, a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{s,s-1}, b_1, \dots, b_s, c_2, \dots, c_s$  находятся подстановкой (1.17) для  $t = t_0 + h$  в исходные обыкновенные дифференциальные уравнения, разложением в ряд Тейлора по шагу  $h$  левых и правых частей обыкновенных дифференциальных уравнений и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях  $h$  с целью достижения требуемого порядка локальной погрешности метода  $p \in \mathbb{N}$ :

$$\|\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}_1\| \leq \text{Const} \cdot h^{p+1}, \quad h \rightarrow 0 \quad (1.19)$$

Вложенные методы порядка  $p(q)$ ,  $q = p \pm 1$ , характеризуются следующей схемой, где

0									
$c_2$		$a_{21}$							$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0)$
$c_3$		$a_{31}$	$a_{32}$						$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_0 + c_2 h, \mathbf{x}_0 + h a_{21} \mathbf{k}_1)$
...		.....	.....						$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t_0 + c_3 h, \mathbf{x}_0 + h(a_{31} \mathbf{k}_1 + a_{32} \mathbf{k}_2))$
$c_s$		$a_{s1}$	$a_{s2}$	...	$a_{s,s-1}$				..... (1.20)
-		--	--	--	--	-			$\mathbf{k}_s = \mathbf{f}\left[t_0 + c_s h, \mathbf{x}_0 + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} \mathbf{k}_j\right]$
		$b_1$	$b_2$	...	$b_{s-1}$	$b_s$			$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h(b_1 \mathbf{k}_1 + b_2 \mathbf{k}_2 + \dots + b_s \mathbf{k}_s)$
-		--	--	--	--	-			$\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_0 + h(\hat{b}_1 \mathbf{k}_1 + \hat{b}_2 \mathbf{k}_2 + \dots + \hat{b}_s \mathbf{k}_s)$
		$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	...	$\hat{b}_{s-1}$	$\hat{b}_s$			

$$\|\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}_1\| \leq Const_1 \cdot h^{p+1}, \quad \|\mathbf{x}(t_0 + h) - \hat{\mathbf{x}}_1\| \leq Const_2 \cdot h^{q+1}, \quad h \rightarrow 0$$

Пример: 6-стадийный явный вложенный метод Дормана и Принса порядка 5(4)

0									
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$							
$\frac{3}{10}$		$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$						
$\frac{4}{5}$		$\frac{44}{45}$	$\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$					
$\frac{8}{9}$		$\frac{19372}{6561}$	$\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$\frac{212}{729}$				
1		$\frac{9017}{3168}$	$\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$\frac{5103}{18656}$			
1		$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$		
-		--	--	--	--	--	--	-	
		$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0	
-		-	-	-	-	-	-	-	
		$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$	

Непрерывные методы итерполируют решение на отрезке  $[t_0, t_0 + h]$ :

$$\mathbf{x}(t_0 + \theta h) \approx \mathbf{x}_0 + h \sum_{j=1}^s b_j(\theta) \mathbf{k}_j, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

Непрерывный метод Дормана и Принса, 4-й порядок точности

$$\mathbf{x}(t_0 + \theta h) \approx \mathbf{x}_0 + h \sum_{j=1}^6 b_j(\theta) \mathbf{k}_j, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

$$b_1(\theta) = \theta(1 + \theta(-1337/480 + \theta(1039/360 - 1163\theta/1152))), \quad b_2(\theta) = 0$$

$$b_3(\theta) = 100\theta^2(1054/9275 + \theta(-4682/27825 + 379\theta/5565))/3$$

$$b_4(\theta) = -5\theta^2(27/40 + \theta(-9/5 + 83\theta/96))/2$$

$$b_5(\theta) = 18225\theta^2(-3/250 + \theta(22/375 - 37\theta/600))/848$$

$$b_6(\theta) = -22\theta^2(-3/10 + \theta(29/30 - 17\theta/24))/7$$

### 1.4.3 Жесткие и нежесткие задачи

Пусть  $\lambda_j, j=1,2,\dots,n$  - собственные значения матрицы Якоби  $\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$  правых частей ОДУ (8).

Нежесткие задачи:  $|\lambda_j| = O(1), j=1,2,\dots,n$

Жесткие задачи: как  $|\lambda_j| = O(1)$ , так и  $|\lambda_j| \gg 1$

Явные методы Рунге-Кутты пригодны лишь для нежестких задач [4, 99, 100].

### 1.4.4 Явный и неявный многошаговые методы Адамса

Пригодны лишь для нежестких задач.

При  $t = t_0, t = t_j = t_{j-1} + h_j, j=1,2,\dots,n$  известно:

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(t_j), \quad j=0,1,2,\dots,n \quad (1.21)$$

При  $t = t_{n+1} = t_n + h_{n+1}$  требуется найти  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}(t_{n+1})$ .

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \quad (1.22)$$

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{f}(t_j, \mathbf{x}_j), \quad j=0,1,2,\dots,n \text{ — известны} \quad (1.23)$$

По наборам  $t_j$  и  $\mathbf{F}_j$  строится интерполяционный полином Ньютона:

$$\mathbf{F}(t) \approx \mathbf{P}_n(t) = \mathbf{F}_n + (t - t_n)\mathbf{F}[t_n, t_{n-1}] + (t - t_n)(t - t_{n-1})\mathbf{F}[t_n, t_{n-1}, t_{n-2}] + \dots + (t - t_n)(t - t_{n-1})(t - t_{n-2})\dots(t - t_1)\mathbf{F}[t_n, t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_1, t_0]$$

$$\mathbf{F}[t_k, t_j] = \frac{\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_j}{t_k - t_j}, \quad \mathbf{F}[t_k, t_j, t_i] = \frac{\mathbf{F}[t_k, t_j] - \mathbf{F}[t_j, t_i]}{t_k - t_i},$$

$$\mathbf{F}[t_k, t_j, t_i, t_l] = \frac{\mathbf{F}[t_k, t_j, t_i] - \mathbf{F}[t_j, t_i, t_l]}{t_k - t_l}, \dots$$

**Явный метод Адамса.**

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(t) dt \approx \mathbf{x}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{P}_n(t) dt = \\
&= \mathbf{x}_n + \mathbf{F}_n(t_{n+1} - t_n) + \mathbf{F}[t_n, t_{n-1}] \frac{(t_{n+1} - t_n)^2}{2} + \\
&+ \mathbf{F}[t_n, t_{n-1}, t_{n-2}] \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n)(t - t_{n-1}) dt + \dots + \\
&+ \mathbf{F}[t_n, t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_1, t_0] \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n)(t - t_{n-1})(t - t_{n-2}) \dots (t - t_1) dt
\end{aligned} \tag{1.24}$$

При  $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h_{n+1} = h$  явный метод Адамса (1.24) имеет порядок  $n + 1$ .

**Неявный метод Адамса.**

Добавляя формально к (1.21), (1.23) величины

$$t_{n+1} \text{ и } \mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1}) \tag{1.25}$$

запишем интерполяционный полином Ньютона

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(t) \approx \mathbf{P}_{n+1}(t) &= \mathbf{F}_{n+1} + (t - t_{n+1})\mathbf{F}[t_{n+1}, t_n] + (t - t_{n+1})(t - t_n)\mathbf{F}[t_{n+1}, t_n, t_{n-1}] + \\
&+ (t - t_{n+1})(t - t_n)(t - t_{n-1})\mathbf{F}[t_{n+1}, t_n, t_{n-1}, t_{n-2}] + \dots + \\
&+ (t - t_{n+1})(t - t_n)(t - t_{n-1})(t - t_{n-2}) \dots (t - t_1)\mathbf{F}[t_{n+1}, t_n, t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_1, t_0]
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(t) dt \approx \mathbf{x}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{P}_{n+1}(t) dt = \\
&\mathbf{x}_n + \mathbf{F}_{n+1}(t_{n+1} - t_n) - \mathbf{F}[t_{n+1}, t_n] \frac{(t_{n+1} - t_n)^2}{2} - \mathbf{F}[t_{n+1}, t_n, t_{n-1}] \frac{(t_{n+1} - t_n)^3}{6} + \\
&+ \mathbf{F}[t_{n+1}, t_n, t_{n-1}, t_{n-2}] \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n+1})(t - t_n)(t - t_{n-1}) dt + \dots + \\
&+ \mathbf{F}[t_{n+1}, t_n, t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_1, t_0] \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n+1})(t - t_n)(t - t_{n-1})(t - t_{n-2}) \dots (t - t_1) dt
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Последнее равенство представляет собой систему нелинейных уравнений относительно  $\mathbf{x}_{n+1}$ . При  $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h_{n+1} = h$  неявный метод Адамса (1.26) имеет порядок  $n + 2$ . Сначала приближенное значение  $\mathbf{x}_{n+1}$  находят явным методом (1.24), а затем последовательно уточняют при помощи (1.26).

### 1.4.5 ФДН-метод

Полагаем формально, что известны величины

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(t_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n+1 \quad (1.27)$$

Интерполяционный полином Лагранжа, построенный по набору (1.27), имеет вид

$$\mathbf{x}(t) \approx \Lambda_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \mathbf{x}_k \left[ \prod_{j=0, j \neq k}^{n+1} (t_k - t_j) \right]^{-1} \prod_{j=0, j \neq k}^{n+1} (t - t_j), \quad \dot{\mathbf{x}}(t) \approx \dot{\Lambda}_{n+1}(t)$$

Следовательно,  $\dot{\mathbf{x}}(t_{n+1}) = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1}) \approx \dot{\Lambda}_{n+1}(t_{n+1})$ ,

откуда следует система нелинейных уравнений для компонент  $\mathbf{x}_{n+1}$

$$\mathbf{x}_{n+1} \sum_{j=0}^n \frac{1}{t_{n+1} - t_j} + \sum_{k=0}^n \mathbf{x}_k \left[ \prod_{j=0, j \neq k}^{n+1} (t_k - t_j) \right]^{-1} \prod_{j=0, j \neq k}^n (t_{n+1} - t_j) = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1}) \quad (1.28)$$

часто называемая «формулами дифференцирования назад» (ФДН). ФДН-метод при  $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h_{n+1} = h$  имеет порядок  $n+1$ . ФДН-метод неустойчив при  $n > 5$ , «жестко» устойчив при  $n = 0, \dots, 5$  и применяется для решения «жестких» задач [4].

Величина  $\mathbf{x}_{n+1}$  является решением  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_{n+1}$  системы нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{y}) = 0, \quad \Phi(\mathbf{y}) = -\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}) + \\ + \mathbf{y} \sum_{j=0}^n \frac{1}{t_{n+1} - t_j} + \sum_{k=0}^n \mathbf{x}_k \left[ \prod_{j=0, j \neq k}^{n+1} (t_k - t_j) \right]^{-1} \prod_{j=0, j \neq k}^n (t_{n+1} - t_j) \end{aligned} \quad (1.29)$$

для решения которой обычно применяется итерационный метод Ньютона:

$$\mathbf{y}_{v+1} = \mathbf{y}_v - [\partial \Phi(\mathbf{y}_v) / \partial \mathbf{y}]^{-1} \Phi(\mathbf{y}_v) \quad (1.30)$$

$$\partial \Phi(\mathbf{y}) / \partial \mathbf{y} = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\} \sum_{j=0}^n (t_{n+1} - t_j)^{-1} - \partial \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}) / \partial \mathbf{y}$$

Поскольку при реализации метода Ньютона матрица  $\partial \Phi(\mathbf{y}) / \partial \mathbf{y}$  может вычисляться с меньшей точностью, чем сами левые части  $\Phi(\mathbf{y})$  системы нелинейных уравнений, то матрица Якоби правых частей  $\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$  системы обыкновенных дифференциальных уравнений может вычисляться с меньшей



точностью, чем сами правые части  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ .

#### 1.4.6 ОДУ, линейные относительно производных

Модельная система ОДУ имеет вид

$$M(t, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (1.31)$$

где  $M(t, \mathbf{x})$  - матрица размерности  $N \times N$ , называемая матрицей инерции. При численном интегрировании (1.31) возможны следующие случаи:

- Задача является нежесткой, либо размерность системы невелика. В данном случае система ОДУ приводится к нормальной форме Коши

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = [M(t, \mathbf{x})]^{-1} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (1.32)$$

и далее интегрируется численно.

- Задача характеризуется большой размерностью, является жесткой, а матрицы  $M(t, \mathbf{x})$  и  $\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$  являются разреженными. Такая ситуация часто встречается в математической физике при дискретизации модельных уравнений в частных производных по независимым пространственным переменным [4]. Применение ФДН-метода к (1.32) приводит к результату

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} \sum_{j=0}^n \frac{1}{t_{n+1} - t_j} + \sum_{k=0}^n \mathbf{x}_k \left[ \prod_{j=0, j \neq k}^{n+1} (t_k - t_j) \right]^{-1} \prod_{j=0, j \neq k}^n (t_{n+1} - t_j) = \\ = [M(t_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1})]^{-1} \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1}) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Искомая величина  $\mathbf{x}_{n+1}$  является решением  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_{n+1}$  системы нелинейных уравнений (1.33), которые можно представить в форме

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{y}) = 0, \quad \Phi(\mathbf{y}) = -\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}) + \\ + M(t_{n+1}, \mathbf{y}) \left\{ \mathbf{y} \sum_{j=0}^n \frac{1}{t_{n+1} - t_j} + \sum_{k=0}^n \mathbf{x}_k \left[ \prod_{j=0, j \neq k}^{n+1} (t_k - t_j) \right]^{-1} \prod_{j=0, j \neq k}^n (t_{n+1} - t_j) \right\} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Как правило, при дискретизации начально-краевых задач математической физики по пространственным переменным матрица инерции слабо изменяется при изменении искомого решения, и

$$\partial M(t, \mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} \approx 0 \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \approx M(t_{n+1}, \mathbf{y}) \sum_{j=0}^n \frac{1}{t_{n+1} - t_j} - \frac{\partial \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \quad (1.36)$$

### 1.5 Сведения о программной реализации

Исходя из требований вычислительной эффективности, программный комплекс для моделирования неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред с подвижными границами раздела фаз был реализован на языке программирования C++ (Microsoft visual C++ 2019 – 2022). Для ускорения вычислений использовались оптимизированные функции линейной алгебры из пакетов BLAS/LAPACK (свободно распространяемые реализации Intel Math Kernel Library). В качестве объектно-ориентированной оболочки для BLAS/LAPACK применялся LAPACK++. Также использовалась эффективная реализация явно- неявного метода Адамса переменного шага и порядка из пакета ODEPACK.

## ГЛАВА 2 МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ «ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО» ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА «ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ»

Моделируются этапы нестационарного течения «запаздывающей» вязкопластической среды по наклонной плоскости под воздействием силы тяжести с учетом эффекта «проскальзывания» вдоль твердой стенки. Граница зоны течения на этапах развития и угасания течения заранее неизвестна и определяется в процессе решения задачи. Задача ставится в рамках пятипараметрической модели Слибара – Паслая (1.6), позволяющей учесть различие в поведении материала при нагружении и разгрузке. Возможное «проскальзывание» материала вдоль твердой стенки учитывается с помощью модели плавного перехода от прилипания к «проскальзыванию» аналогичной гипотезе Н.П. Петрова для вязкой жидкости (1.7). В начальный момент угол наклона выбирается таким образом, чтобы с течением времени проявился так называемый эффект «проскальзывания» вдоль твердой стенки.

Решение задачи строится с помощью проекционного метода Галеркина с использованием в качестве базисных функций ортогональных полиномов Чебышёва первого рода.

### 2.1 Этап развития течения без «проскальзывания»

Пусть слой вязкопластической среды толщины  $H$  находится на горизонтальной плоскости в состоянии покоя. В момент  $t=0$  плоскость была наклонена на угол  $\alpha$  к горизонту. Область течения развивается постепенно под действием силы тяжести при достижении касательным напряжением  $\tau$  статического предела текучести  $\tau_s$  и граница этой области заранее неизвестна.

Для начала «проскальзывания» соотношение между параметрами в рамках пятипараметрической модели будет следующим:  $g\rho H \sin \alpha > \tau^* > \tau_s > \tau_d$  [85], где

$g$  – ускорение свободного падения,  $\rho$  – плотность среды.

Если соотношение между параметрами будет  $\tau^* > g\rho H \sin \alpha > \tau_s$  то все этапы пройдут без «проскальзывания», при  $\tau_s > g\rho H \sin \alpha$  разрушения структуры не произойдет.

Течение считается плоскопараллельным. Направим ось  $Ox$  вдоль плоскости, а ось  $Oy$  перпендикулярно потоку, как показано на рисунке 2.1.

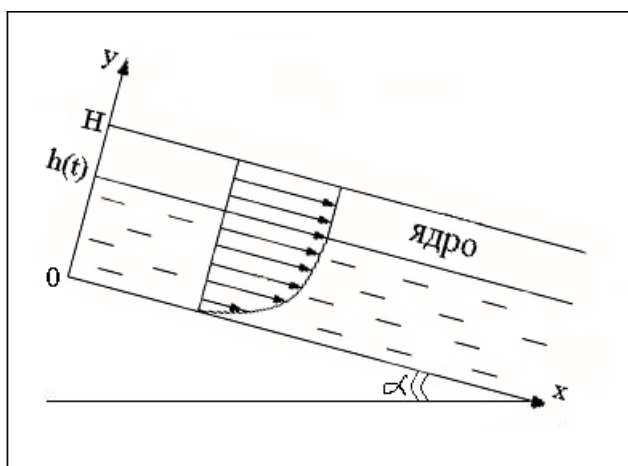


Рисунок 2.1 – Схема течения вязкопластического материала по наклонной плоскости

Для единственной компоненты скорости краевая задача имеет вид:

$$\frac{\partial V_x(y,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_x(y,t)}{\partial y^2} + g \sin \alpha, \quad 0 < y < h(t), \quad 0 < t \leq T_1 \quad (2.1)$$

$$V_x(y,0) = 0, \quad h(0) = 0 \quad (2.2)$$

$$V_x(0,t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq T_0 \text{ без проскальзывания} \\ (\tau(0,t) - \tau^*) / \lambda, & T_0 < t \leq T_1 \text{ с проскальзыванием} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y \rightarrow h(t)-0} = \frac{\tau_s - \tau_d}{\eta} \quad (2.5)$$

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y \rightarrow +0} = \frac{\tau(0,t) - \tau_d}{\eta} \quad (2.6)$$

$$V_x|_{y \rightarrow h(t)-0} = U(t), \text{ где } \frac{dU(t)}{dt} = g \sin \alpha - \frac{\tau_s}{(H - h(t))\rho} \quad (2.7)$$

Здесь  $\eta$  – структурная вязкость,  $\nu = \eta / \rho$  – аналог кинематической вязкости,  $\tau_s$  и  $\tau_d$  – статическое и динамическое предельное напряжение сдвига,  $\tau^*$  предельное касательное напряжение, при котором начинается «проскальзывание» вдоль твердой стенки,  $U(t)$  – скорость ядра течения,  $\lambda$  – коэффициент «внешнего» трения вязкопластической среды о твердую стенку.

Далее задача рассматривается в безразмерных переменных и параметрах, переход к которым осуществляется по формулам:

$$y = H\bar{y}, V_x(y, t) = U_0\bar{V}_x(\bar{y}, \bar{t}), t = \frac{H^2}{\nu}\bar{t}, \lambda = \frac{\eta}{H}\bar{\lambda}, \tau_s = \delta\tau_d, \tau^* = \gamma\tau_d \quad (2.8)$$

Задача (2.1) – (2.7) принимает вид:

$$\frac{\partial \bar{V}_x(\bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{V}_x(\bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha, \quad 0 < \bar{y} < \bar{h}(\bar{t}), \quad 0 < \bar{t} \leq \bar{T}_1 \quad (2.9)$$

$$\bar{V}_x(\bar{y}, 0) = 0, \quad \bar{h}(0) = 0 \quad (2.10)$$

$$\bar{V}_x(0, \bar{t}) = \begin{cases} 0, & 0 < \bar{t} \leq \bar{T}_0 \\ \text{Sen}_d(\bar{\tau}(0, \bar{t}) - \gamma) / \bar{\lambda}, & \bar{T}_0 < \bar{t} \leq \bar{T}_1 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{V}_x(\bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y} \rightarrow \bar{h}(\bar{t})-0} = \text{Sen}_d(\delta - 1) \quad (2.13)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{V}_x(\bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y} \rightarrow +0} = \text{Sen}_d(\bar{\tau}(0, \bar{t}) - 1) \quad (2.14)$$

$$\frac{d\bar{U}}{d\bar{t}} = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha - \text{Sen}_d \frac{\delta}{(1 - \bar{h}(\bar{t}))} \quad (2.15)$$

Входящие в задачу (2.9) – (2.15) параметры Рейнольдса, Сен-Венана и Фруда определяются по формулам:

$$\text{Re} = \frac{U_0 H}{\nu}; \quad \text{Sen}_d = \frac{\tau_d H}{U_0 \eta}; \quad \text{Fr} = \frac{U_0^2}{gH} \quad (2.16)$$

В дальнейшем для простоты записи символ  $(\bar{\quad})$  над безразмерными величинами в формулах опускаем.

Непосредственное численное интегрирование задач типа Стефана с подвижной границей затруднительно. В связи с этим целесообразно отображение области с подвижной границей на область с постоянными границами. Вводя новые переменные по формулам:

$$z = y / h(t), \quad V_x(z, t) = V_x(y, t) \quad (2.17)$$

получим краевую задачу в области с постоянными границами  $0 < z < 1$ ,  $0 < t \leq T_1$ .

$$\frac{\partial^2 V_x(z, t)}{\partial z^2} = h^2(t) \left( \frac{\partial V_x(z, t)}{\partial t} - z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V_x(z, t)}{\partial z} - \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha \right) \quad (2.18)$$

$$V_x(z, 0) = 0, \quad h(0) = 0 \quad (2.19)$$

$$V_x(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq T_0 \\ \text{Sen}_d(\tau(0, t) - \gamma) / \lambda, & T_0 < t \leq T_1 \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\left( \frac{\partial V_x(z, t)}{\partial z} \right)_{z=1} = h(t) \text{Sen}_d(\delta - 1) \quad (2.22)$$

$$\left( \frac{\partial V_x(z, t)}{\partial z} \right)_{z=0} = h(t) \text{Sen}_d(\tau(0, t) - 1) \quad (2.23)$$

Из (2.18) при  $z=1$  и учитывая (2.15) следует:

$$\frac{\partial^2 V_x(z, t)}{\partial z^2} = -\text{Sen}_d \frac{h^2(t) \delta}{(1 - h(t))} - h'(t) h(t) \frac{\partial V_x(z, t)}{\partial z} \quad (2.24)$$

Подставляя (2.22) в формулу (2.24), получаем:

$$h'(t) = -\frac{1}{\text{Sen}_d(\delta - 1)} \left( \frac{1}{h^2(t)} \frac{\partial^2 V_x(z, t)}{\partial z^2} \Big|_{z=1} + \text{Sen}_d \frac{\delta}{(1 - h(t))} \right) \quad (2.25)$$

### Построение решения

Начально-краевая задача (2.18) – (2.23), (2.25) в области с неизвестной подвижной границей принадлежит к классу не вполне корректных задач, т.к. в начальный момент область течения отсутствует. Как следствие, требование отсутствия особенностей решения начально-краевой задачи (2.18) – (2.23) при

$t \rightarrow +0$  приводит к представлению границы течения и поля скоростей в начальный момент в виде асимптотических рядов:

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^{1+k/2}, \quad t \rightarrow 0 \quad (2.26)$$

$$V_x(z, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) t^{1+k/2}, \quad t \rightarrow 0 \quad (2.27)$$

Ряды (2.26), (2.27) формально расходятся, но, если их оборвать, при  $t \rightarrow +0$  они обеспечивают аппроксимацию с ошибкой порядка первого отброшенного слагаемого. В этом смысле к ним применимы аналоги типовых операций, таких как линейные комбинации, перемножение, дифференцирование, интегрирование и т.д., которые применяются к сходящимся степенным рядам. При этом начальные условия (2.19) выполнены автоматически, и

$$h'(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}\right) A_k t^{k/2} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial V_x(z, t)}{\partial t} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}\right) f_k(z) t^{k/2} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial V_x(z, t)}{\partial z} \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(z) t^{1+k/2} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^2 V_x(z, t)}{\partial z^2} \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k''(z) t^{1+k/2} \quad (2.31)$$

Из (2.20) и (2.27)

$$f_k(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

Из (2.22), (2.27) и (2.30)

$$f_k'(1) = \text{Sen}_d(\delta - 1) A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

Подстановка асимптотических рядов (2.28) – (2.31) в уравнения (2.18), (2.25) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях переменной  $t$  приводит к рекуррентной системе уравнений относительно  $A_k$  и  $f_k(z)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

$$\begin{aligned}
A_0 + \frac{3}{2}A_1t^{1/2} + 2A_2t + \frac{5}{2}A_3t^{3/2} + \dots = & -\frac{1}{\text{Sen}_d(\delta-1)} \left\{ \text{Sen}_d \delta (1 + A_0t + A_1t^{3/2} + \dots) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{A_0^2} \left[ 1 - 2\frac{A_1}{A_0}t^{1/2} + \left( 3\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 - 2\frac{A_2}{A_0} \right)t + \left( 6\frac{A_1A_2}{A_0^2} - 2\frac{A_3}{A_0} - 4\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^3 \right)t^{3/2} + \dots \right] \right. \\
& \left. \cdot \left( f_2''(1) + f_3''(1)t^{1/2} + f_4''(1)t + f_5''(1)t^{3/2} \right) \right\}
\end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}
f_0(z) + \frac{3}{2}f_1(z)t^{1/2} + 2f_2(z)t + \frac{5}{2}f_3(z)t^{3/2} + \dots = \\
\frac{1}{A_0^2} \left[ 1 - 2\frac{A_1}{A_0}t^{1/2} + \left( 3\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 - 2\frac{A_2}{A_0} \right)t + \left( 6\frac{A_1A_2}{A_0^2} - 2\frac{A_3}{A_0} - 4\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^3 \right)t^{3/2} + \dots \right] \cdot \\
\cdot \left( f_2''(z) + f_3''(z)t^{1/2} + f_4''(z)t + f_5''(z)t^{3/2} + \dots \right) + \\
+ \left[ 1 + \frac{A_1}{2A_0}t^{1/2} + \left( \frac{A_2}{A_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 \right)t + \left( \frac{1}{2}\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^3 + \frac{3}{2}\frac{A_3}{A_0} - \frac{3}{2}\frac{A_1A_2}{A_0^2} \right)t^{3/2} + \dots \right] \cdot \\
\cdot z \left( f_0'(z) + f_1'(z)t^{1/2} + f_2'(z)t + f_3'(z)t^{3/2} + \dots \right) + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha
\end{aligned} \quad (2.35)$$

Непосредственная проверка показывает, что коэффициенты при нецелых степенях переменной  $t$  тождественно равны нулю. Учитывая обнуление коэффициентов асимптотических рядов (2.26) и (2.27) при нецелых степенях  $t$  можно обеспечить асимптотическое представление  $h(t)$  и  $V_x(z, t)$  при  $t \rightarrow +0$  с погрешностью порядка  $\underline{\underline{O}}(t^3)$ .

$$h(t) = A_0t + A_2t^2 \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}
V_x(z, t) = f_0(z)t + f_2(z)t^2 = \\
= \text{Sen}_d(\delta-1)A_0zt + t^2 \left[ \left( \text{Sen}_d(\delta-1)A_2 + A_0^2 \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha \right) z - A_0^2 \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha \frac{z^2}{2} \right]
\end{aligned} \quad (2.37)$$

где  $A_0$  и  $A_2$ ,  $f_0$  и  $f_2$  находятся из (2.34) и (2.35).

$$f_0(z) = \text{Sen}_d(\delta-1)A_0z, \quad f_2(z) = \left( \text{Sen}_d(\delta-1)A_2 + A_0^2 \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha \right) z - A_0^2 \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha \frac{z^2}{2} \quad (2.38)$$



$$A_0 = \frac{1}{\delta - 1} \left( \frac{\sin \alpha \operatorname{Re}}{\operatorname{Sen}_d \operatorname{Fr}} - \delta \right), \quad A_2 = -\frac{1}{2\operatorname{Sen}_d(\delta - 1)} \left( \operatorname{Sen}_d \delta A_0 + \frac{A_0^2 \operatorname{Re}}{2\operatorname{Fr}} \sin \alpha \right) \quad (2.39)$$

Дискретизация начально-краевой задачи (2.18) – (2.23), (2.25) по независимым пространственным переменным выполняется на основе проекционного метода Галёркина с базисными функциями в форме ортогональных полиномов Чебышева 1-го рода. Уравнения с требуемой степенью точности заменяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности, которая далее интегрируется численно [5]. При этом начальные условия ставятся относительно величины  $h$  и соответствующих Фурье-коэффициентов. Постановка начальных условий для полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений значительно упрощается ввиду того, что выражение для  $V_x|_{t=t_0}$  представляет собой линейную комбинацию ортогональных полиномов Чебышева 1-го рода не более чем 2-й степени.

Представим функцию  $V_x(z, t)$  в виде ряда по ортогональным полиномам Чебышёва:

$$V_x(z, t) \approx \sum_{n=0}^{N+2} V_{x_n}(t) T_n(2z - 1), \quad T_n(z) = \cos(n \arccos z) \quad (2.40)$$

Представим (2.18) в виде:

$$\mathbb{F}[V] = \frac{\partial^2 V_x(z, t)}{\partial z^2} - h^2(t) \left( \frac{\partial V_x(z, t)}{\partial t} - z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V_x(z, t)}{\partial z} - \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Fr}} \sin \alpha \right) = 0 \quad (2.41)$$

Из (2.20) и (2.40) выбирая сначала условие прилипания, следует

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{x_n}(t) = 0, \quad 0 < t \leq T_0 \quad (2.42)$$

Из (2.22) и (2.40)

$$\sum_{n=1}^{N+2} n^2 V_{x_n}(t) = \frac{h(t) \operatorname{Sen}_d(\delta - 1)}{2} \quad (2.43)$$

Из (2.25) и (2.40)

$$h'(t) = -\frac{1}{\text{Sen}_d(\delta-1)} \left( \frac{4}{3h^2(t)} \sum_{n=2}^{N+2} n^2(n^2-1)V_{x_n}(t) + \frac{\delta \text{Sen}_d}{1-h(t)} \right) \quad (2.44)$$

Для того, чтобы приближенно выполнить уравнение (2.40), требуем:

$$\int_0^1 \mathbb{F}[V]T_n(2z-1)dz = 0, \quad n=\overline{0, N} \quad (2.45)$$

$$A_{n,m}^{(0)} = \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)dx \quad (2.46)$$

$$A_{n,m}^{(k)} = \int_{-1}^1 T_n(x)T_m^{(k)}(x)dx$$

$$\begin{aligned} & \frac{4}{h(t)} \sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(2)}V_m(t) - h(t) \sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(0)}V'_m(t) + \\ & + h'(t) \sum_{m=0}^{N+2} \left( A_{n,m}^{(1)} + \frac{1}{2} \left( A_{n+1,m}^{(1)} + A_{n-1,m}^{(1)} \right) \right) V_m(t) + h(t) \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

(2.42), (2.43) и (2.47) представляет собой записанную в неявной форме систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Приведение её к нормальной форме Коши

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y} = (V_{x_0}, V_{x_1}, \dots, V_{x_N}, h)^T \quad (2.48)$$

и нахождение величины  $Y'$  по известным в текущий момент времени  $t$  величинам  $Y$  выполняется в следующей последовательности. Из (2.42) и (2.43) находим  $V_{x_{N+1}}$  и  $V_{x_{N+2}}$  по  $V_{x_0}, V_{x_1}, \dots, V_{x_N}$  и  $h$ , из (2.44) находим  $h'(t)$ . Далее продифференцируем (2.42) и (2.43) по  $t$ .

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V'_{x_n}(t) = 0, \quad 0 < t \leq T_0 \quad (2.49)$$

$$\sum_{n=0}^{N+2} n^2 V'_{x_n}(t) = \frac{h'(t) \text{Sen}_d(\delta-1)}{2} \quad (2.50)$$

Уравнения (2.49), (2.50) и (2.47) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V'_{x_n}$ ,  $n=0, 1, \dots, N, N+1, N+2$ . Начальные условия для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.42), (2.43),

(2.47) следуют из асимптотического представления (2.36), (2.37), (2.39) при  $t=t_0$ ,  $0 < t_0 \ll 1$  [83].

## 2.2 Этап развития течения с «проскальзыванием»

На этом этапе при достижении касательным напряжением критического значения  $\tau^*$  ( $\gamma$  в безразмерном виде) в момент времени  $T_0$  меняется условие на твердой стенке  $z=0$  на (2.21) [85].

Из условия (2.21) и реологического уравнения (2.23) получаем

$$V_x(0,t) = \frac{1}{\lambda} \left( \text{Sen}_d(1-\gamma) + \frac{1}{h(t)} \frac{\partial V_x(0,t)}{\partial z} \right) \quad (2.51)$$

уравнение (2.42) заменяется на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{x_n}(t) \left( 1 + \frac{2n^2}{\lambda h(t)} \right) = \frac{\text{Sen}_d(1-\gamma)}{\lambda} \quad (2.52)$$

Уравнение (2.49) заменяется на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V'_{x_n}(t) \left( 1 + \frac{2n^2}{\lambda h(t)} \right) = \frac{2h'(t)}{\lambda h^2(t)} \sum_{n=1}^{N+2} (-1)^n n^2 V_{x_n}(t) \quad (2.53)$$

Со временем процесс стабилизируется и течение асимптотически приближается к установившемуся. Граница зоны течения находится из соотношения

$$h_0 = 1 - \frac{\text{FrSen}_d \delta}{\text{Resin} \alpha} \quad (2.54)$$

Распределение скоростей для стационарного режима легко находится и имеет вид

$$V_x(z) = \frac{h_0 \text{Re}}{\text{Fr}} z \sin \alpha \left( 1 - \frac{zh_0}{2} \right) - h_0 z \text{Sen}_d + \frac{\text{Sen}_d(\tau(0,t) - \gamma)}{\lambda} \quad (2.55)$$

## 2.3 Переходный этап с «проскальзыванием»

Пусть теперь в момент времени  $T_1$  угол наклона плоскости уменьшается  $\beta < \alpha$ . С этого момента начнется нестационарный переходный процесс, при котором напряжение на границе раздела фаз  $h_0$  будет уменьшаться с  $\tau_s$  до  $\tau_d$ , (с

$\delta$  до 1 в безразмерных параметрах). Граница зоны течения на этом этапе постоянна. Для того чтобы со временем начался процесс восстановления материала соотношение между параметрами выбирается следующим:

$$\frac{\text{Sen}_d \text{Fr}}{\text{Re} \sin \beta} \leq 1 \quad (2.56)$$

Если напряжение на твердой стенке  $z=0$  к моменту времени  $T_1$  превышает критическое напряжение  $\gamma$ , то либо весь переходный этап проходит с «проскальзыванием» и в момент  $T_2$  начнется восстановление материала, либо в этот момент  $\tau(0, T_2) = \gamma$  и начнется переходный этап без «проскальзывания».

При переходном этапе с «проскальзыванием» решается краевая задача в области  $0 < z < 1$ ,  $T_1 < t \leq T_2$ . С начальными условиями (2.54), (2.55).

$$\frac{\partial V_x(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{h_0^2} \frac{\partial^2 V_x(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \beta \quad (2.57)$$

$$V_x(0, t) = \text{Sen}_d (\tau(0, t) - \gamma) / \lambda, \quad T_1 < t \leq T_2 \quad (2.58)$$

$$\left( \frac{\partial V_x(z, t)}{\partial z} \right)_{z=1} = h_0 \text{Sen}_d (\tau(1, t) - 1) \quad (2.59)$$

$$\left( \frac{\partial V_x(z, t)}{\partial z} \right)_{z=0} = h_0 \text{Sen}_d (\tau(0, t) - 1) \quad (2.60)$$

Из (2.58) и (2.60)

$$V_x(0, t) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{h_0} \frac{\partial V_x(0, t)}{\partial z} + \text{Sen}_d (1 - \gamma) \right) \quad (2.61)$$

По теореме импульсов

$$V_x(1, t) = V_x(1, T_1) + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} (t - T_1) \sin \beta - \frac{\text{Sen}_d}{(1 - h_0)} \int_{T_1}^t \tau(1, \xi) d\xi \quad (2.62)$$

Обозначим:

$$\Phi_1(t) = \int_{T_1}^t \tau(1, \xi) d\xi, \quad \Phi_1(T_1) = 0 \quad (2.63)$$

Представим (2.57) в виде:

$$\mathbb{F}[V] = -\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial t} + \frac{1}{h_0^2} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \beta \quad (2.64)$$

Из (2.40) и (2.61)

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{x_n}(t) \left( \lambda + \frac{2n^2}{h_0} \right) = \text{Sen}_d (1 - \gamma) \quad (2.65)$$

Из (2.40) и (2.62)

$$\sum_{n=0}^{N+2} V_{x_n}(t) = V_n(1, T_1) + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} (t - T_1) \sin \beta - \frac{\Phi_1(t)}{1 - h_0} \quad (2.66)$$

$$\Phi_1'(t) = \tau(1, t) = 1 + \frac{1}{h_0 \text{Sen}_d} \frac{\partial V_x(1, t)}{\partial z} \quad (2.67)$$

Из (2.40) и (2.67)

$$\Phi_1'(t) = \frac{2}{h_0 \text{Sen}_d} \sum_{n=1}^{N+2} n^2 V_{x_n}(t) + 1 \quad (2.68)$$

Из (2.45), (2.46) и (2.40)

$$\sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(0)} V_m'(t) - \frac{4}{h_0^2} \sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(2)} V_m(t) - \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \beta = 0 \quad (2.69)$$

(2.65), (2.66), (2.69) система обыкновенных дифференциальных уравнений в неявной форме первого порядка. Из (2.65) и (2.66) находим  $V_{x_{N+1}}$  и  $V_{x_{N+2}}$  по  $V_{x_0}, V_{x_1}, \dots, V_{x_N}$  и  $\Phi_1$ , из (2.68) находим  $\Phi_1'(t)$ . Далее продифференцируем (2.65) и (2.66) по  $t$ .

