Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи

СПЕРАНСКИЙ Константин Сергеевич

ФРЕЙМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ЯДРОМ СЕГЕ

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Терехин П.А.

Саратов – 2023

Оглавление

Обозначения

- $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел
- $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел
- $\mathbb{R}$ - множество действительных чисел
- $\mathbb{C}$ - множество комплексных чисел
- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ - единичный диск
- $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ - единичная окружность
- H - (абстрактное) гильбертово пространство
- $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ - пространство Харди на единичном диске $\mathbb{D}$
- $A^2 = A^2(\mathbb{D})$ - пространство Бергмана на единичном диске $\mathbb{D}$
- $A(\mathbb{D})$ - диск-алгебра
- F - (абстрактное) банахово пространство
- $G = F^*$ - сопряженное пространство
- X - пространство последовательностей, в частности, модельное пространство фрейма
- $Y = X^*$ - сопряженное к модельному пространству
- ℓ_2 - пространство последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$
- ℓ_1 - пространство последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$
- Ω - основное (непустое) множество

- Λ - счетное множество точек, $\Lambda \subset \Omega$
- δ_ω - оценочный функционал в точке $\omega \in \Omega$, т.е. $\delta_\omega(f) = f(\omega)$ для $f : \Omega \to \mathbb{C}$
- $K = K(z, \lambda) = K_\lambda(z)$ - воспроизводящее ядро, в частности, ядро Сеге
- $\widehat{K}$ - нормированное воспроизводящее ядро
- $\mathcal{K}$ - подпространство, сгенерированное дискретизированными ядрами
- $b(z)$ - множитель Бляшке
- $B(z)$ - произведение Бляшке
- p_n - алгебраический полином степени $< n$
- $\omega_k^j,\ j = 0, 1, \ldots, k-1$ - корни k-й степени из единицы
- R - оператор анализа
- S - оператор синтеза
- T - фреймовый оператор
- A, B - нижние и верхние границы фрейма
- δ_{ij} - символ Кронекера
- $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ - стандартный базис, $\varepsilon_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^\infty,\ i = 1, 2, \ldots$
- $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ - последовательность элементов банахова пространства
- $\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_n\}$ или $[\varphi_n]$ - замыкание линейной оболочки последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$

Введение

Актуальность темы исследования

Настоящая диссертация посвящена изучению представляющих свойств систем функций, порожденных дискретизированным ядром Сеге в пространстве Харди на единичном диске комплексной плоскости. В частности, дается положительный ответ на открытый вопрос о существовании системы представления на основе дискретизированного ядра Сеге в пространстве Харди, поставленный в работе Фрикейна, Хоя и Лефевра [39].

Задача представления функций рядами по элементам заданной последовательности $\varphi_n,\ n = 1, 2, \ldots$, заключается в нахождении для произвольной функции f из некоторого класса функций F последовательности коэффициентов $c_n,\ n = 1, 2, \ldots$, такой, что $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$. Вопросы представления функций рядами составляют обширную область теории функций и имеют многочисленные приложения.

Наряду с классическими методами решения задачи представления активно развиваются современные методы представления на основе использования орторекурсивных разложений (Т.П.Лукашенко [4], В.В. Галатенко, Т.П.Лукашенко и В.А.Садовничий [2]), всплесков (И.Я.Новиков, В.Ю.Протасов и М.А.Скопина [6], Добеши [31]), жадных алгоритмов (В.Н.Темляков [72], Джонс [54]), а также теории фреймов, предоставляющей общие и даже универсальные подходы к конструкции представления.

Касательно теории фреймов следует упомянуть классическую работу Даффина и Шеффера [33], в которой введено понятие фрейма гильбертова пространства, и теорию Файхтингера и Грохенига [37], [38], особенно работу Грохенига [43], в которой концепция фрейма впервые распространена на ситуацию банахова пространства. Понятия атомарного разложения и банахова фрейма по Грохенигу легли в основу других близких определений, например, фрейма Шаудера (Касазза, Хан и Ларсон [24]) и X_d-фрейма (Касазза, Кристенсен и Стоева [25]) и т.п.

