ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи

ЧУМАЧЕНКО СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ СПЛАЙНАМИ

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор С. Ф. Лукомский

Саратов – 2023

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Теория сплайнов является важным разделом теории приближения функций. Являясь более гибким аппаратом приближения, чем многочлены, сплайны позволяют решать задачи интерполяции, сглаживания функций, численного дифференцирования, интегрирования и решения дифференциальных уравнений.

Работа посвящена использованию базисных сплайнов в задачах аппроксимации.

Впервые базисные сплайны появились в работах В. А. Дженкинса [38] в связи с основной задачей интерполяции, которая заключается в следующем [24, 31]: *необходимо по значениям* $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *построить функцию* $S(x)$ *такую, что:*

1) $S(x)$ *определена на* $\mathbb{R}$ *и* m *раз дифференцируема на* $\mathbb{R}$, $m \geq 1$*;*

2) $S(j) = f_j$ *при всех* $j \in \mathbb{Z}$.

Функцию $S(x)$ естественно искать в виде ряда

$$S(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y_j L(x-j),$$

который называют *кардинальным рядом.*

Первые решения основной задачи интерполяции были получены при помощи синк-аппроксимаций

$$S(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y_j \operatorname{sinc}(x-j),$$

где

$$L(x) = \operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Синк-аппроксимации аналитичны на действительной оси.

Само понятие кардинального сплайна $S(x)$ было введено Е. Борелем [28] и Э. Т. Уиттакером [54]. Широко известна теорема отсчетов, которую приписывают сразу трем авторам: Э. Т. Уиттакеру [22, 55], К. Е. Шеннону [51] и

В. А. Котельникову [8]. Наиболее полный обзор результатов в данном направлении можно найти в монографии Ф. Стенджера [53]. Однако теорема отсчетов позволяет хорошо приближать только функции ограниченного порядка, суммируемые на действительной оси. В случае приближения произвольных функций возникает шум, переходящий на всю частотную область [17].

Если в кардинальном ряде y_j — заданные значения, т. е. $y_j = f_j$, то такую интерполяцию называют правильной (ordinary), в противном случае — гладкой. В ряде монографий (например, [42, 49]) указано, что В. А. Дженкинс первым построил как правильные, так и гладкие кардинальные интерполяционные формулы, в которых функции $L(x)$ были базисными симметричными сплайнами 3-й и 4-й степени с носителем $[-3, 3]$. Но тогда их называли базисными функциями.

В [47, 48] И. Я. Шенберг определил базисные сплайны равенством

$$M_k(x) = \frac{1}{(k-1)}\delta^k x_+^{k-1},$$

где δ^k — центральная разность k-го порядка с единичным шагом, и получил гладкую полиномиальную интерполяционную формулу. Базисные сплайны также назывались базисными функциями.

В 1947 г. в совместной работе Х. Б. Карри и И. Я. Шенберга [32] базисные сплайны были представлены в виде разделенных разностей. Если теорема отсчетов позволяет приближать только функции ограниченного порядка, суммируемые на действительной оси, то в работе [32] удалось доказать, что разделенные разности позволяют приближать множество функций из пространства $P_k(0, +\infty)$. Пространство $P_k(0, +\infty)$ определяется как совокупность кусочно-многочленных функций k-й степени, имеющих непрерывные производные на $[0, +\infty)$, и которые на каждом отрезке $\left[\frac{t}{2^k}, \frac{t+1}{2^k}\right]$ совпадают с некоторым многочленом k-й степени. Аналогично определяется и пространство $P_k(-\infty, +\infty)$. Было показано, что разделенные разности являются базисом в пространстве $P_k(-\infty, +\infty)$. На основании этого в работе И. Я. Шенберга 1967 г. [49] такие разделенные разности были названы B-сплайнами.

В дальнейшем терминология B-сплайнов получила широкое развитие. На равномерной сетке B-сплайны были определены равенствами в терминах сверток и подробно изучены в статьях Д. О. Стрёмберга [52], Г. Баттла [27] и П. Г. Лемарье [44]. На основе этой терминологии были построены пре-вейвлеты [30, 39, 40].

В настоящее время основная задача интерполяции традиционно решается с помощью центрированных B-сплайнов Д. О. Стрёмберга $N_m(x)$. Подробное описание этого метода решения можно найти в монографии Ч. К. Чуи [24]. $S(x)$ ищется в виде

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k N_m(x + \frac{m}{2} - k)\bigg|_{x=j} = f_j,$$

т. е. в результате получается бесконечная система уравнений относительно коэффициентов c_k. Используя символьные обозначения

$$\begin{cases} \tilde{N}_m(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} N_m\left(k + \frac{m}{2}\right) z^k, \\ \tilde{C}(z) := \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k, \\ \tilde{F}(z) := \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f_k z^k \end{cases}$$

для c_k можно получить выражение в виде ряда Неймана

$$\tilde{C}(z) = (1 + \tilde{D} + \tilde{D}^2 + \dots)\tilde{F},$$

где

$$\tilde{D}(z) := 1 - \tilde{N}_m(z), \quad z = e^{-i\omega}.$$

Возникает вопрос: можно ли найти представление в другом виде, при котором не нужно решать систему бесконечного числа уравнений? В диссертационной работе мы предлагаем использовать новый вид базисных сплайнов, которые названы двоичными базисными сплайнами. В этом случае для нахождения неизвестных коэффициентов получаем рекуррентные соотношения (см. формулы (1.14)).

Введенные двоичные базисные сплайны решают и другие задачи, о чем пойдет речь далее. Сначала о системе Фабера – Шаудера.

В 1910 г. немецкий математик Г. Фабер [37] проинтегрировал систему Хаара [43]. по произвольной последовательности рациональных чисел (ξ_k) построил замкнутую в $C[0,1]$ систему, которая совпадает с системой Фабера при подходящем выборе последовательности (ξ_k) [50]. Новая система получила название системы Фабера – Шаудера. Она является базисом в пространстве $C[0,1]$ и для отклонения частичных сумм справедливо неравенство

$$\left|\left|f - S_N(f)\right|\right|_C \le \omega^2\left(\frac{1}{N}, f\right),$$

где

$$\omega^2(\delta, f) := \sup_{0<h<\delta, h\le x\le 1-h} \left|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\right|.$$

Систему Фабера – Шаудера была придумана задолго до B-сплайнов, однако подходит под их определение. Впоследствии было написано много работ, освещающих свойства системы Фабера – Шаудера. Приведем некоторые из них. Так, З. Чисельский в работе [29] установил следущее.

Пусть $\omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности. Тогда, для того чтобы всякая функция $f(t) \in H_{\omega(\delta)}$ имела безусловно сходящийся в метрике $C(0,1)$ ряд по системе Фабера – Шаудера, необходимо выполнение следующего условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

С. В. Бочкарев доказал, что это условие является одновременно и достаточным [3].

В. А. Матвеев в работе [16] получил следующую оценку:

$$\|F(t) - \sum_{i=0}^{n} b_i(F)\varphi_i(t)\|_C \le 4\varphi_2\left(\frac{1}{n}, F\right),$$

где φ_i — функции системы Фабера – Шаудера, $b_i = \int\limits_0^1 \chi_i(t)dF(t)$.

Т. Н. Сабурова [19] и П. Л. Ульянов [23] провели детальное исследование поведения коэффициентов Фурье системы Фабера – Шаудера, в частности удовлетворяющих условию Липшица. На основе их работ А. П. Горячев [4] установил, что всякую функцию $f \in L^p (0 < p < \infty)$ можно представить в виде ряда, сходящегося по системе Шаудера, и что это представление не единственно.

Если ортогонализировать систему Фабера–Шаудера методом Шмидта (это проделал Франклин в 1928 году), то получится система, которая будет ортогональным базисом пространства $C[0,1]$. Ее называют системой Франклина (иногда Франклина–Чисельского, так как именно Чисельский после 1963 года начал активное изучение этой системы). [7].

В работе Т. У. Аубакирова и Н. А. Бокаева [2] определен новый класс систем, обобщающих систему Фабера – Шаудера. По заданной последовательности $\{p_n\}$ натуральных чисел таких, что $p_0 = 1$, а $p_n \geq 2$, $n = 1, 2, \ldots$, определяют числа $m_n = p_0 p_1 \ldots p_n$. В этом случае для любой точки $x \in [0,1] \backslash Q$, где

$$Q = \left\{ \frac{l}{m_n} \right\}, \quad 0 \leq l \leq m_n, \quad n \geq 0, \quad l \in \mathbb{Z},$$

существует единственное разложение

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{m_k},$$

где $0 \leq \alpha_k(x) \leq p_k - 1$, $\alpha_k(x)$ — целые. После этого систему функций

$$\Phi \{p_n\} = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}, \quad x \in [0,1],$$

в которой $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, авторы определили равенствами

$$\varphi_k(x) = \varphi_{n,r}^{(s)}(x) = \begin{cases} (m_{n+1}(x) - p_{n+1} r - \alpha_{n+1}(x)) e^{\frac{2\pi i s \alpha_{n+1}(x)}{p_{n+1}}} + \dfrac{1 - e^{\frac{2\pi i s \alpha_{n+1}(x)}{p_{n+1}}}}{1 - e^{\frac{2\pi i s}{p_{n+1}}}}, & x \in \left(\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n} \right) \setminus Q, \\ 0, & x \notin \left[\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n} \right]. \end{cases}$$

где $k = m_n + r(p_{n+1} - 1) + s, s = 1, 2, \ldots, p_{n+1} - 1$. Эта система состоит из непрерывных, кусочно-линейных функций и

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{l} \alpha_k(f) \varphi_k(x) \right\| \leq \omega_2 \left(\frac{1}{m_n}, f \right), \quad l = m_n + r(p_{n+1} - 1).$$

Эта система не является системой сжатий и сдвигов, но при $p_n = 2$ она совпадает с классической системой Фабера – Шаудера.

Функции системы Фабера – Шаудера не дифференцируемы. Но в 1965 г. К. М. Шайдуков [25] построил базис в пространстве непрерывных функций, состоящий из гладких функций (из дуг парабол 4-й степени)

$$g_1(x) = (1-x^2)^2, \quad g_2(x) = x^4, \quad 0 \le x \le 1,$$
$$g_{sk} = \frac{(x-a)^2(x-c)^2}{(b-a)^2(b-c)^2} \cdot \Theta^2(ax+cx-x^2-ac),$$

где

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$
$$a = \frac{s}{2^k}, \quad b = \frac{s+1}{2^k}, \quad c = \frac{s+2}{2^k}, \quad s = 0, 2, 4, \dots, 2^k - 2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

и доказал, что система $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в пространстве непрерывных функций. Построенный базис есть система сжатий и сдвигов многочлена 4-й степени функции $g_4(x) = x^2(x-1)^2$. Автору не удалось подобрать функцию в виде многочлена произвольной степени, сжатия и сдвиги которой давали бы базис пространства $C(0,1)$. В работе мы показываем, что это возможно, если в качестве функции выбирать двоичный базисный сплайн, изучению которого и посвящена диссертация. Мы получим также оценку отклонения частичной суммы от приближаемой функции.

За несколько десятилетий до возникновения теории сплайнов появилась система А. Хаара [43]. Система Хаара является ортогональным базисом в пространстве $L_2[0,1]$. Сам А. Хаар, однако, не отметил в своих работах тот факт, что все элементы построенной им системы являются двоичными сжатиями и сдвигами одной функции. Система Хаара является базисом в пространстве непрерывных функций (если исключить тот факт, что сами функции системы Хаара не попадают в класс непрерывных функций) и ортогональным базисом в пространстве суммируемых функций, она локализована, а так же вычисление ее коэффициентов разложения имеет низкую вычислительную сложность. Однако функции системы Хаара являются разрывными, что ограничивает класс решаемых задач.

Р. В. Мартенс [12, 13] рассмотрел систему сжатий и сдвигов базисного сплайна

$$\varphi = \begin{cases} 8t, & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ 4 - 8t, & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \\ 8t - 8, & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right], \\ 0, & t \notin [0, 1] \end{cases}$$

и доказал ее полноту в $L_2(0,1)$. Позднее, Р. В. Мартенс совместно с П. А. Терехиным [14, 15] доказал, что эта система есть базис Рисса в $L_2(0,1)$. Более того, он нашел вид сопряженной системы, который можно рассматривать как некоторый непрерывный аналог системы Хаара. Однако этот результат так и остался неопубликованным, но привел к задаче построения аналогов базисов Рисса произвольной гладкости.

Напомним, что такое базис Рисса. Пусть H — гильбертово пространство. Система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ называется системой Рисса с постоянными $A, B \geq 0$, если для любого $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ сходится в H и

$$A\|c\|_{l_2} \leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n \right\| \leq B\|c\|_{l_2}.$$

Задача нахождения базисов Рисса в $L_2[0,1]$, состоящих из сжатий и сдвигов гладких функций, решена в диссертации. Оказалось, что эту задачу решают двоичные базисные сплайны. Более того, оказалось, что риссовские постоянные не зависят от степени сплайна. Таким образом, полученную систему сжатий и сдвигом можно считать некоторым гладким аналогом системы Хаара (ортогональность заменена на базисность по Риссу).

В работе С. Ф. Лукомского и М. Д. Мушко[1] было доказано, что двоичный базисный сплайн 2-й степени удовлетворяет масштабирующему уравнению и порождает обобщенный КМА который не является Риссовским. Тем не менее были получены оценки аппроксимации в $L_2(\mathbb{R})$ функций из классов Соболева со степенным весом. В третьей главе эти вопросы рассмотрены в случае двоичных базисных сплайнов произвольной степени.

Целью диссертационной работы является изучение представляющих и аппроксимативных свойств систем сжатий и сдвигов двоичных базисных сплайнов.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1 Доказана базисность системы сжатий и сдвигов двоичных базисных сплайнов в пространстве непрерывных функций и найдена оценка сходимости через модули непрерывности.

2 Доказано, что дифференцируя построенные системы сжатий и сдвигов двоичных базисных сплайнов, мы получаем базисы Рисса в пространстве L_2.

3 Доказано, что двоичный базисный сплайн удовлетворяет масштабирующему уравнению и порождает кратномасштабный анализ (V_n). Найден порядок приближения функции из пространств Соболева подпространствами V_n по норме $L_2(\mathbb{R})$.

Методы исследования. В диссертационной работе использовались методы теории функций, ортогональных рядов, функционального анализа, всплесков.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Рассмотренные в диссертационной работе базисные сплайны

[1]Лукомский, С. Ф. О двоичных базисных сплайнах 2-й степени / С. Ф. Лукомский, М. Д. Мушко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2018. — Т. 18, вып. 2. — С. 172–182. — DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182

могут быть использованы для построения кратномасштабного анализа, построения интерполяционных процессов, численного решения дифференциальных уравнений, сглаживания экспериментальных данных, а также в образовательном процессе при чтении спецкурсов.

Положения, выносимые на защиту:

1 Базисность системы сжатий и сдвигов двоичных базисных сплайнов в пространстве непрерывных функций на отрезке и оценка погрешности приближения (теорема 1.1).

2 Базисность по Риссу систем сжатий и сдвигов производных двоичных базисных сплайнов (теорема 2.1).

3 Аппроксимация сжатиями и сдвигами двоичных базисных сплайнов функций из пространств Соболева (теорема 3.4).

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1 — 18-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 27 января–3 февраля 2016 г.);

2 — XV Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения-2016» (Казань, 24–29 ноября 2016 г.);

3 — XIII Международная Казанская летняя школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», (Казань, 21–27 августа 2017 г.);

4 — XXVI Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». X Международный симпозиум «ряды Фурье и их приложения». Молодёжная школа-конференция по гармоническому анализу (Новороссийск, 27 мая–03 июня 2018 г.);

5 — 19-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященная 90-летию со дня рождения академика П. Л. Ульянова (Саратов, 29 января–2 февраля 2018 г.);

6 — 20-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 28 января–1 февраля 2020 г.);

7 — Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (28 января–2 февраля 2021 г.);

8 — Всероссийская научная конференция«Математика и математическое моделирование» (Самара, 10–12 ноября 2021 г.);

9 — 21-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 31 января–4 февраля 2022 г.).

10 — Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (27 января–1 февраля 2023 г.);

Кроме этого, результаты работы регулярно докладывались на семинаре «Ортогональные ряды» кафедры математического анализа механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 печатных работ, в том числе 3 статьи [57–59] в журналах, индексируемых Web of Science, SCOPUS, RSCI (все журналы включены в «Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» ВАК РФ, 10 работ опубликованы в сборниках трудов конференций как тезисы докладов [60–70].

Личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты были получены лично соискателем. В работе [57], выполненной в соавторстве с П. А. Терехиным и С. Ф. Лукомским, автору настоящей диссертации принадлежат результаты доказательства, что двоичный базисный сплайн, построенный по функции $\psi_{n,n-1}$, порождает базис Рисса. Постановка задачи, обсуждение и интерпретация результатов осуществлялись совместно с научным руководителем, а также с соавторами опубликованных работ. При использовании результатов других авторов и, полученных в соавторстве, приводятся соответствующие ссылки.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы (70 наименований). Диссертация изложена на 101 странице, содержит 1 таблицу и 16 рисунков. Часть рисунков получена программами, написанными на языках программирования C++ и Python, при реализации алгоритмов, описанных в главе 2 диссертационной работы.

Краткое содержание диссертации

В главе 1, раздел 1.1 приведен краткий обзор задач, решаемый в ходе диссертации с помощью двоичных базисных сплайнов, и классические методы их решения.

В разделе 1.2 обобщается определение двоичного базисного сплайна, введенное С. Ф. Лукомским и М. Д. Мушко [10].

Пусть

$If(x) = \int\limits_0^x f(t)dt \quad (x \in [0,1])$ — оператор интегрирования;

$r_k(x) = \mathrm{sign}(\sin(2^{k+1}\pi x))$ — функции Радемахера [9];

$W_{2^n-1}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} r_k(x)$ — функции Уолша [1, 26].

Функцию

$$\psi_{n,N}(x) = Q(n,N) I^N W_{2^n-1}(x), \quad x \in [0,1], \quad n, N \in \mathbb{N}, \quad N \le n,$$

будем называть двоичным базисным сплайном N-й степени от функции Уолша W_{2^n-1}, где $Q(n,N)$ — нормирующий коэффициент $\psi_{n,N}(x)$ в пространстве $C[0,1]$.

Название «двоичные базисные сплайны» было выбрано потому, что:

1) построенные функции действительно являются сплайнами, при этом дефекта 1 независимо от числа интегрирований N, что будет доказано в ходе диссертационной работы;

2) система строится по двоичной сетке;

3) эти сплайны порождают базисы в различных функциональных пространствах, что будет доказано в ходе работы.

Функция $\psi_{n,N}(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $N-1$ включительно. Из этого замечания следует, что можно строить двоичные базисные сплайны произвольного порядка гладкости.

Далее в разделе 1.2 описывается решение основной задачи интерполяции.

Определение 1.6. *Обозначим через $P_k(0,+\infty)$ совокупность кусочно-многочленных функций k-й степени, имеющих непрерывные производные до $(k-1)$-го порядка на $[0,+\infty)$, и которые на каждом отрезке $[t,t+1]$ совпадают с некоторым многочленом k-й степени. Аналогично определяется и пространство $P_k(-\infty,+\infty)$.*

Теорема 1.1. *Пусть $F_{n,N}(x) = \psi_{n,N}\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Совокупность функций*

$$F_{n,n}(x-j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j > -2^n, \quad j \notin \left[-2^{d+1}+1, -2^d-1\right],$$
$$0 \le d < n, \quad d \in \mathrm{N},$$

образуют базис в пространстве $P_n(0,+\infty)$.

При этом коэффициенты $c_{-2^0}, c_{-2^1}, ..., c_{-2^n}$ находятся из системы

$$\begin{cases} c_{-1} = \frac{a_{n-1}}{\psi_{n,n}^{(n-1)}\left(\frac{1}{2^n}\right)} = \frac{a_{n-1}\cdot Q(1,1)}{Q(n,n)} = \frac{a_{n-1}\cdot 2^{\frac{2+3-1-2}{2}}}{2^{\frac{2n^2+3n-n^2-2}{2}}} = \frac{a_{n-1}}{2^{\frac{n^2+3n-4}{2}}}, \\ c_{-2} = \left(a_{n-2} - c_{-1}\psi_{n,n}^{(n-2)}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\frac{Q(2,2)}{Q(n,n)} = \frac{\left(a_{n-2}-c_{-1}\psi_{n,n}^{(n-2)}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)}{2^{\frac{n^2+3n-10}{2}}}, \\ \dots \\ c_{-2^k} = \frac{a_{n-k}-\sum_{j=0}^{k-1} c_{-2^j}\psi_{n,n}^{(k)}\left(\frac{1}{2^{n-k}}\right)}{2^{\frac{(n^2-k^2)+3(n-k)}{2}}}, \dots \\ c_{-2^n} = a_0 - \sum_{j=0}^{n-1} c_{-2^j}\psi_{n,n}^{(n)}(1), \end{cases}$$

а остальные коэффициенты из рекуррентных соотношений

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1} c_{-2^k}F_{n,n}\left(x+2^k\right)+c_0F_{n,n}(x)+c_1F_{n,n}(x-1)+...+c_\ell F_{n,n}(x-\ell).$$

В разделе 1.3 доказывается теорема о базисности системы сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна в пространстве непрерывных функций.

Рассмотрим систему

$$\phi_{m,j}(x)=\psi_{n,n}(2^m x-j),\quad m\in\mathbb{Z}_0,\quad j\in[0,2^m-1].$$

Пусть $f(x)$ — функция из $C_0[0,1]$. Обозначим:

$$R_0(x)=f(x),\quad S_0(x)=R_0\left(\frac{0+1/2}{2^0}\right)\phi_{0,0}(x).$$

В общем случае полагаем:

$$S_m(x)=R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right)\phi_{m,j}(x),\quad x\in\left[\frac{j}{2^m},\frac{j+1}{2^m}\right],$$
$$R_{m+1}(x)=R_m(x)-S_m(x).$$

Определение 1.8. *Пусть*

$$\omega_f(\delta)=\sup_{0\le h\le\delta}(f(x+h)-f(x)),\quad x\in[0,1-h],$$

— модуль непрерывности,

$$\omega_f^2(\delta)=\sup_{0\le h\le\delta}(f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)),\quad x\in[0,1-2h],$$

— модуль непрерывности второго порядка (модуль гладкости).

Теорема 1.2. $\phi_{m,j}(x)$ *— базис в* $C_0[0,1]$. *Имеет место следующая оценка:*

$$\left|f(x)-\sum_{i=0}^{m} S_i(x)\right|\le\omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right)+\frac{17}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{\frac{m-3}{2}}}\right)+5\cdot 2^{-\frac{3}{10}(m-1)}||f||+2^{4-\frac{3}{5}m}\|f\|.$$

В главе 2, раздел 2.1 двоичные базисные сплайны рассматриваются как аналоги систем Хаара и Фабера–Шаудера. Систему сжатий и сдвигов функции

$\psi_{n,n-1}$ можно считать гладким аналогом системы Хаара в терминологии двоичных базисных сплайнов, так как при $n = 1$ $\psi_{1,0}$ является системой Хаара с точностью до нормирующего коэффициента. В то же время систему, построенную по $\psi_{n,n}$, можно считать гладким аналогом системы Фабера – Шаудера. Эти две системы связаны между собой: из «аналога системы Хаара» можно получить «аналог системы Фабера – Шаудера», произведя операцию интегрирования (с точностью до нормирующего коэффициента).

В разделе 2.2 доказывается, что система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна $\psi_{n,n-1}$, есть базис Рисса.

Теорема 2.1. *Для каждого* $n = 1, 2, \ldots$ *сплайновая аффинная система* $\{\psi_{n,n-1}^{k,j}\}_{k=0,j=0}^{\infty,2^k-1}$ *является базисом Рисса в* $L_0^2(0,1)$*, и для всех* $c = \{c_{k,j}\}_{k=0,j=0}^{\infty,2^k-1} \in l^2$ *выполняются неравенства*

$$\frac{1}{10}\|c\|_{l^2} \le \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^k-1} c_{k,j}\psi_{n,n-1}^{k,j}(x)\right\| \le \frac{19}{10}\|c\|_{l^2}.$$

где $\psi_{n,n-1}^{k,j}(x) = 2^{\frac{k}{2}}\psi_{n,n-1}(2^k x + j)$.

Следствие. Система $\{\psi_{n,n-1}^{k,j}\}_{k=0,j=0}^{\infty,2^k-1}$, после добавления функции $\psi_0(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, становится базисом Рисса в $L^2(0,1)$ с теми же постоянными.

Подводя итог, отметим, что «гладкий Хаар» является базисом Рисса в $L^2[0,1]$ (после добавления функции 1), а «гладкий Фабер – Шаудер» — базисом в $C[0,1]$ (после добавления к этой системе двух функций, являющихся левой и правой частью параболы двоичного базисного сплайна).

В разделе 2.3 описывается алгоритм построения двоичного базисного сплайна с получением графического изображения [5, 11, 34, 45]. Матрица значений получена при реализации алгоритма, описанного в этой главе, на языке C++. Программа, получающая графическое изображение, реализована на языке Python по описанию алгоритма, также приведенного в этом параграфе.

В раделе 2.4 по построенной системе сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна осуществляется построение приближений нескольких функций с различным характером поведения на отрезке $[0, 1]$. Программа, получающая графическое изображение, реализована на языке Python на основе описания алгоритма, приведенного в этой главе.

Глава 3 посвящена построению кратномасштабного анализа, порожденного двоичным базисным сплайном.

В разделе 3.1 выведены масштабирующие уравнения, которым удовлетворяет двоичный базисный сплайн при порядках интегрирования $N = n - 1$ и $N = n$.

Теорема 3.1. *Имеет место равенство*

$$F_{n,n-1}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} F_{n,n-1}(2x - 0) + \sum_{t=1}^{2^n - 1} \frac{1}{2^{n-2}} F_{n,n-1}(2x - t) + \frac{1}{2^{n-1}} F_{n,n-1}(2x - n).$$

Теорема 3.2. *Имеет место равенство*

$$F_{n,n}(x) = \frac{1}{2^n} F_{n,n}(2x - 0) + \sum_{t=1}^{2^n - 1} \frac{1}{2^{n-1}} F_{n,n}(2x - t) + \frac{1}{2^n} F_{n,n}(2x - n).$$

В разделе 3.2 обсуждаются аспекты построения кратномасштабного анализа для двоичного базисного сплайна $F_n(x) = \psi_{n,n}\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна $\psi_{n,n}$ не является системой Рисса и базисом Рисса, и масштабирующая функция $F_n(x)$ не порождает ортогональный кратномасштабный анализ. Тем не менее, возможно построение неортогонального кратномасштабного анализа.

Лемма 3.3. *Определим преобразование Фурье равенством*

$$\hat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-2\pi i \omega x}\, dx.$$

Тогда

$$\hat{F}_{n,N}(\omega) = 2^{-N \cdot n - N - 1} \cdot \left(\frac{1}{\pi i \omega}\right)^{N+1} Q(n, N) \left(1 - e^{-2\pi i \omega}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - e^{-2^k \pi i \omega}\right).$$

Образуем подпространства

$$V_{m,n,N} = \overline{(2^{\frac{m}{2}} F_{n,N}(2^m x + k)_{k \in Z})}.$$

Теорема 3.3. *Совокупность* $(V_{m,n,n-1})$, $m \in \mathbb{Z}$, *образует ортогональный КМА:*

MR1. $V_j \subset V_{j+1}$ *для всех* $j \in \mathbb{Z}$*;*

MR2. $\bigcup\limits_{j \in Z} V_j$ *плотно в* $L_2(\mathbb{R})$*;*

MR3. $\bigcap\limits_{j \in Z} V_j = \{0\}$*;*

MR4. $f \in V_j \Longleftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0$ *для всех* $j \in \mathbb{Z}$*;*

MR5. ществует функция $\varphi \in V_0$*, такая что последовательность* $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *образует базис Рисса в* V_0.

Совокупность $(V_{m,n,n})$*,* $m \in \mathbb{Z}$*, образует КМА общего вида, т. е. выполнены аксиомы MR1–MR3.*

Определение 3.1. Пусть $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Выражение

$$[f, g](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\omega + k)\overline{g(\omega + k)}$$

называют *скобочным произведением.*

Определение 3.2. Пусть $t > 0$. Множество

$$W_2^t(\mathbb{R}) = \Big\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \|f\|_{W_2^t(\mathbb{R})} = \|\,(1 + |\cdot|)^t\,\hat{f}\|_{L_2(\mathbb{R})} < +\infty \Big\}$$

называют *пространством Соболева.*

Определение 3.3. Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, $\varphi_{m,k}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \varphi\,(2^m x + k)$. Оператор

$$\beta_m : f \to \sum_{k \in Z} (f, \varphi_{m,k})\, \varphi_{m,k}$$

называют *квазиинтерполяционным оператором.*

Определение 3.4. Оператор β_m *доставляет аппроксимацию порядка* $t \in \mathbb{R}_+$, если для всех $f \in W_2^t(\mathbb{R})$

$$\|f - \beta_m f\|_{L_2(\mathbb{R})} = O(2^{-mt}).$$

Лемма 3.4 [56]. *Пусть функция* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ *удовлетворяет условиям:*

1) $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]$ *существенно ограничена;*

2) $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] - |\hat{\varphi}|^2 = O(|\cdot|^{2t})$*;*

3) $1 - |\hat{\varphi}|^2 = O(|\cdot|^{2t_0})$.