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{x_n}'(t) \left( \lambda + \frac{2n^2}{h_0} \right) = 0 \quad (2.70)$$

$$\sum_{n=0}^{N+2} V_{x_n}'(t) = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \beta - \frac{\text{Sen}_d \Phi_1'(t)}{1 - h_0} \quad (2.71)$$

Уравнения (2.69) – (2.71) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V_{x_n}'$ ,  $n=0, 1, \dots, N, N+1, N+2$ . Начальными

условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.65), (2.66), (2.69) являются условия (2.55), (2.63).

#### 2.4 Переходный этап без «проскальзывания»

Если в момент  $T_2$  касательное напряжение на твердой стенке  $z=0$  уменьшается до значения  $\gamma$ , то условие «проскальзывания» заменяется условием прилипания.

Условия (2.61) и (2.62) заменяются на

$$V_x(0,t) = 0, \quad T_2 < t \leq T_3 \quad (2.72)$$

$$V_x(1,t) = V_x(1,T_2) + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}}(t - T_2)\sin\beta - \frac{\text{Sen}_d}{1 - h_0} \int_{T_2}^t \tau(1,\xi)d\xi \quad (2.73)$$

Обозначим:

$$\Phi_2(t) = \int_{T_2}^t \tau(1,\xi)d\xi, \quad \Phi_2(T_2) = 0 \quad (2.74)$$

(2.65), (2.66) заменяются на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{x_n}(t) = 0 \quad (2.75)$$

$$\sum_{n=0}^{N+2} V_{x_n}(t) = V_n(1,T_2) + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}}(t - T_2)\sin\beta - \frac{\text{Sen}_d \Phi_2(t)}{1 - h_0} \quad (2.76)$$

(2.70) меняется на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V'_{x_n}(t) = 0 \quad (2.77)$$

Начальными условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.75), (2.76), (2.69) являются условие (2.74) и распределение скоростей, сложившееся к началу данного этапа.

Как только напряжение на границе раздела фаз  $h_0$  уменьшится до 1 (до  $\tau_0$  в размерном виде) начнется этап восстановления структуры материала, и граница зоны течения снова станет подвижной.

## 2.5 Этап угасания течения с восстановлением структуры с «проскальзыванием»

В зависимости от параметров течения восстановление материала может начаться раньше, чем закончится «проскальзывание» вдоль твердой стенки. Тогда в момент времени  $T_2$  начнется восстановление структуры материала.

На этом этапе получаем краевую задачу в области  $0 < z < 1$ ,  $T_2 < t < T_3$

С начальным условием (2.54) для подвижной границы раздела фаз, и распределением скоростей, сложившимся к началу данного этапа.

$$\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{h^2(t)} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} + z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \beta \quad (2.78)$$

$$V_x(z, T_2) = V_x^{(0)}(z, T_2), \quad h(T_2) = h_0 \quad (2.79)$$

$$V_x(0, t) = \text{Sen}_d (\tau(0, t) - \gamma) / \lambda, \quad T_2 < t \leq T_3 \quad (2.80)$$

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial z} \right)_{z=1} = 0 \quad (2.81)$$

$$\left( \frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} \right)_{z=0} = h(t) \text{Sen}_d (\tau(0, t) - 1) \quad (2.82)$$

Из (2.80) и (2.82)

$$V_x(0, t) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{h(t)} \frac{\partial V_x(0, t)}{\partial z} + \text{Sen}_d (1 - \gamma) \right) \quad (2.83)$$

$$V_x(1, t) = U(t), \quad \text{где} \quad \frac{dU(t)}{dt} = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \beta - \frac{\text{Sen}_d}{1 - h(t)} \quad (2.84)$$

Для нахождения  $h'(t)$  выполняются следующие шаги.

Из (2.78) при  $z=1$  (2.81) и (2.84) следует:

$$\frac{\partial^2 V_x(1, t)}{\partial z^2} = - \frac{h^2(t) \text{Sen}_d}{1 - h(t)} \quad (2.85)$$

Продифференцировав (2.85) по времени, получим:

$$\frac{\partial^3 V_x(z, t)}{\partial z^2 \partial t} = -\text{Sen}_d \frac{h(t)h'(2-h(t))}{(1-h(t))^2} \quad (2.86)$$

Продифференцировав (2.78) дважды по  $z$ , получим:

$$\frac{\partial^3 V_x(z, t)}{\partial z^2 \partial t} = \frac{1}{h^2(t)} \frac{\partial^4 V_x(z, t)}{\partial z^4} + \frac{h'(t)}{h(t)} \left( \frac{\partial^3 V_x(z, t)}{\partial z^3} - \frac{2h^2(t)\text{Sen}_d}{1-h(t)} \right) \quad (2.87)$$

Приравняв (2.86) и (2.87) получим выражение для  $h'(t)$ .

$$h'(t) = -\frac{1}{h^2(t)} \frac{\partial^4 V_x(z, t)}{\partial z^4} \left( \frac{1}{h(t)} \frac{\partial^3 V_x(z, t)}{\partial z^3} + \frac{h^2(t)\text{Sen}_d}{(1-h(t))^2} \right)^{-1} \quad (2.88)$$

Из (2.40) и (2.83)

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{x_n}(t) \left( 1 + \frac{2n^2}{\lambda h(t)} \right) = \frac{\text{Sen}_d(1-\gamma)}{\lambda} \quad (2.89)$$

Из (2.40) и (2.81)

$$\sum_{n=1}^{N+2} n^2 V_{x_n}(t) = 0 \quad (2.90)$$

Представим (2.78) в виде:

$$\mathbb{F}[V] = -\frac{\partial V_x(z, t)}{\partial t} + \frac{1}{h^2(t)} \frac{\partial^2 V_x(z, t)}{\partial z^2} + z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V_x(z, t)}{\partial z} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \beta = 0 \quad (2.91)$$

Из (2.45), (2.46) и (2.91)

$$\begin{aligned} & h(t) \sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(0)} V_m'(t) - \frac{4}{h(t)} \sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(2)} V_m(t) - \\ & - h'(t) \sum_{m=0}^{N+2} \left( A_{n,m}^{(1)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,m}^{(1)} + A_{n-1,m}^{(1)}) \right) V_m(t) - h'(t) \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \beta = 0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

(2.89), (2.90), (2.92) система обыкновенных дифференциальных уравнений в неявной форме первого порядка. Из (2.89) и (2.90) находим  $V_{x_{N+1}}$  и  $V_{x_{N+2}}$  по  $V_{x_0}, V_{x_1}, \dots, V_{x_N}$  и  $h$ , из (2.88) находим  $h'(t)$ . Далее продифференцируем (2.89) и (2.90) по  $t$ .



$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V'_{x_n}(t) \left( 1 + \frac{2n^2}{\lambda h(t)} \right) = \frac{2h'(t)}{\lambda h^2(t)} \sum_{n=1}^{N+2} (-1)^n n^2 V_{x_n}(t) \quad (2.93)$$

$$\sum_{n=1}^{N+2} n^2 V'_{x_n}(t) = 0 \quad (2.94)$$

Уравнения (2.92) – (2.94) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V'_{x_n}$ ,  $n=0, 1, \dots, N, N+1, N+2$ .

Если в момент  $T_3$  касательное напряжение на твердой стенке  $z=0$  уменьшается до значения  $\gamma$ , то процесс восстановления будет идти уже без «проскальзывания».

## 2.6 Этап угасания течения с восстановлением структуры без «проскальзывания»

На этом этапе получаем краевую задачу в области  $0 < z < 1$ ,  $t > T_3$ . Меняется условие «проскальзывания» (2.80) на твердой стенке  $z=0$  на прилипание

$$V_x(0, t) = 0, \quad t > T_3 \quad (2.95)$$

Исходя из (2.40) и (2.95) условие (2.89) заменяется на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{x_n}(t) = 0, \quad (2.96)$$

а условие (2.93) на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V'_{x_n}(t) = 0 \quad (2.97)$$

В зависимости от выбранной величины угла наклона восстановление структуры материала может быть как полным, так и частичным. Со временем процесс может стабилизироваться и течение асимптотически приблизится к установившемуся. Граница зоны течения в этом случае находится из соотношения

$$h_1 = 1 - \frac{\text{FrSen}_d}{\text{Resin}\beta} \quad (2.93)$$

Распределение скоростей для нового стационарного режима имеет вид

$$V_x(z) = \frac{h_1^2 \text{Re}}{\text{Fr}} z \sin \beta \left(1 - \frac{z}{2}\right) \quad (2.94)$$

## 2.7 Результаты численного моделирования

Моделирование течения вязкопластической среды по наклонной плоскости проводится для безразмерных параметров, заданных по формулам (2.8), (2.16).

Основное влияние на характер течения оказывают величины углов наклона плоскости, коэффициент внешнего трения, влияющий на «проскальзывание» материала вдоль твердой стенки и соотношения между внутренними напряжениями среды.

Для того, чтобы рассмотреть все возможные этапы неустановившегося течения вязкопластической жидкости при нагружении и разгрузке соотношение между параметрами в рамках пятипараметрической модели выбрано следующим образом:  $g \rho H \sin \alpha > \tau^* > \tau_s > \tau_d$ . В безразмерном виде  $\frac{\text{Re} \sin \alpha}{\text{Sen}_d \text{Fr}} > \gamma > \delta > 1$ .

Соответственно, если соотношение между параметрами будет  $\delta < \frac{\text{Re} \sin \alpha}{\text{Sen}_d \text{Fr}} < \gamma$ , то все этапы развития и угасания течения пройдут без «проскальзывания». При  $\frac{\text{Re} \sin \alpha}{\text{Sen}_d \text{Fr}} < \delta$  течения не будет вовсе.

На рисунке 2.2 показано влияние величин углов наклона  $\alpha$  и  $\beta$  на изменение границы зоны течения на всех этапах разрушения и восстановления структуры материала. Соотношение между внутренним динамическим и статическим напряжениями, а также критическим напряжением «проскальзывания» выбрано следующим:  $\tau^* = 2\tau_s$ ,  $\tau_s = 2\tau_d$  в безразмерных переменных  $\gamma = 4$ ,  $\delta = 2$ . Коэффициент внешнего трения фиксирован  $\lambda = 3.9$ .

В момент  $t = 0$  плоскость наклоняется на угол  $\alpha$  к горизонту. Разрушение материала начинается при достижении внутренним напряжением значения  $\delta$ . В момент  $T_0$  внутреннее напряжение на твердой стенке достигает значения  $\gamma$  и

начинается «проскальзывание» вдоль твердой стенки, скорость роста зоны течения при этом замедляется, процесс постепенно стабилизируется и значение границы раздела фаз соответствует формуле (2.54).

В момент  $T_1$  угол наклона уменьшается и начинается переходный процесс, во время которого напряжение на границе течения уменьшается с  $\delta$  до 1. Как только напряжение на границе течения достигнет значения  $\tau = 1$  начнется процесс восстановления структуры материала.

Переходный процесс может проходить как все время с «проскальзыванием», которое завершится уже на этапе восстановления структуры, так и сначала с «проскальзыванием», а затем без него. Таким образом, в зависимости от заданных параметров, в момент  $T_2$  может начаться процесс восстановления структуры материала с «проскальзыванием» или закончится «проскальзывание», но восстановление структуры еще не начнется. В момент времени  $T_3$  начинается процесс восстановления материала без «проскальзывания».

При этом полного восстановления структуры может не произойти, в зависимости от угла наклона плоскости процесс может постепенно стабилизироваться. Толщина восстанавливаемого слоя зависит от величины угла наклона  $\beta$  и соответствует формуле (2.93). При этом угол  $\beta$  должен быть  $\sin \beta < \frac{\sin \alpha}{\delta}$ , если  $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\delta}$  восстановления структуры не произойдет и  $h_1 = h_0$ .

Как видно из рисунка 2.2 при угле наклона  $\beta = \alpha / 2$  восстановления структуры не происходит, напряжение на твердой стенке снижается до значения  $\gamma$ , «проскальзывание» прекращается и режим течения стабилизируется на прежнем уровне.

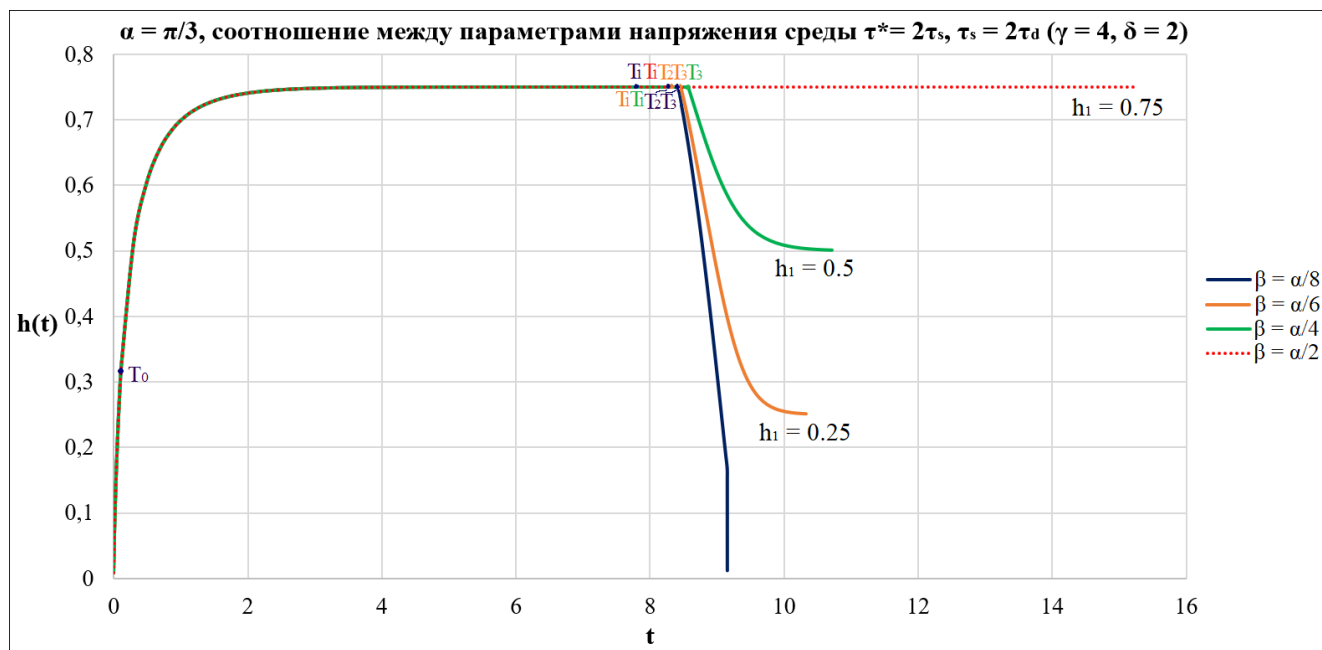


Рисунок 2.2 – Зависимость границы раздела фаз течения от различных значений угла наклона  $\beta$  при начальном угле наклона плоскости  $\alpha = \pi/3$ .

Если после выхода на новый стационарный режим в момент времени  $T_4$  угол наклона плоскости еще раз уменьшить  $\kappa < \beta$ , то процесс восстановления структуры материала продолжится, толщина восстанавливаемого слоя зависит от величины угла наклона  $\kappa$ .

На рисунке 2.3 показана зависимость изменения границы зоны течения при повторном уменьшении угла наклона плоскости, а на рисунке 2.4 показана зависимость толщины восстанавливаемого слоя материала от различных значений угла наклона  $\kappa$ .

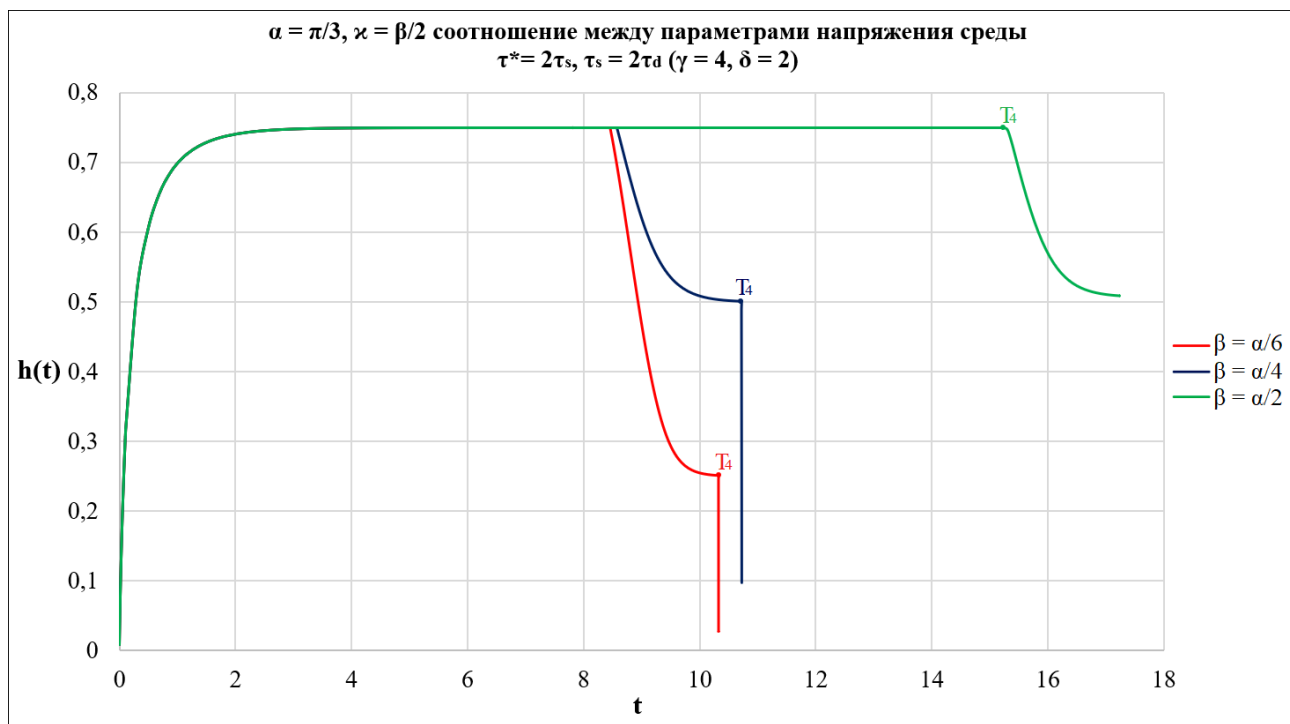


Рисунок 2.3 – Поведение границы зоны течения при повторном уменьшении угла наклона плоскости  $\kappa$  при начальном угле наклона плоскости  $\alpha = \pi/3$

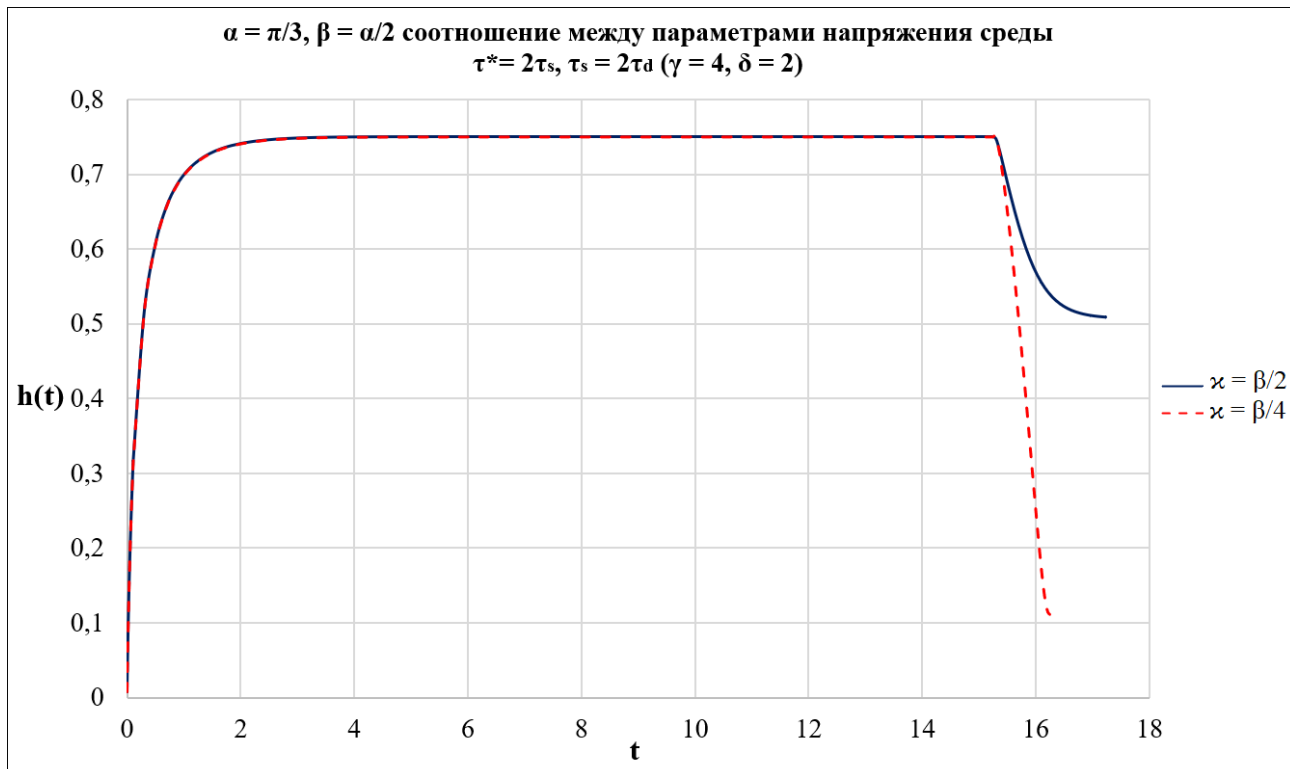


Рисунок 2.4 – Зависимость изменения границы зоны течения от различных значений повторного угла наклона плоскости  $\kappa$

На рисунке 2.5 представлено сравнение поведения границы зоны течения для нескольких начальных углов наклона плоскости. Для углов наклона  $\alpha = \pi/3$ ,  $\alpha = \pi/4$ ,  $\alpha = \pi/6$  «проскальзывание» заканчивается на переходном этапе и восстановление проходит без него, для угла наклона  $\alpha = \pi/2.25$  восстановление начнется с условием «проскальзывания» вдоль твердой стенки, процесс при данных параметрах скоротечный и «проскальзывание» быстро завершается. При угле наклона  $\alpha = \pi/8$  «проскальзывания» не будет совсем и все этапы пройдут с условием прилипания. В этом случае, в момент времени  $T_0$  процесс стабилизируется, угол наклона уменьшается и начинается переходный процесс до момента времени  $T_1$  после которого начинается восстановление структуры материала.

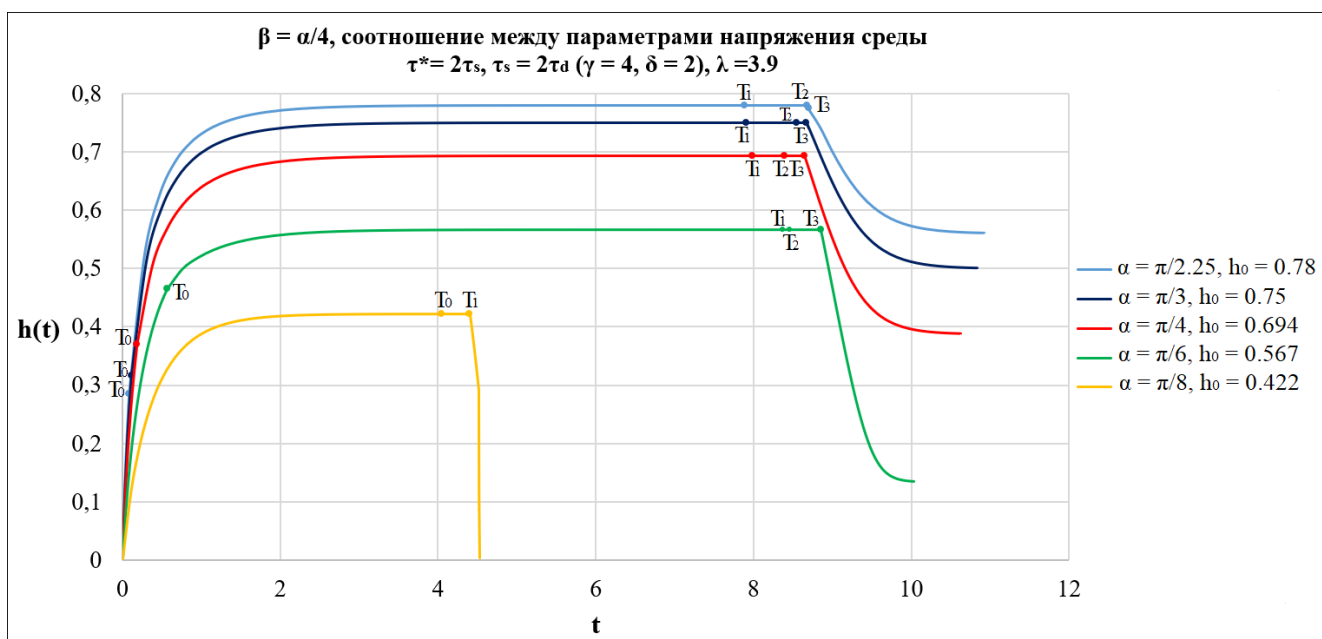


Рисунок 2.5 – Сравнение поведения границы зоны течения для различных начальных углов наклона плоскости  $\alpha$ .

На рисунках 2.6 – 2.8 показано влияние различных соотношений между внутренними напряжениями среды ( $\tau_s = \delta\tau_d$ ,  $\tau^* = \gamma\tau_d$ ) на изменение границы зоны течения на всех этапах разрушения и восстановления структуры материала. Исследование проведено при следующих фиксированных параметрах: начальный

угол наклона плоскости  $\alpha = \pi/3$ , угол наклона для начала восстановления структуры  $\beta = \alpha/4$ . Коэффициент внешнего трения  $\lambda = 3.9$ .

При определенных соотношениях напряжений весь переходный процесс может проходить с «проскальзыванием», которое завершится уже на этапе восстановления структуры. Так же возможно, что течение стабилизируется на новом уровне  $h_1$  или восстановления структуры не произойдет вовсе.

На рисунке 2.6 показано влияние на поведение границы раздела фаз различных соотношений между динамическим и статическим напряжениями сдвига. Остальные соотношения между параметрами фиксированы.

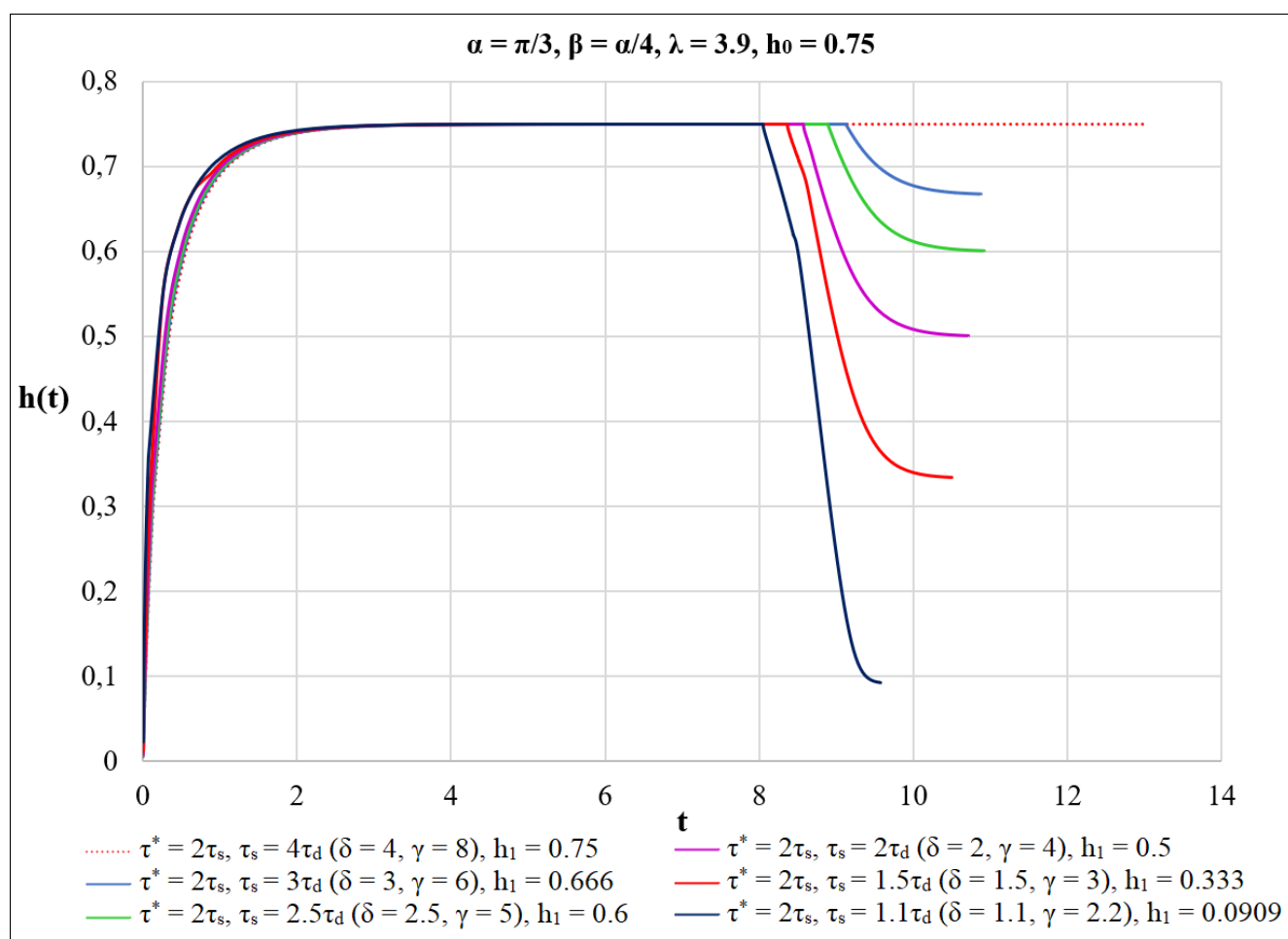


Рисунок 2.6 – Влияние на границу раздела фаз течения различных соотношений между динамическим и статическим напряжениями сдвига.

Из рисунка 2.6 видно, что чем меньше разница между статическим и динамическим напряжениями тем больше толщина восстанавливаемого слоя материала.

На рисунке 2.7 показано влияние на поведение границы раздела фаз различных соотношений между критическим напряжением, при котором начинается «проскальзывание» и статическим напряжениями сдвига. Остальные параметры фиксированы.

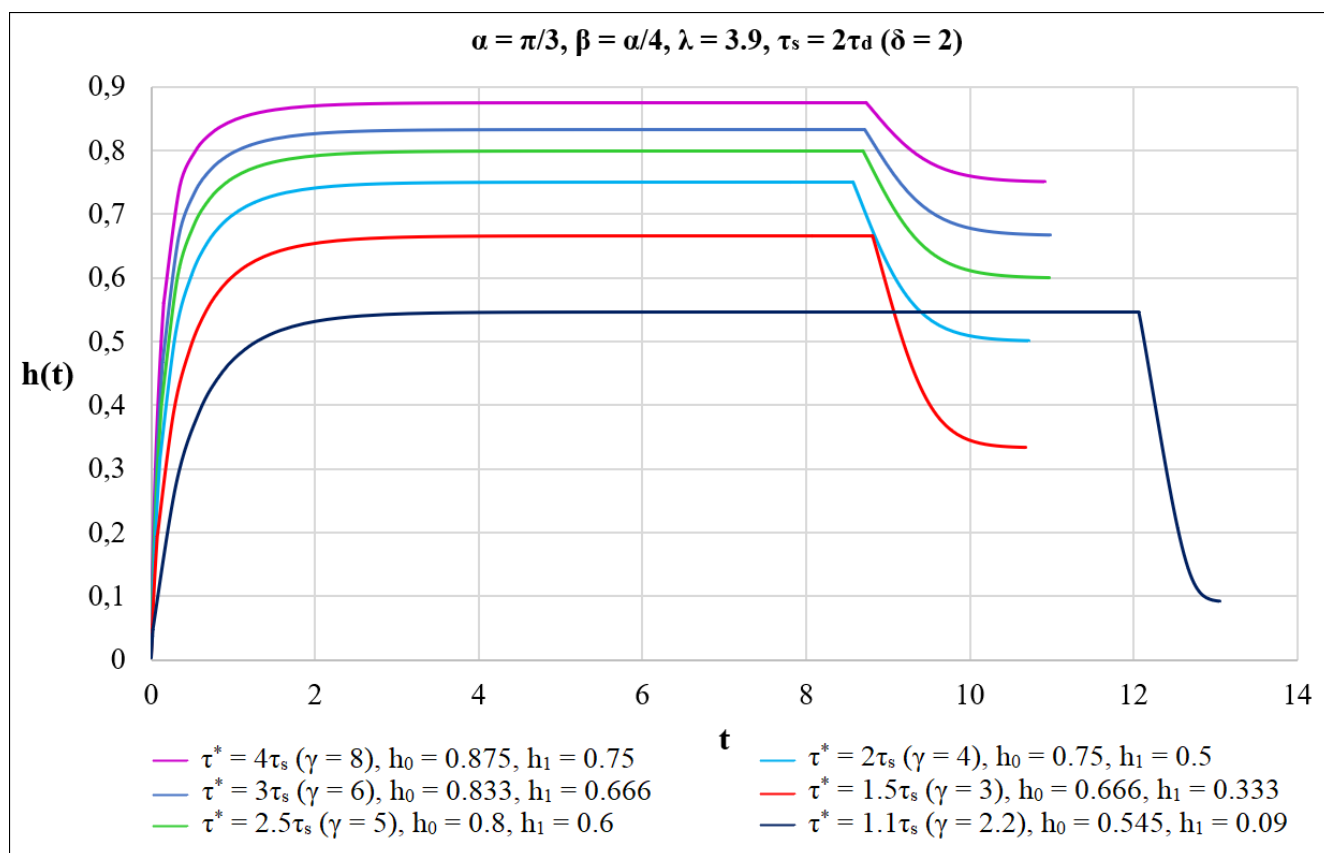


Рисунок 2.7 – Влияние на границу раздела фаз течения различных соотношений между критическим напряжением и статическим напряжениями сдвига.

Из рисунка 2.7 видно, что чем меньше разница между критическим напряжением, при котором начинается «проскальзывание» и статическим напряжениями сдвига тем меньше ширина зоны течения при разрушении структуры материала.



На рисунке 2.8 показано зависимость поведения границы течения от значения критического напряжения, которое должно быть  $\left(\frac{Re \sin \alpha}{Sen_d Fr} > \gamma\right)$ . Остальные параметры фиксированы, в том числе  $\tau_s = \delta \tau_d (\delta=2)$ ,  $\tau^* = \gamma \tau_d (\gamma=4)$ .