В диссертации мы используем определение банахова фрейма предложенное в работе П.А.Терехина [9] (см. также [12]). Важным отличием этого определения от других определений банахова фрейма является автоматическое выполнение теоремы о представлении при соблюдении соответствующих фреймовых неравенств.

Существует значительное количество исследований, связывающих теорию воспроизводящих ядер и фреймов. Необходимо упомянуть монографию Партингтона [63], в которой в том числе рассматривается взаимосвязь между всплесковым преобразованием и воспроизводящим ядром подходящего гильбертова пространства. В статье Джанга и Джанга [80] исследуются воспроизводящие ядра и фреймы в ситуации банахова пространства с внутренним произведением. В статье Фюра, Грохенига, Хаими, Клотца и Ромеро [40] изучаются плотностные характеристики сэмплирующих и интерполяционных последовательностей, построенных на основе воспроизводящих ядер. Работа Сонга и Йоргенсена [55] посвящена решению обратной задачи, заключающейся в построении ядра по заданному фрейму. В работах Гао, Харриса и Ганна [41], Ракотомамоньи и Кану [65] изучаются прикладные вопросы взаимосвязи фреймов и воспроизводящих ядер.

Вопрос о существовании фрейма на основе воспроизводящих ядер существенным образом зависит от рассматриваемого пространства. В настоящее время наиболее полно исследованы представляющие свойства воспроизводящих ядер пространств Харди и Бергмана, что отражено в монографиях [34] и [35]. Как в пространстве Бергмана, так и в пространстве Харди не существует последовательности точек, для которых система воспроизводящих ядер образует базис Рисса. Можно показать, что это связано с несовместностью условий интерполяционной и сэмплинг последовательностей. С другой стороны, в пространстве Бергмана существуют фреймы Даффина-Шеффера указанного вида, в то время как в пространстве Харди их не существует (см. [35]).

Вопрос о существовании систем представления на основе дискретизации воспроизводящего ядра пространства Харди на единичном диске комплексной плоскости был сформулирован в качестве открытой проблемы в статье [39].

Исходя из вышесказанного, несомненна актуальность данной работы, сочетающей в себе аспекты теории функциональных гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром и теории фреймов, а также отвечающей на открытый вопрос о существовании системы представления в пространстве Харди на основе воспроизводящего ядра Сеге. Касательно постановки этого открытого вопроса следует заметить, что ранее была известна формула восстановления, полученная Тотиком, которая не обеспечивает существования представляющего функцию ряда. Между этим положительным результатом Тотика и отрицательными результатами о несуществовании базисов Шаудера и фреймов Даффина-Шеффера среди рассматриваемых систем функций наблюдается определенный пробел, составляющий содержание открытого вопроса.

Цели и задачи диссертационной работы

Основной целью диссертационной работы является изучение представляющих свойств систем функций, порожденных дискретизированным ядром Сеге в пространстве Харди. Для достижения этой цели в диссертации рассматриваются следующие основные задачи:

1. Построить систему представления (фрейм) в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ на основе последовательности дискретизированного ядра Сеге, тем самым ответив на открытый вопрос, поставленный в работе Фрикейна, Хоя и Лефевра [39].
2. Найти такие условия на последовательность точек (достаточно общего вида) единичного диска комплексной плоскости $\mathbb{D}$, при которых последовательность дискретизированных в этих точках значений ядра Сеге образует систему представления (фрейм) в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$.

3. Построить фрейм пространства Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$ определенного на полидиске $\mathbb{D}^d$. Получить оценку роста числа обусловленности этого фрейма в зависимости от размерности d полидиска $\mathbb{D}^d$.

4. Найти такие условия на последовательность точек единичного диска комплексной плоскости $\mathbb{D}$ при которых имеет место сходимость порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ для соответствующих подпространств, порожденных ядром Сеге дискретизированным в точках этой последовательности.