Тогда β_m *доставляет аппроксимацию порядка* $t_1 = \min(t, 2t_0)$.

Здесь символ $f = O(|\cdot|^t)$ означает, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|f(x)|}{|x|^t} \le C$, $C > 0$.

Обозначим $\varphi_n(x) = C_n F_{n,n} = C_n F$, где $C_n = \dfrac{2^{\frac{n^2+n}{2}}}{Q(n,n)}$. Функция $\varphi_n(x)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению и, значит, функция φ_n порождает КМА $(V_m)_{m\in\mathbb{Z}}$.

Теорема 3.4 (Теорема о порядке аппроксимации). *Семейство операторов β_m, $m \in \mathbb{Z}$, построенных по функции $\varphi_n(x)$, доставляет аппроксимацию порядка* 1.

Таким образом, для любой функции $f \in W_2^1$

$$\|f - \beta_m\|_{L_2(\mathbb{R})} = O(2^{-m}).$$

Глава 1

Определение двоичного базисного сплайна, базисность в пространстве непрерывных функций

В этой главе обобщается понятие двоичного базисного сплайна, введенное в работе [10]. В разделе 1.1 приведен краткий обзор основной проблемы интерполяции и классических методов ее решения. Именно в попытках найти новые методы решения этой задачи появилась теория сплайнов. В разделе 1.2 рассматривается проблема интерполяции на бесконечной системе равноотстоящих узлов, и ее решение с помощью двоичного базисного сплайна. В разделе 1.3 рассматривается построение приближений сжатиями и сдвигами двоичного базисного сплайна функций из пространства непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций и приводится доказательство базисности системы сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна в этом пространстве.

1.1 Основная проблема интерполяции. Базисные сплайны

Пусть задана последовательность ординат $\{y_n\}$ $(n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$, соответствующая целочисленным значениям переменной $x = n$, т. е. $y(x) = y_n$, $x = n$. Первые попытки найти систематизирующее решение этой задачи возникли в теории синк-аппроксимаций. В общем виде формула синков выглядит следующим образом:

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Само понятие кардинальной функции было введено Е. Борелем [28]. Чуть позже Э. Т. Уиттакер [54] ввел понятие усеченной кардинальной функции:

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Широко известна теорема отсчетов, которую приписывают сразу трем авторам: Э. Т. Уиттакеру [22, 55], К. Е. Шеннону [51] и В. А. Котельникову [8]. В 1999 г. Международный научный фонд Эдуарда Рейна признал приоритет В. А. Котельникова в доказательстве теоремы отсчетов.

Теорема (Котельникова). *Любую функцию $F(t)$, состоящую из частот от 0 до f_1 периодов в секунду, можно представить рядом*

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k \frac{\sin \omega_1 (t - \frac{k}{2f_1})}{t - \frac{k}{2f_1}}, \tag{1.1}$$

где k — целое число; $\omega_1 = 2\pi f_1$; D_k — постоянные, зависящие от $F(t)$. И наоборот, любая функция $F(t)$, представленная в виде ряда (1.1), *состоит лишь из частот от* 0 *до f_1 периодов в секунду.*

Методы синк-аппроксимаций хорошо подходят для интерполяции аналитических функций, в том числе с особенностями, для задач пограничного слоя и для задач в бесконечных или полубесконечных диапазонах. Они позволяют записывать решения дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений в явном виде. Однако, методы синк-аппроксимаций плохо работают для реальных, т. е. измеренных, данных, или в случае шума. В этом случае локальный шум переходит на всю частотную область [17]. Если y_j — заданные значения в кардинальном ряде, т. е. $y_j = f_j$, то такую интерполяцию называют «правильной» (*ordinary*), в противном случае — «гладкой».

В ряде монографий (например, [42, 49]) указано, что В. А. Дженкинс первым построил как правильные, так и гладкие кардинальные интерполяционные формулы, в которых функции $L(x)$ были базисными симметричными сплайнами 3-й и 4-й степени с носителем $[-3, 3]$. Приведем эти две функции (первая из них — правильная, вторая — гладкая):

$$L(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3; \\ -\frac{1}{12}(x+3)^3(x+2), & -3 \le x \le -2; \\ \frac{1}{12}(x+3)(x+2)(x+1)(3x+7), & -2 \le x \le -1; \\ \frac{1}{6}(x+1)(6-6x-9x^2-x^3), & -1 \le x \le 0, \end{cases}$$

$$L(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3; \\ -\frac{1}{36}(x+3)^3, & -3 \le x \le -2; \\ \frac{1}{36}(69+117x+63x^2+11x^3), & -2 \le x \le -1; \\ \frac{1}{18}(15-27x^2-14x^3), & -1 \le x \le 0. \end{cases}$$

Благодаря тому, что $L(x) = L(-x)$ для всех действительных значений x, интерполяционная сумма выглядит следующим образом:

$$F(x) = \sum_n y_n L(x-n),$$

В случае правильной интерполяции кардинальная интерполяционная формула имеет второй порядок гладкости.

В 1946 г. И. Я. Шенберг [47,48] вводит понятие сплайновой функции $M_k(x) = \frac{1}{(k-1)}\delta^k x_+^{k-1}$, где δ^k обозначает центральную разность k-го порядка с единичным шагом. В качестве примера приведем функцию $M_4(x)$:

$$M_4(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \frac{1}{6}(x+2)^3, & -2 \le x \le -1; \\ \frac{1}{6}(x+2)^3 - \frac{4}{6}(x+1)^3, & -1 \le x \le 0; \\ \frac{1}{6}(-x+2)^3 - \frac{4}{6}(-x+1)^3, & 0 \le x \le 1; \\ \frac{1}{6}(-x+2)^3, & 1 \le x \le 2; \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$

Таким образом, именно в статье [47] впервые появляется терминология сплайнов и предложено следующее решение задачи интерполяции:

$$F(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} y_\nu M_k(x-\nu).$$

В 1947 г. в совместной работе Х. Б. Карри и И. Я. Шенберга [32] B-сплайны были представлены в виде разделенных разностей. Множество приближаемых функций было расширено следующим образом: пусть $P_k(0,+\infty)$ совокупность кусочно-многочленных функций k-й степени, имеющих непрерывные производные на $[0,+\infty)$, и которые на каждом отрезке $\left[\frac{t}{2^k}, \frac{t+1}{2^k}\right]$ совпадают с некоторым многочленом k-й степени. Аналогично определялось и пространство $P_k(-\infty,+\infty)$. В [32] было доказано, что эти разделенные разности являются базисом в пространстве кусочно-многочленных функций. В 1967 г. И. Я. Шенберг в работе [49] назвал эти разделенные разности *B-сплайнами.*

Определение 1.1. *Пусть $t=(t_i)$ — неубывающая последовательность, i-й B-сплайн порядка k для последовательности узлов t обозначается через $B_{i,k,t}$ и определяется правилом*

$$B_{i,k,t}(x) = (t_{i+k}-t_i)[t_i,\ldots,t_{i+k}](\cdot - x)_+^{k-1}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

В настоящее время основная задача интерполяции традиционно решается с помощью центрированных B-сплайнов Д. О. Стрёмберга.

Определение 1.2. *Функцию $\hat{\varphi}^{St,N}(\xi)$, определяемую равенством*

$$\hat{\varphi}^{St,N}(\xi) = \frac{\hat{\varphi}^{B,N}(\xi)}{A_N(\xi)}$$

называют сплайном Стрёмберга.

Здесь

$$\hat{\varphi}^{B,N}(\xi) = e^{-\pi i\gamma(N)\xi}\left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^{N+1},$$

где

$$\gamma(N) = \begin{cases} 0, & N \text{ — нечетное,} \\ 1, & N \text{ — четное,} \end{cases}$$

и

$$A_N(\xi) = \sqrt{a_N}(1 + z_1 e^{2\pi i\xi}) \dots (1 + z_n e^{2\pi i\xi}),$$

где $0 < z_n < \dots < z_1 < 1$ выбраны таким образом, что

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi^{\hat{B},N}(\xi + l) = A_N^2.$$

В монографии Ч. К. Чуи [24] описан метод нахождения кардинального сплайна $S(x)$ с помощью сплайнов Стрёмберга, которые названы $N_m(x)$. Сплайн $S(x)$ ищется в следующем виде:

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k N_m\left(x + \frac{m}{2} - k\right)\bigg|_{x=j} = f_j,$$

т. е. в результате получается бесконечная система уравнений относительно коэффициентов c_k.

Используя обозначения

$$\begin{cases} \tilde{N}_m(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} N_m\left(k + \frac{m}{2}\right) z^k, \\ \tilde{C}(z) := \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k, \\ \tilde{F}(z) := \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f_k z^k \end{cases}$$

для c_k можно получить выражение в виде ряда Неймана

$$\tilde{C}(z) = (1 + \tilde{D} + \tilde{D}^2 + \dots)\tilde{F},$$

где

$$\tilde{D}(z) := 1 - \tilde{N}_m(z), \quad z = e^{-i\omega}.$$

Возникает вопрос: можно ли найти представление в ином виде, при котором не нужно решать систему бесконечного числа уравнений? В настоящей диссертационной работе мы предлагаем новый вид базисных сплайнов, которые названы *двоичными базисными сплайнами*, и для нахождения неизвестных коэффициентов используем рекуррентные соотношения.

1.2 Двоичные базисные сплайны

В работе [10] было введено определение двоичного базисного сплайна.

Определение 1.3. *Пусть*

$$If(x) = \int\limits_0^x f(t)dt \ (x \in [0,1]) \text{ — } \textit{оператор интегрирования,} \tag{1.2}$$

$$r_k(x) = \operatorname{sign}(\sin(2^{k+1}\pi x)) \text{ — } \textit{функции Радемахера,} \tag{1.3}$$

$$W_{2^{n-1}}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} r_k(x) \text{ — } \textit{функции Уолша.} \tag{1.4}$$

Функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} (4I)^2 W_3, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

будем называть двоичным базисным сплайном второй степени.

Обобщим это определение на случай произвольной гладкости.

Пусть $1_{2^n-1}(x) = (-1)^{bit([2^n x])}$, где $bit(y)$ — количество единиц в битовой записи натурального числа y. Тогда $\psi_{n,N}(x) = Q(n,N) I^N 1_{2^n-1}(x)$ $(x \in [0,1]$, $n, N \in \mathbb{N}$, $N \leq n)$.

Представленная конструкция позднее была заменена на следующую.

Определение 1.4. *Функцию*

$$\psi_{n,N}(x) = Q(n,N) I^N W_{2^n-1}(x), \quad x \in [0,1], \quad n, N \in \mathbb{N}, \quad N \leq n,$$

будем называть двоичным базисным сплайном N-й степени от функции Уолша W_{2^n-1}, где $Q(n,N)$ — нормирующий коэффициент $\psi_{n,N}(x)$ в $C[0,1]$.

На рисунке 1.1 представлен график функции Радемахера $r_n(x)$.

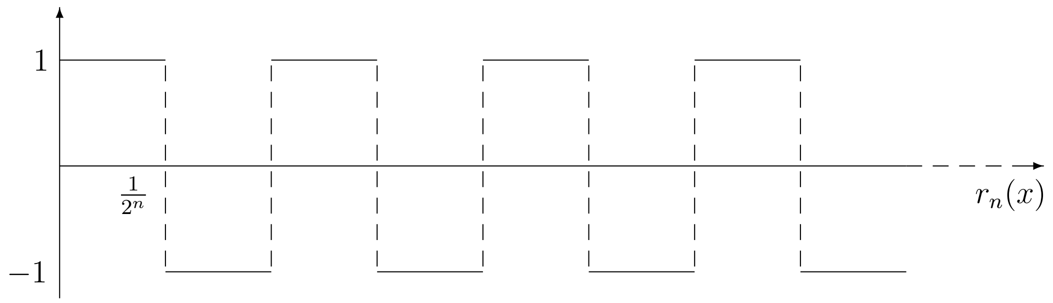

Рисунок 1.1 — График функции Радемахера $r_n(x)$

Функция Уолша $W_{2^n-1}(x)$ является произведением всех функций Радемахера с номерами до $n-1$ включительно. Ее график представлен на рисунке 1.2.

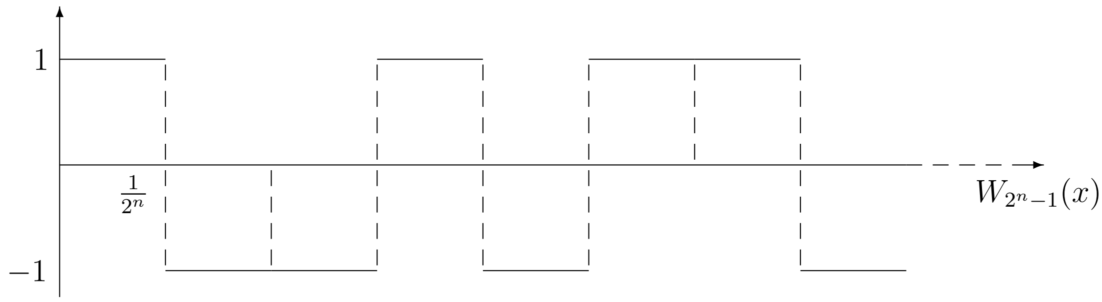

Рисунок 1.2 — График функции Уолша $W_{2^n-1}(x)$

Таким образом, обе конструкции являются аналогичными, так как произведение функций Радемахера как раз и есть $(-1)^{bit([2^n x])}$. По определению, $W_{2^n-1}(x) = \psi_{n,0}(x)$. Если проинтегрировать $W_{2^n-1}(x)$ один раз, очевидно, получим график функции $\psi_{n,1}(x)$ (с точностью до нормирующего коэффициента), который представлен на рисунке 1.3.

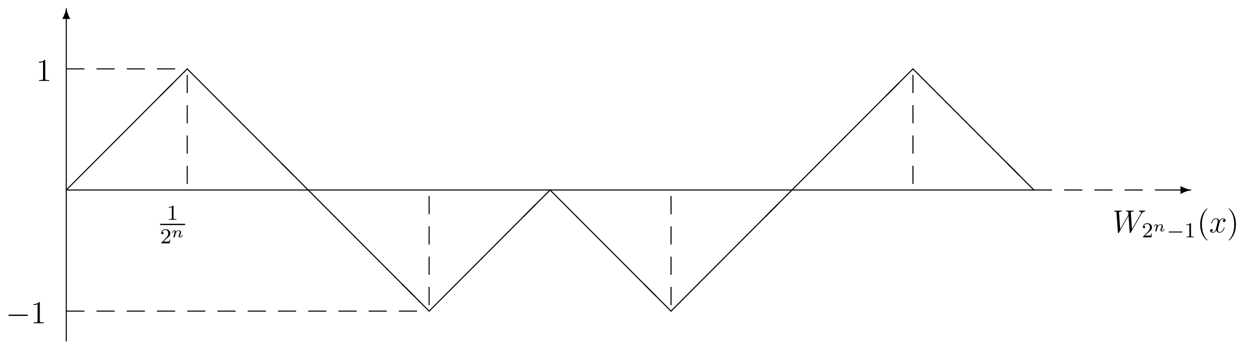

Рисунок 1.3 — График функции $\psi_{n,1}(x)$

Для того, чтобы понять поведение двоичных базисных сплайнов $\psi_{n,N}(x)$

при $N \geq 2$, рассмотрим некоторые факты.

Замечание 1.1. *Функция $\psi_{n,N}(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $N-1$ включительно.*

Этот факт напрямую вытекает из определения функции $\psi_{n,N}$: поскольку $\psi_{n,N}$ является интегралом N-й степени от ограниченной функции, то она имеет $N-1$ непрерывную производную.

Определение 1.5. *Функцию f будем называть антипериодической на двоичном интервале $\Delta_j^{(n)}$ с периодом $\frac{1}{2^{n+1}}$, если для любых $x, y \in \Delta_j^{(n)}$, связанных соотношением $x + \frac{1}{2^{n+1}} = y$, справедливо равенство $f(x) = -f(y)$.*

Разберем определение 1.5 на примере функции Радемахера

$$r_k(x) = \operatorname{sign}(\sin(2^{k+1}\pi x)).$$

Если рассматривать период $\frac{1}{2^{k+1}}$, то

$$f(y) = \operatorname{sign}\sin\left(2^{k+1}\pi\left(x + \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right) = \operatorname{sign}\sin(2^{k+1}\pi x + \pi x) = -\operatorname{sign}\sin(2^{k+1}\pi x).$$

Следовательно, функция Радемахера антипериодична с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$ на любом интервале $\Delta_j^{(k)}$.

В то же время, если взять период $\frac{1}{2^k}$, то функция Радемахера будет уже периодичной. Таким образом, установлен следующий факт:

Замечание 1.2. *Функция Радемахера r_k периодична с периодом $\frac{1}{2^k}$ и антипериодична на любом интервале $\Delta_j^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$.*

Учитывая вышеизложенное приходим к следующей лемме.

Лемма 1.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) функция Уолша $r_k r_{k+1} \dots r_{n-1}$ периодична с периодом $\frac{1}{2^k}$;

2) функция Уолша $r_k r_{k+1} \dots r_{n-1}$ антипериодична на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$ $(\nu = 0, 1, \dots, 2^k - 1)$;

3) функция Уолша $W_{2^n-1}(x) = r_0 r_1 \dots r_{n-1}$ антипериодична на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$ $(\nu = \overline{0, 2^k - 1},\ k = \overline{0, n-1})$.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно следует из (1.3).

Утверждение 2) справедливо в силу того, что функция $r_{k+1}r_{k+2}\dots r_{n-1}$ периодична с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$ и $r_k\left(\Delta_{2\nu}^{(k+1)}\right) = -r_k\left(\Delta_{2\nu+1}^{(k+1)}\right)$.

Докажем утверждение 3). Запишем W_{2^n-1} в виде (1.4):

$$W_{2^n-1} = r_0 r_1 \dots r_{k-1} r_k \dots r_{n-1}.$$

Учитывая изложенное ранее получаем, что произведение $r_k \dots r_{n-1}$ антипериодично на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$, а произведение $r_0 r_1 \dots r_{k-1}$ постоянно на интервале $\Delta_\nu^{(k)}$. Поэтому W_{2^n-1} антипериодична на $\Delta_\nu^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$. □

Лемма 1.2. *Пусть I — оператор интегрирования* (1.2). *Тогда функция $I^N(W_{2^n-1})(x)$ антипериодична на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ $(k = 0,\dots,n-1-N$, $N = 0,1,\dots,n-1)$ и*

$$\int\limits_{\Delta_j^{(n-1-N)}} I^N W_{2^n-1}\,dx = 0.$$

Доказательство. Случай $N = 0$ доказывается аналогично утверждению 3) леммы 1.1.

Пусть утверждение леммы верно при некотором N, т. е. $I^N W_{2^n-1}$ антипериодична на всех интервалах $\Delta_\nu^{(k)}$ $(k = 0,\dots,n-1-N)$. Зафиксируем $k \in [0, n-1-N]$ и покажем, что $I^{N+1}W_{2^n-1}$ антипериодичны в интервалах $\Delta_\nu^{(k-1)}$.

Выберем интервал

$$\Delta_\nu^{(k-1)} = \left(\frac{\nu}{2^{k-1}}, \frac{\nu+1}{2^{k-1}}\right) = \left(\frac{2\nu}{2^k}, \frac{2\nu+2}{2^k}\right) =$$
$$= \left(\frac{2\nu}{2^k}, \frac{2\nu+1}{2^k}\right) \bigsqcup \left(\frac{2\nu+1}{2^k}, \frac{2\nu+2}{2^k}\right) \bigsqcup \left\{\frac{2\nu+1}{2^k}\right\}.$$

Функция $I^N W_{2^n-1}$ антипериодична на $\Delta_\nu^{(k-1)}$ и на интервалах $\Delta_{2\nu}^{(k)}$ и $\Delta_{2\nu+1}^{(k)}$ по предположению. Тогда при $x \in \left(0, \frac{1}{2^k}\right)$ имеем

$$(I^{N+1}W_{2^n-1})\left(\frac{2\nu+1}{2^k}+x\right) = \int\limits_0^{\frac{2\nu+1}{2^k}+x} (I^N W_{2^n-1})(t)\,dt = \int\limits_{\frac{2\nu+1}{2^k}}^{\frac{2\nu+1}{2^k}+x} (I^N W_{2^n-1})(t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_{\frac{2\nu}{2^k}}^{\frac{2\nu}{2^k}+x} (I^N W_{2^n-1})(t)\,dt = -\int\limits_0^{\frac{2\nu}{2^k}+x} (I^N W_{2^n-1})(t)\,dt = -(I^{N+1}W_{2^n-1})\left(\frac{2\nu}{2^k}+x\right),$$

т. е. $I^{N+1}W_{2^n-1}$ антипериодичны на интервале $\left(\frac{\nu}{2^{k-1}}, \frac{\nu+1}{2^{k-1}}\right)$. □

Лемма 1.3. *Функция $\psi_{n,N}$ для $0 \le \nu \le 2^{n-N}$, $\nu \in \mathbb{Z}$:*

1) равна нулю в точках $\frac{\nu}{2^{n-N}}$;

2) имеет максимум по модулю в точках $\frac{\nu+1/2}{2^{n-N}}$;

3) $\operatorname{sign}(\psi_{n,N}(x)) = W_{2^{n-N}-1}(x)$.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции для $N \le n$.

1. Для $N = 0$ все утверждения леммы очевидны, так как $\psi_{n,0}$ является функцией Уолша.

2. Пусть все утверждения леммы верны для $N-1$. Докажем справедливость этих утверждений для N.

Согласно лемме 1.2 функция $I^N W_{2^n-1}$ антипериодична на интервале $\left(\frac{\nu}{2^{k-1}}, \frac{\nu+1}{2^{k-1}}\right)$. Следовательно, знак функции $\psi_{n,N}$ определяется как произведение функций Радемахера $r_0 r_1 \dots r_{n-N-1}$, или согласно функции Уолша $W_{2^{n-N}-1}$. Таким образом, утверждение 3) доказано.

Для доказательства утверждений 1) и 2) достаточно рассмотреть отрезок $\left[0, \frac{1}{2^{n-N}}\right]$. В силу антипериодичности функции $\psi_{n,N}$ для остальных отрезков данные утверждения так же будут справедливы.

Так как при $N-1$ на отрезке $\left[0, \frac{1/2}{2^{n-N}}\right]$ знак функции $\psi_{n,N-1}$ положителен, то $\psi_{n,N}$ на этом отрезке возрастает. На отрезке $\left[\frac{1/2}{2^{n-N}}, \frac{1}{2^{n-N}}\right]$ в силу своей антипериодичности функция $\psi_{n,N}$ убывает, причем с такими же значениями производных. Из этого следуют сразу утверждения 1) и 2). □

Замечание 1.3. *В силу определения функции* $\psi(n,N)(x)$

$$\left|\max_{0\le x\le 1}(\psi(n,N)(x))\right| = 1.$$

Лемма 1.4. *Пусть* $\psi_{n,N}(x) = Q(n,N)I^N W_{2^n-1}(x)$ $(x\in[0,1])$. *Тогда*

$$\left|\psi_{n,N}\left(\frac{\nu+\frac{1}{4}}{2^{n-N}}\right)\right| = \left|\psi_{n,N}\left(\frac{\nu+\frac{3}{4}}{2^{n-N}}\right)\right| = \frac{1}{2}.$$

Кроме того, при $x\le \frac{1}{2^{n-N+1}}$

$$\left|\psi_{n,N}\left(\frac{\nu}{2^{n-N}}+x\right)\right| = 1-\left|\psi_{n,N}\left(\frac{\nu+1/2}{2^{n-N}}-x\right)\right|. \tag{1.5}$$

Доказательство. Согласно лемме 1.3 и замечанию 1.3 имеем

$$\left|\psi_{n,N}\left(\frac{2\cdot\nu+1}{2\cdot 2^{n-N}}\right)\right| = 1.$$

В то же время

$$\left|\psi_{n,N}\left(\frac{2\cdot\nu+1}{2\cdot 2^{n-N}}\right)\right| = \left|Q(n,N)I^N W_{2^n-1}\left(\frac{\nu+\frac{1}{2}}{2^{n-N}}\right)\right| = 1.$$

В силу леммы 1.2 функция $\psi'_{n,N}$ антипериодична на интервале $\left[\frac{\nu}{2^{n-N}},\frac{\nu+1}{2^{n-N}}\right]$, а $\psi''_{n,N}$ — на интервале $\left[\frac{\nu}{2^{n-N+1}},\frac{\nu+1}{2^{n-N+1}}\right]$. Тогда

$$\int\limits_{\frac{\nu}{2^{n-N}}}^{\frac{\nu+\frac{1}{4}}{2^{n-N}}}\left(I^{N-2}W_{2^n-1}\right)(t)\,dt = -\int\limits_{\frac{\nu+\frac{1}{4}}{2^{n-N}}}^{\frac{\nu+\frac{2}{4}}{2^{n-N}}}\left(I^{N-2}W_{2^n-1}\right)(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$1 = \left|\psi_{n,N}\left(\frac{\nu+\frac{1}{2}}{2^{n-N}}\right)\right| = Q(n,N)\left|\int\limits_{\frac{\nu}{2^{n-N}}}^{\frac{\nu+\frac{1}{2}}{2^{n-N}}}\left(I^{N-1}W_{2^n-1}\right)(t)\,dt\right| =$$

$$= 2\cdot Q(n,N)\left|\int\limits_{\frac{\nu}{2^{n-N}}}^{\frac{\nu+\frac{1}{4}}{2^{n-N}}}\left(I^{N-1}W_{2^n-1}\right)(t)\,dt\right| = 2\left|\psi_{n,N}\left(\frac{\nu+\frac{1}{4}}{2^{n-N}}\right)\right|.$$

Таким образом, $\left|\psi_{n,N}\left(\frac{\nu+\frac{1}{4}}{2^{n-N}}\right)\right| = \frac{1}{2}$.

Аналогично показывается, что $\left|\psi_{n,N}\left(\frac{\nu+\frac{3}{4}}{2^{n-N}}\right)\right| = \frac{1}{2}$.

В то же время при $x \le \frac{1}{2^{n-N+1}}$ имеем

$$\left|\psi_{n,N}\left(\frac{\nu+\frac{1}{2}}{2^{n-N}} - x\right)\right| = Q(n,N)\left|\int\limits_{\frac{\nu}{2^{n-N}}}^{\frac{\nu+\frac{1}{2}}{2^{n-N}}-x} \left(I^{N-1}W_{2^n-1}\right)(t)\,dt\right| =$$

$$= Q(n,N)\left|\int\limits_{\frac{\nu}{2^{n-N}}}^{\frac{\nu+\frac{1}{2}}{2^{n-N}}} \left(I^{N-1}W_{2^n-1}\right)(t)\,dt - \int\limits_{\frac{\nu}{2^{n-N}}-x}^{\frac{\nu+\frac{1}{2}}{2^{n-N}}} \left(I^{N-1}W_{2^n-1}\right)(t)\,dt\right| =$$

$$= 1 - Q(n,N)\left|\int\limits_{\frac{\nu}{2^{n-N}}-x}^{\frac{\nu+\frac{1}{2}}{2^{n-N}}} \left(I^{N-1}W_{2^n-1}\right)(t)\,dt\right|.$$

Учитывая лемму 1.2 в итоге получаем

$$\psi_{n,N}\left(\frac{\nu}{2^{n-N}} + x\right) = 1 - \left|\psi_{n,N}\left(\frac{\nu+1/2}{2^{n-N}} - x\right)\right|.$$

□

Теперь можно описать двоичный базисный сплайн более точно. Согласно лемме 1.3, функция $\psi_{n,N}(x)$:

1) равна нулю в точках $\frac{\nu}{2^{n-N}}$;

2) имеет максимум по модулю в точках $\frac{\nu+1/2}{2^{n-N}}$;

3) знак функции определяется аналогично $W_{2^{n-N}-1}(x)$.

Анализируя замечание 1.1, мы понимаем, что функция $\psi_{n,N}(x)$ гладкая. Особенно это важно учитывать в точках вершины «параболы» и в ее краях, т. е. к нулю функция приближается плавно (рисунок 1.4).