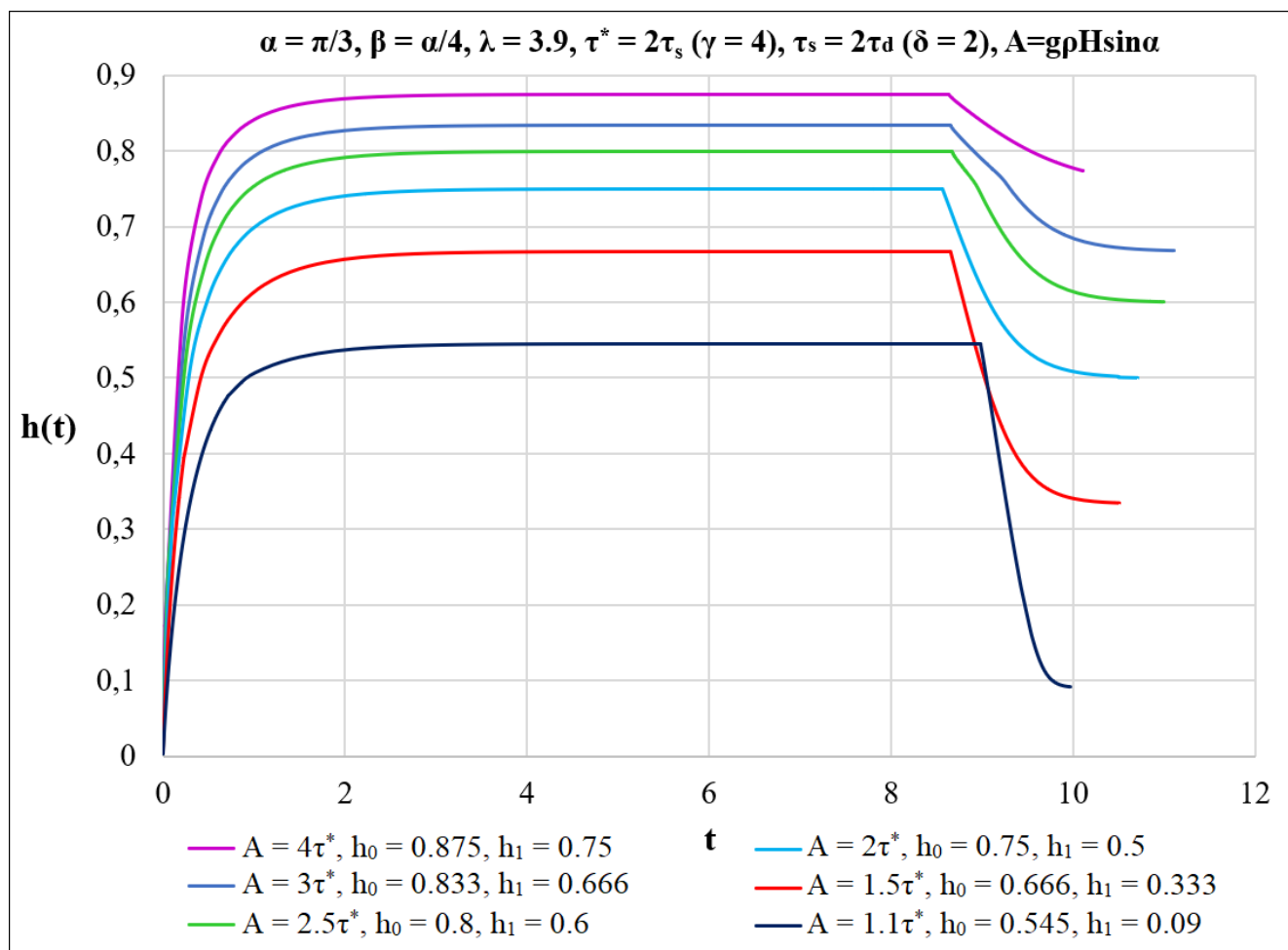


Рисунок 2.8 – Зависимость поведения границы течения от значения критического напряжения.

Из рисунка 2.8 видно, что, как и в предыдущем примере, ширина зоны течения при разрушении структуры материала меньше в том случае, если меньше разница между критическим напряжением, при котором начинается «проскальзывание» и силой тяжести.

На рисунках 2.9, 2.10 показано влияние различных значений коэффициента внешнего трения  $\lambda$  на изменение границы зоны течения на всех этапах разрушения и восстановления структуры материала.

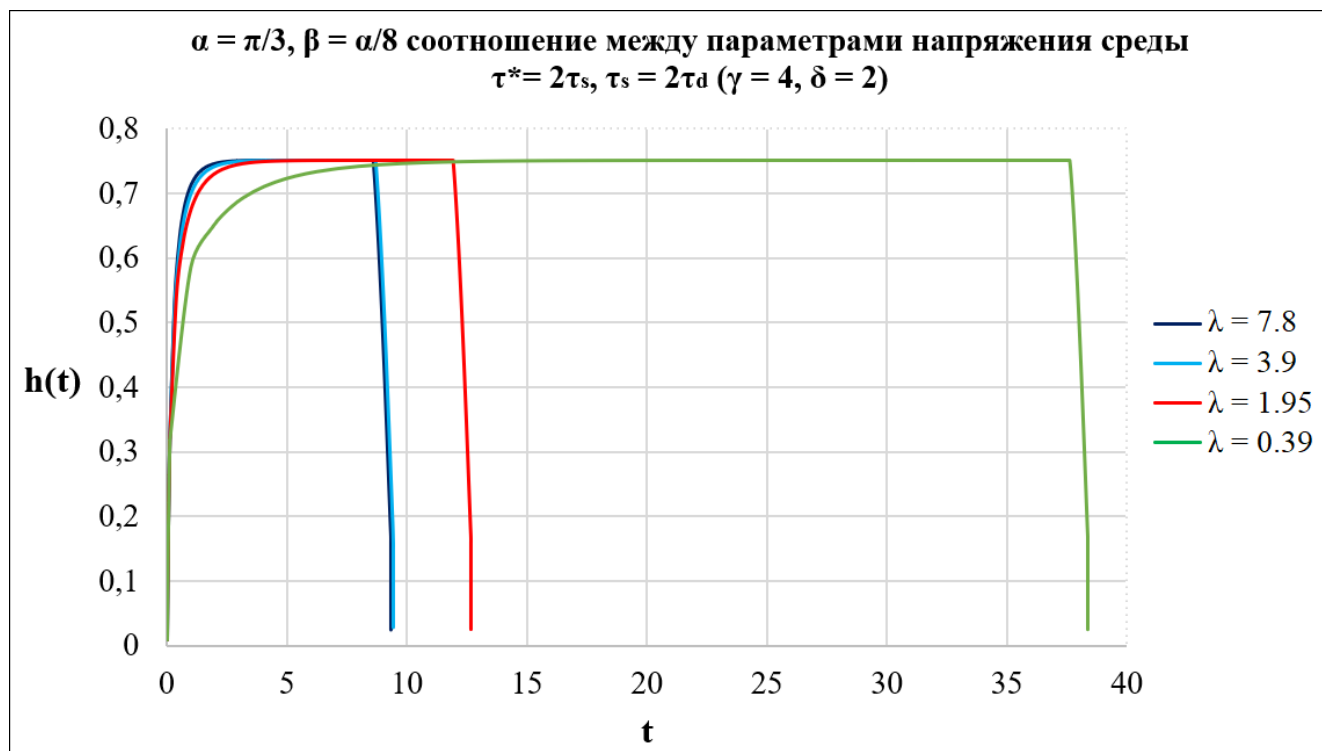


Рисунок 2.9 – Поведение границы течения при различных значениях коэффициента внешнего трения  $\lambda$  для угла наклона  $\beta = \alpha/8$

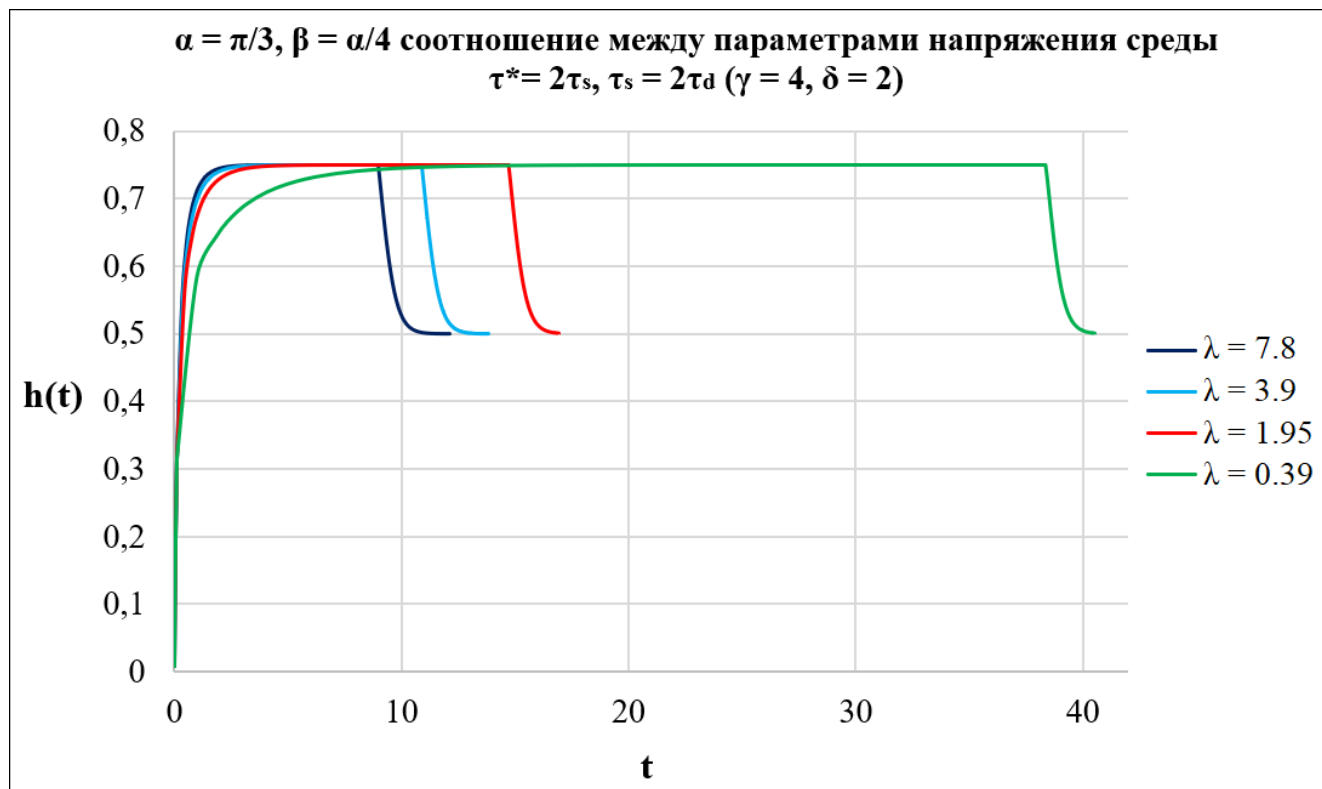


Рисунок 2.10 – Поведение границы течения при различных значениях коэффициента внешнего трения  $\lambda$  для угла наклона  $\beta = \alpha/4$

На рисунках 2.11–2.12 показана динамика изменения напряжения на границах течения во время разрушения структуры материала и переходном этапе в случае, когда «проскальзывание» заканчивается на нем.

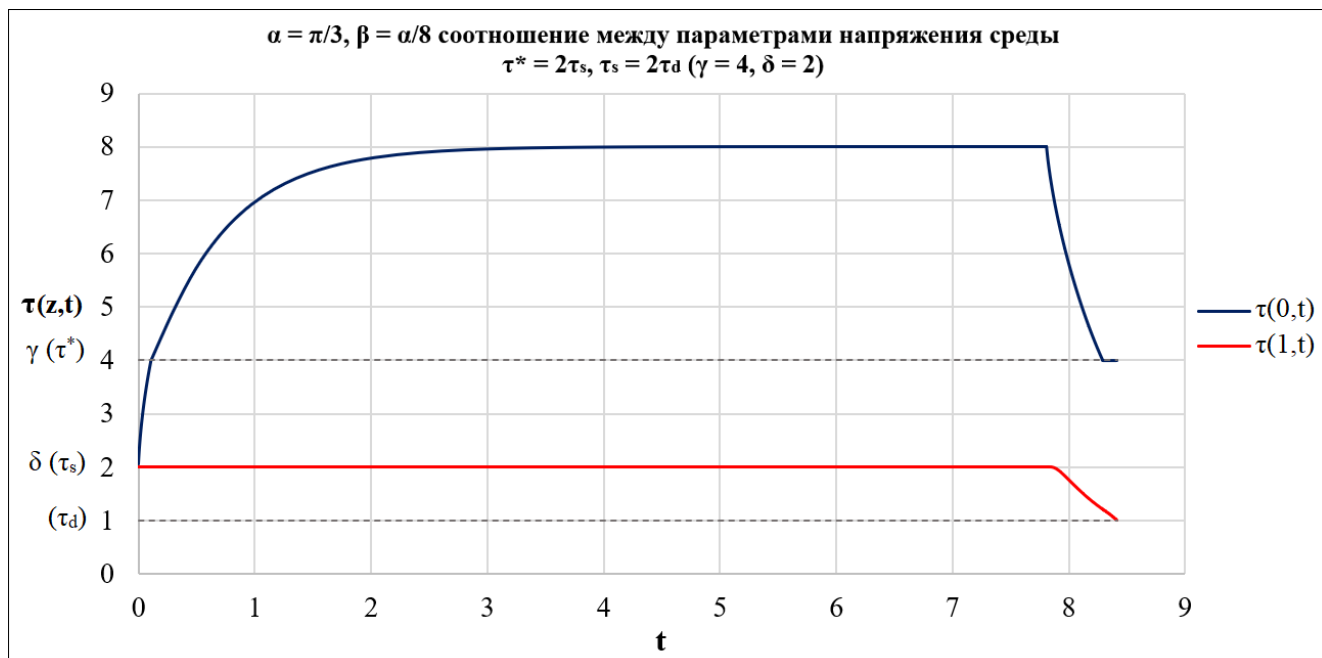


Рисунок 2.11 – Изменение напряжения на границах течения на этапе разрушения и переходном этапе.

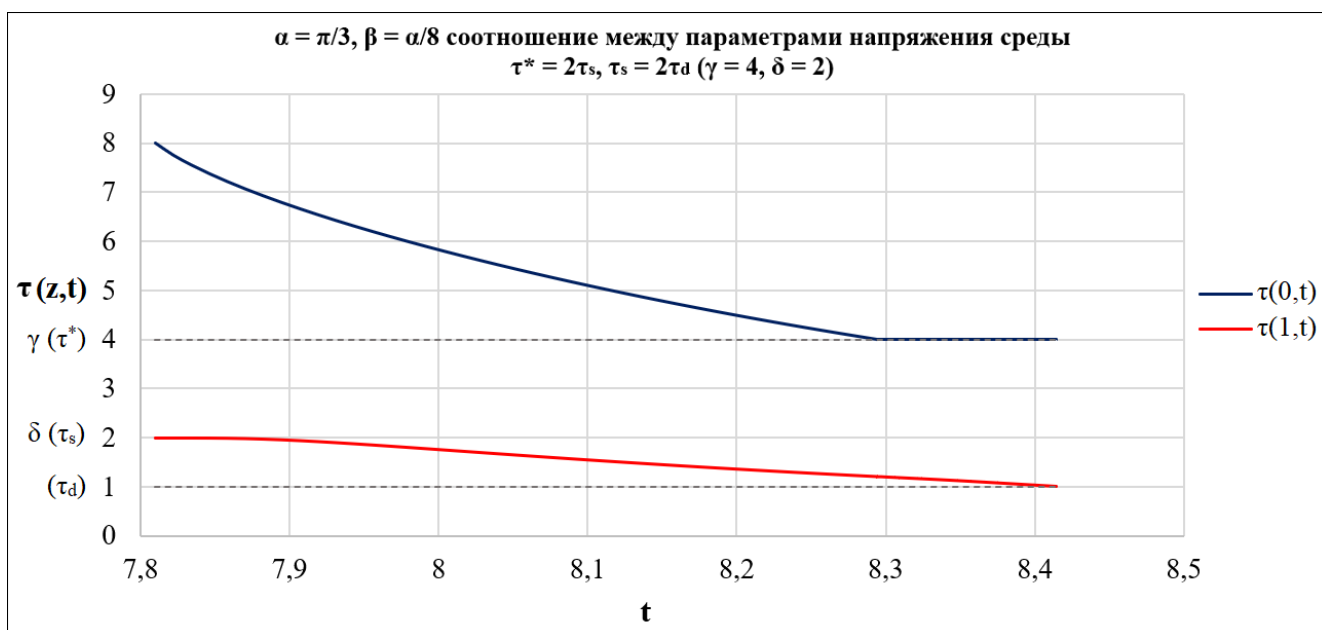


Рисунок 2.12 – Изменение напряжения на границах течения на переходном этапе.

На рисунке 2.13 показано изменение напряжения на границах течения во время разрушения структуры материала и переходном этапе в случае, когда «проскальзывание» не заканчивается на нем.

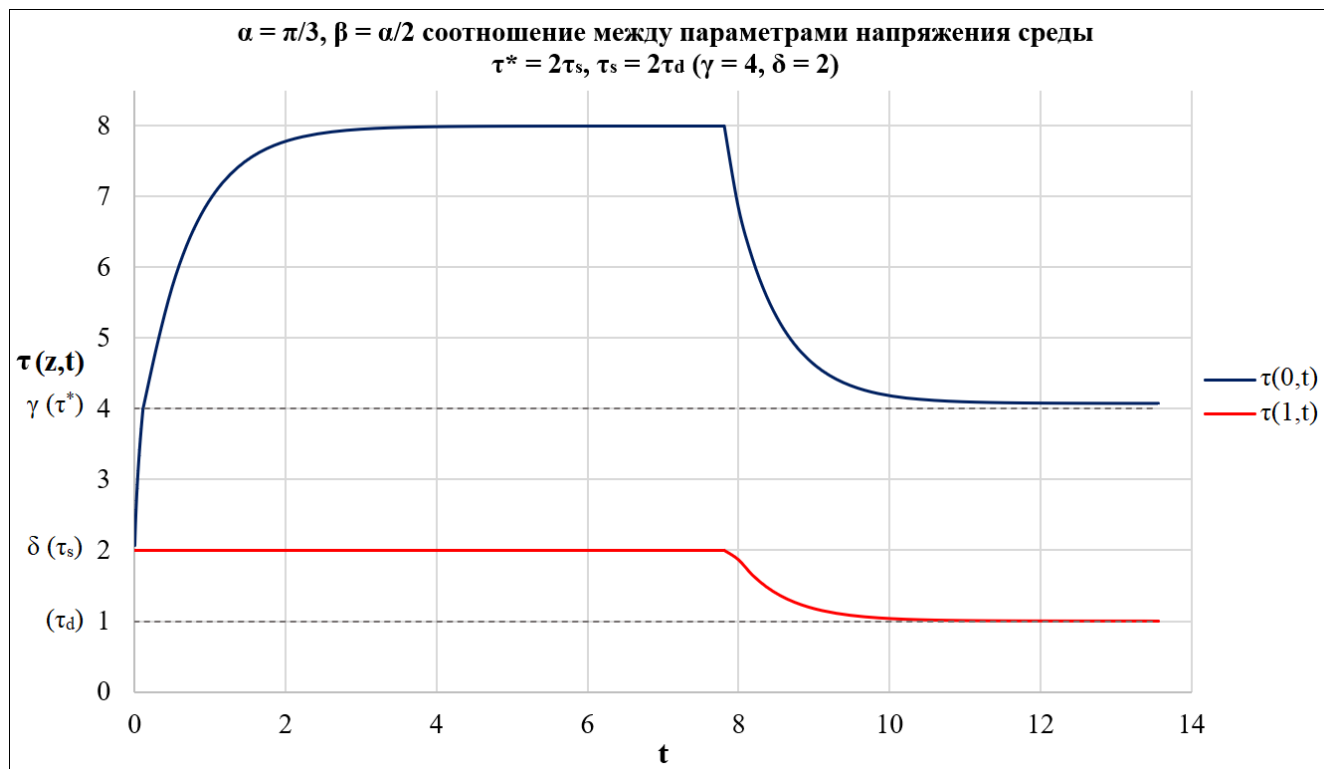


Рисунок 2.13 – Изменение напряжения на границах течения на этапе разрушения и переходном этапе с «проскальзыванием».

На рисунках 2.14(а, б) – 2.16 показаны профили скорости течения в случае, когда «проскальзывание» вдоль твердой стенке заканчивается до начала процесса восстановления. В момент  $T_0$  происходит отрыв от твердой стенки, скорость в точке  $z = 0$  начинает расти, в момент  $T_1$  угол наклона уменьшается и скорость начинает падать, в момент  $T_2$  происходит прилипание к твердой стенке, скорость в точке  $z = 0$  равна нулю. При этом структура материала может восстанавливаться практически полностью (рис. 2.14(а), 2.14(б)) или восстанавливаться частично, граница течения при этом стабилизируется на уровне (2.93) (рис. 2.15). На рисунке 2.16 показан профиль скорости когда после выхода на новый установившийся

режим течения в момент времени  $T_4$  угол наклона плоскости снова уменьшается  $\kappa < \beta < \alpha$  и структура материала продолжает постепенно восстанавливаться.

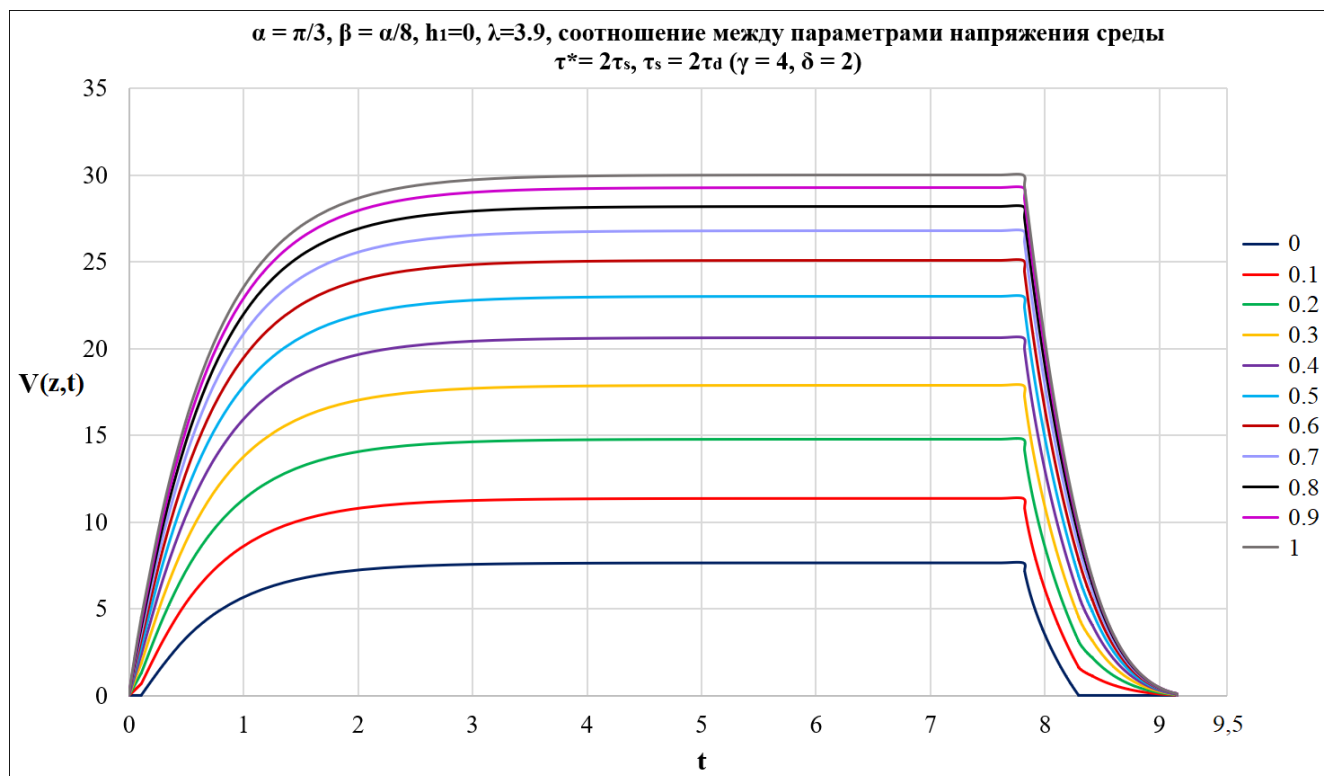


Рисунок 2.14(а) – Профиль скорости при полном восстановлении структуры материала

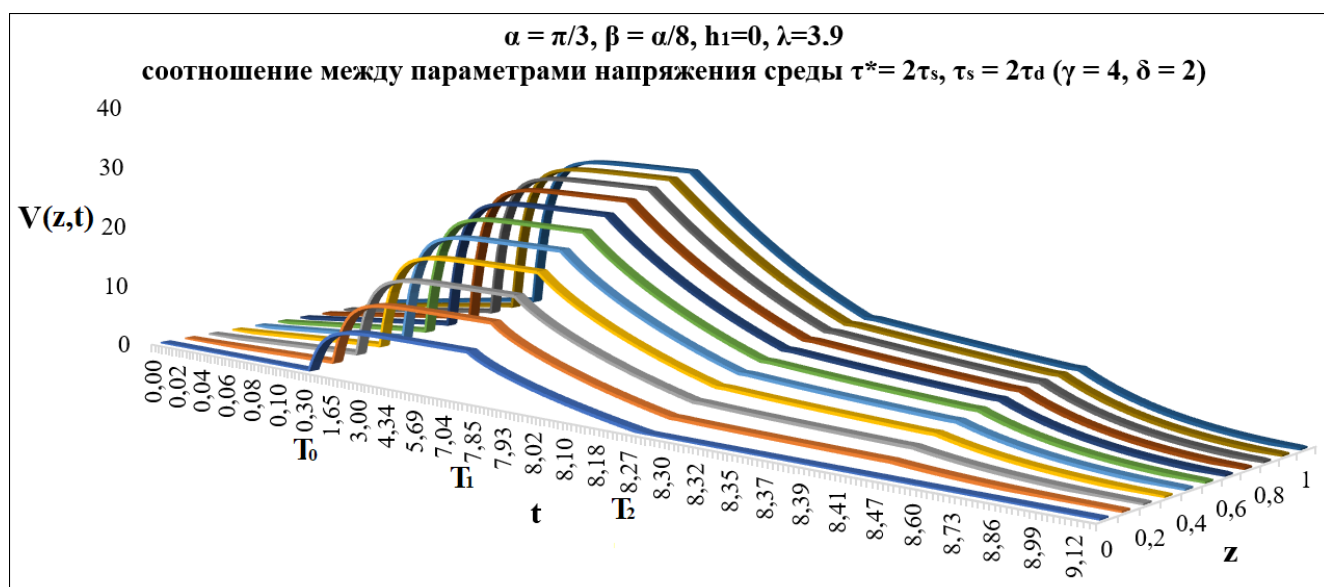


Рисунок 2.14 (б) – Профиль скорости при полном восстановлении структуры материала

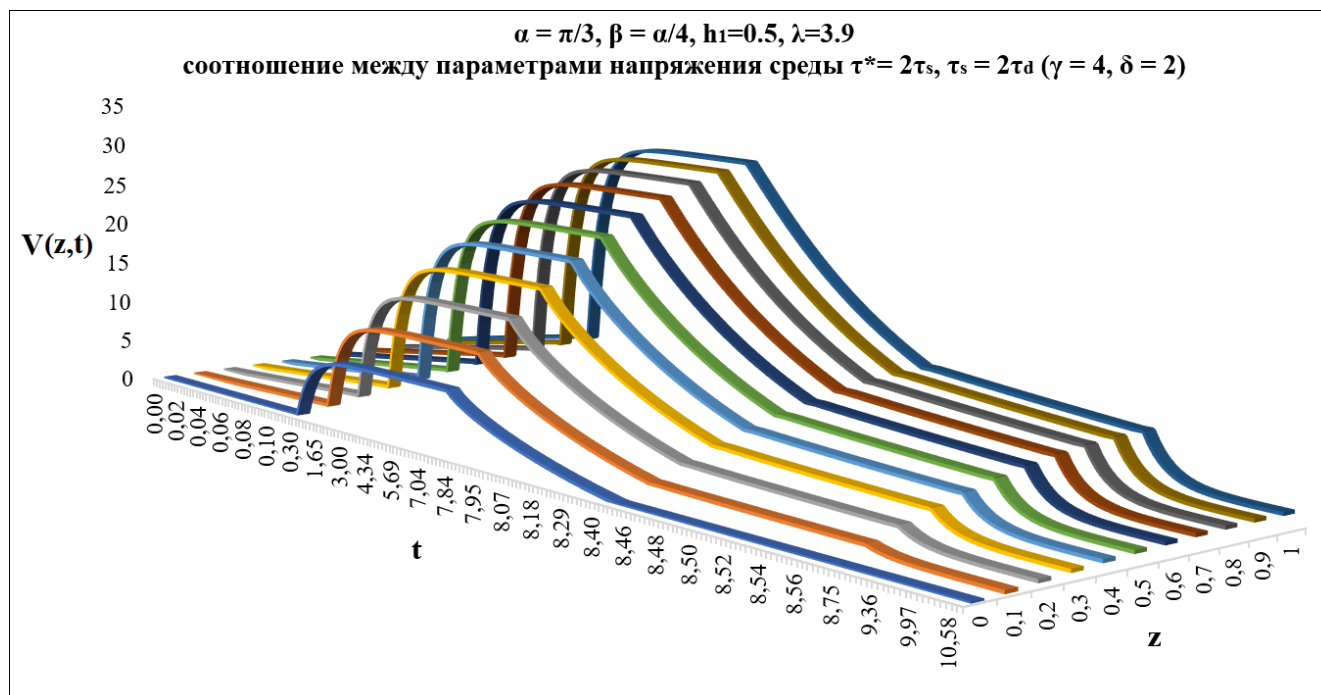


Рисунок 2.15 – Профиль скорости при выходе на новый установившийся режим течения  $h_1 = 0.5$

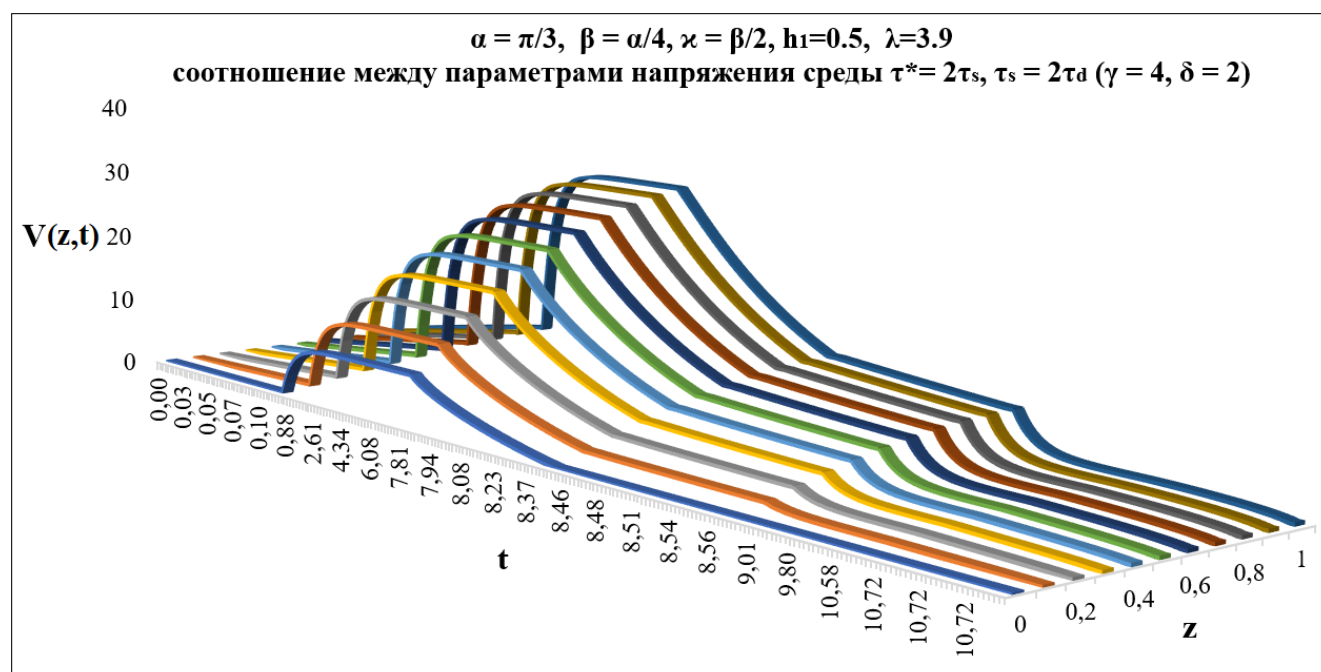


Рисунок 2.16 – Профиль скорости при повторном наклоне плоскости на угол  $\kappa < \beta$

На рисунке 2.17 показан профиль скорости течения в случае, когда весь переходный этап проходит с «проскальзыванием» вдоль твердой стенки и заканчивается уже на этапе восстановления структуры материала, однако как

такового восстановления не происходит до тех пор, пока снова не уменьшить угол наклона плоскости (рис. 2.18, 2.19)

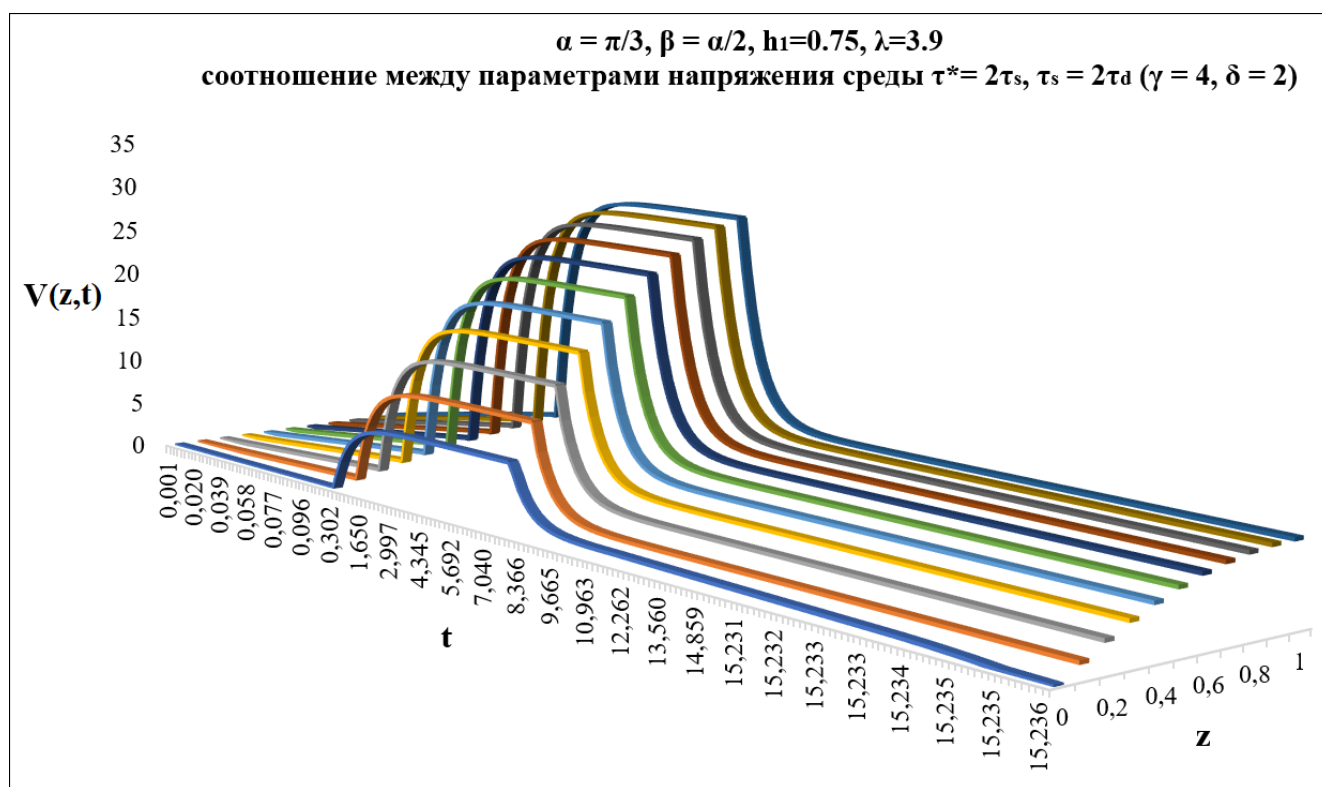


Рисунок 2.17 – Профиль скорости с «проскальзыванием» на этапе восстановления и  $h_1 = 0.75$

На рисунках 2.18, 2.19 показаны профили скорости для различных значений углов наклона  $\alpha$ , когда угол уменьшается повторно для продолжения восстановления структуры материала.

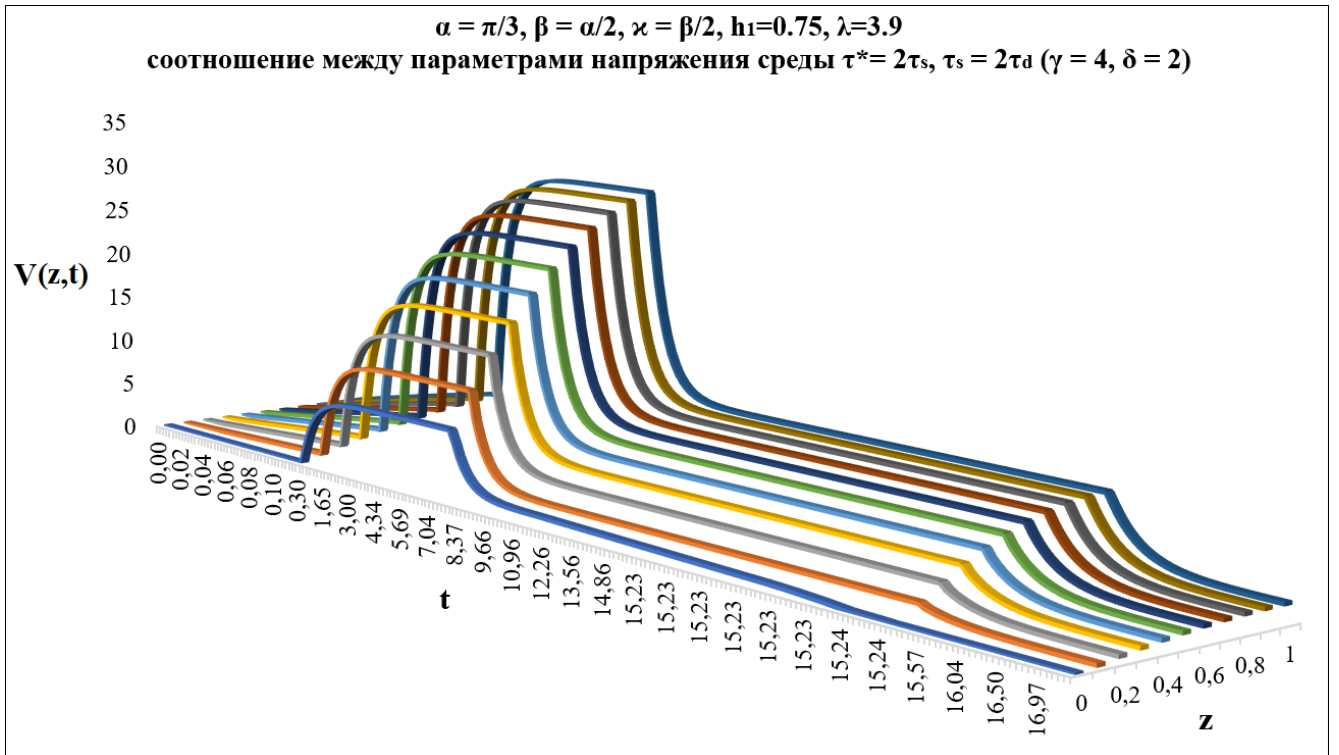


Рисунок 2.18 – Профиль скорости при повторном наклоне плоскости на угол  $\kappa = \beta/2$ .

