


ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи



РЫБАЛОВА Елена Владиславовна

**ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ И ВНЕШНИХ
ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ФОРМИРОВАНИЕ И
СИНХРОНИЗАЦИЮ
ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СТРУКТУР В
АНСАМБЛЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ**

1.3.4. – Радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент СТРЕЛКОВА Г.И.

Саратов – 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. Влияние внешних шумов и случайного распределения значений параметров на реализацию химерных состояний в ансамблях нелокально связанных нелинейных осцилляторов	23
1.1 Введение	23
1.2 Воздействие шума на химерные структуры в кольцах нелокально связанных отображений	25
1.2.1 Модели и характеристики режимов	25
1.2.2 Влияние аддитивного шума на химерные состояния	28
1.2.3 Влияние шумовой модуляции и случайного распределения значений <i>управляющих параметров</i> парциальных элементов на существование химерных состояний	42
1.2.4 Шумовая модуляция <i>силы связи</i> между парциальными элементами	48
1.3 Управление переходом между химерами и различными пространственно-временными структурами с помощью воздействия внешнего шума	59
1.3.1 Управление временем жизни мультихимерного состояния в кольце нелокально связанных дискретных осцилляторов ван дер Поля	60
1.3.2 Влияние аддитивного шума на мультистабильность в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо	68
1.4 Выводы по первой главе	75

Глава 2. Влияние внешних шумов и случайного распределения значений параметров на реализацию уединенных состояний в ансамблях нелокально связанных нелинейных осцилляторов . . .	78
2.1 Введение	78
2.2 Влияние аддитивного шума на возникновение уединенных состояний	80
2.3 Влияние шумовой модуляции и случайного распределения значений <i>управляющих параметров</i> парциальных элементов на реализацию уединенных состояний	95
2.3.1 Шумовая модуляция управляющих параметров элементов ансамбля	96
2.3.2 Случайное распределение значений управляющих параметров элементов ансамбля	101
2.4 Влияние шумовой модуляции и случайного распределения значений <i>силы связи</i> парциальных элементов на реализацию уединенных состояний	105
2.4.1 Шумовая модуляция силы связи между элементами ансамбля	106
2.4.2 Случайное распределение значений силы связи по ансамблю	109
2.5 Выводы по второй главе	115
Глава 3. Взаимодействие химерных и уединенных состояний в неоднородных многослойных ансамблях. Эффекты синхронизации.	117
3.1 Введение	117
3.2 Взаимодействие химерных и уединенных состояний в двухслойной сети нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо .	118
3.2.1 Синхронизация двухслойной сети осцилляторов ФитцХью-Нагумо при взаимной межслойной связи	122

3.2.2	Синхронизация двухслойной сети осцилляторов ФитцХью-Нагумо при однонаправленной межслойной связи	128
3.3	Эффекты синхронизации в двухслойной сети колец нелокально связанных отображений при шумовой межслойной связи	131
3.3.1	Синхронизация идентичных по управляющим параметрам слоев	133
3.3.2	Синхронизация неидентичных по управляющим параметрам слоев	140
3.4	Влияние разреженной межслойной связи на синхронизацию сложных структур	143
3.4.1	Динамика взаимно связанных колец	146
3.4.2	Динамика однонаправленно связанных колец	152
3.5	Удаленная и полная синхронизация в неоднородной трехслойной сети хаотических отображений	154
3.5.1	Синхронизация в сети отображений Эно-Лози-Эно	158
3.5.2	Синхронизация в сети отображений Лози-Эно-Лози	164
3.6	Выводы по третьей главе	167
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	172
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	177

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследуемой проблемы

Коллективная динамика сложных ансамблей взаимодействующих подсистем различной природы на протяжении многих лет является предметом особого внимания специалистов различных научных областей [1–9]. В связи с этим одними из главных задач, которые решает радиофизика и нелинейная динамика, являются исследования динамики таких сложных ансамблей, установление условий и механизмов формирования тех или иных пространственно-временных режимов, выявление эффектов их подавления или поддержания, а также изучение явлений синхронизации различных сложных структур в многослойных сетях.

В связи с тем, что в реальных системах всегда существуют шумы и различные неоднородности, дополнительной задачей является исследование устойчивости пространственно-временных структур к возмущениям различной природы. Известно, что шум может оказывать как конструктивное, так и деструктивное влияние на пространственно-временную динамику систем [10–17]. Так источники шума могут использоваться для стабилизации и/или эффективного управления режимами работы систем [11–13, 18–22], а также для улучшения некоторых характеристик динамики, к таким эффектам относится стохастический резонанс [10, 15, 23] и когерентный резонанс [14, 24]. Кроме того, шум может привести к появлению новых структур и режимов, которые невозможно наблюдать в сложных сетях нелинейных систем без его влияния [11]. Кроме этого, исследования показывают наличие в реальных сетях неоднородностей, связанных с распределением значений управляющих параметров парциальных элементов или связей между ними в сетях. Неоднородность, безусловно, оказы-

вадет большое влияние на разнообразие пространственно-временных режимов сетей [25–27]. Изучение неоднородных сетей может сыграть важную роль в понимании того, насколько эти системы стабильны и надежны при различных степенях и типах неоднородностей, и в понимании того, как улучшить и контролировать общую производительность этих сетей [28]. В частности, недавно было показано, что неоднородность, наблюдаемая в нейронных сетях мозга, может быть жизненно важным компонентом его способности адаптироваться к новым условиям (обучаться) [29].

В последнее время вопросам влияния шумов и неоднородностей на динамику сетей уделяется особое внимание в связи с открытием новых режимов частичной синхронизации в сетях связанных систем, а именно химерных состояний [30–34] и уединенных состояний [35, 36].

Химерные состояния (химеры) впервые были обнаружены в ансамблях нелокально связанных идентичных фазовых осцилляторов [30, 31]. Этот особый пространственно-временной режим динамики представляет собой промежуточный этап перехода между режимом когерентной динамики (синхронизации) и некогерентной (пространственно-временной хаос) и соответствует сосуществованию кластеров с когерентной (синхронизированной) и некогерентной (десинхронизированной) динамикой осцилляторов сети. Недавние теоретические и численные исследования показали, что химеры могут возникать в сетях с парциальными элементами различной природы и при различной топологии связей между ними [30–34, 37–45]. Этот режим кластерной синхронизации наблюдается не только в компьютерных экспериментах, но и в реальных экспериментах [46–54]. Кроме того, химерные состояния имеют место в реальных системах, например, в нейробиологии [55–57], в сетях электроснабжения [58–60], в социальных системах [61, 62] и др.

Устойчивость химерных состояний к шумовым возмущениям исследовалась в нелокально связанных сетях осцилляторов с дискретным [63, 64] и непрерывным временем [65–68]. В частности, было показано, что шум может

индуцировать появление новых химерных состояний, таких как когерентно-резонансные химеры в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо [66]. Вместе с этим изучалось время жизни химерных состояний при введении в систему шумовых возмущений [67–69]. Показано, что амплитудные химеры являются долгоживущими переходными процессами и время их жизни может контролироваться шумовым воздействием. Шум позволяет уменьшить время жизни амплитудных химер, как это было показано для кольца осцилляторов Стюарта-Ландау [67, 68], или увеличить его, как это было показано для ансамбля хаотических осцилляторов [69]. *Тем не менее до сих пор не до конца понятно, как зависит вероятность наблюдения химерных состояний в сетях нелокально связанных хаотических осцилляторов от интенсивности аддитивного шума, силы связи и случайных начальных условий, а также неоднородного распределения управляющих параметров сети.*

Уединенные состояния представляют собой еще один важный режим пространственно-временной динамики, который наблюдается в ансамблях связанных осцилляторов [35, 36]. Для этого режима характерно наличие одного или нескольких элементов, которые ведут себя отлично от других элементов сети, такие элементы принято называть уединенными узлами. Как правило, уединенные узлы распределены по ансамблю случайным, но достаточно равномерным образом, и их количество увеличивается при уменьшении силы связи между элементами сети. Исследования показали, что возникновение уединенных состояний связано с появлением бистабильности в системе за счет нелокального взаимодействия парциальных элементов [35, 36]. Уединенные состояния были обнаружены в сетях моделей Курамото-Сакагути и осцилляторов Курамото с инерцией [35, 36, 70–72], системах с дискретным временем [42, 73–75], системах осцилляторов ФитцХью-Нагумо [76–78], моделях электрических сетей [79–81] и даже в экспериментальных установках связанных маятников [52]. *Однако, в отличие от химерных состояний, устойчивость уединенных состояний по отношению к шуму вообще не изучена, за исключением работы [82], где бы-*

ло показано, что наличие шума в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо приводит к переходу от уединенных состояний к пятнистой синхронизации (patched synchrony). Таким образом, требуется более детальный анализ поведения уединенных состояний при наличии внешних случайных флуктуаций, а также неоднородностей в ансамблях.

Помимо анализа эволюции химерных состояний и уединенных состояний в отдельных ансамблях ставится вопрос о взаимодействии таких пространственно-временных структур друг с другом в многослойных сетях, и, следовательно, необходимо решать задачу возможности их синхронизации. Изучение явления синхронизации в сложных сетях имеет большое значение для приложений в различных областях исследований, таких как физика [3, 9, 46, 83–85], химия [86], нейронаука [87–89], социология [90–92] и т.д., а также в реальных системах, например, системах связи [61], энергосистемах [58, 60], транспортных сетях [93]. В частности, синхронизация имеет решающее значение для работы мозга, так как наряду с положительным эффектом, она может быть крайне нежелательна, например, при эпилепсии [94, 95], шизофрении [89], болезни Паркинсона [96]. Ранее были обнаружены и исследованы различные формы синхронизации в сложных сетях, например, частичная [97–99] и полная [9, 100] синхронизации, кластерная синхронизация [101, 102], вынужденная и взаимная синхронизации [103, 104], взрывная [105–107] и удаленная [108–111] синхронизации. *Однако, анализ условий вынужденной и взаимной синхронизации остается актуальной задачей радиофизики, поскольку мало исследован вопрос синхронизации сложных пространственно-временных режимов, таких как химерные и уединенные состояния, а также слабо изучено взаимодействия этих структур в многослойных системах, в особенности при наличии неоднородностей и шумов в этих системах.*

Приведенные данные о направлениях работ и уже имеющихся результатах убедительно свидетельствуют о том, что анализ влияния неоднородностей и внешних возмущений на формирование и синхронизацию пространственно-

временных структур в ансамблях нелинейных осцилляторов являются современными и актуальными научными проблемами нелинейной теории колебаний и волн, традиционно относящимися к задачам радиофизики.

Цель диссертационной работы

Целью работы является выявление особенностей эволюции пространственно-временных структур, в частности химерных и уединенных состояний, в одномерных ансамблях нелокально связанных нелинейных осцилляторов различной природы с дискретным и непрерывным временем под влиянием внешних шумовых возмущений и неоднородностей парциальных элементов и топологии связей, а также анализ эффектов вынужденной, взаимной и удаленной синхронизации таких структур в неоднородных двух- и трехслойных сетях.

Для достижения поставленной цели определены и сформулированы **основные задачи** диссертационного исследования:

1. Анализ влияния аддитивного шума различной статистики на вероятность установления химерных и уединенных состояний в ансамблях нелокально связанных нелинейных осцилляторов;
2. Выявление особенностей динамики ансамблей нелокально связанных отображений при шумовой модуляции управляющих параметров парциальных элементов и силы связи между элементами;
3. Анализ времени жизни химерных структур в ансамблях нелокально связанных отображений при введении в систему аддитивного шума;
4. Установление особенностей взаимодействия химерных и уединенных состояний в двухслойных системах связанных ансамблей нелокально связанных нелинейных осцилляторов при различном типе межслойной связи и введении неоднородностей в межслойную связь;

5. Анализ полной и удаленной синхронизации химерных и уединенных состояний в трехслойной системе с различным типом парциальных элементов во внешних слоях и передающем слое, а также выявление особенностей перехода к синхронизации при различной динамике передающего слоя.

Научная новизна

Диссертационная работа содержит решение принципиально новых радиофизических задач анализа установления, существования, подавления и синхронизации химерных и уединенных состояний в ансамблях нелокально связанных нелинейных осцилляторов с дискретным и непрерывным временем. Постановка задачи по исследованию свойств сложных пространственно-временных структур в присутствии шумовых возмущений и неоднородностей в управляющих параметрах является приоритетной. Результаты диссертации находятся в соответствии с уже установившимися представлениями в этой области знаний, гармонично расширяя и дополняя их. Несомненная новизна основных результатов работы подтверждается их публикацией в целом ряде научных статей в высокорейтинговых отечественных и зарубежных физических журналах с высоким импакт-фактором, входящих в международные и российские системы цитирования Web of Science, Scopus, РИНЦ. Содержание диссертационной работы соответствует паспорту специальности «1.3.4. – Радиофизика».

В работе впервые получены следующие научные результаты:

1. В ансамблях нелокально связанных хаотических отображений введение аддитивного шума (с равномерным или нормальным распределением) способно увеличить вероятность установления и наблюдения фазовых химер. При этом наблюдается резонансо-подобный эффект, который характеризуется существованием оптимальной (ненулевой) интенсивности аддитивного шума, при которой вероятность наблюдения фазовых химер возрастает до максимума. Показано, что в отсутствие шумового возбуждения вероят-

ность установления данных пространственно-временных структур не достигает 100%. Более того, резонансо-подобный эффект также установлен по силе связи: существует оптимальное значение силы связи между элементами, при которой вероятность установление фазовых химер максимальна.

2. Разработана методика на основе расчета коэффициента взаимной корреляции, позволяющая в автоматическом режиме определять наличие фазовых химер и уединенных состояний (количество уединенных узлов) в ансамблях нелокально связанных хаотических отображений при аддитивном и/или мультипликативном введении шумовых возмущений и проводить анализ эволюции этих структур при использовании большого набора различных реализаций начальных значений динамических переменных, а также реализаций шума, что способствует получению статистически достоверных результатов при численных исследованиях.
3. Впервые проанализирована устойчивость уединенных состояний к аддитивным и мультипликативным источникам шума. Показано, что воздействие аддитивного шума (с равномерным или нормальным распределением) в ансамблях связанных нелинейных осцилляторов приводит к уменьшению интервала наблюдения уединенных состояний по силе связи между элементами при увеличении интенсивности шума. Вместе с этим, увеличение интенсивности шума ведет к уменьшению количества уединенных узлов в ансамбле преимущественно только на границах интервала существования уединенных состояний по параметру силы связи. Подобные эффекты также наблюдаются при постоянной шумовой модуляции управляющих параметров ансамблей. С другой стороны, показано, что, фиксированное неоднородное распределение силы связи или параметров локальной динамики парциальных элементов может привести к увеличению интервала наблюдения уединенных состояний и их количества.

4. Предложен метод оценки степени синхронизации пространственно-временных структур в двух- и трехслойных сетях ансамблей нелокально связанных нелинейных осцилляторов, основанный на сочетании расчета локальной и глобальной ошибки синхронизации, где под локальной ошибкой понимается квадрат разности для всех пар связанных элементов, усредненный по времени, а под глобальной квадрат разности для всех пар связанных элементов, усредненный по времени и по ансамблю элементов. Данные количественные показатели позволяют четко диагностировать эффекты полной и кластерной синхронизации, что особенно важно при исследовании эффектов синхронизации химерных и уединенных состояний в многослойных сетях.
5. Показано, что разреженность межслойной связи в двухслойной сети ансамблей нелокально связанных хаотических отображений приводит к тому, что пространственные профили взаимодействующих колец расщепляются на отдельные части, связанные с динамикой связанных и несвязанных узлов. При этом увеличение силы и радиуса внутрислойной связи не приводит к «сглаживанию» мгновенных пространственных профилей синхронных структур в ансамблях. Проиллюстрирована возможность установления вынужденной и взаимной синхронизации (на профилях связанных элементов) сложных пространственно-временных структур, включая химеры и уединенные состояния, в случае неразрезанной и слабопрерванной межслойной связи. Увеличение количества отсутствующих связей ($> 50\%$ всех элементов сети) сильно снижает степень синхронизации и даже приводит к рассинхронизации элементов сетей.
6. Обнаружены и описаны эффекты удаленной и полной синхронизации химерных и уединенных состояний в неоднородной трехслойной сети нелокально связанных хаотических отображений, в которой присутствует связь (взаимная) только между соседними слоями (средним и внешними), а дина-

мика внешних слоев принципиально отличается от динамики передающего (среднего) слоя. Показано, что динамика трехслойной системы определяется преимущественно структурами, реализующимися во внешних слоях. Выделены особенности пространственно-временного поведения такой системы при различных типах установившихся структур в передающем (среднем) слое. Установлено, что наличие режима уединенных состояний в передающем слое приводит к реализации только удаленной синхронизации, при этом полная синхронизация структур не достигается. В случае реализации химерных структур в передающем слое сети полная и удаленная синхронизация имеют место в большем диапазоне изменения межслойной связи.

Достоверность полученных результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием обоснованных методов теоретического (статистического) и численного анализа сложных нелинейных процессов в радиофизических системах, при этом использовались классические математические модели нелинейной динамики и строго обоснованные и многократно протестированные методы анализа их динамики. Достоверность всех полученных результатов подтверждается их воспроизводимостью и согласованием с ранее известными результатами в этой научной области, полученными другими авторами, а также использованием специальных программных комплексов, разработанных и протестированных на широком классе задач нелинейной динамики.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В ансамблях хаотических отображений с нелокальным взаимодействием, демонстрирующих в отсутствие шума режим химерных состояний, введение независимых источников как аддитивного, так и мультипликативного (модулирующего параметры элементов) белого шума с гауссовым или равномерным распределением приводит к резонансо-подобному эффекту:

существует ненулевая оптимальная интенсивность шума, при которой вероятность установления химерных состояний становится максимальной и увеличивается интервал значений силы связи, в котором имеют место данные структуры. Кроме того, существует «резонансное» значение силы связи, соответствующее наибольшему диапазону изменения интенсивности шума, в котором химерные состояния реализуются с высокой (близкой к 1) вероятностью.

2. В ансамблях хаотических отображений с нелокальным взаимодействием, демонстрирующих в отсутствие шума режим уединенных состояний, введение независимых источников как аддитивного, так и мультипликативного (модулирующего параметры элементов или коэффициенты связи) белого шума с гауссовым или равномерным распределением приводит к уменьшению (вплоть до 0) интервала значений силы связи, в котором устанавливаются уединенные состояния, при увеличении интенсивности шума.
3. В неоднородных двухслойных сетях нелокально связанных хаотических отображений в случае неразрезанной и слаборазрезанной ($< 50\%$ элементов сети не связаны) межслойной связи имеет место эффективная (с заданной точностью) вынужденная и взаимная синхронизация сложных пространственно-временных структур, включая химерные и уединенные состояния. При этом эффективная взаимная синхронизация наблюдается в конечном диапазоне значений силы межслойной связи, а ширина этого диапазона и порог синхронизации по силе межслойной связи не зависят от степени разреженности. Сильноразрезанная межслойная связь ($> 50\%$ элементов сети не связаны) приводит к уменьшению степени синхронизации и к рассинхронизации элементов сетей. Порог синхронизации и ширина области эффективной вынужденной синхронизации по параметру степени разреженности и силе межслойной связи зависят от пространственно-временного режима управляющего ансамбля.

4. В неоднородной трехслойной сети нелокально связанных хаотических отображений, в которой внешние слои взаимно связаны только со средним (передающим) слоем и их динамика принципиально отличается от динамики передающего слоя, возможно установление удаленной и полной синхронизации химерных и уединенных состояний. При этом динамика всей сети определяется преимущественно структурами, реализующимися во внешних слоях. Наличие уединенных состояний в передающем слое препятствует полной синхронизации сети, но не влияет на удаленную синхронизацию внешних слоев. В случае реализации химерных структур в передающем слое сети полная и удаленная синхронизация наблюдаются в большом диапазоне изменения межслойной связи.

Научная и практическая значимость

Результаты диссертационного исследования влияния внешних шумовых воздействий и неоднородностей на пространственно-временную динамику сложных ансамблей нелинейных осцилляторов и эффекты синхронизации сложных структур вносят вклад в область радиофизики и нелинейной теории колебаний. Научные результаты, полученные в ходе выполнения работы, носят, прежде всего, фундаментальный характер. В частности, выявление особенностей реакций сложных систем на внешние воздействия обеспечивают возможность эффективного управления динамикой и эффектами синхронизации.

Прикладная значимость диссертационной работы обусловлена возможностями применения полученных результатов при анализе работы систем передачи информации, инфокоммуникационных и телерадиовещательных комплексов, энергетических систем, биологических систем, в которых наблюдается взаимодействие большого количества парциальных систем и наличие внутренних и внешних шумов. Подобное многокомпонентное взаимодействие приводит к установлению различных пространственно-временных структур, которые могут как улучшать, так и препятствовать нормальному функционированию системы.

Результаты исследований, приведенные в данной диссертационной работе, способствуют более глубокому пониманию условий и способов поддержания или разрушения такой пространственно-временной динамики. Разработанный метод автоматического распознавания различных типов сложных структур может найти практическое применение при обработке и анализе экспериментальных данных радиофизической природы, в том числе в присутствии помех.

Результаты фундаментальных исследований, полученные при подготовке диссертации, частично внедрены в учебный процесс подготовки бакалавров и магистров по направлению “Радиофизика” в Институте физики ФГБОУ ВО “СГУ имени Н.Г. Чернышевского”. При выполнении диссертационной работы было создано 6 программ, на которые получены свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ. Данные программы были использованы при выполнении ряда НИР, а также в учебном процессе при постановке курсовых и выпускных квалификационных работ студентов.

Апробация результатов и публикации

Результаты, представленные в диссертационной работе, неоднократно докладывались на всероссийских и международных конференциях, школах и семинарах:

1. Международная конференция «School and Workshop on Patterns of Synchrony: Chimera states and beyond», Триест, Италия, 8–15 мая, 2019.
2. Международная конференция «Saratov Fall Meeting 2019», Саратов, Россия, 23–27 сентября, 2019.
3. Международная конференция «Saratov Fall Meeting 2020», Саратов, Россия, 28 сентября – 2 октября, 2020.
4. Международная конференция «Shilnikov WorkShop», Нижний Новгород, Россия, 17–18 декабря, 2020.

5. Всероссийская конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых», Саратов, Россия, 26-29 апреля, 2021.
6. Международная конференция «CHAOS», Афины, Греция, 8–11 июня, 2021.
7. Международная конференция «Dynamics Days Europe», Ницца, Франция, 23–27 августа, 2021.
8. Международная конференция «Complex Networks», Мадрид, Испания, 30 ноября – 2 декабря, 2021.
9. Международная конференция «Saratov Fall Meeting 2021», Саратов, Россия, 27 сентября – 1 октября, 2021.
10. Международная конференция «Динамические системы. Теория и приложения», Дзержинск, Россия, 26–29 июня, 2022.
11. Международная конференция «Нелинейные волны – 2022», Бор, Россия, 5–14 ноября, 2022.
12. Международная конференция «Saratov Fall Meeting 2022», Саратов, Россия, 26–30 сентября, 2022.
13. Всероссийская конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых», Саратов, Россия, 15-19 мая, 2023.

Результаты работы неоднократно обсуждались на научных семинарах кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ и Института теоретической физики Технического университета г. Берлина (Германия) по приглашению проф. E. Schöll и проф. А. Захаровой (2018–2020 гг.).

Гранты. Результаты диссертации получены в рамках выполнения грантов при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-52-12004), Российского научного фонда (проект № 20-12-00119, № 20-12-00119 (продолжение)), Министерства науки и высшего образования Россий-

ской Федерации в рамках базовой части Государственного задания (проект № 3.8616.2017/8.9), Немецкого Физического Общества (DFG) в рамках проекта SFB 910 (подпроект B11, 2015–2022 гг.).

Публикации. По результатам диссертационной работы опубликовано 15 статей в центральных реферируемых научных журналах, входящих в системы цитирования Web of Science, Scopus, РИНЦ, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, среди которых Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science [112–117], Chaos, Solitons & Fractals [118–121], Regular and Chaotic Dynamics [122, 123], Journal of Difference Equations and Applications [124], Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика [125, 126]. Всего по теме диссертации опубликовано 10 статей в журналах Q1. Вместе с этим опубликовано 8 статей в сборниках трудов конференций [127–134], из них 4 индексируются в базе данных Web of Science и Scopus. Получено 6 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ [135–140].

Личный вклад соискателя

Результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, получены соискателем лично. Автором разработаны оригинальные программные комплексы и программы на языке C, с помощью которых проводились все численные расчеты и обработка экспериментальных данных. Постановка задач, планирование проведения исследований, интерпретация и обсуждение результатов, написание научных статей осуществлялись совместно с научным руководителем и соавторами опубликованных работ.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Диссертационная работа содержит 199 страниц текста, включая 75 иллюстраций. Список литературы включает 175 наименований.

Во **Введении** проанализированы направления работы и имеющиеся результаты по теме диссертационной работы, обоснована актуальность выбранной темы диссертационной работы, сформулированы цель работы и задачи исследований, описаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Введение содержит основные результаты и положения, выносимые на защиту, сведения о достоверности и апробации результатов.

В **первой главе** диссертационной работе приводятся результаты детального численного анализа влияния аддитивного и мультипликативного шума на химерные состояния различного типа в кольцах нелокально связанных нелинейных осцилляторов с дискретным и непрерывным временем. Для автоматического обнаружения химерных в зашумленных системах используется коэффициент взаимной корреляции между элементами ансамбля. Для получения статистически надежных результатов во всех численных исследованиях используется несколько (от шести до ста) различных реализаций случайно распределенных начальных значений динамических переменных и реализаций шумового воздействия. Представлен детальный анализ пространственно-временной динамики колец нелокально связанных нелинейных осцилляторов при введении в систему аддитивного шума, при шумовой модуляции управляющих параметров парциальных элементов и силы связи, а также при неоднородном распределении значений управляющих параметров. Установлено, что существует оптимальная ненулевая интенсивность аддитивного шума и шумовой модуляции управляющих параметров, при которой вероятность обнаружения химер становится максимальной и значительно увеличивается интервал наблюдения данных структур по силе связи между элементами. Также показана возможность увеличе-

ния вероятности появления особых химер, называемых химерами уединенных состояний, при модуляции источниками шума силы связи между элементами в кольце нелокально связанных отображений. И, наоборот, проиллюстрирована возможность уменьшения вероятности появления режима сосуществования химерных состояний и уединенных узлов и установление только химерных состояний в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо под воздействием аддитивного источника шума.

Во **второй главе** диссертационной работы приводятся результаты численных исследований влияния аддитивного и мультипликативного шума на уединенные состояния различного типа в кольцах нелокально связанных нелинейных осцилляторов с дискретным и непрерывным временем. Определяется область наблюдения уединенных состояний и количество уединенных узлов на плоскости параметров "сила связи – интенсивность шума". Для автоматического обнаружения режима уединенных состояний и подсчета уединенных узлов, как и в первой главе, используется коэффициент взаимной корреляции между элементами ансамбля. В результате использования нескольких (от 10 до 50) различных случайно распределенных начальных значений динамических переменных и реализаций шумового воздействия во всех исследованиях были получены статистически обоснованные и достоверные результаты.

Анализ влияния аддитивного шума на установление режима уединенных состояний и количество уединенных узлов, показывает, что такое внешнее воздействие приводит к уменьшению интервала наблюдения уединенных состояний по силе связи между элементами при увеличении интенсивности шума. Вместе с этим, увеличение интенсивности шума ведет к уменьшению количества уединенных узлов в ансамбле преимущественно только на границах интервала существования уединенных состояний по параметру силы связи. Однако, для кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо введение аддитивного шума в интервале слабой силы связи способствует появлению уединенных состояний при силе связи большей, чем максимальная сила связи, при ко-

торой наблюдались уединенные состояния в ансамбле без шума. Показано, что неоднородное распределение управляющих параметров приводит к подавлению уединенных узлов и уменьшению интервала наблюдения уединенных состояний по параметру, задающему постоянную составляющую (среднее значение) силы связи. Исследования влияния неоднородного распределения параметров, управляющих локальной динамикой элементов, и силы связи, показывает, что оно может привести к увеличению интервала наблюдения уединенных состояний и их количества.

Третья глава диссертационной работы посвящена изложению результатов численного анализа эффектов вынужденной и взаимной синхронизации в двух- и трехслойных сетях осцилляторов с дискретным и непрерывным временем. При этом исследуется влияние структур, устанавливающихся в слоях без связи (которыми можно управлять с помощью параметров отдельных слоев или начальных значений динамических переменных), и характера межслойной связи (межслойная связь через разные переменные, в присутствии и отсутствие шумовой модуляции межслойной связи, разреженная или полная межслойная связь) на степень синхронизации слоев и возможность установления в них различных структур.

Исследуется несколько сетей: 1. двухслойная сеть нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо, один из слоев которой демонстрирует уединенные состояния, а другой – химерные состояния. Межслойная связь в такой сети задавалась через быстрые или через медленные переменные; 2. двухслойная сеть нелокально связанных хаотических отображений с бистабильной динамикой при межслойном взаимодействии с коэффициентами связи, задаваемыми источниками шума при межслойном взаимодействии с коэффициентами связи, задаваемыми источниками шума; 3. двухслойная сеть нелокально связанных хаотических отображений, каждый слой которой демонстрирует либо режим уединенных состояний, либо химерных состояний при разреженной межслойной связи; 4. трехслойная сеть нелокально связанных хаотических отображений, в

которой внешние слои взаимно связаны только со средним слоем, а также динамика внешних слоев принципиально отличается от динамики передающего слоя.

Определяются параметры межслойной связи, которые способствуют реализации эффективной, полной или удаленной синхронизации. Для оценки степени синхронизации используются локальная и глобальная ошибки межслойной синхронизации, что позволяет обнаруживать и оценивать не только полную синхронизацию, но и кластерную.

В **Заключении** подведены итоги диссертационной работы, сформулированы основные результаты и выводы.

Глава 1. Влияние внешних шумов и случайного распределения значений параметров на реализацию химерных состояний в ансамблях нелокально связанных нелинейных осцилляторов

1.1 Введение

В последнее время большое число исследований посвящено анализу эволюции и свойств одного из недавно открытых типов пространственно-временных структур – химерных состояний, обнаруженных в ансамблях нелокально связанных осцилляторов [30–34, 37, 41, 141, 142]. Недавние теоретические и численные исследования показали, что химерные состояния могут возникать в сетях с парциальными элементами различных типов и с различной топологией связи между ними [30–33, 37–40, 42–45]. Химерные структуры также наблюдались в ряде экспериментов [46–54]. Кроме того, химерные состояния могут быть связаны с различными процессами, происходящими в реальных системах, например, в нейронных сетях [55–57], в сетях энергосистем [58–60], в социальных системах [61, 62] и др.

Принимая во внимание тот факт, что случайные возмущения неизбежно присутствуют во многих реальных системах и в той или иной степени влияют на режимы их функционирования, актуальной задачей является анализ влияния внешних случайных воздействий на устойчивость и эволюцию сложных режимов динамики системы. В ряде более ранних работ уже проводились исследования устойчивости химерных состояний по отношению к внешнему воздействию [63, 65, 67, 68]. В частности, было продемонстрировано, что шум мо-

жет приводить к появлению новых химерных структур, таких как когерентно-резонансные химеры в кольцах нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо [66]. В работах [67–69] были проведены исследования зависимости времени жизни химерных структур от параметров шумового воздействия. Установлено, что амплитудные химеры являются долгоживущими переходными процессами и временем их жизни (наблюдения) можно управлять с помощью шумового воздействия. В работах [67,68] было показано, что шум позволяет уменьшить время жизни амплитудных химер в кольцевой сети осцилляторов Стюарта-Ландау. Тем не менее, до сих пор не до конца выяснено, как зависит вероятность наблюдения химерных состояний в сетях нелокально связанных нелинейных осцилляторов от интенсивности аддитивного шума или влияния источников шума на параметры этих ансамблей.

В первой главе диссертационной работы приводятся результаты численного исследования влияния аддитивного и мультипликативного шума на химерные состояния различного типа в кольцах нелокально связанных нелинейных осцилляторов с дискретным и непрерывным временем. Проводится детальный анализ влияния источников шума на область существования химерных структур по параметру силы связи и интенсивности шума. Для автоматического обнаружения фазовых химер в зашумленных системах используется коэффициент взаимной корреляции между элементами ансамбля, который позволяет четко выделять некогерентные кластеры химерных структур. Для получения статистически надежных результатов во всех численных исследованиях используется несколько (от шести до ста) различных реализаций случайно распределенных начальных значений динамических переменных и реализаций шумового воздействия.

В данной главе также приводятся результаты исследования влияния аддитивного шума на время жизни амплитудных химер и мультихимерных состояний, которые включают несколько когерентных и некогерентных кластеров. Показана возможность увеличения вероятности появления химер уединенных

состояний при модуляции источником шума силы связи между элементами в кольце нелокально связанных отображений. И, наоборот, проиллюстрирована возможность уменьшения вероятности появления режима сосуществования химерных состояний и уединенных узлов и установление только химерных состояний в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо под воздействием источников аддитивного шума.

Результаты исследований, изложенные в первой главе, опубликованы в работах [116, 121–124, 126, 128, 129].

1.2 Воздействие шума на химерные структуры в кольцах нелокально связанных отображений

1.2.1 Модели и характеристики режимов

В качестве модели в данном разделе рассматривается ансамбль нелокально связанных отображений с кольцевой топологией. В общем случае данная модель описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_i(n+1) &= F(x_i(n), y_i(n)) + \\ &+ \frac{\sigma_i(n)}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [F(x_j(n), y_j(n)) - F(x_i(n), y_i(n))] + N_i(n), \\ y_i(n+1) &= G(x_i(n), y_i(n)), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x_i(n)$ и $y_i(n)$ – динамические переменные, $i = 1, 2, \dots, N$ – номер элемента в ансамбле, N – общее количество элементов в ансамбле, n – дискретное время. $F(x_i(n), y_i(n))$ и $G(x_i(n), y_i(n))$ – функции, задающие правые части выбранных отображений. Коэффициенты $\sigma_i(n)$ задают силу связи между элементами и в общем случае различны для всех элементов ансамбля и могут изменяться во

времени. Параметр R (радиус связи) определяет количество ближайших соседей, с которыми связан i -й элемент справа и слева. При нелокальной связи между элементами $1 < R < N/2$. $N_i(n)$ – функция, описывающая внешнее воздействие. В силу кольцевой топологии рассматриваемых ансамблей граничные условия являются периодическими, то есть $x_{i\pm N}(n) = x_i(n)$. Начальные условия для динамических переменных выбираются случайно распределенными равномерно в определенных интервалах значений переменных в зависимости от типа парциального элемента.

Для численного моделирования динамики ансамблей (колец) с нелокальной связью в данном разделе были выбраны следующие отображения.

Логистическое отображение является самым простым одномерным отображением ($G(x, y) \equiv 0$ в модели 1.1) [143, 144], демонстрирующим хаотическую динамику, которая возникает через каскад бифуркаций удвоения периода, а также демонстрирующим негиперболический аттрактор и эффект мультистабильности [145]. Логистическое отображение описывается следующей функцией:

$$F(x_i(n)) = \alpha_i(n)x_i(n)(1 - x_i(n)), \quad (1.2)$$

где $\alpha_i(n) \in [0, 4]$ – управляющий (бифуркационный) параметр. В данном и последующих отображениях управляющий параметр $\alpha_i(n)$ в общей случае может зависеть как от времени, так и от номера элемента в ансамбле.

Отображение Рикера также является хорошо известным одномерным отображением ($G(x, y) \equiv 0$ в модели 1.1), описываемое следующим итерационным уравнением: $x(n+1) = x(n) \exp \left[r \left(1 - \frac{x(n)}{K} \right) \right]$ [146]. Однако, при моделировании динамики кольца нелокально связанных отображений Рикера траектория быстро уходит на бесконечность при воздействии внешнего шума. Для избежания данного эффекта используется модифицированный аналог, предложенный в работе [64] и имеющий следующий вид:

$$F(x_i(n)) = \alpha_i(n)|x_i(n)| \exp(-x_i(n)), \quad (1.3)$$

где $\alpha_i(n)$ – управляющий параметр.

Кубическое отображение в одномерном случае ($G(x, y) \equiv 0$ в модели 1.1) [147] задается следующей функцией:

$$F(x_i(n)) = (\alpha_i(n)x_i(n) - [x_i(n)]^3) \exp(-[x_i(n)]^2/10), \quad (1.4)$$

где $\alpha_i(n)$ – управляющий параметр отображения. В функцию $F(x_i(n))$ (1.4) добавлен экспоненциальный множитель для обеспечения более стабильной динамики и исключения ухода траекторий на бесконечность в присутствии внешнего воздействия. При вариации управляющих параметров α_i в системе наблюдается бистабильность [147]. За счет этого в кольце нелокально связанных кубических отображений возможно появление двухъямных химер [148], которые по структуре и форме качественно схожи с фазовыми химерами, наблюдаемыми в кольцах нелокально связанных логистических отображений, отображений Рикера и Эно.

Отображение Эно представляет собой двумерную систему с дискретным временем [149]. Как и логистическое отображение, отображение Эно является классическим примером отображения с хаотическим аттрактором негиперболического типа. Данное отображение описывается следующими функциями:

$$\begin{aligned} F(x_i(n), y_i(n)) &= 1 - \alpha_i(n)[x_i(n)]^2 + y_i(n), \\ G(x_i(n)) &= \beta x_i(n), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\alpha_i(n) > 0$ и $\beta > 0$ – управляющие параметры. При сильном сжатии ($\beta \rightarrow 0$) отображение Эно сводится к логистическому отображению. При изменении параметров отображение Эно демонстрирует переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого формируется негиперболический хаотический аттрактор. Кроме того, отображение Эно также характеризуется свойством мультистабильности [145].

Для анализа динамики колец нелокально связанных элементов строятся *мгновенные профили* (показывают значение всех динамических переменных

в фиксированный момент времени), *пространственно-временные диаграммы* (на плоскости параметров номер элемента и время цветом отображаются амплитуды парциальных элементов), *сечения и проекции многомерных аттракторов системы на плоскость динамических переменных*. Однако для получения полной картины эволюции различных пространственно-временных режимов ансамблей в присутствии шумовых воздействий представляется целесообразным расчет коэффициента взаимной корреляции между элементами ансамбля и построение пространственного распределения его значений. Коэффициент взаимной корреляции между 1-м элементом ансамбля и всеми остальными вычисляется по следующей формуле:

$$C_{1i} = \frac{\langle \tilde{x}_1(n) \tilde{x}_i(n) \rangle}{\sqrt{\langle (\tilde{x}_1(n))^2 \rangle \langle (\tilde{x}_i(n))^2 \rangle}}, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad (1.6)$$

где $\tilde{x}_i(n) = x_i(n) - \langle x_i \rangle$, $\langle x_i \rangle$ – усреднение значений x_i по ансамблю реализаций, которое в численных экспериментах заменялось усреднением по времени. Величина (1.6) показывает степень корреляции или синхронизации между первым элементом ансамбля и всеми остальными и изменяется от -1 до 1 , где “ 1 ” соответствует полной синфазной синхронизации, “ -1 ” – противофазной синхронизации. При отсутствие корреляции между элементами данный коэффициент равен 0 . Таким образом, даже в зашумленной системе можно выделить когерентные и некогерентные кластеры фазовой и двухъямной химер, что используется для их автоматического поиска.

1.2.2 Влияние аддитивного шума на химерные состояния

В данном разделе работы приводятся результаты анализа влияния аддитивного шума на химерные состояния в кольцах нелокально связанных осцилляторов с дискретным временем (1.1). В качестве парциальных элементов ансамблей рассматривались логистическое отображение (1.2), отображение Ри-

кера (1.3), отображение Эно (1.5). При этом значения управляющих параметров для всех парциальных элементов выбирались равными: $\alpha_i(n) = \alpha_0$ (в функциях (1.2), (1.3), (1.5)) и $\sigma_i(n) = \sigma_0$ (в системе 1.1). Радиус нелокальной связи $R = 320$ был фиксирован для всех рассмотренных случаев. Данное значение параметра R является классическим, при котором наблюдаются химерные структуры и гладкие профили с волновым числом $k = 1$ [32]. Число осцилляторов в ансамблях выбиралось равным $N = 1000$. В качестве внешнего шумового воздействия использовались источники шума с нормальным и равномерным распределением. Последнее слагаемое в 1-м уравнении системы (1.1) записывается как

$$N_i(n) = D\xi_i(n), \quad (1.7)$$

если изучается влияние источника шума с равномерным распределением, где D – интенсивность шума, $\xi_i(n)$ – источник белого шума с равномерным распределением в интервале $[-1, 1]$. Для источника шума с нормальным распределением имеем

$$N_i(n) = A\psi_i(n), \quad (1.8)$$

где A – интенсивность шума, $\psi_i(n)$ – источник белого шума с нормальным распределением со средним равным 0 и единичным стандартным отклонением (гауссовский источник шума).

Кольцо нелокально связанных логистических отображений. Преобладающим сценарием поведения данного ансамбля является постепенный переход от некогерентной динамики к когерентной через химерные состояния при увеличении силы связи между элементами. Изменения пространственно-временной структуры в кольце нелокально связанных логистических отображений проиллюстрирована на рисунке 1.1 с помощью мгновенных профилей (рис. 1.1,а), пространственного распределения коэффициента взаимной корреляции (рис. 1.1,б) и пространственно-временных диаграмм (рис. 1.1,в). При слабой силе связи ($0 < \sigma_0 < 0.15$) система демонстрирует полное некогерентное пространственно-временное поведение, которое, с увеличением силы

связи, переходит в режим пространственной некогерентности с периодической динамикой во времени (рис. 1.1,I). В интервале $0.25 < \sigma_0 < 0.4$ существует ненулевая вероятность наблюдения амплитудных (кластер некогерентности $200 < i < 350$) и фазовых химер (кластеры некогерентности $500 < i < 620$ и $870 < i < 980$) (рис. 1.1,II) или только фазовых химер (рис. 1.1,III). Для некоторых случайных распределений начальных состояний может наблюдаться только амплитудная химера, существующая на профиле с разрывами вместо некогерентных кластеров фазовой химеры. При дальнейшем увеличении силы связи между элементами некогерентные кластеры амплитудной и фазовой химер уменьшаются (занимают меньший интервал по элементам ансамбля), а вероятность появления амплитудной химеры вовсе стремится к 0. В работе [142] было аналитически показано, что химерные состояния в кольце нелокально связанных логистических отображений при значении управляющих параметров элементов $\alpha_0 = 3.8$ возникают при уменьшении силы связи, начиная с критического значения $\sigma_0 \approx 0.41$, при котором на гладком пространственном профиле появляются два разрыва, в точках которых производная стремится к бесконечности. При больших значениях σ_0 пространственный профиль в пределе $N \rightarrow \infty$ непрерывен, а при меньших значениях он разбивается в этих точках разрыва на две ветви. Возникающие впоследствии некогерентные кластеры характеризуются пространственно-некоррелированным распределением элементов между этими двумя ветвями. Однако из-за конечного числа элементов в рассматриваемом ансамбле химерные состояния наблюдаются в нашем исследовании только при $\sigma_0 \lesssim 0.4$. При этом некоторые реализации случайно распределенных начальных условий могут привести к появлению профилей с разрывом (без некогерентных кластеров, то есть химерных состояний) даже при $\sigma_0 < 0.4$ (см. рис. 1.1,IV). При $\sigma_0 > 0.62$ ансамбль связанных логистических отображений переходит в режим полной синхронизации в пространстве, характеризующийся хаотическим поведением элементов во времени [142].

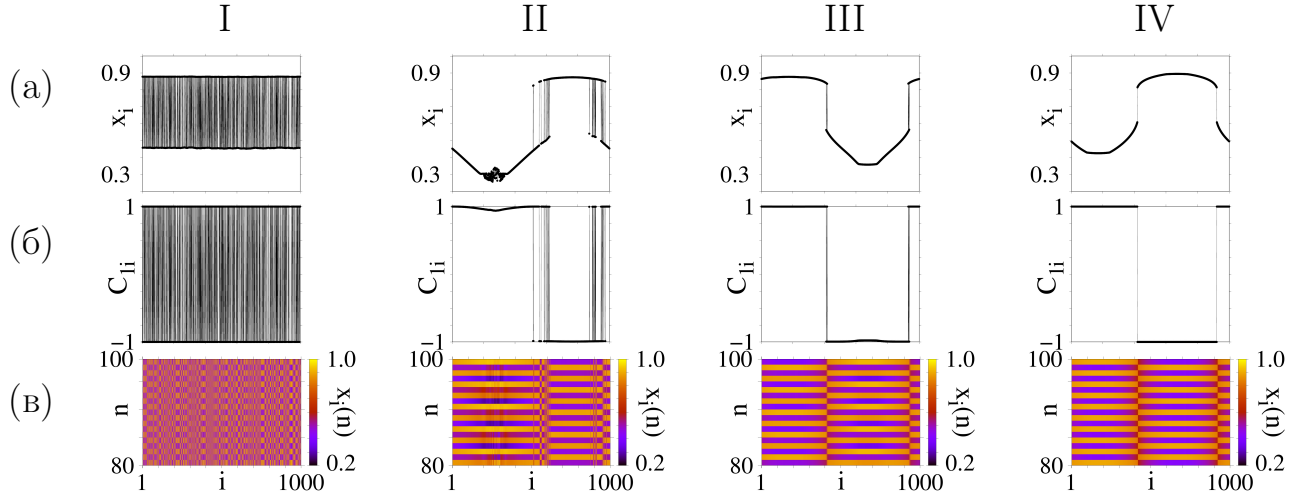


Рисунок 1.1. Динамика кольца нелокально связанных логистических отображений в отсутствие шума при различных значениях силы связи между элементами σ_0 : 0.24 (столбец I), 0.295 (столбец II), 0.345 (столбец III), 0.38 (столбец IV). Мгновенные профили переменной x_i (а), пространственное распределение значений коэффициента взаимной корреляции C_{1i} (б), пространственно-временные диаграммы переменной $x_i(n)$ (в). Другие параметры: $\alpha_0 = 3.8$, $R = 320$, $D = 0$, $N = 1000$

Теперь добавим независимые источники шума с равномерным распределением (1.7) в ансамбль аддитивным способом и проанализируем эффекты, наблюдающиеся в системе. На рисунке 1.2 приведены зависимости вероятности наблюдения химерных состояний P от силы связи σ_0 и интенсивности шума D . Значение P представляет собой нормированное число случайных начальных распределений $P = K/M$, где K – число начальных реализаций, которые ведут к установлению химерных состояний в кольце, M – число пар случайных начальных распределений переменной и реализаций шума. Можно выделить интервалы значений D , соответствующие слабому ($D \in [0, 0.005]$) и сильному шуму ($D > 0.005$), а также интервал слабой связи $\sigma_0 < 0.3$ и сильной связи $\sigma_0 > 0.3$.

Как видно из диаграммы (рис. 1.2,а), при слабой интенсивности шума ($D < 0.005$) все еще существует широкий интервал по силе связи σ_0 , в котором

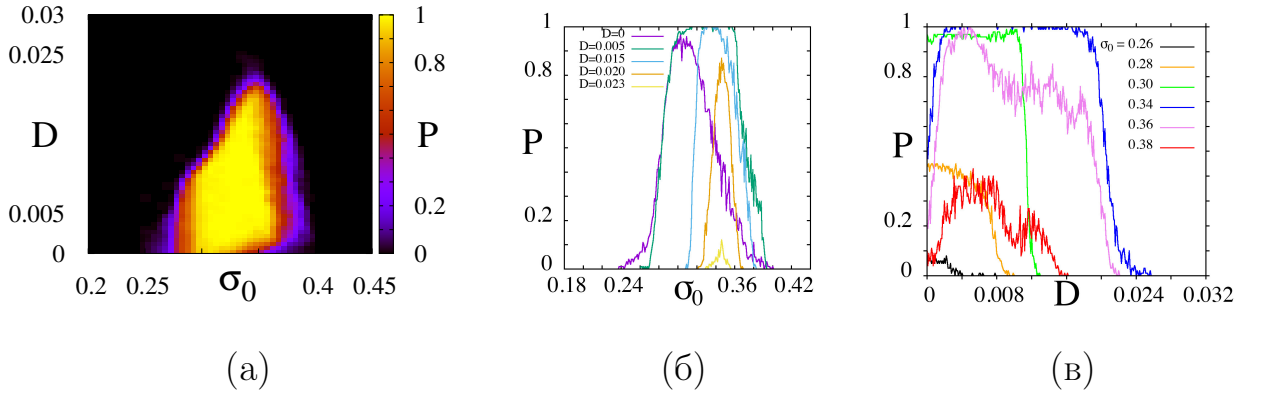


Рисунок 1.2. Распределение P вероятности появления химерных состояний в кольце нелокально связанных логистических отображений при введении аддитивного белого шума с равномерным распределением: (а) двухпараметрическая диаграмма на плоскости параметров (σ_0, D) ; (б) при изменении σ_0 и фиксированных значениях D ; (в) при изменении D и фиксированных σ_0 . Расчет производился с использованием $M = 50$ пар случайных начальных распределений переменной $x_i(0)$ в интервале $[0, 1)$ и реализаций шума для фрагмента (а) и $M = 100$ для (б),(в). Другие параметры: $\alpha_0 = 3.8$, $R = 320$, $N = 1000$

высока вероятность наблюдения химерных состояний (желтый и оранжевый цвета). С увеличением интенсивности шума вероятность наблюдения химер в области правой границы этого интервала сдвигается в область больших значений силы связи в связи с тем, что шум индуцирует переход элементов между бассейнами притяжения двух ветвей профиля, что приводит к появлению некогерентного кластера в точках, где были разрывы профиля. То же самое иллюстрирует рисунок 1.2,б. При этом видно, что в отсутствие аддитивного шума максимальная вероятность наблюдения химер находится на уровне $P \approx 0.95$, и только введение аддитивного шума в некотором оптимальном интервале интенсивности может увеличить эту вероятность до $P = 1$ (рис. 1.2,б, $D = 0$, $D = 0.005$, $D = 0.015$, рис. 1.2,в, розовая и синяя линии). При больших значениях интенсивности шума вероятность начинает падать до $P = 0$ (рис. 1.2). Однако можно говорить и о наличии оптимального значения силы связи, при

которой для данной интенсивности шума наблюдается максимальная вероятность появления химерных структур (рис. 1.2,б). На рисунок 1.2,б также отчетливо видно, что такое оптимальное значение σ_0 сдвигается в область сильной связи с увеличением интенсивности шума.

Рисунки 1.3,I-IV иллюстрируют динамику кольца нелокально связанных логистических отображений при слабой интенсивности аддитивного шума и тех же значениях силы связи, которые были представлены в случае отсутствия шума в системе (рис. 1.1). Видно, что мгновенные профили ансамбля в присутствии слабого шума достаточно схожи с теми, что были в отсутствие шума, наблюдается только слабое зашумление пространственных профилей (рис. 1.3,I-III). В то же время рисунок 1.3,IV демонстрирует ситуацию, когда введение аддитивного шума приводит к появлению узкого некогерентного кластера фазовой химеры в точках разрыва (сравните рис. 1.1,IV без химеры и рис. 1.3,IV с фазовой химерой с одним некогерентным кластером $895 < i < 899$). Причиной этого являются вызванные шумом переходы между двумя бассейнами притяжения двух ветвей, что делает некогерентные кластеры шире. В этом заключается конструктивное влияние шума.

В случае большой интенсивности аддитивного шума $D > 0.005$ ширина области существования химер по параметру σ_0 значительно уменьшается (рис. 1.2,а,б). Изменения в динамике ансамбля при наличии сильного шума показаны на рисунке 1.4,I-IV для тех же значений σ_0 , что и в предыдущих случаях. В случае очень слабой силы связи некогерентный профиль не претерпевает качественных изменений (сравните рис. 1.1,I и рис. 1.4,I). При большей, но все еще слабой силе связи, которая соответствует наблюдению химерных состояний в системе в отсутствие шума, вводимый аддитивный шум разрушает всю пространственную структуру в сети (рис. 1.4,II). В этом случае динамике ансамбля отвечает сильно некогерентный мгновенный пространственный профиль (рис. 1.4,а,II). Однако элементы по-прежнему периодически колеблются во времени (рис. 1.4,в,II), а значения коэффициентов взаимной корреляции ле-

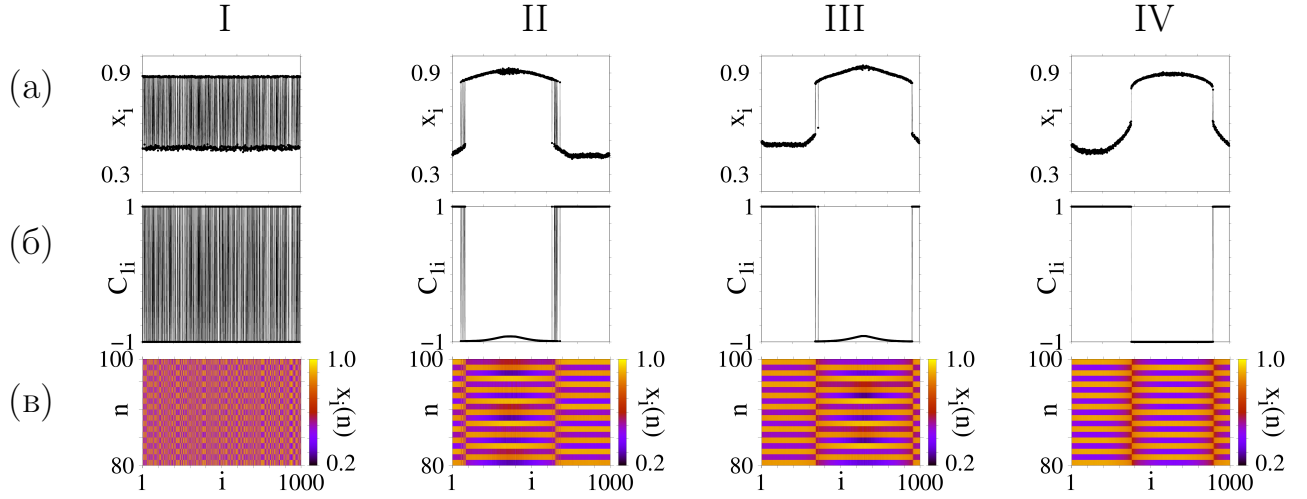


Рисунок 1.3. Динамика ансамбля нелокально связанных логистических отображений в присутствии слабого аддитивного белого шума ($D=0.0045$) с равномерным распределением для различных значений силы связи σ_0 : 0.24 (столбец I), 0.295 (столбец II), 0.345 (столбец III), 0.38 (столбец IV). Другие параметры: $\alpha_0 = 3.8$, $R = 320$, $N = 1000$

жат в области довольно больших значений $C_{1i} > 0.89$ (рис. 1.4,б,II). С увеличением силы связи четко наблюдается фазовая химера с зашумленными когерентными кластерами (рис. 1.4,III). Наконец, когда сила связи соответствует пространственному профилю с разрывом или узкими некогерентными кластерами фазовой химеры, аддитивный шум размывает и «сглаживает» профиль (рис. 1.4,а,IV), что особенно отчетливо проявляется в распределении значений коэффициентов взаимной корреляции (рис. 1.4,б,IV).