Также благодаря (1.4) мы знаем, что при $x = \frac{1}{4}$ и $x = \frac{3}{4}$ функция $\psi_{n,N}(x) = \frac{1}{2}$ и симметрична относительно этих точек. Поскольку $\psi_{n,N-1}$ является производной от $\psi_{n,N}$, мы знаем, что в этих точках производная достигает своего максимума (по модулю).

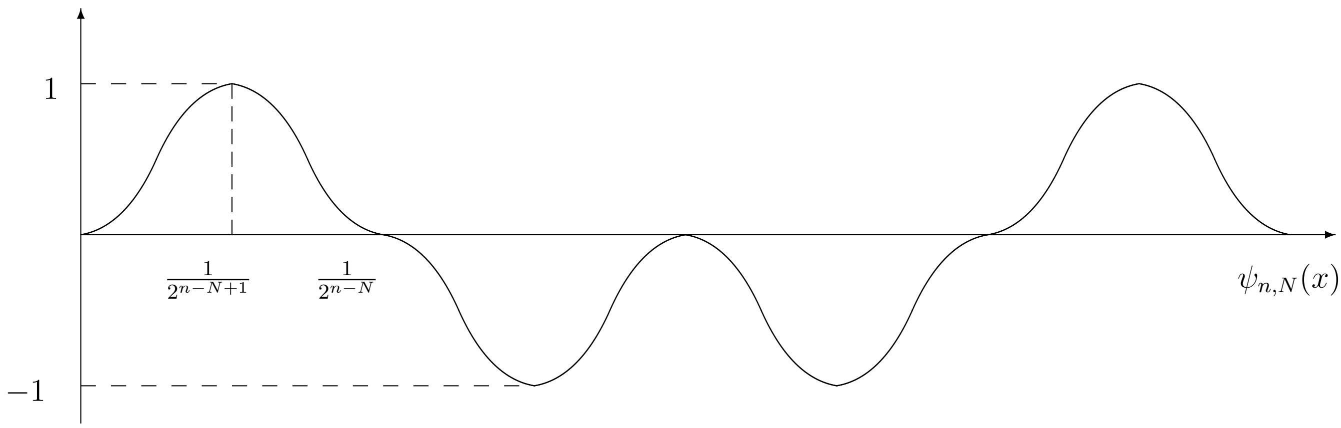

Рисунок 1.4 — Двоичный базисный сплайн

Замечание 1.4. *Очевидно, что $\psi_{n,n}(x)$ есть кусочно-монотонная функция, совпадающая с многочленом n-й степени на каждом отрезке*

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right], \quad k \in \mathbb{Z}_0, \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1.$$

Определение 1.6. *Обозначим через $P_k(0, +\infty)$ совокупность кусочно-многочленных функций k-й степени, имеющих непрерывные производные до $(k-1)$-го порядка на $[0, +\infty)$, и которые на каждом отрезке $[t, t+1]$ совпадают с некоторым многочленом k-й степени. Аналогично определяется и пространство $P_k(-\infty, +\infty)$.*

Лемма 1.5. *Пусть $n > k \geq 0$. Тогда при всех $x \in \mathrm{R}$ справедливо равенство*

$$\sum_{t \in \mathrm{Z}} W_{2^k-1}\left(x + \frac{t}{2^{k+1}}\right) \psi_{n,n}^{(k)}\left(x + \frac{t}{2^{k+1}}\right) = \frac{Q(n,n)}{Q(n-k, n-k)}, \tag{1.6}$$

где $Q(n,n)$ — нормирующий коэффициент.

Доказательство. Согласно лемме 1.2 функция $I^N(W_{2^n-1})(x)$ антипериодична на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ $(k = 0, \ldots, n-1-N,\ N = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Поэтому, с одной стороны,

$$\sum_{t\in Z} \psi_{n,n}\left(x+\frac{t}{2}\right) = 1. \tag{1.7}$$

С другой стороны,

$$\psi^{(k)}_{n,n}(x) = (Q(n,n)I^n W_{2^n-1}(x))^{(k)} = Q(n,n)I^{n-k} r_0(x) r_1(x) ... r_n(x). \tag{1.8}$$

Если рассматривать выражение (1.8) на каждом из отрезков $\frac{t}{2^k}$, $t \in Z$, то функции $r_0(x)r_1(x)...r_{k-1}(x) = W_{2^k-1}(x)$ $(k = 0, \dots, n-1-N)$ на этих отрезках будут принимать постоянные значения: либо 1, либо -1, соответствующим образом определяя знак функции. Следовательно,

$$\psi^{(k)}_{n,n}(x) = Q(n,n)W_{2^k-1}(x)I^{n-k} r_k(x) r_{k+1}(x) ... r_n(x).$$

В то же время, поскольку $W^2_{2^k-1}(x) = 1$, то

$$W_{2^k-1}(x)\psi^{(k)}_{n,n}(x) = Q(n,n)W_{2^k-1}(x) * W_{2^k-1}(x) I^{n-k} r_k(x) r_{k+1}(x) ... r_n(x) =$$
$$= Q(n,n) I^{n-k} r_k(x) r_{k+1}(x) ... r_n(x).$$

В свою очередь, $r_t(x) = r_k\left(2^{t-k}x\right)$, $0 \le k \le t$. Следовательно,

$$W_{2^k-1}(x)\psi^{(k)}_{n,n}(x) = \frac{Q(n,n)}{Q(n-k,n-k)}\psi_{n-k,n-k}\left(2^k x\right). \tag{1.9}$$

Подставляя (1.9) в (1.6) и используя (1.7), окончательно получим

$$\sum_{t\in Z} W_{2^k-1}(x+\frac{t}{2^{k+1}})|\psi^{(k)}_{n,n}\left(x+\frac{t}{2^{k+1}}\right) =$$
$$= \frac{Q(n,n)}{Q(n-k,n-k)}\sum_{t\in Z}\psi_{n-k,n-k}\left(2^k\left(x+\frac{t}{2^{k+1}}\right)\right) =$$
$$= \frac{Q(n,n)}{Q(n-k,n-k)}\sum_{t\in Z}\psi_{n-k,n-k}\left(2^k x+\frac{t}{2}\right) = \frac{Q(n,n)}{Q(n-k,n-k)}.$$

□

Лемма 1.6. *Нормирующий коэффициент имеет следующий вид:*

$$Q(n,N) = 2^{\frac{2nN+3N-N^2-2}{2}}, \quad 1 \le N \le n. \tag{1.10}$$

Доказательство. Разберем два случая.

1. Пусть $N = 1$, т. е. функция Уолша проинтегрирована один раз. На каждом отрезке функция Уолша равна либо 1, либо -1, а длина каждого отрезка функции W_{2^n-1} равна $\frac{1}{2^n}$. Значит, по лемме 1.3

$$\left| \int\limits_{2k}^{\frac{2k+1}{2^n}} W_{2^n-1}(x)dx \right| = \frac{1}{2^n}, \quad k = 0, 1, ..2^{n-1} - 1,$$

и в этих точках достигается максимум по модулю этой функции. Но по определению, максимум функции $\psi_{n,1}(x)$ должен быть равен 1. Следовательно, $Q(n,1) = 2^n$. Если подставить в (1.10) $N = 1$, мы также получим $Q(n,1) = 2^n$.

2. Пусть $N > 1$, тогда функция $\psi_{n,N-1}(x)$ не является кусочно-постоянной. Однако, учитывая лемму (1.4), среднее значение функции на отрезке $[0,1]$ будет равно $\frac{1}{2}$. Следовательно, необходимо домножить $\int\limits_0^{\frac{1}{2^{n-i+1}}} \psi_{n,N-1}(x)$ на нормирующий коэффициент

$$Q(n,i) = Q(n,i-1) \cdot 2^{n-i+2}.$$

Отсюда получаем

$$Q(n,N) = 2^n \cdot \prod_{i=2}^{N} 2^{n-i+2} = 2^{n+\sum_{i=2}^{n}(n-i+2)} =$$
$$= 2^{n+(N-1)\frac{2+2\cdot n-N}{2}} = 2^{n+\frac{2nN+2N-N^2-2-2\cdot n+N}{2}} = 2^{\frac{2nN+3N-N^2-2}{2}}.$$

□

Теорема 1.1. *Пусть* $F_{n,N}(x) = \psi_{n,N}\left(\frac{x}{2^n}\right)$. *Совокупность функций*

$$F_{n,n}(x-j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j > -2^n, \quad j \notin \left[-2^{d+1}+1, -2^d - 1\right], \tag{1.11}$$
$$0 \le d < n, \quad d \in \mathrm{N},$$

образуют базис в пространстве $P_n(0,+\infty)$.

Доказательство. Так как для функции $\psi_{n,n}$ справедливо равенство (1.6), то функции системы $\{F_{n,n}(x-j)\}$, $j \in \mathbb{Z}$, $j > -2^n$ при $n > 1$ являются линейно зависимыми.

Выберем произвольную функцию $f \in P_n(0,+\infty)$. Пусть $n > 1$. Рассмотрим отрезок $[0,1]$. На этом отрезке не тождественно равными нулю являются функции вида $F_{n,n}(x-j)$, $j \in [-2^n-1,-1]$.

Согласно (1.5) для любых $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ выполняется равенство

$$\psi_{n,n}(x) + \psi_{n,n}\left(x+\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Следовательно, для любых $x \in [0, 2^{n-1}]$ справедливо равенство

$$F_{n,n}(x) + F_{n,n}(x+2^{n-1}) = 1 \tag{1.12}$$

Рассмотрим отрезок $[0,1]$. С учетом (1.12) для функций $F_{n,n}$ на этом отрезке выполняется следующая система соотношений:

$$\begin{cases} F_{n,n}\left(x+1\right) + F_{n,n}\left(x+1+2^{n-1}\right) = 1, \\ F_{n,n}\left(x+2\right) + F_{n,n}\left(x+2+2^{n-1}\right) = 1, \\ ... \\ F_{n,n}\left(x+2^{n-1}-1\right) + F_{n,n}\left(x+2^{n}-1\right) = 1. \end{cases}$$

Следовательно, функции вида $F_{n,n}(x-j)$, $j \in [-2^n+1, -2^{n-1}-1]$ могут быть выражены через функции $F_{n,n}(x-j)$, $j \in [-2^{n-1}+1,-1]$ следующим образом:

$$\begin{cases} F_{n,n}(x+1) = 1 - F_{n,n}\left(x+1+2^{n-1}\right), \\ F_{n,n}(x+2) = 1 - F_{n,n}\left(x+2+2^{n-1}\right), \\ \dots \\ F_{n,n}\left(x+2^{n-1}-1\right) = 1 - F_{n,n}\left(x+2^{n}-1\right), \end{cases}$$

и мы можем выбросить из системы $\{F_{n,n}(x-j)\}$ все функции вида $F_{n,n}(x-j)$, $j \in [-2^n+1, -2^{n-1}-1]$ как линейно зависимые. Кроме того, с одной стороны, в точке $x = 0$ выполняется соотношение $F_{n,n}\left(2^{n-1}\right) = 1$. С другой стороны, $F_{n,n}^{(k)}\left(0+2^{n-1}\right) = 0$, $k > 0$.

Если $n > 2$, то для производных функций $F'_{n,n}$ на отрезке $[0, 1]$ в силу (1.5) выполняется следующая система отношений:

$$\begin{cases} F'_{n,n}\left(x+1\right) + F'_{n,n}\left(x+1+2^{n-2}\right) = \frac{Q(n,n)}{Q(n-1,n-1)}, \\ F'_{n,n}\left(x+2\right) + F'_{n,n}\left(x+2+2^{n-2}\right) = \frac{Q(n,n)}{Q(n-1,n-1)}, \\ \ldots \\ F'_{n,n}\left(x+2^{n-2}-1\right) + F'_{n,n}\left(x+2^{n-1}-1\right) = \frac{Q(n,n)}{Q(n-1,n-1)}. \end{cases}$$

Отметим, что из системы удалены функции $F_{n,n}(x-j)$, $j \in [-2^n+1, -2^{n-1}-1]$. Аналогично предыдущим рассуждениям, мы можем исключить из системы все функции вида $F_{n,n}(x-j)$, $j \in [-2^{n-1}+1, -2^{n-2}-1]$. Кроме того, в точке $x = 0$ выполняется соотношение $F'_{n,n}\left(2^{n-2}\right) = \frac{Q(n,n)}{Q(n-1,n-1)}$, при этом $F^{(k)}_{n,n}\left(0+2^{n-1}\right) = 0$, $k > 1$.

В произвольном случае при $0 \le k < n,\ k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\begin{cases} F^{(k)}\left(x+1\right) + F^{(k)}_{n,n}\left(x+1+2^{n-k-1}\right) = \frac{Q(n,n)}{Q(n-k,n-k)}, \\ F^{(k)}\left(x+2\right) + F^{(k)}_{n,n}\left(x+2+2^{n-k-1}\right) = \frac{Q(n,n)}{Q(n-k,n-k)}, \\ \ldots \\ F^{(k)}\left(x+2^{n-k-1}-1\right) + F^{(k)}_{n,n}\left(x+2^{n-k}-1\right) = \frac{Q(n,n)}{Q(n-k,n-k)}, \end{cases}$$

и мы можем удалить из системы все функции вида

$$F_{n,n}(x-j), \quad j \in [-2^{n-k+1}+1, -2^{n-k}-1].$$

Кроме того, в точке $x = 0$ выполняется соотношение

$$F^{(k-1)}_{n,n}\left(2^{n-2}\right) = \frac{Q(n,n)}{Q(n-k,n-k)},$$

при этом $F^{(k)}_{n,n}\left(0+2^{n-1}\right) = 0$.

Таким образом, из системы оказались исключены функции вида $F_{n,n}(x-j)$, $j \in \mathbb{Z}$, $j \in \left[-2^{d+1}+1, -2^d-1\right]$, $0 \le d < n$, $d \in \mathrm{N}$, в то время, как функции вида $F_{n,n}\left(x+2^d\right)$ остались.

Докажем, что функция $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ на отрезке $[0,1]$ единственным образом представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{-2^k} F_{n,n}\left(x + 2^k\right) + c_0 F_{n,n}(x), \tag{1.13}$$

где $c_t \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{Z}$, $t > -2^n$.

В точке $x = 0$ должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{cases} f(0) = a_0 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_{-2^k} F_{n,n}\left(2^k\right), \\ f'(0) = a_1 = \sum\limits_{k=0}^{n-2} c_{-2^k} F'_{n,n}\left(2^k\right), \\ \dots \\ f^{(n-1)}(0) = a_{n-1} = c_{-1} F^{(n-1)}_{n,n}(1) = \frac{Q(n,n)}{Q(n-(n-1),n-(n-1))}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} c_{-1} = \frac{a_{n-1}}{\psi^{(n-1)}_{n,n}\left(\frac{1}{2^n}\right)} = \frac{a_{n-1}\cdot Q(1,1)}{Q(n,n)} = \frac{a_{n-1}\cdot 2^{\frac{2+3-1-2}{2}}}{2^{\frac{2n^2+3n-n^2-2}{2}}} = \frac{a_{n-1}}{2^{\frac{n^2+3n-4}{2}}}, \\ c_{-2} = \left(a_{n-2} - c_{-1}\psi^{(n-2)}_{n,n}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\frac{Q(2,2)}{Q(n,n)} = \frac{\left(a_{n-2} - c_{-1}\psi^{(n-2)}_{n,n}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)}{2^{\frac{n^2+3n-10}{2}}}, \\ \dots \\ c_{-2^k} = \frac{a_{n-k} - \sum_{j=0}^{k} c_{-2^j}\psi^{(k)}_{n,n}\left(\frac{1}{2^{n-k}}\right)}{2^{\frac{(n^2-k^2)+3(n-k)}{2}}}, \end{cases} \tag{1.14}$$

где коэффициенты c_{-2^k} однозначно определены.

Для нахождения коэффициента c_0 достаточно рассмотреть (1.13) при $x = 1$. Так как многочлен n-й степени на отрезке $[0,1]$ полностью определяется значениями в граничных точках и производными до $(n-1)$-го порядка включительно в точке $x = 0$, то равенство (1.13) доказано.

Для нахождения коэффициента c_1 запишем равенство (1.13) при $x \in [1,2]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{-2^k} F_{n,n}\left(x + 2^k\right) + c_0 F_{n,n}(x) + c_1 F_{n,n}(x-1). \tag{1.15}$$

При этом все коэффициенты в (1.15), кроме c_1, уже известны.

Полагая $x = 2$, находим c_1, и т. д. Продолжая этот процесс, находим рекуррентные соотношения для нахождения всех коэффициентов c_t, $t \in \mathbb{Z}$, $t > 2^{-n}$.

В процессе построения системы каждый коэффициент определялся однозначно. Таким образом, любую функцию $f \in P_n(0, +\infty)$ можно представить единственным образом. □

Замечание 1.5. *Аналогичными рассуждениями можно доказать, что система*

$$F_{n,n}(x - j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \notin \left[-2^{d+1} + 1, -2^d - 1\right], \quad 0 \le d < n, \quad d \in \mathrm{N}$$

есть базис в пространстве $P_n(-\infty, +\infty)$.

1.3 Базисность системы сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна в пространстве непрерывных функций

В этом разделе мы покажем, что система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна при $N = n$, т. е. когда интегрирование функции Уолша W_{2^n-1} проводится n раз, является базисом в пространстве непрерывных функций.

Определение 1.7. *Функцию* $\psi_n(x) = Q(n,n)I^n W_{2^n-1}(x)$, $x \in [0,1]$, *будем называть двоичным базисным сплайном* n*-й степени, где* $Q(n,n)$ *— нормирующий коэффициент в* $C[0,1]$.

Покажем, что система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна является базисом в $C_0[0,1]$ (этот факт в случае $n = 2$ без доказательства присутствует в работе [61]), а при добавлении двух дополнительных функций — в $C[0,1]$.

Рассмотрим систему функций

$$\phi_{m,j}(x) = \psi_n(2^m x - j), \quad m \in \mathbb{Z}_0, \quad j \in [0, 2^m - 1].$$

Пусть $f(x)$ — функция из $C_0[0,1]$. Введем следующие обозначения:

$$R_0(x) = f(x), \tag{1.16}$$

$$S_0(x) = R_0\left(\frac{0+1/2}{2^0}\right)\phi_{0,0}(x).$$

В общем случае полагаем

$$S_m(x) = R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right)\phi_{m,j}(x), \quad x \in \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right], \tag{1.17}$$

$$R_{m+1}(x) = R_m(x) - S_m(x). \tag{1.18}$$

На рисунке 1.5 изображен процесс приближения. Разберем его подробнее.

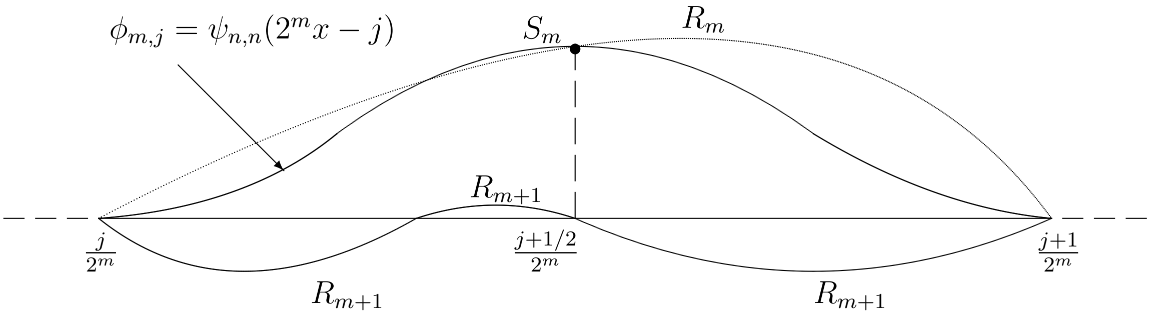

Рисунок 1.5 — Процесс приближения по остаткам

Рассмотрим R_m — график остатков после m-го шага. Точки $\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}$ являются точками склейки, поэтому $R_m\left(\frac{j}{2^m}\right) \equiv R_m\left(\frac{j+1}{2^m}\right) \equiv 0$. На остальной части отрезка $[0,1]$ функция R_m очевидно является функцией из класса $C_0[0,1]$, так как $f(x) \in C_0[0,1]$ и $S_m(x) \in C_0[0,1]$.

Построим график остатков после $(m+1)$-го шага. Значения R_{m+1} находятся по формуле (1.18), а значения S_m — по формуле (1.17). Точка $\frac{j+1/2}{2^m}$ становится новой точкой склейки. Стоит обратить внимание, что приближение строится не по частичным суммам ряда, а по остаткам. Таким образом, для доказательства базисности необходимо вычислить $\left|f(x) - \sum_{i=0}^{m} S_i(x)\right|$.

Определение 1.8. *Модуль непрерывности имеет вид*

$$\omega_f(\delta) = \sup_{0\le h\le\delta} |f(x+h) - f(x)|, \quad x \in [0, 1-h], \tag{1.19}$$

модуль непрерывности второго порядка (модуль гладкости) —

$$\omega_f^2(\delta) = \sup_{0\le h\le\delta} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|, \quad x \in [0, 1-2h]. \tag{1.20}$$

Теорема 1.2. *Пусть $\phi_{m,j}(x)$ — базис в $C_0[0,1]$. Имеет место следующая оценка:*

$$\left|f(x) - \sum_{i=0}^{m} S_i(x)\right| \le \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{17}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{\frac{m-3}{2}}}\right) + 5\cdot 2^{-\frac{3}{10}(m-1)}||f|| + 2^{4-\frac{3}{5}m}\|f\|.$$

Здесь и далее используется норма в $C_0[0,1]$.

Доказательство. Для начала докажем, что

$$\left|f(x) - \sum_{i=0}^{m} S_i(x)\right| = |R_{m+1}(x)|. \tag{1.21}$$

В самом деле, используя (1.16) и (1.18), получим

$$\left|f(x) - \sum_{i=0}^{m} S_i(x)\right| = \left|R_0(x) - S_0(x) - \sum_{i=1}^{m} S_i(x)\right| =$$

$$= \left|R_1(x) - \sum_{i=2}^{m} S_i(x)\right| = \left|R_1(x) - S_1(x) - \sum_{i=2}^{m} S_i(x)\right| = \cdots = |R_{m+1}(x)|.$$

Докажем, что

$$R_{m+1}(x) \le \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{17}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{\frac{m-3}{2}}}\right) + 5\cdot 2^{-\frac{3}{10}(m-1)}\|f\| + 2^{4-\frac{3}{5}m}\|f\|.$$

Пусть $j \in [0, 2^n - 1]$. Определим следующим образом модуль двоичной непрерывности:

$$\widetilde{\omega}_{f,n} = \sup_j \left| f\left(\frac{j+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{j}{2^n}\right)\right|,$$

и модуль двоичной непрерывности второго порядка при $j \in [0, 2^n - 2]$:

$$\widetilde{\omega}_{f,n}^2 = \sup_j \left| f\left(\frac{j+2}{2^n}\right) - 2f\left(\frac{j+1}{2^n}\right) + f\left(\frac{j}{2^n}\right)\right|. \tag{1.22}$$

Ранее мы оговаривали, что $R_m\left(\frac{j}{2^m}\right)=0$, так как точки $\frac{j}{2^m}$ являются точками склейки. Из (1.17) и (1.18) следует

$$R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)=R_m\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)-S_m\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)=$$
$$=R_m\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)-\left(R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right)+R_m\left(\frac{j}{2^m}\right)\right)\phi_{m,j}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right).$$

По лемме 1.4 известно, что $\phi_{m,j}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)=\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right|=$$
$$=\left|R_m\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right)+R_m\left(\frac{j}{2^m}\right)\right)\right|=$$
$$=\left|\frac{1}{2}\left(2R_m\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)-\left(R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right)+R_m\left(\frac{j}{2^m}\right)\right)\right)\right|\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}\cdot\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+2}. \tag{1.23}$$

Покажем, что при всех $t\geq 2$ справедливо неравенство

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+t}\leq\widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+t}+\frac{1}{4^{t-1}}\cdot\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m}. \tag{1.24}$$

В самом деле, из (1.22) имеем

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+t}=\sup_{j\in[0,2^n-2]}\left|\left(2R_m\left(\frac{j+1}{2^{m+t}}\right)-\left(R_m\left(\frac{j+2}{2^{m+t}}\right)+R_m\left(\frac{j}{2^{m+t}}\right)\right)\right)\right|.$$

Применяя (1.18), получим

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+t}\leq\sup_{j\in[0,2^n-2]}\left|\left(2R_{m-1}\left(\frac{j+1}{2^{m+t}}\right)-\left(R_{m-1}\left(\frac{j+2}{2^{m+t}}\right)+R_{m-1}\left(\frac{j}{2^{m+t}}\right)\right)\right)\right|+$$
$$+\sup_{j\in[0,2^n-2]}\left|\left(2S_{m-1}\left(\frac{j+1}{2^{m+t}}\right)-\left(S_{m-1}\left(\frac{j+2}{2^{m+t}}\right)+S_{m-1}\left(\frac{j}{2^{m+t}}\right)\right)\right)\right|.$$

Используем (1.17):

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+t} \leq \sup_{j\in[0,2^n-2]} \left| \left(2R_{m-1}\left(\frac{j+1}{2^{m+t}}\right) - \left(R_{m-1}\left(\frac{j+2}{2^{m+t}}\right) + R_{m-1}\left(\frac{j}{2^{m+t}}\right)\right)\right)\right| +$$

$$+ \sup_{j\in[0,2^n-2]} \left| \left(2\phi_{m-1,j \text{ div } 2^{t+1}}\left(\frac{j+1}{2^{m+t}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.- \left(\phi_{m-1,j \text{ div } 2^{t+1}}\left(\frac{j+2}{2^{m+t}}\right) + \phi_{m-1,j \text{ div } 2^{t+1}}\left(\frac{j}{2^{m+t}}\right)\right)\right) \times$$

$$\left. \times R_{m-1}\left(\frac{j \text{ div } 2^{t+1}}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m}\right)\right| \leq$$

$$\leq \widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+t} + \widetilde{\omega}^2_{(\phi_{m-1,j \text{ div } 2^{t+1}}),m+t} \cdot \left| R_{m-1}\left(\frac{j \text{ div } 2^{t+1}}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m}\right)\right|.$$

Оценим $\widetilde{\omega}^2_{(\phi_{m-1,j \text{ div } 2^{t+1}}),m+t}$. Применяя (1.22), получим:

$$\widetilde{\omega}^2_{(\phi_{m-1,j \text{ div } 2^{t+1}}),m+t} = \sup_{k\in[0,2^n-2]} \left| \phi_{m-1,j \text{ div } 2^{t+1}}\left(\frac{k+2}{2^{m+t}}\right) - \right.$$

$$\left. -2\phi_{m-1,j \text{ div } 2^{t+1}}\left(\frac{k+1}{2^{m+t}}\right) + \phi_{m-1,j \text{ div } 2^{t+1}}\left(\frac{k}{2^{m+t}}\right)\right| =$$

$$= \sup_{k\in[0,2^n-2]} \left| \psi_{n,n}\left(2^{m-1}\frac{k+2}{2^{m+t}} - j \text{ div } 2^{t+1}\right) - 2\psi_{n,n}\left(2^{m-1}\frac{k+1}{2^{m+t}} - j \text{ div } 2^{t+1}\right) + \right.$$

$$\left. +\psi_{n,n}\left(2^{m-1}\frac{k}{2^{m+t}} - j \text{ div } 2^{t+1}\right)\right| =$$

$$= \sup_{k\in[0,2^n-2]} \left| \psi_{n,n}\left(\frac{k+2}{2^{t+1}} - j \text{ div } 2^{t+1}\right) - \right.$$

$$\left. -2\psi_{n,n}\left(\frac{k+1}{2^{t+1}} - j \text{ div } 2^{t+1}\right) + \psi_{n,n}\left(\frac{k}{2^{t+1}} - j \text{ div } 2^{t+1}\right)\right|.$$

Учитывая, что $k \in [0, 2^n-2]$, $j \in [0, 2^n-2]$, $k,\ j \in \mathbb{Z}_0$, имеем

$$\omega^2_{(\phi_{m-1,j \text{ div } 2^{t+1}}),m+t} = \sup_{k\in[0,2^n-2]} \left| \psi_n\left(\frac{k+2}{2^{t+1}}\right) - 2\psi_n\left(\frac{k+1}{2^{t+1}}\right) + \psi_n\left(\frac{k}{2^{t+1}}\right)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[0,1]} \left| \psi_n\left(x + \frac{2}{2^{t+1}}\right) - 2\psi_n\left(x + \frac{1}{2^{t+1}}\right) + \psi_n(x)\right| \leq \left(\frac{1}{2^{t+1}}\right)^2 \cdot \sup_{x\in[0,1]} |\psi_n''(x)|.$$

Стоит отметить, что при $n = 2$ в точках $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$ вторая производная не существует, однако существуют вторые производные слева и справа, и этого вполне достаточно. Следовательно, данное доказательство справедливо при $n \geq 2$.