Научная новизна

Все выносимые на защиту диссертации результаты являются новыми. В работе была построена система представления (фрейм) в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ на основе дискретизированных ядер Сеге и тем самым дан ответ на открытый вопрос, поставленный Фрикейном, Хоем и Лефевром. Также была исследована возможность построения многомерного аналога данной системы представления в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$. Помимо построения системы представления в диссертации обсуждается алгоритм разложения функций по этой системе представления.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. В диссертации получен ответ на открытый вопрос о существовании системы представления (фрейма) на основе дискретизированных ядер Сеге в пространстве Харди H^2 поставленный в работе [39], что говорит о теоретической значимости исследования. В этой работе мы объединяем проблематику теории фреймовых разложений, пространств с воспроизводящим ядром и жадных алгоритмов.

Теория фреймовых разложений является активной областью исследований и имеет широкое применение в теории обработки сигналов [23], [27], теории операторов [44], гармоническом анализе [45], квантовой механике [15], [36], [42], акустике [21], теории сэмплирования [16], нелинейной аппроксимации [32], методах граничных и конечных элементов [47]. Причиной подобного широкого распространения фреймов является то, что они обеспечивают гибкость в декомпозиции векторных пространств будучи переполненными системами представления.

Пространства с воспроизводящим ядром широко применяются в теории машинного обучения [52], [68], [70], [75]. Более того, существуют результаты позволяющие производить теоретический анализ нейронных сетей методами теории воспроизводящих ядер [22], [28], [53]. Воспроизводящие ядра также используются для решения интегральных и дифференциальных уравнений [46], [78], задач теории оптимального управления [19], [79], [81].

Жадные алгоритмы также являются активной областью исследований (см., например, монографию [73]) и имеют множество практических применений для решения задач планирования [20], обратных задач [57], [71], задач обработки сигналов [62] и оптимизационных проблем [74].

Результаты диссертации могут быть использованы как при решении теоретических задах, возникающих в теории функциональных гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром, так и в прикладных вопросах обработки сигналов, машинного обучения и при решении оптимизационных задач.

Методы исследования

В работе используются методы и понятия теории функций, функционального анализа, комплексного анализа, теории приближений и теории линейных операторов в банаховых пространствах. Также используются методы и понятия теории жадных алгоритмов и теории фреймовых разложений.

Положения, выносимые на защиту

В работе получены следующие основные результаты, которые выносятся на защиту:

1. Построен фрейм (система представления) пространства $H^2(\mathbb{D})$ на основе последовательности дискретизированных ядер Сеге и тем самым получен ответ на открытый вопрос, поставленный Фрикейном, Хоем и Лефевром. Результат основан на применении теории банаховых фреймов.
2. Определены условия на последовательность точек (достаточно общего вида) единичного диска комплексной плоскости $\mathbb{D}$, при которых она будет являться последовательностью точек дискретизации ядер Сеге, образующих систему представления (фрейм) в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$.
3. Построен фрейм пространства $H^2(\mathbb{D}^d)$ на основе последовательности дискретизированных ядер Сеге. Показано, что рост числа обусловленности этого фрейма с ростом размерности d полидиска $\mathbb{D}^d$ является степенным.
4. Получены условия на последовательность точек единичного диска, при которых имеет место сходимость порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма для соответствующих подпространств, порожденных дискретизированным ядром Сеге в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$. При этом был уточнен один результат Тотика о приближении функций из пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$ посредством ядер Сеге за счет выбора последовательности точек дискретизации специального вида.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты диссертационной работы представлены в виде математических утверждений (теоремы, леммы, предложения и следствия из них) вместе со строгими математическими доказательствами. Используемые в доказательствах вспомогательные утверждения и методы взяты из известных книг или ведущих математических журналов. Все выносимые на защиту результаты опубликованы в рецензируемых научных изданиях.

Результаты работы докладывались на следующих научных конференциях:

1. XXI Международная Саратовская зимняя школа “Современные проблемы теории функций и их приложения” (2022 г.)
2. XX Международная Саратовская зимняя школа “Современные проблемы теории функций и их приложения” (2020 г.)
3. XIX Международная Саратовская зимняя школа “Современные проблемы теории функций и их приложения” (2018 г.)
4. XIII Международная Казанская летняя школа-конференция “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы” (2017 г.)
5. Семинар “Ортогональные ряды” под руководством профессора С.Ф. Лукомского (2016, 2017, 2018 г.)
6. Ежегодная апрельская конференция сотрудников и аспирантов механико-математического факультета Саратовского университета (2017, 2018 г.)