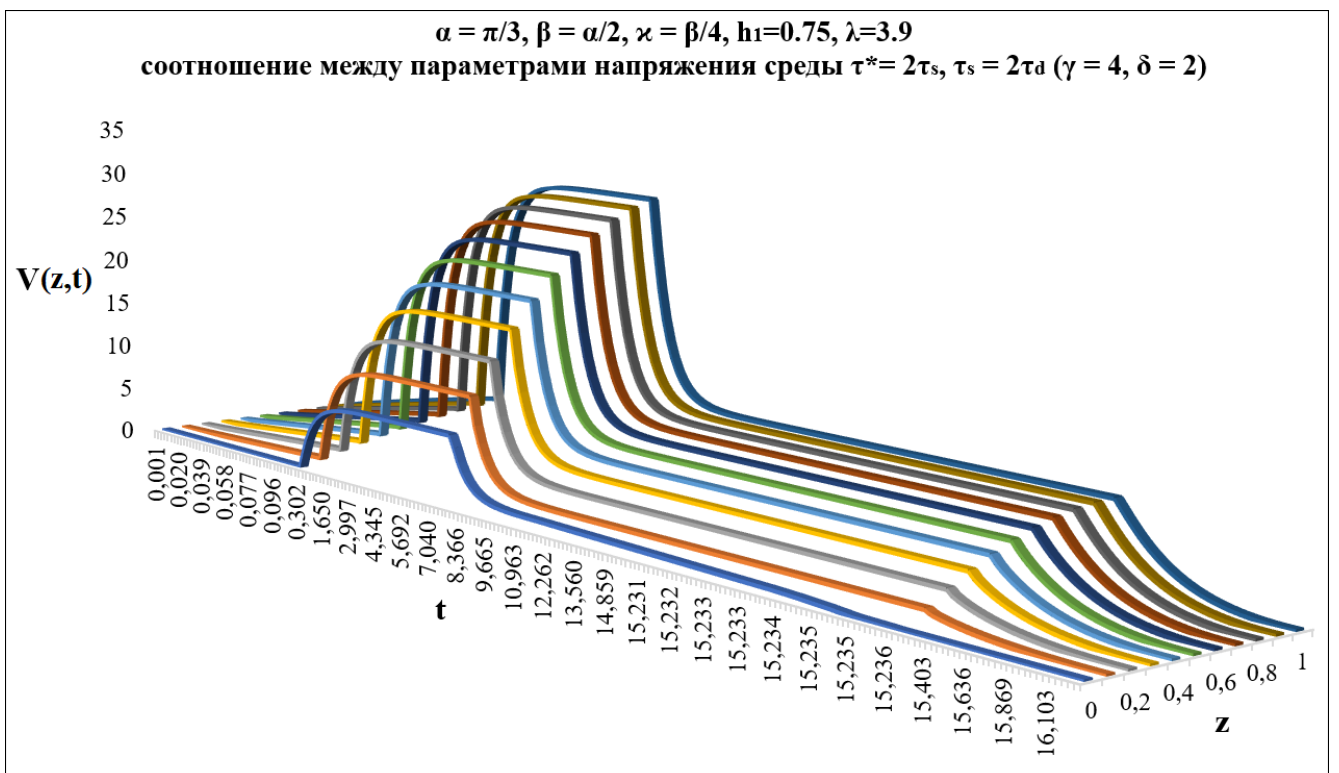


Рисунок 2.19 – Профиль скорости при повторном наклоне плоскости на угол  $\kappa = \beta/4$ .



**ГЛАВА 3 МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ  
«ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО» ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ  
ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА  
«ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ»**

Моделируются этапы развития и угасания течения «запаздывающей» вязкопластической среды в неподвижной трубе круглого сечения радиуса  $R$  под действием перепада давления  $\Delta P$  с учетом эффекта «проскальзывания» вдоль твердой стенки. Задача, как и во второй главе, ставится в рамках пятипараметрической модели Слибара – Паслая (1.6), которая в цилиндрических координатах примет вид:

<i>Нагрузка</i>	<i>Разгрузка</i>
$-(\tau - \tau_d) = \eta \left  \frac{\partial V}{\partial r} \right  \text{sign} \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right) \quad \text{при } \tau > \tau_s$	$\tau - \tau_d = \eta \left  \frac{\partial V}{\partial r} \right  \text{sign} \frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{при } \tau > \tau_d$
$0 = \frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{при } \tau \leq \tau_s$	$0 = \frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{при } \tau \leq \tau_d$

(3.1)

Возможное «проскальзывание» материала вдоль твердой стенки учитывается с помощью модели, аналогичной гипотезе Н.П. Петрова (1.7), которая в цилиндрических координатах принимает вид

$$V(R, t) = (\tau(R, t) - \tau^*) / \lambda \quad (3.2)$$

Соотношения между параметрами среды определяют характер течения. В начальный момент перепад давления выбирается таким образом, чтобы с течением времени проявился эффект «проскальзывания».

$$\frac{R\Delta P_1}{2l} > \tau^* \quad (3.3)$$

Если соотношение между параметрами будет  $\tau_s < \frac{R\Delta P_1}{2l} < \tau^*$ , то все этапы пройдут без «проскальзывания», при  $\frac{R\Delta P_1}{2l} < \tau_s$  разрушения структуры не произойдет.

Граница зоны течения на этапах развития и угасания течения заранее

неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи. Решение задачи строится с помощью проекционного метода Галеркина с использованием в качестве базисных функций ортогональных полиномов Чебышёва первого рода.

### 3.1 Этап развития течения без «проскальзывания»

Рассмотрим этап развития течения из состояния покоя вязкопластической жидкости в неподвижной трубе круглого сечения радиуса  $R$  под действием заданного в момент  $t=0$  перепада давления  $\Delta P_1$  на единицу длины трубы  $l$ . Ось  $OZ$  направлена вдоль трубы (рисунок 3.1) Область течения развивается постепенно при достижении касательным напряжением статического предела текучести и граница этой области заранее неизвестна  $r_0(t) < r < R$ , где  $r_0(t)$  радиус ядра течения.

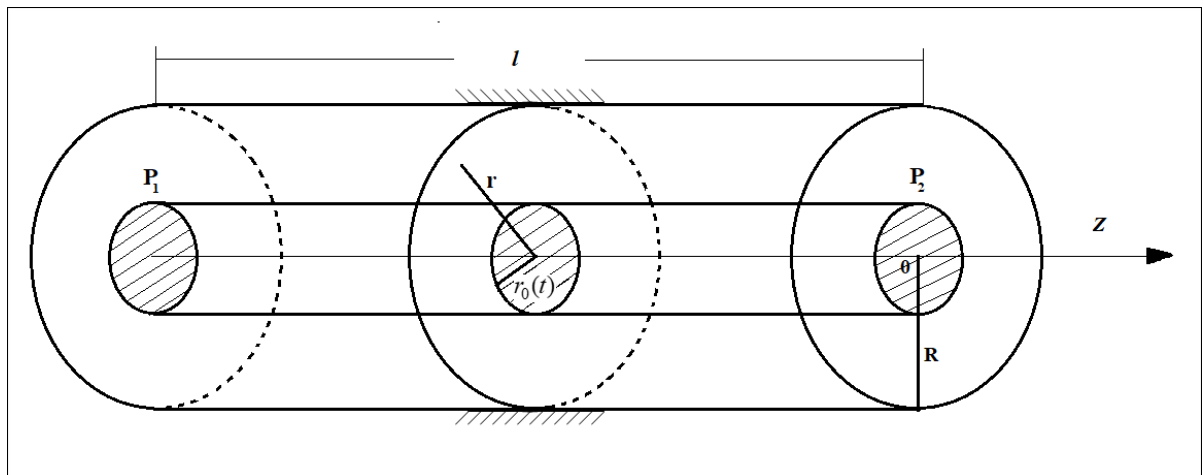


Рисунок 3.1 – Схема течения вязкопластической жидкости в трубе круглого сечения

С учетом осевой симметрии течение описывается одним уравнением относительно осевой составляющей  $V_z(r,t)$  и краевая задача на этапе развития течения имеет вид:

$$\rho \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = \eta \left( \frac{\partial^2 V_z(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} \right) + \frac{\Delta P_1}{l} - \frac{\tau_d}{r}, \quad r_0(t) < r < R, \quad 0 < t \leq T_1 \quad (3.4)$$

$$V_z(r,0) = 0, \quad r_0(0) = R \quad (3.5)$$

$$V_z(R, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq T_0 \text{ без проскальзывания} \\ \frac{1}{\lambda}(\tau(R, t) - \tau^*), & T_0 < t \leq T_1 \text{ с проскальзыванием} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$V_z(R, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq T_0 \text{ без проскальзывания} \\ \frac{1}{\lambda}(\tau(R, t) - \tau^*), & T_0 < t \leq T_1 \text{ с проскальзыванием} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\left( \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)_{r \rightarrow r_0(t)+0} = -\frac{\tau_s - \tau_d}{\eta} \quad (3.8)$$

$$\left( \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)_{r \rightarrow R-0} = -\frac{\tau(R, t) - \tau_d}{\eta} \quad (3.9)$$

Так как граница ядра течения  $r = r_0(t)$  неизвестна, то необходимо задать еще одно условие для её определения. Это условие легко получить, применив теорему импульсов к массе ядра  $M = l\rho\pi r_0^2(t)$ , имеющей скорость  $U_0(t)$ .

$$V_z(r_0, t) = U(t), \text{ где } \frac{dU(t)}{dt} = \frac{\Delta P_1}{l\rho} - \frac{2\tau_s}{\rho r_0(t)}, \quad U(0) = 0 \quad (3.10)$$

Далее рассматриваем задачу (3.4) – (3.10) в безразмерных переменных и параметрах, переход к которым осуществляется по формулам:

$$r = R\bar{r}, \quad V_z(r, t) = U_0 \bar{V}_z(\bar{r}, \bar{t}), \quad t = \frac{R^2}{\nu} \bar{t}, \quad U = U_0 \bar{U}, \quad \lambda = \frac{\eta}{R} \bar{\lambda}, \quad \frac{\Delta P_1}{l} = \frac{\tau_d}{R} \Delta \bar{P}_1, \quad (3.11)$$

$$\tau_s = \delta \tau_d, \quad \tau^* = \gamma \tau_d, \quad \text{Sen}_d = \frac{\tau_d R}{U_0 \eta}, \quad \text{Re} = \frac{U_0 R}{\nu}, \quad \text{Fr} = \frac{U_0^2}{gR}$$

$$\frac{\partial \bar{V}_z(\bar{r}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{V}_z(\bar{r}, \bar{t})}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{V}_z(\bar{r}, \bar{t})}{\partial \bar{r}} + \text{Sen}_d \Delta \bar{P}_1 - \frac{\text{Sen}_d}{\bar{r}}, \quad \bar{r}_0(\bar{t}) < \bar{r} < 1, \quad 0 < \bar{t} \leq \bar{T}_1 \quad (3.12)$$

$$\bar{V}_z(\bar{r}, 0) = 0, \quad \bar{r}_0(0) = 1 \quad (3.13)$$

$$\bar{V}_z(1, \bar{t}) = \begin{cases} 0, & 0 < \bar{t} \leq \bar{T}_0 \\ \text{Sen}_d(\tau(1, \bar{t}) - \gamma) / \bar{\lambda}, & \bar{T}_0 < \bar{t} \leq \bar{T}_1 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\bar{V}_z(1, \bar{t}) = \begin{cases} 0, & 0 < \bar{t} \leq \bar{T}_0 \\ \text{Sen}_d(\tau(1, \bar{t}) - \gamma) / \bar{\lambda}, & \bar{T}_0 < \bar{t} \leq \bar{T}_1 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0(\bar{t})+0} = -\text{Sen}_d(\delta - 1) \quad (3.16)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{r} \rightarrow 1-0} = -\text{Sen}_d(\tau(1, \bar{t}) - 1) \quad (3.17)$$

$$\frac{d\bar{U}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \text{Sen}_d \left( \Delta P_1 - \frac{2\delta}{\bar{r}_0(\bar{t})} \right) \quad (3.18)$$

В дальнейшем символ  $(\bar{\quad})$  над безразмерными величинами в формулах опускаем.

Как и в случае плоскопараллельной задачи, описанной во второй главе, для численного интегрирования задачи (3.12) – (3.18) необходимо отобразить область с подвижной границей на область с постоянными границами.

Вводя новые переменные по формулам:

$$r = 1 - (1 - r_0(t))x, \quad V_z(r, t) = V_z(x, t) \quad (3.19)$$

получим краевую задачу в области с постоянными границами  $0 < x < 1$ ,  $0 < t \leq T_1$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z(x, t)}{\partial t} = & \frac{1}{(1 - r_0(t))^2} \frac{\partial^2 V_z(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{1 - r_0(t)} \left( x r_0'(t) + \frac{1}{1 - (1 - r_0(t))x} \right) \frac{\partial V_z(x, t)}{\partial x} + \\ & + \text{Sen}_d \left( \Delta P_1 - \frac{1}{1 - (1 - r_0(t))x} \right), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$V_z(x, 0) = 0, \quad r_0(0) = 1 \quad (3.21)$$

$$V_z(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 < \bar{t} \leq \bar{T}_0 \\ \text{Sen}_d(\tau(0, t) - \gamma) / \lambda, & \bar{T}_0 < \bar{t} \leq \bar{T}_1 \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\left( \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{x=1} = (1 - r_0(t))(\delta - 1) \text{Sen}_d \quad (3.24)$$

$$\left( \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{x=0} = (1 - r_0(t))(\tau(0, t) - 1) \text{Sen}_d \quad (3.25)$$

Из (3.20), (3.24) и (3.18) при  $x=1$  следует выражение для  $r_0'(t)$ :

$$r_0'(t) = \frac{1}{\text{Sen}_d(\delta - 1)} \left( \frac{1}{(1 - r_0(t))^2} \frac{\partial^2 V_z(1, t)}{\partial x^2} + \frac{\delta \text{Sen}_d}{r_0(t)} \right) \quad (3.26)$$

### Построение решения

Начально-краевая задача (3.20) – (3.26) принадлежит к классу не вполне

корректных задач, так как в начальный момент область течения отсутствует. В этом случае, как и для плоскопараллельной задачи, избавиться от особенностей решения при  $t \rightarrow +0$  возможно приведя границу течения и поле скоростей, в начальный момент, к представлению в виде асимптотических рядов:

$$r_0(t) \sim 1 - \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^{1+k/2}, \quad t \rightarrow 0 \quad (3.27)$$

$$V_z(x, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) t^{1+k/2}, \quad t \rightarrow 0 \quad (3.28)$$

Если ряды (3.27), (3.28) оборвать, то при  $t \rightarrow +0$  они обеспечивают аппроксимацию с ошибкой порядка первого отброшенного слагаемого. Начальные условия (3.21) выполнены автоматически.

$$r_0'(t) \sim - \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}\right) A_k t^{k/2} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial V_z(x, t)}{\partial t} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}\right) f_k(x) t^{k/2} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial V_x(x, t)}{\partial x} \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x) t^{1+k/2} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial^2 V_x(x, t)}{\partial x^2} \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k''(x) t^{1+k/2} \quad (3.32)$$

Из (3.22) и (3.28)

$$f_k(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

Из (3.24), (3.27) и (3.31)

$$f_k'(1) = \text{Sen}_d(\delta - 1) A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Подстановка асимптотических рядов (3.27), (3.29) – (3.32) в уравнения (3.20), (3.26) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях переменной  $t$  приводит к рекуррентной системе уравнений относительно  $A_k$  и  $f_k(z)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  Непосредственная проверка показывает, что коэффициенты при нецелых степенях переменной  $t$  тождественно равны нулю, тогда

$$\begin{aligned}
& -A_0 - 2A_2t - 3A_4t^2 - 4A_6t^3 \dots = \\
& = \frac{1}{\text{Sen}_d(\delta - 1)} \left\{ \text{Sen}_d \delta (1 + A_0t + (A_2 + A_0^2)t^2 + (A_4 + 2A_0A_2 + A_0^3)t^3 + \dots) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{A_0^2} \left[ 1 - 2\frac{A_2}{A_0}t + \left( 3\left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2 - 2\frac{A_4}{A_0} \right) t^2 + \frac{A_2A_4}{A_0^2} t^3 + \dots \right] \right. \\
& \left. \cdot (f_2''(1) + f_4''(1)t + f_6''(1)t^2 + f_8''(1)t^3 + \dots) \right\} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_0(x) + 2f_2(x)t + 3f_4(x)t^2 + 4f_6(x)t^3 + \dots = \\
& \frac{1}{A_0^2} \left[ 1 - 2\frac{A_2}{A_0}t + \left( 3\left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2 - 2\frac{A_4}{A_0} \right) t^2 + 6\frac{A_2A_4}{A_0^2} t^3 + \dots \right] \cdot \\
& \cdot (f_2''(x) + f_4''(x)t + f_6''(x)t^2 + f_8''(x)t^3 + \dots) + \\
& + \left[ 1 + \frac{A_2}{A_0}t + \left( 2\frac{A_4}{A_0} - \left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2 \right) t^2 + \left( 2\left(\frac{A_2}{A_0}\right)^3 - \frac{3A_2A_4}{A_0^2} - \frac{A_2}{A_0} \right) t^3 + \dots \right] \cdot \\
& \cdot x (f_0'(x) + f_2'(x)t + f_4'(x)t^2 + f_6'(x)t^3 + \dots) - \\
& - \frac{1}{A_0} \left[ 1 + \left( A_0x - \frac{A_2}{A_0} \right) t + \left( A_0^2x^2 + \frac{A_2^2}{A_0^2} - \frac{A_4}{A_0} \right) t^2 + \right. \\
& \left. + \left( A_0A_2(2 - x^2) - \frac{A_2}{A_0} + \frac{2A_2A_4}{A_0^2} \right) t^3 + \dots \right] \cdot \\
& \cdot (f_0'(x) + f_2'(x)t + f_4'(x)t^2 + f_6'(x)t^3 + \dots) + \text{Sen}_d \Delta P_1 - \\
& - \text{Sen}_d (1 + A_0xt + (A_2x + A_0^2x^2)t^2 + (A_4x + 2A_0A_2)t^3 + \dots) \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Учитывая обнуление коэффициентов асимптотических рядов (3.27) и (3.28) при нецелых степенях  $t$  можно обеспечить асимптотическое представление  $r_0(t)$  и  $V_z(x, t)$  при  $t \rightarrow +0$  с погрешностью порядка  $\underline{\underline{O}}(t^3)$ .

$$r_0(t) = 1 - A_0t - A_2t^2 \tag{3.37}$$

$$V_z(x, t) = \text{Sen}_d \left\{ t(\delta - 1)A_0x + t^2 \left[ ((\delta - 1)A_2 + A_0^2(\Delta P_1 - \delta))x - A_0^2(\Delta P_1 - \delta) \frac{x^2}{2} \right] \right\} \tag{3.38}$$

где  $A_0$  и  $A_2$ ,  $f_0$  и  $f_2$  находятся из (3.35) и (3.36).

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \text{Sen}_d(\delta - 1)A_0x, \\ f_2(x) &= \text{Sen}_d \left[ \left( (\delta - 1)A_2 + A_0^2(\Delta P_1 - \delta) \right) x - A_0^2(\Delta P_1 - \delta) \frac{x^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$A_0 = \frac{\Delta P_1 - 2\delta}{\delta - 1}, \quad A_2 = \frac{1}{\delta - 1} \left( \frac{A_0^2(\delta - \Delta P_1)}{2} - \delta A_0 \right) \quad (3.40)$$

Дискретизация начально-краевой задачи (3.20) – (3.26) по независимым пространственным переменным выполняется на основе проекционного метода Галёркина с базисными функциями в форме ортогональных полиномов Чебышева 1-го рода. Уравнения с требуемой степенью точности заменяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности, которая далее интегрируется численно. При этом начальные условия ставятся относительно величины  $r_0(t)$  и соответствующих Фурье-коэффициентов.

Представим функцию  $V_z(x, t)$  в виде ряда по ортогональным полиномам Чебышёва:

$$V_z(x, t) \approx \sum_{n=0}^{N+2} V_{z_n}(t) T_n(2x - 1), \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (3.41)$$

Представим (3.20) в виде:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}[V] &= \frac{\partial V_z(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{(1 - r_0(t))^2} \frac{\partial^2 V_z(x, t)}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{1}{1 - r_0(t)} \left( x r_0'(t) + \frac{1}{1 - (1 - r_0(t))x} \right) \frac{\partial V_z(x, t)}{\partial x} - \text{Sen}_d \left( \Delta P_1 - \frac{1}{1 - (1 - r_0(t))x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

из (3.22) и (3.41) следует

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{z_n}(t) = 0, \quad 0 < t \leq T_0 \quad (3.43)$$

из (3.24) и (3.41)

$$\sum_{n=1}^{N+2} n^2 V_{z_n}(t) = \frac{(1 - r_0(t))(\delta - 1) \text{Sen}_d}{2} \quad (3.44)$$

из (3.26) и (3.41)

$$r_0'(t) = \frac{1}{\text{Sen}_d(\delta - 1)} \left( \frac{4}{3(1 - r_0(t))^2} \sum_{n=0}^{N+2} n^2(n^2 - 1)V_{z_n}(t) + \frac{\delta \text{Sen}_d}{r_0(t)} \right) \quad (3.45)$$

Для того, чтобы приближенно выполнить уравнение (3.41), требуем:

$$\int_0^1 [1 - (1 - r_0)x] \mathbb{F}[V] T_n(2x - 1) dx = 0, \quad n = \overline{0, N} \quad (3.46)$$

$$A_{n,m}^{(0)} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) dx \quad (3.47)$$

$$A_{n,m}^{(k)} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m^{(k)}(x) dx$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{N+2} V_m'(t) \left\{ A_{n,m}^{(0)} - \frac{1 - r_0(t)}{2} \left[ A_{n,m}^{(0)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,m}^{(0)} + A_{n-1,m}^{(0)}) \right] \right\} + \\ & + \sum_{m=0}^{N+2} V_m(t) \left[ A_{n,m}^{(2)} \left( \frac{2}{1 - r_0(t)} - \frac{4}{(1 - r_0(t))^2} \right) + \frac{1}{1 - r_0(t)} (A_{n+1,m}^{(2)} + A_{n-1,m}^{(2)}) \right] + \\ & + \frac{r_0'(t)}{1 - r_0(t)} \sum_{m=0}^{N+2} V_m(t) \left[ A_{n,m}^{(1)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,m}^{(1)} + A_{n-1,m}^{(1)}) \right] - \\ & - \frac{r_0'(t)}{4} \sum_{m=0}^{N+2} V_m(t) \left[ \frac{3}{2} A_{n,m}^{(1)} + A_{n+1,m}^{(1)} + A_{n-1,m}^{(1)} + \frac{1}{4} (A_{n+2,m}^{(1)} + A_{n-2,m}^{(1)}) \right] + \\ & + \frac{2}{1 - r_0(t)} \sum_{m=0}^{N+2} V_m(t) A_{n,m}^{(1)} - \frac{r_0(t) \text{Sen}_d \Delta P_1}{2} \left[ A_{n,0}^{(0)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,0}^{(0)} + A_{n-1,0}^{(0)}) \right] + \text{Sen}_d = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Система (3.43), (3.44), (3.48) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка задана в неявной форме. Приведение её к нормальной форме Коши  $\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{Y} = (V_{z_0}, V_{z_1}, \dots, V_{z_N}, r_0)^T$  и нахождение величины  $\mathbf{Y}'$  по известным в текущий момент времени  $t$  величинам  $\mathbf{Y}$  выполняется в следующей последовательности.

Из (3.43) и (3.44) находим  $V_{z_{N+1}}$  и  $V_{z_{N+2}}$  по  $V_{z_0}, V_{z_1}, \dots, V_{z_N}$  и  $r_0(t)$ , из (3.45) находим  $r_0'(t)$ . Далее продифференцируем (3.43) и (3.44) по  $t$ .

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{z_n}'(t) = 0, \quad 0 < t \leq T_0 \quad (3.49)$$



$$\sum_{n=0}^{N+2} n^2 V'_{z_n}(t) = \frac{-r'_0(t)(\delta-1)\text{Sen}_d}{2} \quad (3.50)$$

Уравнения (3.48) – (3.50) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V'_{z_n}$ ,  $n=0, 1, \dots, N, N+1, N+2$ . Начальные условия для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.43), (3.44), (3.48) следуют из асимптотического представления (3.37), (3.38) и (3.40) при  $t=t_0$ ,  $0 < t_0 \ll 1$ .

### 3.2 Этап развития течения с «проскальзыванием»

На этом этапе при достижении касательным напряжением критического значения  $\tau^*$  ( $\gamma$  в безразмерном виде) в момент времени  $T_0$  меняется условие на твердой стенке  $x=0$  на (3.23).

Из условия (3.23) и реологического уравнения (3.25) получаем

$$V_z(0,t) = \frac{1}{\lambda} \left( \text{Sen}_d(1-\gamma) + \frac{1}{1-r_0(t)} \frac{\partial V_z(0,t)}{\partial x} \right), \quad T_0 < t \leq T_1 \quad (3.51)$$

Из условия (3.51) и представления (3.41) получаем уравнение

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{z_n}(t) \left( 1 + \frac{2n^2}{(1-r_0(t))\lambda} \right) = \frac{(1-\gamma)\text{Sen}_d}{\lambda}, \quad (3.52)$$

которое заменяет условие (3.43).

Дифференцируя (3.52) получаем уравнение, которое заменяет (3.46).

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V'_{z_n}(t) \left( 1 + \frac{2n^2}{\lambda(1-r_0(t))} \right) = -\frac{2r'_0(t)}{\lambda(1-r_0(t))^2} \sum_{n=1}^{N+2} (-1)^n n^2 V_{z_n}(t) \quad (3.53)$$

Решение строится для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (3.44), (3.48), (3.52).

Со временем процесс стабилизируется и течение асимптотически приближается к установившемуся. Граница зоны течения находится из соотношения

$$r_0 = \frac{2\delta}{\Delta P_1} \quad (3.54)$$

Распределение скоростей для стационарного режима имеет вид

$$V_z(x) = \text{Sen}_d \left\{ (1-r_0) \left[ \frac{\Delta P_1}{2} \left( x - \frac{1}{2}(1-r_0)x^2 \right) - x \right] + \frac{\tau(0,t) - \gamma}{\lambda} \right\} \quad (3.55)$$

### 3.3 Переходный этап с «проскальзыванием»

Пусть теперь в момент времени  $T_1$  перепад давления уменьшился  $\Delta P_2 < \Delta P_1$ .

С этого момента начнется нестационарный переходный процесс, при котором напряжение на границе раздела фаз  $r_0$  будет уменьшаться с  $\tau_s$  до  $\tau_d$  (с  $\delta$  до 1 в безразмерных параметрах). Граница зоны течения на этом этапе постоянна. Как только напряжение на границе течения достигнет значения  $\tau = 1$  начнется процесс восстановления структуры материала.

При этом переходный процесс может проходить как все время с «проскальзыванием», которое завершится уже на этапе восстановления структуры, так и сначала с «проскальзыванием», а затем без него. Таким образом, в зависимости от заданных параметров, в момент  $T_2$  может начаться процесс восстановления структуры материала с «проскальзыванием» или закончится «проскальзывание», но восстановление структуры еще не начнется. В момент времени  $T_3$  начинается процесс восстановления материала без «проскальзывания». При этом полного восстановления структуры может не произойти, а граница зоны течения со временем стабилизироваться к новому значению

$$r_1 = \frac{2}{\Delta P_2} \quad (3.56)$$

Следовательно, для того чтобы течение материала со временем прекратилось совсем новый перепад давления должен быть  $\Delta P_2 = 2$ .

На переходном этапе с «проскальзыванием» решается краевая задача в области  $0 < x < 1$ ,  $T_1 < t \leq T_2$ . С начальными условиями (3.54) и (3.55).

$$\frac{\partial V_z(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{(1-r_0)^2} \frac{\partial^2 V_z(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{1-(1-r_0)x} \left( \frac{1}{1-r_0} \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial x} + \text{Sen}_d \right) + \text{Sen}_d \Delta P_2 \quad (3.57)$$

$$V_z(0,t) = \frac{1}{\lambda} \left( \text{Sen}_d(1-\gamma) + \frac{1}{1-r_0(t)} \frac{\partial V_z(0,t)}{\partial x} \right) \quad (3.58)$$

$$\left( \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{x=0} = (1-r_0) \text{Sen}_d (\tau(0,t) - 1) \quad (3.59)$$

$$\left( \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{x=1} = (1-r_0) \text{Sen}_d (\tau(1,t) - 1) \quad (3.60)$$

По теореме импульсов

$$V_z(1,t) = V_z(1,T_1) + \text{Sen}_d \left( \Delta P_2(t-T_1) - \frac{2}{r_0} \int_{T_1}^t \tau(1,\xi) d\xi \right) \quad (3.61)$$

Обозначим:

$$\Phi_1(t) = \int_{T_1}^t \tau(1,\xi) d\xi, \quad \Phi_1(T_1) = 0 \quad (3.62)$$

Представим (3.57) в виде:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}[V] &= \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{(1-r_0)^2} \frac{\partial^2 V_z(x,t)}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{1}{1-(1-r_0)x} \left( \frac{1}{1-r_0} \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial x} - \text{Sen}_d \right) - \text{Sen}_d \Delta P_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Из (3.41) и (3.58)

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{z_n}(t) \left( \lambda + \frac{2n^2}{1-r_0} \right) = \text{Sen}_d(1-\gamma) \quad (3.64)$$

Из (3.41) и (3.61)

$$\sum_{n=0}^{N+2} V_{z_n}(t) = V_z(1,T_1) + \text{Sen}_d \Delta P_2(t-T_1) - \frac{2\text{Sen}_d \Phi_1(t)}{r_0} \quad (3.65)$$

$$\Phi_1'(t) = \tau(1,t) = 1 + \frac{1}{\text{Sen}_d(1-r_0)} \frac{\partial V_z(1,t)}{\partial x} \quad (3.66)$$

Из (3.66) и (3.41)

$$\Phi_1'(t) = \tau(1,t) = 1 + \frac{1}{\text{Sen}_d(1-r_0)} \sum_{n=1}^{N+2} n^2 V_{z_n}(t) \quad (3.67)$$

Из (3.41), (3.46) и (3.47)

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{N+2} V_m'(t) \left\{ A_{n,m}^{(0)} - \frac{1-r_0(t)}{2} \left[ A_{n,m}^{(0)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,m}^{(0)} + A_{n-1,m}^{(0)}) \right] \right\} + \\ & + \sum_{m=0}^{N+2} V_m(t) \left[ A_{n,m}^{(2)} \left( \frac{2}{1-r_0(t)} - \frac{4}{(1-r_0(t))^2} \right) + \frac{1}{1-r_0(t)} (A_{n+1,m}^{(2)} + A_{n-1,m}^{(2)}) \right] + \\ & + \frac{2}{1-r_0(t)} \sum_{m=0}^{N+2} V_m(t) A_{n,m}^{(1)} - \frac{r_0(t) \text{Sen}_d \Delta P_2}{2} \left[ A_{n,0}^{(0)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,0}^{(0)} + A_{n-1,0}^{(0)}) \right] - \text{Sen}_d = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

(3.64), (3.65) и (3.68) система обыкновенных дифференциальных уравнений в неявной форме первого порядка. Из (3.64) и (3.65) находим  $V_{z_{N+1}}$  и  $V_{z_{N+2}}$  по  $V_{z_0}, V_{z_1}, \dots, V_{z_N}$  и  $\Phi_1$ , из (3.67) находим  $\Phi_1'(t)$ . Далее продифференцируем (3.64) и (3.65) по  $t$ .

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{z_n}'(t) \left( \lambda + \frac{2n^2}{1-r_0} \right) = 0 \quad (3.69)$$

$$\sum_{n=0}^{N+2} V_{z_n}'(t) = \text{Sen}_d \Delta P_2 - \frac{2 \text{Sen}_d \Phi_1'(t)}{r_0} \quad (3.70)$$

Уравнения (3.68) – (3.70) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V_{z_n}'$ ,  $n=0, 1, \dots, N, N+1, N+2$ . Начальными условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.64), (3.65), (3.68) являются условия (3.55), (3.62).

### 3.4 Переходный этап без «проскальзывания»

Если в момент  $T_2$  касательное напряжение на твердой стенке  $x=0$  уменьшается до значения  $\gamma$ , то условие «проскальзывания» заменяется условием прилипания.

Тогда условия (3.58) и (3.61) заменяются на

$$V_z(0,t) = 0, \quad T_2 < t \leq T_3 \quad (3.71)$$

$$V_z(1,t) = V_z(1,T_2) + \text{Sen}_d \left( \Delta P_2(t - T_2) - \frac{2}{r_0} \int_{T_2}^t \tau(1,\xi) d\xi \right) \quad (3.72)$$

$$\Phi_2(t) = \int_{T_2}^t \tau(1,\xi) d\xi, \quad \Phi_2(T_2) = 0 \quad (3.73)$$

(3.64), (3.65) заменяются на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{z_n}(t) = 0 \quad (3.74)$$

$$\sum_{n=0}^{N+2} V_{z_n}(t) = V_z(1,T_2) + \text{Sen}_d \Delta P_2(t - T_2) - \frac{2\text{Sen}_d \Phi_2(t)}{r_0} \quad (3.75)$$

(3.69), (3.70) меняются на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V'_{z_n}(t) = 0 \quad (3.76)$$

$$\sum_{n=0}^{N+2} V'_{z_n}(t) = \text{Sen}_d \Delta P_2 - \frac{2\text{Sen}_d \Phi'_2(t)}{r_0} \quad (3.77)$$

Начальными условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.68), (3.74) и (3.75) являются условие (3.73) и распределение скоростей, сложившееся к началу данного этапа.

Как только напряжение на границе раздела фаз  $r_0$  уменьшится до 1 начнется этап восстановления структуры материала, и граница зоны течения снова станет подвижной.

### **3.5 Этап угасания течения с восстановлением структуры с «проскальзыванием»**

В зависимости от параметров течения восстановление материала может начаться раньше, чем закончится «проскальзывание» вдоль твердой стенки. Тогда в момент времени  $T_2$  начнется восстановление структуры материала.

На этом этапе получаем краевую задачу в области  $0 < x < 1$ ,  $T_2 < t < T_3$ , начальным условием (3.54) для подвижной границы раздела фаз, и распределением скоростей, сложившимся к началу данного этапа.

$$\frac{\partial V_z(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{(1-r_0(t))^2} \frac{\partial^2 V_z(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{1-r_0(t)} \left( x r_0'(t) + \frac{1}{1-(1-r_0(t))x} \right) \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial x} + \text{Sen}_d \left( \Delta P_1 - \frac{1}{1-(1-r_0(t))x} \right) \quad (3.78)$$

$$V_z(0,t) = \frac{1}{\lambda} \left( \text{Sen}_d(1-\gamma) + \frac{1}{1-r_0(t)} \frac{\partial V_z(0,t)}{\partial x} \right) \quad (3.79)$$

$$\left( \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{x=1} = 0 \quad (3.80)$$

$$V_z(1,t) = U(t), \text{ где } \frac{dU(t)}{dt} = \text{Sen}_d \left( \Delta P_2 - \frac{2}{r_0(t)} \right) \quad (3.81)$$

Для нахождения  $r_0'(t)$  выполняются следующие шаги.