В силу теоремы 1.6

$$\sup_{x\in[0,1]}|\psi''_n(x)| = \sup_x \left|\psi''_{n,n}(x)\right| = \frac{Q(n,n)}{Q(n,n-2)}\sup_{x\in[0,1]}|\psi_{n,n-2}(x)| =$$

$$= \frac{2^{\frac{n^2+3n-2}{2}}}{2^{\frac{n^2+3n-12}{2}}}\cdot|\psi_{n,n-2}(x)| = 2^5\,|\psi_{n,n-2}(x)|\,.$$

Согласно замечанию 1.3 имеет место оценка $|\psi_{n,n-2}(x)| \leq 1$. Тогда

$$\widetilde{\omega}^2_{(\phi_{(m-1),j\ \mathrm{div}\ 2^{t+1}}),m+t} \leq \left(\frac{1}{2^{t+1}}\right)^2 2^5 \leq \frac{1}{2^{2t-3}}. \tag{1.25}$$

В свою очередь,

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+t} \leq \widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+t} + \frac{1}{2^{2t-3}}\left|R_{m-1}\left(\frac{j\ \mathrm{div}\ 2^t + 1/2}{2^{m-1}}\right)\right|. \tag{1.26}$$

Учитывая (1.23), получаем

$$\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+t} \leq \widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+t} + \frac{1}{2^{2t-2}}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m} = \widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+t} + \frac{1}{4^{t-1}}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m},$$

и тем самым неравенство (1.24) доказано.

Вернемся к неравенству (1.23):

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\widetilde{\omega}^2_{R_m,m+2}.$$

Учитывая (1.24), имеем

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\widetilde{\omega}^2_{R_{m-1},m+2} + \frac{1}{4}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m}\right).$$

Преобразуем последнее неравенство с помощью (1.24):

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\left(\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m+2} + \frac{1}{16}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m-1}\right) + \frac{1}{4}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m+2} + \frac{1}{8}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-2},m} + \frac{1}{32}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m-1}.$$

На следующем шаге, преобразуя все слагаемые с индексом R_{m-2}, получаем:

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m+2} + \frac{1}{64}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-4},m-2}\right) +$$

$$+\frac{1}{8}\left(\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m} + \frac{1}{4}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-4},m-2}\right) + \frac{1}{32}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m+2} + \frac{1}{8}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m} + \frac{1}{32}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-3},m-1} + \frac{1+4}{128}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-4},m-2}.$$

С помощью метода математической индукции покажем, что после k-го шага последнее неравенство примет вид

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{k-1} C_t\widetilde{\omega}^2_{R_{m-k-1},m-t} + C_k\omega^2_{R_{m-k-2},m-k}\right), \tag{1.27}$$

где

$$C_{-2}=1, \quad C_{-1}=0, \quad C_k=\frac{1}{4}(C_{k-1}+C_{k-2}). \tag{1.28}$$

Пусть при $k-1$ справедливо

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{(k-1)-1} C_t\widetilde{\omega}^2_{R_{m-(k-1)-1},m-t} + C_{k-1}\omega^2_{R_{m-(k-1)-2},m-(k-1)}\right). \tag{1.29}$$

Преобразуем (1.29) с помощью неравенства (1.24):

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{k-2} C_t\left(\widetilde{\omega}^2_{R_{m-(k-1)-1-1},m-t} + \frac{1}{4^{m-t-(m-(k-1)-1)-1}}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-(k-1)-1-2},m-(k-1)-1}\right)+\right.$$

$$\left.+C_{k-1}\omega^2_{R_{m-(k-1)-2},m-(k-1)}\right) =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{(k-1)-1} C_t\left(\widetilde{\omega}^2_{R_{m-k-1},m-t} + \frac{1}{4^{k-t-1}}\widetilde{\omega}^2_{R_{m-k-2},m-k}\right) + C_{k-1}\omega^2_{R_{m-k-1},m-k+1}\right) =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{k-1} C_t\widetilde{\omega}^2_{R_{m-k-1},m-t} + C^*_k\omega^2_{R_{m-k-2},m-k}\right),$$

где

$$C^*_k=\sum_{t=-2}^{k-2}\frac{1}{4^{k-t-1}}C_t=\frac{1}{4}\sum_{t=-2}^{k-3}\frac{1}{4^{(k-1)-t-1}}C_t+\frac{1}{4}C_{k-2}=\frac{1}{4}\left(C_{k-1}+C_{k-2}\right).$$

т. е. $C^*_k=C_k$. Неравенство (1.27) доказано.

Таким образом, после $k=m-2$ шагов получили следующую оценку:

$$\left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{m-3} C_t\widetilde{\omega}^2_{R_1,m-t} + C_{m-2}\omega^2_{R_0,2}\right). \tag{1.30}$$

Слагаемые вида $\widetilde{\omega}^2_{R_1,m-t}$ можно записать с помощью неравенства (1.26) следующим образом:

$$\widetilde{\omega}^2_{R_1,m-t} \le \widetilde{\omega}^2_{R_0,m-t} + \frac{1}{2^{2(m-t-1)-3}} \left| R_0 \left(\frac{j \text{ div } 2^{m-1} + \frac{1}{2}}{2} \right) \right|.$$

Но $R_0 = f$, следовательно,

$$\widetilde{\omega}^2_{R_1,(m-t)} \le \widetilde{\omega}^2_{f,(m-t)} + \frac{1}{2^{2(m-t-1)-3}} \|f\| = \widetilde{\omega}^2_{f,(m-t)} + \frac{1}{2^{2(m-t)-5}} \|f\|. \tag{1.31}$$

Подставляя (1.31) в (1.30), получим

$$\begin{aligned}\left| R_{m+1} \left(\frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| &\le \frac{1}{2} \left(\sum_{t=-2}^{m-2} C_t \widetilde{\omega}^2_{f,m-t} + \sum_{t=-2}^{m-3} \frac{C_t}{2^{2(m-t)-5}} \|f\| \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{t=-2}^{m-2} C_t \widetilde{\omega}^2_{f,m-t} + 8\|f\| \sum_{t=-2}^{m-3} \frac{C_t}{4^{m-t-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{t=-2}^{m-2} C_t \widetilde{\omega}^2_{f,m-t} + 8\|f\| C_{m-1} \right). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Таким образом, в двоично-рациональных точках получена предварительная оценка через модуль двоичной непрерывности.

Возьмем произвольный x из ε-окрестности точки $\frac{j+1/4}{2^m}$, где $\varepsilon = \frac{1}{2^{(m+2)}}$. Тогда

$$\begin{aligned}|R_{m+1}(x)| &\le \left| R_{m+1}(x) - R_{m+1} \left(\frac{j+1/4}{2^m} \right) + R_{m+1} \left(\frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| \le \\ &\le \left| R_{m+1}(x) - R_{m+1} \left(\frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| + \left| R_{m+1} \left(\frac{j+1/4}{2^m} \right) \right|. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Учитывая (1.21), неравенство (1.33) примет вид

$$\begin{aligned}|R_{m+1}(x)| &\le \left| \left(f(x) - \sum_{i=0}^{m} S_i(x) \right) - \left(f \left(\frac{j+1/4}{2^m} \right) - \sum_{i=0}^{m} S_i \left(\frac{j+1/4}{2^m} \right) \right) \right| + \\ &+ \left| R_{m+1} \left(\frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| \le \left| f(x) - f \left(\frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| + \\ &+ \sum_{i=0}^{m} \left| S_i(x) - S_i \left(\frac{j+1/4}{2^m} \right) \right| + \left| R_{m+1} \left(\frac{j+1/4}{2^m} \right) \right|. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (1.34). Заметим, что если $x \in \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1/2}{2^m}\right]$, то $x \in \left[\frac{j \text{ div } 2^{m-i}}{2^i}, \frac{j \text{ div } 2^{m-i}+1}{2^i}\right]$. Учитывая (1.17) и равенства

$$\sup_{x\in[0,1]} |\psi_n'(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\psi_{n,n}'(x)\right| = \frac{Q(n,n)}{Q(n,n-1)} \sup_{x\in[0,1]} |\psi_{n,n-1}(x)|\,,$$

имеем

$$\sum_{i=0}^{m} \left| S_i(x) - S_i\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \le \sum_{i=0}^{m} \left| R_i\left(\frac{j \text{ div } 2^{m-i}+\frac{1}{2}}{2^i}\right)\phi_{i,j \text{ div } 2^{m-i}}(x) - \right.$$
$$\left. -R_i\left(\frac{j \text{ div } 2^{m-i}+\frac{1}{2}}{2^i}\right)\phi_{i,j \text{ div } 2^{m-i}}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| \le \sum_{i=0}^{m} \left|\left(\phi_{i,j \text{ div } 2^{m-i}}(x) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\phi_{i,j \text{ div } 2^{m-i}}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right) R_i\left(\frac{j \text{ div } 2^{m-i}+\frac{1}{2}}{2^i}\right)\right| \le$$
$$\le \sum_{i=0}^{m} \left|\psi_n\left(2^i x - j \text{ div } 2^{m-i}\right) - \psi_n\left(2^i\left(\frac{j+1/4}{2^m} - j \text{ div } 2^{m-i}\right)\right) \times \right.$$
$$\left. \times R_i\left(\frac{j \text{ div } 2^{m-i}+\frac{1}{2}}{2^i}\right)\right| \le \sum_{i=0}^{m}\left(\frac{Q(n,n)}{Q(n,n-1)} \sup_{x\in[0,1]} |\psi_{n,n-1}(x)| \times \right.$$
$$\left. \times \left|2^i\left(x - \frac{j+\frac{1}{4}}{2^m}\right)\right| \cdot \left|R_i\left(\frac{j \text{ div } 2^{m-i}+\frac{1}{2}}{2^i}\right)\right|\right) \le$$
$$\le \sum_{i=0}^{m}\left(4 \cdot \frac{1}{2^{m-i+2}} \cdot \left|R_i\left(\frac{j \text{ div } 2^{m-i}+\frac{1}{2}}{2^i}\right)\right|\right) \le$$
$$\le \sum_{i=0}^{m}\left(\frac{1}{2^{m-i}} \cdot \left|R_i\left(\frac{j \text{ div } 2^{m-i}+\frac{1}{2}}{2^i}\right)\right|\right). \tag{1.35}$$

Подставляя (1.35) в (1.34), получим

$$|R_{m+1}(x)| \le$$
$$\le \left|f(x) - f\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right| + \sum_{i=0}^{m}\left(\frac{1}{2^{m-i}} \cdot \left|R_{(i-1)+1}\left(\frac{2\left(j \text{ div } 2^{m-i}\right)+\frac{1}{4}}{2^{(i-1)}}\right)\right|\right) +$$
$$+ \left|R_{m+1}\left(\frac{j+1/4}{2^m}\right)\right|. \tag{1.36}$$

Из определения модуля гладкости в (1.20) и определения модуля двоичной непрерывности второго порядка в (1.22) очевидно, что $\widetilde{\omega}_{f,m}^2 \le \omega_f^2\left(\frac{1}{2^m}\right)$.

Первое слагаемое в (1.36) оценим с помощью (1.19). Второе и третье слагаемые содержат только двоично-рациональные точки, оценка для которых получена в (1.32). Тогда (1.36) примет вид

$$|R_{m+1}(x)| \le \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \sum_{i=0}^{m}\left(\frac{1}{2^{m-i}}\cdot\frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{i-2} C_t\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{i-t}}\right) + 8\|f\|C_{i-1}\right)\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{t=-2}^{m-2} C_t\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) + 8\|f\|C_{m-1}\right) =$$
$$= \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \sum_{i=0}^{m}\sum_{t=-2}^{i-2}\frac{C_t}{2^{m+1-i}}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{i-t}}\right) + \sum_{i=0}^{m}\frac{C_{i-1}}{2^{m-2-i}}\|f\|+$$
$$+\sum_{t=-2}^{m-2}\frac{C_t}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) + 4C_{m-1}\|f\| =$$
$$= \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \sum_{t_1=-2}^{m-2}\sum_{i_1=t_1+2}^{m}\frac{C_{t_1}}{2^{m+1-i_1}}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{i_1-t_1}}\right) +$$
$$+\sum_{t=-2}^{m-2}\frac{C_t}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) + \left(\sum_{i=0}^{m}\frac{C_{i-1}}{2^{m-2-i}} + 4C_{m-1}\right)\|f\|. \tag{1.37}$$

Произведем замену переменных в двойной сумме в (1.37). Пусть $m-t = i_1-t_1$, $i = m - i_1$. Так как $i_1 - t_1 \ge 2$, $i_1 - t_1 \le m+2$, то $-2 \le t \le m-2$. В то же время $m + t_1 - i_1 \ge -2 + m - i_1$, а значит, $i \le t+2$. Так как $i_1 \le m$, то $i \ge 0$. Окончательно получим

$$|R_{m+1}(x)| \le \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \sum_{t=-2}^{m-2}\left(\sum_{i=0}^{t+2}\frac{C_{t-i}}{2^{i+1}} + \frac{C_t}{2}\right)\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) +$$
$$+\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{C_{m-i-1}}{2^{i-2}} + 4C_{m-1}\right)\|f\|. \tag{1.38}$$

С помощью метода математической индукции покажем, что

$$C_k \le 2^{-\frac{3}{5}k} \tag{1.39}$$

для всех $k \ge -2$.

Из (1.28) для $k=-2$ и $k=-1$ имеем

$$1 = C_{-2} \le 2^{\frac{6}{5}}, \quad 0 = C_{-1} \le 2^{\frac{3}{5}}.$$

Пусть утверждение (1.39) доказано для $k-2$ и $k-1$, следовательно,

$$C_{k-2} \leq 2^{-\frac{3}{5}(k-2)}, \quad C_{k-1} \leq 2^{-\frac{3}{5}(k-1)}.$$

Пользуясь неравенством (1.28), получаем

$$C_k = \frac{1}{4}\left(C_{k-2} + C_{k-1}\right) \leq \frac{1}{4}\left(2^{-\frac{3}{5}(k-2)} + 2^{-\frac{3}{5}(k-1)}\right) \leq$$
$$\leq 2^{-\frac{3}{5}k}\left(\frac{2^{\frac{6}{5}} + 2^{\frac{3}{5}}}{4}\right) \leq 2^{-\frac{3}{5}k},$$

что доказывает справделивость неравенства (1.39).

Из (1.38) и (1.39) получим

$$|R_{m+1}(x)| \leq \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \sum_{t=-2}^{m-2}\left(\sum_{i=0}^{t+2}\frac{2^{-\frac{3}{5}(t-i)}}{2^{i+1}} + 2^{-\frac{3}{5}t-1}\right)\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) +$$
$$+\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{2^{-\frac{3}{5}(m-i-1)}}{2^{i-2}} + 2^{2-\frac{3}{5}(m-1)}\right)\|f\| \leq$$
$$\leq \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \sum_{t=-2}^{m-2}2^{-\frac{3}{5}t-1}\left(\frac{1}{1-2^{-\frac{8}{5}}} + 1\right)\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) +$$
$$+2^{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}m}\left(\frac{1}{1-2^{-\frac{8}{5}}} + 1\right)\|f\| \leq$$
$$\leq \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{5}{2}\left(\sum_{t=-2}^{m-2}2^{-\frac{3}{5}t-1}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) + 2^{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}m}\|f\|\right). \tag{1.40}$$

При больших t модуль гладкости

$$\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-t}}\right) = \left|f\left(x + \frac{2}{2^{m-t}}\right) - 2f\left(x + \frac{1}{2^{m-t}}\right) + f(x)\right|$$

в пространстве $C[0,1]$ нельзя оценить лучше, чем $4\|f\|$. Однако при таких значениях t коэффициенты C_t будут малы. Вместе с тем, когда C_t недостаточно малы, модуль двоичной непрерывности $\widetilde{\omega}_{f,m-t}^2$ становится достаточно мал из-за величины интервала разбиения.

Запишем (1.40) в следующем виде:

$$|R_{m+1}(x)| \le \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) +$$
$$+\frac{5}{2}\left(\sum_{t=-2}^{k} 2^{-\frac{3}{5}t-1}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m-k}}\right) + \sum_{t=k+1}^{m-2} 2^{-\frac{3}{5}t-1}\cdot 4\|f\| + 2^{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}m}\|f\|\right), \qquad (1.41)$$

и выберем $k = m \operatorname{div} 2 - 1$. Следовательно, (1.41) примет вид

$$|R_{m+1}(x)| \le$$
$$\le \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{2^{\frac{1}{5}}}{1-2^{-\frac{3}{5}}}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m \operatorname{div} 2-1}}\right) + \left(2^{-\frac{3}{5}m \operatorname{div} 2+1} + 2^{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}m}\right)\|f\|\right) \le$$
$$\le \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{17}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m \operatorname{div} 2-1}}\right) + 5\cdot 2^{-\frac{3}{5}m \operatorname{div} 2}\|f\| + 2^{4-\frac{3}{5}m}\|f\|, \qquad (1.42)$$

или, после подстановки в (1.42) $m \operatorname{div} 2 \ge \frac{m-1}{2}$,

$$|R_{m+1}(x)| \le \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{17}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{\frac{m-3}{2}}}\right) + 5\cdot 2^{-\frac{3}{10}(m-1)}\|f\| + 2^{4-\frac{3}{5}m}\|f\|.$$

Докажем, что разложение в ряд по системе единственно.

Возьмем произвольную функцию $f_0(x) \in C_0[0,1]$ и рассмотрим двоично-рациональную точку $\frac{1}{2}$. В этой точке $f_0(x)$ принимает произвольное значение. Единственная не равна нулю функция из системы $\phi_{m,j}(x)$, коэффициент которой не определен в этой точке, — $\phi_{0,0}(x)$. Следовательно, $f_0(x)$ может быть приближена с помощью коэффициента при $\phi_{0,0}(x)$. Таким образом, коэффициент при $\phi_{0,0}(x)$ определяется однозначно.

Далее рассмотрим точки $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$. В каждой из этих точек у системы $\phi_{m,j}(x)$ существует ровно одна функция, не равная нулю в этой точке и коэффициент которой не был определен ранее (соответственно $\phi_{1,0}(x)$ и $\phi_{1,1}(x)$).

Продолжая данный процесс, заметим, что для каждой двоично-рациональной точки существует ровно одна функция, коэффициент которой не был определен на предыдущих шагах и которая отлична от нуля в этой двоично-рациональной точке. Таким образом, коэффициенты для каждой функции при разложении в ряд определяются однозначно.

Для того, чтобы система была базисом в $C[0,1]$, дополним ее следующими функциями: $\phi_{-1,1} = \psi_{n,N}(2x)$ $\left(x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ и $\phi_{-1,0} = \psi(2x-1)$ $\left(x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$. Приближая произвольную функцию $f(x) \in C[0,1]$ в точке $x = 0$ с помощью $\phi_{-1,0}$ и, соответственно, в точке $x = 1$ — с помощью $\phi_{-1,1}$, получим произвольную функцию $f_0(x) \in C_0[0,1]$. $\square$

Глава 2 Двоичный базисный сплайн как аналог системы Хаара. Моделирование двоичного базисного сплайна

В данной главе продолжают изучаться свойства двоичного базисного сплайна. В разделе 2.1 двоичные базисные сплайны рассматриваются как аналоги систем Хаара и Фабера – Шаудера. В разделе 2.2 доказывается теорема, что система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна как аналога системы Хаара образует базис Рисса. В разделе 2.3 рассматривается алгоритм построения двоичного базисного сплайна и приводится графическая модель нескольких двоичных базисных сплайнов, полученных в результате действия этого алгоритма. Наконец, в разделе 2.4 рассматривается алгоритм построения частичных сумм по системе сжатия и сдвигов двоичного базисного сплайна, с построением графической модели для нескольких примеров функций с разным поведением на отрезке $[0,1]$.

2.1 Системы Хаара и Фабера – Шаудера

Система функций Хаара $\chi = \{\chi_n\}$ была построена в 1909 г. венгерским математиком Альфредом Хааром:

$$\chi_1(t) \equiv 1, \quad \chi_n(t) \equiv \chi_{kj} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t = \frac{j}{2^k}, \\ 1, & t \in \left(\frac{j}{2^k}, \frac{j+1/2}{2^k}\right), \\ 0, & t = \frac{j+1/2}{2^k}, \\ -1, & t \in \left(\frac{j+1/2}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right), \\ -\frac{1}{2}, & t = \frac{j+1}{2^k}, \\ 0, & t \notin \left(\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right] \end{cases}$$

Это была первая ортонормированная система со свойством равномерной сходимости в пространстве непрерывных функций. Система Хаара является ортогональным базисом в $L_2[0,1]$.

Система функций Фабера – Шаудера $\Phi = \{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ была построена в 1910 г. немецким математиком Георгом Фабером, а затем переоткрыта Львовским математиком Юлиушем Шаудером в 1927 г. Ее можно определить как

$$\Phi_n(x) = \int\limits_0^x \chi(t)dt.$$

Таким образом,

$$\Phi_n(x) \equiv \chi_{kj} = \begin{cases} 0, & t \notin \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right], \\ 1, & t = \frac{j+1/2}{2^k}, \\ \text{линейна и непрерывна во всех точках.} \end{cases}$$

Система Фабера – Шаудера — базис в пространстве $C[0,1]$.

Замечание 2.1. *При $n = 1$ двоичный базисный сплайн $\psi_{n,n-1}(x)$ совпадает с точностью до множителя с образующей функцией системы Хаара, а $\psi_{n,n}(x)$ — с функцией Фабера – Шаудера.*

В связи с этим будем называть систему сжатий и сдвигов $\psi_{n,n-1}(x)$ *гладким обобщением системы Хаара*, а систему сжатий и сдвигов $\psi_{n,n}(x)$ — *гладким обобщением системы Фабера – Шаудера.*

Известно, что система Фабера – Шаудера является базисом в пространстве непрерывных функций, а система Хаара образует ортонормированный базис в L_2. В главе 1 было показано, что гладкий аналог системы Фабера – Шаудера является базисом в пространстве непрерывных функций. В этом параграфе будет доказано, что гладкий аналог системы Хаара порождает базис в L_2, т. е. для гладких аналогов систем Фабера – Шаудера и Хаара выполняются свойства, похожие на свойства родительских систем.

На рисунках 2.1 приведены графики функций $\psi_{2,0}(x)$, $\psi_{2,1}(x)$, $\psi_{2,2}(x)$, где $\psi_{2,0}(x) = W_{2^2-1}(x) = W_3(x)$, $\psi_{2,1}(x)$ — результат первого интегрирования функции $W_3(x)$, $\psi_{2,1}(x)$ — результат двух последовательных интегрирований $W_3(x)$.

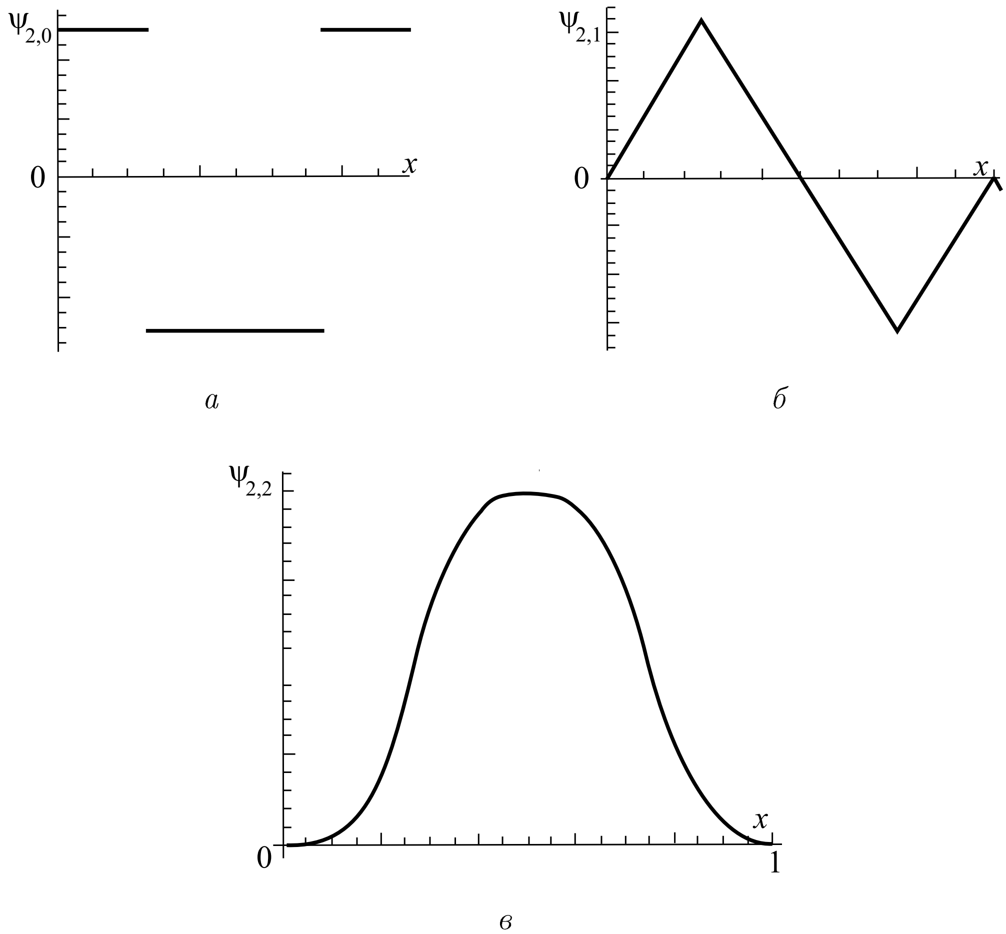

Рисунок 2.1 — Графики функций: *а*) $\psi_{2,0}(x)$; *б*) $\psi_{2,1}(x)$; *в*) $\psi_{2,2}(x)$

Так как система Фабера – Шаудера — результат интегрирования системы Хаара, то можно рассматривать систему сжатий и сдвигов функции $\psi_{2,1}(x)$, которую мы договорились называть «*гладким Хааром*» (в случае $n = 2$ — не гладкий, а «*непрерывный Хаар*»), как антипериодизацию системы Фабера – Шаудера.

Таким образом, можно описать процесс построения «гладкого Хаара» n-й степени как результат интегрирования и антипериодизации «гладкого Хаара» $(n - 1)$-й степени. В свою очередь, процесс построения «гладкого Фабера – Шаудера» n-й степени можно охарактеризовать как результат антипериодизации и интегрирования «гладкого Фабера – Шаудера» $(n - 1)$-й степени.

2.2 Двоичный базисный сплайн как аналог системы Хаара

Как обычно, под системой сжатий и сдвигов функции f с носителем $\operatorname{supp} f \subset [0,1]$ понимаем последовательность функций $f^{k,j}(t) = 2^{\frac{k}{2}} f(2^k t - j)$.

Определение 2.1. *Систему сжатий и сдвигов* $\{\psi^{k,j}_{n,n-1}\}_{k=0,j=0}^{\infty,2^k-1}$ *назовем сплайновой аффинной системой порядка* n.

Напомним, что *базисом Рисса* (или *базисом, эквивалентным ортонормированному*) называется последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H, для которой существуют обратимый ограниченный линейный оператор (изоморфизм) $T : H \to H$ и ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ пространства H такие, что $f_n = Te_n$ для всех $n = 0, 1, \ldots$.

Постоянные $0 < A \le B < \infty$ такие, что для всех $c = \{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$ выполняются неравенства

$$A\|c\|_2 \le \left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n \right\| \le B\|c\|_2,$$

называются *границами Рисса последовательности* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Ясно, что для базиса Рисса имеем $A = \|T^{-1}\|^{-1}$ и $B = \|T\|$.

Теорема 2.1. *Для каждого* $n = 1, 2, \ldots$ *сплайновая аффинная система* $\{\psi^{k,j}_{n,n-1}\}_{k=0,j=0}^{\infty,2^k-1}$ *является базисом Рисса, и для всех* $c = \{c_{k,j}\}_{k=0,j=0}^{\infty,2^k-1} \in \ell^2$ *выполняются неравенства*

$$\frac{1}{10}\|c\|_2 \le \left\| \sum_{k=0,j=0}^{\infty,2^k-1} c_{k,j}\psi^{k,j}_{n,n-1}(x) \right\| \le \frac{19}{10}\|c\|_2.$$

Прежде, чем приступить к доказательству теоремы приведем несколько лемм.

Сначала укажем индуктивное построение сплайнов $\psi^{k,j}_{n,n-1}(x)$.