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации содержатся в работах [82] - [90]. Работы [82], [83], [84], [85] опубликованы в изданиях, входящих в «Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» ВАК РФ. При этом работы [83], [85] (или их переводы) включены в базу данных Web of Science Core Collection, а работы [82], [83], [85] (или их переводы) включены в базу данных Scopus.

Личный вклад автора

В совместной статье [82] автору диссертации принадлежит построение системы представления в пространстве Харди на основе ядра Сеге. В совместной статье [83] автору диссертации принадлежит доказательство фреймовости последовательности дискретизированных значений ядра Сеге при выполнении так называемого условия согласования. Материалы конференций [86], [88], [89], [90], подготовленные в соавторстве, опубликованы по результатам статей [82] и [83].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Общий объем диссертации составляет 107 страниц. Библиография включает 90 наименований.

Основное содержание работы

В первой главе мы построим систему представления (фрейм) в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ на основе последовательности дискретизированных ядер Сеге, тем самым ответив на открытый вопрос, поставленный в работе Фрикейна, Хоя и Лефевра [39]:

Вопрос 1. Существует ли последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ в открытом единичном диске $\mathbb{D}$ такая, что последовательность дискретизированных ядер Сеге $\{K(\cdot, z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является системой представления в пространстве $H^2(\mathbb{D})$?

В диссертации рассматривается пространство Харди $H^2(\mathbb{D})$ как классический пример функционального гильбертового пространства с воспроизводящим ядром. В параграфе 1.1 мы приводим определение гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром и их основные свойства.

Определение 1.1.2. Пусть Ω - основное непустое множество. Гильбертово пространство H называется функциональным пространством или гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром (над Ω), если каждый элемент $f \in H$ является функцией $f : \Omega \to \mathbb{C}$ и при этом для всех $x \in \Omega$ линейный функционал $\delta_x(f) = f(x)$ на H, который называется оценочным функционалом, корректно определен и непрерывен, т.е. найдется $C_x < \infty$ такое, что для всех $f \in H$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq C_x \|f\|.$$

По теореме Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве для каждого $x \in \Omega$ существует и при том единственный элемент $K_x \in H$ такой, что

$$\delta_x(f) = \langle f, K_x \rangle, \quad f \in H.$$

Определение 1.1.3. Пусть H является гильбертовым функциональным пространством над основным множеством Ω. Функция $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ называется воспроизводящим ядром гильбертового пространства H если

$$K(\,\cdot\,, x) \in H, \quad \forall x \in \Omega,$$
$$f(x) = \langle f, K(\,\cdot\,, x) \rangle, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall f \in H.$$

Воспроизводящее ядро $K(x, y)$ пространства H является функцией двух переменных $x, y \in \Omega$. Если вторая из этих переменных фиксирована, то ядро становится функцией одной переменной принадлежащей пространству H и значение произвольной функции $f \in H$ в точке x можно получить как скалярное произведение функции f и ядра $K(\,\cdot\,, x)$, дискретизированного в точке x.

В параграфе 1.2 мы напоминаем определение и основные свойства пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$, определенного на единичном диске комплексной плоскости $\mathbb{D}$.

Определение 1.2.1. Пространством Харди H^2 называется пространство, состоящее из всех аналитических функций $f(z)$ в единичном диске $|z| < 1$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Пространство H^2 является пространством с воспроизводящим ядром.

Определение 1.2.4. Воспроизводящее ядро K пространства H^2 называется ядром Сеге и имеет вид

$$K(z,\zeta) = K_\zeta(z) = \frac{1}{1-\bar{\zeta}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\zeta^n} z^n, \quad z, \zeta \in \mathbb{D}.$$

Важным объектом при изучении пространства H^2 является произведение Бляшке $B(z) \in H^2$, которое строится по заданным точкам $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющим так называемому условию Бляшке

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|z_n|) < \infty. \tag{1.15}$$

Эта ненулевая функция имеет нули в точках $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ и при этом оказывается, что во всех прочих точках произведение Бляшке не равно нулю [30].