Таким образом, из полученных результатов (рис. 1.2) следует, что существует оптимальная ненулевая интенсивность шума D , при которой σ_0 -интервал наблюдения химеры максимален, а вероятность появления химерных состояний стремится к 1. Этот контринтуитивный конструктивный эффект шума в некотором смысле можно трактовать как эффект, подобный когерентному резонансу (возникновение незатухающих стохастических колебаний в возбудимых системах под действием относительно малого шума [14, 24]). Эффект, наблюдаемый в ансамбле нелокально связанных отображений под воздействием шума, можно

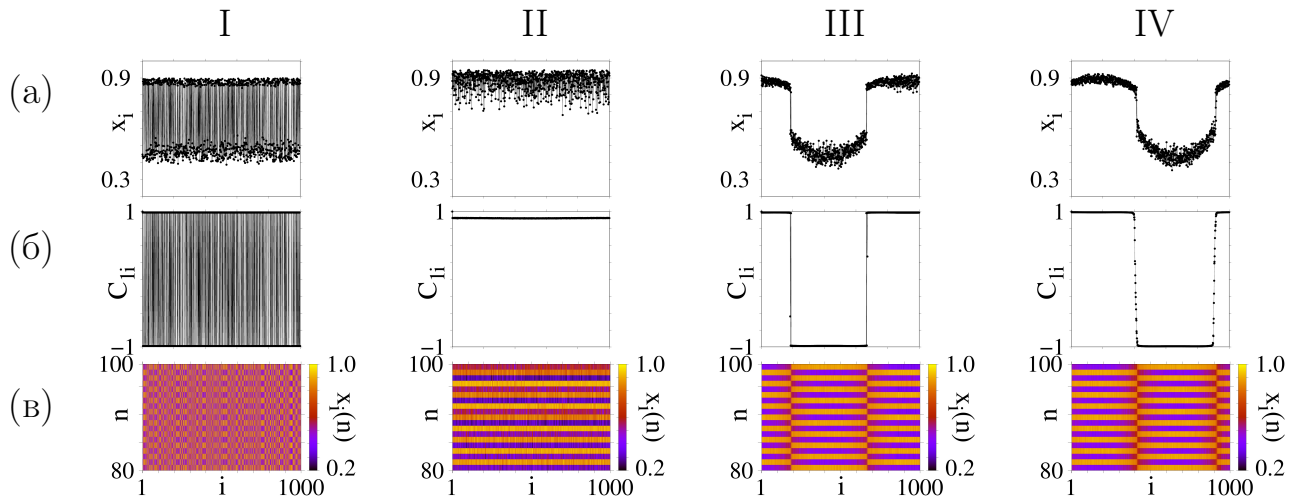


Рисунок 1.4. Динамика ансамбля нелокально связанных логистических отображений в присутствии сильного аддитивного белого шума ($D=0.02$) с равномерным распределением для различных значений силы связи σ_0 : 0.24 (столбец I), 0.295 (столбец II), 0.345 (столбец III), 0.38 (столбец IV). Другие параметры: $\alpha_0 = 3.8$, $R = 320$, $N = 1000$

сравнить с когерентным резонансом, поскольку введение аддитивного шума ведет к возбуждению химерного режима из некоторого нехимерного (“невозбужденного”) состояния. Однако, из-за того, что некогерентный кластер фазовой химеры представляет собой случайное распределение элементов в пространстве между двумя “ветвями”, можно проводить параллель со стохастическим резонансом (увеличение регулярности переключений между двумя бистабильными состояниями под воздействием оптимальной интенсивности шума [10, 150]). С другой стороны, существует оптимальное значение силы связи, при котором D -интервал наблюдения химеры максимален, а $P \rightarrow 1$, что также является проявлением эффекта, подобного резонансу.

Более детальное изучение динамики кольца нелокально связанных логистических отображений показало, что существует малая область по управляющему параметру элементов, в которой наблюдается немного отличный сценарий перехода от некогерентной динамики к когерентной при увеличении силы связи. Возможна ситуация, когда после перехода в область когерентной динамики

с гладким профилем на некотором интервале значений σ_0 появляются профили с разрывом. Данный эффект отражен на карте режимов для трех различных случайных распределений начальных значений переменных $x_i(0)$ в интервале $[0, 1)$ (рис. 1.5). Видно, что в окрестности $\alpha_0 \approx 3.7$ есть область фиолетового цвета, которая отделена от основной области. В этом случае при увеличении силы связи можно перейти из области химеры в область с разрывом в мгновенном профиле. Далее, находясь в области гладкого профиля и при большем значении σ_0 , можно вновь попасть в область с разрывом профиля, и только после этого (при дальнейшем увеличении σ_0) в кольце установится полностью когерентная динамика.

Такая динамика кольца приводит к тому, что при введении шума в систему на плоскости параметров (σ_0, A) возникает уже не одна, а две области наблюдения химер с ненулевой вероятностью. На рисунке 1.6 приведены карты распределения вероятности для различных значений параметра α_0 . Отметим, что в данном случае использовался источник шума с нормальным распределением (1.8), чтобы подчеркнуть отсутствие качественных различий наблюдае-

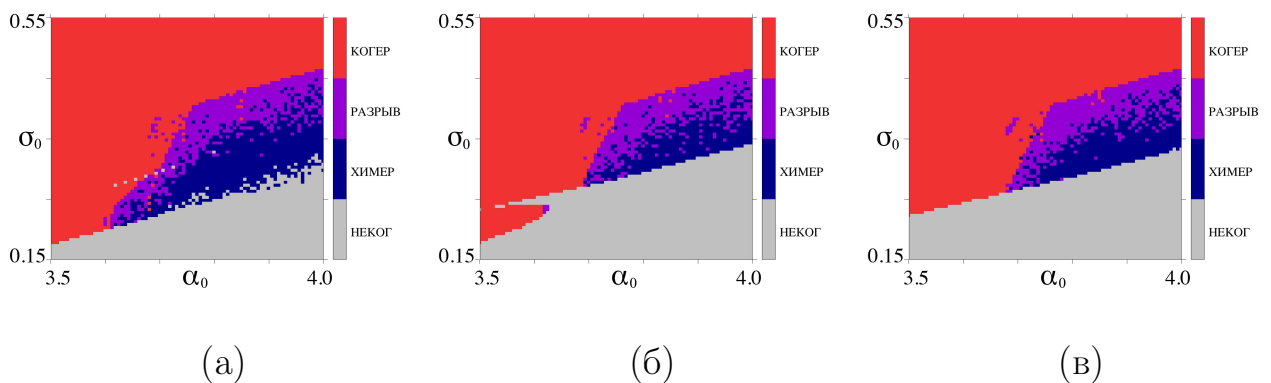


Рисунок 1.5. Карта динамических режимов для кольца нелокально связанных логистических отображений на плоскости параметров (α_0, σ_0) для трех разных случайных распределений начальных условий в интервале $[0, 1)$. КОГЕР – гладкий профиль или полная синхронизация между элементами, РАЗРЫВ – профиль с разрывами, ХИМЕР – химерные состояния, НЕКОГ – некогерентная динамика. Другие параметры: $R = 320$, $N = 1000$.

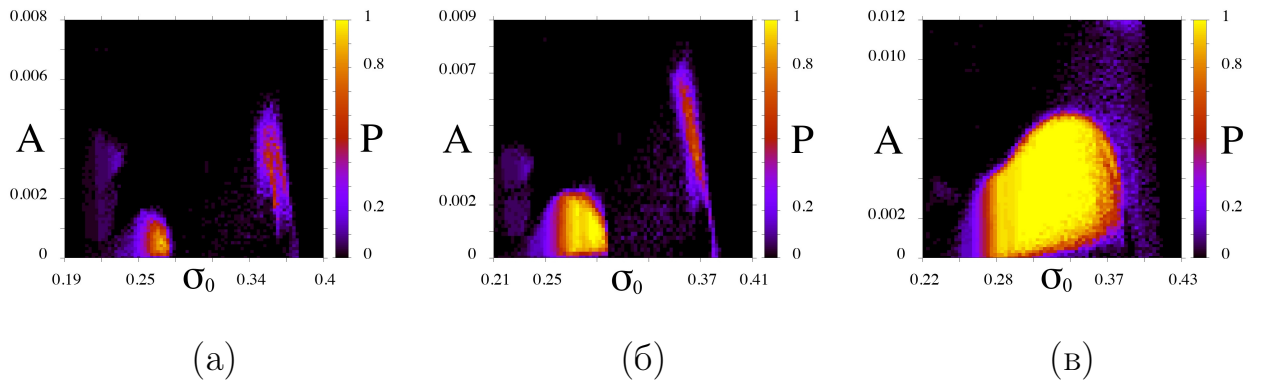


Рисунок 1.6. Двупараметрические диаграммы на плоскости параметров (σ_0 , A), показывающие вероятность P появления химерных состояний в кольце нелокально связанных логистических отображений при введении аддитивного белого шума с нормальным распределением (1.8) при различных значениях управляющего параметра парциальных элементов α_0 : (а) 3.69, (б) 3.7, (в) 3.75.

Расчет производился с использованием 50 случайных начальных распределений переменной $x_i(0)$ в интервале $[0, 1)$. Другие параметры:

$$R = 320, N = 1000.$$

мых эффектов при использовании источников шума с различным распределением. Из распределений видно, что в случае значений α_0 , лежащих в интервале появления профилей с разрывом в области, соответствующей уже наблюдению когерентных гладких профилей, область наблюдения химер состоит из двух подобластей (рис. 1.6,а,б). В классическом же случае, когда увеличение силы связи приводит к наблюдению только когерентных профилей, имеет место одна область на плоскости параметров (σ_0 , A) (рис. 1.6,в и рис. 1.2).

Кольцо нелокально связанных отображений Эно может демонстрировать фазовые и амплитудные химеры в определенном диапазоне силы связи [37, 42]. Как и для кольца нелокально связанных логистических отображений, на карте режимов для кольца нелокально связанных отображений Эно существует зона по параметру α_0 , в которой область когерентного режима при увеличении σ_0 прерывается участком с профилями с разрывами, а есть область, где наблюдается классический переход от некогерентности к когерентности че-

рез химерные структуры и профиль с разрывом. На рисунке 1.7 приведены карты динамических режимов для трех различных начальных распределений динамических переменных $x_i(0), y_i(0)$. Из приведенных данных следует, что в интервале $\alpha_0 \in [1.26, 1.43]$ существует область с разрывом профиля, которая лежит в области когерентного гладкого профиля, при остальных же значениях управляющего параметра α_0 наблюдается переход сразу в область с гладким профилем без повторного появления профилей с разрывом.

Таким образом, в кольце нелокально связанных отображений Эно тоже может наблюдаться как одна область с ненулевой вероятностью появления химер на плоскости параметров (σ_0, A) , так и две подобласти, в зависимости от значений управляющих параметров парциальных элементов ансамбля. На рисунке 1.8 приведены двумерные диаграммы распределения вероятности появления химерных состояний на плоскости параметров (σ_0, A) для различных значений α_0 . Отметим, что увеличение параметра α_0 ведет к уменьшению ширины второй области с разрывом по параметру σ_0 (см. рис. 1.7), что приводит и

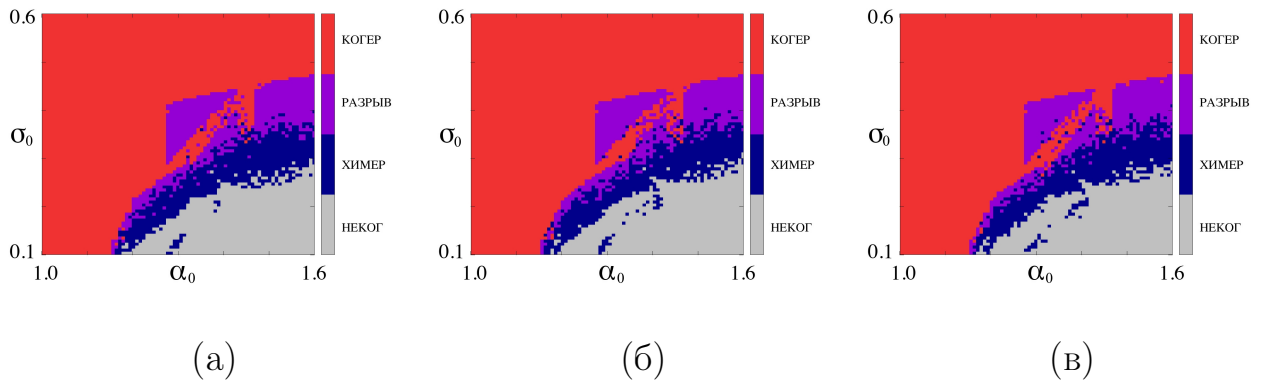


Рисунок 1.7. Карта динамических режимов для кольца нелокально связанных отображений Эно на плоскости параметров (α_0, σ_0) для трех разных случайных распределений начальных условий в интервале $x_i(0) \in [-0.5, 0.5]$ и $y_i(0) \in [-0.15, 0.15]$ при $\beta = 0.2$. КОГЕР – гладкий профиль или полная синхронизация между элементами, РАЗРЫВ – профиль с разрывами, ХИМЕР – химерные состояния, НЕКОГ – некогерентная динамика. Другие параметры:

$$R = 320, N = 1000.$$

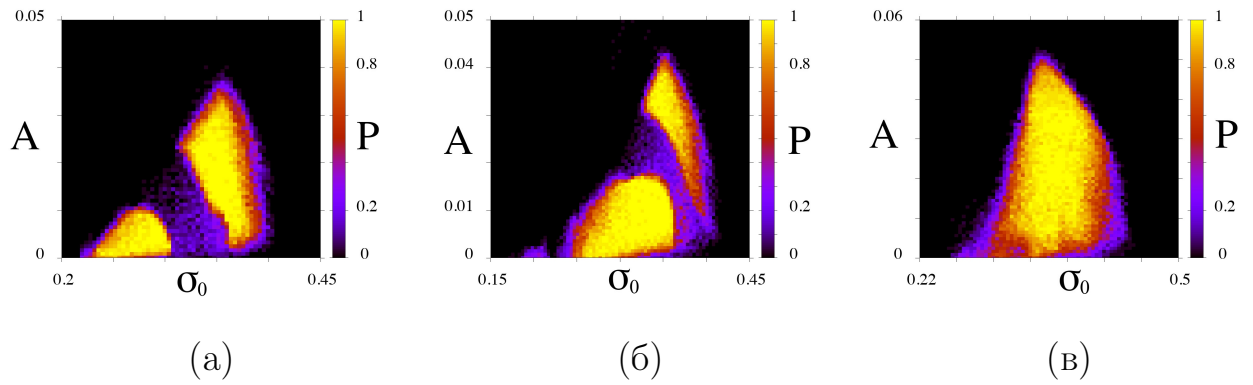


Рисунок 1.8. Двупараметрические диаграммы на плоскости параметров (σ_0, A) , показывающие вероятность P появления химерных состояний в кольце нелокально связанных отображений Эно при введении аддитивного шума с нормальным распределением при различных значениях управляющего параметра парциальных элементов α_0 : (а) 1.35, (б) 1.4, (в) 1.6. Расчет производился с использованием 50 случайных начальных распределений в интервалах $x_i(0) \in [-0.5, 0.5]$ и $y_i(0) \in [-0.15, 0.15]$. Другие параметры:

$$\beta = 0.2, R = 320, N = 1000.$$

к уменьшению второй области существования химер на плоскости параметров (σ_0, A) (сравните рис. 1.8,а-в).

В кольце нелокально связанных модифицированных отображений Рикера переход от некогерентности к когерентности также происходит через химерные состояния, возникновению которых предшествует наличие разрывов в мгновенном пространственном профиле значений элементов ансамбля. Динамика кольца модифицированных отображений Рикера качественно совпадает с динамикой рассмотренных ранее ансамблей, только для него характерна большая амплитуда колебаний элементов (например, для $\alpha_0 = 21.5$ значения динамических переменных лежат в интервале $x_i(n) \in [0, 8]$).

Динамические режимы, реализующиеся в кольце нелокально связанных модифицированных отображений Рикера при изменении управляющего параметра отображения α_0 и силы связи σ_0 , приведены на рисунке 1.9 для трех различных случайных распределений начальных условий $x_i(0)$ в интервале $[-1, 1]$.

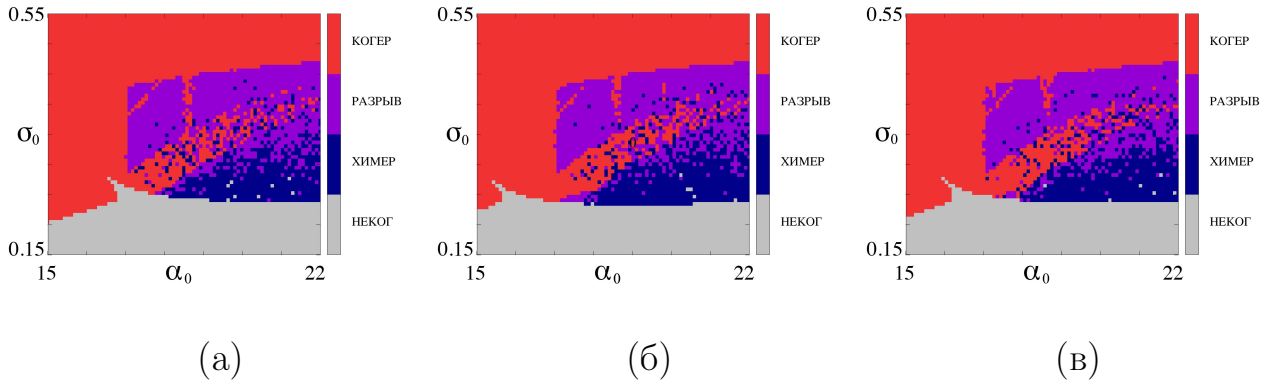


Рисунок 1.9. Карта динамических режимов для кольца нелокально связанных модифицированных отображений Рикера на плоскости параметров (α_0, σ_0) для трех различных случайных распределений начальных условий в интервале $x_i(0) \in [-1, 1]$. КОГЕР – гладкий профиль или полная синхронизация между элементами, РАЗРЫВ – профиль с разрывами, ХИМЕР – химерные состояния, НЕКОГ – некогерентная динамика. Другие параметры: $R = 320$, $N = 1000$.

Из построенных карт режимов видно, что как и в случае колец логистических отображений и отображений Эно, для ансамбля отображений Рикера также характерно появление когерентного окна в области профилей с разрывами в интервале малых значений параметра α_0 .

Для оценки влияния аддитивного шума на вероятность наблюдения химерных состояний на рисунке 1.10 приведены три диаграммы распределения вероятности P на плоскости параметров (σ_0, A) , построенные для трех различных значений параметра α_0 . Можно видеть, что для двух зон с максимальной вероятностью характерна более плавная граница перехода между ними, чем в рассмотренных выше случаях (сравните рис. 1.10,а-в, рис. 1.6,а,б и рис. 1.8,а-б). Более того, с увеличением параметра α_0 данная граница нивелируется и две зоны сливаются в одну.

Заметим, что при больших значениях α_0 в ансамбле кроме химерных состояния наблюдаются и уединенные состояния в областях слабой и сильной связи (два отдельных интервала по параметру σ_0), что приводит к незначительным

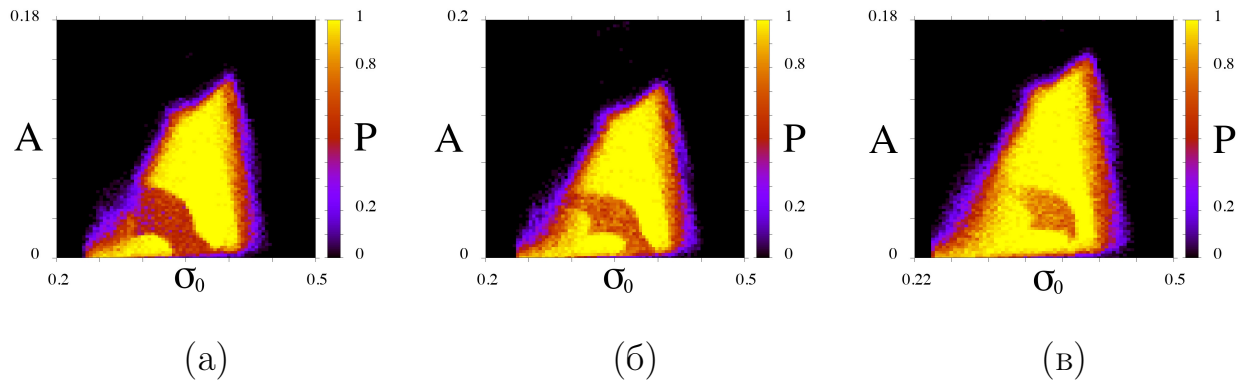


Рисунок 1.10. Двупараметрические диаграммы на плоскости параметров (σ_0, A) , показывающие вероятность P появления химерных состояний в кольце нелокально связанных модифицированных отображений Рикера при введении аддитивного шума с нормальным распределением при различных значениях управляющего параметра парциальных элементов α_0 : (а) 20.0, (б) 21.0, (в) 22.0. Расчет производился с использованием 50 случайных начальных распределений в интервале $x_i(0) \in [-1, 1]$. Другие параметры: $R = 320$, $N = 1000$.

изменениям диаграмм распределения вероятности P . В этом случае добавление шумового воздействия приводит к переходу от уединенных состояний к некогерентной динамике, поэтому на диаграммах появляется дополнительная область с нулевой вероятностью наблюдения химер, которая разделяет область с ненулевой вероятностью на две подобласти. Однако данная сепарация происходит со стороны сильной связи, а не слабой, как это было ранее. Более подробно данный эффект исследован и описан в статье, которая готовится к публикации в журнале *Chaos* на момент опубликования данной диссертационной работы.

1.2.3 Влияние шумовой модуляции и случайного распределения значений управляющих параметров парциальных элементов на существование химерных состояний

В данном разделе представлены данные исследований влияния случайных неоднородностей параметров и источников мультипликативного шума на динамику ансамблей связанных хаотических отображений. В этом случае шум модулирует параметры, управляющие локальной динамикой парциальных элементов, аддитивный шум в системе отсутствует $N_i(n) \equiv 0$. Сила связи между всеми элементами одинакова и постоянна: $\sigma_i(n) = \sigma_0$. Шумовая модуляция управляющих параметров парциальных элементов задается следующими соотношениями: $\alpha_i(n) = \alpha_0 + D_\alpha \xi_i(n)$, где $\xi_i(n)$ – независимые источники шума с равномерным распределением в интервале $[-1, 1]$, D_α – интенсивность шума; $\alpha_i(n) = \alpha_0 + A_\alpha \psi_i(n)$, где $\psi_i(n)$ – источник шума со стандартным распределением с нулевым средним и единичным отклонением, A_α – интенсивность шума. В случае случайного распределения значения управляющих параметров парциальных элементов задаются следующими соотношениями: $\alpha_i = \alpha_0 + D_\alpha \xi_i$ ($\alpha_i = \alpha_0 + A_\alpha \psi_i$).

В связи с тем, что при $\alpha > 4.0$ траектории логистического отображения уходят на бесконечность, а среднее значение выбиралось равным $\alpha_0 = 3.8$, то $D_{max} = 0.2$ и $A_{max} = 0.0667$, часть значений управляющих параметров выходит за $\alpha = 4.0$, поэтому все значения $\alpha > 4.0$ приравниваются к $\alpha = 3.9999999$.

Случайное распределение значений управляющего параметра по ансамблю. Рассмотрим динамику ансамбля нелокально связанных логистических отображений, при наличии случайного распределения значений параметра α_i всех элементов, которое задается в начале итерирования и фиксиру-

ется для всех последующих вычислений. На рисунке 1.11 приведен ряд мгновенных профилей переменной x_i и пространственных распределений значений коэффициента взаимной корреляции (1.6), иллюстрирующих эволюцию режимов динамики кольца в случае неоднородности по параметрам α_i , заданной в соответствии с нормальным распределением ($A_\alpha \neq 0, D_\alpha = 0$). Когда связь между элементами довольно слабая, но достаточная для установления химерных структур, рост интенсивности шума или среднеквадратичного отклонения A_α ведет к расширению некогерентных кластеров фазовой и амплитудной химер (рис. 1.11,а-в). Более того, увеличение A_α может приводить к формированию некогерентного кластера амплитудной химеры, который отсутствует в кольце с однородным распределением параметра α_i . При сильной связи между элементами (рис. 1.11,г) в отсутствие неоднородного распределения управляющих параметров динамика ансамбля характеризуется мгновенным пространственным профилем с двумя разрывами (рис. 1.11,г, $53 < i < 54, 569 < i < 570$), на месте которых рождаются некогерентные кластеры фазовой химеры при уменьшении силы связи, что было уже отмечено в предыдущих разделах работы. Неоднородное распределение значений α_i ведет к появлению некогерентных кластеров, которые отчетливо видны на пространственном распределении значений взаимной корреляции (рис. 1.11,д, кластеры $383 < i < 388$ и $898 < i < 904$, рис. 1.11,е, кластеры $262 < i < 268$ и $709 < i < 720$). Аналогичные изменения мгновенных пространственных профилей наблюдаются и в случае равномерного распределения значений параметра α_i ($A_\alpha = 0, D_\alpha \neq 0$).

Используя пространственные распределения значений C_{1i} , по которым легче диагностировать фазовую химеру при сильно неоднородном разбросе значений управляющих параметров элементов (при больших значениях D_α или A_α), были построены карты распределений вероятностей существования фазовых химер на плоскости параметров (σ_0, D_α) (рис. 1.12,а) и (σ_0, A_α) (рис. 1.12,б). Для построения данных диаграмм использовалось 50 различных реализаций начальных значений переменной $x_i(0)$, случайно и равномерно распределенных в

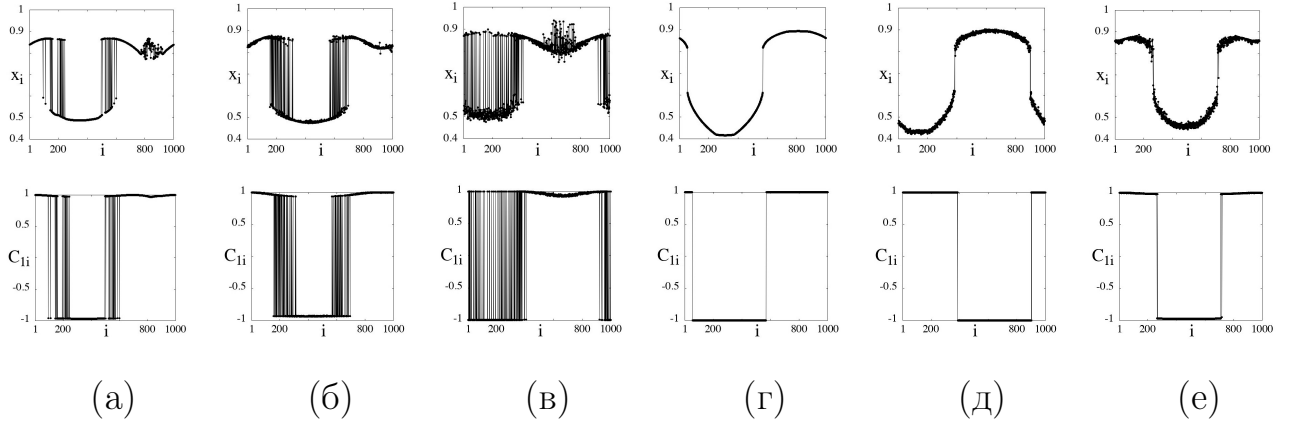


Рисунок 1.11. Эволюция пространственно-временных структур в кольце нелокально связанных логистических отображений для случая случайного распределения значений α_i при изменении интенсивности A_α и значений силы связи σ_0 . Мгновенные профили (верхний ряд) и пространственные распределения величины C_{1i} (нижний ряд) при (а) $A_\alpha = 0$, $\sigma_0 = 0.290$, (б) $A_\alpha = 0.0323$, $\sigma_0 = 0.290$, (в) $A_\alpha = 0.0629$, $\sigma_0 = 0.290$, (г) $A_\alpha = 0$, $\sigma_0 = 0.380$, (д) $A_\alpha = 0.0323$, $\sigma_0 = 0.380$, (е) $A_\alpha = 0.0629$, $\sigma_0 = 0.380$. Другие параметры: $\alpha_0 = 3.8$, $D_\alpha = 0$, $R = 320$, $N = 1000$.

интервале $[0, 1)$. Как можно видеть из рисунка 1.12, значительная разница между типом распределения (равномерное или нормальное) отсутствует, различие обусловлено только характером распределения по всему интервалу отклонения от среднего значения α_0 (равномерное или сосредоточенное вокруг среднего значения для нормального распределения). Левая граница области существования химерных состояний почти не изменяется при увеличении параметра отклонения (D_α и A_α) в отличие от правой границы, которая сдвигается в область больших значений σ_0 .

Кроме выделенной области существования фазовых химер на плоскости параметров (σ_0, D_α) и (σ_0, A_α) , были найдены значения параметров для двух реализаций начальных условий, при которых в системе наблюдаются химеры уединенных состояний [117, 121] (рис. 1.12, красные и синие точки). Проведенные исследования показали, что область существования химер уединенных со-

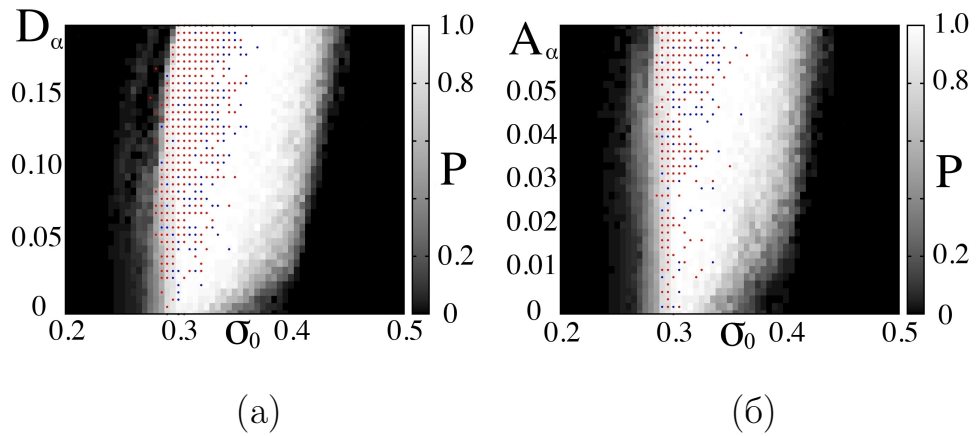


Рисунок 1.12. Двупараметрические диаграммы на плоскости параметров: (а) (σ_0, D_α) для источника шума с равномерным распределением, (б) (σ_0, A_α) для источника шума с нормальным распределением, показывающая вероятность

P появления химерных состояний в кольце нелокально связанных логистических отображений для случая фиксированного неоднородного распределения значений α_i . Красными и синими точками отмечены значения параметров, соответствующие установлению химер уединенных состояний для двух различных реализаций случайных начальных условий. Другие параметры: $\alpha_0 = 3.8$, $R = 320$, $N = 1000$.

стояний увеличивается с ростом параметра отклонения (D_α или A_α) подобно области существования фазовых химер.

Шумовая модуляция управляющих параметров элементов. Проанализируем эволюцию пространственно-временных режимов в кольце нелокально связанных логистических отображений, в присутствии независимых источников мультипликативного шума, порождающих флуктуации параметров ансамбля. В данном случае при малой силе связи между элементами кольца увеличение стандартного отклонения при нормальном распределении ($A_\alpha \neq 0$, $D_\alpha = 0$) (рис. 1.13,а-в) приводит к переходу ансамбля в режим пространственной некогерентности (рис. 1.13,в). В то же время значения коэффициента взаимной корреляции отличны от 0 и изменяются на уровне $C_{1i} \approx 0.9$, т.е. элементы в кольце колеблются во времени с определенной степенью согласованно-

сти. Таким образом, при слабой силе связи σ_0 постоянное воздействие шума на управляющий параметр оказывает существенное влияние на форму пространственного профиля (химерные состояния исчезают и мгновенный профиль становится некогерентным), а не на динамику элементов ансамбля во времени. Более интересная ситуация наблюдается при довольно сильной силе связи между элементами. Сначала, как и в рассмотренном в предыдущем разделе случае, воздействие шума на управляющий параметр ведет к возникновению фазовых химер при силе связи между элементами, которая в случае отсутствия шума ($A_\alpha = 0, D_\alpha = 0$) соответствует профилю с разрывами (рис. 1.13,г,д). Однако дальнейшее увеличение интенсивности A_α вновь приводит к мгновенному профилю с разрывами (рис. 1.13,е). Такие же изменения в профиле наблюдаются при влиянии шума с равномерным распределением ($A_\alpha = 0, D_\alpha \neq 0$).

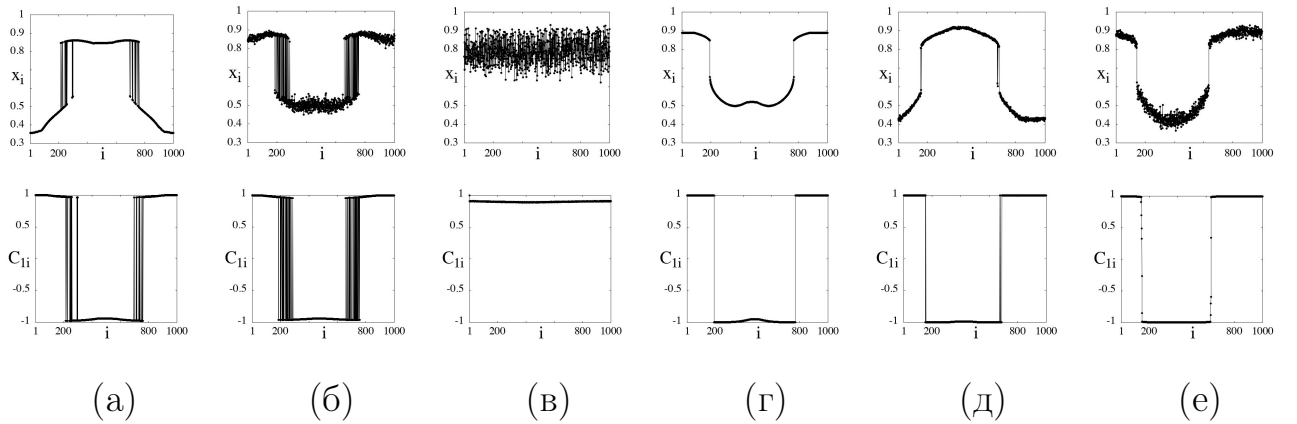


Рисунок 1.13. Эволюция пространственно-временных структур в кольце нелокально связанных логистических отображений для случая шумовой модуляции управляющих параметров $\alpha_i(n)$ и при изменении интенсивности A_α и значений силы связи σ_0 . Мгновенные профили (верхний ряд) и пространственные распределения величины C_{1i} (нижний ряд) при (а) $A_\alpha = 0, \sigma_0 = 0.290$, (б) $A_\alpha = 0.0323, \sigma_0 = 0.290$, (в) $A_\alpha = 0.0629, \sigma_0 = 0.290$, (г) $A_\alpha = 0, \sigma_0 = 0.370$, (д) $A_\alpha = 0.0153, \sigma_0 = 0.370$, (е) $A_\alpha = 0.0646, \sigma_0 = 0.370$. Другие параметры: $\alpha_0 = 3.8, D_\alpha = 0, R = 320, N = 1000$.

По аналогии с предыдущим разделом, были также построены двухпараметрические диаграммы распределения вероятностей появления химерных структур на плоскости параметров (σ_0, D_α) ($A_\alpha = 0, D_\alpha \neq 0$, рис. 1.14,а) и (σ_0, A_α) ($A_\alpha \neq 0, D_\alpha = 0$, рис. 1.14,б). Как видно из приведенных диаграмм, левая граница существования химер при малой интенсивности шума (A_α, D_α) почти не меняется в обоих случаях, однако после $D_\alpha \approx 0.05$ и $A_\alpha \approx 0.02$ начинает сдвигаться в область большей силы связи. Расположение правой границы области отличается для двух исследованных случаев. При малых интенсивностях шума наблюдается сдвиг границы в область больших значений σ_0 , но при дальнейшем увеличении D_α и A_α граница сдвигается в область малых значений σ_0 . Таким образом, область существования фазовых химер сужается при увеличении D_α и A_α , что особенно заметно для случая равномерного распределения (рис. 1.14,а). То же самое наблюдалось и для области реализации химер уединенных состояний.

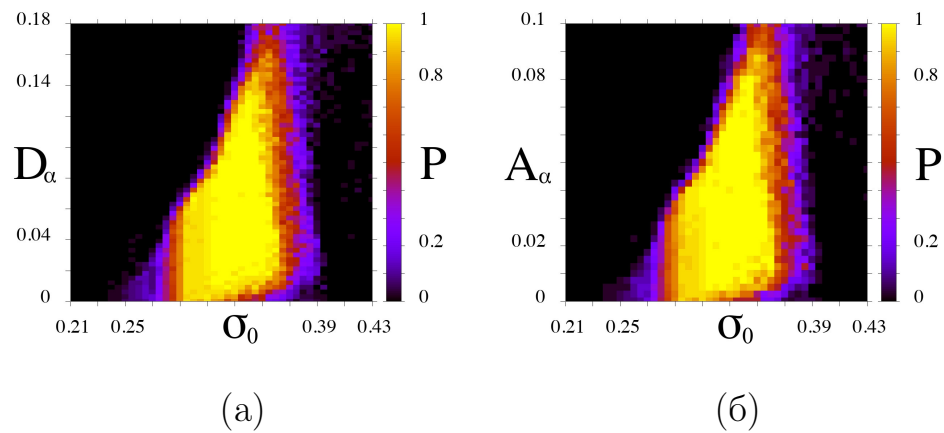


Рисунок 1.14. Двухпараметрические диаграммы на плоскости параметров: (а) (σ_0, D_α) при модуляции управляющих параметров источником шума с равномерным распределением, (б) (σ_0, A_α) – с нормальным распределением, показывающая вероятность P появления химерных состояний в кольце нелокально связанных логистических отображений для случая шумовой модуляции параметров $\alpha_i(n)$. Другие параметры: $\alpha_0 = 3.8, R = 320, N = 1000$.

1.2.4 Шумовая модуляция *силы связи между* парциальными элементами

В данном разделе представлены результаты численного исследования динамики колец нелокально связанных хаотических отображений при наличии случайной модуляции коэффициентов связи. При этом в данном случае используется источник цветного шума. Сила связи определяется следующим уравнением:

$$\begin{aligned}\sigma_i(n) &= \sigma_0 + A\sqrt{1 - \frac{\gamma}{2}}y_i(n), \\ y_i(n+1) &= (1 - \gamma)y_i(n) + \sqrt{2\gamma}\psi_i(n),\end{aligned}\tag{1.9}$$

где $y_i(n)$ – дискретный источник цветного шума, A – интенсивность шума. Все источники цветного шума задаются одинаковыми уравнениями, содержащими независимые источники дискретного белого шума ψ_i со стандартным нормальным распределением (среднее значение распределения равно 0, а дисперсия равна 1). Таким образом, все цветные источники шума $y_i(n)$ независимы. Параметр γ управляет шириной спектра и временем корреляции цветных источников шума: при $\gamma = 1$ соответствует источнику белого шума, а $\gamma \ll 1$ – узкополосному шуму. Для случая общего источника шума, воздействующего на силы связи между всеми элементами, уравнение 1.9 может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sigma_0 + A\sqrt{1 - \frac{\gamma}{2}}y(n), \\ y(n+1) &= (1 - \gamma)y(n) + \sqrt{2\gamma}\psi(n),\end{aligned}\tag{1.10}$$

Таким образом, в данном разделе рассматривается два варианта введения источника шума в систему: 1) к каждому коэффициенту связи добавляется независимая шумовая составляющая, характеризующая влияние соседей на разные

элементы кольца; 2) все коэффициенты связи модулируются одной и той же реализацией шума.

В рассматриваемом случае в системе отсутствует аддитивный шум ($N_i(n) \equiv 0$), а управляющие параметры всех парциальных элементов равны $\alpha_i(n) = \alpha_0$.

Кольцо нелокально связанных логистических отображений.

Отсутствие шумовой модуляции параметров связи. В исследованиях были зафиксированы следующие значения параметров: $\sigma_0 = 0.32$, $\alpha_0 = 3.8$, $R = 300$, $N = 1000$. В качестве изменяемых управляющих параметров исследуемого ансамбля принимались характеристики цветного шума: ширина спектральной линии γ и интенсивность шума A .

Рассмотрим сначала динамику кольца в отсутствие случайной модуляции коэффициентов связи ($A = 0$). Начальные состояния $x_i(0)$ элементов ансамбля выбирались случайно распределенными в интервале $[0, 1]$. Стационарное

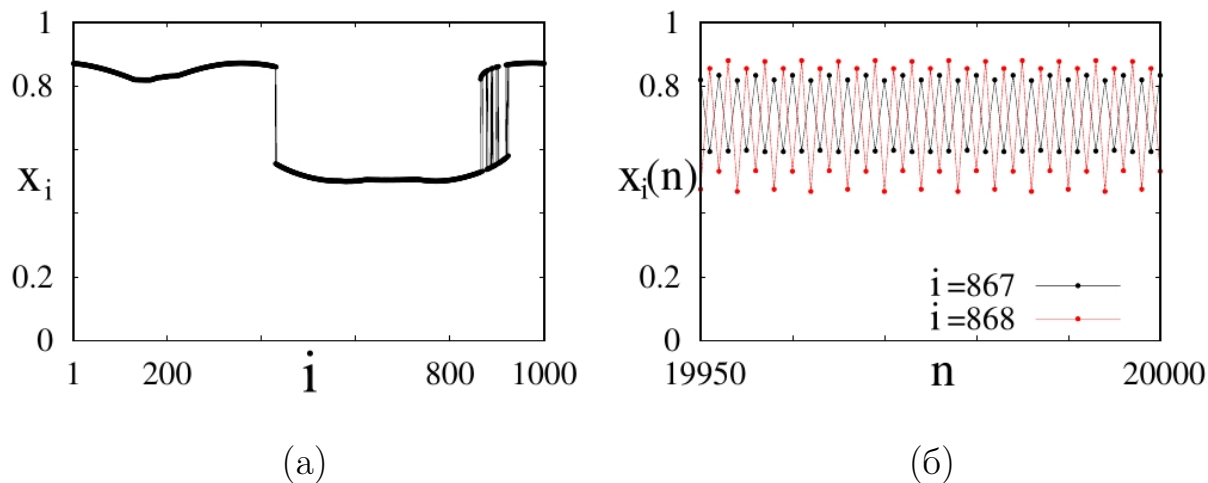


Рисунок 1.15. Химерная структура в кольце нелокально связанных логистических отображений без шума ($A = 0$). Мгновенный профиль переменных x_i (а) и временная реализация для двух соседних элементов из некогерентного кластера фазовой химеры ($i = 867$ и $i = 868$) (б). Время установления без шума составляет $n_0 = 20000$ итераций. Другие параметры:

$$\alpha_0 = 3.8, \sigma_0 = 0.32, R = 300, N = 1000.$$

состояние устанавливается после переходного времени $n_0 = 20000$ и соответствует фазовой химере, что проиллюстрировано на рисунке 1.15. Мгновенный профиль всех элементов ансамбля и временная динамика двух соседних элементов из некогерентного кластера представлены на рисунке 1.15,а и рисунке 1.15,б, соответственно. На мгновенном профиле видно, что установившаяся химерная структура имеет хорошо выраженные некогерентные ($428 \leq i \leq 431$ и $863 \leq i \leq 924$) и когерентные кластеры ($1 \leq i \leq 427$, $432 \leq i \leq 862$ и $925 \leq i \leq 1000$). Колебания соседних элементов из некогерентного кластера могут происходить как в фазе, так и в противофазе (как показано на рисунке 1.15,б).

В дальнейшем, начальные условия, относящиеся к стационарной химере, показанной на рисунке 1.15, использовались для иллюстрации мгновенных профилей системы после введения шумовой модуляции. Однако для построения областей существования различных пространственно-временных режимов в ансамбле с модулированной шумом связью в качестве начальных условий использовались шесть различных стационарных химерных состояний.

Модуляция силы связи независимыми источниками шума. Проследим за эволюцией химерных состояний в кольце нелокально связанных логистических отображений в случае модуляции коэффициентов связи независимыми источниками шума. После установлении химеры в кольце без шума включалась шумовая составляющая связи, и после переходного процесса $n = 10000$ итераций исследовался новый режим, который установился в системе под воздействием шумовой модуляции параметров связи.

На рисунке 1.16 приведены в качестве примера мгновенные профили исследуемого ансамбля, полученные при нескольких значениях параметра γ , определяющего время корреляции и ширину спектра источника шума, а также при увеличении интенсивности шума A . При малой интенсивности шума и любом значении γ мгновенные профили практически неотличимы от исходного (сравните рис. 1.15,а и рис. 1.16,а,г,ж). С увеличением интенсивности шума A химер-

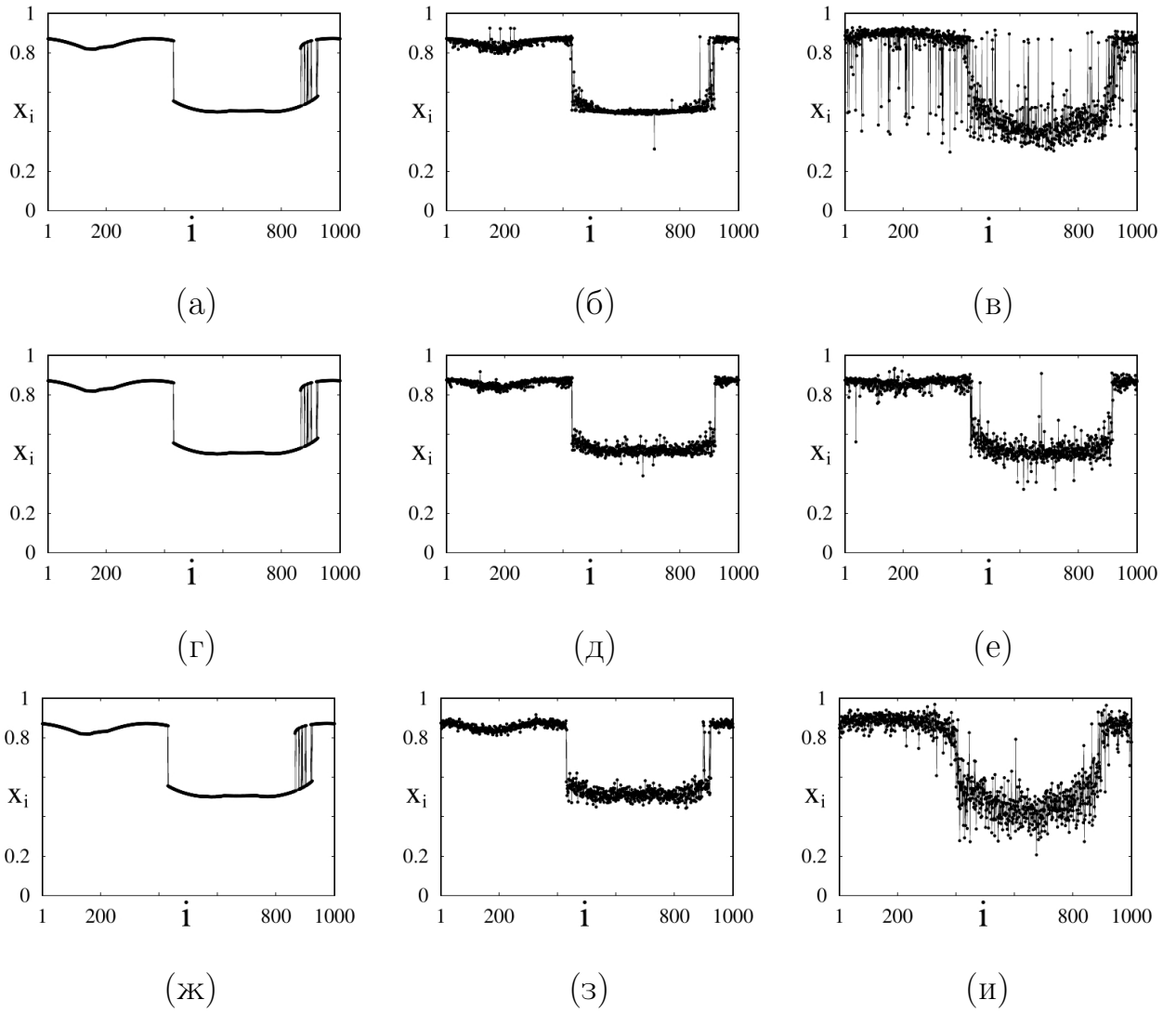


Рисунок 1.16. Эволюция химерных состояний в кольце нелокально связанных логистических отображений с модуляцией коэффициентов связи независимыми источниками шума при различных значениях интенсивности шума (A) и параметра γ , управляющего шириной спектра шума: (а) $A = 0.0001$, $\gamma = 0.0001$, (б) $A = 0.05$, $\gamma = 0.0001$, (в) $A = 0.11$, $\gamma = 0.0001$, (г) $A = 0.0001$, $\gamma = 0.1$, (д) $A = 0.05$, $\gamma = 0.1$, (е) $A = 0.0875$, $\gamma = 0.1$, (ж) $A = 0.0001$, $\gamma = 1.0$, (з) $A = 0.05$, $\gamma = 1.0$, (и) $A = 0.15$, $\gamma = 1.0$. Другие параметры: $\alpha_0 = 3.8$, $\sigma_0 = 0.32$, $R = 300$, $N = 1000$.

ное состояние, существовавшее без шума, эволюционирует таким образом, что кластер некогерентности постепенно сужается и при $A \gg 0.05$ практически исчезает. Его ширина в несколько раз меньше ширины некогерентного кластера в

системе без шумовой модуляции параметров связи (рис. 1.16,б,д,з). Дальнейшее увеличение интенсивности шума приводит к сильно зашумленным мгновенным профилям (рис. 1.16,в,е,и). Начиная с некоторого значения A , которое зависит от значения γ , значения динамических переменных системы уходят на бесконечность.

Обратим внимание на режим, показанный на рисунке 1.16,в. При малых значениях γ и интенсивности шума A вблизи границы, когда траектории уходят на бесконечность, на мгновенном пространственном профиле появляется множество так называемых уединенных узлов [35, 71]. Эти состояния соответствуют отдельным точкам на мгновенном профиле, в которых динамические переменные имеют отличные от других осцилляторов значения. Отметим, что уединенные узлы особенно типичны при низкочастотном шумовом воздействии (при малых значениях γ). С ростом γ количество уединенных состояний на пространственном профиле уменьшается, и они практически исчезают или редко возникают в случае белого шума ($\gamma = 1$).

Полученные результаты можно обобщить, определив области существования различных пространственно-временных режимов на плоскости параметров шумовой модуляции (γ, A) . На рисунке 1.17 показана карта режимов, построенная с использованием нескольких начальных распределений переменных $x_i(0)$, соответствующих различным химерным состояниям, наблюдаемым в кольце в отсутствие источника шума в коэффициенте связи.

На диаграмме режимов (рис. 1.17) выделено четыре области. В области 1 наблюдаются химерные состояния, подобные исходным химерам, наблюдавшимся при $A = 0$ (рис. 1.16,а,г,ж). В области 2 некогерентные кластеры исходной химеры подавляются шумовым воздействием (рис. 1.16,б,д,з). Однако из-за случайных флуктуаций мгновенных состояний пространственный профиль при параметрах из этой области нельзя назвать кусочно-гладким. Кроме того, внутри области 2 при малых значениях γ можно выделить область 4, в которой наблюдаются структуры, подобные уединенным состояниям (рис. 1.16,в).

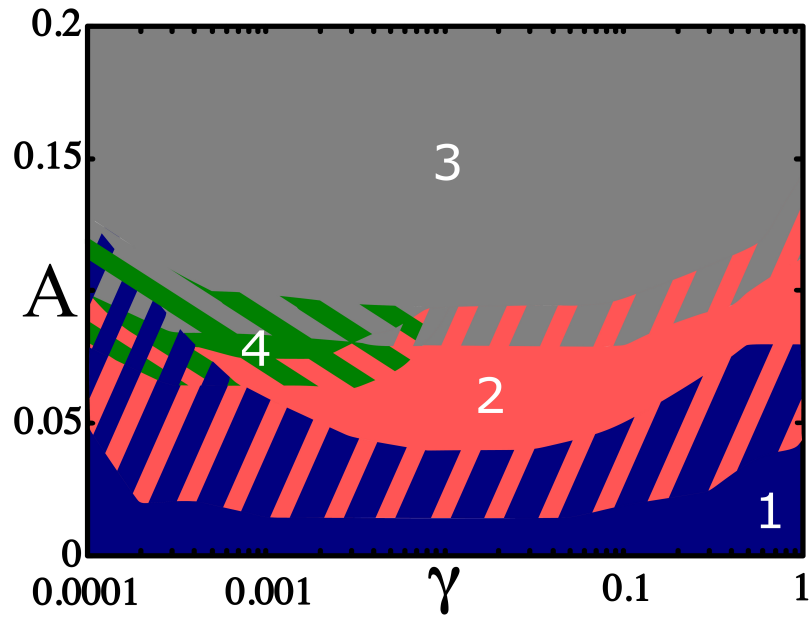


Рисунок 1.17. Области существования различных пространственно-временных режимов в кольце нелокально связанных логистических отображений на плоскости параметров (γ, A) при независимых источниках шума. Область 1 соответствует наблюдению исходной химерной структуры (или очень близкого к исходной химере режима), область 2 соответствует кластерной структуре с подавленными некогерентными кластерами, в области 3 траектории уходят на бесконечность, область 4 соответствует появлению уединенных состояний. Режимы в заштрихованных областях зависят от начальных условий. Для построения диаграммы использовалось шесть начальных распределений, приводящих к различным химерным состояниям. Другие параметры: $\alpha_0 = 3.8$, $\sigma_0 = 0.32$, $R = 300$, $N = 1000$.

В области 3 решения системы уходят на бесконечность. Можно заметить, что границы между указанными областями зависят от значения γ . В интервале средних значений γ ($0.001 < \gamma < 0.1$) границы областей 1, 2 и 3 практически не зависят от интенсивности шума A . При низкочастотном шуме и при шуме близком к белому ($\gamma \rightarrow 1$) границы областей 1, 2, 3 немного сдвинуты в сторону большей интенсивности шумовой модуляции силы связи. Отметим, что значительное смещение границы между областями 1 и 2 с низкочастотным шумом

(когда область 2 практически отсутствует) наблюдается только для некоторых начальных распределений динамических переменных ($x_i(0)$).

Модуляция силы связи общим источником шума. В этом случае один и тот же источник цветного гауссовского шума $y(n)$ с интенсивностью A используется для задания всех коэффициентов связи между элементами ансамбля логистических отображений. Для иллюстрации изменения мгновенных профилей кольца при изменении шумовых параметров A и γ было выбрано то же химерное состояние, что и ранее, которое устанавливалось без шумовой модуляции связи (рис. 1.15).

Мгновенные пространственные профили кольца нелокально связанных логистических отображений при модуляции силы связи между элементами общим источником шума представлены на рисунке 1.18 для различных значений интенсивности модуляции шума A и параметра γ , управляющего шириной спектра шума. Под влиянием общего шума мгновенные профили системы не демонстрируют случайных пространственных флуктуаций, что позволяет более точно определить характер пространственной структуры. Кроме того, уединенные узлы не возникают даже при низкочастотном шуме. В то же время при определенной интенсивности шума отчетливо наблюдается эффект подавления кластера некогерентности, после чего структура системы характеризуется кусочно-гладким пространственным профилем (рис. 1.18, д, з). При определенных значениях γ (достаточно малых) и при увеличении A пространственный профиль сглаживается, так что переходы между кластерами становятся более плавными, а сами кластеры постепенно исчезают (рис. 1.18, б). При высокой интенсивности шумового воздействия возникает эффект полной синхронизации всех элементов ансамбля (рис. 1.18, в). При этом наблюдаются синхронные хаотические колебания во времени, а мгновенный пространственный профиль превращается в прямую линию.