Из (3.78) при  $x=1$  и (3.80) следует:

$$\frac{\partial V_z(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{(1-r_0(t))^2} \frac{\partial^2 V_z(x,t)}{\partial x^2} + \text{Sen}_d \left( \Delta P_2 - \frac{1}{r_0(t)} \right) \quad (3.82)$$

Из (3.81) и (3.82) получим:

$$\frac{\partial^2 V_z(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\text{Sen}_d(r_0(t)-1)^2}{r_0(t)} \quad (3.83)$$

Продифференцировав (3.83) по времени, получим:

$$\frac{\partial^3 V_z(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = -\text{Sen}_d r_0'(t) \left( 1 - \frac{1}{r_0^2(t)} \right) \quad (3.84)$$

Продифференцировав (3.78) дважды по  $x$ , положив  $x=1$  и используя (3.83) получим:

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial^3 V_z(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + 2 \frac{r'_0(t)}{r_0(t)} \text{Sen}_d(r_0(t)-1) + \frac{r'_0(t)}{1-r_0(t)} \frac{\partial^3 V_z(x,t)}{\partial x^3} \right|_{x=1} \\
&= \frac{1}{(1-r_0(t))^2} \frac{\partial^4 V_z(x,t)}{\partial x^4} - \frac{1}{r_0(t)(1-r_0(t))} \frac{\partial^3 V_z(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=1}
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Приравняв (3.84) и (3.85) получим выражение для  $r'_0(t)$

$$r'_0(t) = \frac{\frac{1}{(1-r_0(t))^2} \frac{\partial^4 V_z(x,t)}{\partial x^4} - \frac{1}{r_0(t)(1-r_0(t))} \frac{\partial^3 V_z(x,t)}{\partial x^3}}{\text{Sen}_d \left( 1 + \frac{1}{r_0^2(t)} - \frac{2}{r_0(t)} \right) + \frac{1}{1-r_0(t)} \frac{\partial^3 V_z(x,t)}{\partial x^3}} \tag{3.86}$$

Из (3.41) и (3.79)

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{z_n}(t) \left( \lambda + \frac{2n^2}{1-r_0} \right) = \text{Sen}_d(1-\gamma) \tag{3.87}$$

Из (3.41) и (3.80)

$$\sum_{n=0}^{N+2} n^2 V_{z_n}(t) = 0 \tag{3.88}$$

Представим (3.78) в виде:

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}[V] &= \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{(1-r_0(t))^2} \frac{\partial^2 V_z(x,t)}{\partial x^2} + \\
&+ \frac{1}{1-r_0(t)} \left( x r'_0(t) + \frac{1}{1-(1-r_0(t))x} \right) \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial x} - \text{Sen}_d \left( \Delta P_2 - \frac{1}{1-(1-r_0(t))x} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Из (3.46), (3.47) и (3.89)

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{N+2} V'_m(t) \left\{ A_{n,m}^{(0)} - \frac{1-r_0(t)}{2} \left[ A_{n,m}^{(0)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,m}^{(0)} + A_{n-1,m}^{(0)}) \right] \right\} + \\
& + \sum_{m=0}^{N+2} V_m(t) \left[ A_{n,m}^{(2)} \left( \frac{2}{1-r_0(t)} - \frac{4}{(1-r_0(t))^2} \right) + \frac{1}{1-r_0(t)} (A_{n+1,m}^{(2)} + A_{n-1,m}^{(2)}) \right] + \\
& + \frac{r'_0(t)}{1-r_0(t)} \sum_{m=0}^{N+2} V_m(t) \left[ A_{n,m}^{(1)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,m}^{(1)} + A_{n-1,m}^{(1)}) \right] - \\
& - \frac{r'_0(t)}{4} \sum_{m=0}^{N+2} V_m(t) \left[ \frac{3}{2} A_{n,m}^{(1)} + A_{n+1,m}^{(1)} + A_{n-1,m}^{(1)} + \frac{1}{4} (A_{n+2,m}^{(1)} + A_{n-2,m}^{(1)}) \right] + \\
& + \frac{2}{1-r_0(t)} \sum_{m=0}^{N+2} V_m(t) A_{n,m}^{(1)} - \frac{r_0(t) \text{Sen}_d \Delta P_2}{2} \left[ A_{n,0}^{(0)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,0}^{(0)} + A_{n-1,0}^{(0)}) \right] + \text{Sen}_d = 0
\end{aligned} \tag{3.90}$$

(3.87), (3.88) и (3.90) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений в неявной форме первого порядка. Из (3.87) и (3.88) находим  $V_{z_{N+1}}$  и  $V_{z_{N+2}}$  по  $V_{z_0}, V_{z_1}, \dots, V_{z_N}$  и  $r_0(t)$ , из (3.86) находим  $r'_0(t)$ . Далее продифференцируем (3.87) и (3.88) по  $t$ .

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V'_{z_n}(t) \left( 1 + \frac{2n^2}{\lambda(1-r_0(t))} \right) = - \frac{2r'_0(t)}{\lambda(1-r_0(t))^2} \sum_{n=1}^{N+2} (-1)^n n^2 V_{z_n}(t) \tag{3.91}$$

$$\sum_{n=1}^{N+2} n^2 V'_{z_n}(t) = 0 \tag{3.92}$$

Уравнения (3.90) – (3.92) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V'_{z_n}$ ,  $n=0, 1, \dots, N, N+1, N+2$ .

Если в момент  $T_3$  касательное напряжение на твердой стенке  $z=0$  уменьшается до значения  $\gamma$ , то процесс восстановления будет идти уже без «проскальзывания».

### 3.6 Этап угасания течения с восстановлением структуры без «проскальзывания»

На этом этапе получаем краевую задачу в области  $0 < x < 1$ ,  $t > T_3$ . Меняется условие (3.79) на твердой стенке  $x=0$  на

$$V_z(0, t) = 0, \quad t > T_3 \tag{3.93}$$



Исходя из (3.41) и (3.93) условие (2.87) заменяется на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{x_n}(t) = 0, \quad (3.94)$$

а условие (3.91) на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V'_{x_n}(t) = 0 \quad (3.95)$$

В зависимости от выбранной величины перепада давления восстановление структуры материала может быть как полным, так и частичным. Со временем процесс может стабилизироваться и течение асимптотически приблизится к установившемуся. Граница зоны течения в этом случае находится из соотношения (3.56).

Распределение скоростей для нового стационарного режима имеет вид

$$V_z(x) = \text{Sen}_d(1-r_1) \left[ \frac{\Delta P_2}{2} \left( x - \frac{1}{2}(1-r_1)x^2 \right) - x \right] \quad (3.96)$$

### 3.7 Результаты численного моделирования

Моделирование течения вязкопластической среды в неподвижной трубе круглого сечения проводится для безразмерных параметров, заданных по формулам (3.11).

Для того, чтобы рассмотреть все возможные этапы неустановившегося течения вязкопластической среды с эффектом «проскальзывания» вдоль твердой стенки соотношение между параметрами в рамках пятипараметрической модели выбрано следующим:  $\frac{\Delta P_1}{2} > \gamma > \delta > 1$ . Если  $\delta < \frac{\Delta P_1}{2} < \gamma$ , то весь процесс разрушения и последующего восстановления материала пройдет без «проскальзывания».

В момент времени  $t=0$  течение отсутствует, разрушение материала под действием перепада давления  $\Delta P_1$  начинается при достижении внутренним напряжением значения  $\delta$ . В момент  $T_0$  внутреннее напряжение на твердой стенке  $x=0$  достигает значения  $\gamma$  и начинается «проскальзывание», скорость роста зоны

течения при этом замедляется, процесс постепенно стабилизируется и значение границы раздела фаз соответствует формуле (3.54).

В момент  $T_1$  перепад давления уменьшается так, чтобы со временем начался процесс восстановления материала. Начинается переходный процесс, во время которого напряжение на границе течения уменьшается с  $\delta$  до 1.

При  $\Delta P_2 = 2$  структура материала восстанавливается полностью, при  $2 < \Delta P_2 < \Delta P_1$  произойдет частичное восстановление материала, процесс со временем стабилизируется, и толщина восстанавливаемого слоя соответствует формуле (3.56).

Как только напряжение на границе течения достигнет значения  $\tau = 1$  начнется процесс восстановления структуры материала. Переходный процесс может проходить как все время с «проскальзыванием», которое завершится уже на этапе восстановления структуры, так и сначала с «проскальзыванием», а затем без него. Таким образом, в зависимости от заданных параметров, в момент  $T_2$  может начаться процесс восстановления структуры материала с «проскальзыванием» или закончится «проскальзывание», но восстановление структуры еще не начнется. В момент времени  $T_3$  начинается процесс восстановления материала без «проскальзывания».

Основное влияние на характер течения оказывают величины перепада давления, коэффициент внешнего трения, влияющий на «проскальзывание» материала вдоль твердой стенки и соотношения между напряжениями среды.

На рисунке 3.2 показано влияние перепадов давления  $\Delta P_1$  при разрушении и  $\Delta P_2$  при восстановлении структуры материала на изменение границы зоны течения на всех этапах в случае когда «проскальзывание» материала завершается на переходном этапе.

В случае, когда этап восстановления материала начинается с условием «проскальзывания» вдоль твердой стенки показан на рисунке 3.3. Соотношение

между внутренним динамическим и статическим напряжениями, а также критическим напряжением «проскальзывания» фиксировано и выбрано следующим:  $\gamma = 4$ ,  $\delta = 2$ ,  $\lambda = 3.9$ . Показано, что при  $\Delta P_2 = 8$  процесс стабилизируется, граница зоны течения  $r_1 = 0.25$  и «проскальзывание» при этом не заканчивается.

Если после выхода на новый стационарный режим в момент времени  $T_4$  еще раз уменьшить перепад давления  $\Delta P_2 > \Delta P_3$ , то процесс восстановления структуры материала продолжится. На рисунках 3.4 и 3.5 показана зависимость изменения границы зоны течения при повторном уменьшении перепада давления при  $\Delta P_3 = 2$ . Таким образом структура со временем восстановится полностью.

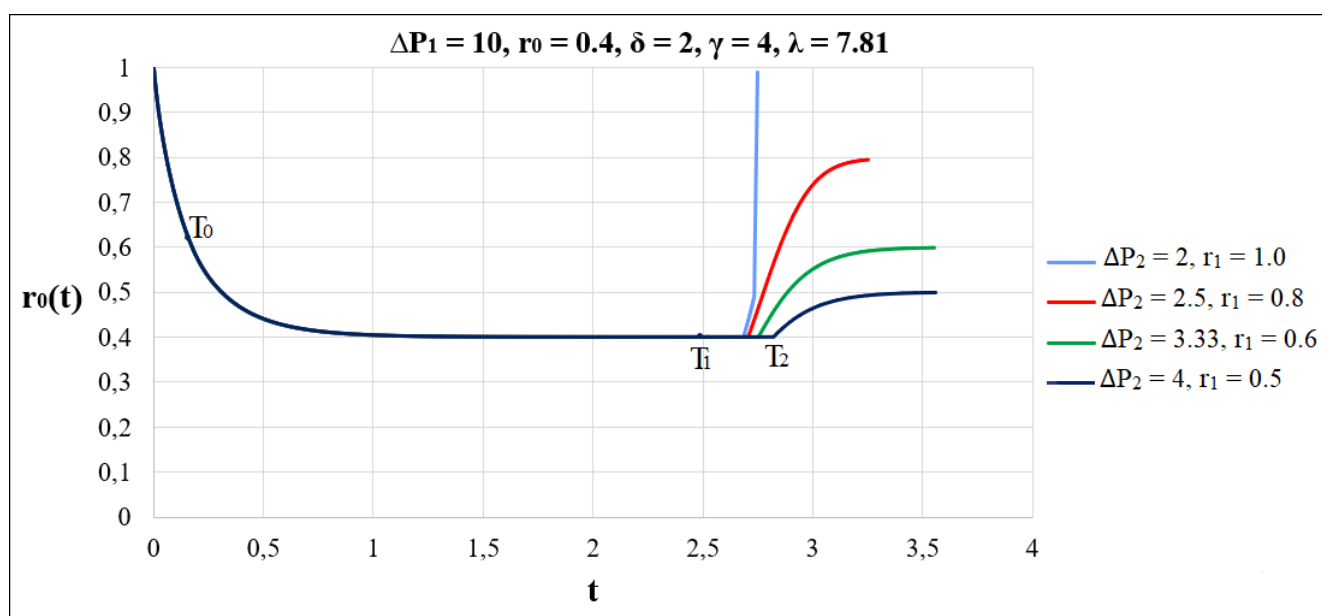


Рисунок 3.2 – Зависимость границы зоны течения от перепадов давления при неполном разрушении структуры и восстановлением структуры материала без «проскальзывания».

На рисунке 3.6 показано изменение границы зоны течения на всех этапах в случае, когда «проскальзывание» материала вообще отсутствует.

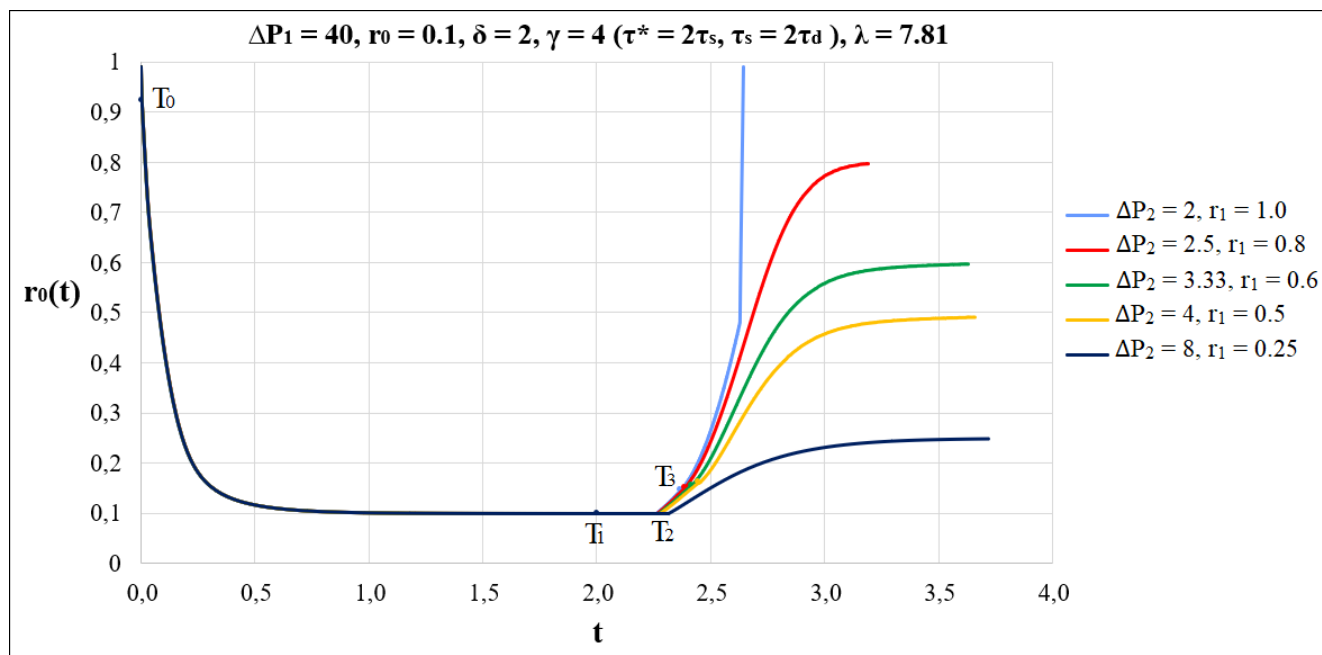


Рисунок 3.3 – Зависимость границы зоны течения от перепадов давления и началом восстановления структуры материала с «проскальзыванием».

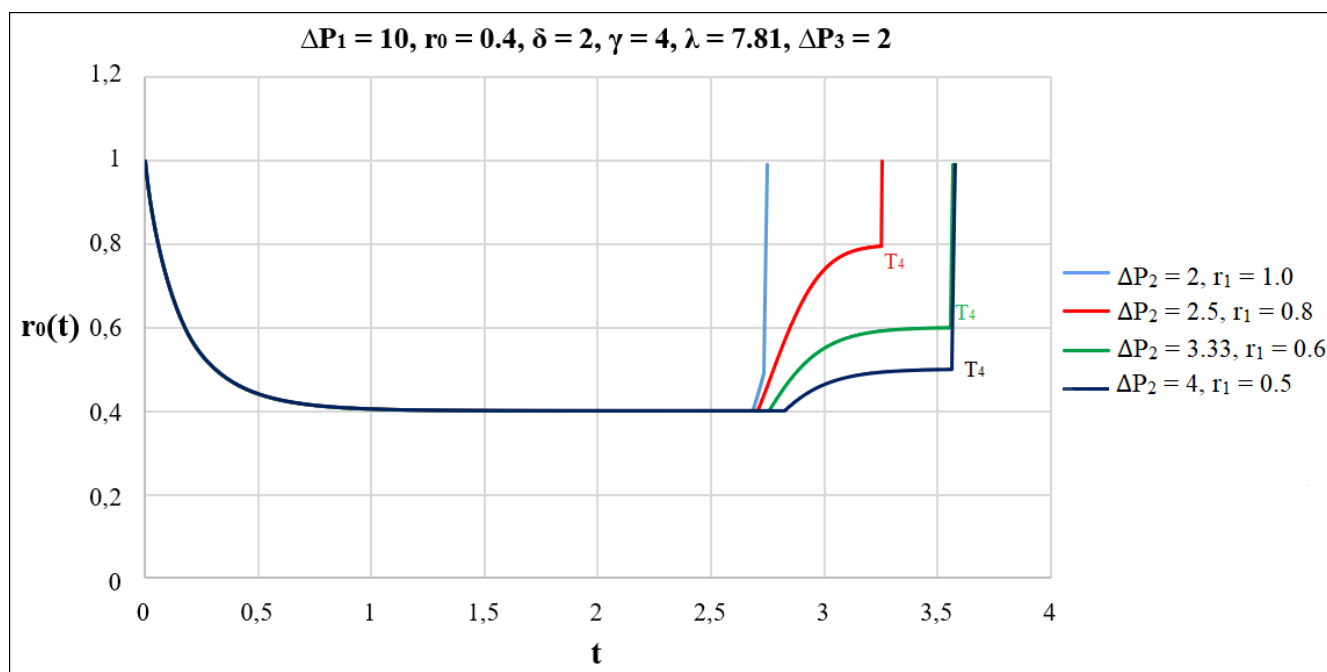


Рисунок 3.4 – Зависимость границы зоны течения при повторном уменьшении перепада давления. «Проскальзывание» заканчивается на переходном этапе

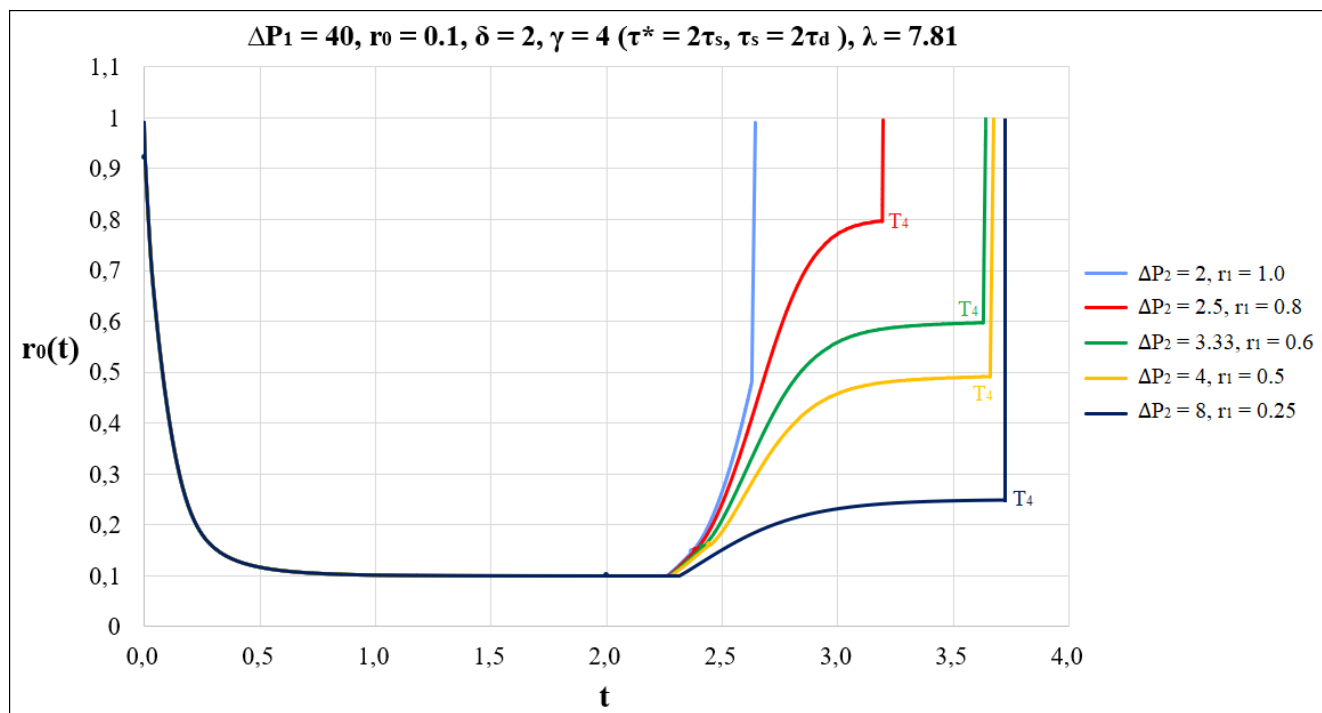


Рисунок 3.5 – Зависимость границы зоны течения при повторном уменьшении перепада давления. «Проскальзывание» заканчивается на этапе восстановления.

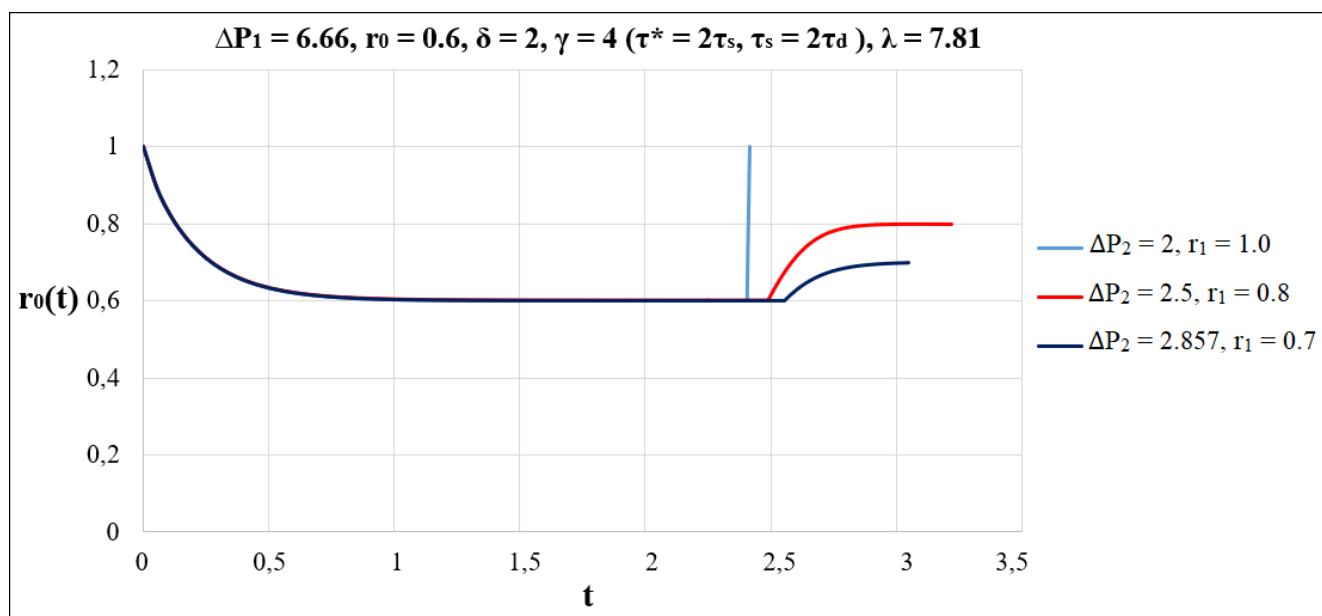


Рисунок 3.6 – Зависимость границы зоны течения при отсутствии «проскальзывания» на всех этапах течения.

На рисунке 3.7 показана динамика изменения напряжения на границах течения во время разрушения структуры материала и переходном этапе в случае,

когда «проскальзывание» заканчивается на нем, а на рисунке 3.8 когда «проскальзывание» продолжается на всем переходном этапе.

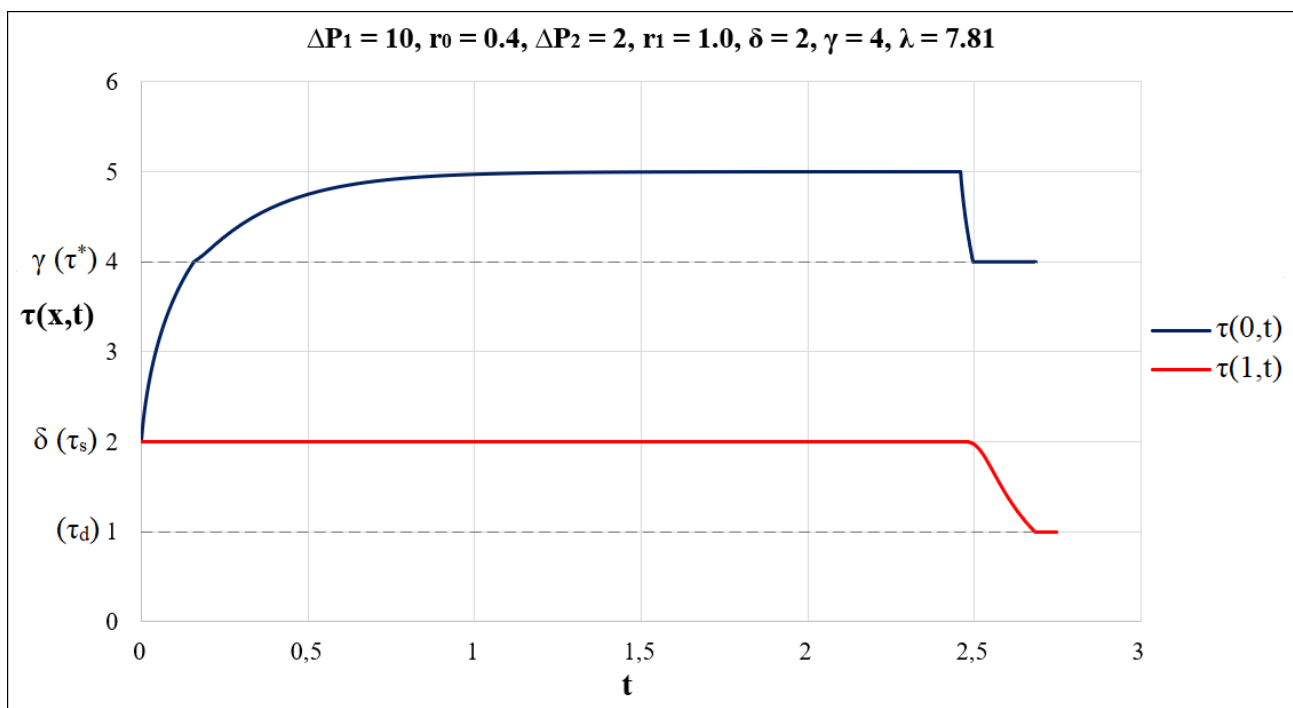


Рисунок 3.7 – Изменение напряжений на границах течения на этапе разрушения и переходном этапе с окончанием «проскальзывания» на нем.

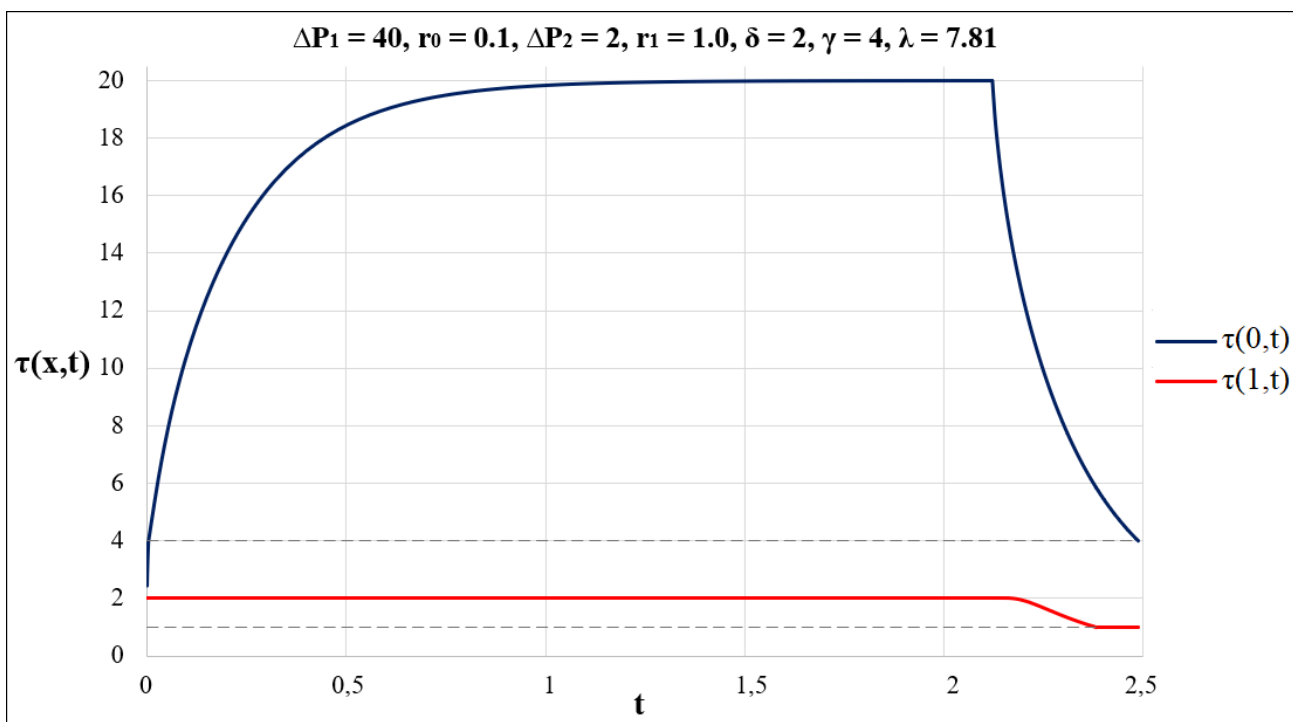


Рисунок 3.8 – Изменение напряжений на границах течения на этапе разрушения и переходном этапе с «проскальзыванием»

На рисунке 3.9 показано влияние различных значений коэффициента внешнего трения  $\lambda$  на изменение границы зоны течения в случае, когда «проскальзывание» заканчивается на переходном этапе, а на рисунке 3.10 когда этап восстановления начинается с «проскальзыванием».

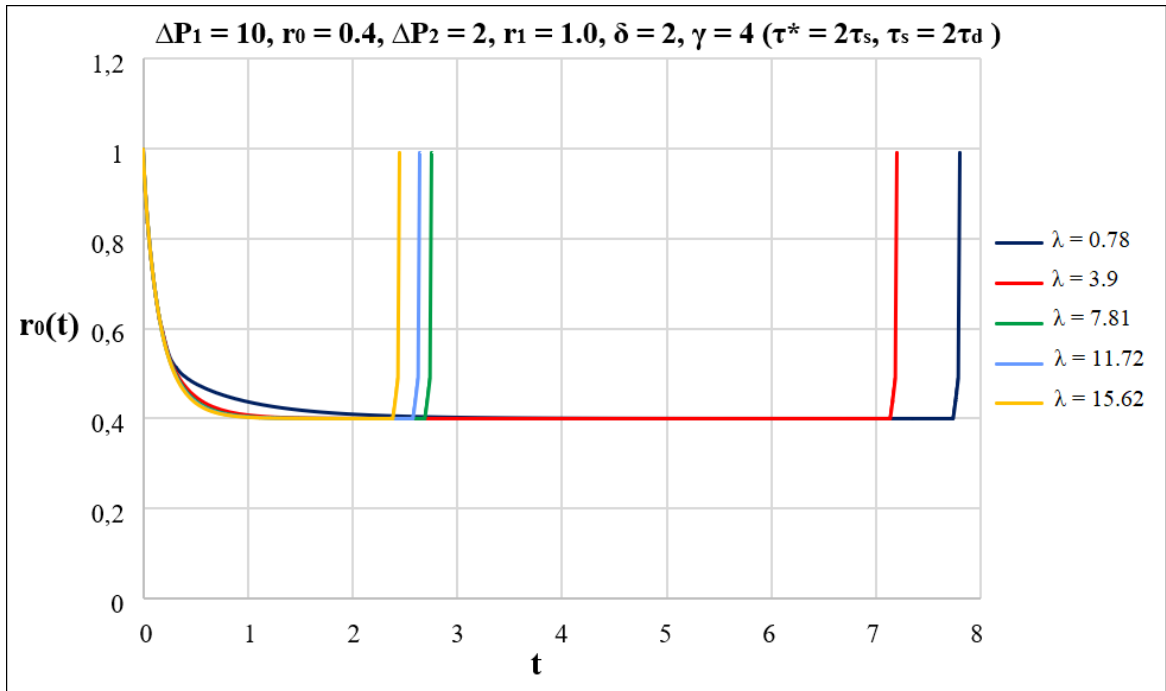


Рисунок 3.9 – Поведение границы течения при различных значениях коэффициента внешнего трения  $\lambda$  в случае, когда «проскальзывание» заканчивается на переходном этапе.

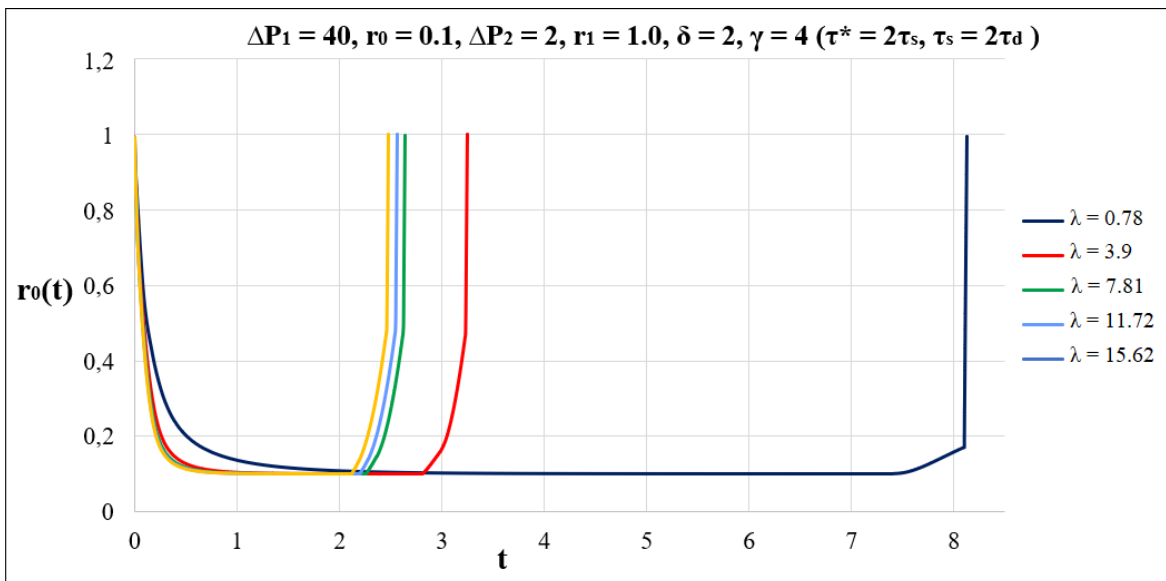


Рисунок 3.10 – Поведение границы течения при различных значениях коэффициента внешнего трения  $\lambda$  в случае, когда восстановление начинается с «проскальзыванием»

На рисунках 3.11, 3.12 показано влияние различных соотношений между внутренними напряжениями среды ( $\tau_s = \delta\tau_d$ ,  $\tau^* = \gamma\tau_d$ ) на изменение границы зоны течения на всех этапах разрушения и восстановления структуры материала. Исследование проведено при следующих фиксированных параметрах: начальный перепад давления  $\Delta P_1 = 20$ , перепад давления для начала восстановления структуры  $\Delta P_2 = 2$ . Коэффициент внешнего трения  $\lambda = 7.81$ .

На рисунке 3.11 показано влияние на поведение границы раздела фаз различных соотношений между динамическим и статическим напряжениями сдвига. Остальные соотношения между параметрами фиксированы. При определенных соотношениях напряжений либо весь переходный процесс будет проходить с «проскальзыванием», которое завершится уже на этапе восстановления структуры ( $\delta = 1.5, \gamma = 3$ ;  $\delta = 1.1, \gamma = 2.2$ ), либо «проскальзывание» завершится до начала восстановления.