Возможность построения системы представления существенным образом зависит от свойств функционального пространства, поэтому в пункте 1.3 мы приводим пример еще одного пространства с воспроизводящим ядром, а именно пространство Бергмана $A^2 = A^2(\mathbb{D})$ на единичном диске комплексной плоскости $\mathbb{D}$.

Определение 1.3.1. Пространство Бергмана A^2 состоит из всех аналитических функций $f(z)$ в единичном диске $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{A^2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Определение 1.3.3. Воспроизводящее ядро пространства A^2 называется ядром Бергмана и имеет вид

$$K(z,\zeta) = K_\zeta(z) = \frac{1}{(1-\bar{\zeta}z)^2}, \quad \forall z, \zeta \in \mathbb{D}.$$

Обсудив конкретные примеры пространств с воспроизводящим ядром, далее в параграфе 1.4 мы переходим к рассмотрению систем представления в функциональных пространствах.

Определение 1.4.1. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов банахова пространства F называется системой представления, если для любого вектора пространства $f \in F$ существует числовая последовательность $\{c_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что ряд

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n \tag{1.19}$$

сходится к f по норме пространства F, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k \right\|_F = 0.$$

Определение 1.4.2. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ *полна* в пространстве F, если замыкание её линейной оболочки совпадает со всем F

$$\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} = F.$$

Определение 1.4.3 Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ *минимальна* в пространстве F, если каждый элемент последовательности не принадлежит замыканию линейной оболочки остальных элементов

$$\varphi_j \notin \overline{\mathrm{span}}\{\varphi_n\}_{n\neq j}, \quad \forall j \in 1, 2....$$

Примерами систем представления являются базис Рисса и фрейм Даффина-Шеффера.

Определение 1.4.5 Базисом Рисса гильбертова пространства H называется последовательность вида $\{Ue_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ортонормированный базис в H и $U : H \to H$ - ограниченный биективный оператор.

Определение 1.4.6 Последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ удовлетворяющая неравенствам

$$A\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n \right\|^2 \leq B\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

для всех $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ называется последовательностью Рисса.

Определение 1.4.7 Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ ненулевых элементов гильбертова пространства H называется фреймом Даффина-Шеффера, если существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любой функции $f \in H$ выполняются неравенства

$$A\|f\|_H^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \leq B\|f\|_H^2.$$

Определение 1.4.8 Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ называется последовательностью Бесселя в гильбертовом пространстве H если существует положительная постоянная B такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|_H^2.$$

В параграфе 1.5 отмечается, что вопрос о существовании систем представления на основе дискретизированных воспроизводящих ядер в пространстве Бергмана решается положительно. А именно, в пространстве A^2 существует фрейм Даффина-Шеффера на основе дискретизированных ядер Бергмана [35].

В параграфе 1.6 мы приводим известный результат [35] о несуществовании базиса и фрейма Даффина-Шеффера на основе нормированных дискретизированных ядер Сеге $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве Харди H^2

$$\widehat{K}_{z_n} = (1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{2}} K_{z_n}.$$

Также в параграфе 1.6 приведены следующие известные утверждения.

Предложение 1.6.1 Система $\{K_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ полна тогда и только тогда, когда точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ не удовлетворяют условию Бляшке, то есть выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) = \infty.$$

Предложение 1.6.2 Система $\{K_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ минимальна тогда и только тогда, когда точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условию Бляшке, то есть выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

Поскольку условия полноты и минимальности противоречат друг другу, то последовательность $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ не может быть одновременно полной и минимальной системой, в частности, базисом пространства H^2.

Также не существует точек дискретизации $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ таких, что последовательность ядер Сеге $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ образует фрейм Даффина-Шеффера в пространстве Харди. Чтобы показать это, мы приводим широко известную теорему Карлесона.