В исследуемой системе переход к полной синхронизации возможен только при низкочастотном шуме (γ порядка 0.001 и меньше). При увеличении шири-

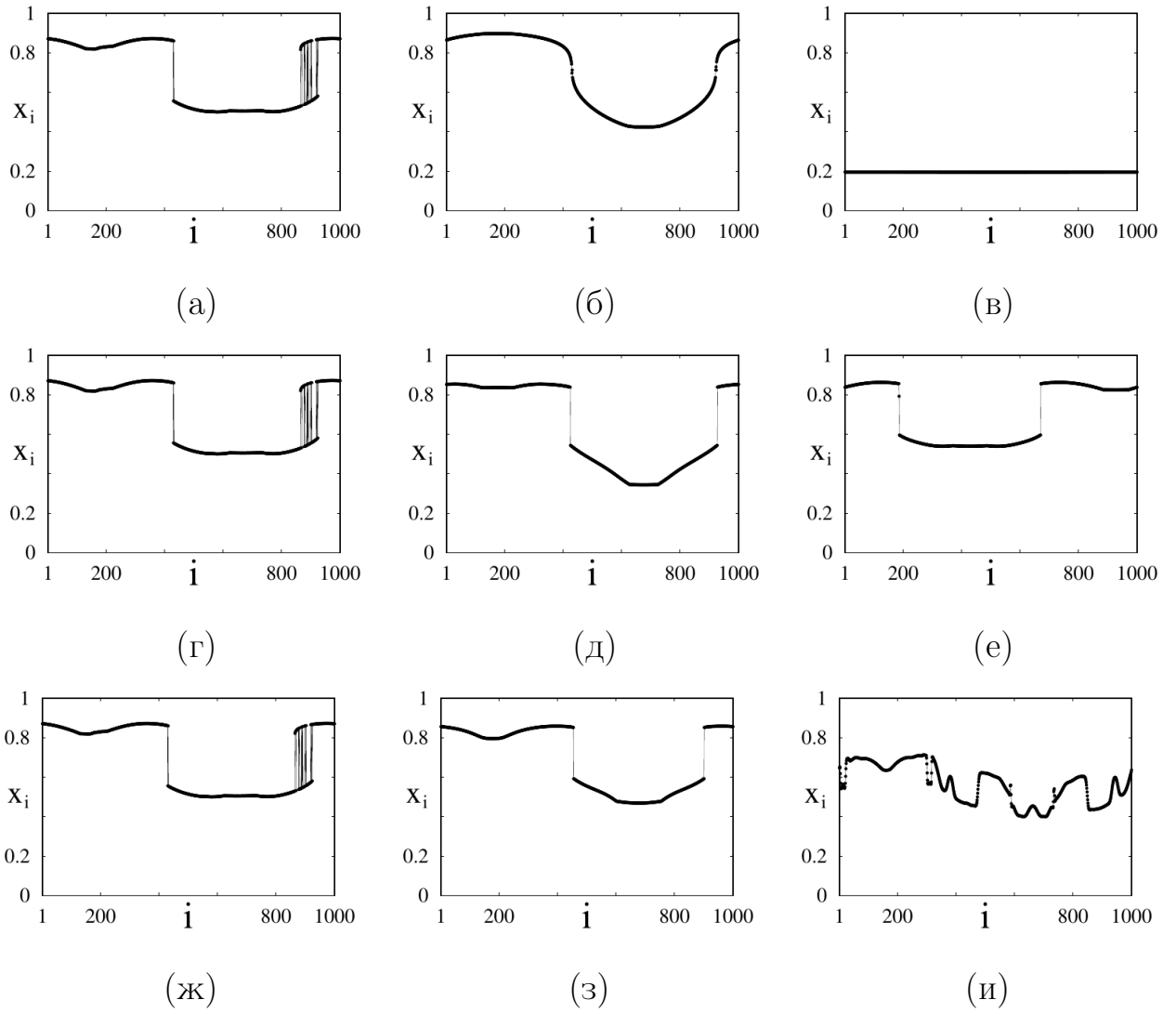


Рисунок 1.18. Эволюция химерных состояний в кольце нелокально связанных логистических отображений с модуляцией коэффициентов связи общим источником шума при различных значениях интенсивности шума (A) и параметра γ , управляющего шириной спектра шума: (а) $A = 0.0001$, $\gamma = 0.001$, (б) $A = 0.05$, $\gamma = 0.001$, (в) $A = 0.25$, $\gamma = 0.001$, (г) $A = 0.0001$, $\gamma = 0.1$, (д) $A = 0.05$, $\gamma = 0.1$, (е) $A = 0.109$, $\gamma = 0.1$, (ж) $A = 0.0001$, $\gamma = 1.0$, (з) $A = 0.05$, $\gamma = 1.0$, (и) $A = 0.13$, $\gamma = 1.0$. Другие параметры: $\alpha_0 = 3.8$, $\sigma_0 = 0.32$, $R = 300$, $N = 1000$.

ны спектра шума эффект полной синхронизации не достигается из-за того, что траектории ансамбля уходят на бесконечность, и в этом случае могут наблюдаться только кусочно-гладкие профили (рис. 1.18,е). При $\gamma > 0.5$ режимы в

ансамбле эволюционируют существенно иначе, чем при низкочастотном шумовом воздействии. Некогерентные кластеры химеры по-прежнему подавлены и наблюдается кусочно-гладкий пространственный профиль (рис. 1.18,з). Однако при дальнейшем увеличении интенсивности шума A структура кластеров полностью меняется и возникают новые режимы со сложным пространственным профилем, совершенно отличные от исходной химеры (рис. 1.18,и).

Заметим, что для некоторых начальных химерных структур (без шумовой модуляции $A = 0$), подобных показанной на (рис. 1.15), но немного отличающихся расположением кластеров, при определенных значениях параметров γ и A (преимущественно для низкочастотного шума) в ансамбле могут наблюдаться структуры качественно другого типа. Они могут состоять только из некогерентных кластеров, подобных некогерентным кластерам амплитудной химеры, и не содержать когерентных кластеров, а могут представлять собой обычные амплитудные химеры. Таким образом, в ряде случаев обычный параметрический низкочастотный шум может индуцировать амплитудные химеры.

На рисунке 1.19 приведена диаграмма пространственно-временных режимов динамики кольца нелокально связанных логистических отображений на плоскости параметров (γ, A) для случая общего источника шума, модулирующего коэффициенты связи между элементами ансамбля. Используется то же числовое обозначение (области 1,2,3), что и на диаграмме, изображенной на рисунке 1.17. Однако нет области, где наблюдаются уединенные состояния. Вместо этого область 4 на диаграмме рис. 1.19 связана с режимом полной синхронизации элементов ансамбля в пространстве и хаотической динамикой во времени. Области, соответствующие нестандартным структурам, на диаграмме не показаны. Сравнение этой диаграммы с диаграммой для ансамбля с независимыми источниками шума приводит к заключению, что область стабильного поведения (где нет ухода на бесконечность) стала заметно больше. Также видно, что область существования исходной химеры несколько сужается, а ее граница по параметру A меньше зависит от значения γ .

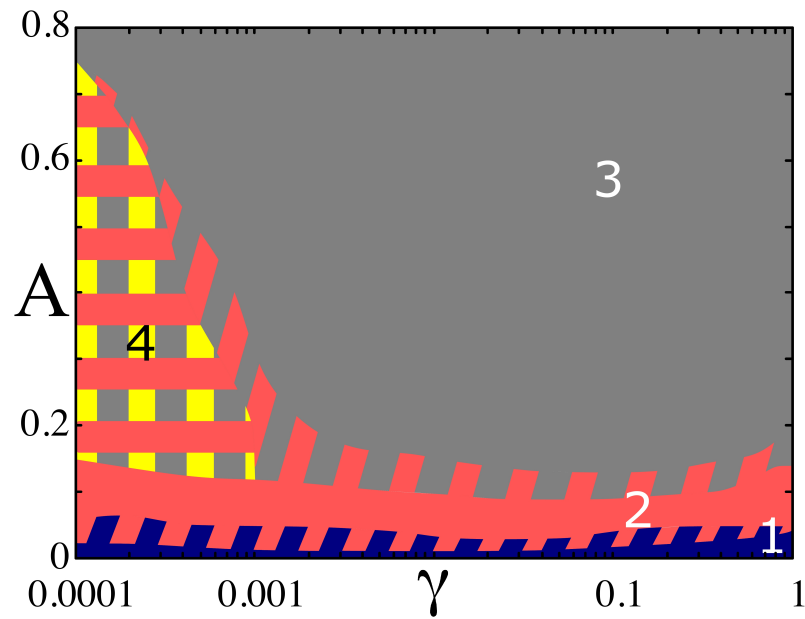


Рисунок 1.19. Области существования различных пространственно-временных режимов в кольце нелокально связанных логистических отображений на плоскости параметров (γ, A) при общем источнике шума. Область 1 соответствует наблюдению исходной химерной структуры (или очень близкого к исходной химере режима), область 2 соответствует кластерной структуре с подавленными некогерентными кластерами, в области 3 траектории уходят на бесконечность, а область 4 соответствует полной хаотической синхронизации элементов в ансамбле. Режимы в заштрихованных областях зависят от начальных условий. Для построения диаграммы использовалось шесть начальных распределений, приводящих к различным химерным состояниям.

Другие параметры: $\alpha_0 = 3.8$, $\sigma_0 = 0.32$, $R = 300$, $N = 1000$.

Кольцо нелокально связанных отображений Рикера. Введение неоднородности в силу связи между элементами в кольце нелокально связанных отображений Рикера ведет к качественно схожим эффектам, что наблюдалось в кольце нелокально связанных логистических отображений. В случае, когда на коэффициенты связи воздействуют независимыми источниками шума, увеличение интенсивности шума ведет к зашумлению профилей и уменьшению кластеров некогерентности фазовых химер. При этом в области малых значений параметра γ (узкополосный шум) увеличение интенсивности шума ведет к

появлению уединенных узлов, динамика которых некоррелирована с динамикой всего ансамбля (коэффициент взаимной корреляции сильно отличается). Отметим, что граница ухода траекторий системы на бесконечность, как и для кольца нелокально связанных логистических отображений, почти не зависит от параметра γ и немного сдвигается в область больших интенсивностей шума только при малых значениях γ и $\gamma \rightarrow 1$ (рис.1.17).

Воздействие общего источника шума на коэффициенты связи между элементами при увеличении интенсивности ведет также к уменьшению кластеров фазовой химеры, при этом профиль становится гладким и даже наблюдается полная синхронизация преимущественно в области малых значений параметра γ . Хотя в отличие от кольца нелокально связанных логистических отображений, хаотическая синхронизация может наблюдаться при $\gamma \rightarrow 1$, в этом же интервале увеличение интенсивности шума ведет к установлению кусочно-гладких профилей. В данном случае граница ухода траекторий системы на бесконечность значительно сдвигается в область больших значений интенсивность шума как при малых значениях γ , так и $\gamma \rightarrow 1$, в отличие от случая кольца нелокально связанных логистических отображений, для которых характерен сдвиг в область больших значений интенсивность шума только при малых значениях γ (рис.1.19).

Кольцо нелокально связанных кубических отображений. Ввиду особенностей динамики двухъямной химеры, типичной для данного ансамбля, введение шумовой модуляции в параметр связи σ приводит к результатам, подобным двум рассмотренным ранее случаям. Однако имеется ряд отличий при изменении параметров источников шума A и γ .

В случае использования независимых источников шума в коэффициентах связи между элементами увеличение интенсивности шума ведет сначала к уменьшению кластеров некогерентности, а потом и вовсе к установлению зашумленных пространственно-временных профилей с уединенными узлами с высокой амплитудой, при этом уход траекторий системы на бесконечность не

наблюдается. Источник почти белого шума $\gamma \rightarrow 1$ приводит к появлению в системе режима хаотической синхронизации, что не наблюдалось для кольца нелокально связанных логистических отображений и отображений Рикера.

Наличие общего источника шума в коэффициентах связи также ведет к уменьшению некогерентных кластеров химер и к хаотической синхронизации элементов при увеличении интенсивности шума для любых значений γ , при этом уход траекторий на бесконечность здесь тоже не наблюдается. Однако при $\gamma < 1$ в ансамбле могут устанавливаться как некогерентные профили, так и профили с химерными состояниями, совершенно отличающимися от начальных двухъямных химер, а также профили с уединенными узлами, имеющими амплитуду много больше стандартной амплитуды колебаний элементов в таком кольце.

Более подробно динамика колец нелокально связанных отображений Рикера и кубических отображений в случае шумовой модуляции силы связи между элементами описана в работе, которая готовится к публикации в журнале *Chaos, Solitons & Fractals*.

1.3 Управление переходом между химерами и различными пространственно-временными структурами с помощью воздействия внешнего шума

В рассмотренных в предыдущих разделах случаях была исследована эволюция преимущественно фазовых химер под воздействием шумовых возмущений с различными статистическими характеристиками. Однако, как было отмечено во Введении 1.1, на данный момент известно множество типов химерных структур, которые могут быть как долгоживущими (фазовая химера), так и носить характер переходных процессов или иметь малый бассейн притяжения,

сосуществовая с режимами со значительно большим размером бассейна притяжения. В данном разделе представлены результаты исследования влияния внешних возмущений на эволюцию мультихимеры (переходный процесс) и режима сосуществования химерных и уединенных состояний.

1.3.1 Управление временем жизни мультихимерного состояния в кольце нелокально связанных дискретных осцилляторов ван дер Поля

В данном разделе в качестве парциального элемента кольца нелокально связанных отображений 1.1 выбрана дискретная модель классического осциллятора ван дер Поля. Для перехода от системы с непрерывным временем к дискретному аналогу используется процедура искусственной дискретизации, которая применяется к обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (1.11)$$

Для дискретизации уравнений осциллятора ван дер Поля использовался метод Эйлера-Кромера [151]. Этот метод хорошо подходит для колебательных систем, поскольку при этом сохраняется энергия, в отличие от прямого метода Эйлера, при котором искусственно увеличивается энергия осциллятора со временем. Применяя данный подход, получаем уравнения для дискретного осциллятора ван дер Поля:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= x(n) + \varepsilon y(n+1), \\ y(n+1) &= y(n) + \varepsilon(\lambda y(n) - [x(n)]^2 y(n) - x(n)), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где x , y – динамические переменные, ε – параметр, отвечающий за шаг дискретизации. В такой системе ε уже не может считаться малым и может принимать как отрицательные, так и положительные значения. Такой метод дискретизации позволяет получить отображение, которое может одновременно обладать свойствами исходного осциллятора и демонстрировать более богатую динамику при изменении ε .

Исследование динамики кольца нелокально связанных дискретных осцилляторов ван дер Поля показывает, что при изменении управляющего параметра элементов ε и силы связи между элементами σ_0 в ансамбле возможно существование различных пространственно-временных режимов. На рисунке 1.20 представлена карта режимов данной системы на плоскости параметров (ε, σ_0) (подробное описание наблюдаемых режимов и их эволюции приведено в работе [112]). Подчеркнем, что для построения данной карты использовалось время наблюдения $T_{\text{obs}} = 100000$ итераций, это важно, так как некоторые режимы в кольце дискретных осцилляторов ван дер Поля являются переходными. Проведенные исследования позволили выделить двенадцать различных пространственно-временных режимов. Существуют так называемые классические динамические режимы, такие как некогерентность, когерентность, полная синхронизация и бегущие волны, которые обычно наблюдаются в сетях связанных осцилляторов. Вместе с этим, кольцо дискретных осцилляторов ван дер Поля может демонстрировать химерные состояния, уединенные состояния и сосуществование различных режимов, которые в настоящее время интенсивно изучаются. В данном разделе представлены результаты анализа влияния аддитивного шума на время жизни мультихимерных состояний (классические химерные состояния, но состоящие из нескольких когерентных и некогерентных кластеров [152]), которые в кольце нелокально связанных дискретных осцилляторов ван дер Поля в общем случае являются переходными структурами и со временем вырождаются в режим бегущих волн.

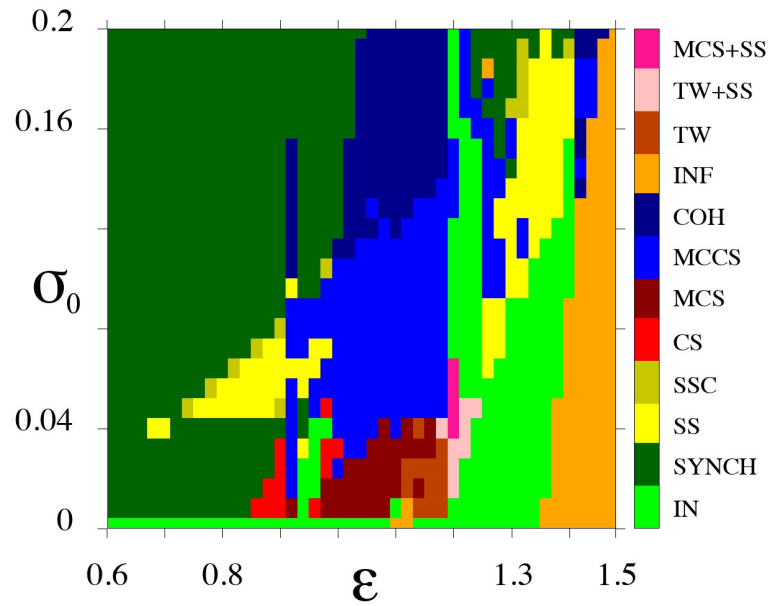


Рисунок 1.20. Схематическая диаграмма пространственно-временных режимов в ансамбле нелокально связанных дискретных осцилляторов ван дер Поля на плоскости параметров (ε, σ_0) . Обозначения: IN – некогерентность, SYNCH – полная синхронизация, SS – уединенные состояния, SSC – химера уединенных состояний, CS – химерные состояния, MCS – мультихимерные состояния, MCCS – мультикластерные химеры, COH – когерентность, INF – уход на бесконечность, TW – бегущая волна, TW+SS – сосуществование бегущей волны и уединенных состояний, MCS+SS – сосуществование мультихимерного состояния и уединенных состояний. Другие параметры: $\lambda = 0.12$, $R = 320$, $N = 1000$, $T_{\text{obs}} = 100000$ итераций. Шаги по параметрам для построения карты зафиксированы на значениях $\Delta\varepsilon = 0.02$ и $\Delta\sigma_0 = 0.008$.

Переход от мультихимерного состояния к бегущим волнам. На рисунке 1.21 показана пространственно-временная диаграмма эволюции мультихимеры (отображается каждая 5000-я итерация), а также несколько мгновенных профилей и проекций аттракторов системы для всех элементов ансамбля на разных временах n . Как видно из пространственно-временной диаграммы (рис. 1.21,а), некогерентные кластеры лишь незначительно перемещаются по кольцу со временем, и большую часть времени наблюдения существует режим,

показанный на рис. 1.21,б. При параметрах и начальных условиях, выбранных для рисунка 1.21, некогерентные кластеры химеры начинают разрушаться при $n > 918000$ (рис. 1.21,в). Волновое число в некогерентных кластерах постепенно уменьшается, а бывшие когерентные кластеры превращаются в бегущие волны. В итоге на некотором промежутке времени в кольце могут наблюдаться бегущие волны с уединенными состояниями (рис. 1.21,г), которые достаточно быстро исчезают, и в системе остается только бегущая волна (рис. 1.21,д). Отметим, что режимы, подобные представленным на рисунках 1.21,в-д, могут наблюдаться значительно раньше разрушения мультихимеры. Однако небольшие нестационарности в динамике отдельных элементов возвращают систему обратно в режим химеры. Более подробно эволюция мультихимерного состояния описана в работе [112].

Влияние аддитивного шума на мультихимерное состояние. В этом случае источник белого шума с равномерным распределением в интервале $[-0.5, 0.5]$ ($N_i(n) = D\xi_i(n)$) добавляется в первое уравнение ансамбля (1.1). Шум воздействует на элементы системы в течение определенного периода времени n_{exp} , после чего отключается. Момент включения генератора шума выбирается двумя способами: до исчезновения мультихимеры и после него.

В качестве мультихимеры, на которую воздействует шум, было выбрано состояние, показанное на рисунке 1.21. Вначале аддитивный источник шума вводится во все элементы ансамбля в момент $n = 100000$. Полное время жизни (начиная с $n = 0$) этой химеры без внешнего воздействия составляет $T_{\text{life}} \approx 920000$. Таким образом, можно исследовать возможность подавления мультихимерной структуры и более быстрого перехода к бегущим волнам, а также получения более стабильной и долгоживущей химеры.

На рисунке 1.22 приведены распределения вероятностей наблюдения коротко- и долгоживущего мультихимерного состояния (или времени перехода в режим бегущей волны) в зависимости от интенсивности шума D и длительности воздействия шума n_{exp} . Распределения построены с использованием 15

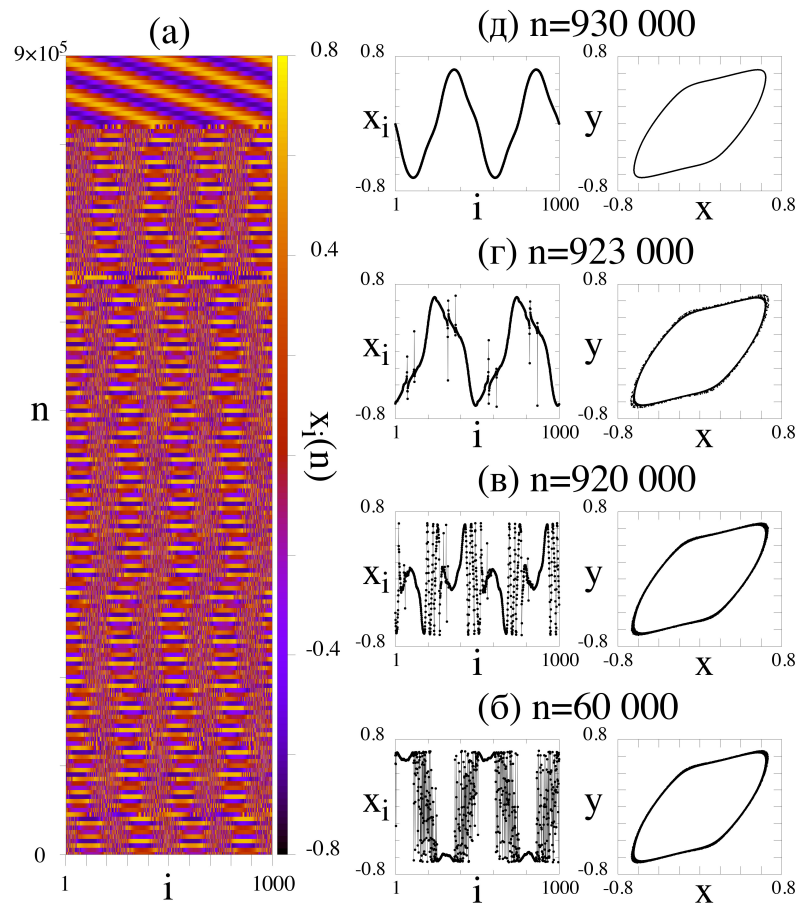


Рисунок 1.21. Переход от мультихимеры к бегущим волнам в кольце нелокально связанных дискретных осцилляторов ван дер Поля. (а) Пространственно-временная диаграмма динамической переменной x_i , (б)-(д) мгновенные профили переменной x_i (слева) и проекции многомерных аттракторов системы на фазовую плоскость (x, y) (справа) на разных временах: (б) $n = 60000$, (в) $n = 920000$, (г) $n = 923000$, (д) $n = 930000$. На пространственно-временной диаграмме отображена только каждая 5000 итерация. Другие параметры: $\varepsilon = 1.17931$, $\lambda = 0.12$, $\sigma_0 = 0.02$, $R = 320$, $N = 1000$.

различных реализаций шума. Как видно из диаграмм, некоторые шумовые реализации большой интенсивности ($0.08 < D < 0.1$) могут существенно сократить время жизни мультихимеры (например, $T_{\text{life}} < 10000$, рис. 1.22,а) и тем самым ускорить переход к бегущей волне. Это может произойти при любой продолжительности шумового воздействия n_{exp} . Отметим, что при $0.08 < D < 0.1$ тра-

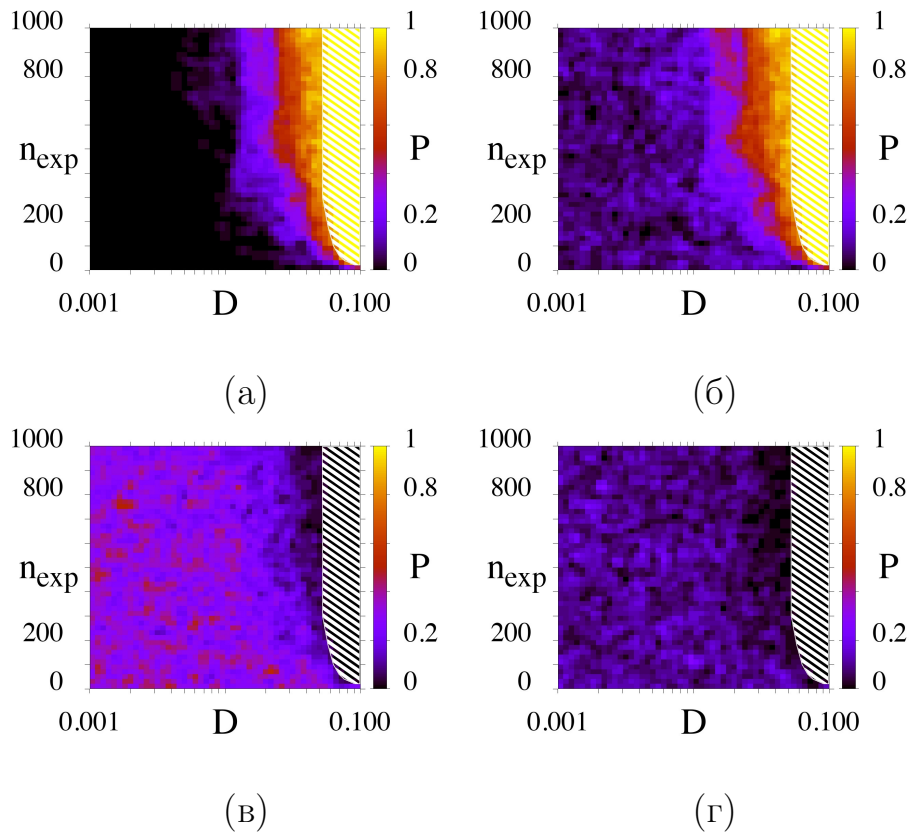


Рисунок 1.22. Влияние аддитивного шума с интенсивностью D и временем воздействия n_{exp} на динамику кольца нелокально связанных дискретных осцилляторов ван дер Поля до перехода мультимерного состояния в режим бегущей волны. Распределения вероятностей P наблюдения мультимеры с коротким и долгим временем жизни: (а) $T_{\text{life}} < 10000$, (б) $T_{\text{life}} < 100000$, (в) $T_{\text{life}} > 1000000$, (г) $T_{\text{life}} > 2000000$. Для построения распределений использовалось пятнадцать различных реализаций шума. Траектории из заштрихованных областей уходят на бесконечность. Другие параметры:

$$\varepsilon = 1.17931, \lambda = 0.12, \sigma_0 = 0.02, R = 320$$

ектории системы могут уходить на бесконечность при некоторых реализациях шума (заштрихованная белым область на рис. 1.22). Расчеты показывают, что существует хотя и небольшая, но ненулевая вероятность увеличения времени жизни мультимеры на время большее, чем она бы существовала в отсутствие шума ($T_{\text{life}} \approx 820000$). Это можно видеть на диаграммах распределений вероятности, показанных на рисунках 1.22, в, г. Несмотря на длительность шума и

его интенсивность, могут наблюдаться долгоживущие мультихимеры и, таким образом, требуется больше времени расчета (наблюдения) для фиксирования их перехода в режим бегущей волны.

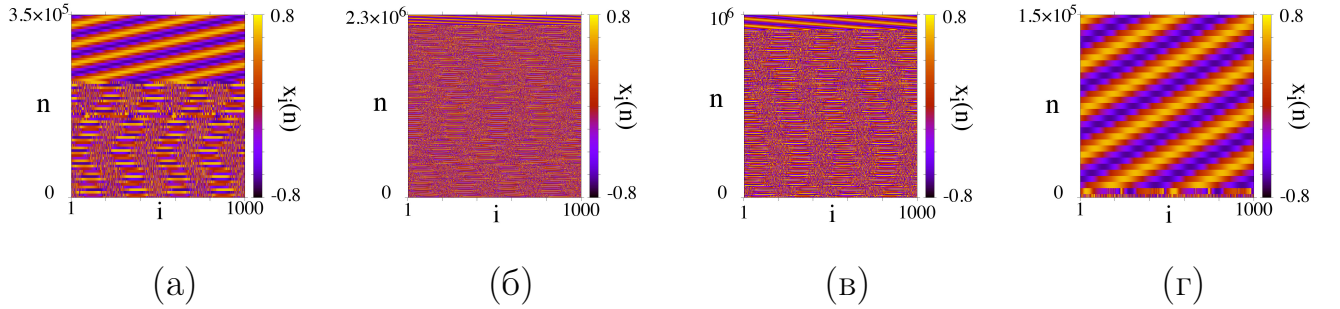


Рисунок 1.23. Пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие переход от мультихимеры к бегущей волне в присутствии аддитивного шума: (а) $D = 10^{-5}$, $n_{\text{exp}} = 51$, (б) $D = 10^{-5}$, $n_{\text{exp}} = 101$, (в) $D = 0.04$, $n_{\text{exp}} = 301$ – первая реализация шума, (г) $D = 0.04$, $n_{\text{exp}} = 301$ – вторая реализация шума. Отображается только каждая 5000 итерация. Другие параметры: $\varepsilon = 1.17931$, $\lambda = 0.12$, $\sigma_0 = 0.02$, $R = 320$. Время $n = 0$ соответствует включению аддитивного шума.

Переход от мультихимерного состояния к бегущей волне в присутствии аддитивного шума иллюстрируется на рисунке 1.23. Можно видеть, что кратковременный слабый шум может подавить мультихимерное состояние и вызвать быстрый переход к бегущей волне (рис. 1.23,а). При большем времени воздействия время жизни химеры можно наоборот увеличить (рис. 1.23,б). Пространственно-временные диаграммы, представленные на рисунках 1.23,в,г, показывают, как две разные реализации шума с одинаковыми параметрами могут влиять на систему. В первом случае (рис. 1.23,в) шум индуцирует достаточно долгоживущую мультихимеру, в то время как вторая реализация шума обеспечивает более быстрое переключение на режим бегущей волны (рис. 1.23,г).

Рассмотрим второй вариант добавления аддитивного шума – после смерти мультихимерного состояния и перехода системы в режим бегущих волн. В данном случае источник шума в систему вводится в момент времени $n = 920000$.

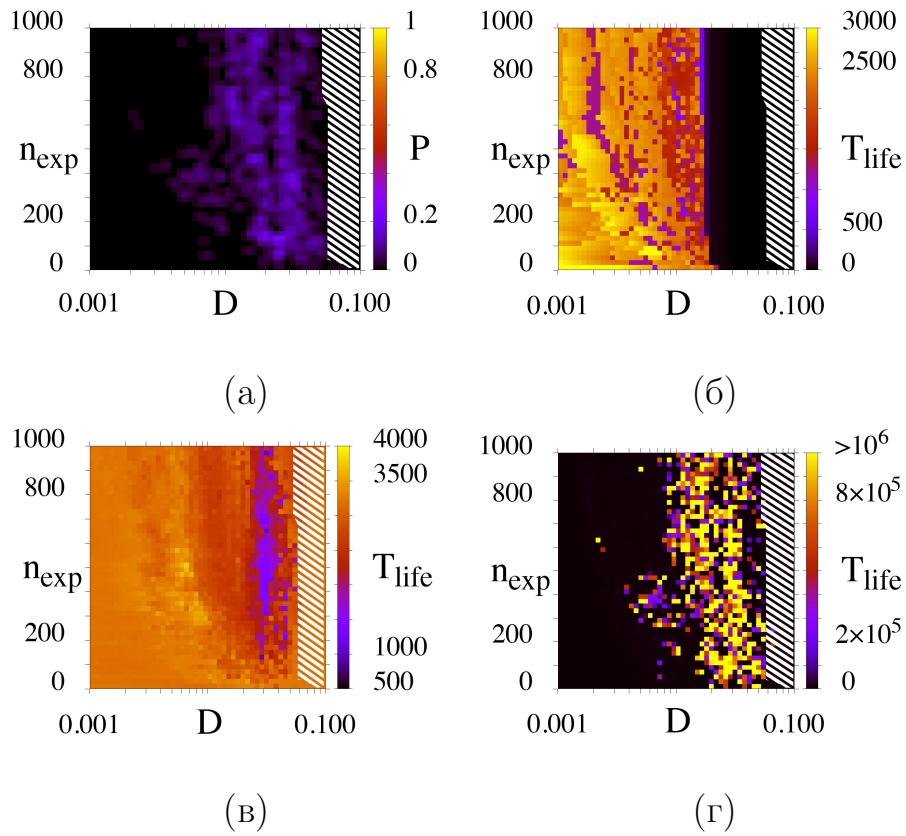


Рисунок 1.24. Влияние аддитивного шума с интенсивностью D и временем воздействия n_{exp} на динамику кольца нелокально связанных дискретных осцилляторов ван дер Поля после перехода от мультихимерных состояний к бегущим волнам ($n = 920000$). (а) Вероятность P появления мультихимерного состояния со временем жизни $T_{\text{life}} > 10000$. Распределения минимального (б), медианного (в) и максимального (г) значений времени жизни индуцированного шумом состояния мультихимеры. В области значений, заштрихованной белым цветом, траектории уходят на бесконечность. Для построения распределений использовалось 15 различных реализаций шума. Другие параметры: $\varepsilon = 1.17931$, $\lambda = 0.12$, $\sigma_0 = 0.02$, $R = 320$.

В результате в системе может возродиться мультихимерное состояние, однако с довольно коротким временем жизни, что можно увидеть из распределения вероятностей, показанного на рисунке 1.24,а. Были также построены распределения минимального (рис. 1.24,б), медианного (рис. 1.24,в) и максимального (рис. 1.24,г) времен жизни T_{life} мультихимеры на плоскости параметров

(D, n_{exp}) . Как и ранее, расчеты выполнялись для 15 различных реализаций шума. Видно, что при всех значениях параметров шума минимальное время жизни возродившейся мультихимеры не превышает $T_{\text{life}} = 3000$ (рис. 1.24,б), а при $D > 0.02$ минимальное время жизни равно нулю, то есть мультихимерное состояние не индуцируется. Из распределения медианного значения (рис. 1.24,в) видно, что для большинства значений D и n_{exp} время жизни находится на уровне $T_{\text{life}} \approx 3000$ (оранжевый цвет), а для $D \in [0.025, 0.05]$ и $n_{\text{exp}} > 100$ обычно уменьшается до $T_{\text{life}} \approx 1000$. Однако существует ненулевая вероятность индуцирования долгоживущего мультихимерного состояния, что отражено на диаграмме распределения максимального времени жизни T_{life} (рис. 1.24,г). Видно, что мультихимерное состояние с $T_{\text{life}} > 1 \times 10^6$ (желтый цвет) появляется в основном при $D > 0.01$.

1.3.2 Влияние аддитивного шума на мультистабильность в кольце нелокально связанных осцилляторов

ФитцХью-Нагумо

В заключительном подразделе первой главы приводятся результаты анализа влияния аддитивного шума на режим сосуществования классических химер и уединенных состояний в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо [66, 152–155], который описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du_i}{dt} &= u_i - \frac{u_i^3}{3} - v_i + \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [b_{uu}(u_j - u_i) + b_{uv}(v_j - v_i)], \\ \frac{dv_i}{dt} &= u_i + a + \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [b_{vu}(u_j - u_i) + b_{vv}(v_j - v_i)] + \sqrt{2A}\psi_i(t), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где u_i и v_i – переменные, соответствующие активатору (быстрой переменной) и ингибитору (медленной переменной), соответственно, $i = 1, \dots, N = 300$ – номер элемента в кольце. Малый параметр $\varepsilon > 0$ отвечает за разделение временных масштабов быстрого активатора от медленного ингибитора (фиксируем $\varepsilon = 0.05$), а параметр a определяет порог возбудимости и в работе принимается равным для всех элементов $a = 0.5$, что соответствует осцилляторному режиму динамики в одиночном элементе. Параметр R определяет количество ближайших соседей справа и слева, с которыми связан каждый i -й элемент. Способ задания нелокальной связи между осцилляторами в ансамбле (1.13) был предложен в работе [152] и характеризуется силой связи σ . Последнее слагаемое во втором уравнении соответствует введению в систему аддитивного шума с интенсивностью A , ψ – источник белого гауссова шума. Начальные условия случайно выбраны внутри круга $u^2 + v^2 \leq 2^2$.

Система (1.13) содержит не только прямые связи между элементами, но и перекрестные между активатором (u) и ингибитором (v), которые устанавливаются в соответствии с вращательной матрицей связи [152]:

$$B = \begin{pmatrix} b_{uu} & b_{uv} \\ b_{vu} & b_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

где $\phi \in [-\pi, \pi)$. В работе [152] было показано, что в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо в осцилляторном режиме могут наблюдаться химерные состояния при $\phi = \pi/2 - 0.1$. В работе [66] данный результат был распространен на парциальные элементы в возбудимом режиме при наличии аддитивного шума в системе.

Дополнительно к коэффициенту взаимной корреляции 1.6 для кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо рассчитывается средняя фазовая скорость каждого элемента в ансамбле по формуле:

$$w_i = 2\pi M_i / \Delta T, \quad (1.15)$$

где M_i – число полных оборотов вокруг начала координат, выполняемых i -м осциллятором ФитцХью-Нагумо за интервал времени ΔT [152]. В данных расчетах переходное время бралось равным $T_0 = 1000$ единиц безразмерного времени, а время, на котором рассчитывались коэффициенты взаимной корреляции и значения средней фазовой скорости, $T = 2000$.

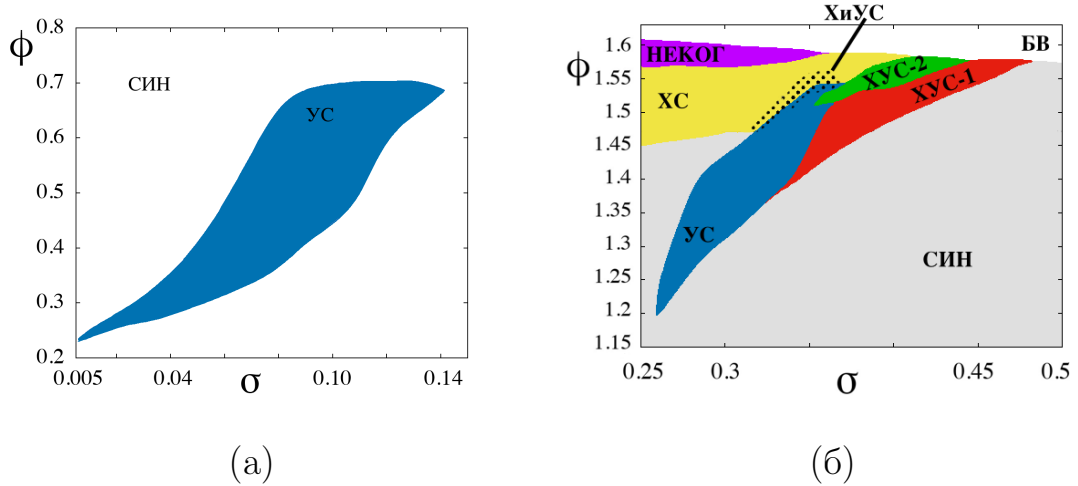


Рисунок 1.25. Карты динамических режимов в системе (1.13) для (а) слабой и (б) сильной связей. СИН - синхронизированный режим; УС - уединенное состояние; ХС - химерные состояния; НЕКОГ - некогерентный режим; БВ - режим бегущих волн; ХУС-1 и ХУС-2 - разные типы химеры уединенного состояния; ХиУС – сосуществование химерных и уединенных состояний на профиле кольца. Другие параметры: $\varepsilon = 0.05$, $a = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$, $A = 0$.

В работе [116] было изучено влияние параметров связи σ и ϕ на динамику кольца (1.13) в отсутствие аддитивного шума ($D = 0$). Было показано, что в данном ансамбле могут существовать не только химерные состояния, но также уединенные состояния и химера уединенных состояний. Благодаря тщательному исследованию влияния параметров σ и ϕ , управляющих связью, была построена карта динамических режимов (рис.1.25). Аббревиатурами на карте обозначены все режимы, наблюдающиеся в различных областях пространства параметров. Первая диаграмма (рис. 1.25,а) построена для случая слабой связи,

при которой в системе наблюдается только два режима: режим синхронизации всех элементов в кольце (СИН) и уединенные состояния (УС). Второй фрагмент карты режимов соответствует сильной связи (рис.1.25,б). В этой области, помимо уже упомянутых режимов полной синхронизации (СИН) и уединенных состояний (УС), наблюдаются также режимы классической химерной структуры (ХС), возникает химера уединенных состояний двух типов (ХУС-1, ХУС-2). ХУС-1 имеет некогерентное ядро, состоящее из равномерно распределенных уединенных узлов. Для ХУС-2 характерно ядро с равномерно распределенными уединенными узлами, но с левой и правой сторон кластеры ограничены «ступеньками». Эти «ступеньки» образованы группами уединенных узлов. Помимо областей, в которых наблюдаются только химерные состояния и только уединенные состояния, существует область с комбинированной динамикой, соответствующей сосуществованию химерных и уединенных состояний (ХиУС). В области НЕКОГ динамика кольца характеризуется некогерентным мгновенным пространственным профилем и отвечает режиму десинхронизации всех элементов ансамбля. Область БВ соответствует режиму бегущих волн. Более подробный анализ динамики кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо при параметрах из всех перечисленных областей представлен в работе [116].

При добавлении аддитивного шума в ансамбль (1.13) параметры системы выбирались такими, чтобы в отсутствие шума в системе мог наблюдаться режим сосуществования химер и уединенных состояний (рис.1.25, область "ХиУС", выделенная точками). В данной области в зависимости от начальных условий могут наблюдаться как режимы сосуществования, так и чистые химерные или уединенные состояния. При этом вероятность установления режима сосуществования и чистых химер выше, чем режима просто уединенных состояний. На рисунке 1.26 проиллюстрированы все эти три режима в отсутствие аддитивного шума в системе.

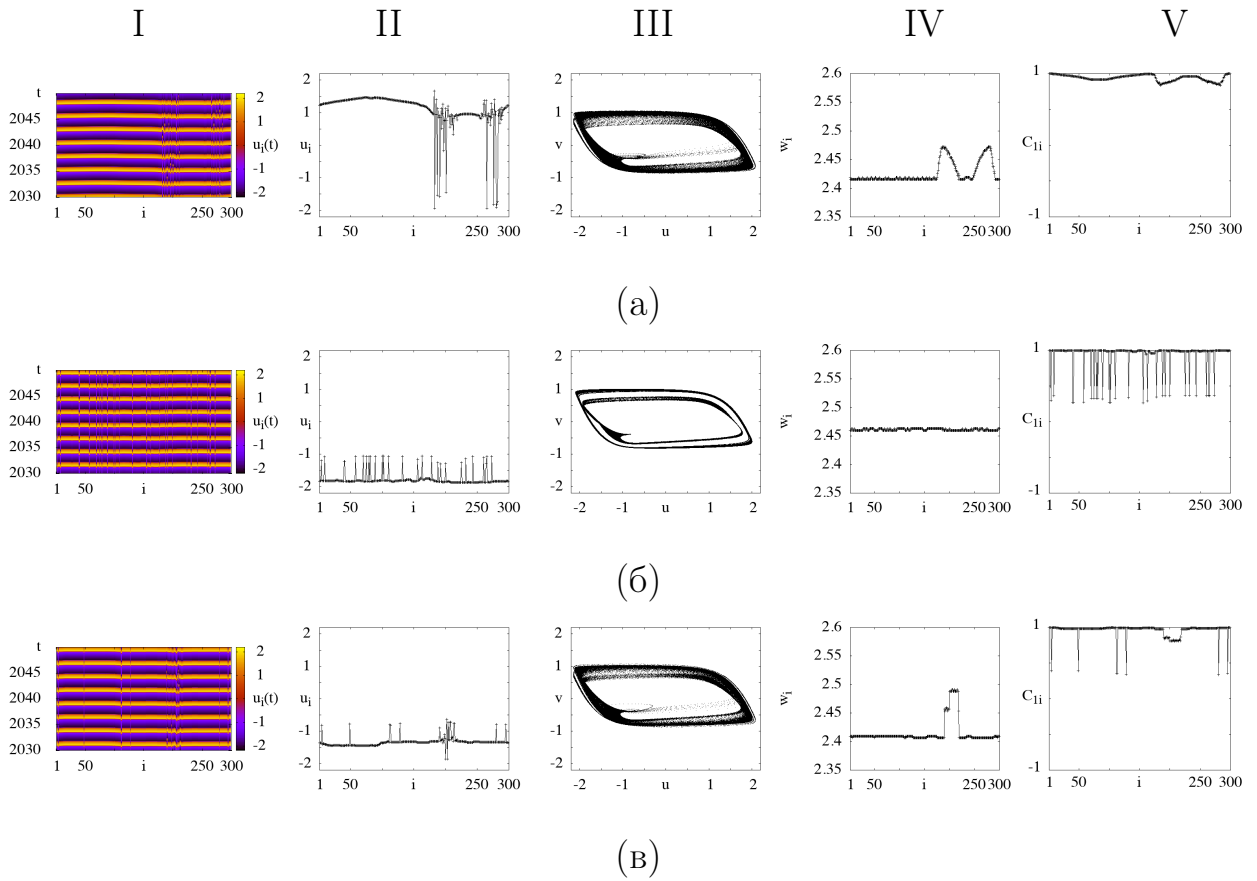


Рисунок 1.26. Динамика кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо при параметрах связи $\sigma = 0.325$, $\phi = 1.48$ и различных начальных распределений динамических переменных в отсутствие аддитивного шума ($A = 0$): (а) химерное состояние, (б) уединенное состояние, (в) сосуществование химерного и уединенного состояний.

Пространственно-временные диаграммы (столбец I), мгновенные профили (столбец II), проекции многомерного аттрактора на плоскость (u, v) (столбец III), профили средних фазовых скоростей (столбец IV), профили коэффициентов взаимной корреляции (столбец V). Другие параметры:

$$\varepsilon = 0.05, a = 0.5, R = 105, N = 300.$$

В случае установления в системе просто химерных состояний, возможно наблюдать сосуществование кластеров с когерентной и некогерентной динамикой (рис. 1.26,а), проекция многомерного аттрактора на плоскость (u, v) качественно совпадает с классическим аттрактором ФитцХью-Нагумо с неболь-

шими колебаниями амплитуды (рис. 1.26,а,III), на профиле средних фазовых скоростей наблюдаются две куполообразные зависимости в области некогерентных кластеров (рис. 1.26,а,IV), а коэффициент взаимной корреляции в области некогерентных кластеров принимает значения, меньше единицы (рис. 1.26,а,V). При установлении в системе только уединенных состояний (смотрите рис. 1.26,б,I,II) на фазовом портрете всех элементов можно различить два аттрактора, где меньший соответствует уединенным узлам (рис. 1.26,б,III). При этом значения средних фазовых скоростей для всех элементов почти равно (рис. 1.26,б,IV), а значения коэффициента взаимной корреляции элементов, соответствующих уединенным узлам, значительно ниже, чем у остальных элементов (рис. 1.26,б,V). Случай сосуществования химер и уединенных состояний содержит в себе все вышеописанные особенности (рис. 1.26,в).

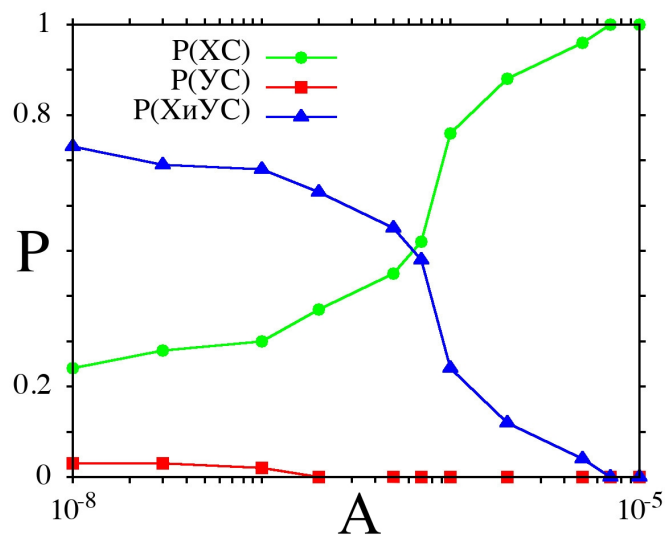


Рисунок 1.27. Зависимости вероятностей установления химерных структур $P(XC)$, уединенных состояний $P(УС)$ и режима сосуществования химерных структур и уединенных состояний $P(ХиУС)$ в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо от интенсивности аддитивного шума. Для

построения зависимостей использовалось 100 различных начальных распределений динамических переменных. Другие параметры: $\varepsilon = 0.05$,

$$a = 0.5, R = 105, N = 300.$$

Введение аддитивного шума ведет к тому, что вероятность установления (со случайных начальных условий) режима уединенных состояний и режима сосуществования химер и уединенных состояний стремится к нулю, и все рассмотренные начальные условия ведут к реализации химерных состояний (рис. 1.27). Так, в присутствии шума даже достаточно малой интенсивности $A < 2 * 10^{-7}$ в системе перестают устанавливаться режимы уединенных состояний, а при $A > 7 * 10^{-6}$ больше не наблюдаются и режимы сосуществования структур. На

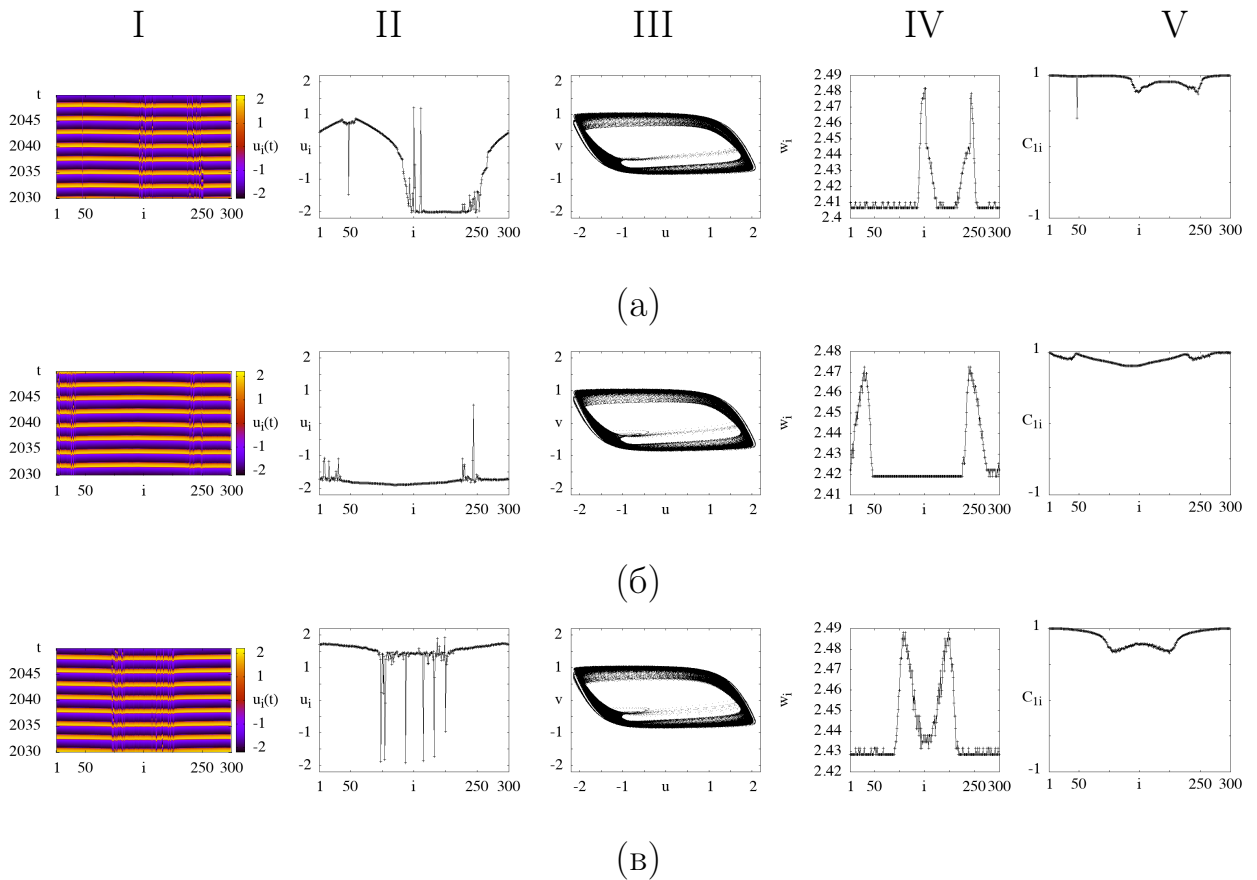


Рисунок 1.28. Динамика кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо при различных интенсивностях шума: (а) $A = 10^{-7}$, (б) $A = 10^{-6}$, (в) $A = 10^{-5}$. Пространственно-временные диаграммы (столбец I), мгновенные профили (столбец II), проекции многомерного аттрактора на плоскость (u, v) (столбец III), профили средних фазовых скоростей (столбец IV), профили коэффициентов взаимной корреляции (столбец V). Другие параметры и начальные условия соответствуют рисунку 1.26,(в).

рисунке 1.28 приведены результаты расчетов характеристик, иллюстрирующие динамику кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо при добавлении аддитивного шума разной интенсивности. При малой интенсивности шума в системе еще могут иметь место режимы сосуществования химерных и уединенных состояний, однако в этом случае в ансамбле наблюдается только несколько уединенных узлов ($\approx 1 - 3$), что отражено на рисунке 1.28,а. Дальнейшее увеличение интенсивности шума ведет к установлению в системе только химерных состояний (рис. 1.28,б,в).

1.4 Выводы по первой главе

В настоящей главе представлены результаты численного анализа динамики ансамблей нелокально связанных нелинейных осцилляторов, которые представляют собой логистическим отображением, отображением Рикера, кубическим отображением, отображением Эно, дискретным осциллятором ван дер Поля и осциллятором ФитцХью-Нагумо, под воздействием внешних шумовых возмущений, а также в присутствии случайных неоднородностей параметров. Рассматривался как аддитивный, так и мультипликативный шум с различными статистическими характеристиками. На основании проведенных исследований можно сформулировать следующие основные выводы:

1. Воздействие аддитивного шума на динамику ансамблей нелокально связанных хаотических отображений, которые демонстрируют фазовые химеры, приводит к эффекту, подобному резонансу и аналогичному стохастическому или когерентному резонансу: существует ненулевая оптимальная интенсивность шума, при которой вероятность обнаружения химер становится максимальной и значительно увеличивается интервал наблюдения данных структур по силе связи между элементами. При большей интен-

сивности шума вероятность наблюдения химер и интервал их существования по силе связи уменьшаются и стремятся к нулю. Кроме того, существует "резонансное" значение силы связи, соответствующее наибольшему диапазону изменения интенсивности шума, в котором химерные структуры реализуются с высокой (близкой к 1) вероятностью.