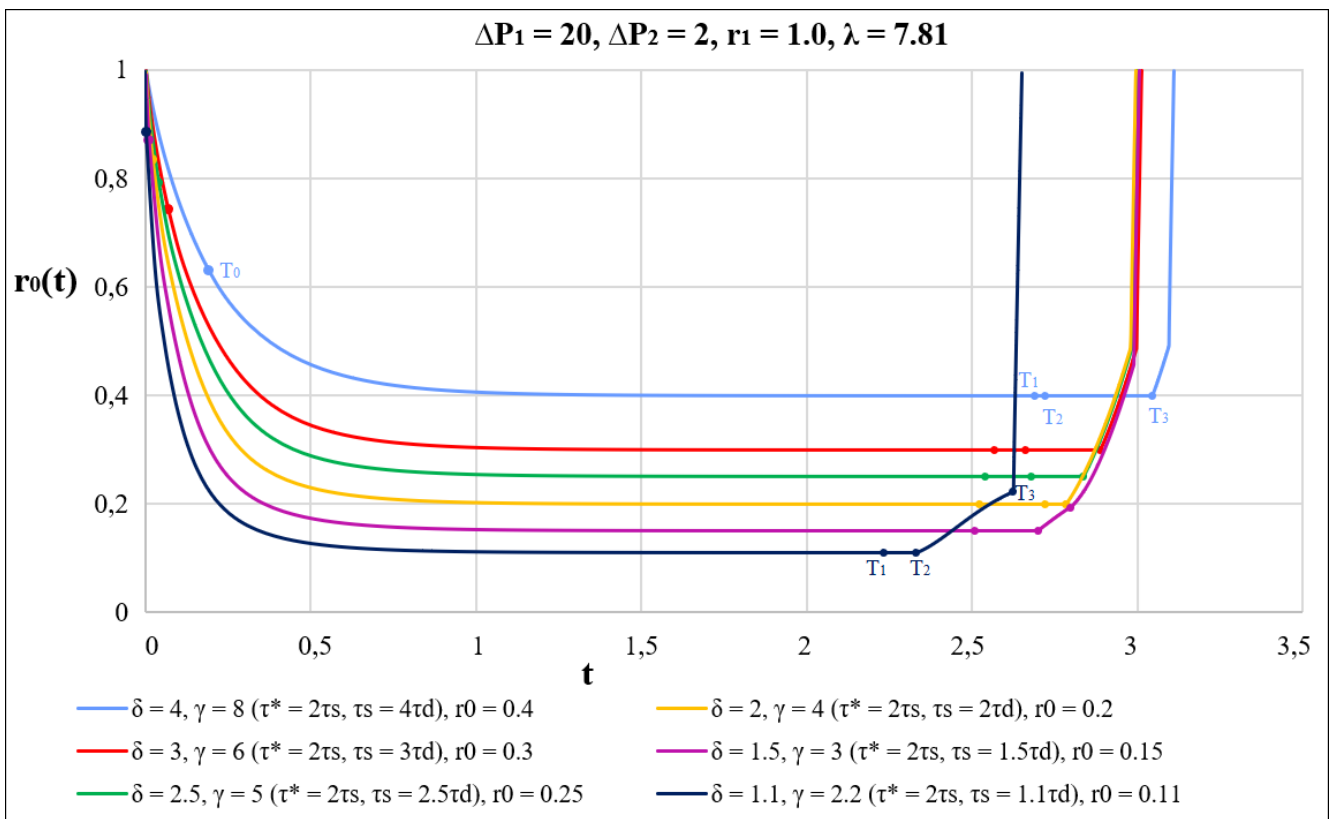


Рисунок 3.11 – Влияние на границу раздела фаз течения различных соотношений между динамическим и статическим напряжениями сдвига.



Из рисунка 3.11 видно, что чем меньше разница между статическим и динамическим напряжениями тем быстрее идут процессы разрушения и восстановления структуры материала.

На рисунке 3.12 показано влияние на поведение границы раздела фаз различных соотношений между критическим напряжением, при котором начинается «проскальзывание» и статическим напряжениями сдвига. Остальные параметры фиксированы. При значениях ( $\delta = 2, \gamma = 3; \delta = 2, \gamma = 2.2$ ) весь переходный процесс будет проходить с «проскальзыванием», которое завершится уже на этапе восстановления.

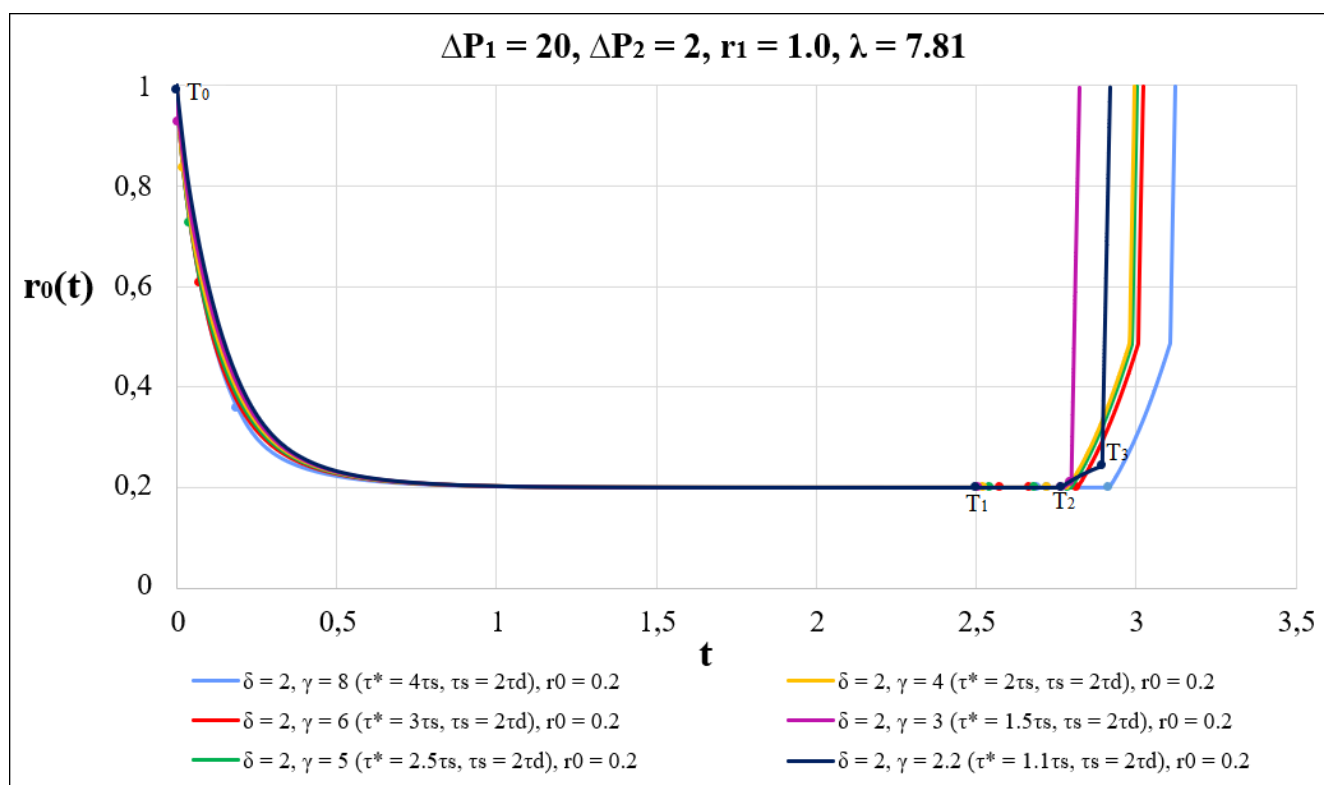


Рисунок 3.12 – Влияние на границу раздела фаз течения различных соотношений между критическим напряжением и статическим напряжениями сдвига.

На рисунках 3.13 – 3.16 показаны профили скорости течения в случае, когда «проскальзывание» вдоль твердой стенки продолжается на всем переходном этапе и заканчивается уже на этапе восстановления структуры материала. В момент  $T_0$  происходит отрыв от твердой стенки, скорость в точке  $x = 0$  начинает расти, в

момент  $T_1$  угол наклона уменьшается и скорость начинает падать, в момент  $T_2$  напряжение достигает значения динамического предела текучести и начинается восстановление материала, скорость начинает падать, в момент времени  $T_3$  напряжение на твердой стенке становится меньше критического напряжения «проскальзывания» и происходит прилипание, скорость в точке  $x = 0$  равна нулю.

При этом структура материала может восстановиться полностью (рис. 3.13) или восстановиться частично в зависимости от значения перепада давления  $\Delta P_2$ , граница течения при этом стабилизируется на уровне (3.56) (рис. 3.15).

На рисунке 3.14 показан профиль скорости на начальном этапе развития течения. На рисунке 3.16 показан профиль скорости когда после выхода на новый установившийся режим течения в момент времени  $T_4$  снова уменьшается перепад давления  $\Delta P_3 < \Delta P_2$  и структура материала продолжает постепенно восстанавливаться.

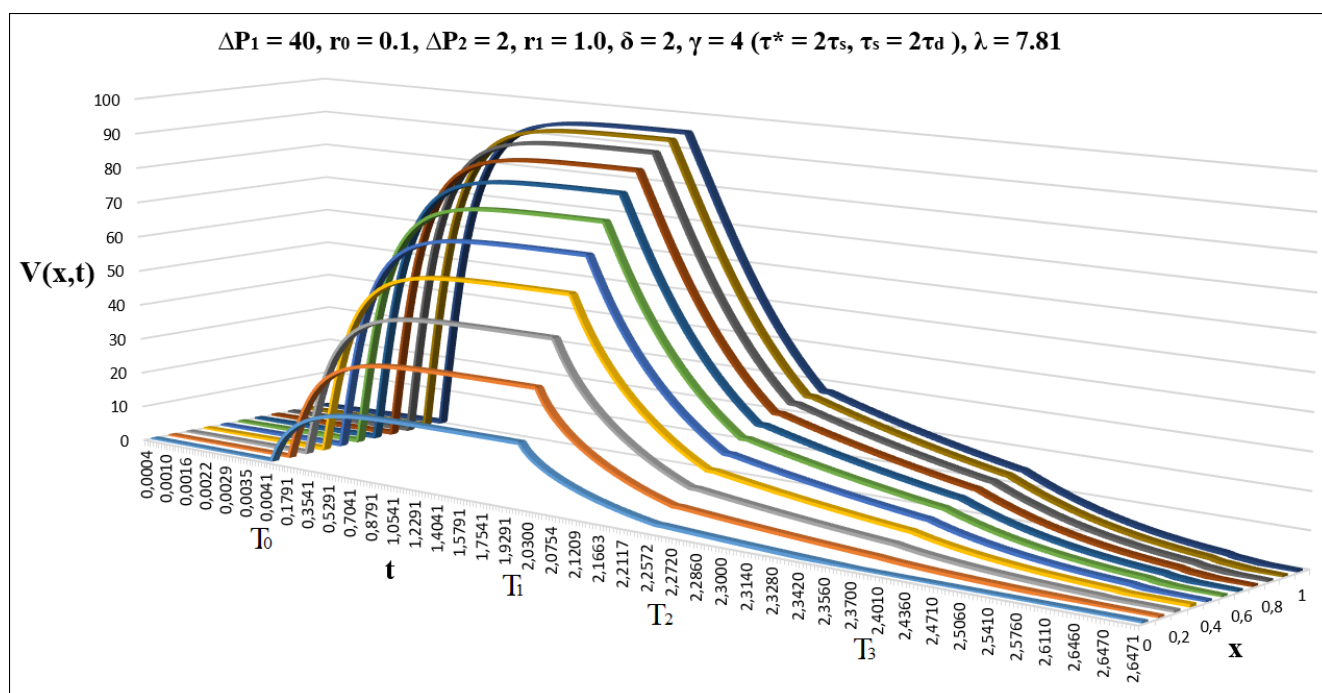


Рисунок 3.13 – Профиль скорости при «проскальзывании» в начале этапа восстановления и полном восстановлении структуры материала

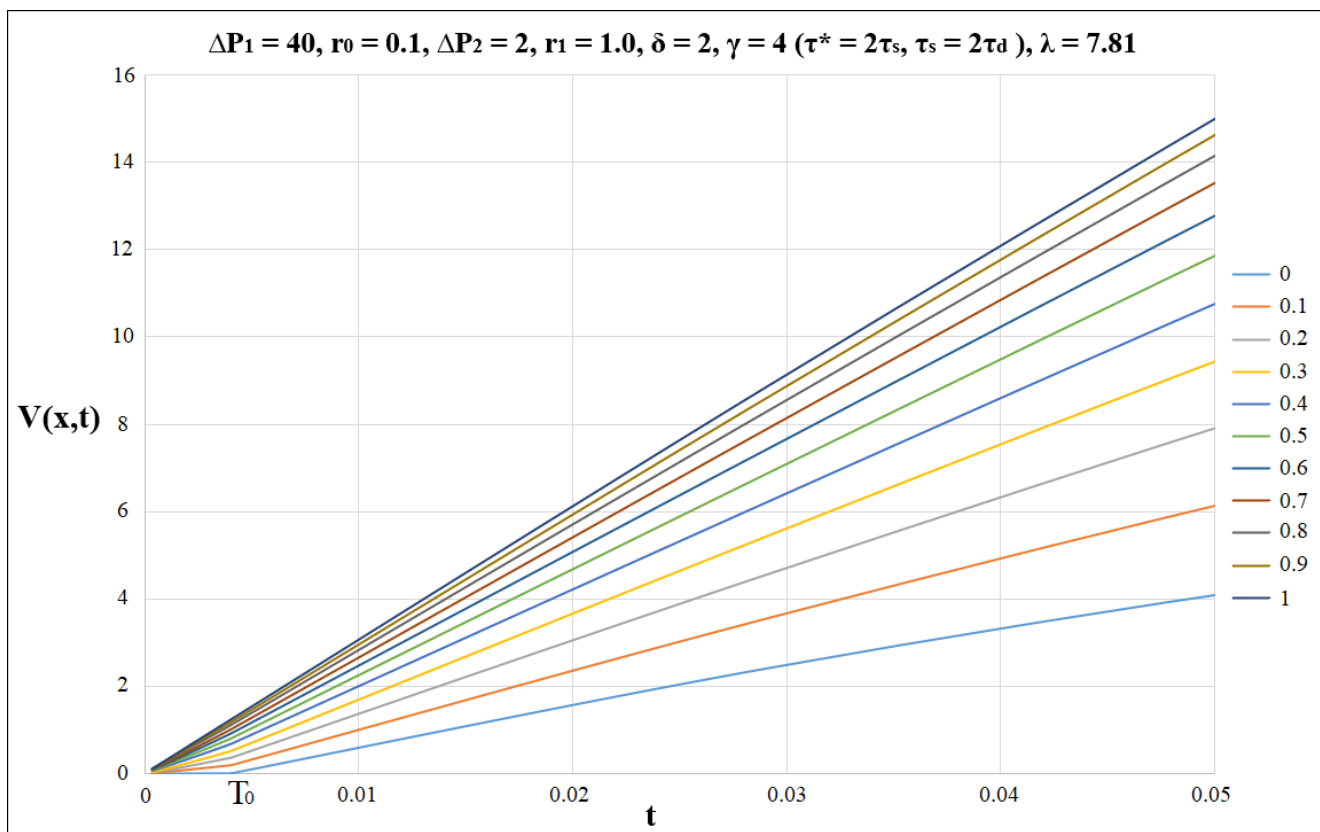


Рисунок 3.14 – Профиль скорости начальном этапе развития течения

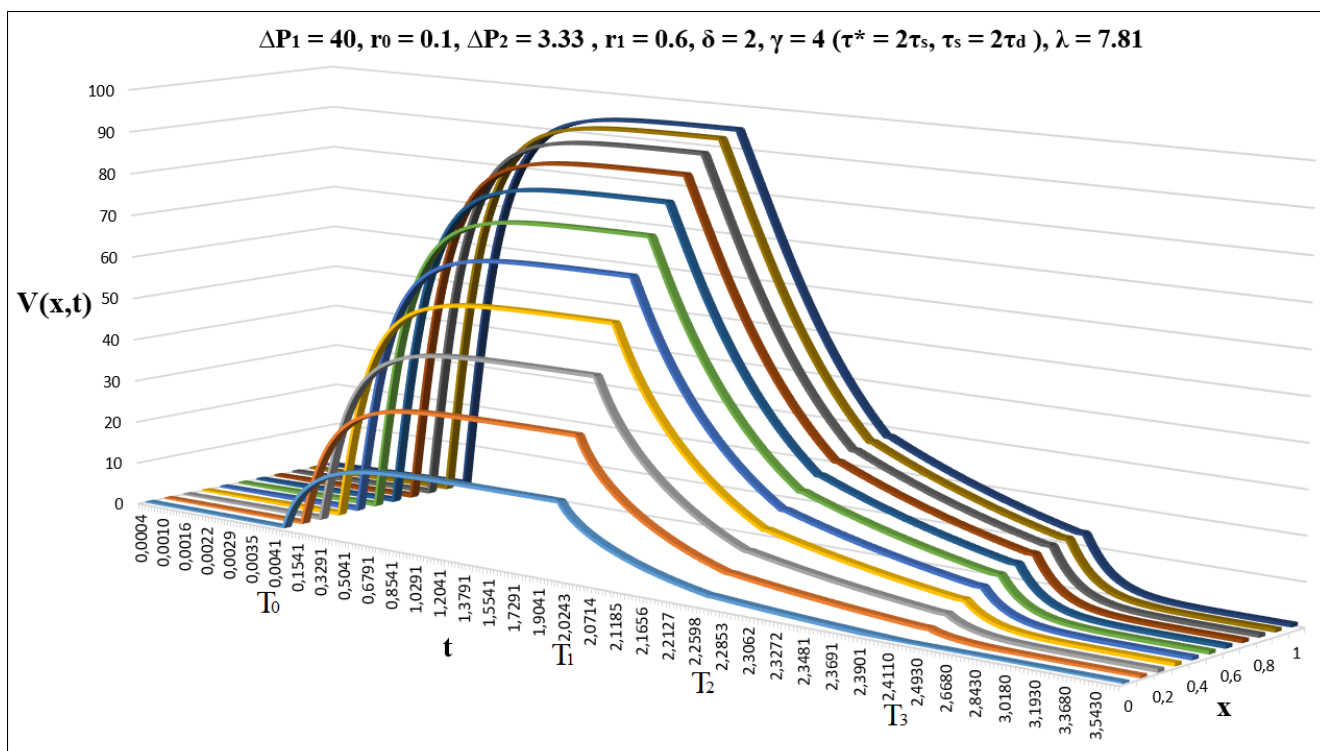
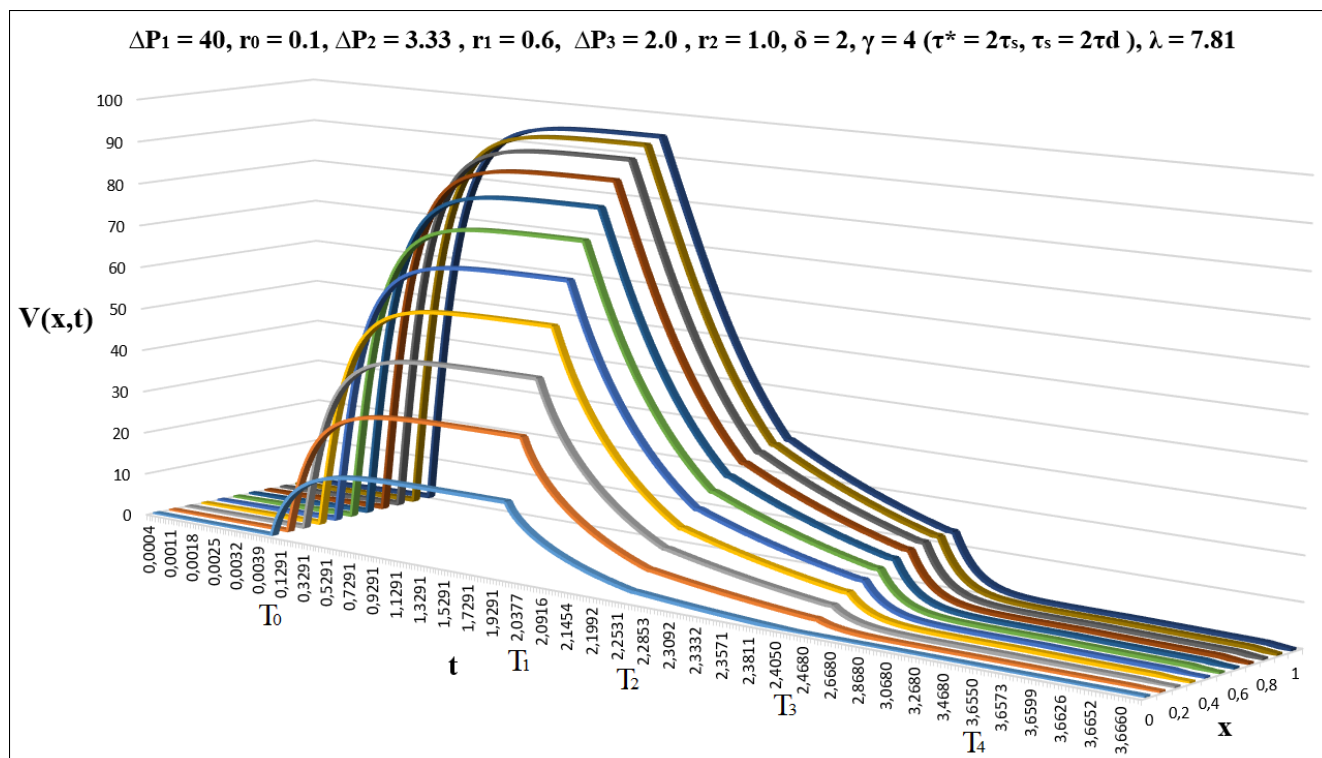


Рисунок 3.15 – Профиль скорости при «проскальзывании» в начале этапа восстановления и неполном восстановлении структуры материала



3.16 – Профиль скорости при повторном уменьшении перепада давления и полном восстановлении материала

Ниже на рисунках 3.17 – 3.19 показаны профили скорости течения в случае, когда «проскальзывание» вдоль твердой стенки заканчивается на переходном этапе. В момент  $T_0$  происходит отрыв от твердой стенки, скорость в точке  $x = 0$  начинает расти, в момент  $T_1$  угол наклона уменьшается и скорость начинает падать, в момент  $T_2$  напряжение на твердой стенке становится меньше критического напряжения «проскальзывания» и происходит прилипание, скорость в точке  $x = 0$  равна нулю. При этом переходный этап не заканчивается до момента  $T_3$ , когда напряжение на границе зоны течения достигает значения динамического предела текучести и начинается восстановление материала. Также, как и в предыдущем примере структура материала может восстановиться полностью (рис. 3.17) или восстановиться частично (рис. 3.18). На рисунке 3.19 показан профиль скорости, когда после выхода на новый установившийся режим течения в момент времени  $T_4$

снова уменьшается перепад давления  $\Delta P_3 < \Delta P_2$  и структура материала восстанавливается полностью.

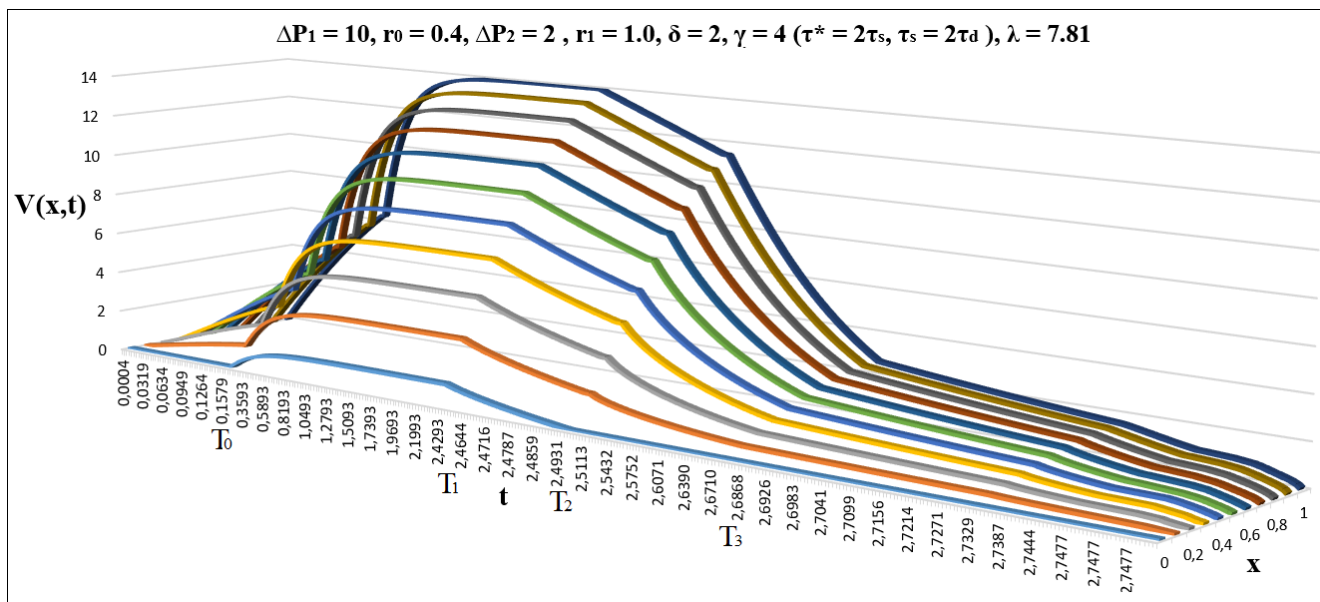


Рисунок 3.17 – Профиль скорости при завершении «проскальзывания» на переходном этапе и полном восстановлении структуры материала

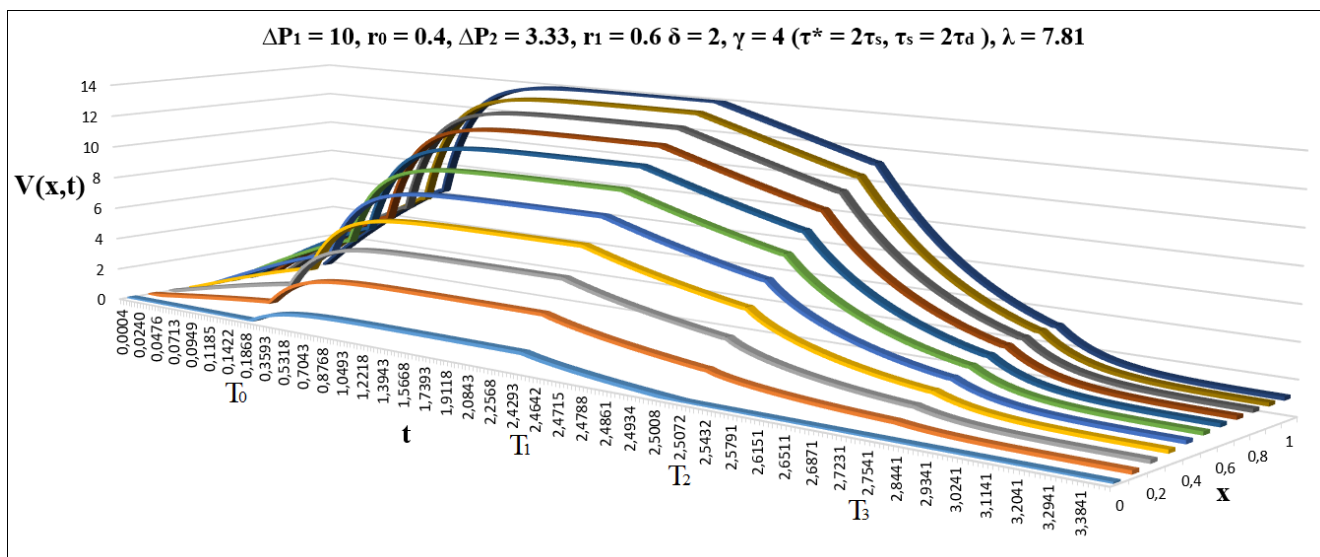


Рисунок 3.18 – Профиль скорости при завершении «проскальзывания» на переходном этапе и неполном восстановлении структуры материала

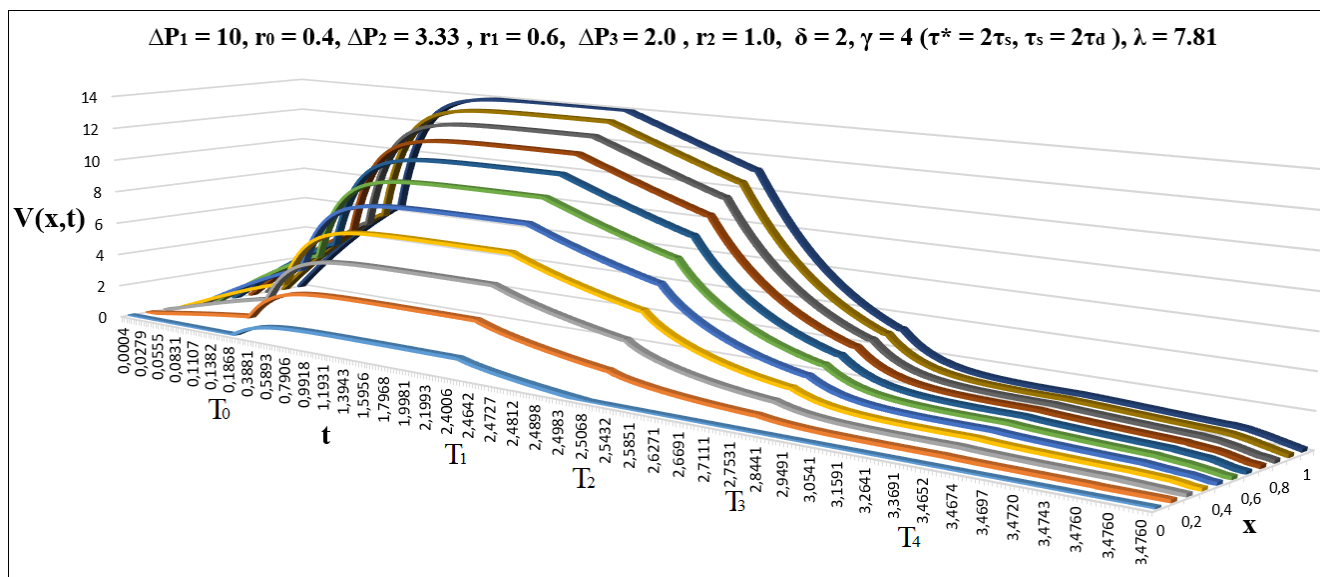


Рисунок 3.19 – Профиль скорости при повторном уменьшении перепада давления и полном восстановлении материала

На рисунке 3.20 показан профиль скорости, когда все этапы разрушения и восстановления структуры материала проходят без «проскальзывания».

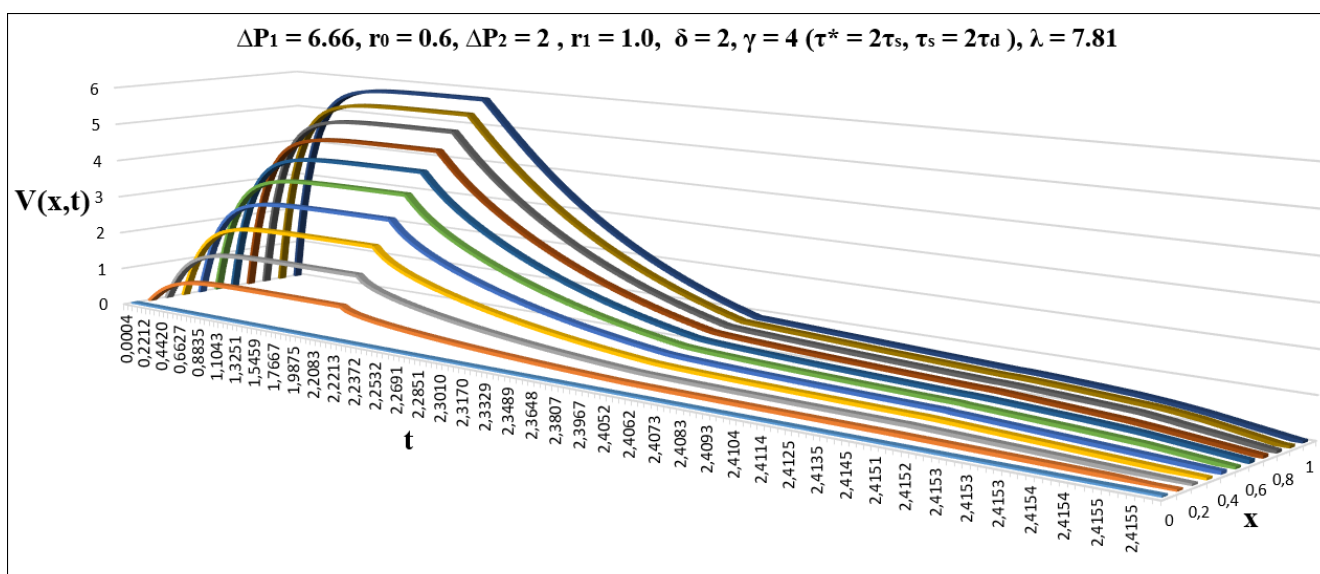


Рисунок 3.20 – Профиль скорости в отсутствие «проскальзывания» на всех этапах

## ГЛАВА 4 АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Для проверки точности предложенных численных методов решения начально-краевых задач математической физики проводится тестирование предложенных алгоритмов компьютерного моделирования на известных аналитических решениях. Аналитические решения уравнений математической физики ограничены классом т.н. автомодельных решений, в которых переходом к новым независимым и зависимым переменным сокращается число независимых переменных в исходных дифференциальных уравнениях, и уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Помимо тестирования численных алгоритмов, автомодельные решения имеют самостоятельный интерес, поскольку характеризуют те или иные физические эффекты.

Найдены пять автомодельных решений для задач течений вязкопластических сред: для этапа развития течения по одному решению для плоскопараллельного и осесимметричного движения среды, два решения для этапа восстановления структуры при плоскопараллельном движении и одно решение для этапа восстановления структуры при осесимметричном движении среды. Во всех случаях использовались безразмерные переменные и параметры. Для проверки корректности численных алгоритмов данные решения модифицировались так, чтобы учесть влияние распределенных по объему внешних сил в плоскопараллельном случае и градиента давления – в осесимметричном. Поскольку для автомодельных решений задач о развитии течений начальные условия соответствуют покою среды, сравнение с вычислительным экспериментом проводилось для данного случая.

### 4.1 Этап развития течения для плоскопараллельного движения

Рассматривается развитие течения вязкопластической среды между неограниченными горизонтальными пластинами, находящиеся на единичном расстоянии друг от друга. Пластины начинают двигаться из состояния покоя,

приводя в движение среду. Абсолютное значение скорости увеличивается по степенному закону.

Зона вязкопластического течения характеризуется подвижной границей  $y_0(t)$ , которая движется от нижней пластины ( $y = 0$ ) к верхней ( $y = 1$ ). Решение имеет физический смысл вплоть до момента времени, пока подвижная граница не достигнет верхней пластины.

Задается закономерность её изменения во времени (4.4) и определяется соответствующее распределение скоростей. По аналогии с задачей о течении по наклонной плоскости полагаем  $\partial V_x / \partial y < 0$ .

Дифференциальное уравнение на этапе развития течения вязкопластической жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial V_x(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 V_x(y,t)}{\partial y^2} \quad (4.1)$$

$$V_x(y,0) = 0, \quad y_0(0) = 0 \quad (4.2)$$

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y=y_0} = \text{Sen}_d(\delta - 1) \quad (4.3)$$

Здесь  $y = y_0(t)$  характеризует положение подвижной границы раздела фаз.

Автомодельное решение имеет вид:

$$y_0(t) = \xi_0 \sqrt{t}, \quad \xi_0 > 0 \quad (4.4)$$

$$V_x = t^\alpha V(\xi), \quad \xi = y / \sqrt{t} \quad (4.5)$$

Из (4.1) и (4.5)

$$V'' = -\frac{\xi}{2} V' + \alpha V \quad (4.6)$$

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y=y_0} = \text{Sen}_d(\delta - 1) = t^{\alpha-1/2} V' \Big|_{\xi=\xi_0}, \quad \text{откуда} \quad \alpha = 1/2 \quad \text{и} \quad (4.2) \quad \text{выполняется}$$

автоматически. Следовательно



$$V'' = -\frac{\xi}{2}V' + \frac{V}{2} \quad (4.7)$$

$$V'|_{\xi=\xi_0} = \text{Sen}_d(\delta - 1) \quad (4.8)$$

Решая (4.7) при условии (4.8), получаем:

$$V(\xi) = C_1\xi + C_2 \left( e^{-\xi^2/4} + \frac{\xi}{2} \int_0^{\xi} e^{-\xi^2/4} d\xi \right) \quad (4.9)$$

Из (4.5) и  $\alpha = 1/2$  находим  $C_2 < 0$ . Продифференцировав (4.9) и положив  $\xi = \xi_0$

получим  $C_1 = \text{Sen}_d(\delta - 1) - \frac{C_2}{2} \int_0^{\xi_0} e^{-\xi^2/4} d\xi$ .

$$V(\xi) = \text{Sen}_d(\delta - 1)\xi + C_2 \left( e^{-\xi^2/4} - \frac{\xi}{2} \int_{\xi}^{\xi_0} e^{-\xi^2/4} d\xi \right) \quad (4.10)$$

$$V(\xi)|_{\xi=\xi_0} = \text{Sen}_d(\delta - 1)\xi_0 + C_2 e^{-\xi_0^2/4} \quad (4.11)$$

Положим  $C_2 = -A$ ,  $A > 0$ , получим

$$V(\xi) = \text{Sen}_d(\delta - 1)\xi + A \left( \frac{\xi}{2} \int_{\xi}^{\xi_0} e^{-\xi^2/4} d\xi - e^{-\xi^2/4} \right) \quad (4.12)$$

$$V'(\xi) = \text{Sen}_d(\delta - 1) + \frac{A}{2} \int_{\xi}^{\xi_0} e^{-\xi^2/4} d\xi \quad (4.13)$$

$$V|_{\xi=\xi_0} = \text{Sen}_d(\delta - 1)\xi_0 - Ae^{-\xi_0^2/4} \quad (4.14)$$

Из (4.5) и (4.12)

$$V_x|_{y=0} = -A\sqrt{t}, \quad A > 0 \quad (4.15)$$

$$V_x(y, t) = \sqrt{t} \left[ \text{Sen}_d(\delta - 1)\xi + A \left( \frac{\xi}{2} \int_{\xi}^{\xi_0} e^{-\xi^2/4} d\xi - e^{-\xi^2/4} \right) \right], \quad \xi = y / \sqrt{t} \quad (4.16)$$

$$V_x|_{y=y_0(t)} = \left[ \text{Sen}_d(\delta - 1)\xi_0 - Ae^{-\xi_0^2/4} \right] \sqrt{t}, \quad V_x|_{y>y_0(t)} = V_x|_{y=y_0(t)} \quad (4.17)$$

Это решение удовлетворяет начальным условиям (4.2). В автомодельном решении (4.15) – (4.17)  $A > 0$ ,  $\xi_0 > 0$  – произвольные параметры.