Пусть $Vf(t) = \int\limits_0^t f(s)\,ds$ — оператор интегрирования. Для 1-периодических функций $f(t)$ обозначим

$$\mathbb{W}_0 f(t) = f(2t), \quad \mathbb{W}_1 f(t) = r(t) f(2t)$$

— операторы сжатия и антипериодизации соответсвенно, где $r(t)$ — функция Радемахера. Положим

$$U = 4\mathbb{W}_1 V$$

— оператор интегрирования и последующей антипериодизации. Заметим, что функция вида $f = \mathbb{W}_1 g$ является $\frac{1}{2}$-антипериодической, т. е. $f\left(t + \frac{1}{2}\right) = -f(t)$ и множитель 4 сохраняет нормировку $(f, r) = 1 \Rightarrow (Uf, r) = 1$.

Лемма 2.1. *Справедливо представление*

$$\psi_{n,n-1}^{k,j}(x) = U^{n-1} r, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Заметим, что для периодических суммируемых функций f с нулевым средним значением $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ выполняются псевдокоммутационные соотношения

$$V\mathbb{W}_0 f(t) = \frac{1}{2}\mathbb{W}_0 V f(t), \tag{2.1}$$

$$V\mathbb{W}_1 f(t) = \frac{1}{2}\mathbb{W}_1 V f(t). \tag{2.2}$$

В самом деле, ввиду нулевого среднего функции $V\mathbb{W}_i f$ и $\mathbb{W}_i V f$, $i = 0, 1$, абсолютно непрерывны и обращаются в ноль в точках $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Замечание 2.2. *Равенство* (2.1) *справедливо для любой функции без условия нулевого среднего и проверяется непосредственным подсчетом. Равенство* (2.2) *также можно проверить непосредственным подсчетом.*

Таким образом, имеем

$$U^n r = \overbrace{4\mathbb{W}_1 V \ldots 4\mathbb{W}_1 V}^{n} r = 4^n 2^{1+\cdots+n} V^n \mathbb{W}_1^n r = \varkappa_n V^n \mathbb{W}_1^n r,$$

где $\varkappa_n = 2^{n(n+5)/2}$. Осталось заметить, что $\mathbb{W}_1^n r = \prod_{k=0}^{n} r_k$. Следовательно, $U^n r = \psi_{n+1,n}(x)$. $\square$

Лемма 2.1 показывает, что $\psi_{n+1,n}(x) = U\psi_{n,n-1}(x)$, т. е. каждая следующая сплайн-функция является антипериодизацией интеграла от предыдущей. При этом «нулевая» функция $r = \mathbb{W}_1 1$ также, очевидно, антипериодическая (здесь и далее 1 — функция, тождественно равная единице).

Определение 2.2. *Семейство функций $r_{i_1} \dots r_{i_d}$ $(0 \le i_1 < \dots < i_d)$ называется хаосом Радемахера порядка $d \in \mathbb{N}$. Множество всех функций вида*

$$f = \sum_{0 \le i_1 < \dots < i_d} a_{i_1,\dots,i_d} r_{i_1} \dots r_{i_d}, \qquad \sum_{0 \le i_1 < \dots < i_d} |a_{i_1,\dots,i_d}|^2 < \infty,$$

обозначают $\mathcal{R}^d_{ch}$.

Нетрудно видеть, что $r_{i_1} \dots r_{i_d} = \mathbb{W}_0^{k_1}\mathbb{W}_1 \dots \mathbb{W}_0^{k_d}\mathbb{W}_1 1$, $k_1, \dots, k_d \ge 0$, где $i_1 = k_1$, $i_2 = k_1 + k_2 + 1$, $\dots$, $i_d = k_1 + \dots + k_d + d - 1$. Следовательно, функция $f \in \mathcal{R}^d_{ch}$ может быть записана в эквивалентном виде

$$f = \sum_{k_1,\dots,k_d \ge 0} c_{k_1,\dots,k_d} \mathbb{W}_0^{k_1}\mathbb{W}_1 \dots \mathbb{W}_0^{k_d}\mathbb{W}_1 1, \qquad \sum_{k_1,\dots,k_d \ge 0} |c_{k_1,\dots,k_d}|^2 < \infty.$$

Лемма 2.2. *Справедливо следующее представление:*

$$\psi_{n,n-1}(x) = r - \sum_{s=1}^{n} f_{n,s}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $f_{n,s} \in \mathcal{R}^d_{ch}$ при $d = 2s + 1$, $s = 1, \dots, n$.

Доказательство. Пусть $n = 1$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \mathbb{W}_0^k \mathbb{W}_1 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{2^{k+1}}. \tag{2.3}$$

Хорошо известно, что $\lambda(t) = 1 - 2t$, $0 < t < 1$, — единственная с точностью до множителя непрерывная функция на $(0, 1)$, представимая рядом по системе Радемахера (хаосу порядка $d = 1$). Покажем, что

$$Ur = r - \mathbb{W}_1^2 \lambda. \tag{2.4}$$

Действительно, с одной стороны, имеем

$$4Vr(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 4(1 - t), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

С другой стороны,

$$\mathbb{W}_1\lambda(t) = \begin{cases} 1-4t, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 4t-3, & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Поэтому $4Vr = 1 - \mathbb{W}_1\lambda$. Применяя оператор $\mathbb{W}_1$, получаем равенство (2.4). Очевидно, что функция $f_{1,1} = \mathbb{W}_1^2\lambda$ принадлежит $\mathcal{R}_{ch}^3$.

Предположим, что представление (2.3) получено при некотором n. Применяя оператор U, с учетом леммы 2.1 находим

$$\psi_{n+1,n}(x) = Ur - \sum_{s=1}^{n} Uf_{n,s}.$$

Поскольку $f_{n,s} \in \mathcal{R}_{ch}^d$ при $d = 2s+1$, в силу соотношений (2.1), (2.2) имеем

$$Uf_{n,s} = \frac{1}{2^{d-1}} \sum_{k_1,\ldots,k_d \ge 0} \frac{c_{k_1,\ldots,k_d}}{2^{k_1+\cdots+k_d}} \mathbb{W}_1\mathbb{W}_0^{k_1} \ldots \mathbb{W}_1\mathbb{W}_0^{k_d} 4Vr =$$

$$= \frac{1}{2^{d-1}} \sum_{k_1,\ldots,k_{d-1} \ge 0} \frac{1}{2^{k_1+\cdots+k_{d-1}}} \left(\sum_{k_d \ge 0} \frac{c_{k_1,\ldots,k_d}}{2^{k_d}} \right) \mathbb{W}_1\mathbb{W}_0^{k_1} \ldots \mathbb{W}_1\mathbb{W}_0^{k_{d-1}} r -$$

$$- \frac{1}{2^{d-1}} \sum_{k_1,\ldots,k_d \ge 0} \frac{c_{k_1,\ldots,k_d}}{2^{k_1+\cdots+k_d}} \mathbb{W}_1\mathbb{W}_0^{k_1} \ldots \mathbb{W}_1\mathbb{W}_0^{k_d}\mathbb{W}_1\lambda = g_{n,s} - h_{n,s+1}.$$

Здесь учли, что $4Vr = 1 - \mathbb{W}_1\lambda$ и $\mathbb{W}_0^{k_d}1 = 1$. При этом $g_{n,s} \in \mathcal{R}_{ch}^d$ и $h_{n,s+1} \in \mathcal{R}_{ch}^{d+2}$.

Таким образом,

$$\psi_{n+1,n}(x) = r - \mathbb{W}_1^2\lambda - \sum_{s=1}^{n} (g_{n,s} - h_{n,s+1}) = r - \sum_{s=1}^{n+1} f_{n+1,s},$$

где

$$f_{n+1,1} = g_{n,1} + \mathbb{W}_1^2\lambda, \tag{2.5}$$

$$f_{n+1,s} = g_{n,s} - h_{n,s}, \quad s = 2, \ldots, n, \tag{2.6}$$

$$f_{n+1,n+1} = -h_{n,n+1}. \tag{2.7}$$

Осталось заметить, что $f_{n+1,s} \in \mathcal{R}_{ch}^d$ при $d = 2s+1$, $s = 1, \ldots, n+1$. $\square$

Для дальнейшего изложения нам достаточно проследить динамику хаоса порядка $d = 3$ в представлении сплайна $\psi_{n,n-1}$.

Лемма 2.3. *Имеет место равенство*

$$f_{n,1} = \gamma_n \mathbb{W}_1^2 r + \mathbb{W}_1^2 \lambda, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\gamma_n = \frac{2}{9}(1 - \frac{1}{4^{n-1}})$.

Доказательство. При $n = 1$ имеем $\gamma_1 = 0$, и равенство $f_{1,1} = \mathbb{W}_1^2 \lambda$ уже получено при доказательстве леммы 2.2.

Пусть равенство для $f_{n,1}$ верно при некотором n, т. е.

$$f_{n,1} = \mathbb{W}_1^2(\gamma_n + \tfrac{1}{2})r + \mathbb{W}_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \mathbb{W}_0^k r.$$

Тогда согласно принятым при доказательстве леммы 2.2 обозначениям имеем $c_{0,0,0} = \gamma_n + \frac{1}{2}$, $c_{0,0,k} = \frac{1}{2^{k+1}}$ при $k \geq 1$, остальные $c_{k_1,k_2,k_3} = 0$ при $k_1 k_2 \neq 0$. Следовательно,

$$g_{n,1} = \frac{1}{4} \sum_{k_1,k_2 \geq 0} \frac{1}{2^{k_1+k_2}} \left(\sum_{k_3 \geq 0} \frac{c_{k_1,k_2,k_3}}{2^{k_3}} \right) \mathbb{W}_1 \mathbb{W}_0^{k_1} \mathbb{W}_1 \mathbb{W}_0^{k_2} r,$$

где с учетом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{6}$ коэффициенты в скобках равны

$$\sum_{k_3 \geq 0} \frac{c_{k_1,k_2,k_3}}{2^{k_3}} = \begin{cases} \gamma_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, & k_1 = k_2 = 0, \\ 0, & k_1 k_2 \neq 0. \end{cases}$$

Это означает, что

$$g_{n,1} = \frac{\gamma_n + \frac{2}{3}}{4} \mathbb{W}_1^2 r,$$

и в силу (2.5) получаем

$$f_{n+1,1} = \frac{\gamma_n + \frac{2}{3}}{4} \mathbb{W}_1^2 r + \mathbb{W}_1^2 \lambda.$$

Поскольку $\gamma = \frac{2}{9}$ — единственная неподвижная точка отображения $\gamma \mapsto \frac{\gamma + \frac{2}{3}}{4}$, то решением рекуррентных соотношений

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n + \frac{2}{3}}{4}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

является последовательность $\gamma_n = \frac{2}{9}(1 - \frac{1}{4^{n-1}})$. $\square$

Далее рассмотрим всевозможные произведения операторов двоичных сжатий-модуляции $\mathbb{W}_0, \mathbb{W}_1$:

$$\mathbb{W}^\alpha = \mathbb{W}_{\alpha_0} \dots \mathbb{W}_{\alpha_{k-1}}, \quad \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A} := \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0,1\}^k.$$

Семейство функций $\{\mathbb{W}^\alpha r\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ совпадает с системой Уолша $\{\mathbb{W}_n\}_{n=1}^{\infty}$ (без начальной функции $\mathbb{W}_0 = 1$). Биективное соответствие мультииндексов $\alpha \in \mathbb{A}$ и натуральных $n \in \mathbb{N}$, определеяемое двоичным разложением $n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu + 2^k$, задает нумерацию Пэли системы Уолша $\{\mathbb{W}^\alpha r\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$.

Для произвольной 1-периодической функции f семейство $\{\mathbb{W}^\alpha f\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ называется *аффинной системой Уолша, порожденной функцией f.*

Аналогично рассмотрим операторы сжатия-сдвига

$$S_0 = \frac{\mathbb{W}_0 + \mathbb{W}_1}{\sqrt{2}}, \quad S_1 = \frac{\mathbb{W}_0 - \mathbb{W}_1}{\sqrt{2}}$$

и их всевозможные произведения

$$S^\alpha = S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_k}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{A} := \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0,1\}^k.$$

Семейство функций $\{S^\alpha r\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ совпадает с системой Хаара $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ (без начальной функции $\chi_0 = 1$). Естественная нумерация системы Хаара определяется двоичным разложением вида $n = 2^k + \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu 2^{k-\nu}$.

Для произвольной 1-периодической функции f семейство $\{S^\alpha f\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ называется *аффинной системой Хаара, порожденной функцией f*, или *системой сжатий и сдвигов функции $f\chi_{[0,1]}$* (к последней, как правило, добавляют функцию 1).

Обозначим L_0^2 — множество всех 1-периодических функций $f \in L^2(0,1)$ с нулевым средним значением $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. Заметим, что пары изометрий $\{\mathbb{W}_0, \mathbb{W}_1\}$ и $\{S_0, S_1\}$ образуют операторную структуру мультисдвига в гильбертовом пространстве L_0^2 [21].

Определение 2.3. *Спектром Уолша функции $f \in L_0^2$ называется множество мультииндексов $Spec_{\mathbb{W}}(f) = \{\beta \in \mathbb{A} : (f, \mathbb{W}^\beta r) \neq 0\}$.*

Пусть $\alpha\beta = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{l-1})$ — конкатенация мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$.

Определение 2.4. *Говорят, что функция $f \in L^2_0$ имеет простой спектр Уолша, если из равенства $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, где $\alpha, \alpha' \in \mathbb{A}$ и $\beta, \beta' \in Spec_{\mathbb{W}}(f)$, следует $\alpha = \alpha'$ (а тогда и $\beta = \beta'$).*

Лемма 2.4. *Если функция $f \in L^2_0$, $f \neq 0$, имеет простой спектр Уолша, то аффинные системы Уолша $\{\mathbb{W}^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ и Хаара $\{S^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ являются ортогональными.*

Доказательство. Начнем с тривиального замечания: если спектры Уолша функций g и h непересекаются, то эти функции ортогональны, т. е. $(g, h) = 0$.

Рассмотрим ряд Фурье – Уолша функции $f \in L^2_0$:

$$f = \sum_{\beta\in\mathrm{Spec}_{\mathbb{W}}(f)} (f, \mathbb{W}^\beta r)\mathbb{W}^\beta r.$$

Отсюда

$$\mathbb{W}^\alpha f = \sum_{\beta\in\mathrm{Spec}_{\mathbb{W}}(f)} (f, \mathbb{W}^\beta r)\mathbb{W}^{\alpha\beta} r.$$

Поэтому

$$\mathrm{Spec}_{\mathbb{W}}(\mathbb{W}^\alpha f) = \{\alpha\beta\}_{\beta\in\mathrm{Spec}_{\mathbb{W}}(f)}.$$

Тогда при $\alpha \neq \alpha'$ имеем $\mathrm{Spec}_{\mathbb{W}}(\mathbb{W}^\alpha f) \cap \mathrm{Spec}_{\mathbb{W}}(\mathbb{W}^{\alpha'} f) = \emptyset$, так как общая точка спектров имеет вид $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, где $\alpha, \alpha' \in \mathbb{A}$ и $\beta, \beta' \in \mathrm{Spec}_W(f)$, и по определению простого спектра $\alpha = \alpha'$ вопреки предположению.

Итак, $(\mathbb{W}^\alpha f, \mathbb{W}^{\alpha'} f) = 0$ при $\alpha \neq \alpha'$. Поскольку $\|\mathbb{W}^\alpha f\| = \|f\| > 0$, то ортогональность системы $\{\mathbb{W}^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ доказана.

Система $\{S^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ также будет ортогональной вместе с $\{\mathbb{W}^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$, в силу того, что аффинные системы Хаара и Уолша связаны между собой посредством того же самого унитарного преобразования, которое связывает классические системы Хаара и Уолша. $\square$

Заметим, что аналогичным образом определяются понятия спектра Хаара и простого спектра Хаара, причем из условия простоты спектра Хаара также следует ортогональность аффинных систем.

Теперь можем приступить к доказательству теоремы 2.1.

Для каждой функции $f \in L_0^2$ определим преобразование T_f, переводящее систему Хаара (Уолша) в аффинную систему Хаара (Уолша), т. е.

$$T_f S^\alpha r = S^\alpha f, \quad T_f \mathbb{W}^\alpha r = \mathbb{W}^\alpha f, \qquad \alpha \in \mathbb{A}.$$

По линейности преобразование T_f распространяется на линейное многообразие всех полиномов Хаара или, что то же самое, Уолша с нулевым средним значением. По определению преобразование T_f коммутирует с операторами S_0, S_1 и, что эквивалентно, с операторами $\mathbb{W}_0, \mathbb{W}_1$. При этом T_f, вообще говоря, не является ограниченным оператором в L_0^2. Ясно, что в случае ортогональной аффинной системы $\{S^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ ($\{\mathbb{W}^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$) имеем

$$\|T_f x\| = \|f\|\|x\|, \quad x \in L_0^2, \tag{2.8}$$

т.е. в этом случае $\|T_f\| = \|f\|$. Условия ограниченности оператора T_f для функции f общего вида были получены в [20].

Покажем, что если f является антипериодизацией функции из $\mathcal{R}_{ch}^d$, т. е.

$$f = \sum_{k_1,\dots,k_d\ge 0} c_{k_1,\dots,k_d} \mathbb{W}_1 \mathbb{W}_0^{k_1} \dots \mathbb{W}_1 \mathbb{W}_0^{k_d} r$$

(при этом $f \in \mathcal{R}_{ch}^{d+1}$), то имеет место (2.8).

В самом деле, спектр Уолша функции f удовлетворяет условию

$$\operatorname{Spec}_{\mathbb{W}}(f) \subset \varOmega^d = \{(1, \mathbf{0}_{k_1}, \dots, 1, \mathbf{0}_{k_d})\}_{k_1,\dots,k_d\ge 0},$$

где $\mathbf{0}_k = (0, \dots, 0)$, $k \ge 0$, — мультииндекс, состоящий из k нулей (при $k = 0$ — пустой мультииндекс). Поэтому согласно определению 2.4 функция f имеет простой спектр Уолша. По лемме 2.4 аффинные системы Хаара и Уолша, порожденные функцией f, ортогональны. Таким образом, имеет место (2.8).

Из представления леммы 2.2 следует операторное равенство

$$T_{\psi_{n,n-1}} = Y - \sum_{s=1}^{n} T_{f_{n,s}}.$$

Поскольку вместе с $\psi_{n,n-1}$ все функции $f_{n,s} \in \mathcal{R}_{ch}^{2s+1}$ антипериодические (это видно из доказательства леммы 2.2), то, как было показано ранее,

$$\|T_{f_{n,s}}\| = \|f_{n,s}\|.$$

Следовательно,

$$\|Y - T_{\psi_{n,n-1}}\| \le \sum_{s=1}^{n} \|f_{n,s}\|, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Докажем, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство

$$\sum_{s=1}^{n} \|f_{n,s}\| < \frac{9}{10}. \tag{2.9}$$

Начнем с оценки для $f_{n,1} = \gamma_n W_1^2 r + W_1^2 \lambda$. Используя лемму 2.3 имеем

$$\|f_{n,1}\| = \left((\gamma_n + \tfrac{1}{2})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k+1}} \right)^{1/2} < \sqrt{\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}} = \frac{7}{9}.$$

В обозначениях доказательства леммы 2.2 при $s = 2, \ldots, n$ получим

$$\|g_{n,s}\| = \frac{1}{2^{d-1}} \left(\sum_{k_1,\ldots,k_{d-1} \ge 0} \frac{1}{4^{k_1+\cdots+k_{d-1}}} \left(\sum_{k_d \ge 0} \frac{c_{k_1,\ldots,k_d}}{2^{k_d}} \right)^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{1}{2^{d-1}} \left(\frac{4}{3} \sum_{k_1,\ldots,k_d \ge 0} c_{k_1,\ldots,k_d}^2 \right)^{1/2} = \frac{2\|f_{n,s}\|}{4^s\sqrt{3}} \le \frac{2\|f_{n,s}\|}{16\sqrt{3}}.$$

Здесь учли, что $d = 2s + 1$. Так же оценим

$$\|h_{m,s+1}\| = \frac{1}{2^{d-1}\sqrt{3}} \left(\sum_{k_1,\ldots,k_d \ge 0} \frac{c_{k_1,\ldots,k_d}^2}{4^{k_1+\cdots+k_d}} \right)^{1/2} \le \frac{\|f_{m,s}\|}{4^s\sqrt{3}} \le \frac{\|f_{m,s}\|}{16\sqrt{3}}.$$

Здесь учли, что $\|T_{W_1\lambda}\| = \|\lambda\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (так как $\lambda \in \mathcal{R}_{ch}^1$, то аффинная система, порожденная функцией $W_1\lambda$, ортогональна).

Наконец, оценим норму функции $h_{n,2}$, возникающую при $s = 1$. Для этого снова воспользуемся леммой 2.3, дающей явный вид для функции $f_{m,1}$:

$$f_{m,1} = \gamma_n \mathbb{W}_1^2 r + \mathbb{W}_1^2 \lambda.$$

Имеем

$$h_{n,2} = \frac{1}{4}\mathbb{W}_1^3\Big((\gamma_n + \tfrac{1}{2})\mathbb{W}_1\lambda + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}}\mathbb{W}_0^k\mathbb{W}_1\lambda\Big),$$

и поэтому

$$\|h_{n,2}\| = \frac{1}{4\sqrt{3}}\Big((\gamma_n + \tfrac{1}{2})^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2k+1}}\Big)^{1/2} < \frac{1}{4\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{60}} = a,$$

причем $a = \frac{\sqrt{218}}{36\sqrt{15}} < 0.106$.

Итак, в силу (2.6), (2.7) и установленных оценок, находим

$$\sum_{s=2}^{n+1}\|f_{n+1,s}\| \le \|h_{n,2}\| + \sum_{s=2}^{n}(\|g_{n,s}\| + \|h_{n,s+1}\|) < a + \frac{\sqrt{3}}{16}\sum_{s=2}^{n}\|f_{n,s}\|.$$

Отсюда следует, что для всех n

$$\sum_{s=2}^{n}\|f_{n,s}\| < a\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{16}\right)^m < \frac{0.106}{1-0.11} < 0.12.$$

Окончательно получаем

$$\sum_{s=1}^{n}\|f_{n,s}\| < \frac{7}{9} + 0.12 < \frac{9}{10}.$$

Неравенство (2.9) доказано. Это означает, что $\|Y - T_{\psi_{n,n-1}}\| < \frac{9}{10}$. Тогда оператор $T_{\psi_{n,n-1}}$ является изоморфизмом L_0^2, т.е. сплайновая аффинная система $\{\psi_{n,n-1}^{j,k}\}_{k=0,j=0}^{\infty,2^k-1}$ образует базис Рисса.

Кроме того, имеем

$$\Big\|\sum_{k=0,j=0}^{\infty,2^k-1}c_{j,k}(\chi_{j,k} - \psi_{n,n-1}^{j,k})\Big\| \le \frac{9}{10}\|c\|_2,$$

откуда вытекает, что $A = \frac{1}{10}$, $B = \frac{19}{10}$ — универсальные границы Рисса сплайновых аффинных систем.

В работе Гранадоса [41] рассматривалась последовательность функций

$$\rho_{n,n-1} = \widetilde{U}^n 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где в отличие от оператора $U = 4\mathbb{W}_1 V$ полагалось $\widetilde{U} = 4V\mathbb{W}_1$. В этой работе было доказано, что аффинная система Уолша (названная там всплеском Уолша)

$$\rho_{n,n-1}(2^{k+1}t)w_m(x), \quad k = 0, 1, \ldots, \quad m = 2^k, \ldots, 2^{k+1} - 1, \tag{2.10}$$

образует фрейм при $n = 1$ и $n = 2$, а для произвольного m функции ρ_m «... can be used to construct exact frames» [41, §3.3]. Однако, какие-либо обоснования этого утверждения в работе отсутствуют.

Прямым следствием теоремы 2.1 является следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Для каждого $m \geq 3$ система функций* (2.10) *является базисом Рисса (после добавления к ней функции* 1*). Границы Рисса всех систем функций* (2.10) *могут быть выбраны независящими от n.*

Доказательство теоремы. Достаточно заметить, что система функций (2.10) совпадает с аффинной системой Уолша $\{W^\alpha \psi_m\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$, порожденной сплайном $\psi_{n,n-1}$.

2.3 Компьютерное моделирование двоичного базисного сплайна как аналога системы Фабера – Шаудера

В разделе 1.1 давалось определение двоичного базисного сплайна, а также было сказано, что именно это определение удобнее всего использовать для компьютерного моделирования двоичного базисного сплайна. В данном разделе покажем, каким образом можно это делать.

Напомним определение двоичного базисного сплайна.

Пусть $If(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ $(x \in [0,1])$ — оператор интегрирования, $1_{2^n-1}(x) = (-1)^{bit([2^n x])}$, где $bit(y)$ — количество единиц в битовой записи натурального числа y. Тогда $\psi_{n,N}(x) = Q(n,N) I^N 1_{2^n-1}(x)$ $(x \in [0,1],\ n, N \in \mathbb{N},\ N \leq n)$.

Отрезок $[0,1]$ разбивается на 2^n подотрезков, на каждом из которых $\psi_{n,0}(x)$ равна либо 1, либо -1 в соответствии с двоичным представлением целой части числа $2^n x$ (рисунок 2.2).

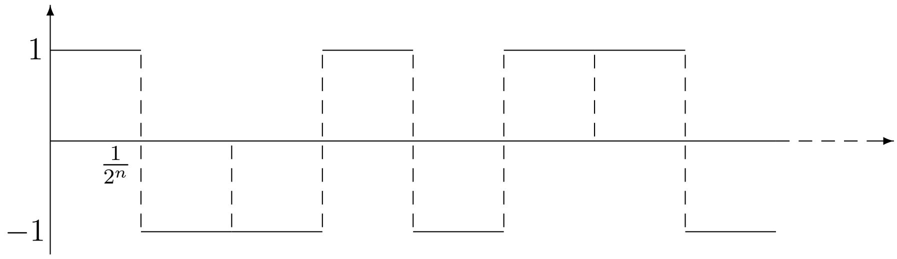

Рисунок 2.2 — Функция $\psi_{n,0}(x)$

В данном случае речь идет о модифицированном отрезке, в котором двоично-рациональные точки, являющиеся разделителями двух соседних отрезков, принимают два значения, соответственно каждому отрезку. Данное представление поможет описать дальнейший алгоритм моделирования двоичного базисного сплайна.

Перейдем к получению функции $\psi_{n,1}(x)$. Для этого неоходимо проинтегрировать функцию $\psi_{n,0}(x)$ и домножить на поправочный коэффициент $\frac{Q(n,1)}{Q(n,0)}$. Но как получить постоянную интегрирования? Поскольку после первого интегрирования функция предполагается непрерывной, то для этого нужно приравнять значения двух соседних отрезков: правого конца левого отрезка и левого конца правого отрезка соответственно. При этом, так как двоичный базисный сплайн — функция с компактным носителем, то значения за пределами отрезка $[0, 1]$ равны нулю, т. е. когда мы берем левый конец самого левого отрезка, или правый конец правого отрезка, значения сплайна должны быть равны нулю. Аналогично проводится второе и последующие интегрирования.

Опишем первый, самый простой, алгоритм для реализации.

Внешний итерационный цикл проходит по количеству интегрирований I. Внутренний цикл — проход по двоично-рациональным точкам от 0 до $\frac{2^n-1}{2^n}$ с шагом $\frac{1}{2^n}$. Каждая из этих точек, за исключением самой первой, является концом двух модифицированных отрезков. Таким образом, проходя двоично-рациональные точки слева направо, каждый раз мы знаем многочлен, который определяет левый модифицированный отрезок (в точке 0 значение многочлена тождественно равно нулю), и находим один невычесленный коэффициент — постоянную интегрирования — для правого модифицированного отрезка.

Вычислительная сложность такого алгоритма: внешний цикл $O(n)$, внутренний цикл $O(2^n)$. Однако в каждой точке внутреннего цикла нужно еще пересчитывать многочлены для левого и правого отрезков, что можно сделать за $O(n^3)$, проводя вычисления тривиальным способом, и за $O(n^2)$, но можно провести эти вычисления и за $O(n)$ (далее будет показано, каким образом). Следовательно, итоговая вычислительная сложность всего алгоритма будет $O(n^3 \cdot 2^n)$ или $O(n^2 \cdot 2^n)$.