2. В зависимости от способа введения неоднородного распределения значений управляющего параметра парциальных элементов (фиксированного, заданного в начальный момент времени, или постоянно действующего на каждом шаге вычислений) в ансамблях нелокально связанных хаотических отображений возможно управлять шириной области наблюдения химерных структур по силе связи между элементами. В случае стационарного неоднородного распределения параметра область существования фазовых химер и химер уединенных состояний расширяется с увеличением ширины интервала распределения (интенсивности шума) параметра. В то время как постоянное шумовое воздействие на управляющий параметр сначала (при малых значениях интенсивности шума) может привести к увеличению интервала наблюдения химерных структур по силе связи, а при большей интенсивности шума ведет к сужению области существования химер по силе связи при увеличении интенсивности шума.
3. В ансамблях нелокально связанных хаотических отображений можно подавить некогерентные кластеры фазовой и двухъямной химерных состояний с помощью модуляции силы связи цветным гауссовым шумом. При этом независимые источники шума, воздействующие на параметр связи, индуцируют возникновение уединенных состояний, а общий источник шума приводит к полной хаотической синхронизации всех элементов ансамбля.

4. Введение аддитивного шума в кольца нелокально связанных элементов способно увеличить вероятность наблюдения химерных структур, вероятность которых мала при старте системы со случайных начальных условий. Показано, что введение аддитивного шума в кольцо нелокально связанных отображений может привести к установлению в этой системе химеры уединенных состояний, вероятность появления которой в системе без шума мала. В кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо, в котором возможно сосуществование режимов химерных состояний, уединенных состояний и режима сосуществования химерных и уединенных состояний, воздействие аддитивного шума ведет к увеличению вероятности установления химер, при этом вероятности реализации других структур снижаются до 0%. Таким образом, при наличии аддитивного шумового воздействия химерные состояния проявляют себя как более устойчивые и доминирующие структуры среди всех остальных, сосуществующих в ансамбле.

Глава 2. Влияние внешних шумов и случайного распределения значений параметров на реализацию уединенных состояний в ансамблях нелокально связанных нелинейных осцилляторов

2.1 Введение

Собственная динамика парциальных элементов и/или определенные значения управляющих параметров в кольцах нелокально связанных нелинейных осцилляторов могут привести к установлению в системе не только химерных структур, но и уединенных состояний [35, 36]. Уединенные состояния (solitary states) – это режим частичной синхронизации, при которой большинство элементов ансамбля совершают синхронные колебания, соответствующие некоторому типичному динамическому режиму, а часть элементов ведет себя иначе, демонстрируя "нетипичное" поведение. Принято, что такие элементы находятся в режиме уединенного состояния, и могут быть определены как уединенные узлы (solitary nodes). Как правило, уединенные узлы распределены по ансамблю случайным, но равномерным, образом, и их количество увеличивается при уменьшении силы связи между элементами ансамбля. В работах [35, 36, 75] было показано, что возникновение уединенных состояний связано с появлением бистабильности в индивидуальной динамике за счет нелокального взаимодействия между элементами. Уединенные состояния были обнаружены во многих системах с различной топологией связи и парциальными элементами [35, 36, 42, 52, 73, 75–77, 79–81, 116].

В то время как эволюция химерных состояний в присутствии шума исследуется интенсивно [34, 63–65, 67, 68, 123], влияние шумовых возмущений и неоднородностей по параметрам на реализацию уединенных состояний и их количество является почти неизученным, за исключением одной работы [82], где было показано, что в присутствии шума в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо приводит к переходу от уединенных состояний к *patched synchrony*.

Во второй главе диссертационной работы приводятся результаты численного исследования влияния независимых источников аддитивного и мультипликативного шумов на уединенные состояния в кольцах нелокально связанных нелинейных осцилляторов с дискретным и непрерывным временем. Определяется область наблюдения уединенных состояний и количество уединенных узлов на плоскости параметров "сила связи – интенсивность шума". Для автоматического обнаружения уединенных состояний и подсчета уединенных узлов, как и в первой главе, используется коэффициент взаимной корреляции между элементами ансамбля. В результате использования нескольких (от 10 до 50) различных случайно распределенных начальных значений динамических переменных и реализаций шумового воздействия во всех исследованиях были получены статистически обоснованные и достоверные результаты.

Результаты исследований, изложенные во второй главе, опубликованы в работах [113, 116, 124].

2.2 Влияние аддитивного шума на возникновение уединенных состояний

В данном разделе рассматривается влияние аддитивного шума на режим уединенных состояний и количество наблюдаемых в системе уединенных узлов в кольцах нелокально связанных нелинейных осцилляторов различной природы.

Для анализа динамики ансамблей кроме расчета коэффициентов взаимной корреляции для каждого элемента 1.6 используется также усредненный по всем элементам ансамбля коэффициент взаимной корреляции:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\langle \tilde{x}_1(n) \tilde{x}_i(n) \rangle}{\sqrt{\langle (\tilde{x}_1(n))^2 \rangle \langle (\tilde{x}_i(n))^2 \rangle}}, \quad (2.1)$$

где выражение под знаком суммы соответствует коэффициенту взаимной корреляции между 1-м и i -м элементами (1.6). Как было показано в работе [113], усредненный коэффициент взаимной корреляции можно использовать в качестве косвенной оценки количества уединенных узлов в системе. В случае когерентной динамики имеем $C \rightarrow 1$, для режима уединенных состояний значение усредненного коэффициента взаимной корреляции снижается.

В некоторых случаях наряду с коэффициентом взаимной корреляции напрямую подсчитывается количество уединенных узлов и используется такая характеристика, как “среднее нормированное количество уединенных узлов”, которая определяется следующим образом:

$$N_s = \frac{1}{M} \sum_M S/N, \quad (2.2)$$

где S – число уединенных узлов, наблюдаемых при каждой исходной реализации начальных условий динамических переменных и реализации генератора шума, N – общее количество элементов в ансамбле, M – общее количество используемых реализаций.

Кольцо нелокально связанных отображений Лози. Проведем численное исследование устойчивости уединенных состояний в кольце нелокально связанных отображений Лози при добавлении в систему аддитивного шума и проанализируем, как количество уединенных узлов зависит от интенсивности шума и силы связи между парциальными элементами. Ансамбль нелокально связанных отображений Лози описывается системой уравнений, представленной в первой главе (ур. (1.1)), при этом сила связи между элементами постоянна и равна для всех элементов $\sigma_i(n) = \sigma_0$, а внешнее воздействие моделируется источником шума с равномерным распределением и заданной интенсивностью ($N_i(n) = D\xi_i(n)$). Динамика парциальных элементов ансамбля, в качестве которых выбраны отображения Лози [156], определяется следующими функциями:

$$\begin{aligned} F(x_i(n), y_i(n)) &= 1 - \alpha_i(n)|x_i(n)| + y_i(n), \\ G(x_i(n)) &= \beta x_i(n), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\alpha_i(n) > 0$ и $\beta > 0$ – управляющие параметры. В данном разделе они не изменяются во времени и равны для всех элементов $\alpha_i(n) = \alpha_0$. Значения параметров фиксируются: $\alpha_0 = 1.4$ и $\beta = 0.3$, что обеспечивает хаотическое поведение отдельных отображений ансамбля в отсутствие связи между ними. В нашем исследовании начальные значения всех динамических переменных в кольце отображений Лози случайным образом распределены в интервалах $x_i(0) \in [-0.5, 0.5]$ и $y_i(0) \in [-0.5, 0.5]$.

Отображение Лози принадлежит к классу хаотических, которые могут быть получены с помощью сечения Пуанкаре аттракторов квазигиперболического (псевдогиперболического) класса, типа аттрактора Лоренца. Оно демонстрирует квазигиперболический хаотический аттрактор [157], а в фазовом пространстве системы отсутствует мультистабильность. Как было показано в работе [42], кольцо нелокально связанных отображений Лози демонстрирует переход от полной когерентности к некогерентности через уединенные состояния при уменьшении силы связи между элементами. Нелокальный характер связи меж-

ду элементами приводит к появлению бистабильности в динамике отдельных элементов (отображений Лози), и именно сосуществование двух притягивающих множеств в фазовом пространстве является механизмом возникновения уединенных узлов в этой системе [75].

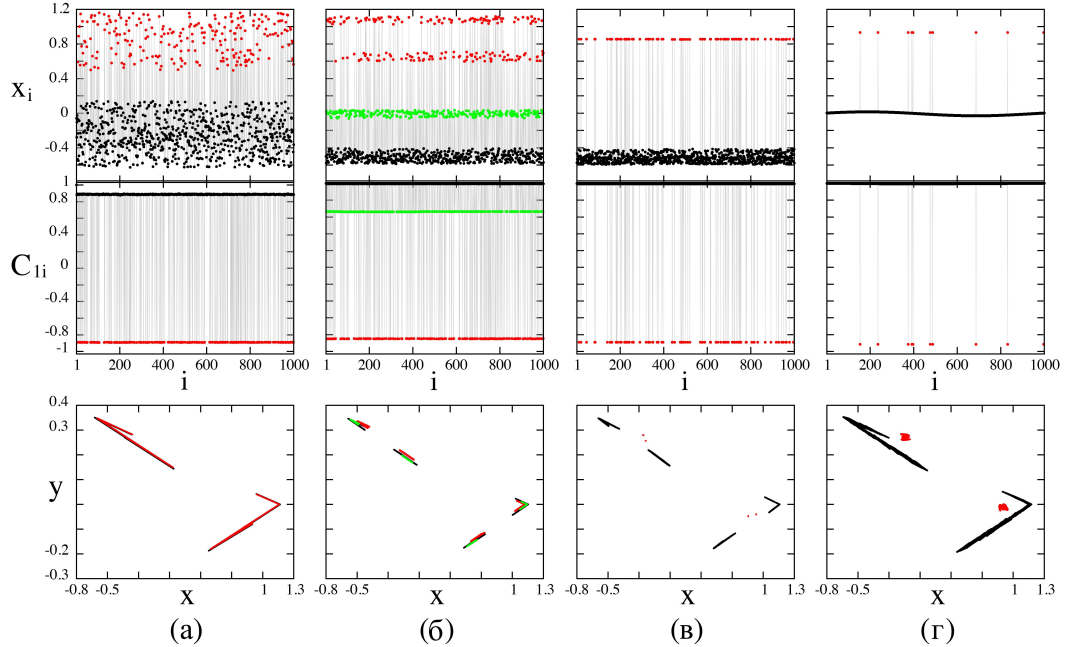


Рисунок 2.1. Динамика ансамбля нелокально связанных отображений Лози в отсутствие шума: мгновенные профили переменных x_i (верхний ряд), пространственные распределения коэффициентов взаимной корреляции C_{1i} (средний ряд) и проекции многомерного аттрактора системы на фазовую плоскость (x, y) (нижний ряд) при увеличении силы связи: (а) $\sigma_0 = 0.02$, (б) $\sigma_0 = 0.06$, (в) $\sigma_0 = 0.14$, (г) $\sigma_0 = 0.21$. Соответствующий усредненный по ансамблю коэффициент взаимной корреляции (2.1) и нормированное количество уединенных узлов (2.2): (а) $C = 0.461$, $N_S = 0.240$, (б) $C = 0.545$, $N_S = 0.194$, (в) $C = 0.822$, $N_S = 0.091$, (г) $C = 0.978$, $N_S = 0.01$. Черные точки соответствуют типичным состояниям, зеленые – типичным состояниям с $C_{1i} \approx 0.66$, красные – уединенным узлам. Другие параметры: $\alpha_0 = 1.4$, $\beta = 0.3$, $D_\alpha = 0$, $D_\sigma = 0$, $R = 320$, $N = 1000$.

На рисунке 2.1 показаны мгновенные профили кольца нелокально связанных отображений Лози в отсутствие шума (верхний ряд), пространственные

распределения коэффициентов C_{1i} (средний ряд) и проекции многомерного аттрактора системы на фазовую плоскость (x, y) (нижний ряд) в порядке возрастания силы связи σ_0 . Отметим, что здесь и далее в работе пространственные профили C_{1i} строятся для тех случаев, когда первый элемент ансамбля является типичным состоянием (принадлежит когерентному основанию). Даже при довольно слабой связи можно выделить два состояния – типичное и уединенное (рис. 2.1,а, где черные точки соответствуют типичным состояниям, а красные – уединенным узлам). В этом случае распределения значений C_{1i} делятся на две группы: $C_{1i} \rightarrow 1$ и $C_{1i} \rightarrow -1$. Увеличение силы связи приводит к уменьшению количества уединенных узлов и, следовательно, к увеличению разницы между аттракторами типичных состояний и уединенных узлов (рис. 2.1,б-г). В некоторых случаях при достаточно слабой связи можно выделить элементы, у которых $C_{1i} \approx 0.66$ (рис. 2.1,б, зеленые точки). Однако, как видно из проекций аттракторов, эти элементы относятся к типичным состояниям. Приведенные профили C_{1i} и значения C и N_S в подписи к рисунку 2.1 указывают на то, что расчеты коэффициентов взаимной корреляции (1.6) и (2.1) позволяют однозначно выявить режимы уединенных состояний и подсчитать количество уединенных узлов.

Отметим, что кольцо нелокально связанных отображений Лози в отсутствие шума демонстрирует режим уединенных состояний при изменении силы связи в интервале $\sigma_0 \in [0, 0.22]$. При $\sigma_0 > 0.22$ в системе перестают наблюдаться уединенные узлы, динамика сети соответствует когерентному пространственному профилю, а элементы ведут себя непериодически во времени. Когда связь достаточно сильна, элементы сети становятся полностью синхронизированными.

Перейдем к рассмотрению **влияния независимых источников аддитивного белого шума с равномерным распределением** ($N_i(n) = D\xi_i(n)$) на формирование и эволюцию уединенных состояний в кольце нелокально связанных отображений Лози (ур.(1.1),(1.7),(2.3)). Полученные численные резуль-

таты сведены в двухпараметрическую диаграмму (рис. 2.2), отражающую зависимость количества уединенных узлов от силы связи σ_0 и интенсивности шума D . Как видно, распределение N_S образует дугообразную область с максимумом при $D \approx 0.08$ и $\sigma_0 \approx 0.11$. Качественно можно выделить интервалы слабого и сильного шума. Слабый шум соответствует значению интенсивности $D < 0.02$, в этом диапазоне количество уединенных узлов практически не меняется с увеличением интенсивности шума. При $0.02 < D < 0.04$ изменение силы связи ведет к сдвигу только правой границы существования уединенных состояний в область более слабой силы связи. Количество уединенных узлов достигает максимальных значений при слабой силе связи, $0 < \sigma_0 < 0.11$, и постепенно уменьшается по мере увеличения σ_0 . При $D > 0.04$ изменяется и левая граница области существования уединенных состояний (в интервале слабой силы связи). Высокая интенсивность аддитивного шума приводит к разрушению пространственно-временной структуры и к сильной неоднородности сети (коэффициент взаимной корреляции обращается в ноль). При увеличении интенсивности шума область существования уединенных состояний плавно уменьшается, а границы, лежащие как в областях слабой, так и сильной связи, плавно смещаются к значению $\sigma_0 \approx 0.1$. При $D > 0.085$ уединенные состояния в кольце отображений Лози перестают наблюдаться.

Эволюция динамики кольца нелокально связанных отображений Лози при фиксированной интенсивности шума $D = 0.04$ и увеличении силы связи показана на рисунке 2.3. Как можно видеть, при слабой силе связи аддитивный шум практически не меняет пространственно-временную структуру в кольце (сравните рис. 2.1,в и рис. 2.3, I). При более сильной связи когерентная основа пространственного профиля становится зашумленной, но количество уединенных узлов почти равно тому, что наблюдалось в отсутствие связи (рис. 2.3, II). При значении σ_0 , соответствующем наличию лишь нескольких уединенных узлов, интенсивности шума $D = 0.04$ достаточно для уменьшения (вплоть до исчезновения) области притяжения аттрактора уединенных узлов в системе

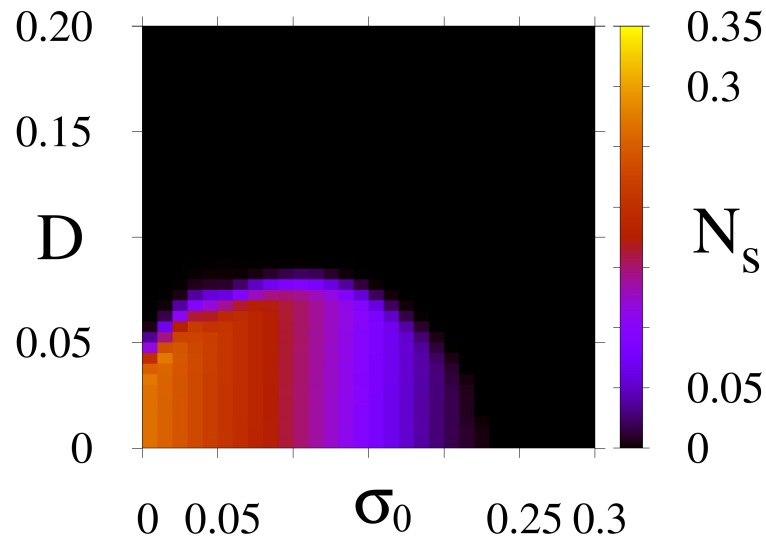


Рисунок 2.2. Диаграмма значений среднего нормированного количества уединенных узлов N_s , наблюдаемое в кольце нелокально связанных отображений Лози, на плоскости параметров (σ_0, D) . Расчеты проводились для 50 различных пар реализаций случайно распределенных начальных условий динамических переменных и реализаций генератора шума ($M = 50$).

Другие параметры: $\alpha_0 = 1.4$, $\beta = 0.3$, $R = 320$, $N = 1000$.

(рис. 2.3,III). Дальнейшее увеличение силы связи не вызывает качественное изменение существующего динамического режима, но приводит к увеличению коэффициента взаимной корреляции (сравните рис. 2.3,III,б и рис. 2.3,IV,б).

Далее сила связи была зафиксирована $\sigma_0 = 0.16$ и был проведен анализ динамики кольца нелокально связанных отображения Лози при увеличении интенсивности шума. Изменения в динамике ансамбля проиллюстрированы на рисунке 2.4. Значение σ_0 выбрано таким образом, чтобы в системе наблюдалось достаточно большое количество уединенных узлов в отсутствие аддитивного шума, что позволяет легче оценить влияние шума на систему (рис. 2.4,I). Как было отмечено ранее в этой работе, введение шума относительно малой интенсивности приводит лишь к зашумлению основания пространственного профиля, а число уединенных узлов почти не изменяется (рис. 2.4,II). С ростом интенсивности шума количество уединенных узлов заметно сокращается, так как

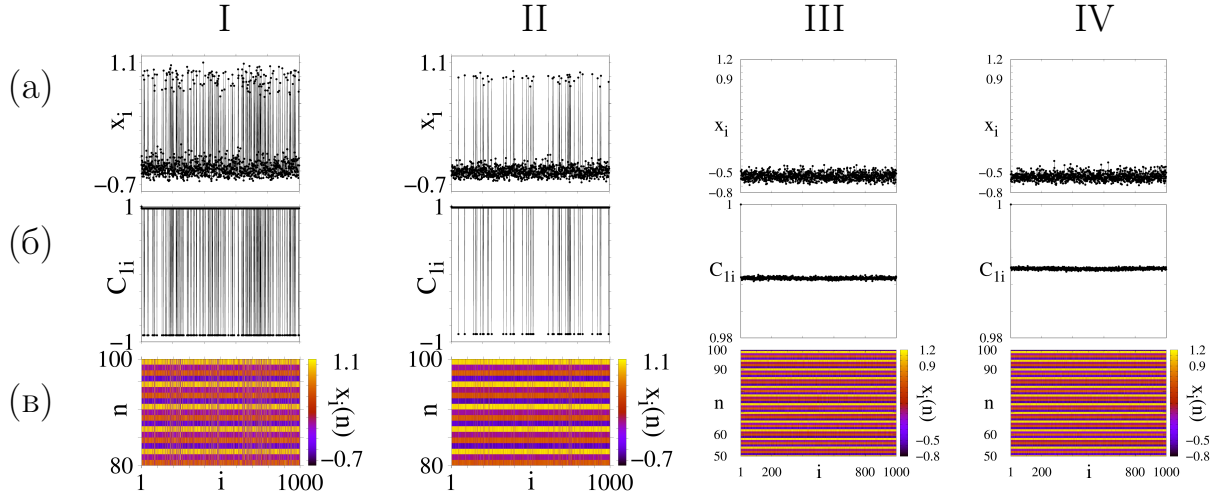


Рисунок 2.3. Мгновенные профили переменных x_i (а), пространственные распределения C_{1i} (б), пространственно-временные диаграммы $x_i(n)$ (в) для кольца нелокально связанных отображений Лози при фиксированной интенсивности шума $D = 0.04$ и для различных значений силы связи σ_0 : 0.1 (столбец I), 0.18 (столбец II), 0.22 (столбец III) и 0.24 (столбец IV). Другие параметры: $\alpha_0 = 1.4$, $\beta = 0.3$, $R = 320$, $N = 1000$.

некоторые элементы под влиянием шума переключаются на аттрактор типичных состояний. Коэффициенты взаимной корреляции таких элементов лежат в интервале $C_{1i} \in [-0.7, 0.7]$ (рис. 2.4, III). Наконец, когда интенсивность шума достаточно высока, режим уединенных состояний разрушается, и кольцо нелокально связанных отображений Лози демонстрирует режим пространственной некогерентности (рис. 2.4, IV). Следует отметить, что существуют различия между некогерентными режимами, которые существуют при слабой и сильной связи. В первом случае значения коэффициентов взаимной корреляции всех элементов сети близки к нулю, а во втором случае $C_{1i} > 0.9$.

Вернемся к рисунку 2.4, III и обратим внимание на элементы, значения коэффициентов взаимной корреляции которых лежат в интервале $C_{1i} \in [-0.7, 0.7]$. Как было сказано выше, режим уединенных состояний характеризуется бистабильной динамикой отдельных элементов сети. Это означает, что в фазовом пространстве есть два притягивающих множества, одно из которых

соответствует типичным состояниям или когерентной динамике (черные точки на рис. 2.5,в,I-III), а другое – уединенным узлам (красные точки на рис. 2.5,в,I-III). Введение аддитивного шума приводит к переходу некоторых элементов с аттрактора уединенных узлов на аттрактор типичных состояний (рис. 2.5,II, зеленые точки). Однако они колеблются не синхронно с типичными состояниями, поэтому коэффициент взаимной корреляции этих элементов лежит в интервале $C_{1i} \in [-0.7, 0.7]$ (рис. 2.5,б,II). При большей интенсивности шума вероятность переключения между двумя сосуществующими метастабильными состояниями возрастает, и в системе можно наблюдать элементы с $C_{1i} < -0.7$, которые переключаются между аттрактором типичного состояния и аттрактором уединенного узла (синие точки на рис. 2.5,в,III). Несмотря на то, что эти элементы учитывались при расчете количества уединенных узлов, их можно рассматривать как «мнимые» уединенные узлы, которые большую часть вре-

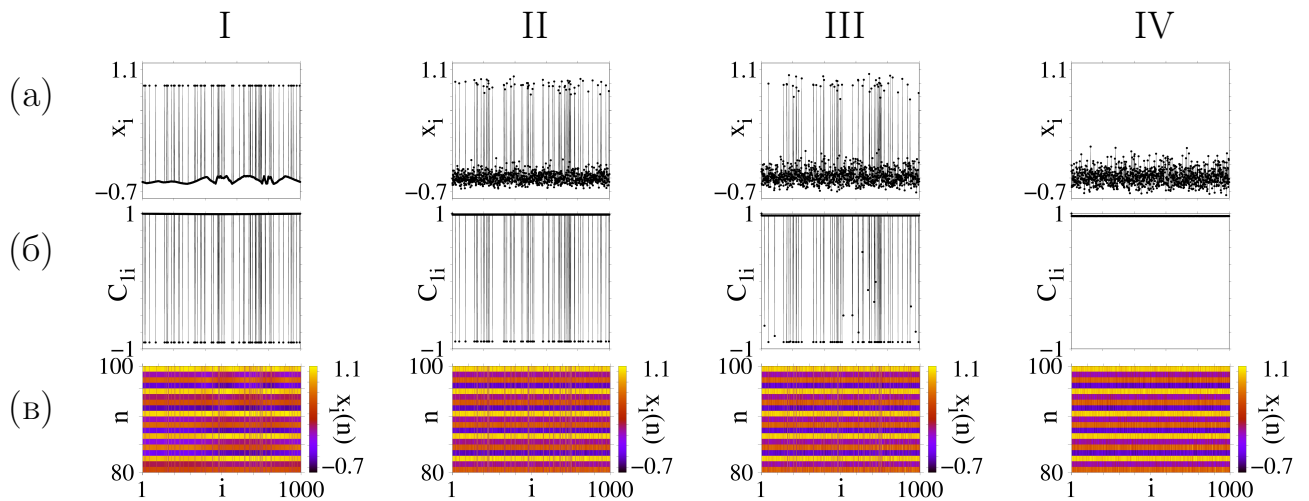


Рисунок 2.4. Мгновенные профили переменных x_i (а), пространственные распределения C_{1i} (б), пространственно-временные диаграммы $x_i(n)$ (в) для кольца нелокально связанных отображений Лози при фиксированной силе связи $\sigma_0 = 0.16$ и для различных значений интенсивность шума D : 0 (столбец I), 0.04 (столбец II), 0.065 (столбец III), 0.075 (столбец IV). Другие параметры:

$$\alpha_0 = 1.4, \beta = 0.3, R = 320, N = 1000.$$

мени принадлежат аттрактору типичных состояний, но колеблются несинфазно с типичными состояниями $C_{1i} < -0.7$.

Кольцо нелокально связанных отображений Эно-Лози. Другой пример ансамбля отображений, в котором наблюдаются уединенные состояния, – кольцо нелокально связанных отображений Эно-Лози [158]. В этом случае в качестве уравнения, описывающего динамику кольца нелокально связанных отображений, берется уравнение (1.1), а динамика парциальных элементов за-

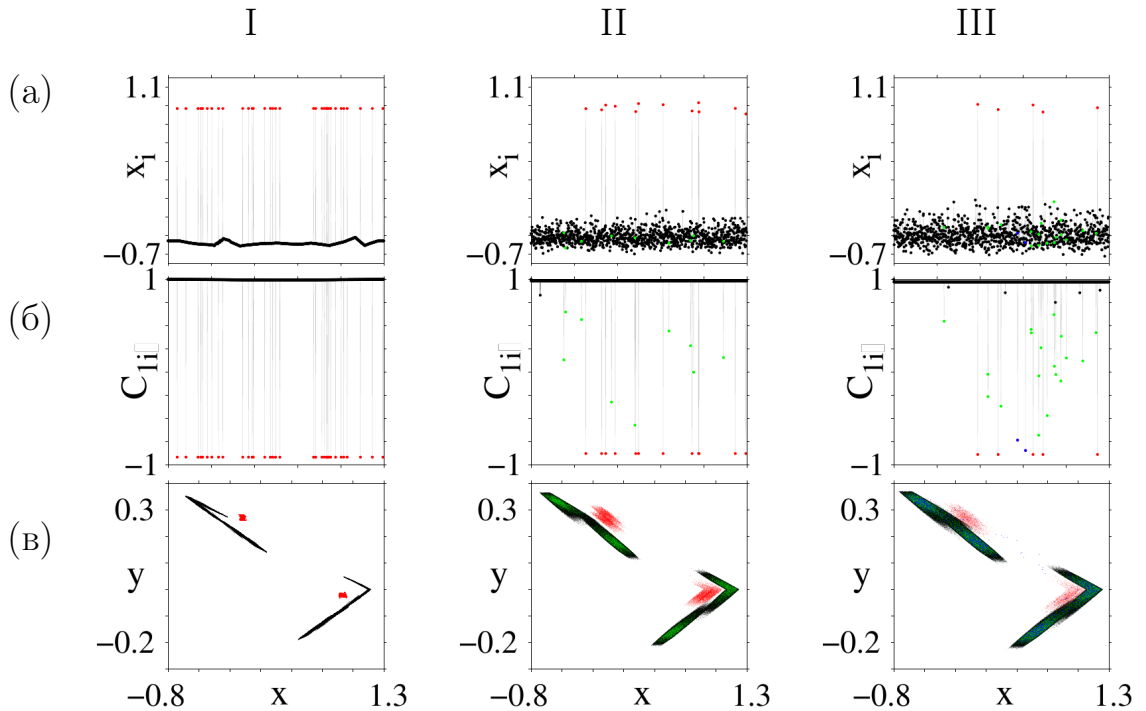


Рисунок 2.5. Мгновенные профили x_i (а), пространственные распределения C_{1i} (б) и проекции многомерного аттрактора системы на фазовую плоскость (x, y) (в) кольца нелокально связанных отображений Лози при различных значениях силы связи и интенсивность шума: $D = 0$, $\sigma_0 = 0.19$ (столбец I), $D = 0.05$, $\sigma_0 = 0.19$ (столбец II), $D = 0.65$, $\sigma_0 = 0.17$ (столбец III). Черные точки соответствуют типичным состояниям, красные – уединенным узлам, зеленые – типичным состояниям с $C_{1i} \in [-0.7; 0.7]$, синие – элементам, переключающимся между аттракторами типичного состояния и уединенного узла. Другие параметры: $\alpha_0 = 1.4$, $\beta = 0.3$, $R = 320$, $N = 1000$

дается следующими функциями:

$$\begin{aligned} F(x_i(n), y_i(n)) &= 1 - \alpha_i(n)S_\varepsilon(x_i(n)) + y_i(n), \\ G(x_i(n)) &= \beta x_i(n), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\alpha_i(n), \beta$ – управляющие параметры, в данном разделе $\alpha_i(n) = \alpha_0$, а функция $S_\varepsilon(x_i(n))$ определяется уравнением

$$S_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \geq \varepsilon, \\ x^2/2\varepsilon + \varepsilon/2, & |x| < \varepsilon, \end{cases} \quad (2.5)$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$, и при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $S_\varepsilon(x) \rightarrow |x|$, то есть классическое отображение Лози.

Исследование динамики кольца нелокально связанных отображений Эно-Лози при изменении управляющего параметра парциальных элементов α_0 и силы связи между элементами σ_0 (в отсутствие аддитивного и мультипликативного шумов) и фиксированных остальных параметрах ($\beta = 0.5, \varepsilon = 0.1, R = 320, N = 1000$) позволило построить карту режимов на плоскости параметров (α_0, σ_0) (рис. 2.6). Как можно видеть, при вариации параметров α_0 и σ_0 в системе могут наблюдаться как уединенные (при $\alpha_0 < 1.63$ и $\sigma_0 < 0.3$), так и химерные состояния (при $\alpha_0 > 1.63$). Отметим, что на границе областей существования уединенных и химерных состояний, возможно существование химер уединенных состояний. Также обратим внимание, что возможно появление двух типов уединенных состояний – с периодической и хаотической динамикой элементов.

Было проведено исследование **влияния независимых источников аддитивного белого шума с нормальным распределением** (ур. (1.7)) при двух значениях параметра α_0 : 1) в области, где наблюдаются только уединенные состояния при увеличении силы связи и переходе от некогерентной динамики к когерентной (рис. 2.7,а, $\alpha_0 = 1.5$); 2) недалеко от границы между областями существования уединенных состояний и химерных состояний, в таком случае

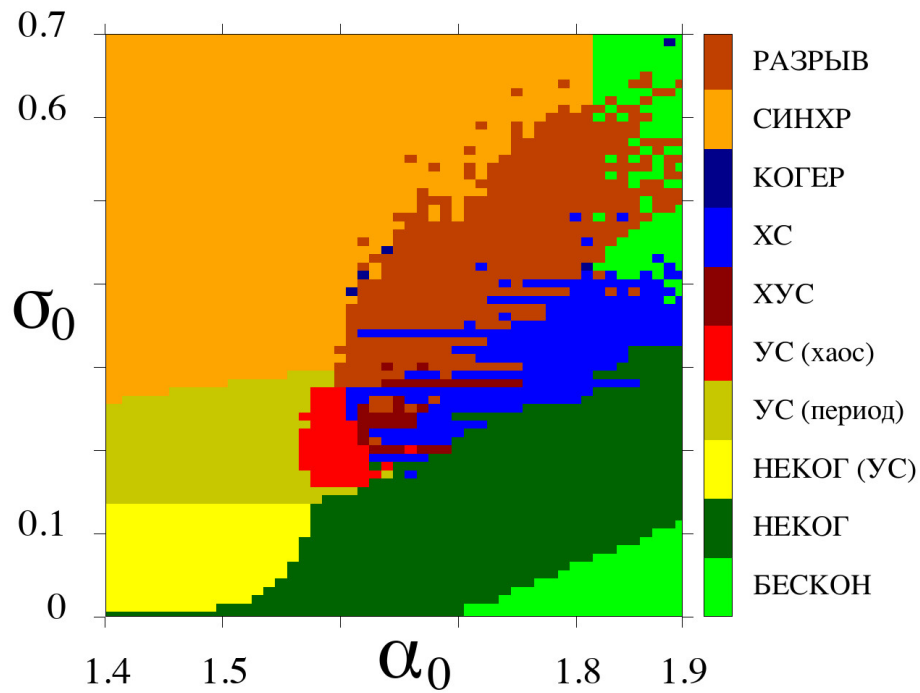


Рисунок 2.6. Карта режимов кольца нелокально связанных отображений Эно-Лози на плоскости параметров (α_0, σ_0) в отсутствие внешнего шумового воздействия. Обозначения: БЕСКОН – уход траекторий системы на бесконечность, НЕКОГ – некогерентная динамика элементов, НЕКОГ (УС) – некогерентный профиль, который представляет собой множество уединенных узлов (количество уединенных узлов близко к половине количества элементов в ансамбле $\approx N/2$), УС (период) – уединенные состояния с периодической динамикой элементов во времени, УС (хаос) – уединенные состояния с хаотической динамикой элементов во времени, ХУС – химера уединенных состояний, ХС – химерные состояния, КОГЕР – когерентная динамика элементов, СИНХР – полная синхронизация всех элементов, РАЗРЫВ – пространственный профиль с разрывами. Другие параметры: $\beta = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $R = 320$, $N = 1000$.

увеличение силы связи сначала приводит систему к переходу от режима пространственной некогерентности к уединенным состояниям, потом наблюдаются профили с разрывом, а при дальнейшем увеличении связи система переходит в режим синхронизации всех элементов (рис. 2.7,б, $\alpha_0 = 1.6$). В первом случае

аддитивный шум приводит к эффекту, качественно схожему тому, который наблюдался при воздействии аддитивного шума на кольцо нелокально связанных отображений Лози (сравните рис. 2.2 и рис. 2.7,а).

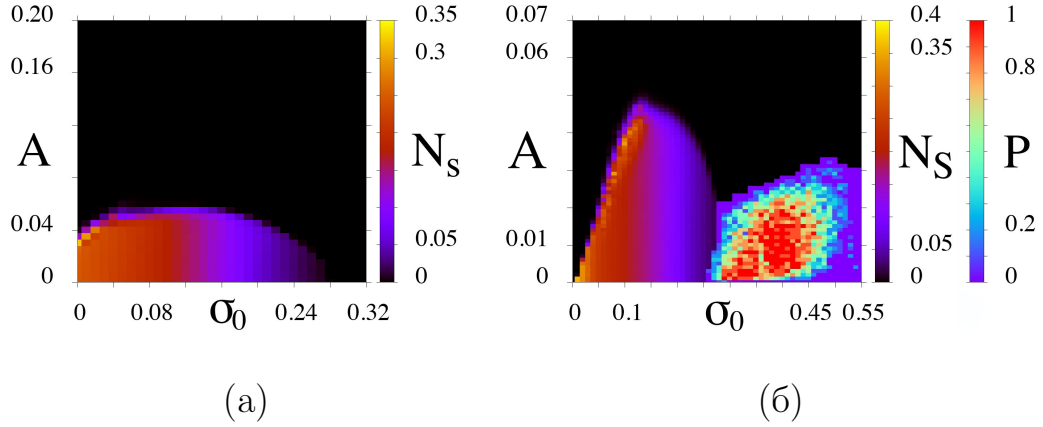


Рисунок 2.7. Влияние аддитивного шума на динамику кольца нелокально связанных отображений Эно-Лози. (а) Распределение среднего нормированного количества уединенных узлов N_S на плоскости параметров (σ_0, A) при $\alpha_0 = 1.5$. (б) Распределение N_S и вероятности установления химерных состояний P на плоскости параметров (σ_0, A) при $\alpha_0 = 1.6$. Расчеты проводились для 10 пар реализаций случайно распределенных начальных условий динамических переменных и реализаций шума ($M = 10$). Другие параметры: $\beta = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $R = 320$, $N = 1000$.

В связи с тем, что при $\alpha_0 = 1.6$ в системе кроме уединенных состояний наблюдаются химерные, на рисунке 2.7,б можно выделить две области: первая – в которой наблюдаются уединенные состояния и можно говорить о среднем количестве уединенных узлов в системе (цветовая шкала N_S); вторая – в которой наблюдаются химерные состояния и можно вычислить вероятность их установления (цветовая шкала P). При таком значении управляющего параметра динамика уединенных состояний при введении аддитивного шума в систему не отличается от ранее рассмотренных случаев (сравните рис. 2.7,б (область соответствующая цветовой шкале N_S), рис. 2.7,а и рис. 2.2). Распределение вероятности установления химер на плоскости параметров (σ_0, A) аналогично тому,

которое было показано в разделе 1.2.2 при сильной силе связи. В отсутствие шума вероятность наблюдения химер стремится к 0, и в системе наблюдаются только профили с разрывом (рис. 2.6,б при $\alpha_0 = 1.6$). Добавление аддитивного шума в систему индуцирует формирование некогерентных кластеров вокруг точек разрыва профиля, тем самым вероятность наблюдения химерных состояний увеличивается, что и демонстрирует рисунок 2.6,б. При дальнейшем увеличении интенсивности шума $A > 0.02$ интервал наблюдения химер по параметру σ_0 и вероятность их наблюдения уменьшаются.

Кольцо нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо.

Как было показано в работе [116] и описано в разделе 1.3.2, в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо могут существовать не только химерные структуры [152], но и уединенные состояния. При этом существуют две область наблюдения уединенных состояний: в интервале слабой (рис. 1.25,а) и сильной (рис. 1.25,б) связи. В данном разделе будут описаны результаты моделирования такой системы в присутствии независимых источников аддитивного нормального белого шума (ур. 1.13) при управляющих параметрах ансамбля, которые соответствуют установлению режима уединенных состояний.

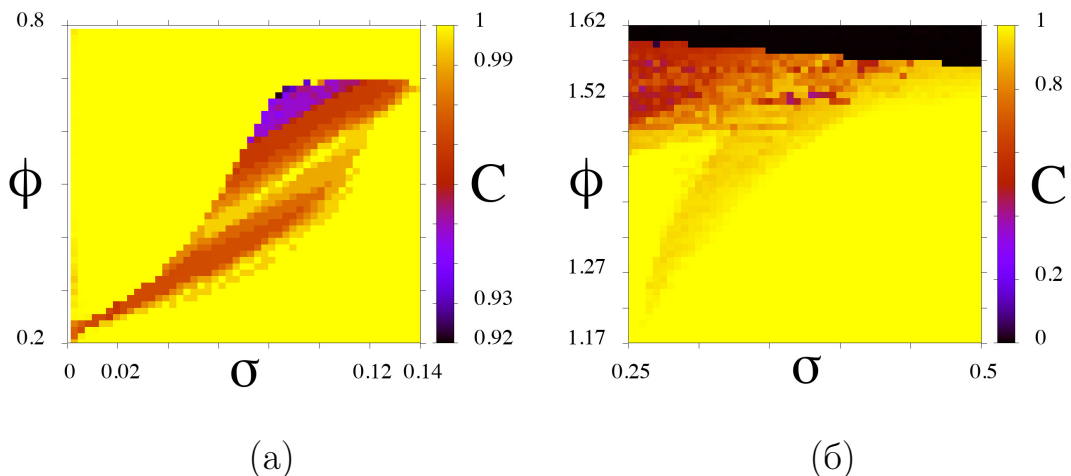


Рисунок 2.8. Распределение усредненного коэффициента взаимной корреляции 2.1 в системе (1.13) для (а) слабой и (б) сильной связей. Другие параметры: $\varepsilon = 0.05$, $a_0 = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$, $A = 0$.

На рисунке 2.8 представлены распределения коэффициентов 2.1 в соответствии с картами режимов, которые приведены на рисунке 1.25. Видно, что в области, которая соответствует наличию в системе уединенных узлов, $C \approx 0.96$ (сравните рис. 1.25 и рис. 2.8).

В связи с этим было построено распределение усредненных коэффициентов взаимной корреляции для различной интенсивности аддитивного шума для одной реализации случайных начальных условий элементов кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо (рис. 2.9). Как можно видеть, обе области существования уединенных состояний уменьшаются с увеличением интенсивности шума. Однако область, которая находится в интервале слабой связи, более устойчива к внешнему воздействию (рис. 2.9,а-г), чем там, которая находится в интервале сильной связи (рис. 2.9,д-з). Исследования показали,

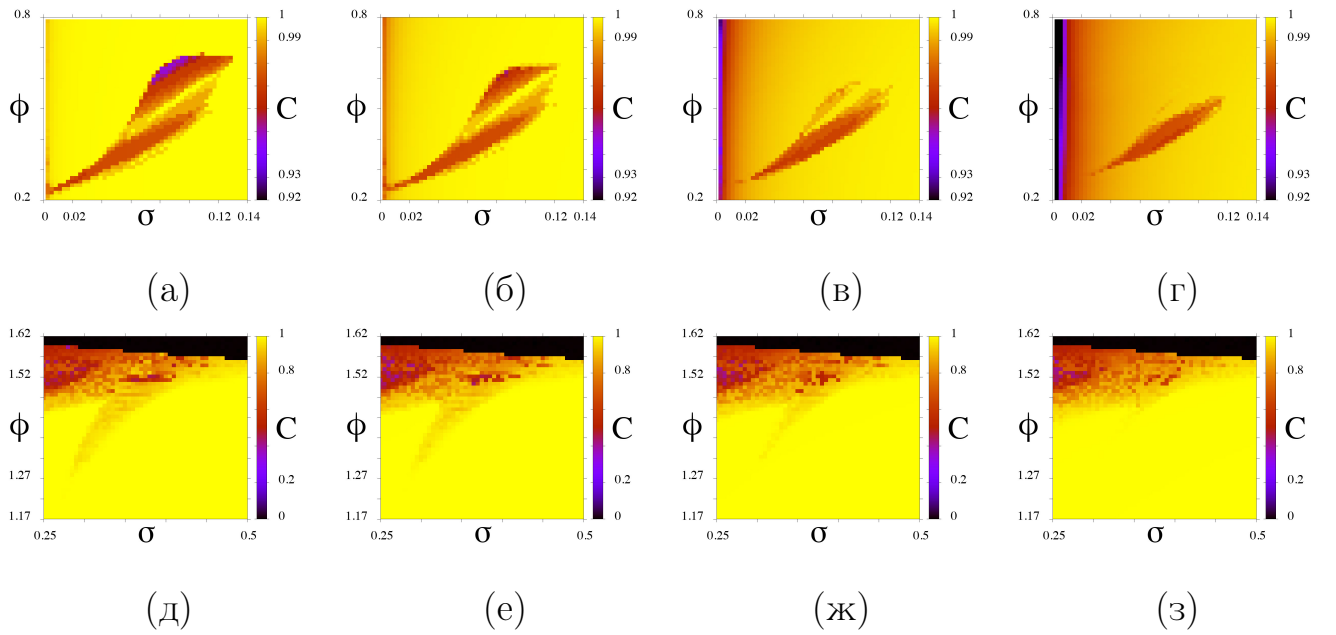


Рисунок 2.9. Карта значений усредненного коэффициента взаимной корреляции 2.1 в системе (1.13) на плоскости параметров (σ, ϕ) для (а)-(г) слабой и (д)-(з) сильной связи в присутствии аддитивного шума различной интенсивности: (а) $A = 0.000005$, (б) $A = 0.000025$, (в) $A = 0.000100$, (г) $A = 0.000200$, (д) $A = 0.000005$, (е) $A = 0.000010$, (ж) $A = 0.000025$, (з) $A = 0.000050$. Другие параметры: $\varepsilon = 0.05$, $a_0 = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$.

что область уединенных состояний при слабой связи полностью исчезает при $A \approx 7 * 10^{-4}$, в то время как для сильной связи достаточно интенсивность шума на один порядок меньше $A \approx 7 * 10^{-5}$, чтобы в системе не наблюдались уединенные узлы.

Вместе с этим отдельно была проанализирована зависимость среднего количества уединенных узлов от силы связи между элементами и интенсивности аддитивного шума при фиксированных значениях параметра ϕ в интервале слабой (рис. 2.10,а) и сильной связи (рис. 2.10,б). В этом разделе использовалась одна реализация наличных значений динамических переменных и десять реализаций генераторов шума. Как можно видеть, при слабой связи количество уединенных узлов меньше, чем при сильной связи (сравните разброс на цветовой шкале N_S на рис. 2.10,а и 2.10,б). При этом зависимость количества

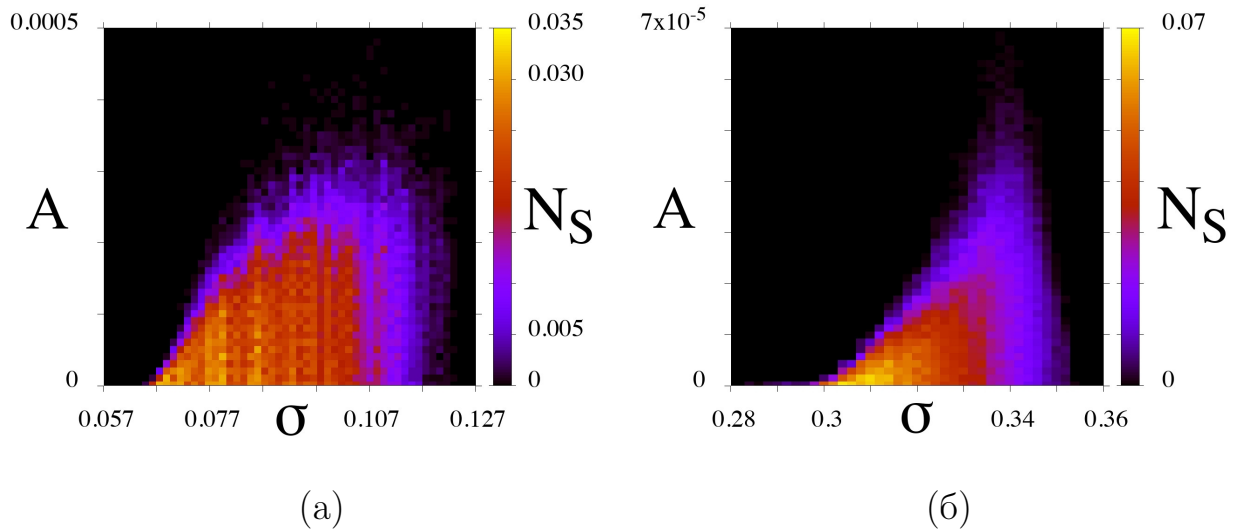


Рисунок 2.10. Среднее нормированное количество уединенных узлов N_S в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо при изменении силы связи σ и интенсивности шума A в интервале слабой (а) и сильной связи (б) при фиксированных значениях параметра ϕ : (а) $\phi = 0.52$, (б) $\phi = 1.4$.

Расчеты проводились для 10 пар реализаций случайно распределенных начальных условий динамических переменных и реализаций шума ($M = 10$).

Другие параметры: $\varepsilon = 0.05$, $a_0 = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$.

уединенных узлов от σ и A в интервале слабой связи, имея куполообразную форму, качественно напоминает зависимости, которые наблюдались в кольцах нелокально связанных отображений. Область существования уединенных состояний в интервале сильной связи имеет более линейную левую границу. Однако во всех случаях увеличение интенсивности шума ведет преимущественно к уменьшению количества уединенных узлов и интервала их наблюдения по параметру σ . Только в интервале слабой связи при $\sigma \approx 0.119$ можно наблюдать, что при $A = 0$ количество уединенных узлов стремится к 0, а при $A > 0$ может находиться на уровне $A \approx 0.006$ (что соответствует наличию 2-3 уединенных узлов в ансамбле), однако при $A > 0.002 N_S$ вновь спадает до 0 (рис. 2.10,а). То же самое наблюдается на картах распределения усредненного коэффициента взаимной корреляции для слабой связи, когда при увеличении интенсивности шума область существования уединенных состояний уменьшалась, и слегка сдвигалась вправо в сторону больших значений σ (рис. 2.9,а-г).

2.3 Влияние шумовой модуляции и случайного распределения значений управляющих параметров парциальных элементов на реализацию уединенных состояний

Данный раздел посвящен анализу влияния шумовой модуляции управляющих параметров парциальных элементов ансамбля на установление в системе уединенных состояний. При этом аддитивный шум в системе отсутствует $N_i(n) \equiv 0$, а сила связи одинакова для всех элементов и не зависит от номера итерации $\sigma_i(n) = \sigma_0$. Шумовая модуляция управляющих параметров парциальных элементов задается следующими соотношениями: $\alpha_i(n) = \alpha_0 + D_\alpha \xi_i(n)$, где $\xi_i(n)$ – независимые источники шума с равномерным распределением в интерва-

ле $[-1, 1]$, D_α – интенсивность шума; $\alpha_i(n) = \alpha_0 + A_\alpha \psi_i(n)$, где $\psi_i(n)$ – источник шума со стандартным распределением с нулевым средним и единичным отклонением, A_α – интенсивность шума. В случае случайного распределения значения управляющих параметров парциальных элементов задаются следующими соотношениями: $\alpha_i = \alpha_0 + D_\alpha \xi_i$ ($\alpha_i = \alpha_0 + A_\alpha \psi_i$).

2.3.1 Шумовая модуляция управляющих параметров элементов ансамбля

Кольцо нелокально связанных отображений Лози. Начнем с рассмотрения случая, когда параметры локальной динамики $\alpha_i(n)$ отображений Лози в кольце нелокально связанных элементов модулируются независимыми источниками белого шума с равномерным распределением: $\alpha_i(n) = \alpha_0 + D_\alpha \xi_i(n)$. Среднее значение (постоянная компонента) параметра α_0 выбиралось как $\alpha_0 = 1.4$, а значение параметра $\beta = 0.3$, что соответствует хаотической динамики парциальных элементов без связи между ними. Динамика кольца нелокально связанных отображений Лози анализируется при изменении силы связи σ_0 и интенсивности шума D_α .

Исследования показали, что непрерывная шумовая модуляция параметров локальной динамики подавляет режим уединенных состояний. Данный эффект отражен на двумерной диаграмме (рис. 2.11), показывающей распределение усредненного коэффициента взаимной корреляции C (2.1) в зависимости от D_α и σ_0 . Область существования уединенных состояний имеет аркообразную форму с максимумом при $D_\alpha \approx 0.155$ и $\sigma_0 \approx 0.12$. Как видно из диаграммы, начиная с $D_\alpha > 0.045$, ширина этой области значительно уменьшается по мере связи. Например, при $D_\alpha = 0.15$ уединенные состояния наблюдаются в диапа-

зоне $0.1 < \sigma_0 < 0.15$, хотя в отсутствие шума они реализуются в интервале $\sigma_0 \in [0; 0.22]$ (рис. 2.11,а).

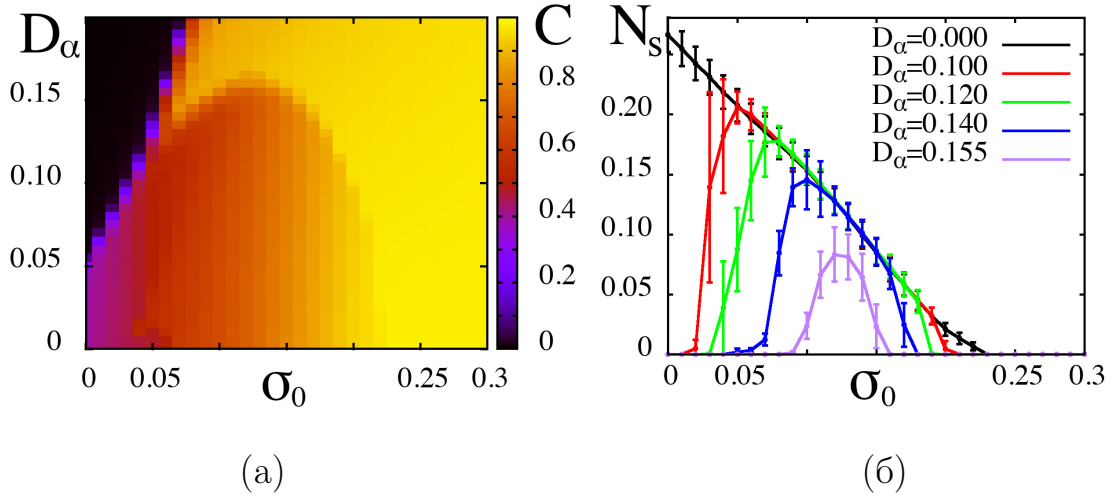


Рисунок 2.11. Влияние шумовой модуляции управляющих параметров на режим уединенных состояний в кольце нелокально связанных отображений Лози. (а) Двумерная диаграмма распределения усредненных коэффициентов взаимной корреляции C на плоскости параметров (σ_0, D_α) . (б) Зависимости нормированного числа уединенных узлов N_S от силы связи σ_0 для различных интенсивностей шума D_α (см. легенду). Расчеты проводились для 50 различных пар реализаций случайно распределенных начальных условий и равномерно распределенного источника шума ($M = 50$). Другие параметры: $\alpha_0 = 1.4$, $\beta = 0.3$, $R = 320$, $N = 1000$.

Для более детального анализа влияния шумовой модуляции управляющих параметров $\alpha_i(n)$ на уединенные состояния, вычисляется количество уединенных узлов для различных интенсивностей шума при изменении силы связи σ_0 (рис. 2.11,б). В отсутствие шума число N_S уменьшается почти линейно с увеличением силы связи (рис. 2.11,б, черная линия). При увеличении интенсивности шума зависимости N_S от σ_0 напоминают резонансные кривые. Значение σ_0 , соответствующее максимуму ("резонансу") каждой зависимости, смещается в область сильной связи с увеличением D_α . При этом максимальное количество уединенных узлов уменьшается с увеличением интенсивности шума

(рис. 2.11,б). Таким образом, можно сказать, что для каждого значения D_α существует определенное ("резонансное") значение σ_0 , при котором наблюдается максимальное число уединенных узлов в кольце нелокально связанных отображений Лози. Обратим внимание, что до $D_\alpha = 0.155$ количество уединенных узлов не меняется в конечной области около $\sigma_0 = 0.12$. Однако размер этой области уменьшается с увеличением интенсивности шума.