#### 4.2 Этап интенсивного угасания течения с восстановлением структуры материала для плоскопараллельного движения

Рассматривается угасание течения вязкопластической среды между неограниченными горизонтальными пластинами, находящиеся на единичном расстоянии друг от друга. Верхняя пластина ( $y = 1$ ) интенсивно тормозится по степенному закону, и формально при  $t \rightarrow +0$  ее скорость неограничена. Скорость движения нижней пластины сначала несущественно возрастает, а потом стабилизируется.

Зона вязкопластического течения характеризуется подвижной границей  $y_0(t)$ , которая движется от верхней пластины ( $y = 1$ ) к нижней ( $y = 0$ ). Решение имеет физический смысл вплоть до момента времени, пока подвижная граница не достигнет нижней пластины. По аналогии с задачей о течении по наклонной плоскости полагаем  $\partial V_x / \partial y < 0$ .

Дифференциальное уравнение на этапе торможения течения вязкопластической жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial V_x(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 V_x(y,t)}{\partial y^2} \quad (4.18)$$

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y=y_0} = 0 \quad (4.19)$$

$$V_x|_{y \geq y_0(t)} = V_x|_{y=y_0(t)} \quad (4.20)$$

$$y_0(t) = 1 - \xi_0 \sqrt{t} \quad (4.21)$$

$$V_x = t^\alpha V(\xi), \quad \xi = (1 - y) / \sqrt{t} \quad (4.22)$$

Из (4.18) и (4.22)

$$V'' + \frac{\xi}{2} V' - \alpha V = 0 \quad (4.23)$$

$$V'|_{\xi=\xi_0} = 0 \quad (4.24)$$

$$V|_{\xi=\xi_0} = \pm \quad \text{так, чтобы } V' > 0 \quad (4.25)$$

Пусть  $\alpha = -1/2$ , тогда

$$V(\xi) = C_2 e^{-\frac{(\xi^2 - \xi_0^2)}{4}} + C_1 \int_{\xi_0}^{\xi} e^{\xi^2/4} d\xi \quad (4.26)$$

Из (4.25) следует  $C_2 = \pm 1$ . Продифференцировав (4.26), положив  $\xi = \xi_0$  и учитывая

$$V'(\xi_0) = 0 \quad \text{получим } C_1 = \pm \frac{\xi_0}{2} e^{-\xi_0^2/4}$$

$$V(\xi) = \pm \left[ e^{-\frac{(\xi^2 - \xi_0^2)}{4}} + \frac{\xi_0}{2} e^{-\xi_0^2/4} \int_{\xi_0}^{\xi} e^{\xi^2/4} d\xi \right] \quad (4.27)$$

$$V'(\xi) = \pm \frac{\xi_0}{2} \left( 1 - \frac{\xi}{2} e^{-\xi^2/4} \int_{\xi_0}^{\xi} e^{\xi^2/4} d\xi \right) \pm \frac{\xi}{2} e^{-\frac{(\xi^2 - \xi_0^2)}{4}} \quad (4.28)$$

При  $\xi > \xi_0 \gg 1$  учитывая, что  $V(\xi) = 0$  в формулах (4.27) и (4.28) выбирается «+». Из (4.21), (4.22) и (4.27)

$$V_x(y, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[ e^{-\frac{(\xi^2 - \xi_0^2)}{4}} + \frac{\xi_0}{2} e^{-\xi_0^2/4} \int_{\xi_0}^{\xi} e^{\xi^2/4} d\xi \right] \quad (4.29)$$

Вплоть до времени достижения подвижной границы нижней пластины, т.е. при  $t \leq \xi_0^{-2}$

$$V_x(0, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[ e^{-\frac{(1/t - \xi_0^2)}{4}} + \frac{\xi_0}{2} e^{-1/(4t)} \int_{\xi_0}^{1/\sqrt{t}} e^{\xi^2/4} d\xi \right] \quad (4.30)$$

### 4.3 Этап плавного угасания течения с восстановлением структуры материала для плоскопараллельного движения

Рассматривается угасание течения вязкопластической среды между неограниченными горизонтальными пластинами, находящиеся на единичном расстоянии друг от друга. Верхняя пластина ( $y = 1$ ) плавно тормозится так, что ее скорость убывает по абсолютной величине от единичного значения. Скорость движения нижней пластины незначительно убывает по абсолютной величине.

Зона вязкопластического течения характеризуется подвижной границей  $y_0(t)$ , которая движется от верхней пластины ( $y = 1$ ) к нижней ( $y = 0$ ). Решение имеет физический смысл вплоть до момента времени, пока подвижная граница не достигнет нижней пластины. По аналогии с задачей о течении по наклонной плоскости полагаем  $\partial V_x / \partial y < 0$ .

Дифференциальное уравнение на этапе торможения течения вязкопластической жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial V_x(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 V_x(y,t)}{\partial y^2} \quad (4.31)$$

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y=y_0} = 0 \quad (4.32)$$

$$V_x|_{y \geq y_0(t)} = V_x|_{y=y_0(t)} \quad (4.33)$$

$$y_0(t) = 1 - \xi_0 \sqrt{t} \quad (4.34)$$

$$V_x = t^{1/2} V(\xi) - 1, \quad \xi = (1 - y) / \sqrt{t} \quad (4.35)$$

Из (4.31) и (4.35)

$$V'' + \frac{1}{2} (\xi V' - V) = 0 \quad (4.36)$$

$$V'|_{\xi=\xi_0} = 0 \quad (4.37)$$

$$V|_{\xi=\xi_0} = 1 \quad (4.38)$$

Общее решение уравнения (4.36) имеет вид

$$V(\xi) = C_1\xi + C_2 \left( e^{-\xi^2/4} + \frac{\xi}{2} \int_{\xi_0}^{\xi} e^{-\zeta^2/4} d\zeta \right) d\xi \quad (4.39)$$

Из (4.37) и (4.38) следует  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = e^{\xi_0^2/4}$ , т.е.

$$V(\xi) = e^{\xi_0^2/4} \left[ e^{-\xi^2/4} + \frac{\xi}{2} \int_{\xi_0}^{\xi} e^{-\zeta^2/4} d\zeta \right] \quad (4.40)$$

$$V'(\xi) = \frac{\xi}{2} \int_{\xi_0}^{\xi} e^{-\zeta^2/4} d\zeta > 0, \quad \xi > \xi_0 \quad (4.41)$$

Из (4.34), (4.35) и (4.40)

$$V_x(y,t) = \sqrt{t} e^{\xi_0^2/4} \left[ e^{-\xi^2/4} + \frac{\xi}{2} \int_{\xi_0}^{\xi} e^{-\zeta^2/4} d\zeta \right] - 1, \quad \xi = (1-y)/\sqrt{t} \quad (4.42)$$

$$V_x|_{y \geq y_0} = \sqrt{t} - 1, \quad y_0(t) = 1 - \xi_0 \sqrt{t}$$

Вплоть до времени достижения подвижной границы нижней пластины, т.е. при  $t \leq \xi_0^{-2}$

$$V_x(0,t) = \sqrt{t} e^{\xi_0^2/4} \left[ e^{-1/(4t)} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \int_{\xi_0}^{1/\sqrt{t}} e^{-\zeta^2/4} d\zeta \right] - 1 \quad (4.43)$$

#### 4.4 Сравнение аналитического и численного решений на этапе развития течения для плоскопараллельного движения.

Аналогично п. 2.1 раздела 2, рассматривается нестационарное течение вязкопластической среды, в начальный момент находящейся в состоянии покоя, между параллельными стенками. Среда приводится в движение под воздействием силы тяжести и начинающих двигаться стенок. Точное решение начально-краевой

задачи в данном случае может быть получено из формул (4.15) – (4.17) преобразованием (не изменяющим  $\partial V_x / \partial y$ )

$$V_x(y,t) \rightarrow V_x(y,t) + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} t \sin \alpha, A \rightarrow -A \quad (4.44)$$

Автомодельное решение (4.15)–(4.17) принимает вид

$$y_0(t) = \xi_0 \sqrt{t}, V_x^{(a)}(y,t) = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} t \sin \alpha + \sqrt{t} V(\xi), \xi = y / \sqrt{t} \quad (4.45)$$

$$V(\xi) = \text{Sen}_d(\delta - 1)\xi + A \left( e^{-\xi^2/4} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \left( \text{erf} \frac{\xi_0}{2} - \text{erf} \frac{\xi}{2} \right) \right)$$

Заметим, что при  $A < \frac{2\text{Sen}_d(\delta - 1)}{\sqrt{\pi}}$ , величина

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \text{Sen}_d(\delta - 1) + \frac{A\sqrt{\pi}}{2} \left( \text{erf} \frac{\xi}{2} - \text{erf} \frac{\xi_0}{2} \right) > 0$$

Дифференциальное уравнение на этапе развития течения вязкопластической жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial V_x(y,t)}{\partial t} = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha + \frac{\partial^2 V_x(y,t)}{\partial y^2} \quad (4.46)$$

$$h(t_0) = y_0(t_0), V_x(y,t_0) = V_x^{(a)}(y,t_0) \quad (4.47)$$

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y=h} = \text{Sen}_d(\delta - 1) \quad (4.48)$$

$$V_x|_{y=0} = U_1(t) = V_x^{(a)}(0,t) = At^{1/2} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} t \sin \alpha \quad (4.49)$$

$$V_x|_{y=h} = U_2(t) = V_x^{(a)}(h,t) = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} t \sin \alpha + \sqrt{t} \left[ \text{Sen}_d(\delta - 1)\xi + Ae^{-\xi_0^2/4} \right] \quad (4.50)$$

Непосредственное численное интегрирование задачи типа Стефана с подвижной границей затруднительно. В связи с этим необходимо отображение области с подвижной границей на область с постоянными границами. Вводя новые переменные по формулам:

$$z = y / h(t), V_x(z,t) = V_x(y,t) \quad (4.51)$$

получим краевую задачу в области с постоянными границами  $0 \leq z \leq 1$ .

$$\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial t} = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha(t) + z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{h^2(t)} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} \quad (4.52)$$

$$h(t_0) = \xi_0 \sqrt{t_0}, \quad V_x(z, t_0) = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} t \sin \alpha + \sqrt{t} V(\xi), \quad \xi = \xi_0 z \quad (4.53)$$

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial z} \right)_{z=1} = \text{Sen}_d(\delta - 1) h \quad (4.54)$$

$$V_x|_{z=0} = U_1(t) = A\sqrt{t} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} t \sin \alpha \quad (4.55)$$

$$V_x|_{z=1} = U_2(t) = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} t \sin \alpha + \sqrt{t} [\text{Sen}_d(\delta - 1) \xi_0 + A e^{-\xi_0^2/4}] \quad (4.56)$$

Начально-краевая задача зависит от параметров  $\xi_0 > 0$ ,  $A < 0$ ,  $\alpha < 0$ .

Из (4.52) и (4.56)

$$U_2' = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha(t) + \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=1} + \frac{1}{h^2(t)} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} \Big|_{z=1} \quad (4.57)$$

Подставляя (4.54) в (4.57)

$$U_2' = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha(t) + h'(t) \text{Sen}_d(\delta - 1) + \frac{1}{h^2(t)} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} \Big|_{z=1} \quad (4.58)$$

Получаем выражение для  $h'(t)$

$$h'(t) = \frac{1}{\text{Sen}_d(\delta - 1)} \left( U_2' - \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha(t) - \frac{1}{h^2(t)} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} \Big|_{z=1} \right) \quad (4.59)$$

Дискретизация начально-краевой задачи (4.52) – (4.56), (4.59) по независимым пространственным переменным выполняется на основе проекционного метода Галёркина с базисными функциями в форме ортогональных полиномов Чебышева 1-го рода. Уравнения с требуемой степенью точности заменяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности, которая далее интегрируется численно.

Представим функцию  $V_x(z,t)$  в виде ряда по ортогональным полиномам

Чебышёва:

$$V_x(z, t) \approx \sum_{n=0}^{N+2} V_{x_n}(t) T_n(2z-1), \quad T_n(z) = \cos(n \arccos z) \quad (4.60)$$

Представим (4.52) в виде:

$$\frac{\partial V_x(z, t)}{\partial t} = \mathbb{F}[V_x]; \quad \mathbb{F}[V_x] = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha(t) + z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V_x(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{h^2(t)} \frac{\partial^2 V_x(z, t)}{\partial z^2} \quad (4.61)$$

Из (4.55) и (4.60) следует

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{x_n}(t) = U_1 \quad (4.62)$$

Из (4.54) и (4.60)

$$\sum_{n=1}^{N+2} n^2 V_{x_n}(t) = \frac{h(t) \text{Sen}_d(\delta-1)}{2} \quad (4.63)$$

Для того, чтобы приближенно выполнить уравнение (4.60), требуем:

$$\sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(0)} V'_m(t) = \int_0^1 \mathbb{F}[V] T_n(2z-1) dz = 0, \quad n=0, \overline{N} \quad (4.64)$$

$$A_{n,m}^{(0)} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) dx \quad (4.65)$$

$$A_{n,m}^{(k)} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m^{(k)}(x) dx$$

(4.62), (4.63) и (4.64) представляет собой записанную в неявной форме систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Приведение её к нормальной форме Коши

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y} = (V_{x_0}, V_{x_1}, \dots, V_{x_N}, h)^T \quad (4.66)$$

и нахождение величины  $\mathbf{Y}'$  по известным в текущий момент времени  $t$  величинам  $\mathbf{Y}$  выполняется в следующей последовательности.

Из (4.62) и (4.63) находим  $V_{x_{N+1}}$  и  $V_{x_{N+2}}$  по  $V_{x_0}, V_{x_1}, \dots, V_{x_N}$  и  $h$ , из (4.59) находим  $h'(t)$ .

Далее продифференцируем (4.62) и (4.63) по  $t$ .



$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V'_{x_n}(t) = 0, \quad 0 < t \leq T_0 \quad (4.67)$$

$$\sum_{n=0}^{N+2} n^2 V'_{x_n}(t) = \frac{h'(t) \text{Sen}_d (\delta - 1)}{2} \quad (4.68)$$

Уравнения (4.64), (4.67) и (4.68) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V'_{x_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N, N + 1, N + 2$ . Начальное условие для величины  $h$  задается непосредственно в (4.53), а начальные условия для  $V_{x_0}, V_{x_1}, \dots, V_{x_N}$  находятся из (4.53) в результате численного интерполирования по смещенным ортогональным полиномам Чебышева 1-го рода.

Ниже в таблице 1 приведено сравнение численных и аналитических результатов решения для границы раздела фаз течения при плоскопараллельном движении на этапе развития течения при  $N = 9$ . Моделирование течения вязкопластической среды проводится для безразмерных параметров, заданных по формулам (2.8), (2.16). Значения безразмерных параметров, следующие:  $\alpha = \pi/6$ ,  $A = 1$ ,  $\delta = 2$ ,  $\text{Sen}_d = 4.307$ ,  $\text{Fr} = 0.102$ ,  $\text{Re} = 7.03$ .

Таблица 1. Сравнение аналитического и численного решений для границы раздела фаз в зависимости от времени.

t – время	$h(t)$ – граница раздела фаз (численное решение)	$h(t)$ – граница раздела фаз (точное решение)
0,1	0,316228	0,316228
0,19	0,435886	0,43589
0,28	0,529144	0,52915
0,37	0,608268	0,608276
0,46	0,678223	0,678233
0,55	0,741608	0,74162
0,64	0,799986	0,8
0,73	0,854385	0,8544
0,82	0,905522	0,905539
0,91	0,953921	0,953939
1,0	0,999981	1,0

В таблице 2 для сравнения показаны результаты численного и аналитического решений для профиля скорости при плоскопараллельном движении на этапе развития течения.

Таблица 2. Сравнение аналитического и численного решений для профиля скорости в зависимости от времени.

t = 0,1											
z	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	3,7622	3,8847	4,0087	4,1342	4,2613	4,3900	4,5201	4,6516	4,7846	4,9189	5,0545
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	3,7622	3,8847	4,0087	4,1342	4,2613	4,3900	4,5201	4,6516	4,7846	4,9189	5,0545
t = 0,19											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	6,9833	7,1521	7,3230	7,4961	7,6713	7,8485	8,0279	8,2092	8,3925	8,5776	8,7645
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	6,9833	7,1521	7,3230	7,4961	7,6713	7,8486	8,0279	8,2092	8,3925	8,5776	8,7645
t = 0,28											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	10,1780	10,3828	10,5903	10,8004	11,0131	11,2283	11,4460	11,6662	11,8886	12,1134	12,3402
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	10,1780	10,3828	10,5903	10,8004	11,0131	11,2283	11,4461	11,6662	11,8887	12,1134	12,3403
t = 0,37											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	13,3585	13,5940	13,8325	14,0740	14,3185	14,5659	14,8162	15,0692	15,3250	15,5833	15,8441
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	13,3585	13,5940	13,8325	14,0740	14,3185	14,5659	14,8162	15,0693	15,3250	15,5833	15,8441
t = 0,46											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	16,5299	16,7925	17,0584	17,3277	17,6003	17,8762	18,1552	18,4374	18,7225	19,0105	19,3013
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	16,5299	16,7925	17,0584	17,3277	17,6003	17,8762	18,1552	18,4374	18,7225	19,0106	19,3014
t = 0,55											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	19,6947	19,9818	20,2726	20,5670	20,8651	21,1668	21,4719	21,7804	22,0922	22,4072	22,7252
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	19,6947	19,9818	20,2726	20,5671	20,8652	21,1668	21,4719	21,7805	22,0923	22,4072	22,7252

t = 0,64											
z	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	22,8545	23,1642	23,4779	23,7955	24,1171	24,4425	24,7716	25,1044	25,4407	25,7805	26,1235
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	22,8545	23,1642	23,4779	23,7955	24,1171	24,4425	24,7716	25,1044	25,4408	25,7805	26,1236
t = 0,73											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	26,0103	26,3411	26,6761	27,0153	27,3587	27,7062	28,0578	28,4132	28,7724	29,1353	29,5016
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	26,0103	26,3411	26,6761	27,0153	27,3588	27,7063	28,0578	28,4133	28,7725	29,1353	29,5017
t = 0,82											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	29,1629	29,5134	29,8685	30,2280	30,5920	30,9603	31,3329	31,7096	32,0903	32,4749	32,8631
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	29,1629	29,5134	29,8685	30,2280	30,5920	30,9603	31,3329	31,7096	32,0903	32,4749	32,8632
t = 0,91											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	32,3127	32,6820	33,0560	33,4348	33,8182	34,2062	34,5987	34,9955	35,3966	35,8017	36,2107
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	32,3127	32,6820	33,0560	33,4348	33,8182	34,2062	34,5987	34,9956	35,3966	35,8018	36,2108
t = 1,0											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	35,4602	35,8473	36,2394	36,6364	37,0384	37,4451	37,8565	38,2725	38,6929	39,1176	39,5464
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	35,4602	35,8473	36,2394	36,6364	37,0384	37,4451	37,8566	38,2726	38,6930	39,1177	39,5465

Как видно из представленных в таблицах 1 и 2 результатов, уже при использовании 9 независимых слагаемых в рядах Фурье по смещенным ортогональным полиномам Чебышева 1-го рода отличие численного решения от точного автомодельного наблюдается лишь в пятой или шестой значащих цифрах (четвертый или пятый знак после запятой). Тем самым, предложенный вариант проекционного метода Галеркина оказывается достаточно эффективным для данного класса математических моделей.

#### 4.5 Этап развития течения для осесимметричного движения

Рассматривается развитие течения вязкопластической среды внутри цилиндра с подвижной внешней стенкой. Зона вязкопластического течения

характеризуется подвижной границей  $r_0(t)$ , которая движется от внешней стенки внутри цилиндра к его оси по степенному закону. Решение имеет физический смысл вплоть до момента времени  $t_0$ , пока подвижная граница не достигнет осевой линии. Задается закономерность её изменения во времени (4.73) и определяется соответствующее распределение скоростей. При этом скорость движения ядра течения уменьшается по степенному закону (4.78), но увеличивается по абсолютной величине.

Дифференциальное уравнение на этапе развития течения вязкопластической жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 V_z(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} - \frac{\text{Sen}_d}{r} \quad (4.69)$$

$$V_z(r, t_0) = \text{Const}, \quad r_0(t_0) = 1 \quad (4.70)$$

$$V_z|_{r \leq r_0(t)} = V_z|_{r=r_0(t)} \quad (4.71)$$

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial r} \right)_{r=r_0(t)} = -\text{Sen}_d(\delta - 1) \quad (4.72)$$

Автомодельное решение имеет вид:

$$r_0(t) = \xi_0 (t_{\max} - t)^{1/2}, \quad t_0 \leq t \leq t_{\max}, \quad t_0 = t_{\max} - \frac{1}{\xi_0^2} \quad (4.73)$$

$$\xi = r(t_{\max} - t)^{1/2} \quad (4.74)$$

$$V_z = (t_{\max} - t)^{1/2} V(\xi) - 1 \quad (4.75)$$

Из  $\frac{\partial V_z}{\partial r} = (t_{\max} - t)^{1/2} V'(\xi) (t - t_{\max})^{-1/2} = V'(\xi)$  и (4.72) следует

$$V'(\xi_0) = -\text{Sen}_d(\delta - 1) \quad (4.76)$$

Из  $-\frac{1}{2}(t_{\max} - t)^{-1/2} V(\xi) + \frac{1}{2} r (t_{\max} - t)^{-1} V'(\xi) = V''(\xi) (t_{\max} - t)^{-1/2} + \frac{1}{r} V'(\xi) - \frac{\text{Sen}_d}{r}$  и

(4.74) следует

$$\xi V'' + \left(1 - \frac{\xi^2}{2}\right) V' + \frac{\xi}{2} V = \text{Sen}_d \quad (4.77)$$

Полагаем

$$V(\xi_0) = A_0 > 0, \quad V_z|_{r \leq r_0} = A_0(t_{\max} - t)^{1/2} - 1 \quad (4.78)$$

Частное решение неоднородного уравнения дифференциального уравнения (4.77) имеет вид

$$V_v(\xi) = \text{Sen}_d \xi \quad (4.79)$$

Частные решения  $V_1(\xi)$  и  $V_2(\xi)$  однородного аналога дифференциального уравнения (4.77) представляют собой вырожденные гипергеометрические функции [41] и, аналогично [62], могут быть выражены через цилиндрическую функцию Бесселя мнимого аргумента и функцию Макдональда с индексами 0 и 1 [2, 14, 32, 33, 44]:

$$V_1(\xi) = e^{\xi^2/8} \left[ \left(1 - \frac{\xi^2}{4}\right) I_0\left(\frac{\xi^2}{8}\right) + \frac{\xi^2}{4} I_1\left(\frac{\xi^2}{8}\right) \right] \quad (4.80)$$

$$V_2(\xi) = e^{\xi^2/8} \left[ \left(1 - \frac{\xi^2}{4}\right) K_0\left(\frac{\xi^2}{8}\right) - \frac{\xi^2}{4} K_1\left(\frac{\xi^2}{8}\right) \right] \quad (4.81)$$

Их определитель Вронского имеет вид

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} V_1(\xi) & V_2(\xi) \\ V_1'(\xi) & V_2'(\xi) \end{vmatrix} = \frac{\text{Const}}{\xi} e^{\xi^2/4} \quad (4.82)$$

Исходя из формул, связывающих цилиндрические функции с их производными, а также из асимптотических разложений цилиндрических функций при больших значениях их аргумента, находим  $W(\xi) = -(2/\xi)e^{\xi^2/4} + \dots$ ,  $\xi \rightarrow \infty$

Таким образом, для всех  $\xi$

$$W(\xi) \equiv -\left(\frac{2}{\xi}\right) e^{\xi^2/4} \quad (4.83)$$

Общее решение неоднородного уравнения (4.77) представляет собой сумму его частного решения (4.79) и линейной комбинации частных решений соответствующего однородного уравнения, а выполнение граничных условий приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно произвольных констант. Из (4.80)–(4.83) следует, что решение линейной краевой задачи (4.76)–(4.78) имеет вид:

$$\begin{aligned}
V(\xi) = & \text{Sen}_d \xi + \frac{\xi_0}{2} \left\{ A_0 \frac{\xi_0}{4} \left( K_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) + K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) - \right. \\
& - \text{Sen}_d \left[ \delta \left( \left( 1 - \frac{\xi^2}{4} \right) K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) - \frac{\xi^2}{4} K_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) + \frac{\xi^2}{4} \left( K_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) + K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) \right] \left. \right\} \cdot \\
& \cdot e^{(\xi^2 - \xi_0^2)/8} \left[ \left( 1 - \frac{\xi^2}{4} \right) I_0 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) + \frac{\xi^2}{4} I_1 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) \right] + \frac{\xi_0}{2} \left\{ A_0 \frac{\xi_0}{4} \left( I_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) - I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) + \right. \\
& + \text{Sen}_d \left[ \delta \left( \left( 1 - \frac{\xi^2}{4} \right) I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) + \frac{\xi^2}{4} I_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) - \frac{\xi^2}{4} \left( I_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) - I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) \right] \left. \right\} \cdot \\
& \cdot e^{(\xi^2 - \xi_0^2)/8} \left[ \left( 1 - \frac{\xi^2}{4} \right) K_0 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) - \frac{\xi^2}{4} K_1 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Распределение скоростей в зоне вязкопластического течения имеет вид

$$\begin{aligned}
V_x(r, t) = & \text{Sen}_d r - 1 + \frac{\xi_0 (t_{\max} - t)^{1/2}}{2} \left\{ A_0 \frac{\xi_0}{4} \left( K_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) + K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) - \right. \\
& - \text{Sen}_d \left[ \delta \left( \left( 1 - \frac{\xi^2}{4} \right) K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) - \frac{\xi^2}{4} K_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) + \frac{\xi^2}{4} \left( K_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) + K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) \right] \left. \right\} \cdot \\
& \cdot e^{(\xi^2 - \xi_0^2)/8} \left[ \left( 1 - \frac{\xi^2}{4} \right) I_0 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) + \frac{\xi^2}{4} I_1 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) \right] + \frac{\xi_0}{2} \left\{ A_0 \frac{\xi_0}{4} \left( I_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) - I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) + \right. \\
& + \text{Sen}_d \left[ \delta \left( \left( 1 - \frac{\xi^2}{4} \right) I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) + \frac{\xi^2}{4} I_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) - \frac{\xi^2}{4} \left( I_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) - I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) \right] \left. \right\} \cdot \\
& \cdot e^{(\xi^2 - \xi_0^2)/8} \left[ \left( 1 - \frac{\xi^2}{4} \right) K_0 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) - \frac{\xi^2}{4} K_1 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) \right], \quad \xi = r(t_0 - t)^{-1/2}
\end{aligned} \tag{4.85}$$

При этом ограничивающий вязкопластическую среду цилиндр движется по закону

$$\begin{aligned}
V_x|_{r=1} = & \text{Sen}_d - 1 + \frac{\xi_0(t_{\max} - t)^{1/2}}{2} \left\{ A_0 \frac{\xi_0}{4} \left( K_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) + K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) - \right. \\
& - \text{Sen}_d \left[ \delta \left( \left( 1 - \frac{\xi_0^2}{4} \right) K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) - \frac{\xi_0^2}{4} K_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) + \frac{\xi_0^2}{4} \left( K_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) + K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) \right] \right\} \\
& \cdot \exp \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{1}{t_{\max} - t} - \xi_0^2 \right) \right] \left[ \left( 1 - \frac{1}{4(t_{\max} - t)} \right) I_0 \left( \frac{1}{8(t_{\max} - t)} \right) + \frac{1}{4(t_{\max} - t)} I_1 \left( \frac{1}{8(t_{\max} - t)} \right) \right] + \\
& + \left[ A_0 \frac{\xi_0}{4} \left( I_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) - I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) + \right. \\
& + \text{Sen}_d \left[ \delta \left( \left( 1 - \frac{\xi_0^2}{4} \right) I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) + \frac{\xi_0^2}{4} I_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) - \frac{\xi_0^2}{4} \left( I_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) - I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) \right] \right] \\
& \cdot \exp \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{1}{t_{\max} - t} - \xi_0^2 \right) \right] \left[ \left( 1 - \frac{1}{4(t_{\max} - t)} \right) K_0 \left( \frac{1}{8(t_{\max} - t)} \right) - \frac{1}{4(t_{\max} - t)} K_1 \left( \frac{1}{8(t_{\max} - t)} \right) \right] \left. \right\} \quad (4.86)
\end{aligned}$$

#### 4.6 Этап торможения течения с восстановлением структуры для осесимметричного движения

Рассматривается торможение течения вязкопластической среды с восстановлением ее структуры внутри цилиндра с подвижной внешней стенкой. Зона вязкопластического течения характеризуется подвижной границей  $r_0(t)$ , которая движется от оси внутри цилиндра к его внешней стенке по степенному закону. Задается закономерность изменения положения границы раздела фаз во времени (4.91) и определяется соответствующее распределение скоростей. При этом скорость движения ядра течения увеличивается по степенному закону (4.95), но увеличивается по абсолютной величине. Решение имеет физический смысл лишь до момента достижения границей раздела фаз поверхности цилиндра.

Дифференциальное уравнение на этапе развития течения вязкопластической жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 V_z(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} - \frac{\text{Sen}_d}{r} \quad (4.87)$$

$$V_z(r,0) = -1, \quad r_0(0) = 0 \quad (4.88)$$

$$V_z|_{r \leq r_0(t)} = V_z|_{r=r_0(t)} \quad (4.89)$$

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial r} \right)_{r=r_0(t)} = 0 \quad (4.90)$$

Автомодельное решение имеет вид:

$$r_0(t) = \xi_0 t^{1/2} \quad (4.91)$$

$$\xi = r t^{-1/2} \quad (4.92)$$

$$V_z = t^{1/2} V(\xi) - 1 \quad (4.93)$$

Из  $\frac{\partial V_z}{\partial r} = t^{1/2} V'(\xi) t^{-1/2} = V'(\xi)$  и (4.90) следует

$$V'(\xi_0) = 0 \quad (4.94)$$

Из (4.87), (4.91)- (4.93) следует

$$\xi V'' + \left( 1 + \frac{\xi^2}{2} \right) V' - \frac{\xi}{2} V = \text{Sen}_d \quad (4.95)$$

Полагаем

$$V(\xi_0) = A_0 > 0, \quad V_z|_{r \leq r_0} = A_0 t^{1/2} - 1 \quad (4.96)$$

Частное решение неоднородного уравнения дифференциального уравнения (4.95) имеет вид

$$V_v(\xi) = \text{Sen}_d \xi \quad (4.97)$$

Однородные аналоги линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (4.95) и (4.77) переходят друг в друга при переходе к мнимой независимой переменной  $\xi \rightarrow \pm i\xi$ . С учетом формул, связывающих цилиндрические функции противоположных аргументов [13, 31, 43], частные решения однородного аналога линейного обыкновенного дифференциального уравнения (4.95) и их определитель Вронского имеют вид



$$V_1(\xi) = e^{-\xi^2/8} \left[ \left( 1 + \frac{\xi^2}{4} \right) I_0 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) + \frac{\xi^2}{4} I_1 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) \right] \quad (4.98)$$

$$V_2(\xi) = e^{-\xi^2/8} \left[ \left( 1 + \frac{\xi^2}{4} \right) K_0 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) - \frac{\xi^2}{4} K_1 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) \right] \quad (4.99)$$

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} V_1(\xi) & V_2(\xi) \\ V_1'(\xi) & V_2'(\xi) \end{vmatrix} = -\frac{2}{\xi} e^{-\xi^2/4} \quad (4.100)$$

Аналогично п. 4.5, решение линейной краевой задачи (4.94)–(4.96) имеет вид

$$\begin{aligned} V(\xi) = \text{Sen}_d \xi + \frac{\xi_0}{2} e^{(\xi_0^2 - \xi^2)/8} & \left\{ \left[ A_0 \frac{\xi_0}{4} \left( I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) + I_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) + \text{Sen}_d I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right] \cdot \right. \\ & \cdot \left[ \left( 1 + \frac{\xi^2}{4} \right) K_0 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) - \frac{\xi^2}{4} K_1 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) \right] - \\ & \left. - \left[ A_0 \frac{\xi_0}{4} \left( K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) - K_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) + \text{Sen}_d K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right] \left[ \left( 1 + \frac{\xi^2}{4} \right) I_0 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) + \frac{\xi^2}{4} I_1 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.101)$$

Распределение скоростей в зоне вязкопластического течения имеет вид

$$\begin{aligned} V(r, t) = \text{Sen}_d r - 1 + t^{1/2} \frac{\xi_0}{2} e^{(\xi_0^2 - \xi^2)/8} & \left\{ \left[ A_0 \frac{\xi_0}{4} \left( I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) + I_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) + \text{Sen}_d I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right] \cdot \right. \\ & \cdot \left[ \left( 1 + \frac{\xi^2}{4} \right) K_0 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) - \frac{\xi^2}{4} K_1 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) \right] - \\ & \left. - \left[ A_0 \frac{\xi_0}{4} \left( K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) - K_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) + \text{Sen}_d K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right] \left[ \left( 1 + \frac{\xi^2}{4} \right) I_0 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) + \frac{\xi^2}{4} I_1 \left( \frac{\xi^2}{8} \right) \right] \right\} \\ \xi = rt^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.102)$$

При этом закон движения внешнего цилиндра имеет вид

$$\begin{aligned}
V|_{r=1} = & \text{Sen}_d - 1 + t^{1/2} \frac{\xi_0}{2} e^{(\xi_0^2 - 1/t)/8} \left\{ \left[ A_0 \frac{\xi_0}{4} \left( I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) + I_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) + \text{Sen}_d I_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right] \right. \\
& \cdot \left[ \left( 1 + \frac{1}{4t} \right) K_0 \left( \frac{1}{8t} \right) - \frac{1}{4t} K_1 \left( \frac{1}{8t} \right) \right] - \\
& \left. - \left[ A_0 \frac{\xi_0}{4} \left( K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) - K_1 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right) + \text{Sen}_d K_0 \left( \frac{\xi_0^2}{8} \right) \right] \left[ \left( 1 + \frac{1}{4t} \right) I_0 \left( \frac{1}{8t} \right) + \frac{1}{4t} I_1 \left( \frac{1}{8t} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

#### 4.7 Сравнение аналитического и численного решений на этапе развития течения для осесимметричного движения.

Аналогично п. 3.1 раздела 3, рассматривается нестационарное течение вязкопластической среды внутри подвижного цилиндра единичного радиуса. На среду воздействует перепад давлений. Точное решение начально-краевой задачи в данном случае может быть получено из формул (4.73)–(4.75), (4.85) преобразованием (не изменяющим  $\partial V / \partial r$ )

$$V(r, t) \rightarrow V(r, t) + \text{Sen}_d (t - t_0) \Delta P_1 \tag{4.104}$$

Автомодельное решение (4.73)–(4.75), (4.85) принимает вид

$$\begin{aligned}
r_0(t) &= \xi_0 (t_{\max} - t)^{1/2} \\
V_z(r, t) &= V_z^{(a)}(r, t) = (t_{\max} - t)^{1/2} V(\xi) - 1 + \text{Sen}_d (t - t_0) \Delta P_1 \\
\xi &= r (t_{\max} - t)^{1/2}, t_0 \leq t \leq t_{\max}
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Здесь функция  $V(\xi)$  определена формулой (4.84).

Исходное автомодельное решение было получено в предположении, что скорость движения ядра течения отрицательна, уменьшается по степенному закону, но увеличивается по абсолютной величине. В результате для преобразованного автомодельного решения (4.105) при  $\Delta P_1 > 0$  возможна ситуация, когда в начальные моменты скорость движения вязкопластической среды отрицательна, а затем она возрастает и становится положительной.