Перейдем к деталям реализации алгоритма. На каждом отрезке с номером j двоичный базисный сплайн представим многочленом

$$\psi_{n,N}(x) = c_{j,0}x^N + c_{j-1,1}x^{N-1} + ... + c_{j,N-1}x + c_{j,N}.$$

Опишем процесс перехода от $\psi_{n,N-1}$ к $\psi_{n,N}$:

$$\psi_{n,N} = \frac{Q(n,N)}{Q(n,N-1)} \int \psi_{n,N-1} dx =$$
$$= \frac{Q(n,N)}{Q(n,N-1)} \int \left(c_{j,0}x^{N-1} + c_{j,1}x^{N-2} + ... + c_{j,N-1} \right) dx =$$
$$= \frac{2^{\frac{2nN+3N-N^2-2}{2}}}{2^{\frac{2n(N-1)+3(N-1)-(N-1)^2-2}{2}}} \left(c_{j,0}\frac{x^N}{N} + c_{j,1}\frac{x^{N-1}}{N-1} + ... + c_{j,N-1}x \right) + c_{j,N}.$$

Перед первым интегрированием значения коэффициентов $c_{j,0}$ равны значениям соответствующих функций Уолша или характеристической функции двоичного представления числа (в соответствии с определением 1.4). Коэффициент $q = \frac{Q(n,N)}{Q(n,N-1)}$ равен 2^{n-N+2}, за исключением случая первого интегрирования, когда он равен 2^{n-N+1}.

Реализовав данный алгоритм, можно получить таблицу 2.1 значений различных двоичных базисных сплайнов в некоторых точках.

Таблица 2.1

$n \mid x$	0.0625	0.125	0.17	0.22	0.25	0.5
1	0.125000	0.250000	0.340000	0.440000	0.500000	1.000000
2	0.031250	0.125000	0.231200	0.387200	0.500000	1.000000
4	0.005208	0.072917	0.193917	0.380276	0.500000	1.000000
6	0.003581	0.069661	0.191407	0.380066	0.500000	1.000000
8	0.003479	0.069458	0.191250	0.380054	0.500000	1.000000
10	0.003473	0.069445	0.191240	0.380053	0.500000	1.000000
11	0.003472	0.069445	0.191240	0.380053	0.500000	0.999825
12	0.003472	0.069444	0.191239	0.380055	0.499987	0.994781

Из данных таблицы 2.1 видно, что начиная с $n = 6$ значения двоичного базисного сплайна стабилизируются. Однако данный алгоритм начинает терять точность уже при $n = 11$. Этот процесс одновременно связан с большими значениями коэффициентов разложения $c_{j,t}$, малыми значениями x^n и компьютерным представлением действительных чисел, которое дает при перемножении малых чисел на большие значительную погрешность. Кроме того отметим, что алгоритмическую сложность вычислений можно сократить.

Опишем построение более эффективного алгоритма. В первую очередь, будем использовать другое представление двоичного базисного сплайна.

Пусть

$$\psi_{n,N}(x) = c_{j,0}\left(x - \frac{j}{2^n}\right)^N + c_{j,1}\left(x - \frac{j}{2^n}\right)^{N-1} + ... + c_{j,N-1}\left(x - \frac{j}{2^n}\right) + c_{j,N}.$$

Таким образом, на каждом отрезке выполняется $0 \le \left(x - \frac{j}{2^n}\right) \le \frac{1}{2^n}$. Умножая это неравенство на 2^n, получим $0 \le (2^n x - j) \le 1$. Более того, при вычислении коэффициентов разложения используются только концы отрезка, т. е. только $x = 0$ и $x = 1$, таким образом мы избавились от малых множителей.

Коэффициенты $c_{j,i}$ теперь необходимо делить на 2^n, что частично решает проблему больших множителей. Однако остается проблема накопления погрешности: из-за большого количества действий погрешность, возникающая при вычислении самых первых коэффициентов, много раз перемножается. Чтобы увеличить точность, необходимо сократить количество умножений.

Применим леммы 1.1, 1.2 об антипериодичности, и лемму 1.3 об основных свойствах.

Согласно леммам 1.1, 1.2 функция $|\psi_{n,N}(x)|$ периодична с периодом 2^{n-N}.

Согласно лемме 1.3 знак функции определяется как $W_{2^{n-N}-1}(x)$.

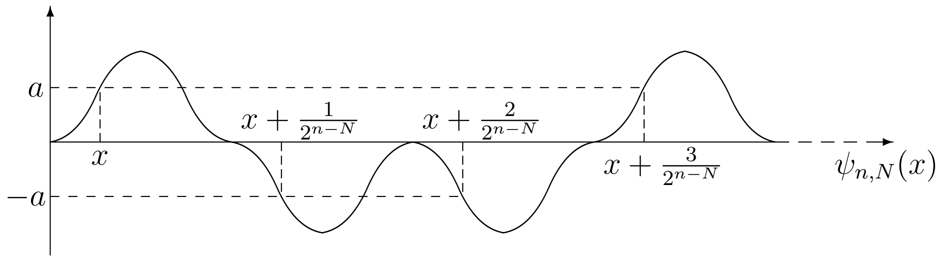

Рисунок 2.3 — Антипериодичность двоичного базисного сплайна

Следовательно, не нужно каждый раз строить двоичный базисный сплайн на всей прямой, а лишь на первых 2^N отрезках, потому что на всех остальных отрезках коэффициенты полинома будут аналогичными с точностью до знака.

Заметим, что этот алгоритм построения двоичного базисного сплайна можно заменить на алгоритм, предложенный П. А. Терехиным в лемме 2.1. Из построенного на предыдущем шаге двоичного базисного сплайна $\psi_{n-1,n-1}(x)$ с помощью операторов сжатия, антипериодизации и интегрирования можно получить двоичный базисный сплайн $\psi_{n,n}(x)$.

Таким образом, алгоритмическая сложность внешнего и внутреннего цикла при моделировании аналога Фабера – Шаудера сокращается до

$$O(2^0 + 2^1 + ... + 2^n) = O(2^{n+1} - 1).$$

Благодаря сокращению количества действий умножения, помимо алгоритмической сложности, повышается точность выполнения операций. Это позволяет вычислить двоичный базисный сплайн 20-го порядка достаточно точно за несколько секунд компьютерного времени.

Двоичный базисный сплайн $\psi_{n,n}(x)$ со значениями $n = 1, 2, 3, 4, 5, 20$ представлен на рисунке 2.4.

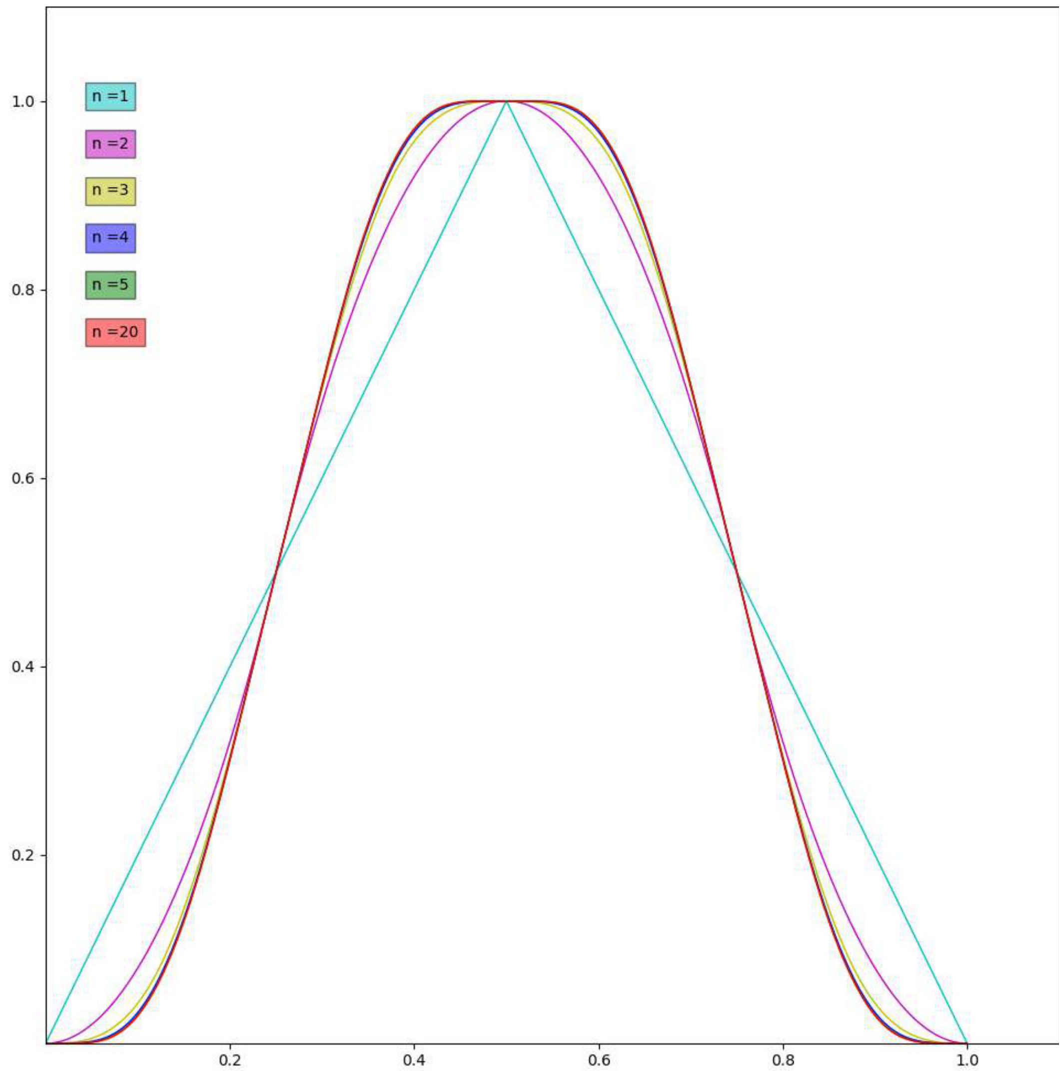

Рисунок 2.4 — Двоичный базисный сплайн $\psi_{n,n}(x)$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 20$

На рисунке 2.4 видно, что порождающая функция двоичного базисного сплайна достаточно быстро сходится, и уже при $n = 5$ в стандартных графических пакетах не видно разницы с двоичными базисными сплайнами более высоких степеней.

Тем не менее, расскажем, как моделировать двоичные базисные сплайны более эффективными алгоритмами, которые необходимы для степеней $n > 20$. Благодаря леммам об антипериодичности и лемме 1.4 мы знаем, что двоичный базисный сплайн имеет три внутренние точки симметрии — $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, следовательно, можем каждый раз вычислять только первую четверть двоичного базисного сплайна, и по этим данным достраивать сплайн полностью.

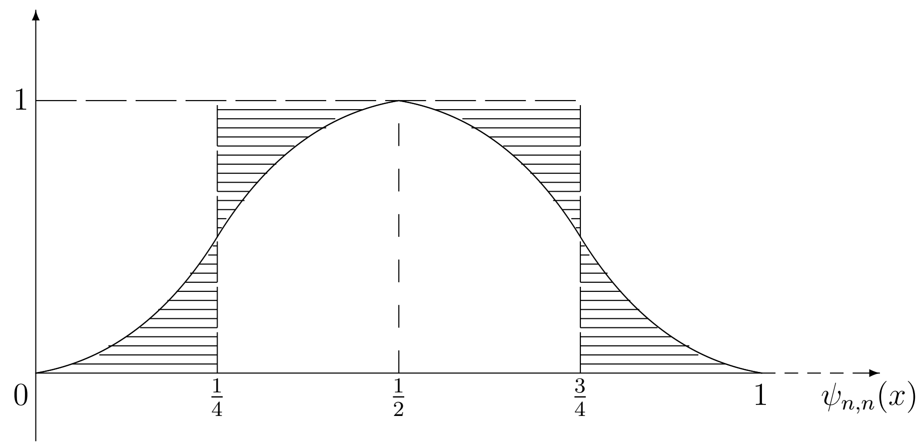

Рисунок 2.5 — Точки симметрии двоичного базисного сплайна

Таким образом можно сократить количество действий еще примерно в четыре раза, следовательно, суммарная вычислительная сложность будет $O(n{\cdot}2^{n-1})$.

Наконец, для вычисления двоичного базисного сплайна можно использовать принципы многопоточности. Так как коэффициенты $c[j][k]$ не зависят от коэффициентов $c[j][i]$ $(i \neq k)$, и учитывая, что можно строить полиномы не только с левого конца отрезка, но и с правого, можно сократить время вычисления еще на $2n$ при использовании не менее чем $2n$ потоков.

2.4 Пример построения приближения некоторых функций из класса $C[0,1]$ системой сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна

В разделе 2.2 данной главы доказывалось, что система сжатия и сдвигов двоичного базисного сплайна является базисом в $C[0,1]$. Теорема 2.1, по сути, представляет собой алгоритм построения приближения с помощью двоичного базисного сплайна. Изложим еще раз детали реализации.

Зафиксируем значения в концах отрезков при помощи функций $\psi(x)$:

$\psi(\frac{x}{2})$ при $x = 1$ и $\psi(\frac{x-1}{2})$ при $x = 0$. Таким образом,

$$S_{-1}(x) = f(1) \cdot \psi\left(\frac{x}{2}\right) + f(0) \cdot \psi\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Далее в общем случае полагаем:

$$S_m(x) = R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right)\phi_{m,j}(x),\ x \in \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right],$$

$$R_{m+1}(x) = R_m(x) - S_m(x).$$

Будем использовать несколько другую нумерацию для хранения остатков. На рисунке 2.6 представлено дерево хранения остатков.

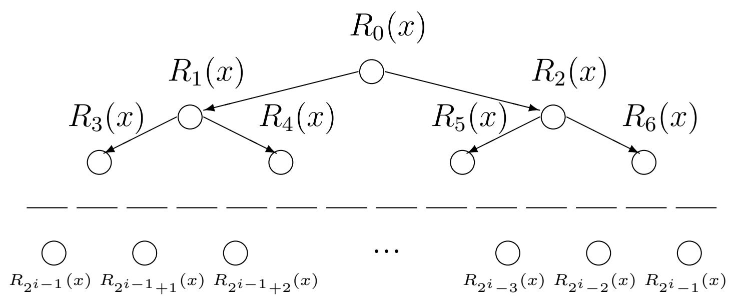

Рисунок 2.6 — Дерево хранения остатков

На рисунке 2.6 i-й слой дерева распологается между номерами 2^{i-1} и $2^i - 1$, следовательно, j-й отрезок i-го слоя имеет номер $(2^{i-1} + j)$. Однако при программной реализации алгоритма логично сделать сдвиг на 2, чтобы сохранять значения R_{-2} и R_{-1}, соответствующие значениям в $x = 0$ и $x = 1$.

Рассмотрим способ построения этого дерева.

Допустим, мы хотим узнать разность $R_{2^{i-1}+j}$. По определению

$$R_{m+1}(x) = R_m(x) - S_m(x),$$

или

$$R_{m+1}(x) = f(x) - \sum_{k=-1}^{m} S_i(x).$$

В свою очередь, $S_m(x) = R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right)\phi_{m,j}(x)$. Таким образом, нам необходимо знать значения разностей в серединах отрезков, расположенных выше по дереву. Именно их и будем складывать в массив коэффициентов. Переходы по дереву делаются следующим образом: в левое поддерево $i \to 2i+1$, в правое — $i \to 2i+2$.

Выберем несколько функций для отображения процесса аппроксимации. Постараемся выбрать функции с разным поведением на отрезке $[0,1]$ и станем их приближать системами двоичных базисных сплайнов разного порядка гладкости n с выбранным числом шагов m. В качестве эталонной каждый раз будем брать систему Фабера – Шаудера, т. е. $n = 1$.

Отметим, что функции-константы $(f(x) \equiv C)$ мгновенно приближаются краевыми функциями $\psi(\frac{x}{2})$ при $x = 1$ и $\psi(\frac{x-1}{2})$ при $x = 0$ за счет симметрии двоичного базисного сплайна, поэтому брать их в качестве примеров не имеет смысла.

В качестве первой функции выберем полином $f(x) = -20x^7+70x^6-84x^5+$ $+35x^4$ (рисунок 2.7), часто использующийся для построения всплесков Мейера [46].

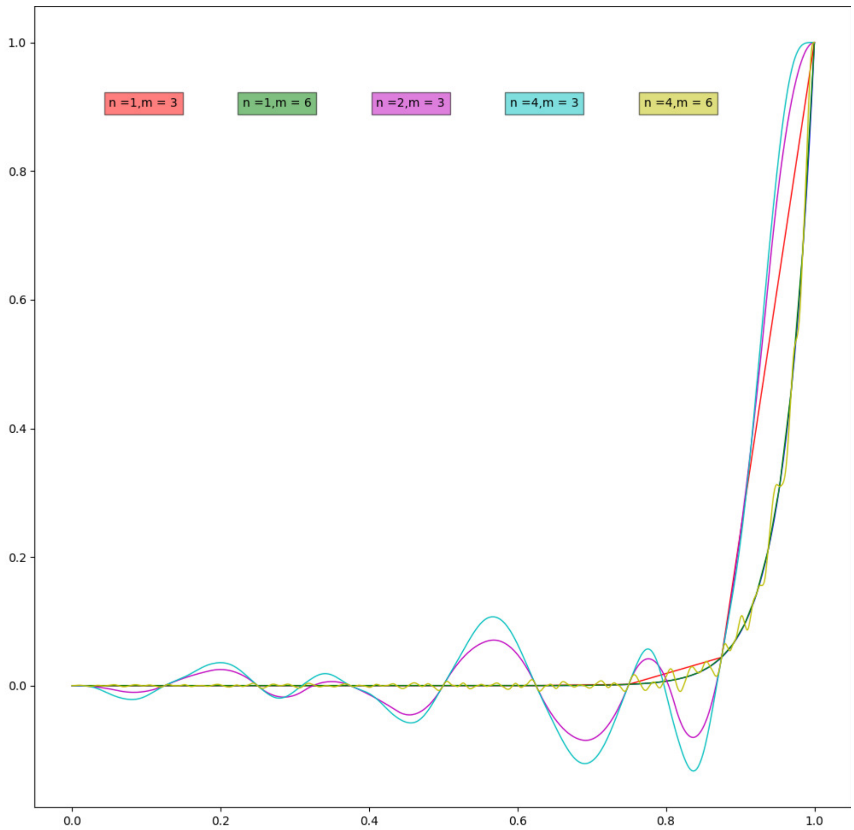

Рисунок 2.7 — Приближение функции $f(x) = -20x^7 + 70x^6 - 84x^5 + 35x^4$

Заметим, что система Фабера – Шаудера хуже приближает данную функцию, чем двоичные базисные сплайны как при числе шагов $m = 2$, так и при числе шагов $m = 3$. Разница между системами двоичных базисных сплайнов при $n = 2$ и $n = 4$ минимальна.

Вторая функция — функция $f(x) = \frac{e^{25x}}{e^{25}}$, быстрорастущая в конце отрезка (рисунок 2.8). Множитель $\frac{1}{e^{25}}$ используется для нормирования. Производная этой функции при $x \to 1$ очень велика, поэтому неудивительно, что в этом случае гладкие сплайны плохо справляются с задачей приближения.

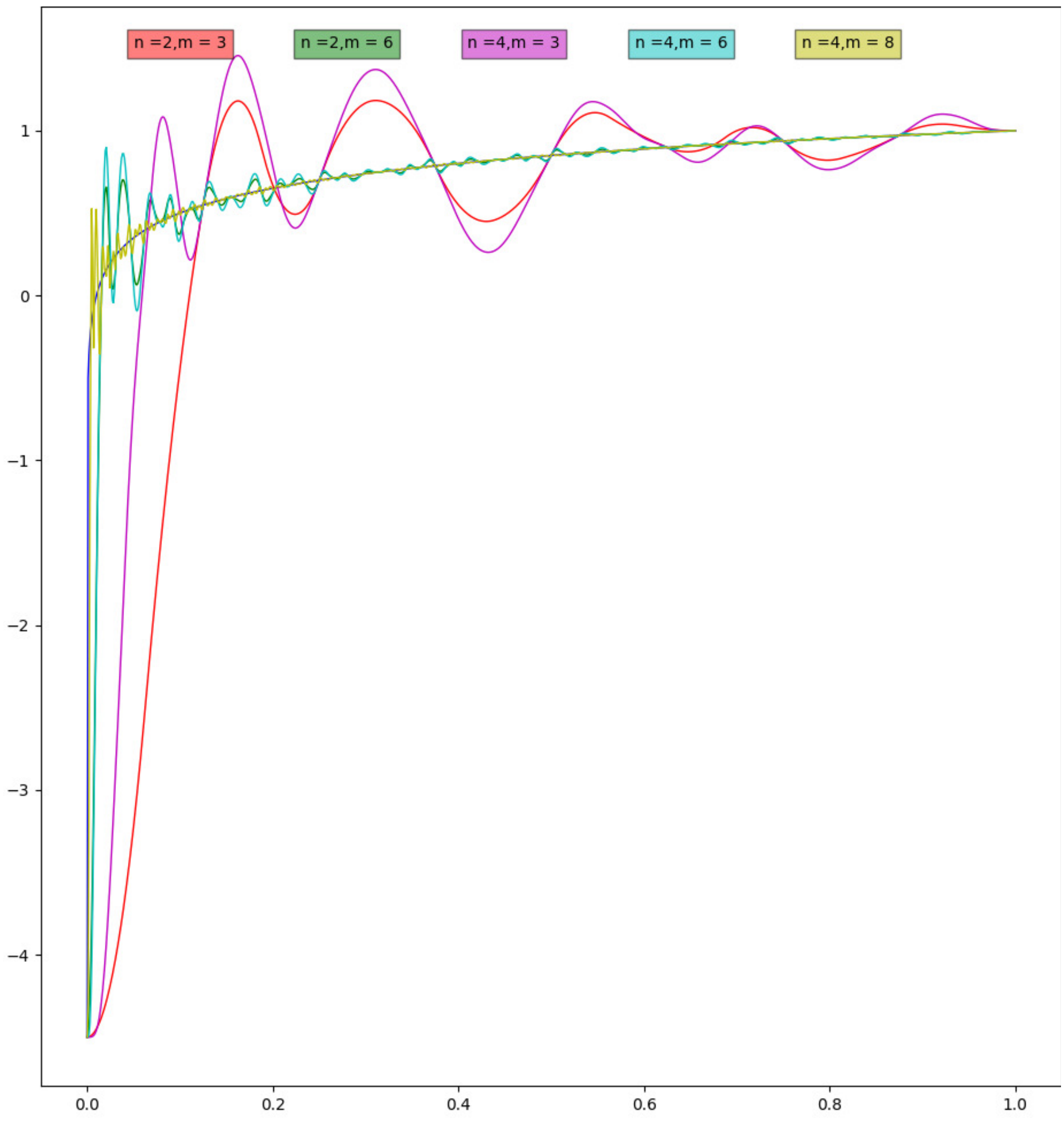

Рисунок 2.8 — Приближение функции $f(x) = \frac{e^{25x}}{e^{25}}$

Третья функция — функция $f(x) = \frac{ln(100x+10^{-9})}{ln(100)}$, быстрорастущая в начале отрезка (рисунок 2.9). Множитель $\frac{1}{ln(100)}$ так же взят для нормирования, а сдвиг вправо на 10^{-9} исключает точку разрыва. На этот раз мы исключили функцию Фабера – Шаудера из рассмотрения.

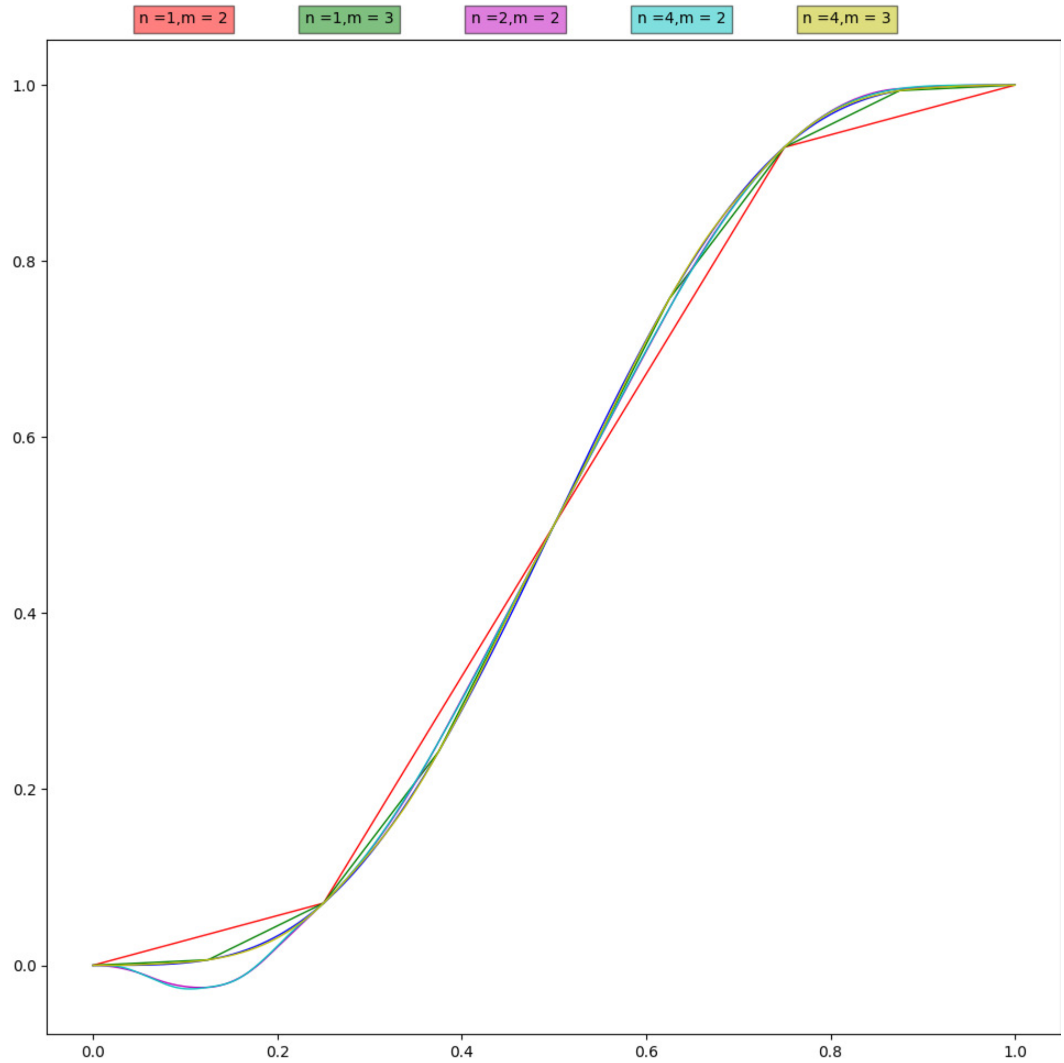

Рисунок 2.9 — Приближение функции $f(x) = \frac{ln(100x+10^{-9})}{ln(100)}$

Четвертая функция — функция с малым периодом колебаний $f(x) = sin(24x)$ (рисунок 2.10). Множитель сжатия 24 специально подобран таким образом, чтобы значения в точках 0 и 1 сильно различались. Заметим, что при $m = 2$ и $m = 3$ алгоритму построения приближения явно не хватает шагов, чтобы попадать близко к точкам локальных минимумов и максимумов.

При $m = 4$ шагов уже достаточно, и в этом случае наилучшее приближение показывает система при $n = 2$.