Рисунок 2.12 демонстрирует изменение динамики ансамбля в присутствии относительно слабой шумовой модуляции ($D_\alpha = 0.1$) при увеличении силы связи σ_0 . При слабой силе связи (рис. 2.12,а) из-за влияния шума система демонстрирует режим некогерентности с нерегулярной динамикой элементов во времени ($C \rightarrow 0$), в таком случае в системе отсутствует режим уединенных состояний. Такой режим наблюдается при малых значениях σ_0 и при увеличении D_α , что соответствует черной области на диаграмме на рис. 2.11,а. В области существования уединенных состояний ($0.03 < \sigma_0 < 0.2$ при $D_\alpha = 0.1$) шумовая модуляция управляющих параметров переводит динамику ансамбля в режим пространственной некогерентности, однако распределение значений коэффициента корреляции показывает существование в системе уединенных узлов (рис. 2.12,б,в). В диапазоне сильной связи ($0.2 < \sigma_0 < 0.23$ при $D_\alpha = 0.1$) шумовая модуляция подавляет уединенные узлы. Все осцилляторы переходят в типичное состояние, однако мгновенные профили не являются гладкими (как это было бы в отсутствие шумовой модуляции). При этом коэффициент корреляции указывает на достаточно сильную степень синхронизации между элементами в силу их периодической динамики во времени (рис. 2.12,г, $C_{1i} \approx 0.982$). Такой же режим зашумленной когерентной динамики наблюдается при введении шумовой модуляции при $\sigma_0 > 0.23$, т.е. при силе связи, соответствующей гладкому пространственному профилю при $D_\alpha = 0$.

В рассмотренном случае уменьшение области наблюдения уединенных состояний с ростом интенсивности шума объясняется случайными флуктуациями управляющих параметров $\alpha_i(n)$. Данный факт увеличивает вероятность

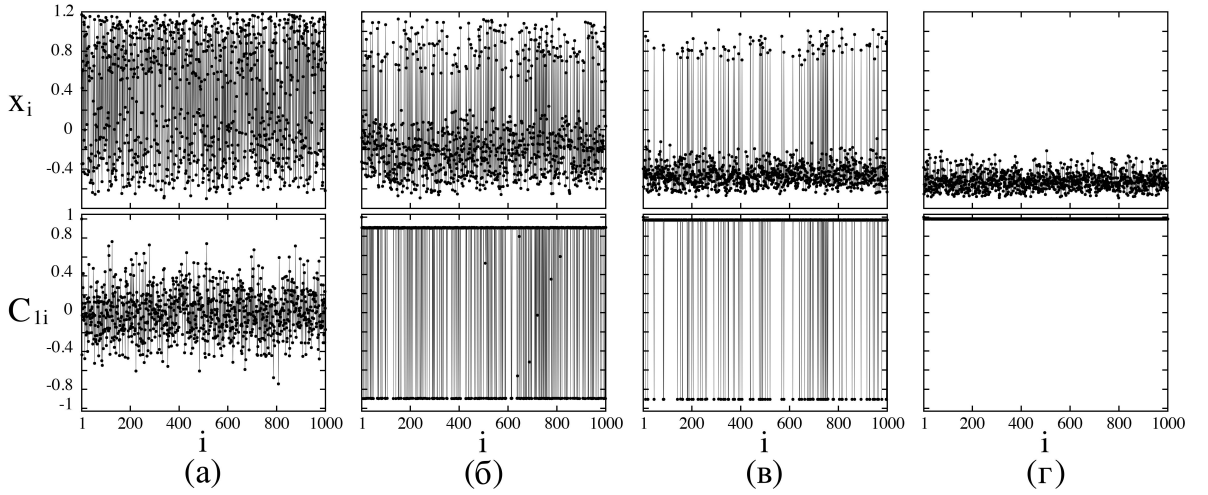


Рисунок 2.12. Динамика кольца нелокально связанных отображений Лози при шумовой модуляции управляющих параметров парциальных элементов:

мгновенные профили динамических переменных x_i (верхний ряд) и пространственные распределения C_{1i} (нижний ряд) при интенсивности шума $D_\alpha = 0.1$ и различных значениях силы связи: (а) $\sigma_0 = 0.02$, (б) $\sigma_0 = 0.05$, (в) $\sigma_0 = 0.14$, (г) $\sigma_0 = 0.21$. Соответствующий усредненный по ансамблю коэффициент взаимной корреляции (2.1) и нормированное количество уединенных узлов (2.2): (а) $C = 0.012$, $N_S = 0.001$, (б) $C = 0.52$, $N_S = 0.204$, (в) $C = 0.804$, $N_S = 0.089$, (г) $C = 0.982$, $N_S = 0$. Другие параметры: $\alpha_0 = 1.4$, $\beta = 0.3$, $R = 320$, $N = 1000$.

смещения значений $\alpha_i(n)$ в область периодических колебаний индивидуальных отображений Лози. При этом исчезает бистабильность в локальной динамике отдельных элементов, и, таким образом, эти элементы не могут достичь аттрактора уединенного состояния.

Кольцо нелокально связанных отображений Эно-Лози. При анализе влияния шумовой модуляции управляющих параметров парциальных элементов в кольце нелокально связанных отображений Эно-Лози использовались независимые источники нормального белого шума. Таким образом, уравнение для управляющих параметров выглядит как $\alpha_i(n) = \alpha_0 + A_\alpha \psi_i(n)$, где $\psi_i(n)$ – независимые нормированные нормальные источники белого шума, $\alpha_0 = 1.5$.

При этом, чтобы избежать ухода траекторий парциальных элементов на бесконечность, было введено следующее условие: если $\alpha_0 + A_\alpha \psi_i(n) > 1.8$, то $\alpha_i(n) = 1.8$.

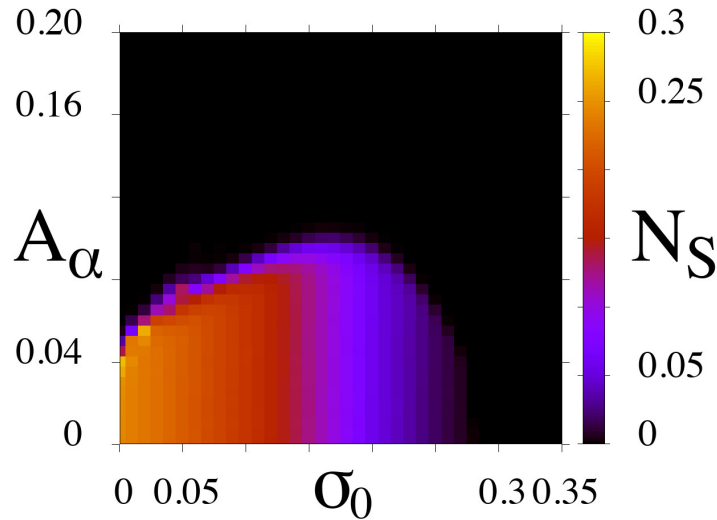


Рисунок 2.13. Изменения нормированного количества уединенных узлов в кольце нелокально связанных отображений Эно-Лози при изменении силы связи σ_0 и интенсивности шума A_α при шумовой модуляции управляющих параметров системы (используется генератор шума с нормальным распределением). Расчеты проводились для 10 различных пар реализаций случайно распределенных начальных условий и реализаций шума ($M = 10$). Другие параметры: $\alpha_0 = 1.5$, $\beta = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $R = 320$, $N = 1000$

При шумовой модуляции управляющих параметров парциальных элементов в кольце нелокально связанных отображений Эно-Лози увеличение интенсивности шума приводит к таким же эффектам, что и в кольце нелокально связанных отображений Лози (сравните рис. 2.11 и рис. 2.13). Слабая интенсивность шума ($A_\alpha < 0.04$) почти не изменяет ни количество уединенных узлов в системе, ни интервал наблюдения уединенных состояний по силе связи σ_0 , что наблюдалось и в кольце нелокально связанных отображений Лози. При большей интенсивности шума, как и в кольце отображений Лози, в этой системе наблюдается плавное уменьшение количества уединенных узлов при увеличе-

ние силы связи и уменьшение интервала наблюдения уединенных состояний при увеличении интенсивности шума.

2.3.2 Случайное распределение значений управляющих параметров элементов ансамбля

Кольцо нелокально связанных отображений Лози. Перейдем теперь к рассмотрению неоднородного ансамбля со случайными значениями управляющих параметров локальной динамики, равномерно распределенными в ограниченном интервале относительно среднего значения $\alpha_0 = 1.4$: $\alpha_i = \alpha_0 + D_\alpha \xi_i$. Под параметром D_α теперь понимается ширина интервала распределения α_i (отклонение от среднего значения).

Исследования показали, что количество уединенных узлов начинает меняться только при ширине распределения $D_\alpha > 0.05$. Как следует из двумерной диаграммы, изображенной на рисунке 2.14,а, при увеличении D_α значение коэффициента взаимной корреляции C уменьшается как для слабой, так и для сильной силы связи σ_0 . Это свидетельствует о том, что количество уединенных узлов уменьшается в области слабой связи и увеличивается при сильной нелокальной связи. Этот факт также подтверждается вычислением числа уединенных узлов, для которых на рис. 2.14,б представлены зависимости от σ_0 , полученные при разных значениях D_α . Из этих зависимостей видно, что с ростом D_α максимум количества уединенных узлов смещается в область сильной связи. Также стоит отметить, что при $D_\alpha > 0.27$ на плоскости параметров (σ_0, D_α) в области слабой связи появляется область, в которой траектории системы уходят на бесконечность (белые квадраты на рис. 2.14,а).

Проанализируем эволюцию динамики кольца нелокально связанных отображений Лози в случае неоднородного распределения параметров локальной

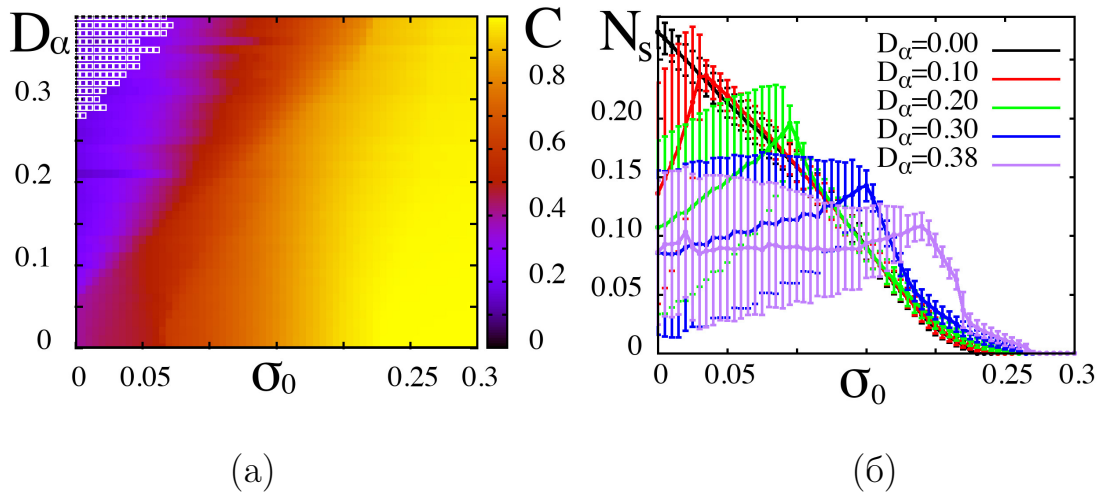


Рисунок 2.14. Влияние случайного распределения управляющих параметров на режим уединенных состояний в кольце нелокально связанных отображений Лози. (а) Двумерная диаграмма распределения усредненных коэффициентов взаимной корреляции C на плоскости параметров (σ_0, D_α) . (б) Зависимости нормированного количества уединенных узлов N_S от силы связи σ_0 для различных интенсивностей шума D_α (см. легенду). Расчеты проводились для 50 различных пар реализаций случайно распределенных начальных условий и равномерного распределения шума ($M = 50$). Другие параметры: $\alpha_0 = 1.4$, $\beta = 0.3$, $R = 320$, $N = 1000$.

динамики α_i при фиксированном отклонении $D_\alpha = 0.2$ и среднем $\alpha_0 = 1.4$ (рис. 2.15). При слабой силе связи часть элементов кольца колеблется абсолютно асинхронно как с типичными состояниями, так и с одиночными узлами. Об этом свидетельствует наличие элементов, для которых коэффициент корреляции C_{1i} обращается в нуль (рис. 2.15,(а)). Из-за этого количество уединенных узлов в интервале слабой связи уменьшается (рис. 2.15,а, см. также рис. 2.14,б, синяя линия). Увеличение σ_0 приводит к уменьшению числа некоррелированных осцилляторов, часть из которых притягивается к аттрактору уединенных узлов, и, таким образом, количество уединенных узлов возрастает (рис. 2.15,б). По мере дальнейшего увеличения силы связи количество уединенных узлов снова уменьшается (рис. 2.15,в). Однако их число больше, чем для случая ансам-

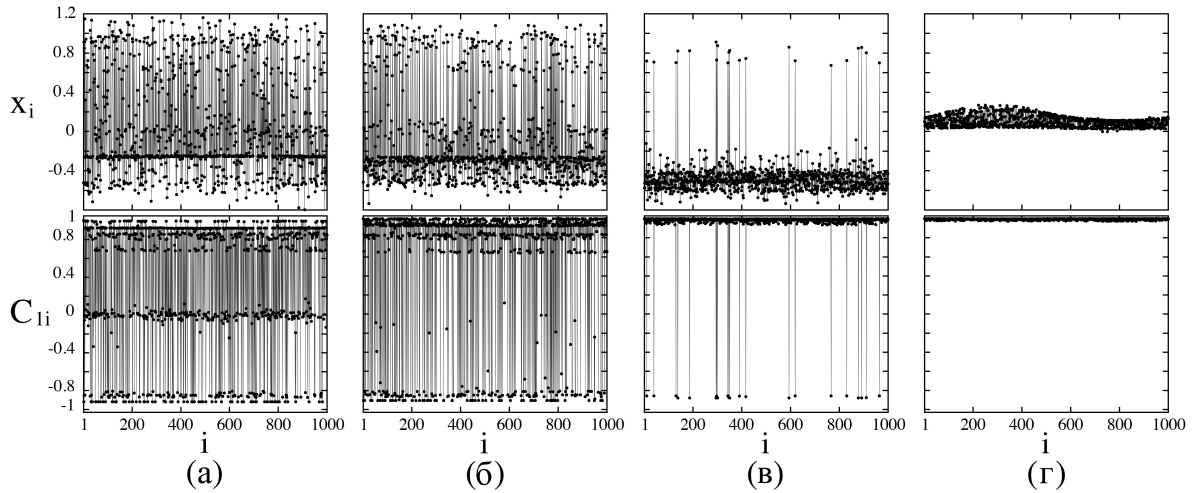


Рисунок 2.15. Динамика кольца нелокально связанных отображений Лози при случайном распределении управляющих параметров парциальных элементов:

мгновенные профили динамических переменных x_i (верхний ряд) и пространственные распределения C_{1i} (нижний ряд) при интенсивности шума $D_\alpha = 0.2$ и различных значениях силы связи: (а) $\sigma_0 = 0.04$, (б) $\sigma_0 = 0.09$, (в) $\sigma_0 = 0.205$, (г) $\sigma_0 = 0.295$. Соответствующий усредненный по ансамблю коэффициент взаимной корреляции (2.1) и нормированное количество уединенных узлов (2.2): (а) $C = 0.008$, $N_S = 0.172$, (б) $C = 0.357$, $N_S = 0.189$, (в) $C = 0.894$, $N_S = 0.021$, (г) $C = 0.974$, $N_S = 0$. Другие параметры: $\alpha_0 = 1.4$, $\beta = 0.3$, $R = 320$, $N = 1000$.

бля с однородным распределением управляющих параметров ($\alpha_i = \alpha_0$, $D_\alpha = 0$) (рис. 2.15,в, см. также рис. 2.14,б, синяя линия). При достаточно большой силе связи ($\sigma_0 > 0.26$ при $D_\alpha = 0.3$) уединенные узлы полностью исчезают, а ранее гладкий профиль становится некогерентным из-за случайного распределения параметров локальной динамики (рис. 2.14,г). При этом усредненный коэффициент взаимной корреляции принимает значения $C > 0.9$, что соответствует режиму зашумленной когерентной динамики.

В кольце нелокально связанных отображений Эно-Лози неоднородное распределение управляющих параметров парциальных элементов задавалось с помощью случайных чисел $\psi_i(0)$ со стандартным нормальным распре-

делением: $\alpha_i = \alpha_0 + A_\alpha \psi_i$, где α_0 есть среднее значение случайных величин α_i , параметр A_α задает среднеквадратичное отклонение. При этом, чтобы избежать уход траекторий на бесконечность, как и для случая шумовой модуляции, ставилось условие: если $\alpha_0 + A_\alpha \psi_i > 1.8$, то $\alpha_i = 1.8$.

Рисунок 2.16 демонстрирует зависимость количества уединенных узлов от силы связи и интервала неоднородного распределения управляющего параметра α_i в кольце нелокально связанных отображений Эно-Лози. Для выбранных параметров введение неоднородного распределения значений управляющих параметров α_i ведет к уходу траекторий системы на бесконечность в интервале слабой связи при меньшем разбросе параметров A_α , чем для кольца нелокально связанных отображений Лози. При этом в рассмотренном диапазоне изменения

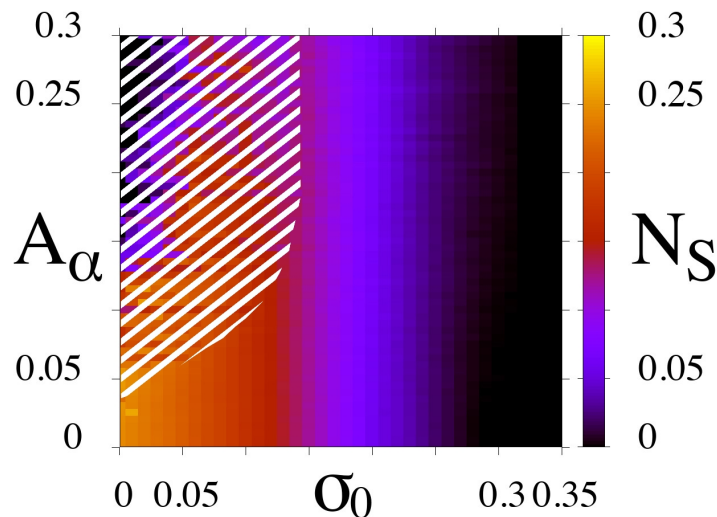


Рисунок 2.16. Изменения нормированного количества уединенных узлов в кольце нелокально связанных отображений Эно-Лози при фиксированном неоднородном распределении параметров α_i на плоскости параметров (σ_0, A_α) . Белая заштрихованная белая область – диапазон значений параметров, при которых траектории с ненулевой вероятностью уходят на бесконечность.

Расчеты проводились для 10 различных пар реализаций случайно распределенных начальных условий и реализаций шума ($M = 10$). Другие

параметры: $\alpha_0 = 1.5$, $\beta = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $R = 320$, $N = 1000$

A_α неоднородность распределения параметра α_i почти не влияет на зависимость числа уединенных узлов от силы связи между элементами. Дальнейшее увеличение параметра A_α ведет к увеличению области ухода траекторий на бесконечность, что не позволяет зафиксировать изменения в количестве уединенных узлов также хорошо, как это было проделано для кольца нелокально связанных отображений Лози.

2.4 Влияние шумовой модуляции и случайного распределения значений *силы связи* парциальных элементов на реализацию уединенных состояний

В данном разделе проводится анализ влияния шумовой модуляции силы связи между элементами ансамбля на установление в системе уединенных состояний. В этом случае аддитивный шум в системе отсутствует $N_i(n) \equiv 0$, а управляющие параметры всех элементов равны и не изменяются во времени $\alpha_i(n) = \alpha_0$. Распределение значений силы связи по ансамблю задается как и в прошлом разделе двумя соотношениями. При шумовой модуляции имеем: $\sigma_i(n) = \sigma_0 + D_\sigma \xi_i(n)$, где $\xi_i(n)$ – независимые источники шума с равномерным распределением в интервале $[-1, 1]$, D_σ – интенсивность шума; $\sigma_i(n) = \sigma_0 + A_\sigma \psi_i(n)$, где $\psi_i(n)$ – источник шума со стандартным распределением с нулевым средним и единичным отклонением, A_σ – интенсивность шума. В случае случайного распределения значения силы связи: $\sigma_i = \sigma_0 + D_\sigma \xi_i$ ($\sigma_i = \sigma_0 + A_\sigma \psi_i$).

2.4.1 Шумовая модуляция силы связи между элементами ансамбля

Кольцо нелокально связанных отображений Лози. Для анализа динамики кольца нелокально связанных отображений Лози при шумовой модуляции силы связи были использованы независимые белые источники шума $\xi_i(n)$ с равномерным: $\sigma_i(n) = \sigma_0 + D_\sigma \xi_i(n)$.

Как и ранее, рассчитывался усредненный коэффициент взаимной корреляции C (2.1) при изменении среднего значения σ_0 и интенсивности шума D_σ . Полученные данные представлены в виде двумерной диаграммы, приведенной на рисунке 2.17,а. Как видно, область существования уединенных состояний также уменьшается под влиянием шумовой модуляции силы связи между элементами как и в случае модуляции параметров локальной динамики. Однако, в отличие от предыдущего случая, область существования уединенных состояний сужается только относительно правой границы, это приводит к тому, что в интервале слабой связи не наблюдается некогерентная динамика. Это можно объяснить тем, что шумовая модуляция сдвигает значения коэффициентов связи между некоторыми элементами в область более сильной связи, что не позволяет элементам достичь аттрактора уединенных узлов. Поскольку область притяжения аттрактора когерентного состояния больше, чем аттрактора уединенного узла, и они четко разделены в фазовом пространстве, последующее влияние шума и ослабление силы связи не позволяют элементу вернуться в исходное состояние (на аттрактор уединенного узла).

В рассматриваемом случае диапазон σ_0 можно разделить на два интервала: $[0, 0.07]$ и $(0.07, 0.23]$. В интервале сильной связи ($\sigma_0 \in (0.07, 0.23]$) область наблюдения уединенных состояний на плоскости параметров (σ_0, D_σ) представляет собой частично куполообразную область (рис. 2.17,а), сравнимую с наблюдаемой для случая модуляции шумом управляющих параметров парциальных

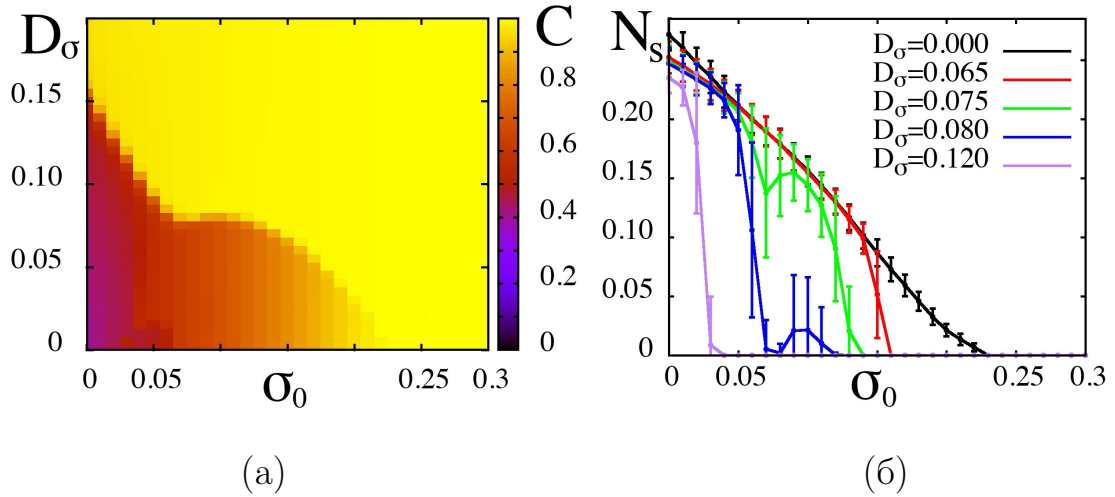


Рисунок 2.17. Влияние шумовой модуляции силы связи на режим уединенных состояний в кольце нелокально связанных отображений Лози. (а) Двумерная диаграмма распределения усредненных коэффициентов взаимной корреляции C на плоскости параметров (σ_0, D_σ) . (б) Зависимости нормированного количества уединенных узлов N_S от силы связи σ_0 для различных интенсивностей шума D_σ (см. легенду). Расчеты проводились для 50 различных пар реализаций случайно распределенных начальных условий и равномерного распределения шума ($M = 50$). Другие параметры: $\alpha_0 = 1.4$, $\beta = 0.3$, $R = 320$, $N = 1000$.

элементов (смотрите рис. 2.11). В диапазоне слабой связи ($\sigma_0 \in [0, 0.07]$) граничные значения области существования уединенных состояний по параметру σ_0 изменяются почти линейно и сдвигаются влево только при достаточно большой интенсивности шума. В отличие от случая шумовой модуляции управляющих параметров $\alpha_i(n)$, даже относительно слабая шумовая модуляция параметров связи ($D_\sigma \approx 0.07$) может привести к подавлению уединенных состояний и к установлению полной когерентности (синхронизации) или режиму зашумленной когерентной динамики (рис. 2.17,а). В данном случае шумовая модуляция не вызывает перехода к полной некогерентности в кольце нелокально связанных отображений Лози.

Обратим внимание, что до $D_\sigma = 0.07$ количество уединенных узлов уменьшается почти по линейному закону с увеличением σ_0 (рис. 2.17,б). Однако более высокая интенсивность шума приводит к резкому уменьшению количества уединенных узлов в интервале слабой связи ($\sigma_0 \in [0, 0.07]$) (см. лиловый и синий графики на рис. 2.17,б). Можно предположить, что в этом случае шумовая модуляция сдвигает эффективные значения силы связи σ_0 в сторону ее больших значений, которые соответствуют когерентному или полностью синхронизированному поведению кольца нелокально связанных отображений Лози в отсутствие шумовой модуляции.

Кольцо нелокально связанных отображений Эно-Лози. При анализе влияния шумовой модуляции коэффициентов связи между элементами в кольце нелокально связанных отображений Эно-Лози рассматривался нормальный белый шум. В этом случае сила связи определяется следующим образом: $\sigma_i(n) = \sigma_0 + A_\alpha \psi_i(n)$, где $\psi_i(n)$ – независимые нормированные источники нормального белого шума.

Шумовая модуляция силы связи между элементами кольца нелокально связанных отображений Эно-Лози приводит к уменьшению количества уединенных узлов и интервала наблюдения уединенных состояний по параметру σ_0 (рис. 2.18), что наблюдалось и в кольце отображений Лози. Весь интервал по силе связи в кольце Эно-Лози можно разделить на слабую $\sigma_0 \in [0, 0.1]$ и сильную $\sigma_0 \in (0.1, 0.3]$ связь между элементами. В первом случае наблюдается линейное уменьшение интервала существования уединенных состояний по параметру σ_0 . Во втором случае наблюдается куполообразная зависимость, хотя для данных параметров она более сглажена, чем для кольца нелокально связанных отображений Лози (сравните рис. 2.17 и рис. 2.18).

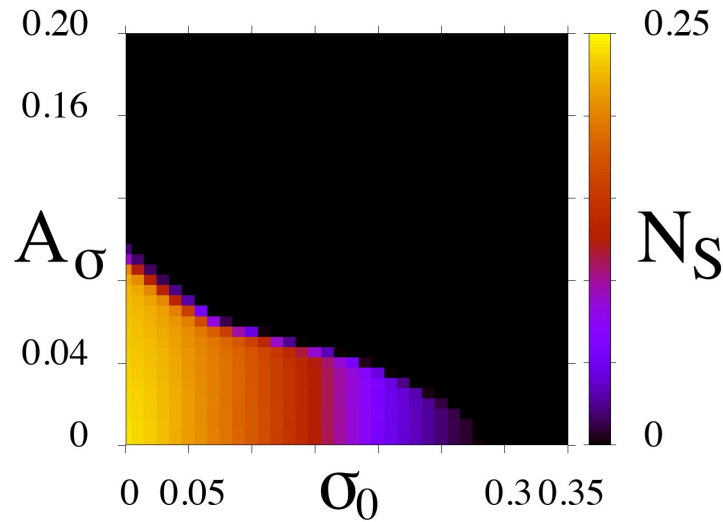


Рисунок 2.18. Изменения нормированного количества уединенных узлов в кольце нелокально связанных отображений Эно-Лози при изменении среднего значения коэффициента связи σ_0 и интенсивности A_σ шумовой модуляции коэффициента связи, задаваемой независимыми источниками шума с нормальным распределением. Расчеты проводились для 10 различных пар реализаций случайно распределенных начальных условий и реализаций шума ($M = 10$). Другие параметры: $\alpha_0 = 1.5$, $\beta = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $R = 320$, $N = 1000$

2.4.2 Случайное распределение значений силы связи по ансамблю

Кольцо нелокально связанных отображений Лози. При исследовании влияния неоднородного распределения силы связи по ансамблю нелокально связанных отображений Лози использовалось следующее выражение для коэффициентов связи $\sigma_i = \sigma_0 + D_\sigma \xi_i$, где ξ_i – случайные числа с равномерным распределением в интервале $[-1, 1]$, D_σ – интервал разброса значений коэффициентов связи относительно среднего значения σ_0 .

При случайном распределении силы связи σ_i весь интервал изменения среднего значения силы связи σ_0 можно разделить на две части, одна из которых соответствует слабой связи, $\sigma_0 \in [0, 0.12]$, а другая – сильной связи,

$\sigma_0 \in (0.12, 0.5]$. Двумерная диаграмма распределения C на плоскости параметров (σ_0, D_σ) (рис. 2.19,а) показывает, что в области слабой связи коэффициент взаимной корреляции C растет с увеличением отклонения D_σ . Это означает, что количество уединенных узлов уменьшается (рис. 2.19,б). В то же время, для сильной связи увеличение D_σ приводит к уменьшению коэффициента C (рис. 2.19,а) и, таким образом, в кольце нелокально связанных отображений Лози растет количество уединенных узлов (рис. 2.19,б). Как следует из диаграммы на рис. 2.19,а, область существования уединенных состояний расширяется (относительно σ_0) с ростом D_σ . Увеличение стандартного отклонения D_σ в диапазоне сильной связи ($\sigma_0 > 0.23$) вызывает переход динамики кольца отображений Лози из режима когерентности в режим уединенных состояний, при

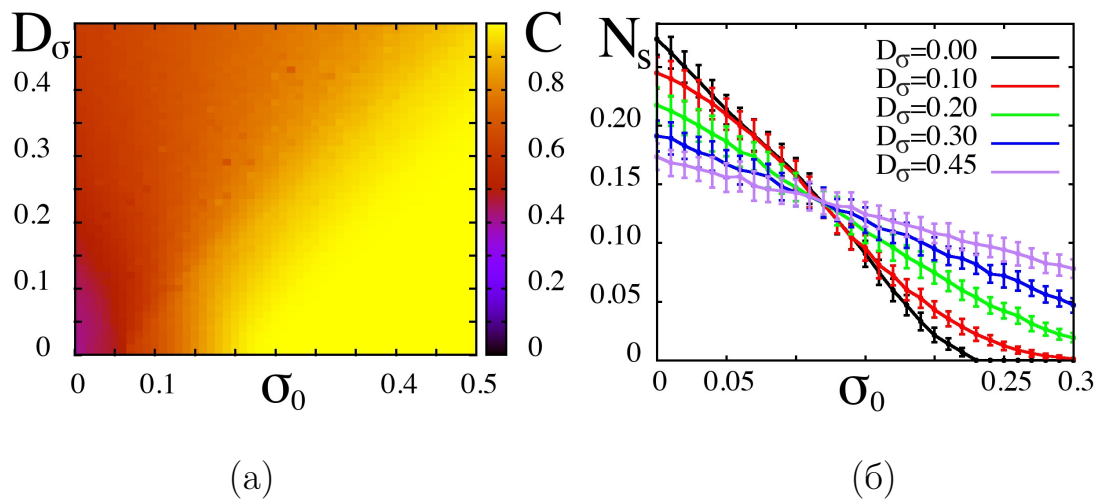


Рисунок 2.19. Влияние случайного распределения силы связи на режим уединенных состояний в кольце нелокально связанных отображений Лози. (а) Двумерная диаграмма распределения усредненных коэффициентов взаимной корреляции C на плоскости параметров (σ_0, D_σ) . (б) Зависимости нормированного количества уединенных узлов N_S от силы связи σ_0 для различных интенсивностей шума D_σ (см. легенду). Расчеты проводились для 50 различных пар реализаций случайно распределенных начальных условий и равномерного распределения шума ($M = 50$). Другие параметры: $\alpha_0 = 1.4$, $\beta = 0.3$, $R = 320$, $N = 1000$.

этом количество уединенных узлов постепенно увеличивается при увеличении D_σ . Более того, для достаточно широкого интервала распределения (например, $D_\sigma \geq 0.3$) ансамбль демонстрирует уединенные состояния во всем исследуемом диапазоне изменения силы связи σ_0 . Таким образом, введение неравномерного распределения силы связи достаточной ширины позволяет индуцировать и поддерживать режим уединенных состояний в кольце отображений Лози независимо от среднего значения σ_0 . Этот факт также подтверждается построенными зависимостями числа уединенных узлов от σ_0 , представленными на рис. 2.19,б для различных значений ширины D_σ . Видно, что, начиная с $D_\sigma \approx 0.3$, число уединенных узлов уменьшается с ростом σ_0 довольно медленно и никогда не обращается в нуль (см., например, синий и фиолетовый графики на рис. 2.19,б).

На рисунке 2.20 показаны изменения динамики кольца нелокально связанных отображений Лози в случае малого среднего значения силы связи σ_0 (рис. 2.20,а,б) и большого (рис. 2.20,в,г) для двух выбранных значений D_σ . В области слабой связи уменьшение числа уединенных узлов выражается в разреженности пространственного профиля при увеличении D_σ (рис. 2.20,а,б). При достаточно сильной связи увеличение интервала распределения D_σ приводит к появлению уединенных узлов на когерентном профиле (рис. 2.20,г). Однако при достаточно большом D_σ плато мгновенного профиля соответствует некогерентной динамике элементов ансамбля. Кроме того, появляются уединенные узлы, для которых характерна малая амплитуда (рис. 2.20,г) и которые выглядят как небольшие колебания относительно плато мгновенного профиля. Они едва видны на мгновенном распределении значений корреляции, так как имеют $C_{1i} \approx 0.985$.

Локализованное неоднородное распределение коэффициентов связи в кольце нелокально связанных отображений Лози. Проведенные исследования показали, что неоднородное распределение силы связи элементов внутри только одного кластера ансамбля, может привести к возникновению уединенных узлов в этом кластере. Рисунок 2.21 иллюстрирует динамику коль-

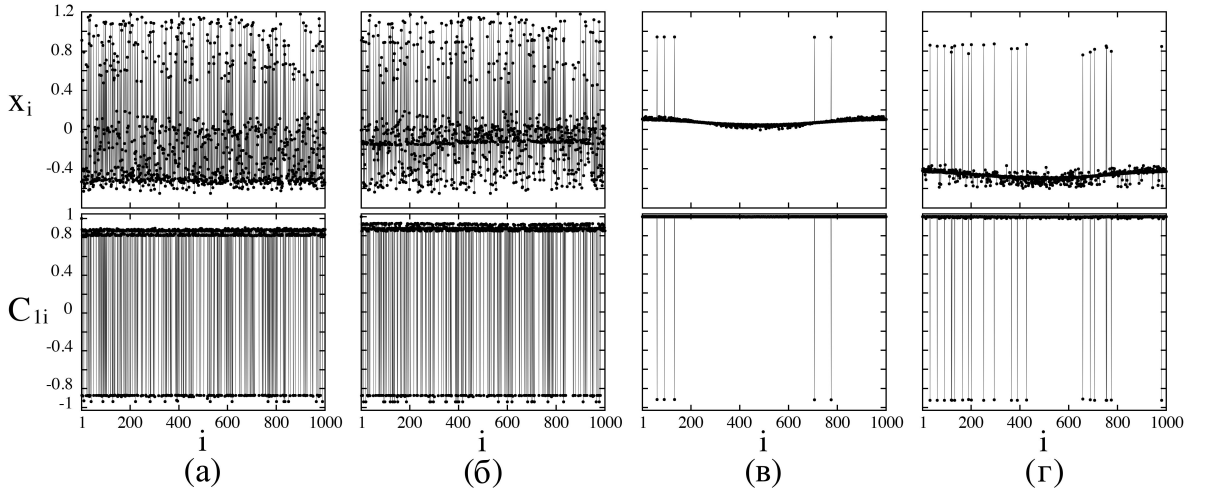


Рисунок 2.20. Динамика кольца нелокально связанных отображений Лози при случайном распределении силы связи между парциальными элементами: мгновенные профили динамических переменных x_i (верхний ряд) и пространственные распределения C_{1i} (нижний ряд) при малом $\sigma_0 = 0.03$ (а)-(б) и большом $\sigma_0 = 0.29$ (в)-(г) значениях средней силы связи и для двух значений стандартного отклонения неравномерного распределения силы связи: (а),(в) $D_\sigma = 0.11$, и (б),(г) $D_\sigma = 0.2$. Соответствующий усредненный по ансамблю коэффициент взаимной корреляции (2.1) и нормированное количество уединенных узлов (2.2): (а) $C = 0.542$, $N_S = 0.208$, (б) $C = 0.533$, $N_S = 0.193$, (в) $C = 0.99$, $N_S = 0.005$, (г) $C = 0.958$, $N_S = 0.021$. Другие параметры: $\alpha_0 = 1.4$, $\beta = 0.3$, $R = 320$, $N = 1000$.

ца отображений Лози в случае неоднородного распределения коэффициентов связи элементов из интервала $400 < i < 600$ ("локализованное неоднородное распределение"). Количество индуцированных уединенных узлов зависит от среднего значения σ_0 , ширина интервала распределения D_σ , размера локализованного неоднородного распределения и реализации случайно распределенных начальных условий. Чем больше D_σ и размер кластера, тем выше вероятность возникновения уединенных узлов. Чем больше σ_0 , тем меньше вероятность перехода осцилляторов в режим уединенных узлов. Мгновенный профиль и пространственное распределение C_{1i} , приведенные на рис. 2.21,а, относятся к слу-

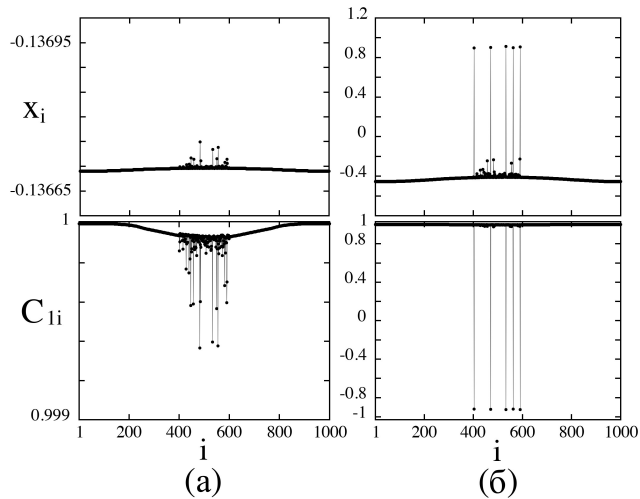


Рисунок 2.21. Динамика кольца нелокально связанных отображений Лози с неоднородным распределением коэффициентов связи σ_i для элементов в интервале $400 < i < 600$: мгновенные профили динамических переменных x_i (верхний ряд) и пространственные распределения C_{1i} (нижний ряд) при $D_\sigma = 0.155$ и двух различных значений σ_0 : (а) 0.30 и (б) 0.27.

Соответствующий усредненный по ансамблю коэффициент взаимной корреляции (2.1) и нормированное количество уединенных узлов (2.2): (а) $C \approx 1$, $N_S = 0$, (б) $C = 0.989$, $N_S = 0.005$. Другие параметры: $\alpha_0 = 1.4$, $\beta = 0.3$, $D_\alpha = 0$, $R = 320$, $N = 1000$.

чаю, когда среднего значения σ_0 недостаточно для возбуждения уединенных узлов внутри кластера с неоднородным распределением силы связи и малые отклонения от гладкого профиля обусловлены только шумовыми флуктуациями. Однако отметим, что некоторые наборы случайных начальных условий могут привести к появлению уединенных узлов и при такой интенсивности шума и силе связи. Рисунок 2.21,б соответствует параметрам, при которых могут индуцироваться уединенные узлы в ограниченном кластере элементов с неоднородным распределением силы связи. Отметим, что описанные выше переходы происходят при $\sigma_0 = 0.27$, а уединенные узлы в однородном кольце отображений Лози ($D_\sigma = 0$) наблюдаются только при $\sigma_0 < 0.23$.

Отметим, что исследования показали, что введение случайной неоднородности в управляющие параметры элементов α_i для определенного кластера элементов не приводит к появлению уединенных узлов в этом кластере. В этом случае наблюдались только структуры, подобные показанным на рисунке 2.21,а.

Кольцо нелокально связанных отображений Эно-Лози. Для исследования влияния неоднородного распределения силы связи на динамику кольца нелокально связанных отображений Эно-Лози использовались случайные числа ψ_i со стандартным нормальным распределением: $\sigma_i = \sigma_0 + A_\sigma \psi_i$.

Введение неоднородности по силе связи в кольцо нелокально связанных отображений Эно-Лози ведет к эффектам, подобным тем, что наблюдались в кольце нелокально связанных отображений Лози. На рисунке 2.22 представлено распределение нормированного числа уединенных узлов в зависимости от

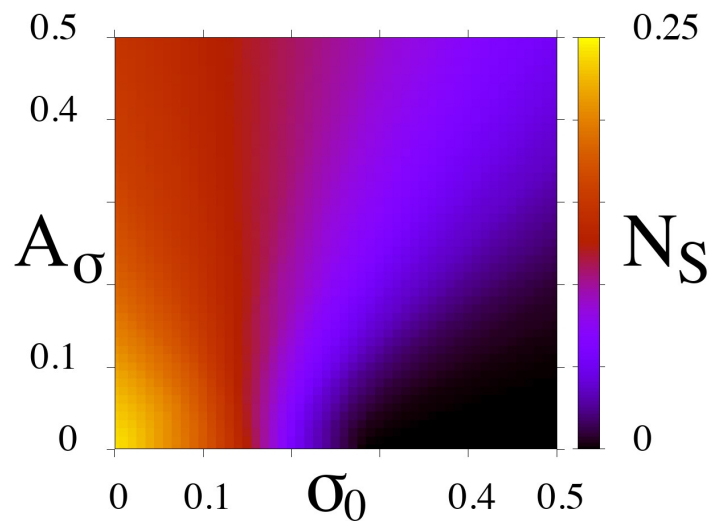


Рисунок 2.22. Изменение нормированного количество уединенных узлов в кольце нелокально связанных отображений Эно-Лози при неоднородном распределении коэффициентов связи σ_i на плоскости параметров (σ_0, A_σ) .

Расчеты проводились для 10 различных пар реализаций случайно распределенных начальных условий и реализаций шума ($M = 10$). Другие

параметры: $\alpha_0 = 1.5$, $\beta = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $R = 320$, $N = 1000$

среднего значения силы связи σ_0 и среднеквадратичного отклонения A_σ . Видно, что оно качественно совпадает с зависимостями построенными для кольца отображений Лози (рис. 2.19). Наблюдается уменьшение количества уединенных узлов в интервале слабой связи $\sigma_0 < 0.14$ при увеличении интервала неоднородного распределения D_σ , а в интервале сильной связи $\sigma_0 > 0.14$, наоборот, наблюдается увеличение количества уединенных узлов.

2.5 Выводы по второй главе

В настоящей главе представлены результаты численного анализа динамики ансамблей нелокально связанных нелинейных осцилляторов, которые описываются отображением Лози, отображением Эно-Лози и осциллятором ФитцХью-Нагумо, под воздействием внешних шумовых возмущений, которые вводились в систему аддитивным и мультипликативным способами, а также в условиях случайной неоднородности параметров. Значения управляющих параметров выбирались таким образом, чтобы в исследуемых ансамблях наблюдались уединенные состояния. На основании проведенных исследований можно сформулировать следующие основные выводы:

1. Воздействие независимых источников аддитивного шума с нормальным или равномерным распределением на ансамбли связанных нелинейных систем, которые без шума демонстрируют уединенные состояния, при увеличении интенсивности шума приводит к уменьшению интервала наблюдения уединенных состояний по силе связи между элементами. Вместе с этим, увеличение интенсивности шума ведет к уменьшению количества уединенных узлов в ансамбле преимущественно на границах интервала существования уединенных состояний по параметру силы связи.

2. Несмотря на то, что в большинстве рассмотренных случаев увеличение интенсивности шума приводило к уменьшению вероятности возникновения режима уединенных состояний, а также к уменьшению количества уединенных узлов, в некоторых случаях аддитивный шум может индуцировать появление таких состояний. Так в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо в интервале слабой связи введение аддитивного шума способствовало появлению уединенных состояний при силе связи на примерно 0.04 больше, чем максимальная сила связи, при которой наблюдались уединенные узлы в ансамбле без шума.
3. При шумовой модуляции управляющих параметров (параметра локальной динамики парциальных элементов или силы связи) ансамблей нелокально связанных нелинейных осцилляторов наблюдаются эффекты, подобные тем, которые имели место при аддитивном шумовом воздействии. Шумовая модуляция управляющих параметров приводит к подавлению уединенных узлов и уменьшению интервала наблюдения уединенных состояний по параметру среднего значения силы связи.
4. Случайное распределение силы связи или параметров локальной динамики парциальных элементов может привести к увеличению интервала наблюдения уединенных состояний и их количества. Однако, это лучше видно для случая неоднородного распределения силы связи, так как неоднородность по управляющим параметрам парциальных элементов при увеличении дисперсии распределения ведет к уходу траекторий на бесконечность, предельная ширина разброса зависит от собственно динамики парциальных элементов, а также от статистики неоднородного распределения (нормальное или равномерное). Локализованное неоднородное распределение коэффициентов связи между элементами в конечном кластере ансамбля может индуцировать возникновение уединенных узлов в этой области.

Глава 3. Взаимодействие химерных и уединенных состояний в неоднородных многослойных ансамблях. Эффекты синхронизации.

3.1 Введение

Синхронизация в сетях связанных осцилляторов представляет собой одно из важнейших явлений самоорганизации и наблюдается в природных, социальных и технологических системах [6, 9, 83, 145, 159–162]. Эффекты синхронизации имеют место как в автоколебательных системах (синхронизация предельного цикла [163, 164], синхронизация хаоса [145, 165, 166]), так и в сложных ансамблях применительно к пространственно-временным структурам [6, 9, 83, 162].

В последнее время особое внимание уделяется коллективной динамике и эффектам синхронизации в многослойных сетях, слои которых могут демонстрировать различные пространственно-временные структуры [167–169]. Взаимодействие между ансамблями (слоями) в многослойных сетях может приводить к разным типам синхронизации сложных пространственно-временных структур (в том числе химерных и уединенных состояний): кластерная синхронизация [101, 102], полная синхронизация [100], обобщенная синхронизация [170], фазовая синхронизация [171], вынужденная и взаимная синхронизации [103, 104, 115], взрывная синхронизация [105–107] и др. Несмотря на то, что довольно много работ посвящено исследованиям эффектов синхронизации в различных сетях, с различным типом парциальных элементов и различной топологией внутрислойной и межслойной связей [106, 108, 110, 172, 173], мало

внимания уделено особенностям синхронизации во взаимодействующих системах при наличии в них неоднородностей различного типа.

В третьей главе диссертационной работы приводятся результаты численного исследования взаимодействия сложных пространственно-временных структур в двух- и трехслойных ансамблях. При этом исследуется влияние структур в слоях (которыми можно управлять с помощью параметров отдельных слоев или начальных условий динамических переменных) и характера межслойной связи (межслойная связь через разные переменные, в присутствии и отсутствие шумовой модуляции межслойной связи, разреженная или полная межслойная связь) на степень синхронизации слоев и возможность установления в них различных структур. Определяются параметры межслойной связи, которые способствуют реализации эффективной, полной или удаленной синхронизации. Для оценки степени синхронизации используются локальная и глобальная ошибки межслойной синхронизации, что позволяет обнаруживать и оценивать не только полную синхронизацию, но и кластерную.

Результаты исследований, изложенные в третьей главе, опубликованы в работах [114, 115, 118–120, 127].

3.2 Взаимодействие химерных и уединенных состояний в двухслойной сети нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо

Данный раздел посвящен результатам исследований пространственно-временной динамики и синхронизации неоднородной двухслойной сети, в которой каждый слой представляет собой кольцо нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо в колебательном режиме (1.13). Такая сеть описывается

следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{du_{1i}}{dt} &= u_{1i} - \frac{u_{1i}^3}{3} - v_{1i} + \frac{\sigma_1}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [b_{uu}(u_{1j} - u_{1i}) + b_{uv}(v_{1j} - v_{1i})] + & (3.1) \\
&+ k_{12}^u (u_{2i} - u_{1i}), \\
\frac{dv_{1i}}{dt} &= u_{1i} + a + \frac{\sigma_1}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [b_{vu}(u_{1j} - u_{1i}) + b_{vv}(v_{1j} - v_{1i})] + \\
&+ k_{12}^v (v_{2i} - v_{1i}), \\
\varepsilon \frac{du_{2i}}{dt} &= u_{2i} - \frac{u_{2i}^3}{3} - v_{2i} + \frac{\sigma_2}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [b_{uu}(u_{2j} - u_{2i}) + b_{uv}(v_{2j} - v_{2i})] + \\
&+ k_{21}^u (u_{1i} - u_{2i}), \\
\frac{dv_{2i}}{dt} &= u_{2i} + a + \frac{\sigma_2}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [b_{vu}(u_{2j} - u_{2i}) + b_{vv}(v_{2j} - v_{2i})] + \\
&+ k_{21}^v (v_{1i} - v_{2i}).
\end{aligned}$$

где u_{1i} , v_{1i} – динамические переменные первого слоя, а u_{2i} , v_{2i} – второго. Сами слои (кольца) описываются теми же уравнениями, что были исследованы в данной работе ранее в главах 1 и 2 (1.13). Межслойная связь задается последними слагаемыми во всех четырех уравнениях, где k_{12}^u , k_{12}^v – сила связи первого кольца со вторым, а k_{21}^u , k_{21}^v – второго с первым. Верхние индексы u и v в коэффициентах силы межслойной связи обозначают переменную, по которой вводится межслойная связь: через быструю переменную k_{12}^u , k_{21}^u или через медленную переменную k_{12}^v , k_{21}^v).

Как было показано ранее в разделе 1.3.2, кольцо нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо способно демонстрировать химерные состояния, уединенные состояния, комбинированные структуры (сосуществование химерных и уединенных состояний) в зависимости от управляющих параметров. При исследовании динамики двухслойной сети связанных колец ФитцХью-Нагумо значения управляющих параметров выбирались таким образом, чтобы в кольцах в отсутствие связи устанавливались различные пространственно-временные структуры.

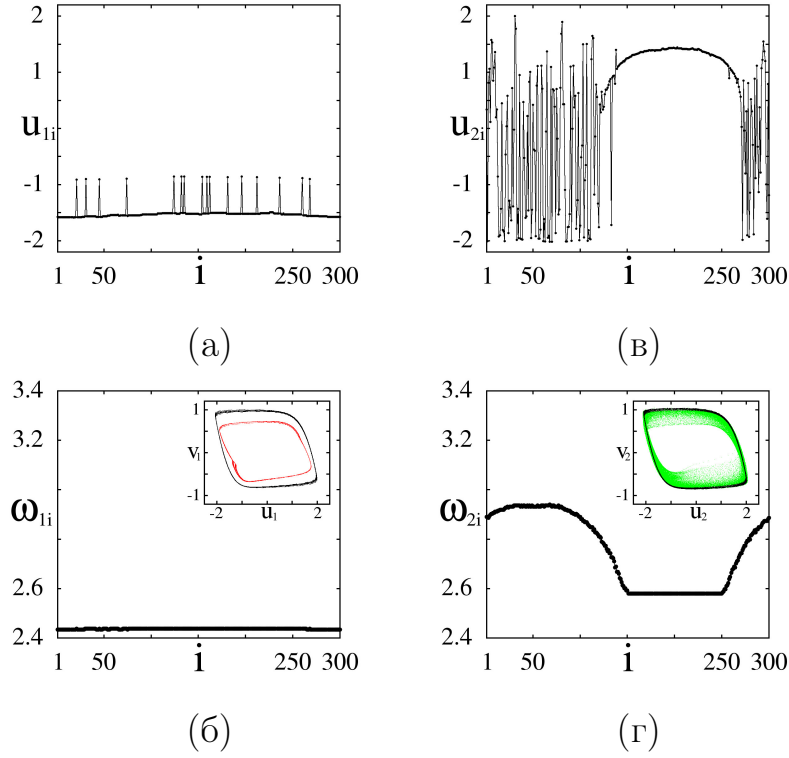


Рисунок 3.1. Динамика изолированных колец ($k_{12}^u = k_{21}^u = 0$, $k_{12}^v = k_{21}^v = 0$) нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо: уединенное состояние в первом кольце (а)-(б), химерное состояние во втором кольце (в)-(г). Мгновенные профили переменных u_{1i} и u_{2i} (а),(в), профиль средних фазовых скоростей (ω_{1i} , ω_{2i}) и проекция многомерного аттрактора (вставки (u_1, v_1) и (u_2, v_2)) (б),(г). Черное множество на (u_1, v_1) и (u_2, v_2) соответствует элементам из когерентной области, красное – уединенным узлам, зеленое – элементам из некогерентного кластера химеры. Параметры: $\varepsilon = 0.05$, $a = 0.5$, $\sigma_1 = 0.3$, $\sigma_2 = 0.3$, $\phi_1 = 1.37$, $\phi_2 = 1.53$, $R = 105$, $N = 300$.

В данном разделе в качестве начальных структур выбираются химерные и уединенные состояния, которые реализуются при следующих фиксированных значениях управляющих параметров: $\varepsilon = 0.05$, $a = 0.5$, $\sigma_1 = 0.3$, $\sigma_2 = 0.3$, $\phi_1 = 1.37$, $\phi_2 = 1.53$, $R = 105$, $N = 300$. На рисунке 3.1 представлены типичные мгновенные профили, профили распределения средних фазовых скоростей (1.15) и проекций многомерных аттракторов для режима уединенных состояний в первом слое (рис. 3.1,а-б) и химерного состояния во втором слое (рис. 3.1,в-г)

в отсутствие связи между слоями. Уединенные состояния характеризуются наличием гладкого профиля средних фазовых скоростей (рис. 3.1,б) и наличием двух множеств в фазовом пространстве: черное множество соответствует динамике элементов из когерентной области, красное — уединенных узлов (вставки на рис. 3.1,б). На рисунке 3.1,в приведен мгновенный профиль для второго слоя u_{2i} , который соответствует химерному состоянию (когерентный кластер $150 \leq i \leq 250$, некогерентный кластер $1 \leq i \leq 149$ и $251 \leq i \leq 300$). В этом случае на профиле средней фазовой скорости наблюдается дугообразная зависимость (рис. 3.1,г). На фазовой плоскости (u_2, v_2) существует два пересекающихся множества (вставки на рис. 3.1,г): зеленый аттрактор соответствует элементам из некогерентного кластера химеры, а черный — элементам из когерентной области. Как видно из проекции многомерного аттрактора, зеленое притягивающее множество существенно шире по сравнению с предельным циклом в одиночном осцилляторе ФитцХью-Нагумо [153, 154].

Для оценки степени синхронизации пространственно-временных режимов, устанавливающихся в разных слоях под действием межслойной связи, были использованы две меры степени синхронизации между слоями. Во-первых, стандартное отклонение с усреднением по времени для соответствующих i -х пар элементов слоев:

$$\delta_i = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (u_{1i} - u_{2i})^2 dt. \quad (3.2)$$

При этом отбрасывается время установления, равное $t_1 = 2000$ безразмерных единиц времени, и интеграл берется по $t_2 = 3000$. Мера (3.2) также называют локальной ошибкой межслойной синхронизации, которая позволяет анализировать режимы частичной синхронизации между слоями. При этом $\delta_i = 0$ для синхронизированных пар осцилляторов, и $\delta_i \neq 0$ для остальных.