Дифференциальное уравнение на этапе развития течения вязкопластической жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 V_z(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} + \text{Sen}_d \left( \Delta P_1 - \frac{1}{r} \right) \quad (4.106)$$

$$V_z(r,t_0) = V_z^{(a)}(r,t_0), \quad r_0(t_0) = \xi_0(t_{\max} - t_0)^{1/2}, \quad t_0 > t_{\max} - \frac{1}{\xi_0^2} \quad (4.107)$$

$$V_z|_{r \leq r_0(t)} = V_z|_{r=r_0(t)} \quad (4.108)$$

$$V_z|_{r=r_0(t)} = V_z^{(a)}(r_0^{(a)}(t), t) \quad (4.109)$$

$$V_z|_{r=1} = V_z^{(a)}(1, t) \quad (4.110)$$

$$\left. \frac{\partial V_z}{\partial r} \right|_{r=r_0(t)} = -\text{Sen}_d(\delta - 1) \quad (4.111)$$

После перехода к деформированной радиальной координате

$$r = 1 - (1 - r_0)x \quad (4.112)$$

начально-краевая задача (4.106)–(4.111) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial t} = & \frac{1}{(1-r_0)^2} \frac{\partial^2 V_z(x,t)}{\partial x^2} - \\ & - \frac{1}{1-r_0} \left( xr'_0 + \frac{1}{1-(1-r_0)x} \right) \frac{\partial V_z(x,t)}{\partial x} + \text{Sen}_d \left( \Delta P_1 - \frac{1}{1-(1-r_0)x} \right) \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$r_0(t_0) = \xi_0(t_{\max} - t_0)^{1/2}, \quad V_z(x,t_0) = V_z^{(a)}(1 - (1 - r_0(t_0))x, t_0), \quad t_0 > t_{\max} - \frac{1}{\xi_0^2} \quad (4.114)$$

$$V_z|_{x=0} = V_z^{(a)}(1, t) \quad (4.115)$$

$$V_z|_{x=1} = A_0(t_{\max} - t)^{1/2} - 1 + \text{Sen}_d \Delta P_1(t - t_0) \quad (4.116)$$

$$\left. \frac{\partial V_z}{\partial x} \right|_{x=1} = \text{Sen}_d(\delta - 1)(1 - r_0) \quad (4.117)$$

Из (4.113), (4.116), (4.117) следует

$$\begin{aligned} \text{Sen}_d \Delta P_1 - \frac{1}{2} A_0(t_{\max} - t)^{-1/2} &= \mathbb{F}[V]|_{x=1} = \\ &= \frac{1}{(1-r_0)^2} \left. \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} \right|_{x=1} - \left( r'_0 + \frac{1}{r_0} \right) \text{Sen}_d(\delta - 1) + \text{Sen}_d \left( \Delta P_1 - \frac{1}{r_0} \right) \end{aligned}$$

откуда находим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно  $r_0(t)$ .

$$r_0' = \frac{1}{\text{Sen}_d(\delta-1)} \left[ \frac{1}{(1-r_0)^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} \Big|_{x=1} + \frac{1}{2} A_0 (t_{\max} - t)^{-1/2} - \frac{\text{Sen}_d \delta}{r_0} \right] \quad (4.118)$$

Представим функцию  $V_z(x, t)$  в виде ряда по ортогональным полиномам Чебышёва:

$$V_z(x, t) \approx \sum_{n=0}^{N+2} V_{z_n}(t) T_n(2x-1), \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (4.119)$$

Представим (4.113) в виде:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}[V] = & \frac{\partial V_z(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{(1-r_0(t))^2} \frac{\partial^2 V_z(x, t)}{\partial x^2} + \\ & + \frac{1}{1-r_0(t)} \left( x r_0'(t) + \frac{1}{1-(1-r_0(t))x} \right) \frac{\partial V_z(x, t)}{\partial x} - \text{Sen}_d \left( \Delta P_1 - \frac{1}{1-(1-r_0(t))x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.120)$$

из (4.115) и (4.119) следует

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{z_n}(t) = 0, \quad 0 < t \leq T_0 \quad (4.121)$$

из (4.117) и (4.119)

$$\sum_{n=1}^{N+2} n^2 V_{z_n}(t) = \frac{(1-r_0(t))(\delta-1)\text{Sen}_d}{2} \quad (4.122)$$

из (4.118) и (4.119)

$$r_0'(t) = \frac{1}{\text{Sen}_d(\delta-1)} \left( \frac{4}{3(1-r_0(t))^2} \sum_{n=0}^{N+2} n^2(n^2-1) V_{z_n}(t) + \frac{1}{2} A_0 (t_{\max} - t)^{-1/2} - \frac{\text{Sen}_d \delta}{r_0} \right) \quad (4.123)$$

Для того, чтобы приближенно выполнить уравнение (4.119), требуем:

$$\int_0^1 [1 - (1-r_0)x] \mathbb{F}[V] T_n(2x-1) dx = 0, \quad n = \overline{0, N} \quad (4.124)$$

$$A_{n,m}^{(0)} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) dx, \quad A_{n,m}^{(k)} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m^{(k)}(x) dx, \quad \text{откуда}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{N+2} V'_m(t) \left\{ A_{n,m}^{(0)} - \frac{1-r_0(t)}{2} \left[ A_{n,m}^{(0)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,m}^{(0)} + A_{n-1,m}^{(0)}) \right] \right\} + \\
& + \sum_{m=0}^{N+2} V_m(t) \left[ A_{n,m}^{(2)} \left( \frac{2}{1-r_0(t)} - \frac{4}{(1-r_0(t))^2} \right) + \frac{1}{1-r_0(t)} (A_{n+1,m}^{(2)} + A_{n-1,m}^{(2)}) \right] + \\
& + \frac{r'_0(t)}{1-r_0(t)} \sum_{m=0}^{N+2} V_m(t) \left[ A_{n,m}^{(1)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,m}^{(1)} + A_{n-1,m}^{(1)}) \right] - \\
& - \frac{r'_0(t)}{4} \sum_{m=0}^{N+2} V_m(t) \left[ \frac{3}{2} A_{n,m}^{(1)} + A_{n+1,m}^{(1)} + A_{n-1,m}^{(1)} + \frac{1}{4} (A_{n+2,m}^{(1)} + A_{n-2,m}^{(1)}) \right] + \\
& + \frac{2}{1-r_0(t)} \sum_{m=0}^{N+2} V_m(t) A_{n,m}^{(1)} - \frac{r_0(t) \text{Sen}_d \Delta P_1}{2} \left[ A_{n,0}^{(0)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,0}^{(0)} + A_{n-1,0}^{(0)}) \right] + \text{Sen}_d = 0
\end{aligned} \tag{4.125}$$

Система (4.121)–(4.122), (4.125) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка задана в неявной форме. Приведение её к нормальной форме Коши  $\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{Y} = (V_{z_0}, V_{z_1}, \dots, V_{z_N}, r_0)^T$  и нахождение величины  $\mathbf{Y}'$  по известным в текущий момент времени  $t$  величинам  $\mathbf{Y}$  выполняется в следующей последовательности.

Из (4.121) и (4.122) находим  $V_{z_{N+1}}$  и  $V_{z_{N+2}}$  по  $V_{z_0}, V_{z_1}, \dots, V_{z_N}$ . Из (4.123) находим  $r'(t)$ . Далее продифференцируем (4.121) и (4.122) по  $t$ .

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V'_{z_n}(t) = 0, \quad 0 < t \leq T_0 \tag{4.126}$$

$$\sum_{n=0}^{N+2} n^2 V'_{z_n}(t) = \frac{-r'_0(t)(\delta-1)\text{Sen}_d}{2} \tag{4.127}$$

Уравнения (4.125)–(4.127) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно  $V'_{z_n}$ ,  $n=0, 1, \dots, N, N+1, N+2$ . Начальное условие для величины  $r_0$  задается непосредственно в (4.114), а начальные условия для  $V_{z_0}, V_{z_1}, \dots, V_{z_N}$  находятся из (4.114) в результате численного интерполирования по смещенным ортогональным полиномам Чебышева 1-го рода.

Ниже в таблице 3 приведено сравнение численных и аналитических результатов решения для границы раздела фаз течения при осесимметричном движении на этапе развития течения при  $N=9$ . Моделирование течения

вязкопластической среды проводится для безразмерных параметров, заданных по формуле (3.11). Значения безразмерных параметров, следующие:  $\Delta P_1 = 1$ ,  $A = 1$ ,  $\delta = 2$ ,  $Sen_d = 8.615$ ,  $Re = 14.0625$ .

Таблица 3. Сравнение аналитического и численного решений для границы раздела фаз в зависимости от времени.

t – время	$r_0(t)$ – граница раздела фаз (численное решение)	$r_0(t)$ – граница раздела фаз (точное решение)
0,1	0,948683	0,948683
0,17	0,911043	0,911043
0,24	0,87178	0,87178
0,31	0,830662	0,830662
0,38	0,787401	0,787401
0,45	0,74162	0,74162
0,52	0,69282	0,69282
0,59	0,640312	0,640312
0,66	0,583095	0,583095
0,73	0,519615	0,519615
0,8	0,447215	0,447214

В таблице 4 для сравнения показаны результаты численного и аналитического решений для профиля скорости при осесимметричном движении на этапе развития течения.

Таблица 4. Сравнение аналитического и численного решений для профиля скорости в зависимости от времени.

t = 0,1											
z	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	-0,476732	-0,435648	-0,394248	-0,35253	-0,31049	-0,26812	-0,22543	-0,18240	-0,13905	-0,09535	-0,05131
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	-0,476732	-0,435648	-0,394248	-0,35253	-0,31049	-0,26812	-0,22543	-0,18240	-0,13905	-0,09535	-0,05131

t = 0,17											
z	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	-0,201384	-0,134184	-0,066061	0,003001	0,07301	0,144003	0,215977	0,288955	0,362955	0,437996	0,514096
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	-0,201384	-0,134184	-0,066061	0,003001	0,07301	0,144003	0,215977	0,288954	0,362955	0,437995	0,514096
t = 0,24											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	0,080737	0,171484	0,264097	0,35862	0,455099	0,553581	0,654116	0,756758	0,861561	0,968583	1,07788
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	0,080737	0,171484	0,264097	0,35862	0,455098	0,55358	0,654116	0,756758	0,861561	0,968583	1,07788
t = 0,31											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	0,371866	0,483133	0,597564	0,715255	0,83630	0,96083	1,08894	1,22076	1,35641	1,49605	1,63982
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	0,371866	0,483133	0,597564	0,715255	0,83630	0,960829	1,08894	1,22076	1,35641	1,49605	1,63982
t = 0,38											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	0,675136	0,803275	0,93626	1,07427	1,2175	1,36616	1,52048	1,6807	1,8471	2,01996	2,19961
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	0,675136	0,803275	0,93626	1,07427	1,2175	1,36616	1,52048	1,6807	1,8471	2,01996	2,19961
t = 0,45											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	0,995086	1,13557	1,28302	1,43773	1,60004	1,7703	1,94893	2,13637	2,33313	2,53976	2,75688
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	0,995086	1,13557	1,28302	1,43773	1,60004	1,7703	1,94893	2,13637	2,33313	2,53976	2,75688
t = 0,52											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	1,33861	1,4856	1,64221	1,80887	1,98612	2,17453	2,37477	2,58762	2,81394	3,05473	3,31113
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	1,33861	1,4856	1,64221	1,80887	1,98612	2,17453	2,37477	2,58762	2,81394	3,05473	3,31113
t = 0,59											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	1,7168	1,86236	2,02088	2,19299	2,37944	2,58112	2,79906	3,0345	3,28889	3,56393	3,86168
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	1,7168	1,86236	2,02088	2,19299	2,37944	2,58112	2,79906	3,0345	3,28889	3,56393	3,86168
t = 0,66											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	2,14908	2,28149	2,43134	2,5994	2,78665	2,99435	3,22403	3,47756	3,75728	4,06607	4,40751
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	2,14908	2,28149	2,43134	2,5994	2,78666	2,99435	3,22403	3,47756	3,75728	4,06608	4,40751

t = 0,73											
z	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	2,67385	2,77355	2,8974	3,0461	3,22075	3,42287	3,65456	3,91859	4,21859	4,55932	4,94708
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	2,67385	2,77355	2,8974	3,0461	3,22075	3,42287	3,65456	3,91859	4,21859	4,55933	4,94708
t = 0,8											
$V_{x_n}(t)_{числ.}$	3,38335	3,40997	3,47363	3,57387	3,71107	3,88651	4,10257	4,36296	4,67313	5,04095	5,47772
$V_{x_n}(t)_{точн.}$	3,38335	3,40996	3,47363	3,57387	3,71107	3,88651	4,10257	4,36296	4,67314	5,04095	5,47774

Как видно из представленных в таблицах 3 и 4 результатов, уже при использовании 9 независимых слагаемых в рядах Фурье по смещенным ортогональным полиномам Чебышева 1-го рода отличие численного решения от точного автомодельного наблюдается лишь в шестой или седьмой значащих цифрах (пятый или шестой знак после запятой). Тем самым, предложенный вариант проекционного метода Галеркина оказывается достаточно эффективным для данного класса математических моделей.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана математическая модель неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред на основе модели Слибара – Паслая, отличающаяся от известных аналогов учетом возможного «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки. На основе разработанной модели изучено влияние эффектов гистерезиса и «проскальзывания» вдоль твердой стенки на характеристики движения вязкопластической среды.

Предложен и реализован метод численного моделирования для решения задач неустановившегося течения вязкопластических сред, отличающийся от известных решений отображением области с подвижной границей на неподвижную область, применением дискретизации по независимой пространственной переменной на основе проекционного метода Галеркина, и дальнейшим численным интегрированием по времени задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Найдены точные аналитические автомодельные решения для ряда режимов нестационарных течений вязкопластической среды. По результатам сравнения с автомодельными решениями показана высокая точность предложенных методов численного моделирования.

На основе предложенного метода проведено детальное исследование продвижения границы раздела фаз течения на всех этапах компьютерного моделирования (развитие течения, переходные этапы, восстановление структуры) и изучено влияние эффектов гистерезиса и «проскальзывания» вязкопластической среды вдоль твердой стенки.

Выполнена корректная постановка начально-краевых задач развития течения с особенностями в начальный момент времени, и для этого использованы методы асимптотического интегрирования в малой окрестности особой точки.

Разработан программный комплекс моделирования вязкопластических сред с подвижными границами раздела фаз на основе предложенных в работе методов и

алгоритмов.

Для задач неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред с гистерезисом деформации и возможным «проскальзыванием» вдоль твердой стенки на основе численного моделирования исследовано движение границы раздела фаз.

Разработанный программный комплекс позволил выполнить детальное компьютерное моделирование влияние «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки на параметры течения

Разработанные методы численного анализа является основой для дальнейшего развития алгоритмов компьютерного моделирования для начально-краевых задач типа Стефана с подвижной границей, в том числе и для сред с более сложными свойствами.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. *Аббасов, А.А.* Решение некоторых задач нестационарного прямолинейного движения вязко-пластичных жидкостей / А.А. Аббасов, Б.О. Садыхов // Тр. АзНИИ бурнефть, Л.: Недра. — 1965. — вып. VII. — С. 137-143.
2. *Абрамовиц, М.* Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
3. *Андерсон, Д.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2 т. / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер Пер. С англ. — М.: Мир, 1990. — 1056 с.
4. *Андрейченко, Д.К.* Основы работы в среде Matlab / Д.К. Андрейченко, Ю.В. Чурсова, В.В. Кононов, Д.В. Супрун. — Саратов: СГУ им. Н.Г. Чернышевского, 2012. — 110 с.
5. *Андрейченко, Д.К.* Моделирование, анализ и синтез комбинированных динамических систем. Учебное пособие / Д.К. Андрейченко, К.П. Андрейченко. — Саратов: Райт-Экспо, 2013. — 144 с.
6. *Андрейченко, Д.К.* Моделирование этапа развития течения вязкопластичной среды по наклонной плоскости / Д.К. Андрейченко, М.И. Сафрончик // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки. — 2021. — № 9. — С. 31-36.
7. *Арет, В.А.* Течения вязкопластических нелинейных сред с пограничным проскальзыванием / В.А. Арет, Б.К. Гусев, В.В. Пеленко, Ф.В. Пеленко // Вестник КрасГАУ. — 2008. — № 2. — С. 54-57.
8. *Арет, В.А.* Особенности течения вязкопластических нелинейных сред в круглых прямых трубах / В.А. Арет, В.В. Пеленко, А.Г. Крысин, Ф.В. Пеленко, Р.Г. Ольшевский // Вестник международной академии холода. — 2008. — №2. — Рр. 34-35.
9. *Арефьев, Н. Н.* Метод определения реологических характеристик сапропеля / Н. Н. Арефьев, С. М. Штин // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2007. — № 1. — С. 4-47.

10. *Арнольд, В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
11. *Артюшков, Л. С.* Динамика неньютоновских жидкостей / Л.С. Артюшков. – СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ, 1997. – 460 с.
12. *Астарита, Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / Дж. Астарита, Дж. Марручи. – М.: Мир, 1978. – 309 с.
13. Астрахан, И.М. Нестационарное круговое движение вязкопластической жидкости, заключённой между двумя цилиндрами / И.М. Астрахан // Изв. ВУЗов. Нефть и газ. – 1961. – № 4. – С. 73-76.
14. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции. Том 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
15. *Будак, Б.М.* Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана / Б.М. Будак, Е.М. Соловьёва, А.Б. Успенский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1965. – Т.5. – № 5. – С. 828-840.
16. *Вабищевич, П.Н.* Численные методы решения задач со свободной границей / П.Н. Вабищевич. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 164 с.
17. *Ван-Дайк, М.* Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М.: Мир, 1967. – 296 с.
18. *Васильев, Ф.П.* Разностный метод решения двухфазной задачи Стефана / Ф.П. Васильев, А.Б. Успенский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1963. – Т.3. – № 5. – С. 874-886.
19. *Гасанов, Г.Т.* Нестационарное движение вязко-пластичной жидкости между двумя цилиндрами / Г.Т. Гасанов // Докл. АН АзССР. – 1962. – Т.18. – № 10. – С. 21-25.

20. *Гасанов, Г.Т.* Решение обратных задач нестационарного движения вязко-пластичной жидкости / Г.Т. Гасанов, А.Х. Мирзаджанзаде // ПМТФ. – 1962. – № 5. – С.117-120.
21. *Генки, Г.* Пространственная задача упругого и пластического равновесия/ Г. Генки // Изв. АН СССР. ОТН. – 1937.– №2. – С. 187-196.
22. *Георгиевский, Д.В.* Некоторые неоднородные задачи вязкопластичности: жёсткие зоны и устойчивость / Д.В. Георгиевский // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 1. – С. 61-78.
23. *Георгиевский, Д.В.* Разгон и торможение тяжёлого вязкопластического слоя (ледника) вдоль наклонной плоскости / Д.В. Георгиевский, А.С. Кириллов // Изв. РАН. МТТ. – 2003. – №3. – С.112-119.
24. *Гноевой, А.В.* Об одном методе исследования пространственных течений вязкопластичных сред / А. В. Гноевой, Д.М. Климов // Изв. РАН Мех. тверд. тела. – 1993. – № 4. – С. 150-158.
25. *Гноевой, А.В.* Система уравнений, описывающая течение бингамовских пищевых сред / А.В. Гноевой, Д.М. Климов, В.М. Чесноков // М.: ВНИ-ИМП. – 1997. – С. 182-188.
26. *Гноевой, А.В.* Об уравнениях течения бингамовских сред / А.В. Гноевой, Д.М. Климов, В.М. Чесноков // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 6. – С. 108-114.
27. *Гноевой, А.В.* Основы теории течений бингамовских сред / А.В. Гноевой, Д.М. Климов, В.М. Чесноков. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.
28. *Гольдман, Н.Л.* Обратные задачи Стефана: Теория и методы решения / М.: Изд-во МГУ. – 1999. – 294 с.
29. *Гольдман, Н. Л.* О некоторых постановках нелинейных параболических задач с краевыми условиями первого рода и о методах их приближенного решения / Н. Л. Гольдман // Вычислительные методы и программирование. – 2018. – Т.19. – № 4. – С. 314-326.

30. *Гольдштик, М. А.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность / М.А. Гольдштик, В.Н. Штерн. — Новосибирск: Наука, 1977. — 367с.
31. *Горбатов, А.В.* Реология мясных и молочных продуктов / А.В. Горбатов. — М.: Пищевая промышленность, 1979. — 384 с.
32. *Градштейн, И. С.* Таблицы интегралов рядов и произведений: 7-е издание / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 1232 с.
33. *Грей, Э.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике / Э. Грей, Г.Б. Мэтьюз. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. — 386 с.
34. *Дарьин, Н.А.* Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке / Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин // Дифференц. ур-ия. — 1987. — Т.23. — № 7. — С. 1154-1160.
35. *Дюво, Г.* Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
36. *Ильюшин, А.А.* К вопросу о вязкопластичном течении материалов / А.А. Ильюшин // Труды конф. по пластичн. деформации. М.—Л.: Изд. АН СССР. — 1938. — С. 5-19.
37. *Ильюшин, А.А.* Деформация вязкопластичных тел / А.А. Ильюшин // Учён. зап. МГУ. Механика. — 1940. — Вып. 39. — С. 3-81.
38. *Ивицкий, И.И.* Моделирование пристенного скольжения полимера / И.И. Ивицкий // Технологический аудит и резервы производства. — 2014. — Т.5. №3(19). — С. 8-11.
39. *Калюжнов, Н.Я.* «Запаздывающее» течение бингамовской жидкости в круглой трубе и в трубе кольцевого сечения / Н.Я. Калюжнов, А.И. Сафрончик, С.П. Сорокин // Сб. Аэродинамика. Изд. Сарат. ун-та. — 1973. — Вып. 2(5). — С.137-151.
40. *Кутин, А.С.* Некоторые задачи неустановившегося движения вязкопластичной среды с учетом релаксации скоростей деформации / А.С. Кутин, А.И. Сафрончик // Сб. Аэродинамика. Изд. Сарат. ун-та. — 1973. — Вып. 2(5). — С.120-137.

41. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям 6-е изд. / Э. Камке. – СПб.: Лань, 2003. – 576 с.
42. Карташов, Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами / Э.М. Карташов // Аналитический обзор, посвященный 275-летию РАН. Известия РАН, Энергетика. – 1999. – №5. – С.3-32.
43. Климов, Д. М. Вязкопластические течения: динам. хаос, устойчивость, перемешивание / Д.М. Климов, А.Г. Петров, Д.В. Георгиевский. – М.: Наука, 2005. – 394 с.
44. Корнев, Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций / Б.Г. Корнев. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
45. Коул, Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул. – М.: Мир, 1972. – 274 с.
46. Липанов, А.М. Моделирование течений неньютоновских жидкостей, имеющих предел текучести / А.М. Липанов, В.К. Булгаков, К.А. Чехонин, О.Н. Иванов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 6. – С. 1112-1116.
47. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
48. Малкин, А. Я. Реология: концепции, методы, приложения / А. Я. Малкин, А. И. Исаев. – Санкт-Петербург: Профессия, 2017. – 560 с.
49. Малкин, А. Я. Физико-химические явления, приводящие к скольжению жидкости по твердой поверхности / А. Я. Малкин, С. А. Патлажан, В. Г. Куличихин // Успехи химии. – 2019. – Том. 88. – № 3. – С. 319-349.
50. Матвеев, В.Н. Структурное обоснование неньютоновского течения / В.Н. Матвеев, Е.А. Кирсанов // Вестник Московского ун-та. Сер. 2. Химия. – 2017. – Т. 58. – №2. – С. 59-82.
51. Мейрманов, А.М. Задача Стефана / А.М. Мейрманов. – Новосибирск: Наука, 1986. – 240 с.

52. *Мейрманов, А. М.* О классическом решении многомерной задачи Стефана для квазилинейных параболических уравнений / А.М. Мейрманов // Математический сборник. – 1980. – Т. 112, № 2. – С. 170-192.
53. *Меламед, В.Г.* Сведение задачи Стефана к системе обыкновенных дифференциальных уравнений / В.Г. Меламед // Изв. АН СССР. Сер. геоф. – 1958. – №7. – С. 848-869.
54. *Мирзаджанзаде, А.Х.* Обзор работ по гидродинамике вязкопластичных сред в бурении / А.Х. Мирзаджанзаде, Р.С. Гурбанов // Баку: АЗИНТИ, серия «Нефтедобывающая промышленность». – 1968. – С. 215.
55. *Могилевич, Л.И.* Запаздывающее течение вязкопластичной среды в круглой трубе с учетом пристенного скольжения / Л.И. Могилевич, А.И. Сафрончик, М.И. Сафрончик // Саратов: Математика. Механика. – 2002. – №4. – С. 200-203.
56. *Мосолов, П.П.* Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических сред / П.П. Мосолов, В.П. Мясников. – М.: Изд. МГУ, 1971. – 114 с.
57. *Мосолов, П.П.* О некоторых математических вопросах теории несжимаемых вязкопластичных сред / П.П. Мосолов // ПММ. – 1978. – Т.42. – Вып.4. – С.737-746.
58. *Мясников, В.П.* Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды // ПМТФ. – 1961. – № 2. С. 79 – 86.
59. *Огибалов, П.М.* Механика физических процессов / П.М. Огибалов, А.Х. Мирзаджанзаде. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 370 с.
60. *Огибалов, П.М.* Нестационарные движения вязкопластичных сред / П.М. Огибалов, А.Х. Мирзаджанзаде. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1977. – 372 с.
61. *Окулов, Н. А.* Течение материала Слибара - Паслая в плоском канале / Н. А. Окулов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12. – № 1. – С. 80-88.



62. *Окулова, Н. Н.* Численное решение задач нестационарного течения вязкопластического материала: специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела»: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Окулова Надежда Николаевна. – Москва, 2008. – 147 с.

63. *Патанкар, С.В.* Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах / С.В. Патанкар. – М.: Издательство МЭИ, 2003. - 312 с.

64. *Петров, А.Г.* Точные решения краевой задачи о нестационарном течении вязкопластичной среды между двумя пластинами / А.Г. Петров // Изв. РАН МЖГ. – 1999. – №2. – С.3-13.

65. *Петров, А.Г.* Точные решения задачи нестационарного течения вязкопластичной среды в круглой трубе / А.Г. Петров, Л.В. Черепанов // Изв. РАН МЖГ. – 2003. – №2. – С.13-24.

66. *Петров, Н.П.* Гидродинамическая теория смазки / Н.П. Петров // М.: ГТТИЗ Сб. под редакцией проф. Лейбензона Л.С. – 1934. – С. 11-245.

67. *Пэжина, П.* Основные вопросы вязкопластичности / П. Пэжина. – М.: Мир, 1968. – 176 с.

68. *Рейнер, М.* Реология / М. Рейнер. – М.: Наука, 1965. – 365 с.

69. *Рубинштейн, Л.И.* Проблема Стефана / Л.И. Рубинштейн. – Рига.: Звайгзне, 1967. – 457 с.

70. *Самарский, А.А.* Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

71. *Сафрончик, А.И.* Неустановившееся течение вязко-пластичного материала между параллельными стенками / А.И. Сафрончик // ПММ. – 1959. – Том XXIII. – Вып.5.

72. *Сафрончик, А.И.* Вращение цилиндра с переменной угловой скоростью в вязко-пластичной среде / А.И. Сафрончик // ПММ. – 1959. – Том XXIII. – Вып.6.

73. *Сафрончик, А.И.* Некоторые задачи неустановившегося течения вязкопластичной среды: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Сафрончик Александр Израилевич. – Ростов н/Д, 1962. С. 109.

74. *Сафрончик, А.И.* Неустановившееся движение вязко-пластичной среды между параллельными стенками с учетом эффектов пристенного скольжения и запаздывания восстановления структуры / А.И. Сафрончик // Сб. Аэродинамика. Изд. Сарат. ун-та. – 1975. – Вып. 4(7). – С.166-181.

75. *Сафрончик, А.И.* Неустановившиеся течения вязкопластичной среды с учетом пристенного скольжения и «запаздывания» восстановления структуры / А.И. Сафрончик // Саратов: Математика. Механика. – 2000. – №2. – С. 174-177.

76. *Сафрончик, А.И.* Неустановившееся «запаздывающее» течение Куэтта вязкопластичной среды между параллельными стенками / А.И. Сафрончик, М.И. Сафрончик // Саратов: Математика. Механика. – 2003. – №5. – С. 177-180.

77. *Сафрончик, М.И.* Влияние пластических свойств смазочных материалов на работу подшипников / М.И. Сафрончик // Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении: Материалы Международной научной конференции, Саратов, 14–19 октября 2002 года. – Саратов: СГТУ. – 2002. – С. 172-173.

78. *Сафрончик, М.И.* Сведение нестационарной задачи о движении вязкопластичной среды к системе обыкновенных дифференциальных уравнений / М.И. Сафрончик // Саратов: Математика. Механика. – 2002. – №4. – С. 216-219.

79. *Сафрончик, М.И.* Неустановившееся «запаздывающее» течение вязкопластичной среды по наклонной плоскости / М.И. Сафрончик // Саратов: Математика. Механика. – 2003. – №5. – С. 180-184.

80. *Сафрончик, А.И.* Исследование нестационарных переходных процессов в вязкопластичных средах / А.И. Сафрончик, М.И. Сафрончик //

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2005. – Т.5. – № 1. – С. 89-98.

81. *Сафрончик, М.И.* Торможение пластины о слой «запаздывающей» вязкопластичной среды с учетом пристенного скольжения / М.И. Сафрончик // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т.9. – № 2. – С. 88-93.

82. *Сафрончик, М.И.* Развитие течения вязкопластичной среды по наклонной плоскости / М.И. Сафрончик // Саратов: Математика. Механика. – 2009. – № 11. – С. 136-141.

83. *Сафрончик, М.И.* Об одном способе решения задачи о развитии течения вязкопластичной среды по наклонной плоскости / М.И. Сафрончик, Д.К. Андрейченко // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019): Материалы XVIII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова, Саратов, 26–30 июня 2019 года. – Саратов: Издательство научно-технической литературы. – 2019. – Том Часть 1. – С. 311-316.

84. *Сафрончик, М. И.* Моделирование этапов «запаздывающего» течения вязкопластичной среды по наклонной плоскости / М.И. Сафрончик, Д.К. Андрейченко // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Международной научной конференции, Саратов, 18–20 ноября 2021 года. – Саратов: ООО «Издательство «Научная книга», 2021. – С. 123-128.

85. *Сафрончик, М.И.* Моделирование неустановившегося «запаздывающего» течения вязкопластичной жидкости по наклонной плоскости с учетом эффекта пристенного скольжения / М.И. Сафрончик, Д.К. Андрейченко // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки. – 2022. – №10. С. 123-131.

86. *Сафрончик, М.И.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023662977 Российская Федерация. Программный комплекс для моделирования динамики многофазных течений вязкопластичных

сред: № 2023662382: заявл. 18.06.2023: опубл. 18.06.2023 / М. И. Сафрончик, Д. К. Андрейченко; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

87. *Сегё, Г.* Ортогональные многочлены / Г. Сегё. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 500 с.

88. *Седов, Л.И.* Механика сплошной среды. В двух томах Изд. 5–е / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1995. – 1108 с.

89. *Смольский, Б.П.* Реодинамика и теплообмен нелинейно вязкопластичных материалов / Б.П. Смольский, З.П. Шульман, В.Н. Гориславец. – Минск: Наука и техника, 1970. – 448 с.

90. *Соболев, Л.С.* Уравнения математической физики / Л.С. Соболев // М.: Наука. – 1992. – 492 с.

91. *Соу, С.* Гидродинамика многофазных систем / С. Соу. – М.: Мир, 1971. – 536 с.

92. *Суетин, П.К.* Классические ортогональные многочлены 2-е изд. / П.К. Суетин. – М.: Наука, 1979. – 416 с.

93. *Тихонов, А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.

94. *Толстой, Д.М.* Скольжение жидкостей и дисперсных систем по твердым поверхностям / Д. М. Толстой. – М.: Моск. станкоинструмент. ин-т, докт. дис, 1953. – 349 с.

95. *Тыртышников, Е.Е.* Методы численного анализа / Е.Е. Тыртышников. – М.: МГУ, 2006. - 281 с.

96. *Уилкинсон, У.Л.* Неньютоновские жидкости / У.Л. Уилкинсон. – М.: Мир, 1964. – 216 с.

97. *Флетчер, К.* Численные методы на основе метода Галёркина / К. Флетчер. – М.: Мир, 1988. – 352 с.

98. *Флетчер, К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2 т. / К. Флетчер. – М: Мир, 1991. – 1056 с.
99. *Хайрер, Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
100. *Хайрер, Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
101. *Хаппель, Дж.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М.: Мир, 1967. – 630 с.
102. *Шульман, З. П.* Беседы о реофизике / З.П. Шульман. – Минск: Наука и техника, 1976. – 96 с.
103. *Aposporidis, A.* A Mixed formulation of the Bingham fluid flow problem: Analysis and numerical solution / A. Aposporidis, E. Haber, M. A. Olshanskii, A. Veneziani // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2011. – Vol. 200. – Iss.29-32. – Pp. 2434-2446
104. *Barnes, H.A.* A Handbook of Elementary Rheology / H.A. Barnes // Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics. University of Wales. – Aberystwyth, 2000. – 201 p.
105. *Basov, I. V.* Nonhomogeneous incompressible Bingham viscoplastic as a limit of nonlinear fluids / I.V. Basov, V.V. Shelukhin // J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2007. – Vol.142. – Iss.1-3. – Pp. 95-103.
106. *Bingham, E.C.* Paint, a plastic material and not a viscous liquid / E.C. Bingham, H. Green // Proc. Amer. Soc. Testing Materials. – 1919. – Vol. 11. – № 19. – P. 640.
107. *Bingham, E. C.* Fluidity and Plastisity / E. C. Bingham // New-York: McGraw-Hill book co., Inc. – 1922. – Pp. 215-218.
108. *Bird, R.B.* The rheology and flow of viscoplastic materials / R.B. Bird, G.C. Dai, B.J. Yarusso // Rev. Chem. Eng. – 1983. – №1. – Pp. 2-70.

109. *Casson, N.* Rheology of disperse systems / N. Casson // Oxford: Pergamon Press. – 1959. – P. 84.
110. *Dean E. J.* On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow: Old and New results / E.J. Dean, R. Glowinski, G. Guidoboni // J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2007. – Vol.142. – Iss.1-3. – P. 36-62.
111. *Fusi, L.* A finite difference scheme for the unsteady planar motion of a Bingham fluid / L. Fusi // J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2022. – Vol.299. – Pp.104702.
112. *Glowinski, R.* On the Numerical Simulation of Viscoplastic Fluid Flow / R. Glowinski, A. Wachs // Handbook of Numerical Analysis. – 2011. – Vol.16. – Pp. 483-717.
113. *Herschel, W.H.* Konsistenzmessungen von Gummi Benzolloesungen / W.H. Herschel, R. Bulkley // Kolloid-Zeitschrift. – 1926. – №39. – Pp. 291-300.
114. *Huang, P.Y.* Wall effects on the of viscoelastic fluids around a circular cylinder / P.Y. Huang, J. Feng // J. Non-Newtonian Fluid Mech. – 1995 – Vol. 60. – P. 179- 198.
115. *Ionescu, I.R.* Functional and numerical methods in viscoplasticity / I.R. Ionescu, M. Sofonea. – N.-Y.: Oxford Univ. Press, 1993. – 265 p.
116. *Kazatchkov, I. B.* Relaxation effects of slip in shear flow of linear molten polymers / I. B. Kazatchkov, S.G. Hatzikiriakos // Rheologica Acta. – 2010. – Vol.49. – №3. – Pp. 267-274.
117. *Klimov, D.M.* Analytical solutions of the boundary- value problem of non-stationary flow of viscoplastic medium between two plates / D.M. Klimov, A.G. Petrov // Archive of Applied Mechanics. – 2000. – Vol. 70. – Pp. 3-16.
118. *Kolodner, J.J.* Free boundary problem for the heat equation wick applications of change of phase / J.J. Kolodner // Comm. On Pure and Appl. Math. – 1956. – Vol. IX. – № 1.

119. *Muravleva, E. A.* Two Finite-Difference Schemes for the Calculation of Bingham Fluid Flows in a Cavity / E.A. Muravleva, M.A. Olshanskii // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2008. – Vol.23. – № 6. – Pp. 615-634.
120. *Oldroyd, J.G.* Two-dimensional plastic flow of a Bingham solid. A plastic boundary-layer theory for slow motion / J.G. Oldroyd // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1947.– 43.– Pp.383-395.
121. *Rajagopal, K. R.* On some unresolved issues in non-linear fluid dynamics // Russian Mathematical Surveys. – 2003. – Vol.58. – №2. – Pp. 319-300.
122. *Safronchik, M. I.* Construction of one solution of the problem of the development of a flow of a viscoplastic fluid along an inclined plane / M. I. Safronchik // Presenting Academic Achievements to the World. Natural Science: материалы X научной конференции молодых ученых, Саратов, 16 апреля 2019 года. Vol. Выпуск 9. – Саратов: Издательство «Саратовский источник», 2020. – P. 102-108.
123. *Shelukhin, V.V.* Bingham viscoplastic as a limit of non-Newtonian fluids / V.V. Shelukhin // J. Math. Fluid Mech. – 2002. – Vol. 4. – № 2. – Pp.109-127.
124. *Shwedov, F.N.* La rigidit'e de liquides / F.N. Shwedov // Paris: Rapport Congr. Intern. Phys. – 1900. – №1. – Pp. 478-486.
125. *Slibar, A.* Retarded Flow of Bingham Materials /A. Slibar, P. R. Paslay // J. of Appl. Mech. – 1959. – Vol. 26. – P.107-113.
126. *Vigneaux, P.* Flow of a yield-stress fluid over a cavity: Experimental and numerical investigation of a viscoplastic boundary layer / P. Vigneaux, G. Chambon, A. Marly, Li-Hua Luu, P. Philippe // J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2018. – Vol.261. – Pp. 38-49.
127. *Vola, D.* Laminar unsteady flows of Bingham fluids: a numerical strategy and some benchmark results / D. Vola, L. Boscardin, J. C. Latche // J. Comp. Phys. – 2003. – Vol.187. – Iss.2. – P.441-456.

128. *Zisis, Th.* Viscoplastic flow around a cylinder kept between parallel plates / Th. Zisis, E. Mitsoulis // *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* – 2002. – Vol.105. – Pp.1-20.





# СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023662977

## Программный комплекс для моделирования динамики многофазных течений вязкопластичных сред

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н.Г.  
Чернышевского» (RU)*

Авторы: *Сафрончик Мария Ильинична (RU), Андрейченко  
Дмитрий Константинович (RU)*

Заявка № 2023662382

Дата поступления 18 июня 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 18 июня 2023 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