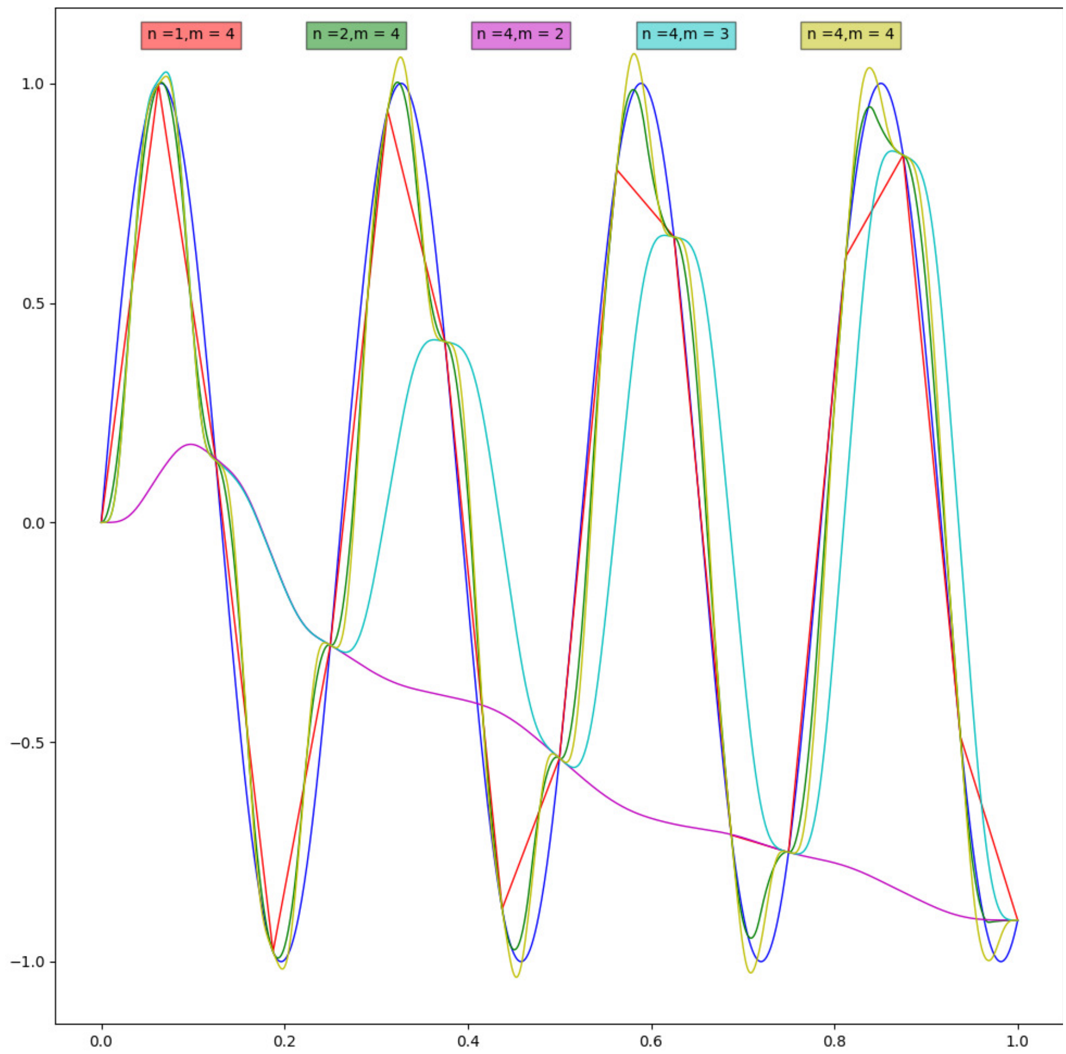

Рисунок 2.10 — Приближение функции $f(x) = sin(24x)$

На рисунке 2.11 изображено приближение достаточно часто встречающейся в задачах аппроксимации нейросетями функции $f(x) = x\sin(\frac{x}{2})\cos(2x)$, вернее ее сжатая и нормированная на $[0, 1]$ модификация

$$f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\sin\left(10\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)\cos\left(40\left(x - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Для того, чтобы график не был слишком перегружен, было осуществлено только два приближения — системой Фабера – Шаудера и двоичным базисным сплайном при $n = 4$ (в дальнейшем будем называть его гладким сплайном).

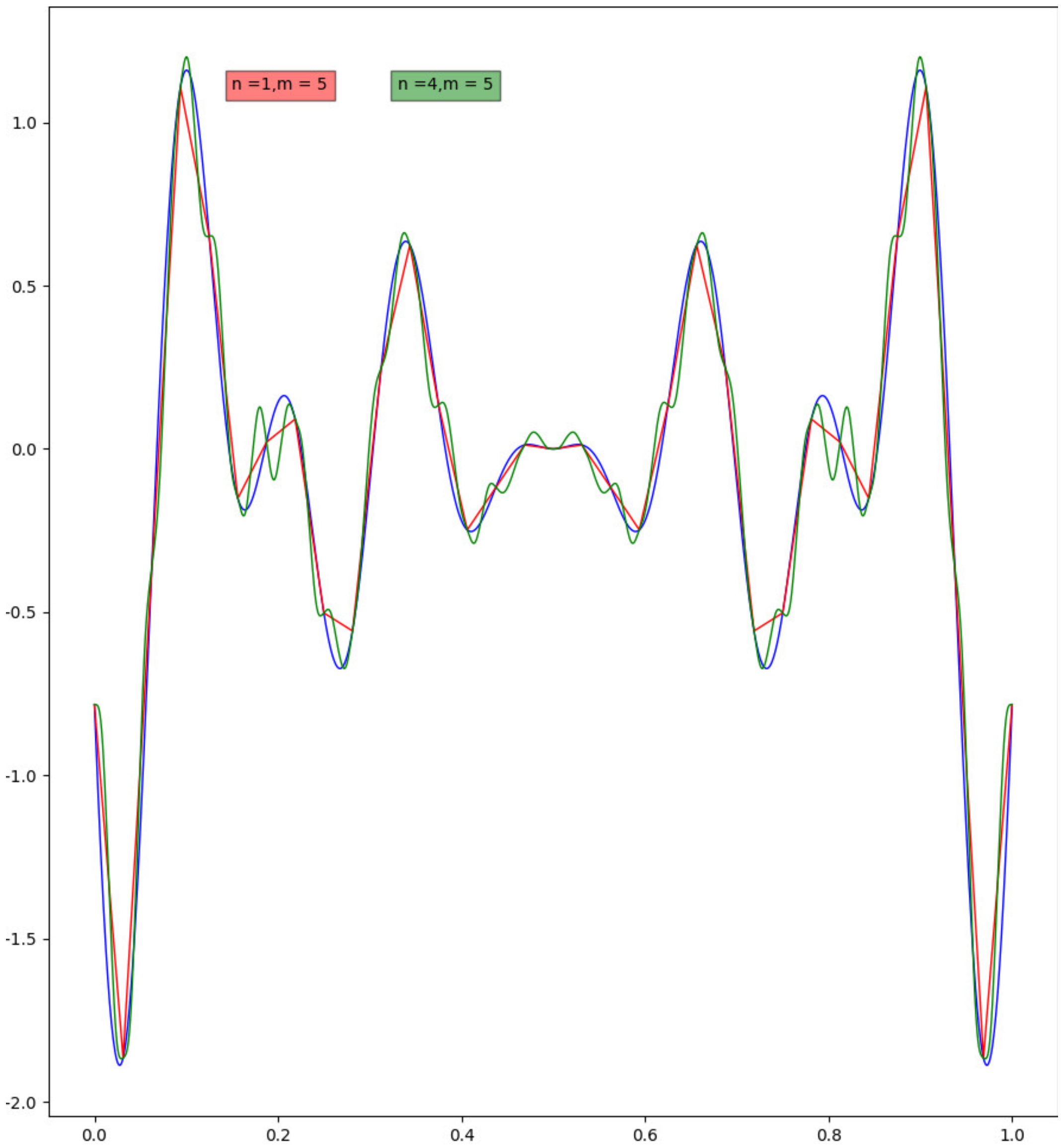

Рисунок 2.11 — Приближение функции $f(x) = x\sin(\frac{x}{2})\cos(2x)$

Для этих приближений было выбрано число шагов $m = 5$. Отметим, что приближение и по системе Фабера – Шаудера, и по системе гладкого сплайна имеет свои недостатки. Система Фабера – Шаудера плохо реагирует на точки локального минимума и максимума. Особенно хорошо это видно в районе точек $x = 0.2$ и $x = 0.8$, где система Фабера – Шаудера каждый раз «пропускает» сразу несколько точек локальных минимумов и максимумов. Система гладкого сплайна достаточно хорошо выявляет точки экстремума, но, в свою очередь, добавляет много новых точек перегиба.

Глава 3
Двоичные базисные сплайны в кратномасштабном анализе

В этой главе рассматривается построение кратномасштабного анализа (КМА) системы сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна. В разделе 3.1 доказывается, что двоичный базисный сплайн удовлетворяет масштабирующему уравнению для случаев $N = n$ и $N = n - 1$. В разделе 3.2 находится вид преобразование Фурье двоичного базисного сплайна и описывается построение кратномасштабного анализа для системы сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна. В случае $N = n - 1$ построенный кратномасштабный анализ образует базис Рисса. В случае $N = n$ кратномасштабный анализ не образует базис Рисса, в связи с чем в разделе 3.3 рассматривается приближение функций из пространств Соболева сжатиями и сдвигами двоичного базисного сплайна при $N = n$.

3.1 Масштабирующее уравнение двоичного базисного сплайна

Лемма 3.1. *Для функции $\psi_{n,N}(x)$ справедливо равенство*

$$\psi_{n+1,n}(x) = \psi_{n,n}(2x) - \psi_{n,n}(2x-1). \tag{3.1}$$

Доказательство. Заметим, что $r_k(x) = r_{k-1}(2x) + r_{k-1}(2x-1)$. Тогда, используя определение двоичного базисного сплайна, получим

$$\psi_{n+1,n}(x) = Q(n+1,n)\, r_0(x)\, I^n(W_{2^n-1}(2x) + W_{2^n-1}(2x-1)). \tag{3.2}$$

Однако

$$I^n\Big(W_{2^n-1}(2x)+W_{2^n-1}(2x-1)\Big)=$$
$$=I^{n-1}\int\limits_0^x\Big(W_{2^n-1}\,(2t)+W_{2^n-1}\,(2t-1)\,\Big)dt=$$
$$=I^{n-1}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{\min(x,\frac{1}{2})}W_{2^n-1}\,(2t)\,d(2t)+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\max(\frac{1}{2},x)}W_{2^n-1}\,(2t-1)\,d(2t-1)\right)=\cdots=$$
$$=\frac{1}{2^n}\frac{1}{Q(n,n)}\Big(\psi_{n,n}(2x)+\psi_{n,n}(2x-1)\Big). \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.2), получим

$$\psi_{n+1,n}(x)=Q(n+1,n)\,r_0(x)\,\frac{1}{Q(n,n)}\cdot\frac{1}{2^n}\left(\psi_{n,n}(2x)+\psi_{n,n}(2x-1)\right)=$$
$$=\frac{Q(n+1,n)}{Q(n,n)}\cdot\frac{1}{2^n}\Big(\psi_{n,n}(2x)-\psi_{n,n}(2x-1)\Big).$$

Используя (1.10), получим

$$\frac{Q(n+1,n)}{Q(n,n)}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{2^{\frac{2(n+1)n+3n-n^2-2}{2}}}{2^{\frac{2n^2+3n-n^2-2}{2}}}\cdot\frac{1}{2^n}=$$
$$=2^{\frac{(2n^2+2n+3n-n^2-2)-(2n^2+3n-n^2-2)-2n}{2}}=2^0=1.$$

Следовательно, $\psi_{n+1,n}(x)=\Big(\psi_{n,n}(2x)-\psi_{n,n}(2x-1)\Big)$. □

Лемма 3.2. *Справедливы следующие равенства:*

$$\psi_{n,n-1}(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\psi_{n,n-1}(2x-0)+\sum_{t=1}^{2^n-1}\frac{1}{2^{n-2}}\psi_{n,n-1}\left(2x-\frac{t}{2^{n-1}}\right)+$$
$$+\frac{1}{2^n}\psi_{n,n-1}(2x-1), \tag{3.4}$$
$$\psi_{n,n}(x)=\frac{1}{2^n}\psi_{n,n}(2x-0)+\sum_{t=1}^{2^n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\psi_{n,n}\left(2x-\frac{t}{2^n}\right)+\frac{1}{2^n}\psi_{n,n}(2x-1). \tag{3.5}$$

Доказательство. Для базы индукции рассмотрим случай $n=1$. При $n=1$ функция $\psi_{n,n-1}(x)$ принимает вид функции Хаара, и тогда справедливо

$$\psi_{1,0}(x)=\frac{1}{2}\psi_{1,0}(2x-0)+\psi_{1,0}\left(2x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\psi_{1,0}(2x-1).$$

Функция $\psi_{n,n}$ при $n = 1$ принимает вид функции Фабера – Шаудера. Для системы Фабера – Шаудера масштабирующее уравнение имеет вид

$$\psi_{1,1}(x) = \frac{1}{2}\psi_{1,1}(2x-0) + \psi_{1,1}\left(2x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\psi_{1,1}(2x-1),$$

т. е. (3.5) при $n = 1$ установлено.

Пусть (3.5) справедливо при $n = m - 1$, т. е. выполняется

$$\psi_{m-1,m-1}(x) = \frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}(2x-0) +$$
$$+\sum_{t=1}^{2^{m-1}-1} \frac{1}{2^{m-2}}\psi_{m-1,m-1}\left(2x - \frac{t}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}(2x-1).$$

Покажем, что (3.5) выполняется и при $n = m$. Очевидно, что

$$\psi_{m-1,m-1}(2x) - \psi_{m-1,m-1}(2x-1) = \left(\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}(4x-0) + \right.$$
$$\left. + \sum_{t=1}^{2^{m-1}-1} \frac{1}{2^{m-2}}\psi_{m-1,m-1}\left(4x - \frac{t}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}(4x-2)\right) -$$
$$-\left(\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}(4x-2) + \right.$$
$$\left. + \sum_{t=1}^{2^{m-1}-1} \frac{1}{2^{m-2}}\psi_{m-1,m-1}\left(4x - \frac{t}{2^{m-1}} - 2\right) + \frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}(4x-4)\right). \qquad (3.6)$$

В обеих частях равенства (3.6) добавим и вычтем следующие слагаемые:

$$\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}(4x-1) + \sum_{t=1}^{2^{m-1}-1} \frac{1}{2^{m-2}}\psi_{m-1,m-1}\left(4x - \frac{t}{2^{m-1}} - 1\right) +$$
$$+\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m-1,m-1}(4x-3).$$

После перегруппировки имеем

$$\psi_{m-1,m-1}(2x) - \psi_{m-1,m-1}(2x-1) =$$
$$= \frac{1}{2^{m-1}}\left(\psi_{m-1,m-1}(4x-0) - \psi_{m-1,m-1}(4x-1)\right) +$$
$$+\sum_{t=1}^{2^{m-1}-1} \frac{1}{2^{m-2}}\left(\psi_{m-1,m-1}\left(4x - \frac{t}{2^{m-1}}\right) - \psi_{m-1,m-1}\left(4x - \frac{t}{2^{m-1}} - 1\right)\right) +$$

$$+\frac{2}{2^{m-1}}\left(\psi_{m-1,m-1}\left(4x-2\right)-\psi_{m-1,m-1}\left(4x-3\right)\right)+$$

$$+\sum_{t=1}^{2^{m-1}-1}\frac{1}{2^{m-2}}\left(\psi_{m-1,m-1}\left(4x-\frac{t}{2^{m-1}}-2\right)-\psi_{m-1,m-1}\left(4x-\frac{t}{2^{m-1}}-3\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2^{m-1}}\left(\psi_{m-1,m-1}\left(4x-3\right)-\psi_{m-1,m-1}\left(4x-4\right)\right).$$

Используя равенство (3.1), получаем

$$\psi_{m,m-1}(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m,m-1}(2x)+$$

$$+\sum_{t=1}^{2^m-1}\frac{1}{2^{m-2}}\psi_{m,m-1}\Big(2x-\frac{t}{2^{m-1}}\Big)+\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m,m-1}(2x-1). \tag{3.7}$$

Тем самым (3.4) доказано.

Проинтегрируем обе части (3.7):

$$\int\limits_0^1\psi_{m,m-1}(x)dx=\int\limits_0^1\Big(\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m,m-1}(2x)+$$

$$+\sum_{t=1}^{2^m-1}\frac{1}{2^{m-2}}\psi_{m,m-1}\left(2x-\frac{t}{2^{m-1}}\right)+\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m,m-1}(2x-1)\Big)\,d\left(\frac{1}{2}2x\right).$$

Применяя (1.10), получим равенство

$$\frac{Q_{m,m-1}}{Q_{m,m}}\,\psi_{m,m}(x)=\frac{Q_{m,m-1}}{Q_{m,m}}\Big(\frac{1}{2^m}\psi_{m,m}(2x)+$$

$$+\sum_{t=1}^{2^m-1}\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m,m}\left(2x-\frac{t}{2^{m-1}}\right)+\frac{1}{2^m}\psi_{m,m}(2x-1)\Big).$$

Таким образом,

$$\psi_{m,m}(x)=\frac{1}{2^m}\psi_{m,m}(2x)+\sum_{t=1}^{2^m-1}\frac{1}{2^{m-1}}\psi_{m,m}\left(2x-\frac{t}{2^{m-1}}\right)+\frac{1}{2^m}\psi_{m,m}(2x-1),$$

и (3.5) тоже доказано □

Пусть $F_{n,N}(x)=\psi_{n,N}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

Теорема 3.1. *Имеет место равенство*

$$F_{n,n-1}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} F_{n,n-1}(2x-0) + \sum_{t=1}^{2^n-1} \frac{1}{2^{n-2}} F_{n,n-1}(2x-t) + \frac{1}{2^{n-1}} F_{n,n-1}(2x-n).$$

Теорема 3.2. *Имеет место равенство*

$$F_{n,n}(x) = \frac{1}{2^n} F_{n,n}(2x-0) + \sum_{t=1}^{2^n-1} \frac{1}{2^{n-1}} F_{n,n}(2x-t) + \frac{1}{2^n} F_{n,n}(2x-n).$$

Доказательство этих теорем напрямую следует из леммы 3.2.

3.2 Преобразование Фурье и кратномасштабный анализ

Лемма 3.3. *Определим преобразование Фурье равенством*

$$\hat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-2\pi i \omega x}\, dx.$$

Тогда

$$\hat{F}_{n,N}(\omega) = 2^{-N\cdot n - N - 1} \cdot \left(\frac{1}{\pi i \omega}\right)^{N+1} Q(n,N)\left(1 - e^{-2\pi i \omega}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - e^{-2^k \pi i \omega}\right).$$

Доказательство. Найдем преобразование Фурье функции $\hat{\psi}_{n,N}$. Так как $\psi_{n,N} \equiv 0$ для всех $x \notin (0,1)$, то, интегрируя по частям, получаем

$$\hat{\psi}_{n,N}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_{n,N}(x) e^{-2\pi i \omega x} dx = Q(n,N) \int\limits_0^1 I^N W_{2^n-1}(x) e^{-2\pi i \omega x}\, dx =$$

$$= Q(n,N) \int\limits_0^1 I^N W_{2^n-1}(x) d\left(\frac{1}{-2i\pi\omega} e^{-2\pi i \omega x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i\pi\omega} Q(n,N) \int\limits_0^1 I^{N-1} W_{2^n-1}(x) e^{-2\pi i \omega x} dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2i\pi\omega}\right)^2 Q(n,N) \int\limits_0^1 I^{N-2} W_{2^n-1}(x) e^{-2\pi i\omega x} dx = \dots =$$

$$= \left(\frac{1}{2i\pi\omega}\right)^N Q(n,N) \int\limits_0^1 W_{2^n-1}(x) e^{-2\pi i\omega x} dx.$$

Вычислим $\int\limits_0^1 W_{2^n-1}(x) e^{-2\pi i\omega x}\, dx$. Для этого разобьем отрезок $[0,1]$ на 2^n полуинтервалов длины $\frac{1}{2^n}$. На каждом таком полуинтервале $\Delta_k^{(n)} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ функция Уолша $W_{2^n-1}(x)$ постоянна. Поэтому

$$\int\limits_0^1 W_{2^n-1}(x) e^{-2\pi i\omega x} dx = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(W_{2^n-1}\left(\Delta_k^{(n)}\right) \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} e^{-2\pi i\omega x} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2i\pi\omega} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(W_{2^n-1}\left(\Delta_k^{(n)}\right) \cdot \left(e^{-2\pi i\omega \frac{k}{2^n}} - e^{-2\pi i\omega \frac{k+1}{2^n}} \right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2i\pi\omega} \left(1 - e^{\frac{-\pi i\omega}{2^n}}\right) \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(W_{2^n-1}\left(\Delta_k^{(n)}\right) e^{-2\pi i\omega \frac{k}{2^n}} \right).$$

Далее будем использовать (1.4) объединяя соседние отрезки. На первом шаге:

$$\hat{\psi}_{n,N}(\omega) = \left(\frac{1}{2i\pi\omega}\right)^{N+1} Q(n,N) \left(1 - e^{\frac{-\pi i\omega}{2^{n-1}}}\right) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(W_{2^{n-1}-1}\left(\Delta_k^{(n)}\right) \left(e^{-\pi i\omega \frac{2k}{2^{n-1}}} - e^{-\pi i\omega \frac{2k+1}{2^{n-1}}} \right)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2i\pi\omega}\right)^{N+1} Q(n,N) \left(1 - e^{\frac{-\pi i\omega}{2^{n-1}}}\right)^2 \cdot \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(W_{2^{n-1}-1}\left(\Delta_k^{(n)}\right) e^{-\pi i\omega \frac{k}{2^{n-2}}} \right) = \dots =$$

$$= \frac{Q(n,N)}{(2i\pi\omega)^{N+1}} \left(1 - e^{\frac{-\pi i\omega}{2^{n-1}}}\right) \prod_{k=0}^{n_1} \left(1 - e^{\frac{-\pi i\omega}{2^{n-k}}}\right) W_{2^{n_1}-1} \cdot \sum_{k=0}^{2^{n_1}-1} \left(\left(\Delta_k^{(n_1)}\right) e^{-\pi i\omega \frac{k}{2^{n-n_1-1}}} \right) =$$

$$= \dots = \left(\frac{1}{2i\pi\omega}\right)^{N+1} Q(n,N) \left(1 - e^{\frac{-\pi i\omega}{2^{n-1}}}\right) \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{-\pi i\omega}{2^k}}\right).$$

Теперь вычислим $\hat{F}_{n,N}(\omega)$:

$$\hat{F}_{n,N}(\omega) = \hat{\psi}_{(n,N)\cdot\frac{1}{2^n}}(\omega) = 2^n \hat{\psi}_{n,N}\left(2^n\omega\right) =$$
$$= 2^{n-(N+1)(n+1)}\left(\frac{1}{i\pi\omega}\right)^{N+1} Q(n,N)\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right) =$$
$$= 2^{-Nn-N-1}\left(\frac{1}{i\pi\omega}\right)^{N+1} Q(n,N)\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right).$$

Таким образом (3.3) доказано. □

Пусть $V_{m,n,N} = \overline{(2^{\frac{m}{2}}F_{n,N}(2^m x+k)_{k\in\mathbb{Z}})}$ — совокупность замкнутых пространств, $V_{m,n,N}\subset L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 3.3. *Совокупность* $(V_{m,n,n-1})$, $m\in\mathbb{Z}$, *образует ортогональный КМА:*

MR1. $V_j\subset V_{j+1}$ *для всех* $j\in\mathbb{Z}$*;*

MR2. $\bigcup\limits_{j\in Z} V_j$ *плотно в* $L_2(\mathbb{R})$*;*

MR3. $\bigcap\limits_{j\in Z} V_j = \{0\}$*;*

MR4. $f\in V_j \Longleftrightarrow f(2^j\cdot)\in V_0$ *для всех* $j\in\mathbb{Z}$*;*

MR5. ществует функция $\varphi\in V_0$*, такая что последовательность* $\{\varphi(\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *образует базис Рисса в* V_0.

Совокупность $(V_{m,n,n})$, $m\in\mathbb{Z}$, *образует КМА общего вида, т. е. выполнены аксиомы MR1–MR3.*

Доказательство. Функции $F_{n,n}(x)$ и $F_{n,n-1}(x)$ — мастштабирующие, имеют компактный носитель. Поскольку

$$\hat{F}_{n,n}(\omega) = 2^{-n^2-n-1}\left(\frac{1}{\pi i\omega}\right)^{n+1} Q(n,n)\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right) =$$
$$= 2^{-n^2-n-1}\left(\frac{2}{\pi\omega}\right)^{n+1}\left(\frac{1-e^{-\pi i\omega}}{2i}\right)^{n+1} Q(n,n)\left(1+e^{-\pi i\omega}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+e^{-2^k\pi i\omega}\right)^{n-k} =$$

$$= 2^{-n^2-n-1}\left(\frac{2}{\pi\omega}\right)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)^{n+1}e^{\frac{-\pi i\omega}{2}}\,Q(n,n)\left(1+e^{-\pi i\omega}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+e^{-2^k\pi i\omega}\right)^{n-k} =$$

$$= 2^{-n^2-n-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}{\frac{\pi\omega}{2}}\right)^{n+1}e^{\frac{-\pi i\omega}{2}}\,Q(n,n)\left(1+e^{-\pi i\omega}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+e^{-2^k\pi i\omega}\right)^{n-k}$$

и $\hat{F_{n,n}}(0) \neq 0$, учитывая [56, с. 20], $(V_{m,n,n})_{m\in\mathbb{Z}}$ образуют обобщенный КМА. В силу теоремы (2.1) для $(V_{m,n,n-1})_{m\in\mathbb{Z}}$ выполнены все аксиомы MR1–MR5 . □

3.3 Приближение подпространствами функций из пространств Соболева

Определение 3.1. *Пусть $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Выражение*

$$[f,g](\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\omega+k)\overline{g(\omega+k)}$$

называют скобочным произведением.

Определение 3.2. *Пусть $s > 0$. Множество*

$$W_2^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \|f\|_{W_2^s(\mathbb{R})} = \|\,(1+|\cdot|)^s\,\hat{f}\|_{L_2(\mathbb{R})} < +\infty \right\}$$

называют пространством Соболева.

Определение 3.3. *Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, $\varphi_{m,k}(x) = 2^{\frac{m}{2}}\varphi\left(2^m x + k\right)$. Оператор*

$$\beta_m : f \to \sum_{k\in Z}\left(f, \varphi_{m,k}\right)\varphi_{m,k}$$

называют квазиинтерполяционным оператором.

Определение 3.4. *Оператор β_m доставляет аппроксимацию порядка $t \in \mathbb{R}_+$, если для всех $f \in W_2^t(\mathbb{R})$*

$$\|f - \beta_m f\|_{L_2(\mathbb{R})} = O(2^{-mt}).$$

Лемма 3.4. *Пусть функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям:*

1) $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]$ существенно ограничена;

2) $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] - |\hat{\varphi}|^2 = O(|\cdot|^{2t})$*;*

3) $1 - |\hat{\varphi}|^2 = O(|\cdot|^{2t_0})$.

Тогда β_m *доставляет аппроксимацию порядка* $t_1 = \min(t, 2t_0)$.

Здесь $f = O(|\cdot|^t)$ означает, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|f(x)|}{|x|^t} \le C$, $C > 0$.

Доказательство леммы 3.4 приведено в [56, с. 18–21].

Лемма 3.5. *Для любого* $n \in \mathbb{N}_0$

$$(\mathrm{ctg}(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k^n \,\mathrm{ctg}^k(x), \tag{3.8}$$

где

$$a_k^{n+1} = -\left((k-1)a_{k-1}^n + (k+1)a_{k+1}^n\right), \tag{3.9}$$

$$a_0^0 = 0,\ a_1^0 = 1,\ a_{-1}^m = 0,\ a_{m+2}^m = 0,\ a_{m+3}^m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{3.10}$$

При этом

$$a_{n+1}^n = (-1)^n n!, \tag{3.11}$$

а также для всех $n, k \in \mathbb{N}$

$$a_{2k}^{2n} = a_{2k+1}^{2n+1} = a_{2k-1}^{2n+1} = 0. \tag{3.12}$$

Доказательство. Доказываем по индукции. Пусть $n = 0$. Тогда

$$(\mathrm{ctg}(x))^{(0)} = \mathrm{ctg}(x)$$

и, очевидно, соотношения (3.8)–3.12 выполнены.

Предположим, что они выполнены для $n = t$. Докажем для $n = t + 1$. Имеем

$$(\mathrm{ctg}(x))^{(t+1)} = \left((\mathrm{ctg}(x))^{(t)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{t+1} a_k^t \,\mathrm{ctg}^k(x)\right)' =$$

$$= \frac{d\left(\sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k^t \,\mathrm{ctg}^k(x)\right)}{d(\mathrm{ctg}(x))} \cdot \frac{d(\mathrm{ctg}(x))}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{t+1} k a_k^n \,\mathrm{ctg}^{k-1}(x)\right) \cdot \left(-1 - \mathrm{ctg}^2(x)\right),$$

что доказывает соотношения(3.8)–(3.9).

Из этих соотношений очевидно, что $a_{t+2}^{t+1} = -\left((t+1)a_{t+1}^{t} + (t+3)a_{t+3}^{t}\right)$, но $a_{t+3}^{t} = 0$, следовательно, $a_{t+2}^{t+1} = (t+1)a_{t+1}^{t} = (t+1)!$, что доказывает представление (3.11)).

Наконец, если $t = 2m$, то для любых $k \in \mathbb{N}$

$$a_{2k+1}^{2m+1} = -(2k)a_{2k}^{2m} - (2k+2)a_{2k+2}^{2m}.$$

Но на предыдущем шаге индукции было доказано, что $a_{2k}^{2m} = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $a_{2k+1}^{2m+1} = 0$.