Для анализа поведения сети (3.1) в целом и количественной оценки степени синхронизации используется мера синхронизации с усреднением как по времени, так и по элементам сети, представляющая собой глобальную ошибку

межслойной синхронизации:

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (u_{1i} - u_{2i})^2 dt \right), \quad (3.3)$$

Если слои в сети (3.1) полностью синхронизированы, то $\delta = 0$. Однако, хорошо известно, что полная синхронизация может наблюдаться только в системе идентичных элементов/слоев. В связи с тем, что исследуются неидентичные слои, то вводится понятие эффективной синхронизации при $0.001 < \delta_i < 0.01$ и $0.0001 < \delta < 0.001$, а при $\delta_i < 0.001$ и $\delta < 0.0001$ можно говорить о (относительно) полной межслойной синхронизации.

3.2.1 Синхронизация двухслойной сети осцилляторов ФитцХью-Нагумо при взаимной межслойной связи

В связи с тем, что в системе (3.1) межслойная связь может быть введена как через быстрые (u), так и через медленные (v) переменные, синхронизация между двумя кольцами осцилляторов ФитцХью-Нагумо исследуется при связи как только через u , так и только через v .

Межслойная связь через быстрые переменные. Рассмотрим динамику системы (3.1) в случае связи между слоями только через быстрые переменные u_{1i} и u_{2i} , то есть $k_{12}^u = k_{21}^u = k^u \neq 0$, а $k_{12}^v = k_{21}^v = k^v = 0$. Управляющие параметры каждого слоя зафиксированы и соответствуют рисунку 3.1. Динамика системы (3.1) проиллюстрирована на рисунке 3.2 для четырех возрастающих значений силы межслойной связи σ^u . На рисунке 3.3 показаны результаты расчета глобальной ошибки межслойной синхронизации δ (3.3) при увеличении k^u .

При слабой межслойной связи, $k^u < 0.04$ (рис. 3.2, I, а-д), слои демонстрируют динамику почти идентичную той, что наблюдается в несвязанных систе-

мах (рис. 3.1). На рисунке 3.2, I, д представлена зависимость локальной ошибки синхронизации между всеми парами связанных элементов, которая является высокой для рассматриваемой сети ($\delta_i > 3$), что свидетельствует об отсутствии синхронизации между слоями. При увеличении силы межслойной связи k^u уединенные состояния в первом слое исчезают и заменяются химерными состояниями с двумя некогерентными кластерами (рис. 3.2, II, а-д). В этом случае только при относительно большой силе межслойной связи профиль средней фазовой скорости начинает демонстрировать два дугообразных распределения (рис. 3.2, II, в). Принимая во внимание пространственное распределение значений δ_i , показанное на рисунке 3.2, II, д, можно сделать вывод, что в системе реализуется режим кластерной синхронизации. Как видно, $\delta_i < 0.02$ для когерентных кластеров ($1 \leq i \leq 170$, $214 \leq i \leq 254$) и намного больше для некогерентных ($171 \leq i \leq 213$, $255 \leq i \leq 300$). При этом глобальная ошибка межслойной синхронизации δ (3.3) не опускается ниже 0.028, что наблюдается в диапазоне $k^u \in [0.006, 0.062]$ (рис. 3.3) и не соответствует заданному уровню эффективной синхронизации ($\delta < 0.01$). Например, для случая, проиллюстрированного на рисунке 3.2, II, имеем $\delta = 0.049$.

При $k^u > 0.062$ в обоих кольцах устанавливается когерентный режим (рис. 3.2, III, а-д), при этом в системе наблюдается полная синхронизация периодических колебаний, что подтверждается пространственным распределением локальной ошибки межслойной синхронизации, которая обращается в нуль для всех пар элементов (рис. 3.2, III, д). На рисунке 3.3 можно видеть, что эффект полной синхронизации наблюдается в диапазоне сил межслойной связи $k^u \in [0.062, 0.13]$, для которых $\delta < 0.0001$. Однако, дальнейшее увеличение силы межслойной связи может привести не только к увеличению степени синхронизации, но и к появлению на профилях колец уединенных узлов (рис. 3.2, IV, а, б), что связано с возникновением бистабильности в системе, т.е. сосуществованием двух предельных множеств (см. вставки на рис. 3.2, IV, в, г). Цикл, изображенный на рисунке черным цветом, соответствует когерентной динамике, а крас-

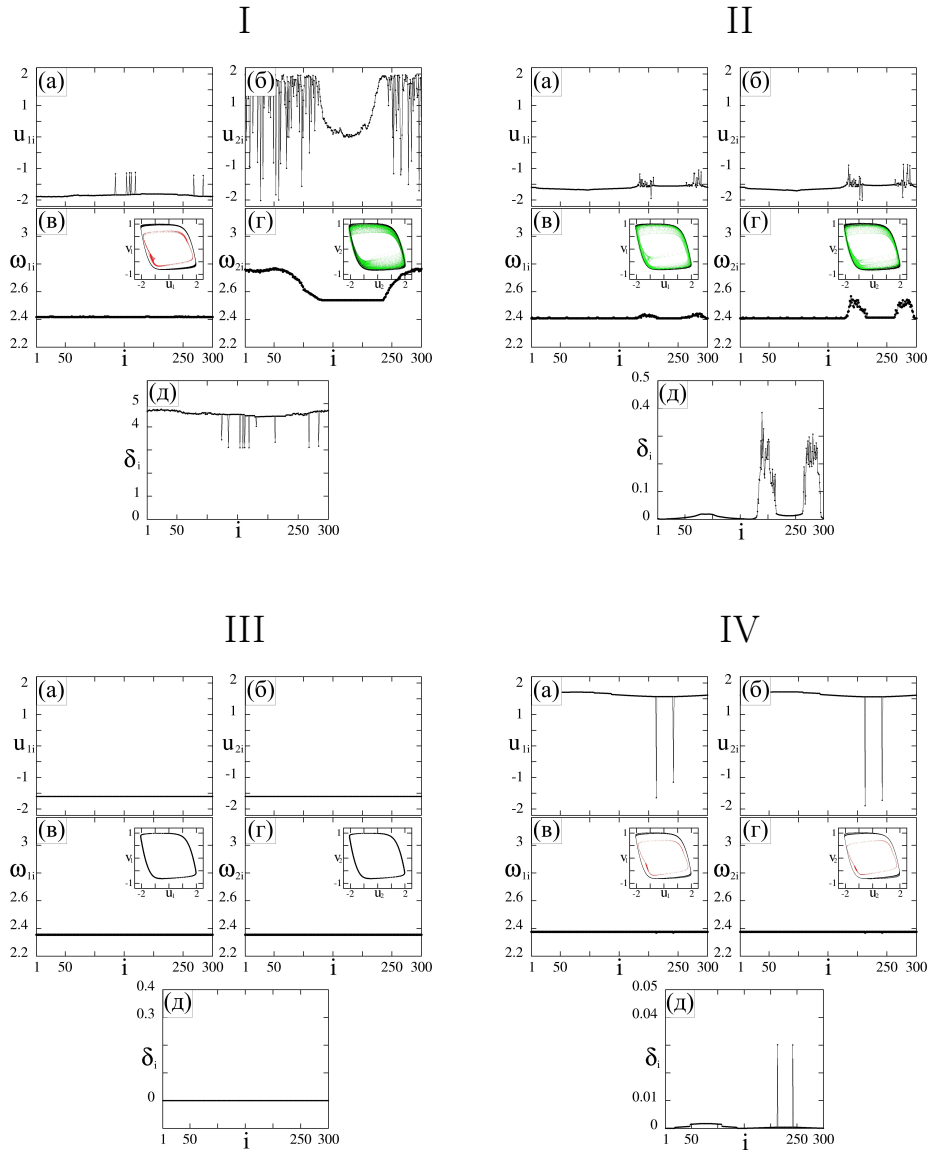


Рисунок 3.2. Динамика системы (3.1) при увеличении силы межслойной связи k^u : 0.003 (фрагмент I), 0.054 (фрагмент II), 0.091 (фрагмент III) и 0.187 (фрагмент IV). Мгновенные профили переменных (а) u_{1i} и (б) u_{2i} , профили средней фазовой скорости (в) ω_{1i} и (г) ω_{2i} и проекции многомерных аттракторов (вставки (u_{1i}, v_{1i}) и (u_{2i}, v_{2i}) , соответственно): черные кривые – элементы из когерентных областей, красные – уединенные узлы, зеленые – элементы из некогерентных кластеров химеры, (д) распределение локальной ошибки межслойной синхронизации δ_i (3.2). Другие параметры: $\varepsilon = 0.05$, $a = 0.5$, $\sigma_1 = 0.3$, $\sigma_2 = 0.3$, $\phi_1 = 1.37$, $\phi_2 = 1.53$, $R = 105$, $k^v = 0$, $N = 300$.

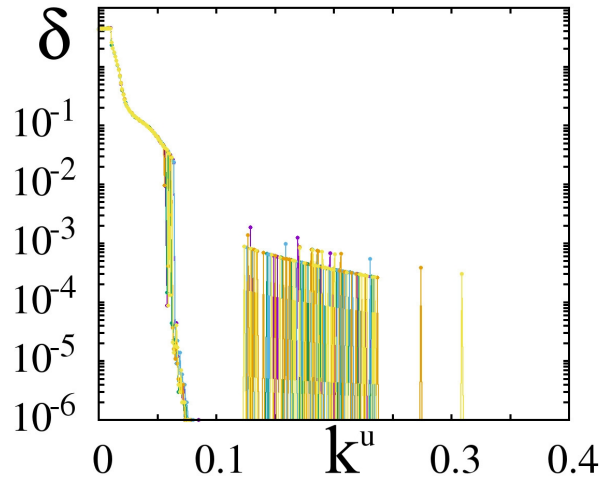


Рисунок 3.3. Зависимость глобальной ошибки межслойной синхронизации δ (3.3) от силы межслойной связи k^u , построенная для 5 различных наборов случайных начальных условий элементов из каждого кольца (отмечены различными цветами). Ось ординат показана в логарифмическом масштабе.

Остальные параметры такие же, как на рисунке 3.2.

ный — уединенным узлам. Кроме того, пространственные распределения средних фазовых скоростей почти гладкие, что является явным признаком отсутствия химер в кольцах (рис. 3.2,IV,в,г). Как следует из рис. 3.2,IV,д, в системе наблюдается режим кластерной синхронизации. В этом случае $\delta_i > 0.03$ только для уединенных узлов, а для остальных элементов $0.000002 < \delta_i < 0.0018$ (рис. 3.2,IV,д). В то же время, если рассматривать систему в целом, можно говорить об эффективной синхронизации колец: для режима уединенных состояний, который наблюдается в интервале $k^u \in [0.13, 0.32]$ глобальная ошибка межслойной синхронизации $\delta < 0.0015$, что удовлетворяет условию эффективной синхронизации (рис. 3.3).

При дальнейшем увеличении межслойной связи $k^u > 0.32$ изучаемая система (3.1) снова переходит в режим полной синхронизации: $\delta(k^u) \approx 0$ для пяти различных реализаций случайных начальных условий (рис. 3.3).

Межслойная связь через медленные переменные. Перейдем к случаю, когда кольца ФитцХью-Нагумо взаимно связаны через медленные пере-

менные v_{1i} и v_{2i} , т. е. $k_{12}^u = k_{21}^u = k^u = 0$, а $k_{12}^v = k_{21}^v = k^v \neq 0$ (ур. (3.1)). Значения управляющих параметров колец выбраны такими же, как в предыдущем разделе.

Исследования показывают, что при увеличении силы межслойной связи динамика колец частично повторяет ту, которая наблюдается при связи колец через быстрые переменные. При введении слабой межслойной связи уединенные состояния в первом кольце постепенно исчезают, а химеры во втором кольце остаются неизменными. По мере увеличения силы межслойной связи, $k^v > 0.06$, во втором кольце начинают наблюдаться уединенные состояния с равномерным распределением уединенных узлов. В то же время количество уединенных узлов в первом кольце продолжает уменьшаться с увеличением силы межслойной связи. В интервале $k^v \in [0.110, 0.135]$ уединенные узлы полностью исчезают в первом кольце, а во втором они концентрируются в пределах одного кластера, т.е. устанавливается химера уединенных состояний [116, 117]. При этом на проекции многомерного аттрактора второго кольца можно выделить два множества: одно соответствует когерентной динамике, а другое – уединенным узлам. Этот факт свидетельствует о бистабильности и тем самым подтверждает наличие уединенных состояний во втором слое, как в случае их равномерного распределения, так и химеры уединенных состояний. В то же время профиль средней фазовой скорости плоский, что соответствует отсутствию химер, и подтверждает наличие в системе уединенных состояний. При дальнейшем увеличении силы межслойной связи уединенные состояния исчезают, и в обоих кольцах устанавливаются химерные состояния. Эффективная частичная синхронизация начинает наблюдаться в системе только тогда, когда в обоих слоях появляются химеры: $\delta_i < 0.01$ для когерентной области, но превышает это значение в некогерентной области. При $k^v > 0.145$ динамика колец становится когерентной и напоминает ту, что наблюдается при связи слоев через быстрые переменные (см. рис. 3.2, III).

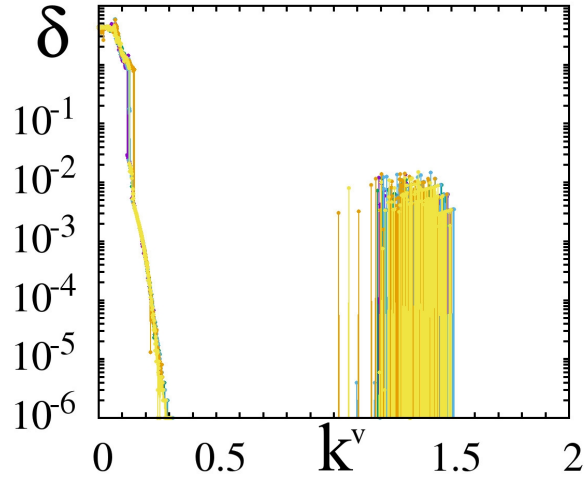


Рисунок 3.4. Зависимость глобальной ошибки межслойной синхронизации δ (3.3) от силы межслойной связи k^v , построенная для 5 различных наборов случайных начальных условий элементов из каждого кольца (отмечены различными цветами). Ось ординат показана в логарифмическом масштабе. Другие параметры: $\varepsilon = 0.05$, $a = 0.5$, $\sigma_1 = 0.3$, $\sigma_2 = 0.3$, $\phi_1 = 1.37$, $\phi_2 = 1.53$, $R = 105$, $k^u = 0$, $N = 300$.

Зависимость δ (3.3) от k^v , характеризующая общую динамику двухслойной сети (3.1), показывает, что до $k^v \approx 0.145$ в системе не наблюдается синхронизация $\delta > 0.1$ (рис. 3.4). При этом в диапазоне $0 < k^v < 0.135$ значение ошибки синхронизации велико $\delta > 1$, а после происходит резкое снижение до уровня $\delta \approx 0.02$. Начиная со значения $k^v \approx 0.186$, глобальная ошибка синхронизации лежит в интервале эффективной синхронизации $0.0001 < \delta < 0.001$. При $k^v \in [0.225, 1.0]$ связанные кольца осциллятора ФитцХью-Нагумо полностью синхронизированы ($\delta < 0.0001$) и демонстрируют когерентные профили.

Как видно из рисунка 3.4, полная синхронизация нарушается при $k^v \in [1.0, 1.55]$. Имеются всплески значений δ , которые превышают критерий синхронизации. В этом случае в обоих ансамблях наблюдаются уединенные состояния. Эта ситуация аналогична наблюдаемой при связи колец через быстрые переменные (см. рис. 3.3, $k^u \in [0.13, 0.24]$). В этом случае профили колец, свя-

занных через медленные переменные, аналогичны тем, что представлены на рисунке 3.2,IV,а,б.

Была также исследована динамика двухслойной системы взаимно связанных колец ФитцХью-Нагумо **при различных структурах и параметрах в связанных кольцах**: уединенные состояния в интервале слабой силы связи; уединенные состояния при управляющих параметрах, близких к существованию химер; режимы сосуществования химер и уединенных состояний в кольцах. Исследования показали, что во всех случаях возможна полная или эффективная синхронизация структур. Более подробно с результатами можно ознакомиться в работе [120].

Исследования **влияния неоднородного распределения силы межслойной связи** в системе взаимно связанных колец ФитцХью-Нагумо показали, что увеличение неоднородности (интервала разброса силы межслойной связи) приводит к сдвигу значений параметра связи, соответствующих полной синхронизации когерентных режимов в кольцах, в область более сильной силы связи. Кроме того, в условиях неоднородной межслойной связи уединенные состояния в слоях возникают также при больших значениях силы связи. Причем наблюдается почти линейная зависимость сдвига по параметру связи от степени неоднородности распределения силы связи.

3.2.2 Синхронизация двухслойной сети осцилляторов ФитцХью-Нагумо при однонаправленной межслойной СВЯЗИ

Данный раздел посвящен исследованию системы двух однонаправленно связанных колец нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо. Управляющие параметры и начальные условия соответствуют рисунку 3.1. Как

и для случая взаимной связи, исследовалась связь между кольцами через быстрые и через медленные переменные. Приведены только основные результаты, более подробно динамика такой системы описана в работе [127].

Однонаправленная связь через быстрые переменные

Воздействие уединенных состояний на химеру. Была исследована возможность подавления химеры во втором кольце и установления в нем уединенных состояний под влиянием первого кольца, которое демонстрирует уединенные состояния. При достаточно слабой связи химерное состояние во втором кольце полностью подавляется и сменяется режимом уединенных состояний, однако силы связи недостаточно, чтобы установилась синхронизация между кольцами. Начиная с $k_{21}^u > 0.33$, уединенные узлы во втором кольце постепенно синхронизируются с уединенными узлами первого кольца. С другой стороны, уже начиная с $k_{21}^u > [0.15, 0.28]$ (точное значение зависит от начальных условий), глобальная ошибка межслойной синхронизации становится меньше 0.01 и можно говорить об эффективной синхронизации. И только при $k_{21}^u > 0.67$ в системе устанавливается полная вынужденная синхронизация ($\delta < 0.001$) в режиме уединенных состояний.

Воздействие химеры на уединенные состояния. Когда управляющим является второе кольцо, демонстрирующее химеру, глобальная ошибка синхронизации δ плавно уменьшается с увеличением силы межслойной связи k_{12}^u . Это можно объяснить тем, что нет необходимости синхронизировать отдельные элементы (уединенные узлы), которые вносят отклонения в зависимость $\delta(k_{12}^u)$. В этом случае уединенные состояния в первом кольце быстро исчезают, а мгновенный профиль разделяется на когерентные и некогерентные кластеры. Однако дугообразная зависимость на профиле средних фазовых скоростей проявляется только при больших значениях $k_{12}^u > 0.35$. В отличие от ранее рассмотренного случая, в этой ситуации глобальная ошибка межслойной синхронизации не опускается ниже уровня 0.001 даже при достаточно сильной

однонаправленной межслойной связи. Это означает, что имеет место только эффективная вынужденная синхронизация химерных состояний.

Однонаправленная связь через медленные переменные

Воздействие уединенных состояний на химеру. В этом случае химерные состояния также быстро исчезают и заменяются уединенными состояниями, как и для случая связи через быстрые переменные. Однако уединенные узлы распределены по всему второму кольцу и их расположение не совпадает с расположением узлов в управляющем (первом) кольце. При увеличении межслойной связи большая часть уединенных узлов исчезает, но оставшиеся узлы не синхронизируются с узлами в первом кольце. Дальнейшее увеличение $k_{21}^v > 0.3$ не приводит к наблюдению более синхронного режима колебаний второго кольца с первым, а, наоборот, приводит к тому, что проекция аттрактора элементов второго кольца сильно меняется, и кольца никогда не синхронизируются (смотрите в работе [127]). В интервале $k_{21}^v \in [0, 0.2]$ зависимость $\delta(k_{21}^v)$ демонстрирует несколько минимумов и максимумов значений δ , которые соответствуют сначала разрушению химерной структуры и установлению уединенных узлов, а потом синхронизации этих уединенных узлов с управляемым кольцом. Отметим, что даже при достаточно высокой силе связи в системе не наблюдается даже эффективной вынужденной эффективной синхронизации, поскольку $\delta > 0.01$.

В случае **воздействия химеры на уединенные состояния** динамика сети аналогична той, которая наблюдается при однонаправленной связи через быстрые переменные. Уединенные узлы в первом кольце постепенно исчезают по мере увеличения силы связи k_{12}^v , а мгновенные профили первого кольца разделяются на когерентные и некогерентные кластеры, что соответствует установлению в системе химеры. Однако даже при сильной связи, при наличии хорошо развитого химерного состояния в первом слое, профиль средней фазовой скорости демонстрирует лишь едва заметную дугообразную зависимость. Синхронизация между кольцами не достигается даже при очень сильной межслойной

связи: глобальная ошибка межслойной синхронизации никогда не опускается ниже 0.1.

3.3 Эффекты синхронизации в двухслойной сети колец нелокально связанных отображений при шумовой межслойной связи

В данном разделе приведены результаты исследования динамики двухслойной сети, в которой каждый слой представляет собой ансамбль (кольцо) нелокально связанных одномерных отображений. Рассматриваемая сеть описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_{1i}(n+1) = & F(x_{1i}(n)) + \frac{\sigma_1}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [F(x_{1j}(n)) - F(x_{1i}(n))] + \\ & + k(y_i)[F(x_{2i}(n)) - F(x_{1i}(n))], \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} x_{2i}(n+1) = & F(x_{2i}(n)) + \frac{\sigma_2}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [F(x_{2j}(n)) - F(x_{2i}(n))] + \\ & + k(y_i)[F(x_{1i}(n)) - F(x_{2i}(n))], \end{aligned}$$

$$y_i(n+1) = (1 - \gamma)y_i(n) + \sqrt{2\gamma}\xi_i(n),$$

где индекс $i = 1, \dots, N = 1000$ – номер элемента, переменные $x_{mi}(n)$, $m = 1, 2$, определяют состояние i -го элемента m -го кольца в каждый дискретный момент времени n . Функция $F(x_{mi}(n))$ определяет локальную динамику элементов в слоях и задается одномерным кубическим отображением (1.4). Управляющий параметр α идентичен для всех элементов $\alpha = 2.4$, что соответствует бистабильному режиму с двумя сосуществующими предельными циклами периода 4 в отдельном отображении. Связи внутри каждого слоя регулируются внутри-

слоино силой связи σ_m , $m = 1, 2$, и радиусом связи R . Радиус внутрислойной связи предполагается одинаковым для обоих слоев и фиксируется $R = 100$, тогда как σ_m может быть разной. Было рассмотрено два случая: идентичные слои $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.42$ и неидентичные – $\sigma_1 = 0.42$ и $\sigma_2 = 0.2$.

Межслойная связь между i -ми элементами двух слоев контролируется силой межслойной связи $k(y_i)$, которая определяется следующим уравнением:

$$k(y_i) = D\sqrt{1 - \gamma/2} y_i. \quad (3.5)$$

В проведенном исследовании межслойная связь является чисто случайной и определяется независимыми источниками нормального цветного шума с дискретным временем $y_i(n)$. Все источники цветного шума $y_i(n)$ задаются линейными уравнениями (см. третье уравнение системы (3.4)), содержащими независимые источники дискретного белого шума ξ_i со стандартным гауссовым распределением (среднее значение равно нулю, а дисперсия равна 1). Таким образом, сила межслойной связи (3.5) может менять знак, т.е. в некоторые моменты времени связь для каждой пары элементов может быть как притягивающей, так и отталкивающей. Параметр γ , одинаковый для всей сети определяет ширину спектра и время корреляции цветных источников шума.

Оценка степени синхронизации. Как и в предыдущем разделе, здесь также используется глобальная ошибка межслойной синхронизации, которая для системы с дискретным временем определяется следующим образом:

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{n_{it}} \sum_{n=1}^{n_{it}} (x_{2i}(n) - x_{1i}(n))^2 \right), \quad (3.6)$$

где n_{it} – число итераций, на котором производится усреднение. После времени переходного процесса величина δ характеризует отклонение пространственно-временных колебаний взаимодействующих слоев от полной синхронизации, для которой в данном разделе принято $\delta < \delta_{\max} = 10^{-6}$.

3.3.1 Синхронизация идентичных по управляющим параметрам слоев

Начальные условия, случайно распределенные в интервале $[-1.5, 1.5]$, могут приводить к установлению в кольце нелокально связанных кубических отображений различных пространственно-временных структур. В связи с этим была проанализирована динамика двухслойной сети при различных начальных условиях динамических переменных в каждом слое, но при одинаковой силе внутрислойной связи $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.42$.

Синхронизация колец при близком расположении когерентных и некогерентных кластеров в пространстве. В данном разделе начальные условия для колец выбираются таким образом, чтобы в отсутствие связи между слоями, в них наблюдались химерные состояния с близким пространственным распределением когерентных и некогерентных кластеров (рис.3.5,а,б). В таком случае элементы $i = 200$ колеблются синфазно с периодом 2, но в разных «ямах» (рис.3.5,б), так как когерентные и некогерентные кластеры двух слоев сдвинуты друг относительно друга на некоторое расстояние (рис.3.5,а). При введении в систему случайной межслойной связи существуют значения параметров генератора шума, при которых возможно наблюдение синхронизации пространственно-временной динамики слоев, что показано на рисунке 3.5,в,г.

На рисунке 3.6 приведены мгновенные профили двух взаимодействующих слоев и временные реализации для 200-х элементов обоих слоев при увеличении интенсивности шума D для двух случаев шума: низкочастотного шума $\gamma = 0.0001$ (группа I) и белого шума $\gamma = 1.0$ (фрагмент II). В случае межслойной связи, сила которой задается низкочастотным цветным шумом ($\gamma = 0.0001$), при слабой интенсивности шума структуры в двух слоях сближаются (рис. 3.6I,а). При этом кластеры некогерентности сохраняются. Дальнейшее увеличение интенсивности шума D приводит к тому, что кластеры неко-

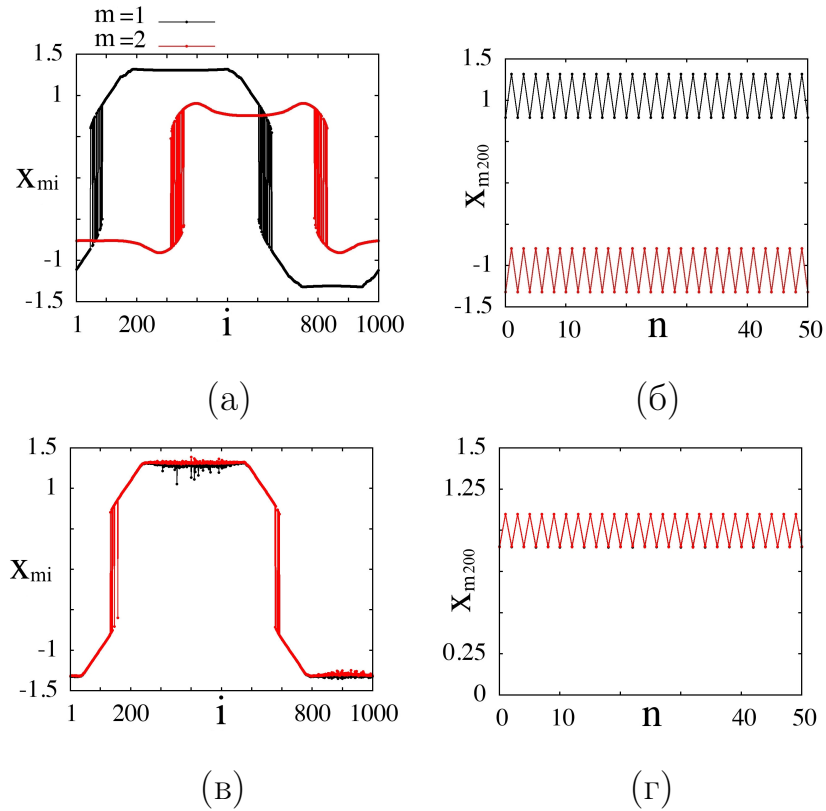


Рисунок 3.5. Мгновенные профили (а,в) двух идентичных слоев сети (3.4) и временные реализации 200-х элементов обоих слоев (б,г) в отсутствие межслойной связи ($D = 0$) (а,б) и в присутствии шумовой межслойной связи при $D = 0.2$, $\gamma = 0.5$ (в,г). Другие параметры: $\alpha = 2.4$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.42$, $R = 100$, $N = 1000$. Переходное время до введения связи между слоями $n_{00} = 20000$, после введения связи $n_0 = 20000$.

герентности фазовой химеры почти исчезают, а кластеры когерентности, соответствующие элементам, расположенным вблизи двух состояний равновесия (потенциальных ям), располагаются на одних тех же элементах в обоих кольцах (рис. 3.6а,б,в,г). Однако в области когерентных кластеров появляются уединенные узлы, число которых растет с увеличением D (рис. 3.6а,б,в,г). Из-за того, что уединенные узлы в обоих слоях не синхронизированы, при малых значениях γ не может быть достигнута удовлетворительная степень синхронизации, при которой ошибка синхронизации δ была бы достаточно малой.

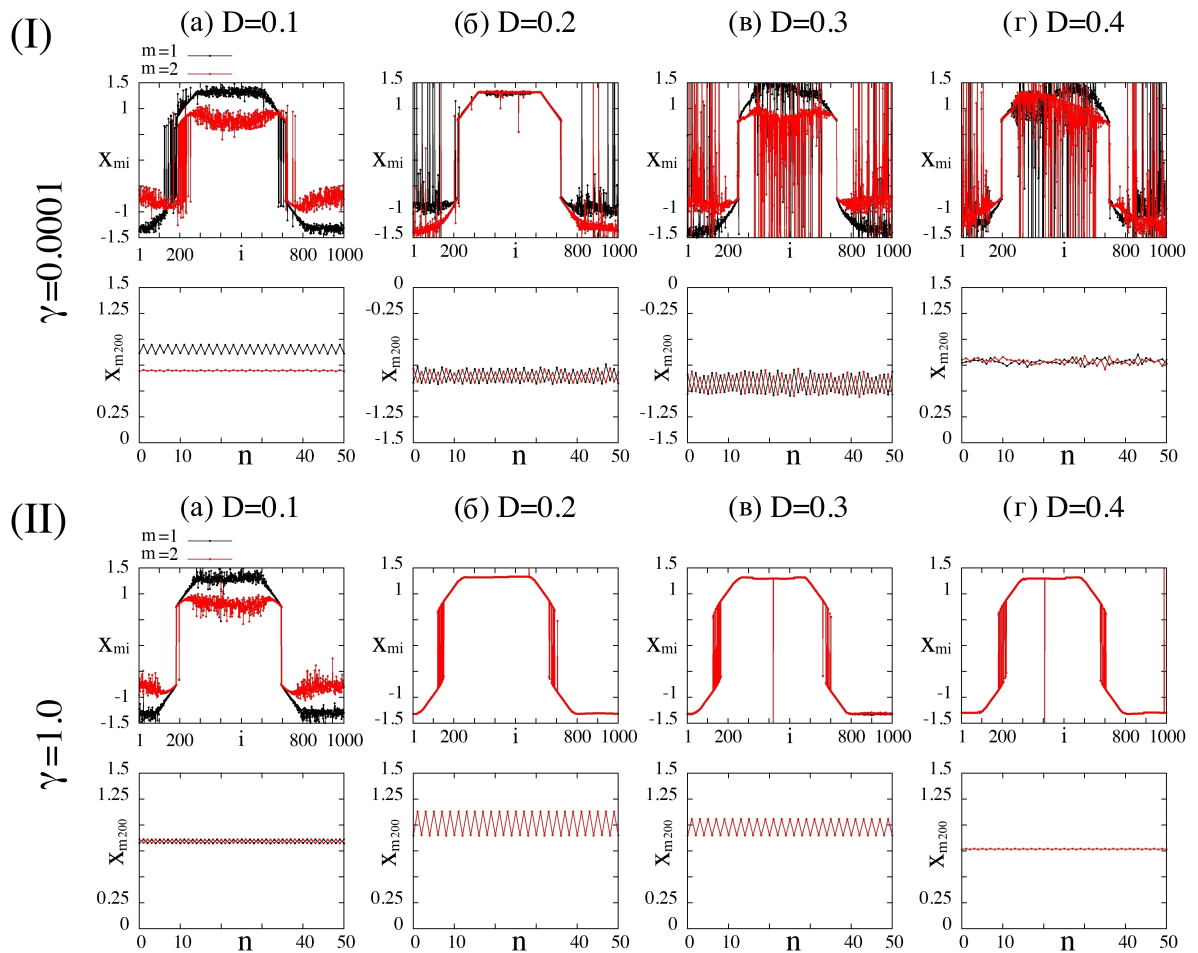


Рисунок 3.6. Мгновенные профили двух связанных колец (3.4) (верхний ряд в группах I и II) и временные реализации для 200-х элементов обоих слоев (нижний ряд в группах I и II) при шумовой связи с $\gamma = 0.0001$ (группа I) и $\gamma = 1.0$ (группа II) и для разных значений интенсивности шума D : (а) $D = 0.1$, (б) $D = 0.2$, (в) $D = 0.3$ и (г) $D = 0.4$. Другие параметры: $\alpha = 2.4$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.42$, $R = 100$, $N = 1000$. Переходное время до введения связи между слоями $n_{00} = 20000$, после введения связи $n_0 = 20000$.

Когда сила межслойной связи задается источниками белого или почти белого шума ($\gamma \rightarrow 1$), а интенсивность шума мала $D = 0.1$, структуры в обоих слоях сближаются, а кластеры становятся очень узкими (рис. 3.6II,а). При большем значении D вновь начинают наблюдаться кластеры некогерентности, и в двух слоях формируются совершенно идентичные структуры, а при $D \geq 0.2$ наблюдается почти полная синхронизация (рис. 3.6II,б). Однако в системе все

равно могут появляться уединенные узлы, при этом их количество тем больше, чем меньше γ и больше D . Когда γ приближается к 1, количество уединенных узлов уменьшается и не так сильно растет с увеличением D . В случае белого шума ($\gamma = 1$) также встречаются уединенные узлы, но их значительно меньше. На рисунке 3.6II,в,г существует один уединенный узел в каждом из слоев, при этом все элементы попарно синхронизированы (режим полной синхронизации).

Исследование поведения некоторых элементов во времени показало, что в одном ансамбле могут существовать элементы с различной временной динамикой. Так при $\gamma = 0.0001$, $D = 0.3$ (соответствующий мгновенный профиль показан на рис. 3.6I,в) одни элементы нерегулярно колеблются в окрестности только одного равновесия ("отрицательная потенциальная яма") без каких-либо переключений на другое (рис. 3.7,а). В этом случае можно говорить о моностабильном режиме. Принципиально иную динамику во времени демонстрирует 409-й элемент (рис. 3.7,б), который либо нерегулярно переключается между двумя состояниями равновесия ($620 < n < 775$ и $908 < n < 920$), либо демонстрирует достаточно периодическую динамику переключений со значительно большой амплитудой колебания ($775 < n < 908$), при этом элементы двух слоев колеблются в противофазе. Исследования показали, что длительность как нерегулярных переключений фазы колебаний, так и почти периодических не постоянна. Она может быть порядка показанного на рис.3.7,б, или в несколько раз длиннее, или же длиной в несколько итераций. В случае полной синхронизации (рис. 3.6II,в) элементы сети также можно разделить на две группы: одна часть с моностабильной динамикой (рис. 3.7,в) и другой с режимом переключения (рис. 3.7,г).

Проведенные исследования позволяют сделать вывод, что при любых значениях параметров сети, соответствующих появлению уединенных состояний, динамика уединенных узлов представляет собой переключения между двумя потенциальными состояниями, в то время как остальные элементы колеблются в окрестности одного из двух состояний равновесия (моностабильность). Одна-

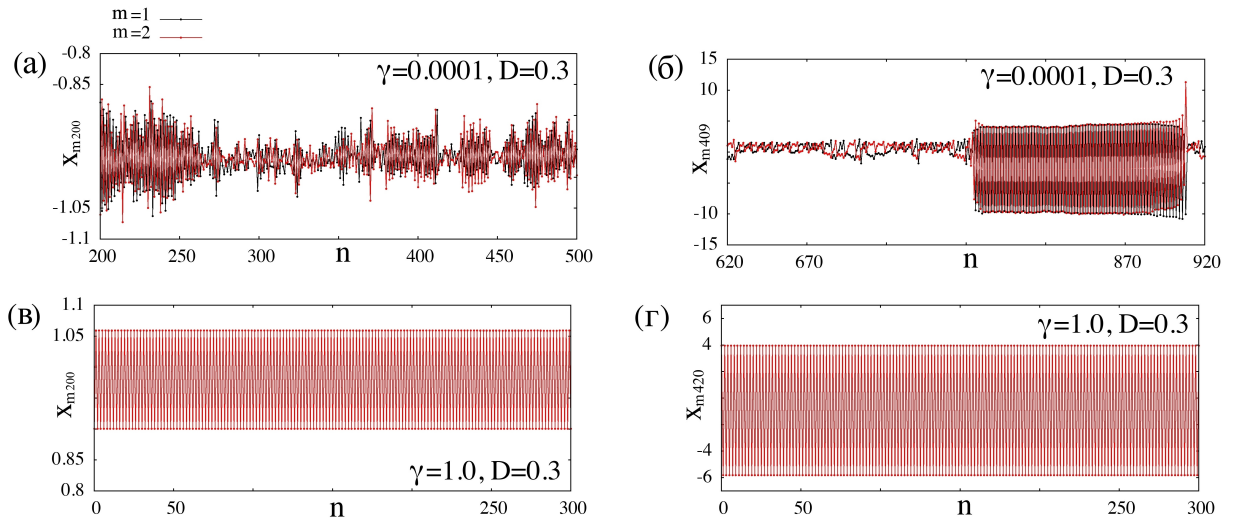


Рисунок 3.7. Временные реализации выбранных элементов двух слоев (3.4) при шумовой связи с параметрами: $\gamma = 0.0001$, $D = 0.3$ (а,б) и $\gamma = 1.0$, $D = 0.3$ (в,г). Другие параметры: $\alpha = 2.4$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.42$, $R = 100$, $N = 1000$. Переходное время до введения связи между слоями $n_{00} = 20000$, после введения связи $n_0 = 20000$.

ко в случае цветного шума уединенные узлы характеризуются переключениями во времени между режимом переключения между двумя потенциальными состояниями и моностабильным режимом (колебания в одной потенциальной яме). При шуме близком к белому, $\gamma \rightarrow 1$, уединенные узлы всегда находятся в режиме переключений между двумя потенциальными ямами.

Для оценки границ области синхронизации в зависимости от параметров цветного шума была построена двумерная диаграмма распределения глобальной ошибки синхронизации δ на плоскости параметров (γ, D) (рис. 3.8.) При $\gamma > 0.1$ можно выделить область с наименьшим значениям δ (самая темная область на диаграмме), при этом она увеличивается при $\gamma \rightarrow 1$ и становится максимальной в случае белого шума (при $\gamma = 1$). Для более точного определения границ области синхронизации на плоскости (γ, D) были выделены точки, для которых критерий полной синхронизации выполняется с заданной точностью: $\delta \leq \delta_{\max} = 10^{-6}$ (белые кружки на рис. 3.8). Как видно, такая степень

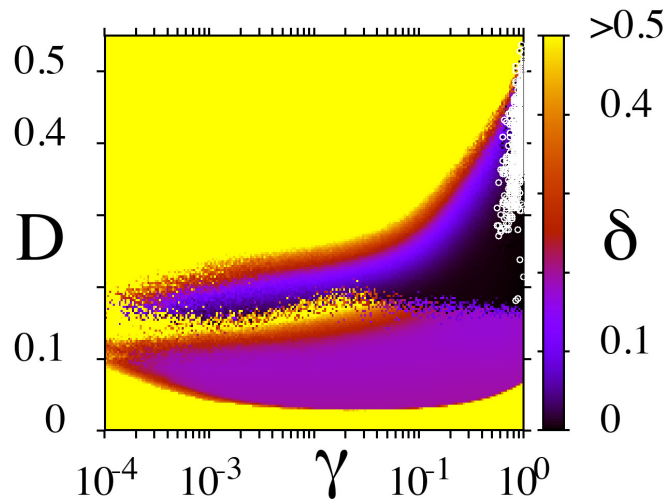


Рисунок 3.8. Диаграмма распределения глобальной ошибки синхронизации δ на плоскости параметров (γ, D) . Белые кружки соответствуют полной синхронизации, которая определяется условием $\delta \leq 10^{-6}$. Другие параметры: $\alpha = 2.4$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.42$, $R = 100$, $N = 1000$. Переходное время до введения связи между слоями $n_{00} = 20000$, после введения связи $n_0 = 20000$. Время усреднения для вычисления $\delta - n_1 = 10000$.

синхронизации наблюдается только при использовании источников шума, близкого к белому.

Синхронизация слоев с различным расположением когерентных и некогерентных кластеров. В работе [118] также было исследовано взаимодействие между двумя слоями в сети (3.4), когда отдельные слои изначально демонстрируют двухъямные химеры, которые сильно смещены в пространстве относительно друг друга. При этом в начальный момент времени (до взаимодействия между слоями, $D = 0$) большинство попарно связанных элементов, между которыми устанавливается связь, находятся в разных состояниях (они лежат в разных "потенциальных ямах").

Расчеты показывают, что взаимодействие этих исходных структур приводит к разрушению химерных состояний в обоих кольцах. При низкой интенсивности шума мгновенные профили сначала становятся зашумленными, при дальнейшем увеличении D все узлы обоих слоев колеблются вблизи одного и

того же состояния равновесия. Однако высокая степень синхронности между слоями ($\delta < 10^{-6}$) наблюдается только при относительно небольшой интенсивности шума ($D \approx 0.04$), и колебания прекращают быть полностью синхронными при более сильном шуме. При достаточно сильном шуме профили обоих слоев сильно разрушаются и появляется множество уединенных состояний.

Распределение глобальной ошибки синхронизации δ показывает, что область с наименьшим значением δ , а, следовательно, и с более высокой степенью синхронизации аналогична наблюдаемой в рассмотренном выше случае (см. рис. 3.7). Однако в этом случае более сильная степень синхронизации между слоями достигается при относительно низкой интенсивности шума D и среднем значении параметра γ (диапазоны $0.36 < D < 0.48$ и $10^{-2} < \gamma < 10^{-1}$) и только некоторые большие значения γ и D могут привести к почти полной синхронизации. Таким образом, нельзя утверждать, что для изначально сильно различающихся состояний химеры более строгая синхронизация наблюдается в основном при приближении источников шума к белому шуму ($\gamma \rightarrow 1$).

Синхронизация слоев с качественно различными начальными структурами. Кроме двухъямных химер в кольце нелокально связанных кубических отображениях при управляющих параметрах ансамбля: $\alpha = 2.4$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.42$, $R = 100$, $N = 1000$, могут наблюдаться режимы пространственной некогерентности, а также полная синхронизация всех элементов и колебания в одной из потенциальных ям. Взаимодействия между такими режимами и химерами были изучены с точки зрения изменения пространственно-временной динамики, а также глобальной ошибки синхронизации. Исследования показали, что при взаимодействии неоднородной структуры или полностью синхронной с химерой в сети возможно установление режима синхронизации, при этом в обоих кольцах имеет место химерная структура. При взаимодействии режима пространственной неоднородности и полной синхронизации кольца синхронизируются и демонстрируют полную синхронизацию всех элементов и колебания в одной из потенциальных ям, что также справедливо для случая взаимодей-

ствия двух колец, которые демонстрируют режим полной синхронизации. Анализ распределения глобальной ошибки синхронизации на плоскости параметров (γ, D) показал, что как и в предыдущих случаях, полная синхронизация между слоями реализуется преимущественно при $\gamma \rightarrow 1$. Однако, для случая взаимодействия режимов пространственной неоднородности и полной синхронизации элементов в одном из колец, синхронизация между слоями с $\delta \leq 10^{-6}$ возможна при малой интенсивности шума $D \approx 0.02$ во всем диапазоне изменения $\gamma \in [10^{-4}, 1]$. В работе [118] взаимодействие слоев с различной динамикой описано подробнее.

3.3.2 Синхронизация неидентичных по управляющим параметрам слоев

Перейдем к изучению динамики двух связанных неидентичных слоев, различающихся силой внутрислойной связи σ_m , $m = 1, 2$. Параметры сети и начальные условия выбираются и фиксируются таким образом, чтобы в отсутствие межслойной связи в первом кольце устанавливалась двухъямная химера (как в разделе 3.3.1), а во втором – неподвижная нерегулярная пространственная структура (рис. 3.9,а,б). На рисунках 3.9,в,г показана динамика сети при введении межслойной связи. Видно, что случайная межслойная связь приводит к изменениям режимов динамики в связанных слоях, и в кольцах наблюдаются частично синхронизированные сложные структуры (рис. 3.9,в).

Эволюция пространственно-временной динамики сети неидентичных слоев проиллюстрирована на рисунке 3.10 при изменении интенсивности шума D и параметра γ в межслойной связи. При малой интенсивности D мгновенный профиль второго слоя начинает меняться и на фоне исходной структуры вырисовывается кластерная структура, характерная для первого слоя (рис. 3.10,1).

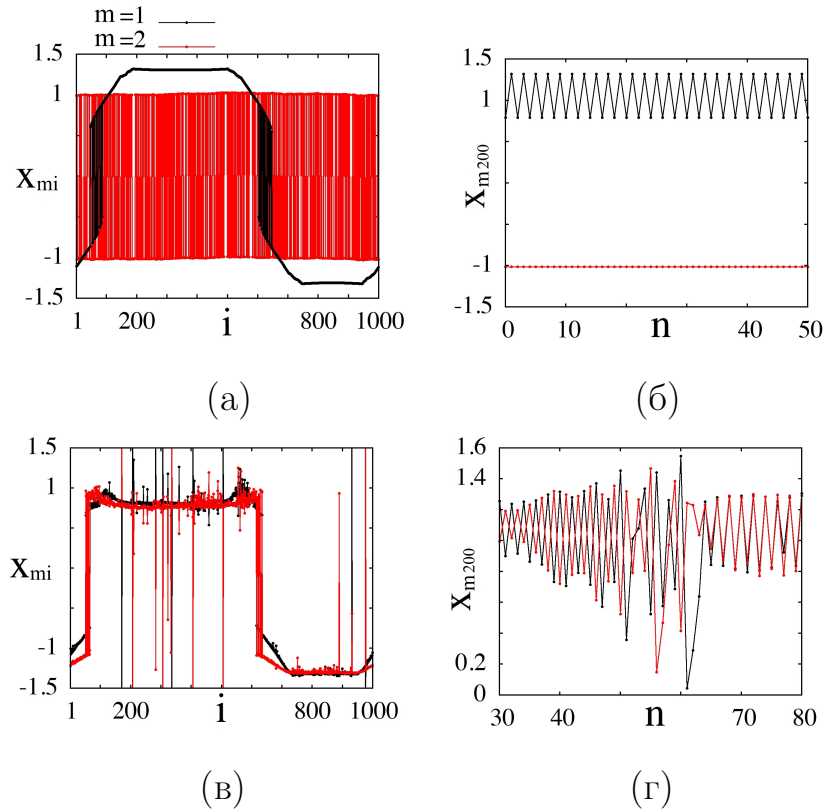


Рисунок 3.9. Мгновенные профили (а,в) двух неидентичных слоев в сети (3.4) и временные реализации 200-х элементов обоих слоев (б,г) в отсутствие межслойной связи ($D = 0$) (а,б) и при наличии шумовой межслойной связи при $D = 0.2$, $\gamma = 0.01$ (в,г). Другие параметры: $\alpha = 2.4$, $\sigma_1 = 0.42$, $\sigma_2 = 0.2$, $R = 100$, $N = 1000$. Переходное время до введения связи между слоями $n_{00} = 20000$, после введения связи $n_0 = 20000$.

Дальнейшая эволюция аналогична случаю идентичных слоев (раздел 3.3.1). При $\gamma < 1$ и особенно при малых значениях γ на профилях колец появляется большое количество уединенных узлов (рис. 3.10, I), которые остаются несинхронизированными. Аналогично идентичным слоям пространственно-временные структуры практически синхронизированы в случае белого шума (рис. 3.10, II). Начиная с $D = 0.15$, пространственные профили двух колец в основном совпадают, но не полностью идентичны. При $D \approx 0.3$ некоторые элементы демонстрируют случайные скачки во времени между окрестностями двух состояний

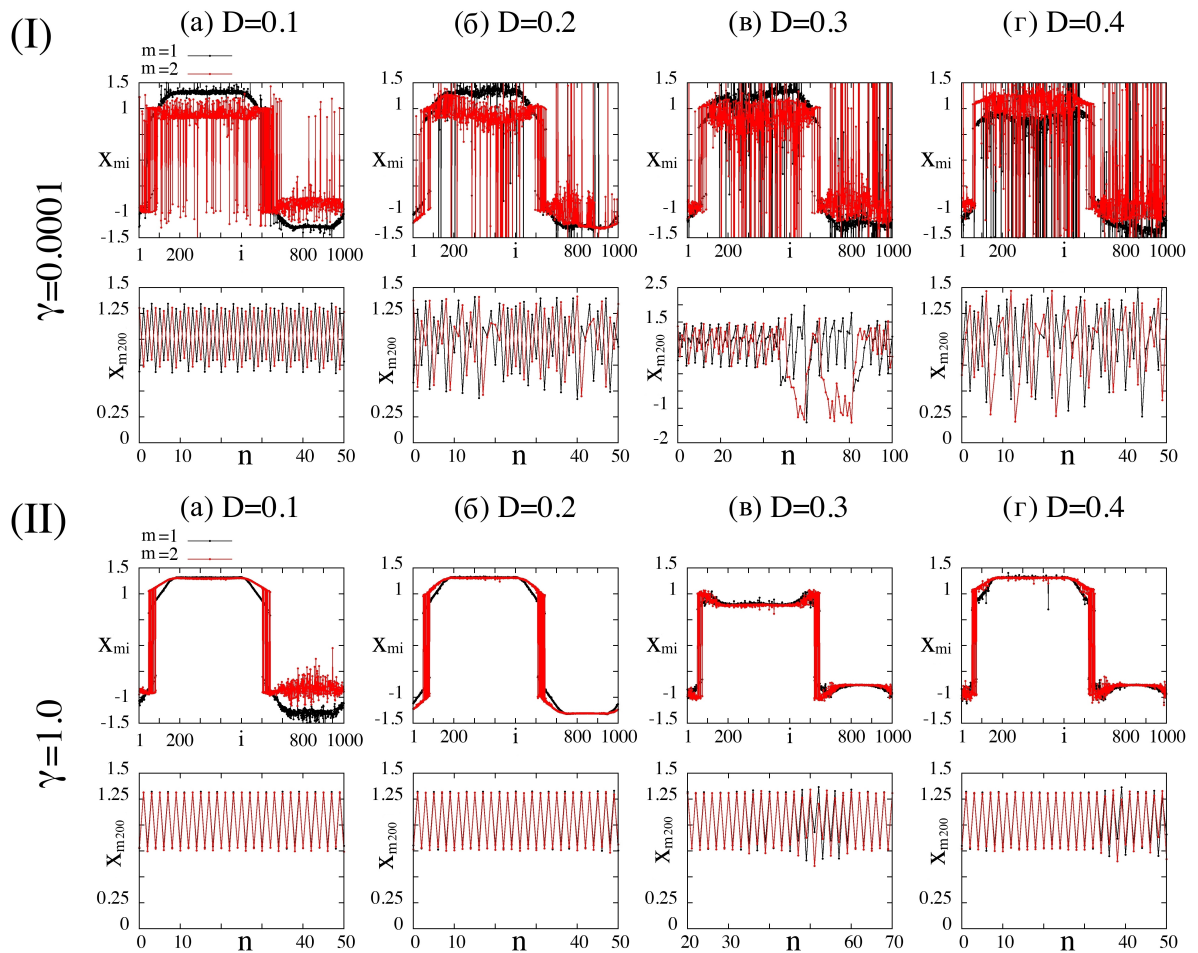


Рисунок 3.10. Мгновенные профили двух связанных неидентичных колец (3.4) (верхний ряд в группах I и II) и временные реализации для 200-х элементов обоих слоев (нижний ряд в группах I и II) для шумовой связи с $\gamma = 0.0001$ (группа I) and $\gamma = 1.0$ (группа II) и для разных значений интенсивности шума D : (а) $D = 0.1$, (б) $D = 0.2$, (в) $D = 0.3$, (г) $D = 0.4$. Другие параметры: $\alpha = 2.4$, $\sigma_1 = 0.42$, $\sigma_2 = 0.2$, $R = 100$, $N = 1000$. Переходное время до введения связи между слоями $n_{00} = 20000$, после введения связи $n_0 = 20000$.

равновесия (между «потенциальными ямами»). При $\gamma < 1.0$ эти скачки также реализуются при меньших интенсивностях шума.

Как и в случае идентичных слоев, была построена диаграмма распределения глобальной ошибки синхронизации δ на плоскости параметров шума (γ , D), которая представлена на рисунке 3.11. В целом характер полученных областей аналогичен рассмотренным ранее случаям. Отметим, что в этом случае вообще

не наблюдалась полная синхронизация ($\delta_{\max} \leq 10^{-6}$), ошибка синхронизации в рассматриваемых неидентичных слоях не опускалась ниже 0.008.

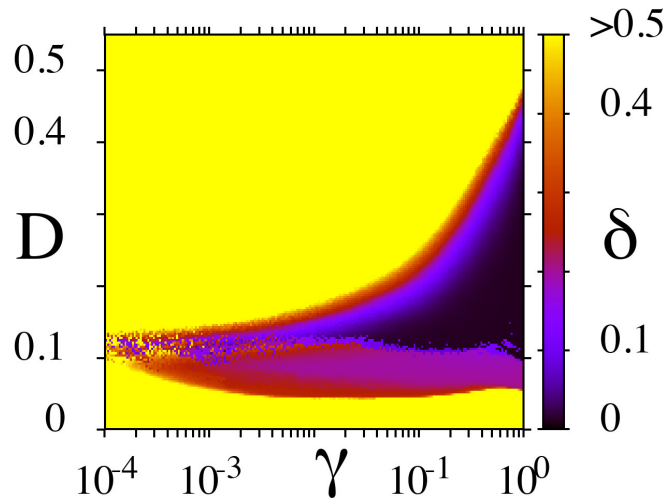


Рисунок 3.11. Диаграмма распределения глобальной ошибки синхронизации δ на плоскости параметров (γ, D) при начальных структурах в слоях, изображенных на рисунке 3.9,а. Другие параметры: $\alpha = 2.4$, $\sigma_1 = 0.42$, $\sigma_2 = 0.2$, $R = 100$, $N = 1000$. Переходное время до введения связи между слоями $n_{00} = 20000$, после введения связи $n_0 = 20000$. Время усреднения для вычисления $\delta - n_1 = 10000$.

3.4 Влияние разреженной межслойной связи на синхронизацию сложных структур

Помимо неоднородного распределения управляющих параметров и введения в систему аддитивных источников шума, неоднородность в системе может представлять собой разреженную внутрислойную и межслойную связь. В таком случае только часть узлов из разных слоев связаны друг с другом. В работе [119] была исследована динамика двухслойной системы с разреженной межслойной

связью, которая описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 x_i(n+1) &= F^H(x_i(n), y_i(n)) + & (3.7) \\
 &+ \frac{\sigma_1}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [F^H(x_j(n), y_j(n)) - F^H(x_i(n), y_i(n))] + \\
 &+ k(i)[F^L(u_i(n), v_i(n)) - F^H(x_i(n), y_i(n))], \\
 y_i(n+1) &= G^H(x_i(n)), \\
 \\
 u_i(n+1) &= F^L(u_i(n), v_i(n)) + \\
 &+ \frac{\sigma_2}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [F^L(u_j(n), v_j(n)) - F^L(u_i(n), v_i(n))] + \\
 &+ k(i)[F^H(x_i(n), y_i(n)) - F^L(u_i(n), v_i(n))], \\
 v_i(n+1) &= G^L(u_i(n)).
 \end{aligned}$$

Первый слой в (3.7) с динамическими переменными x, y представляет собой кольцо нелокально связанных отображений Эно (1.5), второй слой – u, v – отображений Лози (2.3). Соответственно, функции F^H, G^H относятся к отображению Эно, а F^L, G^L – отображению Лози. Управляющие параметры обоих отображений зафиксированы на значениях $\alpha = 1.4, \beta = 0.3$, что соответствует хаотической динамике этих парциальных элементов. Индекс i – номер элемента в кольце, n – дискретное время. Собственную динамику колец в первую очередь определяют значения внутрислойной силы связи (σ_1, σ_2) и радиуса связи (R). Разреженная межслойная связь задается последним слагаемым, где сила межслойной связи $k(i)$ зависит от номера элемента. Например, если в системе связан только каждый 16-й элемент колец (сильная разреженность), то $k(i) = k$ только когда i кратен 16, иначе $k(i) = 0$. Отметим, что в данном исследовании межслойная связь вводится не в случае, когда динамический режим в слоях установился, а в начальный момент, когда значения динамических переменных в обоих кольцах является случайным и равномерно распределенным в интервале $[-0.5, 0.5]$ для каждого слоя. Общее количество элементов N в каждом слое

зависит от степени разреженности межслойной связи и приблизительно равно 1000 (округляется по нижнему значению). Например, если связан только каждый 16-й элемент колец, то $N = 996$ в каждом слое. На рисунке 3.12 приведена схема исследуемой сети 3.7 для случая неразрезанной связи (рис. 3.12,а), для случая слабо (рис. 3.12,б) и сильно разреженной связи (рис. 3.12,в).

В ходе исследования параметры внутрислойной связи были зафиксированы: $\sigma_1 = 0.315$ для кольца отображений Эно и $\sigma_2 = 0.225$ для ансамбля отображений Лози, $R = 320$ для обоих колец. Мгновенные профили динамических переменных для каждого кольца, которые устанавливаются в отсутствие межслойной связи, приведены на рисунке 3.13. При выбранных значениях управляющих параметров и распределении начальных условий в кольце нелокально связанных отображений Эно устанавливается комбинированное химерное состояние (рис. 3.13,а), которое включает два некогерентных кластера фазовой химеры ($1 < i < 45$, $410 < i < 445$ и $940 < i < 1000$), один некогерентный кластер амплитудной химеры ($690 < i < 755$) и некогерентный кластер хи-

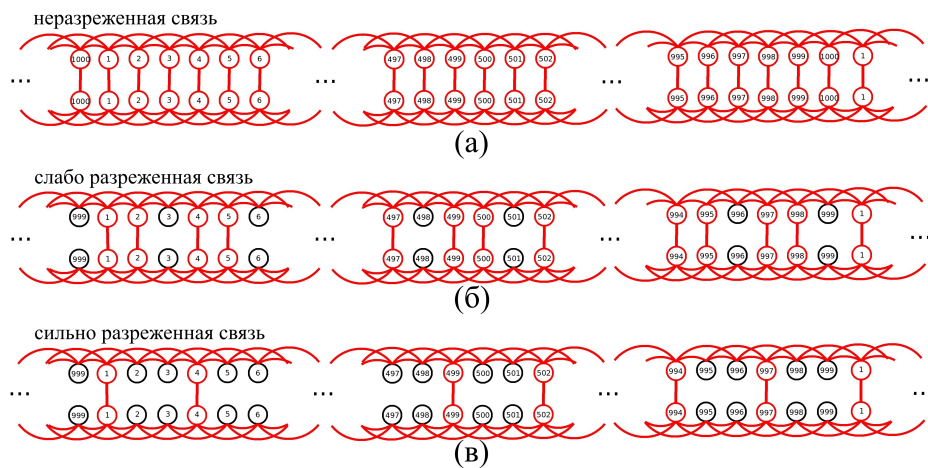


Рисунок 3.12. Схема связи между слоями в сети (3.7) для случаев: (а) неразрезанной связи, (б),(в) разреженной, когда (б) несвязан каждый 3-й элемент, (в) связан каждый 3-й элемент. Связанные и несвязанные элементы отмечены красным и черным цветами, соответственно.

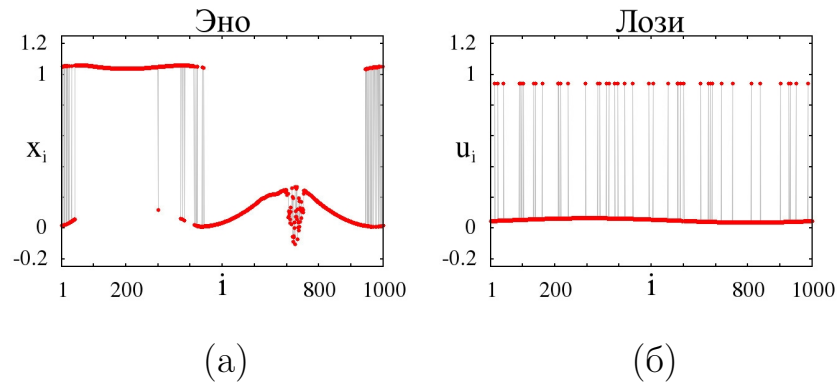


Рисунок 3.13. Мгновенные профили переменных x_i кольца отображений Эно (а) и u_i кольца отображений Лози (б) в отсутствие межслойной связи.

Параметры: $\sigma_1 = 0.315$, $\sigma_2 = 0.225$, $R = 320$, $k(i) = 0$, $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$,
 $N = 1000$.

меры уединенных состояний ($298 < i < 385$). Кольцо нелокально связанных отображений Лози демонстрирует режим уединенных состояний (рис. 3.13,б).

Для оценки степени синхронизации колец использовалось глобальная ошибка межслойной синхронизации (3.6), однако она отдельно рассчитывалась для пар элементов, которые связаны ($k(i) \neq 0$) и несвязаны ($k(i) = 0$) через межслойную связь. Так как в этом разделе приведены исследования неоднородной системы, синхронизация понимается в эффективном смысле, так, если выполняется условие $\delta < 0.01$, то можно говорить, что в системе наблюдается эффективная синхронизация. Это значение произвольное, и в качестве порога может быть выбрано любое достаточно малое значение δ .

3.4.1 Динамика взаимно связанных колец

Исследования **неразрезанной межслойной связи** ($k(i) = k$) показывают, что в двухслойной сети (3.7) может устанавливаться эффективная синхронизация химерных структур. В присутствии взаимной межслойной связи начальные структуры в обоих кольцах сначала подавляются и при некоторых

значениях межслойной связи в обоих кольцах устанавливаются когерентные структуры, однако не синхронизированные друг с другом ($\delta > 0.01$). Тем не менее при большей силе межслойной связи динамика кольца нелокально связанных отображений Эно доминирует, и в обоих ансамблях устанавливаются химерные структуры: при $k \in [0.3, 0.49]$ в сети наблюдаются синхронные фазовые химеры, а при $k \in (0.49, 0.54]$ – амплитудные химеры. При дальнейшем увеличении силы межслойной связи кольца переходят в некогерентный режим, а глобальная ошибка синхронизации увеличивается до $\delta > 0.01$. Когда $k > 0.85$, траектории сети уходят на бесконечность. Более подробно динамика такой двухслойной сети с неразрезанной межслойной связью описана в работе [119].

Теперь перейдем к результатам исследования влияния **разреженной межслойной связи** на динамику сети (3.7). Изучение динамики такой системы показало, что случай межслойной связи элементов через один представляет собой границу между слабо разреженной межслойной связью (когда количество связанных элементов больше, чем не связанных) и сильно разреженной (наоборот). На рисунке 3.14 представлены мгновенные профили и пространственно-временные профили (последние 50 мгновенных профилей) при нескольких значениях силы межслойной связи k в двухслойной сети 3.7. Красным цветом выделены связанные элементы, черным – несвязанные.

При введении разреженной межслойной связи уединенные узлы в кольце отображений Лози, симметрично связанные с элементами кольца отображений Эно, постепенно исчезают с ростом силы межслойной связи k (рис. 3.14,а). В то же время связанные элементы кольца отображения Лози начинают качественно повторять профиль элементов кольца Эно (рис. 3.14,а, красные кривые). При дальнейшем увеличении k в кольце отображений Лози пропадают оставшиеся уединенные узлы, а в кольце отображений Эно – фазовые химеры. Вместе с этим, разреженная межслойная связь приводит к расщеплению профилей на

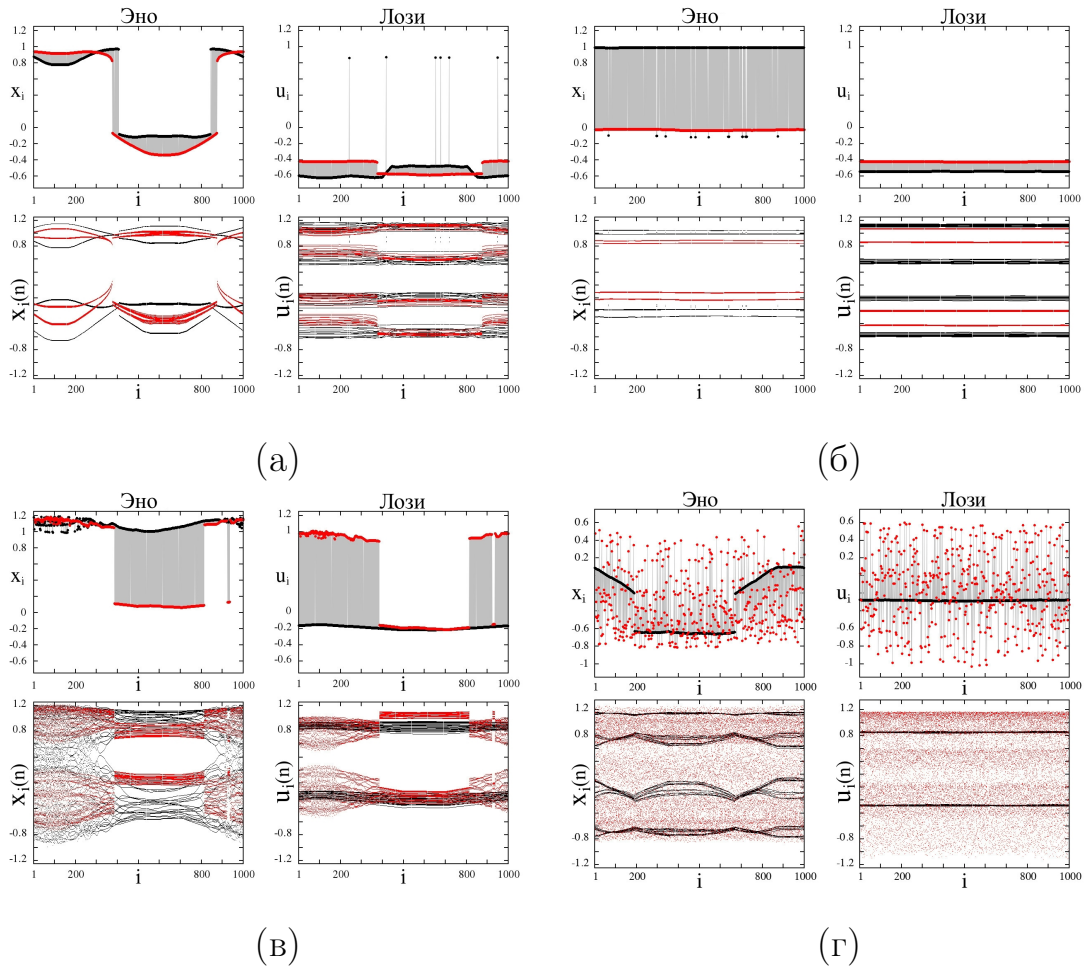


Рисунок 3.14. Мгновенные (верхние строки) и пространственно-временные профили (нижние строки) системы (3.7) при межслойной связи между каждым вторым элементом колец и при разных значениях силы межслойной связи k : (а) 0.065, (б) 0.29, (в) 0.39, (г) 0.73. Красные и черные точки соответствуют связанным и несвязанным элементам, соответственно, серые линии соединяют все элементы по порядку. Другие параметры: $\sigma_1 = 0.315$, $\sigma_2 = 0.225$, $R = 320$, $N = 1000$, $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$.

связанные и несвязанные элементы, хотя все элементы остаются нелокально связанными внутри колец.

При некоторых значениях k в кольце отображений Эно могут наблюдаться уединенные состояния (рис. 3.14,б). С увеличением k профили связанных элементов начинают повторять друг друга и более того, в системе может появиться некогерентный кластер амплитудной химеры (рис. 3.14,г, $1 \leq i < 380$

и $850 \leq i < 1000$), в то время как несвязанные межслойной связью элементы лишь частично повторяют профиль связанных элементов. В случае достаточно сильной межслойной связи, $k > 0.6$, связанные элементы в обоих кольцах полностью рассинхронизированы (рис. 3.14,г, красные точки), а динамика несвязанных узлов характеризуется когерентными пространственно-временными профилями в обоих кольцах (рис. 3.14,г, черные точки).

На рисунке 3.15 представлена зависимость глобальной ошибки синхронизации от силы межслойной между связанными (красная линия) и несвязанными (черная линия) узлами при связи только каждого второго элемента. Как видно из зависимости ошибки синхронизации для связанных элементов (рис. 3.15, красная линия), существует диапазон значений межслойной связи $k \in [0.2, 0.59]$, в пределах которого δ принимает минимальные значения: $\delta \in [0.04, 0.08]$. Однако указанные значения δ не удовлетворяют условию эффективной синхронизации ($\delta < 0.01$), а при $k > 0.6$ значение δ начинает расти. Значение δ для несвязанных узлов взаимодействующих колец всегда больше 1 (рис. 3.15, черная кривая), что свидетельствует о десинхронизации.

Отдельное исследование влияния внутрислойной и межслойной связей на формирование и установление структур в кольцах показало, что разделение профилей связанных и несвязанных колец происходит только из-за влияния межслойной связи, а не из-за слабой внутрислойной связи, которая просто не может «выровнять» профиль. Также было отмечено, что даже при сильной силе связи в кольце или при большом радиусе связи, наблюдается разделение профиля. Отметим также, что полное удаление связей между кольцами после того, как в них установились пространственно-временные режимы под воздействием межслойной связи, приводит к тому, что ранее связанные с другим кольцом элементы и несвязанные «притягиваются» и образуют единый профиль.

Для более глубокого понимания влияния разреженности на степень синхронизации между слоями были построены двумерные диаграммы распределения δ на плоскости параметров “степень разреженности – сила межслойной

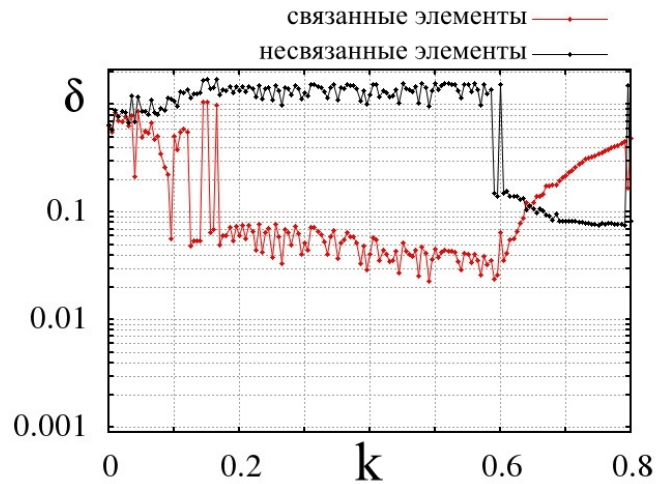


Рисунок 3.15. Зависимости глобальной ошибки синхронизации δ от силы межслойной связи k для связанных (красные линии) и несвязанных (черные линии) элементов колец при связи только каждого 2-го элемента. Шаг изменения по параметру k равен 0.01. Другие параметры: $\sigma_1 = 0.315$, $\sigma_2 = 0.225$, $R = 320$, $N = 1000$, $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$.

связи” (рис. 3.16). Степень разреженности по оси абсцисс указывается в виде отношение $p : q$, где p – количество связанных элементов, а q – количество несвязанных. Например, соотношение $15 : 1$ означает, что каждый 16-й элемент не связан.

Как видно из диаграммы, представленной на рисунке 3.16,а, для связанных элементов, вся область степени разреженности делится на две части, а границей является соотношение $1 : 1$. Левая часть соответствует слабо разреженной межслойной связи, когда число связанных узлов превышает число несвязанных ($p > q$). Крайнее левое значение на оси абсцисс, обозначенное как «all», соответствует полной (неразрезанной) межслойной связи. Как следует из этой диаграммы (рис. 3.16,а), ширина области эффективной синхронизации ($\delta < 0.01$) по силе межслойной связи одинакова и остается неизменной для всего интервала слабо разреженной межслойной связи $k \in [0.2, 0.59]$. Кроме того на рис. 3.16,а четко видно, что в интервале $k \in [0.35, 0.42]$ глобальная ошибка синхронизации $\delta \leq 0.001$. Таким образом, в случае слабо разреженной связи

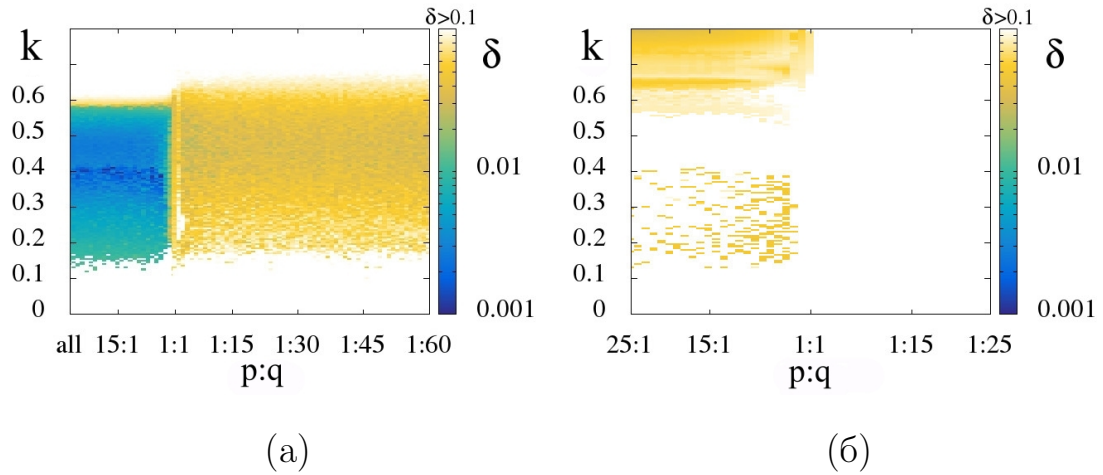


Рисунок 3.16. Двумерные диаграммы распределения δ на плоскости параметров “степень разреженности $p : q$ – сила межслойной связи k ” для (а) связанных и (б) несвязанных элементов. Значения по оси абсцисс соответствуют отношению числа связанных (p) к числу несвязанных (q) элементов. Значения δ представлены в логарифмическом масштабе. Размер шага выборки по k равен 0.01. Диаграммы рассчитывались с использованием пяти наборов случайных начальных распределений динамических переменных. Другие параметры: $\sigma_1 = 0.315$, $\sigma_2 = 0.225$, $R = 320$, $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$.

между кольцами Эно и Лози (3.7) может наблюдаться эффективная синхронизация пространственно-временных структур, в том числе химер, в конечном диапазоне силы межслойной связи k .

Правая часть диаграммы, изображенной на рисунке 3.16,а, относится к сильно разреженной межслойной связи, когда $p < q$. При такой степени разреженности минимальное значение $\delta = 0.02$, то есть наличие сильно разреженной межслойной связи препятствует наблюдению эффективной синхронизации в исследуемой сети в рамках заданного критерия эффективной синхронизации ($\delta < 0.01$).

На рисунке 3.16,б приведена двумерная диаграмма распределения δ между несвязанными элементами взаимодействующих колец. Как и в предыдущем

случае, можно выделить два интервала по степени разреженности: слабая (левая часть) и сильная (справа) степень разреженности. Видно, что только в случае слабо разреженной межслойной связи (левая часть диаграммы) значение δ может быть меньше 0.1 при некоторых значениях k в интервалах $k \in [0.15, 0.4]$ и $k > 0.6$. В этом случае пространственные профили несвязанных элементов обоих колец становятся качественно подобными. При наличии сильно разреженной межслойной связи (правая часть диаграммы на рис. 3.16,б) $\delta > 0.1$ во всем диапазоне изменения силы межслойной связи k .

3.4.2 Динамика однонаправленно связанных колец

Когда **управляющим кольцом** в двухслойной сети (3.7) с **неразрезанной межслойной связью** является **ансамбль отображений Эно**, его динамика подавляет режим уединенных состояний в кольце отображений Лози. Начиная уже с достаточно слабой межслойной связи $k > 0.02$, в кольце отображений Лози устанавливаются химерные структуры, хотя сами кольца между собой еще полностью не синхронизированы. При $k > 0.2$ динамика связанных колец становится синхронной ($\delta < 0.01$), и может наблюдаться комбинированное химерное состояние, которое имеет место в изолированном кольце отображений Эно (рис. 3.13,а). В работе [103] было показано, что для однонаправленно связанных ансамблей управляющая подсеть полностью контролирует динамику управляемой подсети.

В случае **разреженной связи**, когда **управляющим является кольцо отображений Эно**, можно наблюдать установление химерных состояний в кольце отображений Лози на профиле связанных межслойной связью элементов. При этом в случае сильно разреженной связи на профиле несвязанных элементов могут оставаться уединенные состояния, в то время как при слабой разреженности профиль несвязанных элементов является когерентным. Об-

щая картина влияния разреженной однонаправленной межслойной связи, когда кольцо отображений Эно является управляющим, представлена на рис. 3.17,а.

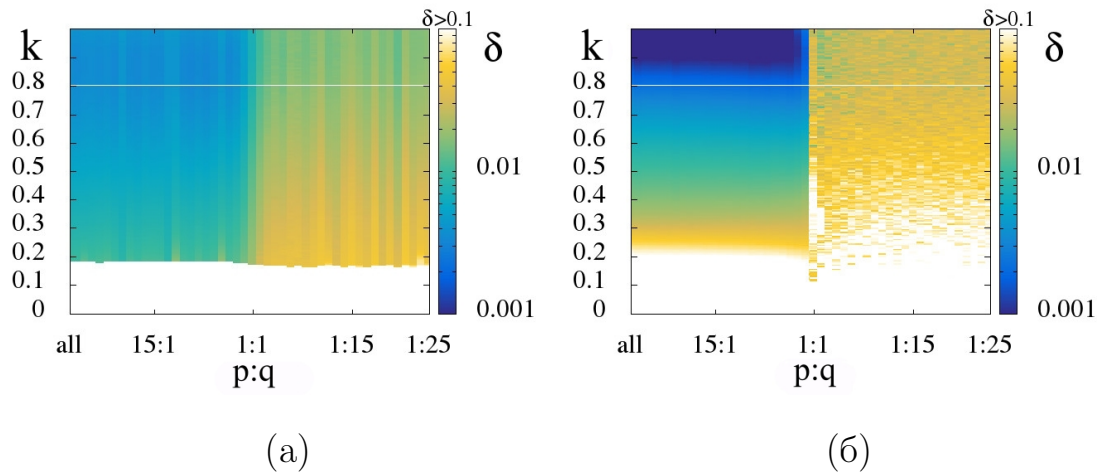


Рисунок 3.17. Двумерные диаграммы распределения δ на плоскости параметров «степень разреженности $p : q$ – сила межслойной связи k » для связанных элементов для случая однонаправленной связи при управляющем кольце (а) отображений Эно и (б) отображений Лози. Ось x представляет отношение числа связанных (p) к количеству несвязанных (q) узлов. Значения δ представлены в логарифмическом масштабе. Размер шага выборки по k равен 0.01. Диаграммы рассчитывались с использованием пяти наборов случайных начальных распределений динамических переменных. Другие параметры: $\sigma_1 = 0.315$, $\sigma_2 = 0.225$, $R = 320$, $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$.

Как следует из этой диаграммы, ситуация очень похожа на наблюдаемую и описанную для случая взаимно связанных колец. По параметру степени разреженности $p : q$ можно выделить две области: слабой и сильной разреженности связи, которые разделены соотношением 1 : 1. При слабо разреженной связи ($p > q$), значения глобальной ошибки синхронизации, начиная с $k > 0.2$, соответствуют эффективной синхронизации связанных элементов: $\delta \leq 0.01$. При сильной разреженности наблюдается обратная картина: глобальная ошибка синхронизации δ всегда больше 0.01. И хотя эффективная синхронизация не наблюдается (в рамках заданного критерия) установившиеся пространственно-

временные структуры в кольцах качественно схожи. Заметим, что несмотря на степень разреженности, существует одно и то же пороговое значение $k \approx 0.2$, при котором структуры колец либо синхронизируются (левая часть диаграммы), либо становятся качественно схожими (правая часть).

Когда **управляющим ансамблем** в двухслойной сети (3.7) с **неразрезанной межслойной связью** является **кольцо нелокально связанных отображений Лози**, то, начиная с $k \approx 0.175$, кольца синхронизируются в режиме уединенных состояний, которые установились на профиле динамики кольца отображений Лози (рис. 3.13,б). При введении разреженной связи несвязанные элементы кольца отображений Эно сохраняют собственную динамику, а профили связанных элементов демонстрирует уединенные состояния, при этом при слабой разреженности возможно установление эффективной синхронизации ($\delta < 0.01$), а при сильно – только качественно подобный профиль. Зависимость δ от степени разреженности показана на рисунке 3.17,б. Эффективная вынужденная синхронизация ($\delta < 0.01$) имеет место во всем диапазоне изменения степени слабой разреженности межслойной связи, начиная с $k \approx 0.5$. Сравнивая результаты, представленные на рисунках 3.17,а и б, можно сделать вывод, что при наличии слабо разреженной межслойной связи степень эффективной вынужденной синхронизации и ширина области синхронизации по силе межслойной связи зависит от пространственно-временной динамики управляющего ансамбля.

3.5 Удаленная и полная синхронизация в неоднородной трехслойной сети хаотических отображений

Было проведено исследование динамики трехслойной системы попарно связанных колец нелокально связанных хаотических отображений. Данная си-

стема является неоднородной, так как собственная динамика среднего слоя отличается от динамики двух внешних идентичных слоев. В такой системе помимо классической полной синхронизации, может наблюдаться удаленная синхронизация (relay synchronization, синхронизация только крайних слоев), которая впервые была описана в работе [174]. Исследуемая трехслойная система, схематично изображенная на рисунке 3.18, описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 x_{mi}(n+1) &= F(x_{mi}(n), y_{mi}(n)) + & (3.8) \\
 &+ \frac{\sigma_m}{2R_m} \sum_{j=i-R_m}^{i+R_m} [F(x_{mj}(n), y_{mj}(n)) - F(x_{mi}(n), y_{mi}(n))] + \\
 &+ \sum_{l=1}^3 k_{ml} [F(x_{li}(n), y_{li}(n)) - F(x_{mi}(n), y_{mi}(n))], \\
 y_{mi}(n+1) &= G(x_{mi}(n)),
 \end{aligned}$$

где $m = 1, 2, 3$ – номер слоя, $i = 1, 2, \dots, N$ – номер элемента в каждом слое, $N = 1000$ – общее количество элементов в каждом слое. Функции F и G соответствуют отображению Лози (2.3) и Эно (1.5). Управляющие параметры зафиксированы для всех элементов $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$, что соответствует хаотической динамике в одиночных отображениях. Внутрислойная связь задается вторым членом в уравнении (3.8) и определяется силой связи σ_m и радиусом связи $R_m = R = 320$, т.е. количеством соседей, с которыми связан i -й элемент с каждой стороны внутри соответствующего кольца.

Внешние слои в системе (3.8) попарно и симметрично связаны со средним слоем (смотрите рис. 3.18). Межслойная связь вводится через переменные x и описывается третьим членом в (3.8). Сила межслойной связи характеризуется коэффициентом k_{ml} между отдельными элементами соответствующих слоев m

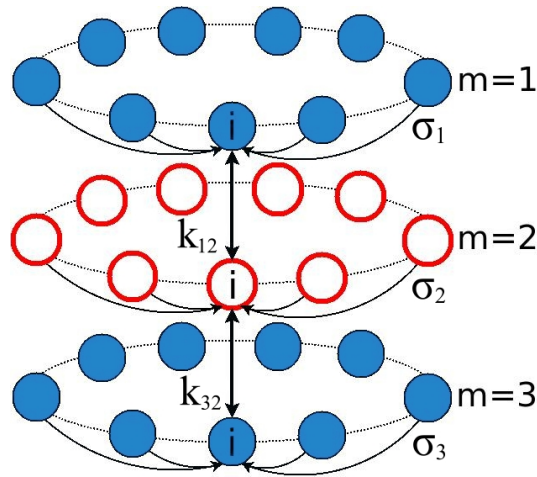


Рисунок 3.18. Схема трехслойной сети, заданной уравнением (3.8). Индекс m – номер слоя, внутрислойная связь задается силой связи σ_m . Внешние слои $m = 1$ и $m = 3$ попарно и симметрично связаны со средним слоем $m = 2$ межслойной связью k_{12} и k_{32} , соответственно.

и l . По аналогии с работой [109], межслойная сила связи задается матрицей:

$$k_{ml} = \begin{pmatrix} 0 & k_{12} & 0 \\ k_{21} & 0 & k_{23} \\ 0 & k_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

где номера строк и столбцов соответствуют номерам слоев. Таким образом, каждый элемент матрицы (3.9) описывает связь между соответствующими слоями. В данном исследовании сила межслойной связи была выбрана одинаковой: $k_{21} = k_{12} = k_{23} = k_{32} = k$.

Межслойная связь вводится только после установления в кольцах пространственно-временных структур, то есть через 10^4 итераций. Начальные условия для динамических переменных x и y кольца отображений Лози случайным образом равномерно распределены в интервале $x, y \in [-0.5, 0.5]$; кольца отображений Эно – $x \in [-0.5, 0.5]$ и $y \in [-0.15, 0.15]$.

Было исследовано две конфигурации трехслойной сети: когда внешними слоями являются кольца отображений Эно, а передающим (средним) – кольцо отображений Лози, и наоборот. На рисунке 3.19 показаны мгновенные профили

структур, которые устанавливаются в изолированных кольцах Эно и Лози, когда они выбираются в качестве внешних слоев. Как видно из рисунка 3.19,а, при выбранных значениях внутрислойной связи в кольце отображений Эно формируется комбинированная химера, состоящая из кластеров некогерентности фазовой химеры ($1 \leq i \leq 133$ и $320 \leq i \leq 524$ и $988 \leq i \leq 1000$) и амплитудной химеры ($720 \leq i \leq 850$). Кольцо отображений Лози демонстрирует режим уединенных состояний (рис.3.19,б).

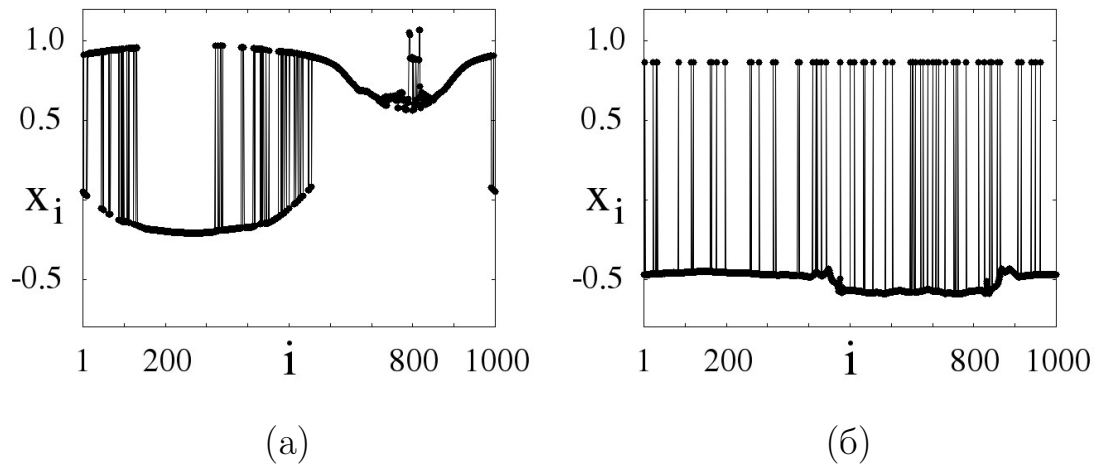


Рисунок 3.19. Примеры начальных пространственных распределений значений x_i (мгновенные профили) в кольце нелокально связанных отображений Эно (а) и кольце нелокально связанных отображений Лози (б) в отсутствие межслойной связи ($k = 0$) в сети (3.8). Другие параметры: $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$, $R = 320$, $N = 1000$, $\sigma_1 = \sigma_3 = 0.31$ (а), $\sigma_1 = \sigma_3 = 0.18$ (б).

Как и в предыдущих разделах, для оценки степени межслойной синхронизации использовалась глобальная ошибка межслойной синхронизации δ (3.6) (время усреднения $T = 10^4$), которая отдельно рассчитывалась для каждой пары слоев: δ^{ml} , где m и l – номера слоев, что позволяло фиксировать как полную синхронизацию, так и удаленную. Кроме того использовалась локальная ошибка межслойной синхронизации, которая определяется следующим уравнением

(выражение внутри скобок в уравнении (3.6)):

$$\delta_i^{ml} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T (x_i^m(n) - x_i^l(n))^2. \quad (3.10)$$

Принимая во внимание тот факт, что исследуемая трехслойная сеть является неоднородной (слои с различными парциальными элементами), эффекты синхронизации можно трактовать только в их эффективном смысле, то есть необходимо указать критерий синхронизации:

$$\delta^{ml} < 0.005. \quad (3.11)$$

Это значение произвольно, и любое достаточно малое значение δ^{ml} может быть выбрано в качестве порога, но качественно результаты останутся теми же. Если $\delta^{13} < 0.005$, но $\delta^{12} > 0.005$ и $\delta^{23} > 0.005$, то можно говорить об эффективной удаленной синхронизации. Полная эффективная синхронизация наблюдается, когда $\delta^{13} < 0.005$, $\delta^{12} < 0.005$ и $\delta^{23} < 0.005$. Те же условия применяются к локальной ошибке синхронизации (3.10).

3.5.1 Синхронизация в сети отображений Эно-Лози-Эно

В данном подразделе рассматривается динамика трехслойной сети, в которой внешние слои представляют собой кольца отображений Эно, которые демонстрируют химерные состояния, а передающий (средний) слой – кольцо отображений Лози, которое может демонстрировать уединенные состояния. В начале сила внутрислойной связи была зафиксирована для всех слоев: $\sigma_1 = \sigma_3 = 0.31$ и $\sigma_2 = 0.14$. При таких значениях силы связи внешние слои (кольца Эно) демонстрируют комбинированную химеру: амплитудную и фазовую (рис. 3.19,а), а передающий слой находится в режиме уединенных состояний (аналогично рис. 3.19,б).

На рисунке 3.20 представлена зависимость глобальной ошибки синхронизации от силы межслойной связи. Используя этот график и применяя критерий синхронизации (3.11), можно определить, какой тип синхронизации наблюдается в сети (3.8). При достаточно слабой межслойной связи ($k < 0.14$) глобальная ошибка синхронизации $\delta^{ml} > 0.005$, следовательно, кольца несинхронизированы. При $k = 0.14$ значение глобальной ошибки синхронизации между первым и третьим слоями становится $\delta^{13} < 0.005$, что удовлетворяет условию синхронизации (3.11), при этом δ^{12} и δ^{23} больше 0.005. Данная ситуация соответствует наличию в системе удаленной синхронизации. При увеличении силы межслойной связи до $k = 0.6$, $\delta^{13} \rightarrow 0$ (что показано на вставке рис. 3.20), а значения δ^{12} и δ^{23} принимают малые, но ненулевые значения (≈ 0.01) в интервале изменения межслойной связи $k \in [0.13, 0.32]$. Таким образом, глобальная ошибка синхронизации между первым и вторым слоями, а также вторым и третьим слоями не

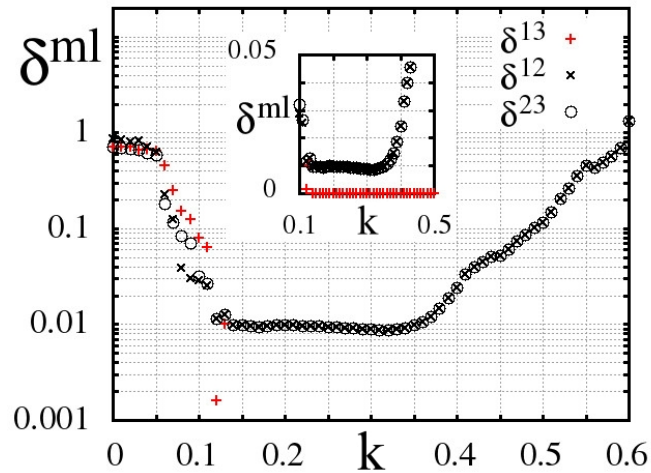


Рисунок 3.20. Зависимости глобальной ошибки синхронизации между первым и третьим слоями δ^{13} (красные крестики), между первым и вторым слоями δ^{12} (черные крестики) и между вторым и третьем слоями δ^{23} (черные кружки) в сети отображений Эно-Лози-Эно в зависимости от силы межслойной связи k .

Ось ординат представлена в логарифмическом масштабе. На вставке приведена зависимость в линейном масштабе. Другие параметры:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 0.31, \sigma_2 = 0.14, R = 320, \alpha = 1.4, \beta = 0.3, N = 1000.$$

удовлетворяет условию синхронизации (3.11), а между первым и третьим слоями удовлетворяет. Следовательно, можно сделать вывод, что в трехслойной сети отображений Эно-Лози-Эно при такой силе внутрислойной связи наблюдается только удаленная синхронизация.

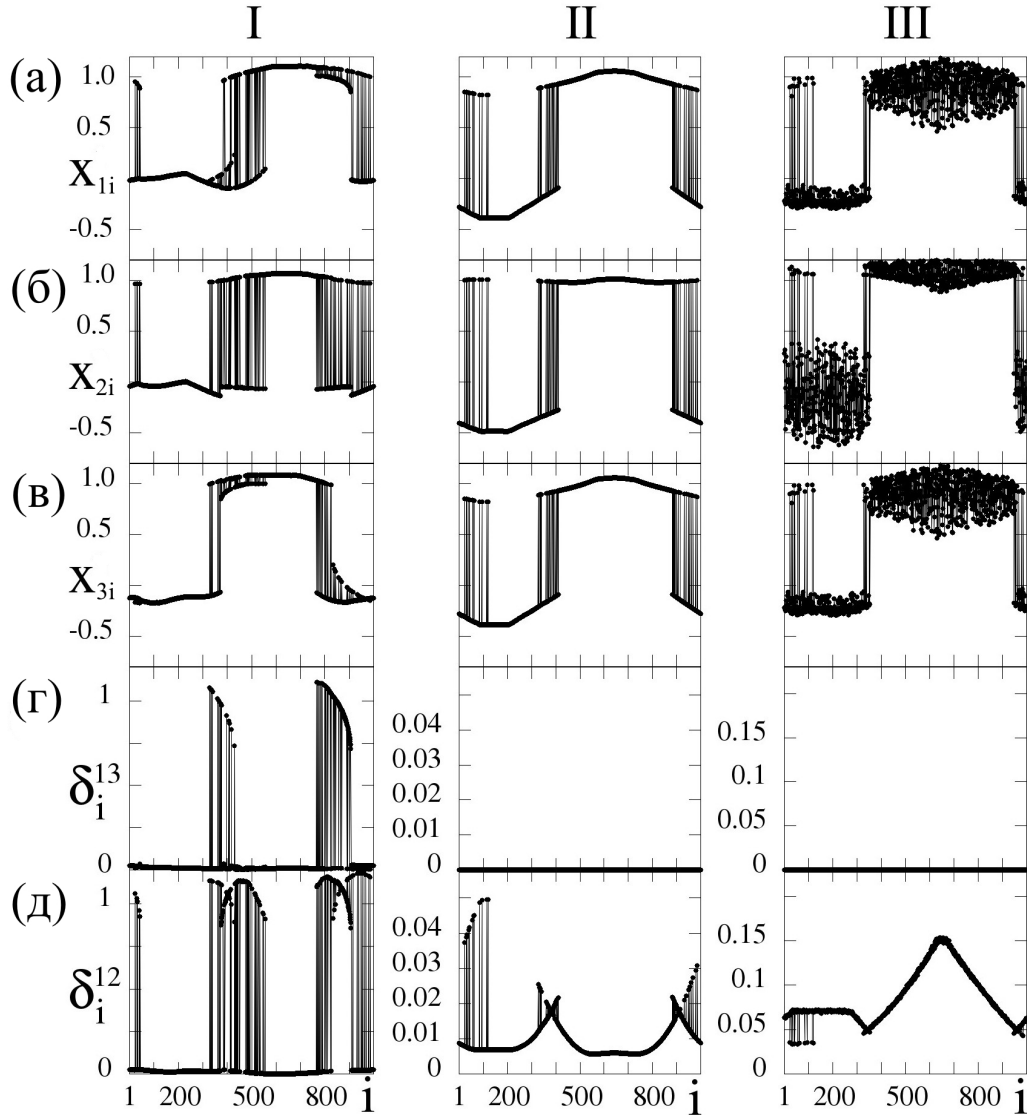


Рисунок 3.21. Динамика колец в трехслойной сети отображений Эно-Лози-Эно при различных значениях межслойной связи k : 0.07 (I столбец), 0.23 (II столбец) и 0.48 (III столбец). (а), (б), (в) Мгновенные профили x_{1i} , x_{2i} , x_{3i} , (г) локальная ошибка синхронизации (3.10) между первым и третьим слоями δ_i^{13} и (д) между первым и вторым слоями δ_i^{12} в зависимости от номера элемента i .

Другие параметры такие же, как на рисунке 3.20.

На рисунке 3.21 приведены мгновенные профили каждого слоя (а)–(в) и распределение локальной ошибки синхронизации (3.10) между первым и третьим слоем δ_i^{13} (г) и между первым и вторым слоем δ_i^{12} (д) для трех выбранных значений межслойной связи k (столбцы I, II, и III) в сети отображений Эно-Лози-Эно. Как видно из рисунков 3.21, I, г и 3.21, I, д, при малой силе межслойной связи ($k = 0.07$) все элементы сети в некогерентных областях остаются практически рассинхронизированными. Благодаря взаимодействию пространственно-временные режимы в слоях влияют друг на друга и существенно меняются. Уединенные узлы в передающем слое как бы “выталкивают” некоторые элементы первого и третьего слоев из когерентного режима (рис. 3.21, I, а и 3.21, I, в). Химерные состояния, установившиеся во внешних слоях, искажают когерентные части в передающем слое, и индуцируются фазовые химеры во втором слое (рис. 3.21, I, б). Тем не менее, можно наблюдать, что условие синхронизации (3.11) выполняется для когерентных кластеров внешних слоев $\delta_i^{13} < 0.005$ (рис. 3.21, I, г). В этом случае можно говорить о частичной удаленной синхронизации.

При увеличении силы межслойной связи в системе устанавливается режим удаленной синхронизации химерных состояний (рис. 3.21, II). Пространственно-временные структуры в первом и третьем слоях идентичны (рис. 3.21, II, а и 3.21, II, в), локальная ошибка синхронизации $\delta_i^{13} \simeq 0$ (рис. 3.21, II, г), что удовлетворяет критерию синхронизации (3.11). При этом помимо фазовой химеры (некогерентные кластеры: $320 \leq i \leq 415$ и $880 \leq i \leq 900$) устанавливается химера уединенных состояний (некогерентные кластеры: $20 \leq i \leq 120$ и $920 \leq i \leq 990$). Таким образом, впервые установлен эффект удаленной синхронизации химеры уединенных состояний для системы Эно-Лози-Эно. Стоит также отметить, что взаимодействие между слоями индуцирует появление как фазовой химеры, так и химеры уединенных состояний (рис. 3.21, II, б), которые качественно повторяют режимы во внешних слоях, однако, $\delta^{12} = \delta^{23} = 0.009642$, что не удовлетворяет условию синхронизации (3.11).

Обратим внимание, что для химеры уединенных состояний локальная ошибка имеет наибольшее значение: $\delta^{12} = \delta^{23}$ (рис. 3.21, II, д).

Дальнейшее увеличение силы межслойной связи приводит к разрушению химерных структур и переходу к полностью некогерентным режимам во всех трех слоях (рис. 3.21, III). Тем не менее эти режимы являются химероподобными и могут наблюдаться в узком диапазоне вариации силы межслойной связи. При этом хорошо выражена удаленная синхронизация: $\delta_i^{13} \simeq 0$ (рис. 3.21, III, г), а δ_i^{12} и δ_i^{23} достаточно большие (рис. 3.21, III, д).

Важно отметить, что доминирующее влияние на изменение пространственно-временных режимов во всех трех слоях по мере увеличения силы межслойной связи оказывают структуры во внешних слоях (в рассматриваемом случае – кольца нелокально связанных отображений Эно).

Далее была проанализирована динамика трехслойной сети отображений Эно-Лози-Эно в зависимости от внутрислойной связи передающего кольца σ_2 при увеличении межслойной связи k . Изолированное кольцо нелокально связанных отображений Лози может демонстрировать когерентные пространственно-временные режимы и режимы уединенных состояний по мере уменьшения σ_2 [73, 74]. При выбранных значениях параметров кольца отображений Лози ($\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$, $R = 320$) уединенные состояния наблюдаются в интервале $[0, 0.23]$. На рисунке 3.22 приведена карта областей синхронизации и десинхронизации для сети отображений Эно-Лози-Эно на плоскости параметров (k, σ_2) . Как видно из рисунка 3.22, полная синхронизация достигается в ограниченном диапазоне силы внутрислойной связи передающего слоя $\sigma_2 \in [0.22, 0.48]$. Значение $\sigma_2 = 0.22$ в изолированном кольце отображений Лози близко к границе перехода от режима уединенных состояний к режиму когерентности (при увеличении σ_2), то есть *полная синхронизация наблюдается только при когерентном режиме в передающем слое*. Удаленная синхронизация (область 2 на рис. 3.22) наблюдается в пределах конечного интервала межслойной силы связи $k \in [0.11, 0.65]$ и имеет место при любом значении внутрислойной связи σ_2

в передающем слое. Последнее означает, что *удаленная синхронизация наблюдается независимо от того, какой динамический режим устанавливается в передающем слое*. Исследования показывают, что появление уединенных состояний и увеличение количества уединенных узлов при уменьшении $\sigma_2 < 0.22$ препятствует полной синхронизации в сети отображений Эно-Лози-Эно, но не влияет на удаленную синхронизацию внешних слоев.

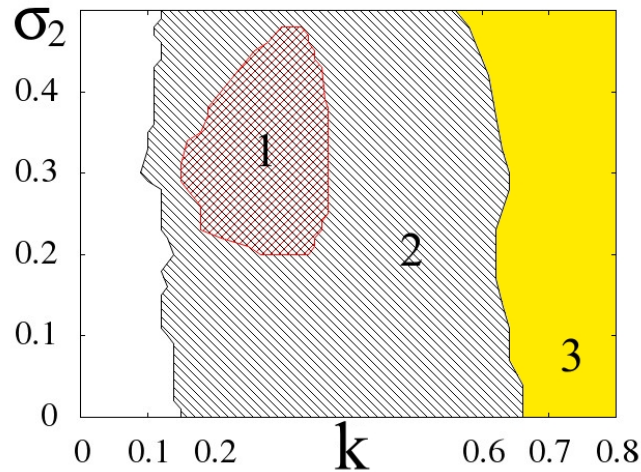


Рисунок 3.22. Области синхронизации и десинхронизации для трехслойной сети отображений Эно-Лози-Эно на плоскости параметров (k, σ_2) . Белая область соответствует десинхронизированным слоям, красная заштрихованная область 1 соответствует полной синхронизации ($\delta^{ml} < 0.005$), черная заштрихованная область 2 относится к удаленной синхронизации ($\delta^{13} < 0.005$ и $\delta^{23} > 0.005$, $\delta^{13} > 0.005$), в области 3 траектории уходят на бесконечность. Другие параметры как на рис. 3.20. Размер шага по σ_2 и k равен 0.01. Для построения карты использовалось 3 набора случайных начальных условий динамических переменных.

3.5.2 Синхронизация в сети отображений Лози-Эно-Лози

Перейдем к рассмотрению динамики трехслойной сети ((3.8)), в которой кольца нелокально связанных отображений Лози являются внешними слоями, а кольца отображений Эно – передающим слоем. Значения внутрислойной связи были выбраны таким образом, что в кольце отображений Лози устанавливаются уединенные состояния (как на рис. 3.19,б, $\sigma_1 = \sigma_3 = 0.18$), а в кольце отображений Эно – некогерентный режим при $\sigma_2 = 0.13$. Зависимость глобальной ошибки синхронизации δ^{ml} от силы межслойной связи k изображена на рисунке 3.23. Как видно из зависимости $\delta^{13}(k)$, внешние слои начинают синхронизироваться даже при очень слабой силе связи ($k \simeq 0.10$). Значение δ^{13} стремится к нулю в интервале $k \in [0.10, 0.58]$, что видно на вставке рисунка 3.23. Полная удаленная синхронизация ($\delta^{13} \simeq 0$) наблюдается уже при $k \simeq 0.1$, что раньше, чем в случае сети отображений Эно-Лози-Эно (рис. 3.20). Кроме того, в этом случае отчетливо наблюдается эффективная полная синхронизация ($\delta^{13} < 0.005$, $\delta^{23} < 0.005$, $\delta^{33} < 0.005$) при $k \in [0.21, 0.38]$. Дальнейшее увеличение межслойной связи приводит к разрушению полной синхронизации, а удаленная синхронизация сохраняется до $k = 0.58$.

На рисунке 3.24 проиллюстрирована динамика сети отображений Лози-Эно-Лози при различной силе межслойной связи. При слабой силе межслойной связи все слои рассинхронизированы (рис. 3.24, I). Увеличение k (рис. 3.24, II) приводит к серьезной перестройке пространственно-временных структур во всех трех слоях и к формированию амплитудных химер (некогерентные кластеры $1 \leq i \leq 120$, $350 \leq i \leq 650$, $880 \leq i \leq 1000$) и фазовых химер (некогерентные кластеры $220 \leq i \leq 230$, $750 \leq i \leq 770$), сосуществующих с конечным числом уединенных узлов (рис. 3.24, II, а, в). Кроме того, как следует из рис. 3.24, II, г, в системе наблюдается полная удаленная синхронизация $\delta_i^{13} \simeq 0$ такой сложной структуры, но отсутствует полная синхронизация (рис. 3.24, II, д).

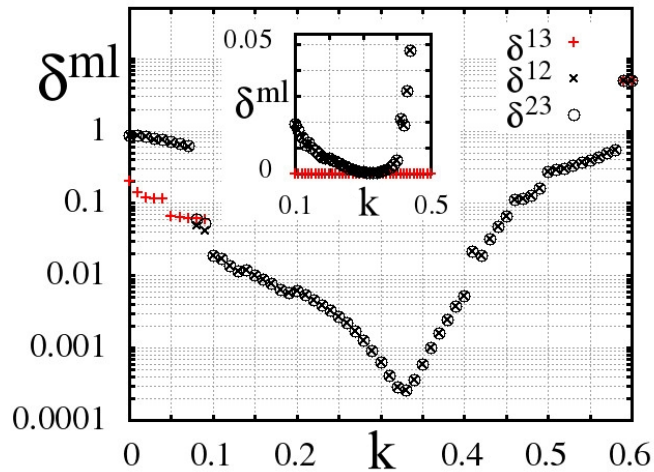


Рисунок 3.23. Зависимости глобальной ошибки синхронизации между первым и третьим слоями δ^{13} (красные крестики), между первым и вторым слоями δ^{12} (черные крестики) и между вторым и третьим слоями δ^{23} (черные кружки) в сети отображений Лози-Эно-Лози в зависимости от силы межслойной связи k .

Ось ординат представлена в логарифмическом масштабе. На вставке приведена зависимость в линейном масштабе. Другие параметры:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 0.18, \sigma_2 = 0.13, R = 320, \alpha = 1.4, \beta = 0.3, N = 1000.$$

Когда межслойная связь становится сильнее (рис. 3.24,III), количество уединенных узлов во всех трех слоях значительно увеличивается, а химеры исчезают. Как и в случае сети отображений Эно-Лози-Эно, динамические режимы во внешних слоях играют определяющую роль в формировании пространственно-временных структур во всей системе с увеличением k . Как видно из рисунка 3.24,III, в системе наблюдается как удаленная, так и полная синхронизация. Отметим, что осцилляторы в уединенном состоянии синхронизованы слабее, для них $0 < \delta_i^{12} < 0.005$ (рис. 3.24,III,д).