Далее аналогично поступим и при $t = 2k+1$. Таким образом, представление (3.12) тоже доказано. $\square$

Лемма 3.6. *Справедливо равенство*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{F}(\omega+k)\right|^2 = \frac{Q^2(n,n)}{2^{2n^2+2n+2}} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \times$$
$$\times \left|\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)^2 \prod_{t=1}^{n} \left(1-e^{-2^t\pi i\omega}\right)^2 \sum_{k=0}^{2n+2} a_k^{2n+1} \operatorname{ctg}^k(\pi\omega)\right|.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{F}(\omega+k)\right|^2 =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\frac{Q(n,n)}{2^{n^2+n+1}} \left(\frac{1}{\pi i(\omega+k)}\right)^{n+1} \left(1-e^{-2\pi i(\omega+k)}\right) \prod_{t=1}^{n} \left(1-e^{-2^t\pi i(\omega+k)}\right)\right|^2 =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{Q^2(n,n)}{2^{2n^2+2n+2}} \left|\left(\frac{1}{\pi(\omega+k)}\right)^{2n+2} \left(1-e^{-2\pi i(\omega+k)}\right)^2 \prod_{t=1}^{n} \left(1-e^{-2^t\pi i(\omega+k)}\right)^2\right|.$$

Учитывая $1-e^{-2^t\pi i(\omega+k)} = 1-e^{-2^t\pi i\omega}$ при $k \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$, получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{F}(\omega+k)\right|^2 = \frac{Q^2(n,n)}{2^{2n^2+2n+2}} \left|\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)^2 \prod_{t=1}^{n} \left(1-e^{-2^t\pi i\omega}\right)^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\pi(\omega+k)}\right)^{2n+2}\right|.$$

В свою очередь,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{x+\pi k}\right)^{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)!} \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \operatorname{ctg}(x).$$

Учитывая (3.8), получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{F}\left|(\omega+k)\right|^2 =$$

$$= \frac{Q^2(n,n)}{2^{2n^2+2n+2}} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \left| \left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)^2 \prod_{t=1}^{n} \left(1-e^{-2^t\pi i\omega}\right)^2 \sum_{k=0}^{2n+2} a_k^{2n+1} \operatorname{ctg}^k(\pi\omega) \right|.$$

$\square$

Определим функцию $\varphi_n(x) = C_n F_{n,n} = C_n F$, где $C_n = \dfrac{2^{\frac{n^2+n}{2}}}{Q(n,n)}$. Очевидно, $\varphi_n(x)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению и, значит, функция φ_n порождает КМА $(V_m)_{m\in\mathbb{Z}}$. Из леммы 3.3 и леммы 3.6 следует, что

$$\hat{\varphi}_n(\omega) = \frac{1}{2^{\frac{n^2+n+2}{2}}} \cdot \left(\frac{1}{\pi i\omega}\right)^{n+1} \left(1-e^{-2\pi i\omega}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right),$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}_n(\omega+k)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{2^{n^2+n+2}} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \left| \left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)^2 \prod_{k=1}^{n} \left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right)^2 \sum_{t=0}^{2n+2} a_t^{2n+1} \operatorname{ctg}^t(\pi\omega) \right|.$$

Теорема 3.4. (Теорема о порядке аппроксимации). *Семейство операторов β_m, $m\in\mathbb{Z}$, построенных по функции $\varphi_n(x)$, доставляет аппроксимацию порядка* 1.

Доказательство. Воспользуемся леммой 3.6. Во-первых, скобочное произведение $[\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n]$ существенно ограничено. Во-вторых,

$$\left|[\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n] - |\hat{\varphi}_n|^2\right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2^{n^2+n+2}} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \left| \left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)^2 \prod_{k=1}^{n} \left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right)^2 \sum_{t=0}^{2n+2} a_t^{2n+1} \operatorname{ctg}^t(\pi\omega) \right| - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2^{n^2+n+2}} \cdot \left| \left(\frac{1}{\pi i\omega}\right)^{2n+2} \left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)^2 \prod_{k=1}^{n} \left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right)^2 \right| \right|.$$

Так как

$$1-e^{-2^n\pi i\omega} = \left(\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1+e^{-2^k\pi i\omega}\right) \right),$$

получим

$$\left|[\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n] - |\hat{\varphi}_n|^2\right| = \frac{1}{2^{n^2+n+2}} \cdot \left|\left(1 - e^{-2\pi i\omega}\right)^2 \prod_{k=1}^{n} \left(1 - e^{-2\pi i\omega}\right)^2 \prod_{t=1}^{k} \left(1 + e^{-2^t \pi i\omega}\right)^2\right| \times$$

$$\times \left|\frac{1}{(2n+1)!} \left|\sum_{t=0}^{2n+2} a_t^{2n+1} \operatorname{ctg}^t(\pi\omega)\right| - \left(\frac{1}{\pi\omega}\right)^{2n+2}\right| =$$

$$= \frac{1}{2^{n^2+n+2}} \left(\frac{1 - e^{-2\pi i\omega}}{\sin(\pi\omega)}\right)^{2n+2} \cdot \left|\prod_{t=1}^{n-1} \left(1 + e^{-2^t \pi i\omega}\right)^2\right| \times$$

$$\times \left|\frac{1}{(2n+1)!} \left|\sum_{t=0}^{2n+2} a_t^{2n+1} \cos^t(\pi\omega) \sin^{2n+2-t}(\pi\omega)\right| - \left(\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right)^{2n+2}\right| =$$

$$= A(\omega) \cdot \left|\frac{1}{(2n+1)!} \left|\sum_{t=0}^{2n+2} a_t^{2n+1} \cos^t(\pi\omega) \sin^{2n+2-t}(\pi\omega)\right| - \left(\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right)^{2n+2}\right| \leq$$

$$\leq A(\omega) \cdot \left|\left|\sum_{t=0}^{2n} a_t^{2n+1} \cos^t(\pi\omega) \sin^{2n-t}(\pi\omega) \frac{1}{(2n+1)!} \sin^2(\pi\omega)\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\sum_{t=2n+1}^{2n+2} a_t^{2n+1} \cos^t(\pi\omega) \sin^{2n+2-t}(\pi\omega)\right| - \left(\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right)^{2n+2}\right|.$$

Воспользовавшись представлениями (3.11) и (3.12), получим

$$\left|[\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n] - |\hat{\varphi}_n|^2\right| \leq A(\omega) \times \left|\left|\sin^2(\pi\omega) \frac{\sum_{t=0}^{2n} a_t^{2n+1} \cos^t(\pi\omega) \sin^{2n-t}(\pi\omega)}{(2n+1)!}\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!} \cdot \cos^{2n+2}(\pi\omega)\right| - \left|\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right|^{2n+2}\right| =$$

$$= A(\omega) \cdot \left|B_n(\omega) \cdot \left|\sin^2(\pi\omega)\right| + \left|\cos^{2n+2}(\pi\omega)\right| - \left|\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right|^{2n+2}\right|.$$

Используя соотношения $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, получим

$$\sin x = \frac{e^{ix}(1 - e^{-2ix})}{2i}, \quad e^{ix}(1 - e^{-2ix}) = 2i \sin x, \quad 1 - e^{-2ix} = 2i \sin x e^{-ix},$$

$$1 - e^{-ix} = 2i \sin \frac{x}{2} \cdot e^{\frac{-ix}{2}}. \tag{3.13}$$

Аналогично доказывается

$$1 + e^{-ix} = 2 \cos \frac{x}{2} \cdot e^{\frac{-ix}{2}}. \tag{3.14}$$

Следовательно,

$$0 < A(\omega) = \frac{1}{2^{n^2+n+2}} \cdot \left|\frac{1-e^{-2\pi i\omega}}{\sin(\pi\omega)}\right|^{2n+2} \left|\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+e^{-2^k\pi i\omega}\right)^{2(n-k)}\right| =$$

$$= \frac{1}{2^{n^2+n+2}} \cdot \left|\frac{2\sin(\pi\omega)}{\sin(\pi\omega)}\right|^{2n+2} \left|\prod_{k=1}^{n-1}\left(2\cos\left(2^{k-1}\pi\omega\right)\right)^{2(n-k)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n^2+n+2}} \cdot 2^{2n+2}\left|\prod_{k=1}^{n-1}(2\cdot 1)^{2(n-k)}\right| = \frac{2^{2n+2+(n-1)n}}{2^{n^2+n+2}} = 1$$

В то же время,

$$B_n(\omega) = \left|\frac{\sum\limits_{t=0}^{2n} a_t^{2n+1}\cos^t(\pi\omega)\sin^{2n-t}(\pi\omega)}{(2n+1)!}\right| \leq \left|\frac{\sum\limits_{t=0}^{2n} a_t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|.$$

Применяя (3.9), получим

$$B_n(\omega) \leq \frac{\sum\limits_{t=0}^{2n}\left|(t-1)a_{t-1}^{2n}\right| + \left|(t+1)a_{t+1}^{2n}\right|}{(2n+1)!} \leq$$

$$\leq \frac{\sum\limits_{t=0}^{2n+1} 2t\left|a_t^{2n}\right|}{(2n+1)!} \leq \frac{2\,(2n+1)\sum\limits_{t=0}^{2n+1}\left|a_t^{2n}\right|}{(2n+1)!} \leq 2^{(2n+1)}.$$

Таким образом,

$$\left(\left|\sin^2(\pi\omega)\right| \cdot B(\omega)\right) \leq C\omega^2.$$

Далее, имеем

$$\left|\left|\cos^{2n+2}(\pi\omega)\right| - \left|\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right|^{2n+2}\right| = \left|\cos^{2n+2}(\pi\omega) - 1 + 1 - \left|\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right|^{2n+2}\right| =$$

$$= \left|\left(\cos^{2n+2}(\pi\omega)\right) - \left(\cos^2(\pi\omega)+\sin^2(\pi\omega)\right)^n + 1 - \left|\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right|^{2n+2}\right| \leq$$

$$\leq \left|\cos^{2n+2}(\pi\omega) - \cos^n(\pi\omega) - \sin^2(\pi\omega)\sum_{k=1}^{n}\left(C_n^k\cos^{2(n-k)}(\pi\omega)\sin^{2k-2}(\pi\omega)\right)\right| +$$

$$+\left|1-\left|\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\pi\omega)^{2k+1}}{\pi\omega}\right|^{2n+2}\right|\leq$$

$$\leq\left|-\cos^n(\pi\omega)\cdot\sin^2(\pi\omega)-\sin^2(\pi\omega)\sum_{k=1}^{n}\left(C_n^k\cos^{2(n-k)}(\pi\omega)\sin^{2k-2}(\pi\omega)\right)\right|+$$

$$+\left|1-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}(\pi\omega)^{2k}\right)^{2n+2}\right|\leq$$

$$\leq\sin^2(\pi\omega)\left|\cos^n(\pi\omega)+\sum_{k=1}^{n}\left(C_n^k\cos^{2(n-k)}(\pi\omega)\sin^{2k-2}(\pi\omega)\right)\right|+$$

$$+\left(1-\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}(\pi\omega)^{2k}\right)\right)\sum_{t=0}^{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}(\pi\omega)^{2k}\right)^{t}\leq C\omega^2.$$

Таким образом, $[\hat{\varphi}_n,\hat{\varphi}_n]-|\hat{\varphi}_n|^2=O(\omega^2)$. Наконец,

$$\left|1-|\hat{\varphi}_n|^2\right|=\left|1-\left|\frac{1}{2^{n^2+n+2}}\cdot\left(\frac{1}{\pi i\omega}\right)^{2n+2}\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)^2\prod_{k=1}^{n}\left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right)^2\right|\right|=$$

$$=\left|1-\left|\frac{1}{2^{n^2+n+2}}\cdot\left(\frac{1-e^{-2\pi i\omega}}{\pi\omega}\right)^{2n+2}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+e^{-2^k\pi i\omega}\right)^{2(n-k)}\right|\right|.$$

Используя (3.13) и (3.14), окончательно получим

$$\left|1-|\hat{\varphi}_n|^2\right|=$$

$$=\left|1-\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n^2+n+2}}\left(\frac{2\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right)^{2n+2}e^{-(2n+2)\pi i\omega}\prod_{k=1}^{n-1}\left(2\cos\left(2^{k-1}\pi\omega\right)e^{-2^{k-1}\pi i\omega}\right)^{2(n-k)}\right|\right|.$$

Так как $\left|e^{ix}\right|=1$, то

$$\left|1-|\hat{\varphi}_n|^2\right|=$$

$$=\left|1-\frac{1}{2^{n^2+n+2}}\cdot\left|\left(\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right)^{2n+2}2^{2n+2}\cdot 2^{n(n-1)}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos^{(n-k)}\left(2^{k-1}\pi\omega\right)\right)\right|\right|=$$

$$=1-\left(\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right)^{2n+2}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos^{(n-k)}\left(2^{k-1}\pi\omega\right)\right)^2.$$

Так как $\prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos^{(n-k)}\left(2^{k-1}\pi\omega\right)\right)^2\to 1$ при $\omega\to 0$, то $\left|1-|\hat{\varphi}_n|^2\right|=O(\omega^2)$. Следовательно, β_m доставляет аппроксимацию порядка $\min(1,2)=1$. $\square$

Заключение

Основные результаты диссертации:

1 Доказано, что система сжатий и сдвигов двоичных базисных сплайнов образует базис в пространстве непрерывных функций. Доказательство изложено в разделе 1.3 главы 1.

2 Доказано, что совокупность производных системы сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна образует базис Рисса в пространстве L_2. Границы этого базиса Рисса не зависят от выбранного двоичного базисного сплайна. Доказательство изложено в разделе 2.2 главы 2.

3 Установлено, что двоичный базисный сплайн удовлетворяет масштабирующему уравнению, и, значит, порождает кратномасштабный анализ, который не является ортогональным. Доказательство изложено вразделе 1.2 главы 1. В разделе 2.4 главы 2 найден порядок приближения функций из пространства Соболева в метрике $L_2(\mathbb{R})$ подпространствами, образующими КМА.

Изложенные результаты носят теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях в теории сплайнов. Из перспективных направлений для дальнейшего исследования можно выделить следующие:

1) Восстановление гладких функций по неполным и приближенным данным.

2) Приближенное решение дифференциальных уравнений метода коллокации;

3) Двоичные базисные сплайны в задачах subdivision surface;

4) Двоичные базисные сплайны в задачах построения жестких фреймов.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Лукомскому Сергею Федоровичу за постановку проблемы, постоянную поддержку, внимание к работе, участие в обсуждении полученных результатов. Также автор выражает огромную благодарность профессору Терехину Павлу Александровичу за плодотворное сотрудничество, новые идеи и доброжелательное отношение. Автор благодарит сотрудников механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского за помощь в процессе обучения.

Список литературы

1. Алберг, Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш ; Перевод с англ. Ю. Н. Субботина ; Под ред. С. Б. Стечкина ; С доб. С. Б. Стечкина и Ю. Н. Субботина. — Москва : Мир, 1972. — 318 с.

2. Аубакиров, Т. У. О новом классе систем функций типа Фабера – Шаудера / Т. У. Аубакиров, Н. А. Бокаев // Математические заметки. — 1974. — Т. 82, № 5. — С. 643–651. — DOI: 10.1134/S0001434607110016

3. Бочкарев, С. В. О рядах по системе Шаудера / С. В. Бочкарев // Математические заметки. — 1968. — Т. 4, № 4. — С. 453–460. — DOI: 10.1007/2FBF01093716

4. Горячев, А. П. О коэффициентах Фурье по системе Фабера – Шаудера / А. П. Горячев // Математические заметки. — 1974. — Т. 15, № 2. — С. 341–352. — DOI: 10.1007/2FBF02102406

5. Де Бор, К. Практическое руководство по сплайнам / К. Де Бор ; Пер. с англ. В. К. Галицкого, С. А. Шестакова. — Москва : Радио и Связь, 1985. — 304 с.

6. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И Добеши. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 464 с.

7. Кашин, Б. С. Ортогональные ряды / Б. С. Кашин, А. А. Саакян. — Москва : АЦФ, 1999. — 550 с.

8. Котельников, В. А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи / Инж. В. А. Котельников. — Москва : Ред. упр. связи РККА, 1933 (Центр. тип. им. К. Ворошилова). — 19 с. — (Материалы к 1 Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. По Радиосекции / Всес. энергетич. ком-т).

9. Качмаж, С. Теория ортогональных рядов / С. Качмаж, Г. Штейнгауз. — Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. — 508 с.

10. Лукомский, С. Ф. О двоичных базисных сплайнах 2-й степени / С. Ф. Лукомский, М. Д. Мушко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2018. — Т. 18, вып. 2. — С. 172–182. — DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182

11. Малла, С. Вэйвлеты в обработке сигналов : Пер. с англ. / С. Малла. — Москва : Мир, 2005. — 671 с.

12. Мартенс, Р. В. О полной минимальной системе функций / Р. В. Мартенс // Математика. Механика : сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. — Вып. 14. — С. 50–53. — EDN: TXMPHX.

13. Мартенс, Р. В. О системе сжатий и сдвигов функции, связанной с системой Фабера – Шаудера / Р. В. Мартенс // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXIII». — Воронеж : Воронежский государственный университет, 2012. — С. 118–119.

14. Мартенс, Р. В. Об одной полной системе сжатии и сдвигов / Р. В. Мартенс // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. — 2012. — Т. 45. — С. 139–141.

15. Мартенс, Р. В. О кусочно-линейной аппроксимации в интегральной метрике / Р. В. Мартенс // Всероссийский конкурс научно-иследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук : сборник работ победителей. — Ульяновск : ИЦ УлГУ, 2012. — С. 24–26.

16. Матвеев, В. А. О рядах по системе Шаудера / В. А. Матвеев // Математические заметки. — 1967. — Т. 2, № 3. — С. 267–278. — DOI: 10.1007/2FBF01094054

17. Новиков, И. Я. Теория всплесков / И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 616 с.

18. Новиков, И. Я. Основы теории всплесков / И. Я. Новиков, С. Б. Стечкин // Успехи математических наук. — 1998. — Т. 53, вып. 6 (324). — С. 53–128. — DOI: 10.4213/rm89

19. Сабурова, Т. Н. Суперпозиции функций и их ряды по системе Фабера – Шаудера / Т. Н. Сабурова // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1972. — Т. 6, № 2. — С. 297–300. — DOI: 10.1070/2FIM1972v006n02ABEH001879

20. Терехин, П. А. Аффинные базисы Рисса и дуальная функция / П. А. Терехин // Математический сборник. — 2016. — Т. 207, вып. 9. — С. 111–143. — DOI: 10.1070/SM8221

21. Терехин, П. А. Мультисдвиг в гильбертовом пространстве / П. А. Терехин // Функциональный анализ и его приложения. — 2005. — Т. 39, вып. 1. — С. 69–81. — DOI: 10.4213/faa32

22. Уиттекер, Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа : в 2 ч. Ч. 1. Основные операции анализа : Пер. с англ. / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон ; Под ред. Ф. В. Широкова. — 2-е изд. — Москва : Физматгиз, 1962. — 343 с.

23. Ульянов, П. Л. О некоторых свойствах рядов по системе Шаудера / П. Л. Ульянов // Математические заметки. — 1970. — Т. 7, № 4. — С. 431–442. — DOI: 10.1007/2FBF01151699

24. Чуи, К. Введение в вейвлеты / К. Чуи. — Москва : Мир, 2001. — 412 с. — DOI: 10.2307/2153134

25. Шайдуков, К. М. О базисах в пространстве непрерывных функций, построенных из дуг парабол / К. М. Шайдуков // Ученые записки Казанского университета. — 1965. — Т. 125, № 2. — С. 133–142.

26. Ahlberg, J. The theory of splines and their application / J. Ahlberg, E. Nilson, J. Walsh. — N. Y. : Academic Press, 1967. — 284 p

27. Battle, G. A block spin construction of ondelettes. Part 1: Lemarié functions / G. Battle // Communications in Mathematical Physics. — 1987. — Vol. 110. — P. 601–615. — DOI: 10.1007/BF01205550

28. Borel, E. Sur l'interpolation / E. Borel // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1897. — Vol. 124. — P. 673–676

29. Ciesielski, Z. On Haar functions and on the Shauder basis of the space $C[0,1]$ / Z. Ciesielski // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1959. — Vol. 7. — P. 227–232.

30. Chui, C. K. On compactly supported spline wavelets and duality principle / C. K. Chui, J. Z. Wang // Transactions of the American Mathematical Society. — 1992. — Vol. 330, № 2. — P. 903–915. — DOI: 10.1090/S0002-9947-1992-1076613-3

31. Chui, C. K. An Introduction to Wavelets / C. K. Chui. — San Diego : Academic Press, 1992. — 266 p. ISBN: 0-12-174584-8

32. Curry, H. B. On spline distributions and their limits: the Pólya distributions / H. B. Curry, I. J. Schoenberg // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1947. — Vol. 53

33. Daubechies, I. Ten Lectures on Wavelets / I. Daubechies. — Philadelphia,PA : SIAM Press, 1992. — 357 p. ISBN: 0-89871-274-2

34. De Boor, C. A Practical Guide to Spline / C. De Boor. — American Mathematical Society, 1978.

35. De Boor, C. On the construction of multivariate (pre)wavelets / C. De Boor, R. A. DeVore, A. Ron // Constructive Approximation. — 1993. — Vol. 9, iss. 2. — P. 123–166. — DOI: 10.1007/BF01198001

36. De Boor, C. Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$ / C. De Boor, R. A. DeVore, A. Ron // Transactions of the American Mathematical Society. — 1994. — Vol. 341, iss. 2. — P. 787–806. — DOI: 10.1090/S0002-9947-1994-1195508-X

37. Faber, G. Uber die ortogonalenfunctionen des Herrn Haar / G. Faber // Jahresber. Deutsch Math. — 1910. — Vol. 19. P. 104–112.

38. Jenkins, W. A. Osculatory interpolation: New derivation and formulae / W. A. Jenkins // Record of the American Institute of Actuaries. — 1926. — Vol. 15. — P. 87.

39. Jia, R.-Q. Multiresolution and wavelets / R.-Q. Jia, Z. Shen // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. — 1994. — Vol. 37, iss. 2. — P. 271–300. — DOI: 10.1017/S0013091500006076

40. Jia, R.-Q. Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets II: Powers of two / R.-Q. Jia, C. A. Micchelli // Curves and Surfaces / eds.: P.-J. Laurent, A. Le Méhauté, L. L. Schumaker. — Academic Press, 1991. — P. 209–246. — DOI: 10.1016/B978-0-12-438660-0.50036-4

41. Granados, B. Walsh wavelets / B. Granados // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. — 1992. — Vol. 13. — P. 225–236.

42. Greville, T. N. E. The general theory of osculatory interpolation / T. N. E. Greville // Transactions of the Actuarial Society of America. — 1944. — Vol. 45. — P. 202–265.

43. Haar, A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme / A. Haar // Mathematische Annalen. — 1910. — Vol. 69. — P. 331–371. — DOI: 10.1007/BF01456326

44. Lemarié-Rieusset, P.-G. Ondelettes et bases hilbertiennes / P.-G. Lemarié-Rieusset, Y. Meyer // Revista Matemática Iberoamericana. — 1987. — Vol. 2, iss. 1. — P. 1–18. — DOI: 10.4171/RMI/22

45. Mallat, S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation / S. Mallat // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 1989. — Vol. 11, № 7. — P. 674–693. — DOI: 10.1109/34.192463

46. Meyer, Y. Ondelettes et opérateurs : in 3 vols. Vol. 1. Ondelettes / Y. Meyer. — Paris : Herman, 1990. — 215 p.

47. Schoenberg, I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A. On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae / I. J. Schoenberg // Quarterly of Applied Mathematics. — 1946. — Vol. 4. P. 45–99. — DOI: 10.1090/qam/15914

48. Schoenberg, I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B. On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae / I. J. Schoenberg // Quarterly of Applied Mathematics. — 1946. — Vol. 4. P. 112–141. — DOI: 10.1090/qam/16705

49. Schoenberg, I. J. On spline functions / I. J. Schoenberg // Inequalities I / ed. O. Shisha. — New York : Academic Press, 1967. — P. 255–291.

50. Schauder, J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen / J. Schauder // Mathematische Zeitschrift. — 1927. — Vol. 26. — P. 47–65. — DOI: 10.1007/BF01475440

51. Shannon, C. E. Communication in the presence of noise / C. E. Shannon // Proceedings of the IRE. — 1949. — Vol. 37, iss. 1. — P. 10–21. — DOI: 10.1109/JRPROC.1949.232969

52. Strömberg, J.-O. A modified Franklin system and higher-order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces / J.-O. Strömberg // Fundamental Papers in Wavelet Theory. — Princeton: Princeton University Press, 2006. — P. 197–215. — DOI: 10.1515/9781400827268.197

53. Stenger, F. Numerical Metods Based on Sinc and Analytic Functions / F. Stenger. — New York : Springer-Verlag, 1993. — 565 p. — (Springer Series in Computational Mathematics, vol. 20). — DOI: 10.1007/978-1-4612-2706-9

54. Whittaker, E. T. XVIII. — On the functions which are represented by the expansions of the interpolation-theory / E. T. Whittaker // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. — 1915. — Vol. 35. — P. 181–194. — DOI: 10.1017/S0370164600017806

55. Whittaker, E. T. A Course Of Modern Analysis / E. T. Whittaker, G. N. Watson. Cambridge : Cambridge University Press, 1996. — 608 p.

56. Mathematics in Image Processing / ed. H. Zhao. — Providence : American Mathematical Society; Institute for Advanced Study, 2013. — 245 p. — (IAS/Park City Mathematics Series, vol. 19). DOI: 10.1090/pcms/019

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

57. Лукомский, С. Ф. Хаосы Радемахера в задачах построения сплайновых аффинных систем / С. Ф. Лукомский, П. А. Терехин, С. А. Чумаченко // Математические заметки. — 2018. — Т 103, вып. 6. — С. 863–874. — DOI: 10.4213/mzm11654

58. Чумаченко, С. А. Гладкие аппроксимации в C[0,1] / С. А. Чумаченко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2020. — Т. 20, вып. 3. — С. 326–342. — DOI: 10.18500/1816-9791-2020-20-3-326-342

59. Чумаченко, С. А. Двоичные базисные сплайны в кратномасштабном анализе / С. А. Чумаченко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2021. — Т. 21, вып. 4. — С. 458–471. — DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-4-458-471

Материалы конференций и другие публикации

60. Чумаченко, С. А. Обобщенная функция Мартенса – Терехина / С.А. Чумаченко // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й международной Саратовской зимней школы, Саратов, 27 января – 03 2016 года / Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Математический институт имени В. А. Стеклова РАН. — Саратов : Издательство «Научная книга», 2016. — С. 320–322.

61. Чумаченко, С. А. Об одном из аналогов системы Фабера – Шаудера / С. А. Чумаченко // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. — 2016. — Т. 53. — С. 163–164.

62. Чумаченко, С. А. Двоичные масштабирующие сплайн функции / С. А. Чумаченко // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. — 2017. — Т. 54. — С. 403.

63. Чумаченко, С. А. Двоичные масштабирующие сплайн функции / С. А. Чумаченко // XXV Международная конференция «Математика. Экономика. Образование» X Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения» Молодежная школа-конференция по гармоническому анализу. Материалы. — Ростов н/Д : Изд-во Фонд науки и образования, 2018. — С. 16–18.

64. Чумаченко С. А. Двоичные масштабирующие сплайн-функции / С. А. Чумаченко // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня рождения академика П. Л. Ульянова, Саратов, 29 января – 02 февраля 2018 года. — Саратов : Издательство «Научная книга», 2018. — С. 342–343.

65. Чумаченко, С. А. О полноте двоичных базисных сплайнов в пространстве L_p / С. А. Чумаченко // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы, Саратов, 28 января – 01 февраля 2020 года / Редколлегия: А. П. Хромов (гл. редактор), Б. С. Кашин (зам. гл. редактора), Ю. С. Крусс (отв. секретарь) [и др.]. — Саратов : Издательство «Научная книга», 2020. — С. 453–455.

66. Чумаченко, С. А. Гладкие аппроксимации в $C[0,1]$ / С. А. Чумаченко // Современные методы теории функций и смежные проблемы : Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 28 января – 02 февраля 2021 года. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021. — С. 296–298.

67. Чумаченко, С. А. Двоичные базисные сплайны в пространстве кусочно-многочленных функций / С.А. Чумаченко // Математика. Механика : сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2021. — Вып. 23. — С. 70–73.

68. Чумаченко, С. А. Аффинные системы, порожденные сплайнами / С. А. Чумаченко // Математика и математическое моделирование : Всероссийская научная конференция (с международным участием), Самара, 10–12 ноября 2021 года. — Самара : Самара, 2021. — С. 90–91.

69. Чумаченко, С. А. Двоичные базисные сплайны / С. А. Чумаченко // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 21-й международной Саратовской зимней школы, Саратов, 31 января – 04 февраля 2022 года / Редколлегия: А. П. Хромов (глав. редактор) [и др.]. Вып. 21. — Саратов: Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 2022. — С. 331–333.

70. Чумаченко, С. А. Двоичные базисные сплайны и основная задача интерполяции / С. А. Чумаченко // Современные методы теории функций и смежные проблемы : Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 28 января – 01 февраля 2023 года. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023. — С. 364–366.