На рисунке 3.25 приведена двумерная диаграмма областей синхронизации на плоскости параметров “сила межслойной связи k – сила внутрислойной связи передающего кольца σ_2 ”. Как видно из этой диаграммы, в сети отображений Лози-Эно-Лози наблюдается удаленная синхронизация во всем диапазоне внутрислойной связи $\sigma_2 \in [0, 0.5]$. Однако в отличие от предыдущего случая,

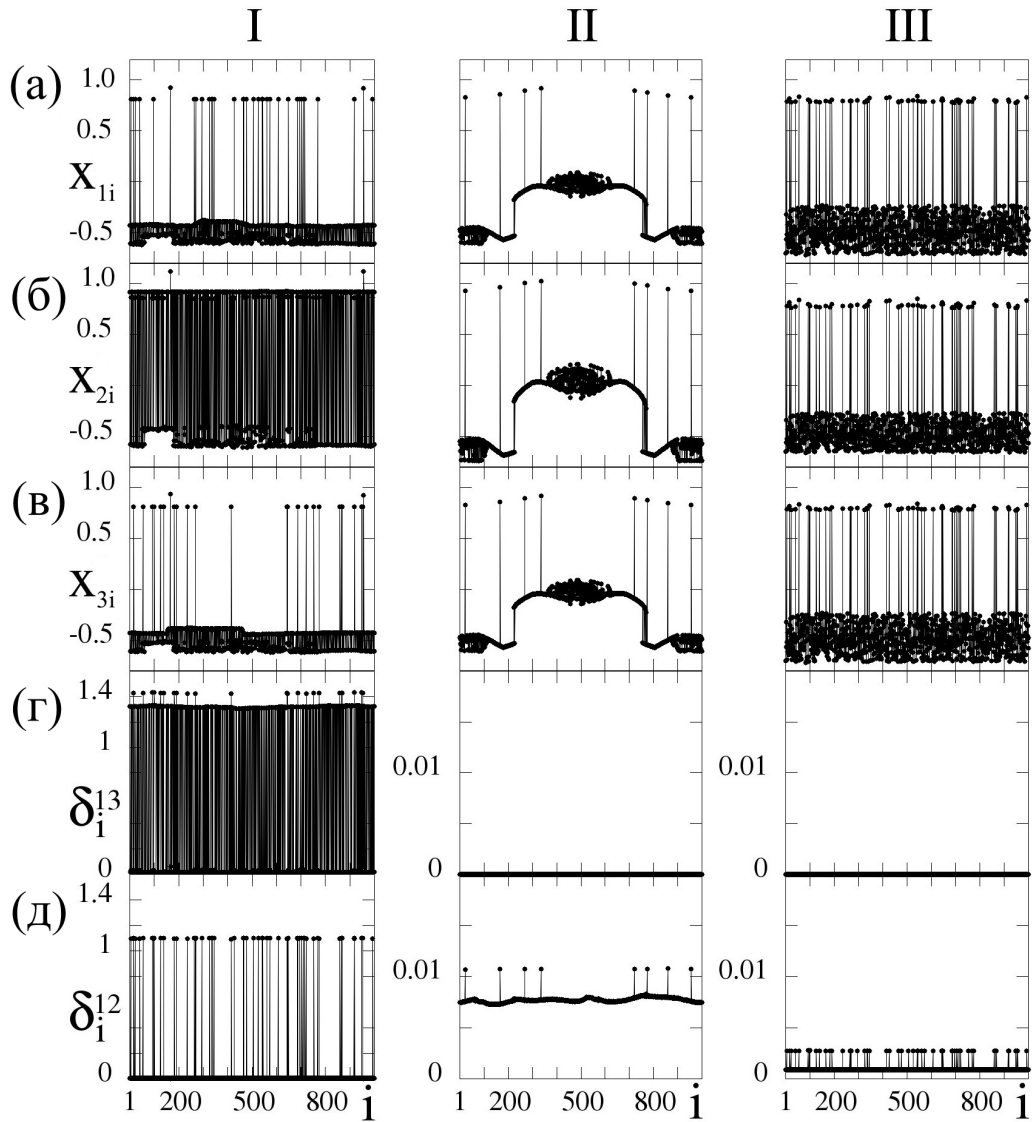


Рисунок 3.24. Динамика колец трехслойной сети отображений Лози-Эно-Лози при различных значениях межслойной связи k : 0.05 (I), 0.17 (II), and 0.36 (III). (а), (б), (в) Мгновенные профили x_{1i} , x_{2i} , x_{3i} , локальная ошибка синхронизации (3.10) между первым и третьим слоями δ_i^{13} (г) и между первым и вторым слоями δ_i^{12} (д) в зависимости от номера элемента i .

Остальные параметры такие же, как на рисунке 3.23.

как левая, так и правая границы области синхронизации смещаются в сторону меньших значений k при увеличении σ_2 (сравните рис. 3.22 и рис. 3.25). Удаленная синхронизация начинает наблюдаться уже при очень слабой силе связи $k \simeq 0.05$ в интервале $\sigma_2 \in [0.17, 0.35]$. Стоит отметить, что в передающем слое (кольцо отображений Эно) именно в этом диапазоне изменения силы внутри-

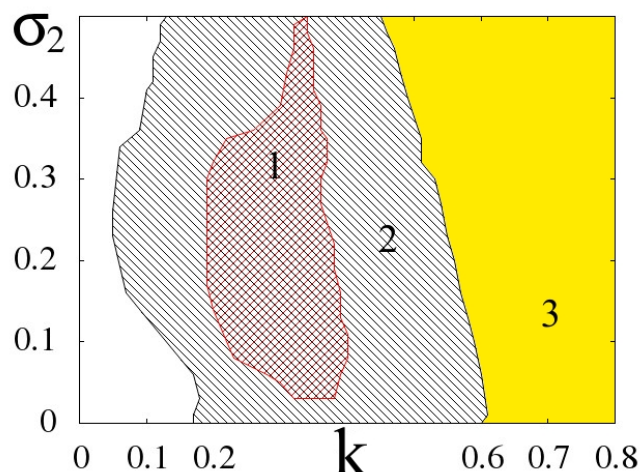


Рисунок 3.25. Области синхронизации и десинхронизации для трехслойной сети отображений Лози-Эно-Лози на плоскости параметров (k, σ_2) .

Обозначения те же, что и на рис. 3.22. Остальные параметры такие же, как на рис. 3.23.

слоистой связи наблюдаются химерные состояния. Полная синхронизация имеет место в сети отображений Лози-Эно-Лози практически для всего диапазона изменения внутрислойной связи σ_2 (рис. 3.25). В отличие от предыдущего случая (рис. 3.22), область полной синхронизации в сети отображений Лози-Эно-Лози больше по силе межслойной связи, но ее ширина сильно зависит от σ_2 . Наиболее широкий диапазон по k соответствуют тем значениям σ_2 , при которых в изолированном кольце нелокально связанных отображений Эно наблюдаются химерные структуры.

3.6 Выводы по третьей главе

В настоящей главе представлены результаты численного анализа динамики двух- и трехслойных сетей ансамблей нелокально связанных нелинейных осцилляторов при различной силе и конфигурации межслойной связи и при различных структурах, реализующихся во взаимодействующих ансамблях. На

основании проведенных исследований можно сформулировать следующие основные выводы:

1. В двухслойной сети осцилляторов ФитцХью-Нагумо с нелокальным взаимодействием внутри слоев и взаимной межслойной связью даже слабая сила межслойной связи через быстрые переменные (порядка 0.06) приводит к установлению как эффективной (с заданной точностью), так и полной синхронизации между кольцами. В случае межслойной связи, вводимой через медленные переменные, для установления синхронного режима требуется значительно более сильная связь (порядка 0.18). При этом синхронизация между слоями наблюдается, когда каждый слой демонстрирует когерентную динамику.
2. Взаимная межслойная связь в двухслойной сети ансамблей осцилляторов ФитцХью-Нагумо через разные переменные (быстрые или медленные), когда в отсутствие межслойной связи одно кольцо демонстрирует химерные состояния, а другое – уединенные состояния, приводит к разным сценариям перехода к полной синхронизации. Когда кольца связаны через быстрые переменные, по мере увеличения межслойной связи в сети наблюдаются в основном химерные состояния. Если взаимная межслойная связь осуществляется через медленные переменные, то режим уединенных состояний оказывается доминирующим в поведении всей сети и управляет динамикой второго слоя. Однако для обоих типов взаимосвязи существуют конечные интервалы изменения силы межслойной связи, в пределах которых оба слоя демонстрируют асинхронные уединенные состояния.
3. Однонаправленная связь (через быстрые или медленные переменные) в двухслойной сети осцилляторов ФитцХью-Нагумо может привести к подавлению как уединенных, так и химерных состояний. В случае однонаправленной связи между кольцами через быстрые переменные (активаторы)

возможно подавление как химерных, так и уединенных состояний и установление в сети пространственно-временного режима управляющего кольца. При вынужденной синхронизации уединенных состояний глобальная ошибка межслойной синхронизации меньше, чем в случае синхронизации химерных состояний. В случае однонаправленной связи через медленные переменные (ингибиторы), хотя исходная структура управляемого кольца быстро разрушается, структура управляющего слоя может лишь частично воспроизводиться в управляемом слое.

4. В двухслойной сети отображений с бистабильной динамикой при нелокальной внутрислойной связи и связи между слоями, сила которой задается независимыми источниками цветного гауссова шума, может устанавливаться частичная или полная синхронизация пространственно-временной динамики слоев (в том числе сложных режимов, подобных химерам). Эффекты синхронизации наблюдаются как для идентичных, так и для неидентичных слоев, различающихся силой внутрислойной связи. При этом спектр шума межслойной связи оказывает существенное влияние на синхронизацию структур: для рассмотренной сети связанных хаотических отображений с бистабильной динамикой наиболее благоприятным оказывается белый шум, что отличается от результатов, описанных в статье [175].
5. Разреженность связи в двухслойной сети ансамблей нелокально связанных хаотических отображений ведет к тому, что пространственные профили взаимодействующих слоев расщепляются на отдельные части, связанные с динамикой связанных и несвязанных узлов. Анализ внутри- и межслойных связей показывает, что эффективная синхронизация не зависит от силы нелокальной связи между элементами внутри каждого слоя. Более того, увеличение силы и радиуса внутрислойной связи не приводит к «сглаживанию» мгновенных пространственных профилей синхронных структур в слоях.

6. В случае неразрезанной и слабо разрезанной (когда количество связанных элементов больше, чем несвязанных) межслойной связи в двухслойной сети нелокально связанных хаотических отображений может быть достигнута вынужденная и взаимная синхронизация (на профилях связанных элементов) сложных пространственно-временных структур, включая химеры и уединенные состояния. При этом эффективная взаимная синхронизация наблюдается в конечном диапазоне силы межслойной связи, а ширина этого диапазона и порог синхронизации по силе межслойной связи не зависят от степени разреженности. Увеличение количества отсутствующих связей ($> 50\%$ всех элементов сети) сильно снижает степень синхронизации и даже приводит к рассинхронизации элементов сетей. Установлено, что порог синхронизации и ширина области эффективной вынужденной синхронизации по параметру степени разреженности и силе межслойной связи могут зависеть от пространственно-временного режима управляющего слоя. При наличии сильно разреженной однонаправленной связи начинает преобладать собственная динамика управляемого слоя, определяемая нелокальными внутрислойными параметрами связи.
7. В неоднородной трехслойной сети нелокально связанных хаотических отображений, в которой внешние слои взаимно связаны только со средним слоем, а также динамика внешних слоев принципиально отличается от динамики передающего слоя, возможно установление удаленной и полной синхронизации химерных и уединенных состояний. При этом динамика трехслойной сети определяется преимущественно динамикой внешних слоев. Так, если во внешних слоях изначально наблюдаются химерные состояния, а в передающем – уединенные состояния, то при связи слоев преимущественно устанавливаются химерные состояния, и наоборот.
8. Наличие уединенных состояний и увеличение количества уединенных узлов в передающем слое неоднородной трехслойной сети хаотических осцил-

ляторов препятствует полной синхронизации сети, но не влияет на удаленную синхронизацию внешних слоев. В случае реализации химерных структур в передающем слое сети полная и удаленная синхронизация имеют место в большом диапазоне изменения межслойной связи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей диссертационной работе решена важная научная задача в области радиофизики и нелинейной динамики, которая связана с анализом установления, существования, подавления и синхронизации химерных и уединенных состояний в ансамблях (кольцах) нелокально связанных нелинейных осцилляторов с дискретным и непрерывным временем при наличии в системе различных неоднородностей. Принципиально новыми являются результаты исследований влияния аддитивного шума на химерные состояния, уединенные состояния, влияния неоднородностей в связях и динамики элементов на полную, кластерную, удаленную синхронизацию.

В результате проведенных исследований были получены следующие основные результаты:

1. При воздействии аддитивного шума на систему нелокально связанных хаотических отображений существует оптимальное (ненулевое) значение и интенсивности шума, при которой вероятность установления и наблюдения фазовых химер возрастает. Данный эффект носит резонансо-подобный характер, так как при “неоптимальных” значениях интенсивности шума вероятность установления этих пространственно-временных структур ниже, и даже может стремиться к нулю. Шумовая модуляция управляющих параметров парциальных элементов может привести к подобным эффектам.
2. Модуляция силы связи между элементами источниками цветного шума приводит к подавлению кластеров некогерентности фазовой и двухъямной химерных состояний в ансамблях нелокально связанных хаотических отображений. Более того показаны принципиальные различия в динамике системы при использовании независимых источников шума и общего

источника шума. В первом случае, в системе появляются уединенные состояния, а во втором – полная хаотическая синхронизация всех элементов ансамбля.

3. Для кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо, в котором установление чисто химерных структур со случайных начальных условий при определенных параметрах имеет малую вероятность, показано, что введение аддитивного шума в кольца нелокально связанных элементов способно увеличить эту вероятность. При отсутствие аддитивного шума в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо возможно сосуществование режимов химерных состояний, уединенных состояний и режима сосуществования химерных и уединенных состояний. Воздействие аддитивного шума ведет к увеличению вероятности установления химер, при этом вероятности реализации других структур снижаются до 0%. Таким образом, при наличии аддитивного шумового воздействия химерные состояния проявляют себя как более устойчивые и доминирующие структуры среди всех остальных, сосуществующих в ансамбле.
4. Проведены исследования устойчивости уединенных состояний к аддитивному и мультипликативному шумам в кольцах нелокально связанных нелинейных осцилляторов. Показано, что в общем случае увеличение интенсивности аддитивного и мультипликативного шума ведет к сужению интервала существования уединенных состояний по силе связи, а также к уменьшению количества уединенных узлов в ансамбле преимущественно только на границах интервала существования уединенных состояний по параметру силы связи. Однако, в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо в интервале слабой связи введение аддитивного шума способствовало появлению уединенных состояний при силе связи на примерно 0.04 больше, чем максимальная сила связи, при которой наблюдались уединенные узлы в ансамбле без шума.

5. Анализ влияния неоднородного распределения силы связи или параметров локальной динамики парциальных элементов в кольцах нелокально связанных нелинейных осцилляторов показал, что такая неоднородность может привести к увеличению интервала наблюдения уединенных состояний и их количества. Однако, это лучше видно для случая неоднородного распределения силы связи, так как неоднородность по управляющим параметрам парциальных элементов при увеличении ширины интервала распределений ведет к уходу траекторий на бесконечность, предельная ширина разброса зависит от собственно динамики парциальных элементов, а также от статистики неоднородного распределения (нормальное или равномерное).
6. Проведены исследования динамики двухслойной сети взаимно связанных ансамблей нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо при различном типе межслойной связи (через быстрые или через медленные переменные) в случае установления в одном кольце уединенных состояний, а в другом – химерных (в отсутствие межслойной связи). Установлено, что даже слабая сила межслойной связи через быстрые переменные (порядка 0.06) приводит к установлению как эффективной (с заданной точностью), так и полной синхронизации между кольцами. При связи через медленные переменные требуется в три раза большая сила связи для достижения синхронизации. Более того, взаимная межслойная связь через разные переменные (быстрые или медленные) приводит к разным сценариям перехода к полной синхронизации. Когда кольца связаны через быстрые переменные, по мере увеличения межслойной связи в сети наблюдаются в основном химерные состояния. Если взаимная межслойная связь осуществляется через медленные переменные, то режим уединенных состояний оказывается доминирующим в поведении всей сети и управляет динамикой второго слоя.
7. Проведено численное исследование влияния шумовой межслойной связи между ансамблями нелокально связанных нелинейных отображений

с бистабильной динамикой на возможность установления синхронных профилей. Показано, что как частичная, так и полная синхронизации пространственно-временных структур (в том числе сложных режимов, подобных химерам) могут наблюдаться в такой двухслойной сети. Однако спектр шума межслойной связи оказывает существенное влияние на синхронизацию структур: для рассмотренной сети связанных хаотических отображений с бистабильной динамикой наиболее благоприятным оказывается белый шум.

8. В результате численного моделирования двухслойной сети ансамблей нелокально связанных хаотических отображений при наличии разреженной межслойной связи было показано, что такая межслоная связь ведет к расщеплению пространственных профилей отдельных ансамблей на отдельные части, связанные с динамикой связанных и несвязанных узлов. Анализ синхронизации с помощью расчета глобальной ошибки синхронизации отдельно для связанных и несвязанных элементов показал, что в случае неразрезанной и слабопореженной (когда количество связанных элементов больше, чем несвязанных) межслойной связи колец нелокально связанных хаотических отображений может быть достигнута вынужденная и взаимная синхронизации (на профилях связанных элементов) сложных пространственно-временных структур, включая химеры и уединенные состояния. В случае сильнопореженной связи степень синхронизации сильно снижается и даже наблюдается рассинхронизация элементов сетей. Для случая однонаправленной связи между ансамблями, синхронизации и ширина области эффективной вынужденной синхронизации по параметру степени разреженности и силе межслойной связи могут зависеть от пространственно-временного режима управляющего ансамбля.
9. Установлено, что в неоднородной трехслойной сети при наличии связи только между передающим и внешними слоями, а также при различной дина-

мики в передающем и внешних слоях, возможно установление удаленной и полной синхронизации химерных и уединенных состояний. При этом, если во внешних слоях изначально наблюдаются химерные состояния, а в передающем – уединенные состояния, то при связи слоев преимущественно устанавливаются химерные состояния, и наоборот. С другой стороны, наличие уединенных состояний и увеличение количества уединенных узлов в передающем слое неоднородной трехслойной сети хаотических осцилляторов препятствует полной синхронизации сети, но не влияет на удаленную синхронизацию внешних слоев. При этом показано, что химерные состояния в передающем слое не влияют на возможность установления полной и удаленной синхронизации в рассматриваемой сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prigogine, I.* Self-Organisation in Nonequilibrium Systems: Towards A Dynamics of Complexity / I. Prigogine, G. Nicolis // Bifurcation Analysis: Principles, Applications and Synthesis / Ed. by M. Hazewinkel, R. Jurkovich, J. H. P. Paelinck. — Dordrecht: Springer Netherlands, 1985. — Pp. 3–12.
2. *Kuramoto, Yoshiki.* Chemical turbulence / Yoshiki Kuramoto. — Springer, 1984.
3. Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization networks / V.S. Afraimovich, V.I. Nekorkin, G.V. Osipov, V.D. Shalfeev. — World Scientific, 1995. — Vol. 6.
4. *Epstein, I.R.* An introduction to nonlinear chemical dynamics: oscillations, waves, patterns, and chaos / I.R. Epstein, J.A. Pojman. — Oxford University Press, 1998.
5. *Winfree, Arthur T.* The geometry of biological time / Arthur T Winfree. — Springer, 1980. — Vol. 2.
6. *Nekorkin, Vladimir I.* Synergetic phenomena in active lattices: patterns, waves, solitons, chaos / Vladimir I Nekorkin, Manuel G Velarde. — Springer, 2002.
7. *Malchow, Horst.* Spatiotemporal patterns in ecology and epidemiology: theory, models, and simulation / Horst Malchow, Sergei V Petrovskii, Ezio Venturino. — CRC Press, 2007.
8. Synchronization in networks of networks: The onset of coherent collective behavior in systems of interacting populations of heterogeneous oscillators /

- E. Barreto, B. Hunt, E. Ott, P. So // *Physical Review E*. — 2008. — Vol. 77, no. 3. — P. 036107.
9. Synchronization: From coupled systems to complex networks / S. Boccaletti, A.N. Pisarchik, C.I. Del Genio, A. Amann. — Cambridge University Press, 2018.
10. *Benzi, R.* The mechanism of stochastic resonance / R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1981. — Vol. 14, no. 11. — P. L453.
11. *Horsthemke, Werner.* Noise-induced transitions in physics, chemistry, and biology / Werner Horsthemke, René Lefever // *Noise-induced transitions: theory and applications in physics, chemistry, and biology*. — 1984. — Pp. 164–200.
12. *Neiman, Alexander.* Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems / Alexander Neiman // *Physical Review E*. — 1994. — Vol. 49, no. 4. — P. 3484.
13. *Arnold, L.* Random dynamical systems / L. Arnold // *Dynamical systems*. — Springer, 1995. — Pp. 1–43.
14. *Pikovsky, Arkady S.* Coherence resonance in a noise-driven excitable system / Arkady S Pikovsky, Jürgen Kurths // *Physical Review Letters*. — 1997. — Vol. 78, no. 5. — P. 775.
15. Stochastic resonance: noise-enhanced order / V.S. Anishchenko, A.B. Neiman, F. Moss, L. Schimansky-Geier // *Physics-Uspeski*. — 1999. — Vol. 42, no. 1. — P. 7.
16. *Goldobin, Denis S.* Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise / Denis S Goldobin, Arkady Pikovsky // *Physical Review E*. — 2005. — Vol. 71, no. 4. — P. 045201.

17. *McDonnell, Mark D.* The benefits of noise in neural systems: bridging theory and experiment / Mark D McDonnell, Lawrence M Ward // *Nature Reviews Neuroscience*. — 2011. — Vol. 12, no. 7. — Pp. 415–425.
18. *Schimansky-Geier, L.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator / L Schimansky-Geier, H Herzel // *Journal of Statistical Physics*. — 1993. — Vol. 70. — Pp. 141–147.
19. *Shulgin, Boris.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by a periodic force / Boris Shulgin, Alexander Neiman, Vadim Anishchenko // *Physical review letters*. — 1995. — Vol. 75, no. 23. — P. 4157.
20. *Arnold, L.* Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation: a case study / L. Arnold, N. Sri Namachchivaya, K.R. Schenk-Hoppé // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 1996. — Vol. 6, no. 11. — Pp. 1947–1975.
21. Interacting coherence resonance oscillators / Seung Kee Han, Tae Gyu Yim, DE Postnov, OV Sosnovtseva // *Physical Review Letters*. — 1999. — Vol. 83, no. 9. — P. 1771.
22. *Bashkirtseva, I.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, H. Schurz // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2009. — Vol. 39, no. 1. — Pp. 72–82.
23. Stochastic resonance in bistable systems / L Gammaitoni, F Marchesoni, E Menichella-Saetta, S Santucci // *Physical Review Letters*. — 1989. — Vol. 62, no. 4. — P. 349.
24. *Lindner, Benjamin.* Analytical approach to the stochastic FitzHugh-Nagumo system and coherence resonance / Benjamin Lindner, Lutz Schimansky-Geier // *Physical Review E*. — 1999. — Vol. 60, no. 6. — P. 7270.

25. Theory of collective firing induced by noise or diversity in excitable media / Claudio J Tessone, Alessandro Scire, Raúl Toral, Pere Colet // *Physical Review E*. — 2007. — Vol. 75, no. 1. — P. 016203.
26. *Lafuerza, Luis F.* Nonuniversal results induced by diversity distribution in coupled excitable systems / Luis F Lafuerza, Pere Colet, Raul Toral // *Physical review letters*. — 2010. — Vol. 105, no. 8. — P. 084101.
27. *Klinshov, Vladimir.* Two scenarios for the onset and suppression of collective oscillations in heterogeneous populations of active rotators / Vladimir Klinshov, Igor Franović // *Physical Review E*. — 2019. — Vol. 100, no. 6. — P. 062211.
28. Diversity-induced resonance / Claudio J Tessone, Claudio R Mirasso, Raúl Toral, James D Gunton // *Physical review letters*. — 2006. — Vol. 97, no. 19. — P. 194101.
29. Neural heterogeneity promotes robust learning / Nicolas Perez-Nieves, Vincent CH Leung, Pier Luigi Dragotti, Dan FM Goodman // *Nature communications*. — 2021. — Vol. 12, no. 1. — P. 5791.
30. *Kuramoto, Y.* Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators / Y Kuramoto, D Battogtokh // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. — 2002. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 380–385.
31. *Abrams, D.M.* Chimera states for coupled oscillators / D.M. Abrams, S.H. Strogatz // *Physical Review Letters*. — 2004. — Vol. 93, no. 17. — P. 174102.
32. Loss of coherence in dynamical networks: spatial chaos and chimera states / Iryna Omelchenko, Yuri Maistrenko, Philipp Hövel, Eckehard Schöll // *Physical Review Letters*. — 2011. — Vol. 106, no. 23. — P. 234102.

33. *Panaggio, Mark J.* Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators / Mark J Panaggio, Daniel M Abrams // *Nonlinearity*. — 2015. — Vol. 28, no. 3. — P. R67.
34. *Zakharova, Anna.* Chimera patterns in networks: Interplay between dynamics, structure, noise, and delay / Anna Zakharova. — Springer Nature, 2020.
35. *Maistrenko, Yuri.* Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions / Yuri Maistrenko, Bogdan Penkovsky, Michael Rosenblum // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 89, no. 6. — P. 060901.
36. *Jaros, Patrycja.* Chimera states on the route from coherence to rotating waves / Patrycja Jaros, Yuri Maistrenko, Tomasz Kapitaniak // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 91, no. 2. — P. 022907.
37. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems / S.A. Bogomolov, A.V. Slepnev, G.I. Strelkova, E. Schöll, V.S. Anishchenko // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2017. — Vol. 43. — Pp. 25–36.
38. *Panaggio, Mark J.* Chimera states on a flat torus / Mark J Panaggio, Daniel M Abrams // *Physical Rreview Letters*. — 2013. — Vol. 110, no. 9. — P. 094102.
39. Chimera states in complex networks: interplay of fractal topology and delay / Jakub Sawicki, Iryna Omelchenko, Anna Zakharova, Eckehard Schöll // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2017. — Vol. 226, no. 9. — Pp. 1883–1892.
40. *Schöll, Eckehard.* Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics / Eckehard Schöll // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2016. — Vol. 225, no. 6. — Pp. 891–919.

41. *Schöll, Eckehard*. Chimeras in physics and biology: Synchronization and desynchronization of rhythms / Eckehard Schöll // *Nova Acta Leopoldina*. — 2021. — Vol. 425. — Pp. 67–95.
42. Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of nonlocally coupled chaotic oscillators? / N Semenova, A Zakharova, E Schöll, V Anishchenko // *EPL (Europhysics Letters)*. — 2015. — Vol. 112, no. 4. — P. 40002.
43. *Shima, Shin-ichiro*. Rotating spiral waves with phase-randomized core in nonlocally coupled oscillators / Shin-ichiro Shima, Yoshiki Kuramoto // *Physical Review E*. — 2004. — Vol. 69, no. 3. — P. 036213.
44. Chimera states in networks of van der Pol oscillators with hierarchical connectivities / Stefan Ulonska, Iryna Omelchenko, Anna Zakharova, Eckehard Schöll // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2016. — Vol. 26, no. 9. — P. 094825.
45. *Zakharova, Anna*. Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks / Anna Zakharova, Marie Kapeller, Eckehard Schöll // *Physical Review Letters*. — 2014. — Vol. 112, no. 15. — P. 154101.
46. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices / Aaron M Hagerstrom, Thomas E Murphy, Rajarshi Roy, Philipp Hövel, Iryna Omelchenko, Eckehard Schöll // *Nature Physics*. — 2012. — Vol. 8, no. 9. — Pp. 658–661.
47. *Tinsley, Mark R*. Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators / Mark R Tinsley, Simbarashe Nkomo, Kenneth Showalter // *Nature Physics*. — 2012. — Vol. 8, no. 9. — Pp. 662–665.
48. *Larger, Laurent*. Virtual chimera states for delayed-feedback systems / Laurent Larger, Bogdan Penkovsky, Yuri Maistrenko // *Physical review letters*. — 2013. — Vol. 111, no. 5. — P. 054103.

49. Chimera states in mechanical oscillator networks / Erik Andreas Martens, Shashi Thutupalli, Antoine Fourriere, Oskar Hallatschek // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 2013. — Vol. 110, no. 26. — Pp. 10563–10567.
50. *Wickramasinghe, Mahesh*. Spatially organized dynamical states in chemical oscillator networks: Synchronization, dynamical differentiation, and chimera patterns / Mahesh Wickramasinghe, István Z Kiss // *PloS one*. — 2013. — Vol. 8, no. 11. — P. e80586.
51. Experimental investigation of chimera states with quiescent and synchronous domains in coupled electronic oscillators / Lucia Valentina Gambuzza, Arturo Buscarino, Sergio Chessa, Luigi Fortuna, Riccardo Meucci, Mattia Frasca // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 90, no. 3. — P. 032905.
52. Imperfect chimera states for coupled pendula / Tomasz Kapitaniak, Patrycja Kuzma, Jerzy Wojewoda, Krzysztof Czołczynski, Yuri Maistrenko // *Scientific reports*. — 2014. — Vol. 4. — P. 6379.
53. Transient scaling and resurgence of chimera states in networks of Boolean phase oscillators / David P Rosin, Damien Rontani, Nicholas D Haynes, Eckehard Schöll, Daniel J Gauthier // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 90, no. 3. — P. 030902.
54. Coexistence of synchrony and incoherence in oscillatory media under nonlinear global coupling / Lennart Schmidt, Konrad Schönleber, Katharina Krischer, Vladimir García-Morales // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2014. — Vol. 24, no. 1. — P. 013102.
55. Cognitive chimera states in human brain networks / K. Bansal, J.O. Garcia, S.H. Tompson, T. Verstynen, J.M. Vettel, S.F. Muldoon // *Science Advances*. — 2019. — Vol. 5, no. 4. — P. eaau8535.

56. Chimera states in neuronal networks: a review / Soumen Majhi, Bidesh K Bera, Dibakar Ghosh, Matjaž Perc // *Physics of life reviews*. — 2019. — Vol. 28. — Pp. 100–121.
57. *Schöll, Eckehard*. Partial synchronization patterns in brain networks / Eckehard Schöll // *Europhysics Letters*. — 2021. — Vol. 136, no. 1. — P. 18001.
58. How dead ends undermine power grid stability / Peter J Menck, Jobst Heitzig, Jürgen Kurths, Hans Joachim Schellnhuber // *Nature communications*. — 2014. — Vol. 5, no. 1. — Pp. 1–8.
59. Spontaneous synchrony in power-grid networks / Adilson E Motter, Seth A Myers, Marian Anghel, Takashi Nishikawa // *Nature Physics*. — 2013. — Vol. 9, no. 3. — Pp. 191–197.
60. *Wang, Bing*. Enhancing synchronization stability in a multi-area power grid / Bing Wang, Hideyuki Suzuki, Kazuyuki Aihara // *Scientific reports*. — 2016. — Vol. 6, no. 1. — Pp. 1–11.
61. *Hong, Sunghoon*. Efficiency and stability in a model of wireless communication networks / Sunghoon Hong, Youngsub Chun // *Social Choice and Welfare*. — 2010. — Vol. 34, no. 3. — Pp. 441–454.
62. *González-Avella, Juan C*. Localized coherence in two interacting populations of social agents / Juan C González-Avella, Mario G Cosenza, Maxi San Miguel // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2014. — Vol. 399. — Pp. 24–30.
63. Robustness of chimera states in nonlocally coupled networks of nonidentical logistic maps / Anne-Kathleen Malchow, Iryna Omelchenko, Eckehard Schöll, Philipp Hövel // *Physical Review E*. — 2018. — Vol. 98, no. 1. — P. 012217.

64. Stability and noise-induced transitions in an ensemble of nonlocally coupled chaotic maps / A.V. Bukh, A.V. Slepnev, V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2018. — Vol. 23, no. 3. — Pp. 325–338.
65. Robustness of chimera states for coupled FitzHugh-Nagumo oscillators / Iryna Omelchenko, Astero Provata, Johanne Hizanidis, Eckehard Schöll, Philipp Hövel // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 91, no. 2. — P. 022917.
66. Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements / Nadezhda Semenova, Anna Zakharova, Vadim Anishchenko, Eckehard Schöll // *Physical Review Letters*. — 2016. — Vol. 117, no. 1. — P. 014102.
67. Chimera patterns: influence of time delay and noise / Anna Zakharova, Sarah Loos, Julien Siebert, Alexandar Gjurchinovski, Eckehard Schöll // *IFAC-PapersOnLine*. — 2015. — Vol. 48, no. 18. — Pp. 7–12.
68. Chimera patterns under the impact of noise / Sarah AM Loos, Jens Christian Claussen, Eckehard Schöll, Anna Zakharova // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 93, no. 1. — P. 012209.
69. Temporal intermittency and the lifetime of chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators / N.I. Semenova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, A. Zakharova // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 6. — P. 061102.
70. *Wu, Hui*. Dynamics of Kuramoto oscillators with time-delayed positive and negative couplings / Hui Wu, Mukesh Dhamala // *Physical Review E*. — 2018. — Vol. 98, no. 3. — P. 032221.
71. Solitary states for coupled oscillators with inertia / Patrycja Jaros, Serhiy Brezetsky, Roman Levchenko, Dawid Dudkowski, Tomasz Kapitaniak, Yuri Maistrenko // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2018. — Vol. 28, no. 1. — P. 011103.

72. Solitary states in adaptive nonlocal oscillator networks / R. Berner, A. Polanska, E. Schöll, S. Yanchuk // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2020. — Vol. 229, no. 12. — Pp. 2183–2203.
73. Transition from complete synchronization to spatio-temporal chaos in coupled chaotic systems with nonhyperbolic and hyperbolic attractors / Elena Rybalova, Nadezhda Semenova, Galina Strelkova, Vadim Anishchenko // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2017. — Vol. 226, no. 9. — Pp. 1857–1866.
74. "Coherence–incoherence" transition in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators with nonhyperbolic and hyperbolic attractors / Nadezhda I Semenova, Elena V Rybalova, Galina I Strelkova, Vadim S Anishchenko // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2017. — Vol. 22, no. 2. — Pp. 148–162.
75. *Semenova, Nadezhda*. Mechanism of solitary state appearance in an ensemble of nonlocally coupled Lozi maps / Nadezhda Semenova, Tatyana Vadivasova, Vadim Anishchenko // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2018. — Vol. 227, no. 10. — Pp. 1173–1183.
76. Delay engineered solitary states in complex networks / Leonhard Schülen, Saptarshi Ghosh, Ajay Deep Kachhvah, Anna Zakharova, Sarika Jalan // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2019. — Vol. 128. — Pp. 290–296.
77. Weak multiplexing in neural networks: Switching between chimera and solitary states / Maria Mikhaylenko, Lukas Ramlow, Sarika Jalan, Anna Zakharova // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, no. 2. — P. 023122.
78. Solitary states in multiplex neural networks: Onset and vulnerability / Leonhard Schülen, David A Janzen, Everton S Medeiros, Anna Zakharova // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2021. — Vol. 145. — P. 110670.

79. *Taher, Halgurd*. Enhancing power grid synchronization and stability through time-delayed feedback control / Halgurd Taher, Simona Olmi, Eckehard Schöll // *Physical Review E*. — 2019. — Vol. 100, no. 6. — P. 062306.
80. Network-induced multistability through lossy coupling and exotic solitary states / Frank Hellmann, Paul Schultz, Patrycja Jaros, Roman Levchenko, Tomasz Kapitaniak, Jürgen Kurths, Yuri Maistrenko // *Nature communications*. — 2020. — Vol. 11, no. 1. — Pp. 1–9.
81. *Berner, R*. What adaptive neuronal networks teach us about power grids / R. Berner, S. Yanchuk, E. Schöll // *Physical Review E*. — 2021. — Vol. 103, no. 4. — P. 042315.
82. Unbalanced clustering and solitary states in coupled excitable systems / I. Franović, S. Eydam, N. Semenova, A. Zakharova // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2022. — Vol. 32, no. 1. — P. 011104.
83. *Osipov, Grigory V*. Synchronization in oscillatory networks / Grigory V Osipov, Jürgen Kurths, Changsong Zhou. — Springer Science & Business Media, 2007.
84. *Larger, Laurent*. Laser chimeras as a paradigm for multistable patterns in complex systems / Laurent Larger, Bogdan Penkovsky, Yuri Maistrenko // *Nature communications*. — 2015. — Vol. 6, no. 1. — P. 7752.
85. *Rogister, Fabien*. Localized excitations in arrays of synchronized laser oscillators / Fabien Rogister, Rajarshi Roy // *Physical review letters*. — 2007. — Vol. 98, no. 10. — P. 104101.
86. Phase-lag synchronization in networks of coupled chemical oscillators / Jan F Tetz, Razan Snari, Desmond Yengi, Mark R Tinsley, Harald Engel, Kenneth Showalter // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 92, no. 2. — P. 022819.

87. *Pereda, Alberto E.* Electrical synapses and their functional interactions with chemical synapses / Alberto E Pereda // *Nature Reviews Neuroscience*. — 2014. — Vol. 15, no. 4. — Pp. 250–263.
88. Partial synchronization in empirical brain networks as a model for unihemispheric sleep / Lukas Ramlow, Jakub Sawicki, Anna Zakharova, Jaroslav Hlinka, Jens Christian Claussen, Eckehard Schöll // *Europhysics Letters*. — 2019. — Vol. 126, no. 5. — P. 50007.
89. *Uhlhaas, Peter J.* Neural synchrony in brain disorders: relevance for cognitive dysfunctions and pathophysiology / Peter J Uhlhaas, Wolf Singer // *neuron*. — 2006. — Vol. 52, no. 1. — Pp. 155–168.
90. *Girvan, Michelle.* Community structure in social and biological networks / Michelle Girvan, Mark EJ Newman // *Proceedings of the national academy of sciences*. — 2002. — Vol. 99, no. 12. — Pp. 7821–7826.
91. *Amato, R.* Interplay between social influence and competitive strategical games in multiplex networks / R. Amato, A. Díaz-Guilera, K.K. Kleineberg // *Scientific reports*. — 2017. — Vol. 7, no. 1. — P. 7087.
92. Opinion competition dynamics on multiplex networks / R. Amato, N.E. Kouvaris, M. San Miguel, A. Díaz-Guilera // *New Journal of Physics*. — 2017. — Vol. 19, no. 12. — P. 123019.
93. Modeling the multi-layer nature of the European Air Transport Network: Resilience and passengers re-scheduling under random failures / A. Cardillo, M. Zanin, J. Gómez-Gardenes, M. Romance, A.J. García del Amo, S. Boccaletti // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2013. — Vol. 215, no. 1. — Pp. 23–33.
94. Synchronization and desynchronization in epilepsy: controversies and hypotheses / Premysl Jiruska, Marco De Curtis, John GR Jefferys, Cather-

- ine A Schevon, Steven J Schiff, Kaspar Schindler // *The Journal of physiology*. — 2013. — Vol. 591, no. 4. — Pp. 787–797.
95. On the nature of seizure dynamics / Viktor K Jirsa, William C Stacey, Pascale P Quilichini, Anton I Ivanov, Christophe Bernard // *Brain*. — 2014. — Vol. 137, no. 8. — Pp. 2210–2230.
96. *Hammond, Constance*. Pathological synchronization in Parkinson's disease: networks, models and treatments / Constance Hammond, Hagai Bergman, Peter Brown // *Trends in neurosciences*. — 2007. — Vol. 30, no. 7. — Pp. 357–364.
97. *Hasler, M*. Simple example of partial synchronization of chaotic systems / M Hasler, Yu Maistrenko, O Popovych // *Physical Review E*. — 1998. — Vol. 58, no. 5. — P. 6843.
98. *Pogromsky, Alexander*. Partial synchronization: from symmetry towards stability / Alexander Pogromsky, Giovanni Santoboni, Henk Nijmeijer // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2002. — Vol. 172, no. 1-4. — Pp. 65–87.
99. *Poel, Winnie*. Partial synchronization and partial amplitude death in mesoscale network motifs / Winnie Poel, Anna Zakharova, Eckehard Schöll // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 91, no. 2. — P. 022915.
100. Synchronization in networks with multiple interaction layers / C.I. Del Genio, J. Gómez-Gardeñes, I. Bonamassa, S. Boccaletti // *Science Advances*. — 2016. — Vol. 2, no. 11. — P. e1601679.
101. Cluster synchronization and isolated desynchronization in complex networks with symmetries / Louis M Pecora, Francesco Sorrentino, Aaron M Hagerstrom, Thomas E Murphy, Rajarshi Roy // *Nature communications*. — 2014. — Vol. 5, no. 1. — P. 4079.

102. *Jalan, Sarika*. Cluster synchronization in multiplex networks / Sarika Jalan, Aradhana Singh // *Europhysics Letters*. — 2016. — Vol. 113, no. 3. — P. 30002.
103. *Bukh, A.V.* Synchronization of chimera states in coupled networks of nonlinear chaotic oscillators / A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. — 2018. — Vol. 14, no. 4. — Pp. 419–433.
104. *Strelkova, Galina I.* Synchronization of chimera states in a network of many unidirectionally coupled layers of discrete maps / Galina I Strelkova, Tatiana E Vadivasova, Vadim S Anishchenko // *Regular and chaotic Dynamics*. — 2018. — Vol. 23, no. 7. — Pp. 948–960.
105. Explosive synchronization in weighted complex networks / I Leyva, I Sendina-Nadal, JA Almendral, A Navas, S Olmi, S Boccaletti // *Physical Review E*. — 2013. — Vol. 88, no. 4. — P. 042808.
106. Explosive synchronization in adaptive and multilayer networks / Xiyun Zhang, Stefano Boccaletti, Shuguang Guan, Zonghua Liu // *Physical review letters*. — 2015. — Vol. 114, no. 3. — P. 038701.
107. Inhibition-induced explosive synchronization in multiplex networks / Sarika Jalan, Vasundhara Rathore, Ajay Deep Kachhvah, Alok Yadav // *Physical Review E*. — 2019. — Vol. 99, no. 6. — P. 062305.
108. Relay synchronization in multiplex networks / I Leyva, I Sendiña-Nadal, R Sevilla-Escoboza, VP Vera-Avila, P Chholak, S Boccaletti // *Scientific reports*. — 2018. — Vol. 8, no. 1. — P. 8629.
109. Relay synchronization in multiplex networks of discrete maps / Marius Winkler, Jakub Sawicki, Iryna Omelchenko, Anna Zakharova, Vadim Anishchenko, Eckehard Schöll // *Europhysics Letters*. — 2019. — Vol. 126, no. 5. — P. 50004.

110. Effect of topology upon relay synchronization in triplex neuronal networks / F. Drauschke, J. Sawicki, R. Berner, I. Omelchenko, E. Schöll // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2020. — Vol. 30, no. 5. — P. 051104.
111. Anti-phase relay synchronization of wave structures in a heterogeneous multiplex network of 2D lattices / IA Shepelev, AV Bukh, GI Strelkova, VS Anishchenko // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2021. — Vol. 143. — P. 110545.
112. *Rybalova, E.* Transition from chimera/solitary states to traveling waves / E. Rybalova, S. Muni, G. Strelkova // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2023. — Vol. 33, no. 3. — P. 033104.
113. *Rybalova, Elena.* Response of solitary states to noise-modulated parameters in nonlocally coupled networks of Lozi maps / Elena Rybalova, Galina Strelkova // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2022. — Vol. 32, no. 2. — P. 021101.
114. Relay and complete synchronization in heterogeneous multiplex networks of chaotic maps / E. Rybalova, G. Strelkova, E. Schöll, V. Anishchenko // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2020. — Vol. 30, no. 6. — P. 061104.
115. Forced synchronization of a multilayer heterogeneous network of chaotic maps in the chimera state mode / E.V. Rybalova, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, A.S. Zakharova // *Chaos: an interdisciplinary journal of nonlinear science*. — 2019. — Vol. 29, no. 3. — P. 033134.
116. *Rybalova, E.* Solitary states and solitary state chimera in neural networks / E. Rybalova, V.S. Anishchenko, A. Strelkova, G.I. and Zakharova // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, no. 7. — P. 071106.

117. New type of chimera and mutual synchronization of spatiotemporal structures in two coupled ensembles of nonlocally interacting chaotic maps / A. Bukh, E. Rybalova, N. Semenova, G. Strelkova, V. Anishchenko // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 11. — P. 111102.
118. Multiplexing noise induces synchronization in multilayer networks / E.V. Rybalova, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, A. Zakharova // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2022. — Vol. 163. — P. 112521.
119. *Rybalova, EV*. Impact of sparse inter-layer coupling on the dynamics of a heterogeneous multilayer network of chaotic maps / EV Rybalova, GI Strelkova, VS Anishchenko // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2021. — Vol. 142. — P. 110477.
120. *Rybalova, E. V*. Interplay between solitary states and chimeras in multiplex neural networks / E.V. Rybalova, A. Zakharova, G.I. Strelkova // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2021. — Vol. 148. — P. 111011.
121. *Rybalova, E.V*. Mechanism of realizing a solitary state chimera in a ring of nonlocally coupled chaotic maps / E.V. Rybalova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2018. — Vol. 115. — Pp. 300–305.
122. Destruction of cluster structures in an ensemble of chaotic maps with noise-modulated nonlocal coupling / Nataliya N. Nikishina, Elena V. Rybalova, Galina I. Strelkova, Tatiyana E. Vadivasova // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2022. — Vol. 27, no. 2. — Pp. 242–251.
123. Impact of noise on the amplitude chimera lifetime in an ensemble of nonlocally coupled chaotic maps / Elena V. Rybalova, Daria Y. Klyushina, Vadim S. Anishchenko, Galina I. Strelkova // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2019. — Vol. 24, no. 4. — Pp. 432–445.

124. *Rybalova, Elena*. Controlling chimera and solitary states by additive noise in networks of chaotic maps / Elena Rybalova, Eckehard Schöll, Galina Strelkova // *Journal of Difference Equations and Applications*. — 2022. — Pp. 1–22.
125. *Рыбалова, Елена В.* Воздействие шума на режимы спиральных и концентрических волн в двумерной решетке локально связанных отображений / Елена В. Рыбалова, Вадим С. Анищенко // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2021. — Vol. 29, no. 2. — Pp. 272–287.
126. *Нечаев, В.А.* Влияние неоднородности параметров на существование химерных структур в кольце нелокально связанных отображений / В.А. Нечаев, Е.В. Рыбалова, Г.И. Стрелкова // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2021. — Vol. 29, no. 6. — Pp. 943–952.
127. *Rybalova, E.* External Synchronization of Solitary States and Chimeras in Unidirectionally Coupled Neural Networks / E. Rybalova, A. Zakharova, G. Strelkova. — Springer, 2022. — Pp. 371–384.
128. *Никишина, Н.Н.* Эволюция пространственных структур в ансамбле нелокально-связанных логистических отображений при шумовой модуляции параметра связи / Н.Н. Никишина, Е.В. Рыбалова, Т.Е. Вадивасова. — 2021. — Pp. 44–45.
129. *Нечаев, В.А.* Динамика неоднородной сети нелокально связанных хаотических отображений / В.А. Нечаев, Е.В. Рыбалова. — 2021. — Pp. 42–43.
130. *Рыбалова, Е.В.* Разрушение автоволновых структур под действием шума в решетке связанных дискретных моделей нейронов / Е.В. Рыбалова, В.С. Анищенко. — 2021. — Pp. 54–55.

131. Bistability promotes solitary states in ensembles of nonlocally coupled maps / Elena V. Rybalova, Galina I. Strelkova, Tatyana E. Vadivasova, Vadim S. Anishchenko. — Vol. 11067. — SPIE, 2019. — Pp. 156–161.
132. *Anishchenko, V.* Chimera States in two coupled ensembles of Henon and Lozi maps. Controlling chimera states / V. Anishchenko, E. Rybalova, N. Semenova. — Vol. 1978. — AIP Publishing LLC, 2018. — P. 470013.
133. Effect of switchings and the lifetime of chimeras in an ensemble of nonlocally coupled chaotic maps / G. Strelkova, E. Rybalova, V. Anishchenko, A. Zakharova. — Vol. 1978. — AIP Publishing LLC, 2018. — P. 470014.
134. *Рыбалова, Е.В.* Появление и синхронизация solitary state chimera в связанных ансамблях нелинейных осцилляторов / Е.В. Рыбалова, В.С. Анищенко. — 2018. — Pp. 333–336.
135. *Рыбалова, Е.В.* Программа для исследования удалённой синхронизации в системе трёх связанных колец хаотических систем / Е.В. Рыбалова, Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко // № RU 2019664054. — 2019.
136. Программный комплекс для исследования вынужденной синхронизации многослойных неоднородных сетей связанных нелинейных систем / Е.В. Рыбалова, Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко // № RU 2019664480. — 2019.
137. *Рыбалова, Е.В.* Программный комплекс для моделирования влияния шума на устойчивость и время жизни химерных состояний в ансамблях хаотических систем с нелокальной связью / Е.В. Рыбалова, Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко // № RU 2019618219. — 2019.
138. Программа для исследования формирования пространственно-временных структур в ансамблях связанных хаотических систем / Е.В. Рыбалова,

- Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова // № RU 2019664055. — 2019.
139. *Стрелкова, Г.И.* Численное моделирование динамики ансамблей одномерных отображений с неоднородностью в управляющем параметре / Г.И. Стрелкова, Е.В. Рыбалова, В.А. Нечаев // № RU 2021663843. — 2021.
140. *Стрелкова, Г.И.* Программный комплекс для исследования динамики неоднородных двухслойных сетей связанных нейронных систем / Г.И. Стрелкова, Е.В. Рыбалова // № RU 2021664354. — 2021.
141. *Schöll, Eckehard.* Chimera States in Complex Networks / Eckehard Schöll, Anna Zakharova, Ralph G Andrzejak. — Frontiers Media SA, 2020.
142. Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems / Iryna Omelchenko, Bruno Riemenschneider, Philipp Hövel, Yuri Maistrenko, Eckehard Schöll // *Physical Review E*. — 2012. — Vol. 85, no. 2. — P. 026212.
143. *Feigenbaum, M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations / M.J. Feigenbaum // *Journal of Statistical Physics*. — 1978. — Vol. 19, no. 1. — Pp. 25–52.
144. *Feigenbaum, M.J.* The universal metric properties of nonlinear transformations / M.J. Feigenbaum // *Journal of Statistical Physics*. — 1979. — Vol. 21, no. 6. — Pp. 669–706.
145. *Anishchenko, V.S.* Deterministic nonlinear systems / V.S. Anishchenko, Т.Е. Vadivasova, G.I. Strelkova. Springer Series in Synergetics. — Springer, 2014.
146. *Ricker, William Edwin.* Stock and recruitment / William Edwin Ricker // *Journal of the Fisheries Board of Canada*. — 1954. — Vol. 11, no. 5. — Pp. 559–623.

147. Bifurcations in discrete dynamical systems with cubic maps / Henrik Skjolding, Bodil Branner-Jørgensen, Peter L Christiansen, Helge E Jensen // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1983. — Vol. 43, no. 3. — Pp. 520–534.
148. Chimera states in ensembles of bistable elements with regular and chaotic dynamics / Igor A Shepelev, Andrei V Bukh, Galina I Strelkova, Tatiana E Vadvivasova, Vadim S Anishchenko // *Nonlinear Dynamics*. — 2017. — Vol. 90, no. 4. — Pp. 2317–2330.
149. *Henon, Michel*. Numerical study of quadratic area-preserving mappings / Michel Henon // *Quarterly of applied mathematics*. — 1969. — Pp. 291–312.
150. Stochastic resonance in climatic change / R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, A. Vulpiani // *Tellus*. — 1982. — Vol. 34, no. 1. — Pp. 10–16.
151. *Cromer, A*. Stable solutions using the Euler approximation / A. Cromer // *American Journal of Physics*. — 1981. — Vol. 49, no. 5. — Pp. 455–459.
152. When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: patched synchrony or multichimera states / Iryna Omelchenko, E Omel'chenko, Philipp Hövel, Eckehard Schöll // *Physical review letters*. — 2013. — Vol. 110, no. 22. — P. 224101.
153. *FitzHugh, R*. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane / R. FitzHugh // *Biophysical journal*. — 1961. — Vol. 1, no. 6. — Pp. 445–466.
154. *Nagumo, Jinichi*. An active pulse transmission line simulating nerve axon / Jinichi Nagumo, Suguru Arimoto, Shuji Yoshizawa // *Proceedings of the IRE*. — 1962. — Vol. 50, no. 10. — Pp. 2061–2070.
155. Time-delayed feedback control of coherence resonance chimeras / Anna Zakharova, Nadezhda Semenova, Vadim Anishchenko, Eckehard Schöll // *Chaos*:

- An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* — 2017. — Vol. 27, no. 11.
— P. 114320.
156. *Lozi, R.* Un attracteur étrange (?) du type attracteur de Hénon / R Lozi // *Le Journal de Physique Colloques.* — 1978. — Vol. 39, no. C5. — Pp. C5–9.
157. *Pesin, Ya B.* Dynamical systems with generalized hyperbolic attractors: hyperbolic, ergodic and topological properties / Ya B Pesin // *Ergodic theory and dynamical systems.* — 1992. — Vol. 12, no. 1. — Pp. 123–151.
158. *Aziz-Alaoui, M.A.* Dynamics of a Hénon–Lozi-type map / M.A. Aziz-Alaoui, C. Robert, C. Grebogi // *Chaos, Solitons & Fractals.* — 2001. — Vol. 12, no. 12. — Pp. 2323–2341.
159. *Pikovsky, Arkady.* Synchronization: A universal concept in nonlinear science / Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, Jürgen Kurths. — Cambridge University Press, 2001.
160. *Mosekilde, Erik.* Chaotic synchronization: applications to living systems / Erik Mosekilde, Yuri Maistrenko, Dmitry Postnov. — World Scientific, 2002. — Vol. 42.
161. Synchronization: *From Simple to Complex* / A. Balanov, N. Janson, D. Postnov, O. Sosnovtseva. — Springer, 2009.
162. *Schöll, Eckehard.* Control of self-organizing nonlinear systems / Eckehard Schöll, Sabine HL Klapp, Philipp Hövel. — Springer, 2016.
163. *Theory of Oscillators* / A. A. Andronov, A. A. Vitt, S. E. Khaikin, S. É. Khaïkin, W. Fishwick, F. Immirzi. — Dover, 1987.
164. *Blekhman, I.I.* Synchronization in science and technology / I.I. Blekhman. — ASME press, 1988.

165. Synchronization of chaos / V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, D.E. Postnov, M.A. Safonova // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 1992. — Vol. 2, no. 03. — Pp. 633–644.
166. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Developments / V. S. Anishchenko, V. Astakhov, A. Neiman, T. Vadivasova, L. Schimansky-Geier. — Springer Berlin Heidelberg, 2007.
167. Mathematical formulation of multilayer networks / M. De Domenico, A. Solé-Ribalta, E. Cozzo, M. Kivela, Y. Moreno, M.A. Porter, S. Gómez, A. Arenas // *Physical Review X*. — 2013. — Vol. 3, no. 4. — P. 041022.
168. The structure and dynamics of multilayer networks / S. Boccaletti, G. Bianconi, R. Criado, C.I. Del Genio, J. Gómez-Gardenes, M. Romance, I. Sendina-Nadal, Z. Wang, M. Zanin // *Physics Reports*. — 2014. — Vol. 544, no. 1. — Pp. 1–122.
169. Multilayer networks / Mikko Kivela, Alex Arenas, Marc Barthelemy, James P Gleeson, Yamir Moreno, Mason A Porter // *Journal of complex networks*. — 2014. — Vol. 2, no. 3. — Pp. 203–271.
170. *Andrzejak, R.G.* Generalized synchronization between chimera states / R.G. Andrzejak, G. Ruzzene, I. Malvestio // *Chaos: an interdisciplinary journal of nonlinear science*. — 2017. — Vol. 27, no. 5. — Pp. 053114
171. Mean field phase synchronization between chimera states / R.G. Andrzejak, G. Ruzzene, I. Malvestio, K. Schindler, E. Schöll, A. Zakharova // *Chaos: an interdisciplinary journal of nonlinear science*. — 2018. — Vol. 28, no. 9. — P. 091101.
172. *Kasatkin, DV.* Synchronization of chimera states in a multiplex system of phase oscillators with adaptive couplings / DV Kasatkin, VI Nekorkin // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2018. — Vol. 28, no. 9. — P. 093115.

173. Time-varying multiplex network: Intralayer and interlayer synchronization / Sarbendu Rakshit, Soumen Majhi, Bidesh K Bera, Sudeshna Sinha, Dibakar Ghosh // *Physical Review E*. — 2017. — Vol. 96, no. 6. — P. 062308.
174. Delay controls chimera relay synchronization in multiplex networks / Jakub Sawicki, Iryna Omelchenko, Anna Zakharova, Eckehard Schöll // *Physical Review E*. — 2018. — Vol. 98, no. 6. — P. 062224.
175. *Vadivasova, TE*. Control of inter-layer synchronization by multiplexing noise / TE Vadivasova, AV Slepnev, A Zakharova // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2020. — Vol. 30, no. 9. — Pp. 091101