Теорема 1.6.3 Пусть точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условию Бляшке. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Рисса;

(ii) $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является равномерно минимальной последовательностью;

(iii) существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\prod_{m \neq n} \left| \frac{z_m - z_n}{1 - \bar{z}_n z_m} \right| \geq \delta > 0, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{1.30}$$

Условие (1.30) называется *условием Карлесона* и, в свою очередь, эквивалентно тому, что точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют *интерполяционную последовательность*: для всех ограниченных последовательностей $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ существует ограниченная функция $f \in H^{\infty}(\mathbb{D})$, для которой $f(z_n) = w_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Условие Ньюмана заключается в существовании положительной постоянной B такой, что для всех $f \in H^2$ выполнено неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|^2)|f(z_n)|^2 \leq B\|f\|_2^2. \tag{1.31}$$

Это условие означает, что система $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Бесселя. Поскольку каждая последовательность Рисса является последовательностью Бесселя, то на основании теоремы 1.6.3 из условий Бляшке и Карлесона (1.30) вытекает условие Ньюмана (1.31). Кроме того, имеет место

Предложение 1.6.4 Каждое множество точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющее условию Ньюмана (1.31), является конечным объединением интерполяционных последовательностей.

Последнее предложение является отражением следующего общего факта:

Каждая последовательность Бесселя $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\inf_{n=1,2,\dots} \|h_n\| > 0$, *является конечным объединением последовательностей Рисса.*

Это утверждение было высказано в качестве гипотезы Файхтингером и эквивалентно гипотезе Кадисона–Зингера, недавно доказанной Маркусом, Шпильманом и Шриваставой [61].

Видим, что из выполнения условия Ньюмана (1.31) следует выполнение условия Бляшке и поэтому очевидно следующее предложение.

Предложение 1.6.5 Всякая последовательность Бесселя $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ заведомо не полна в H^2, в частности, не существует точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ образует фрейм Даффина–Шеффера.

Замечание 1.6.6 Отрицание условия Бляшке гарантирует переполненность последовательности $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$: для каждого $n_0 \in \mathbb{N}$ подпоследовательность $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=n_0}^{\infty}$ также будет полной в H^2. Следовательно, для любой функции $f \in H^2$ найдется $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такое, что справедливо представление (полагаем $n_0 = 1$)

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k - 1} c_n \widehat{K}_{z_n}.$$

Однако, такое представление еще не означает, что $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является системой представления в H^2, поскольку номера n_k, вообще говоря, зависят от f. Кроме того, теорема Тотика [76] утверждает, что условие (1.28) необходимо и достаточно для решения задачи восстановления, а именно, в предположении (1.28) существует семейство алгебраических полиномов $P_{n,k}$, где $n = 1, 2, \dots$ и $k = 1, \dots, n$, таких, что для любой функции $f \in H^2$ справедливо представление

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k) P_{n,k}.$$

Ясно, что такое аппроксимационное представление также, вообще говоря, не гарантирует представления в виде ряда. Конкретный пример не удовлетворяющей условию Бляшке последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ не является системой представления, указан в работе [39].

Поскольку построить фрейм Даффина-Шеффера на основе дискретизированных ядер Сеге в пространстве Харди H^2 невозможно, то в параграфе 1.7 мы переходим к рассмотрению систем представления более общего вида. В 1989 г. Грохениг обобщил понятие фрейма на банаховы пространства и ввел понятие атомарного разложения и банахова фрейма [43]. Альтернативное определение банахова фрейма, которое мы и будем рассматривать в дальнейшем, было предложено Терехиным в работе [9].

Определение 1.7.1. Банахово пространство X, элементами которого являются числовые последовательности $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется модельным если система канонических ортов $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\varepsilon_n = \{\delta_{mn}\}_{m=1}^{\infty}$, где δ_{mn} символ Кронекера) образует базис в пространстве X.

Пусть дано сепарабельное банахово пространство F с сопряженным $G = F^*$ и пусть $\langle f, g\rangle$ - значение непрерывного линейного функционала $g \in G$ на векторе $f \in F$.

Определение 1.7.2. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ называется фреймом в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X с сопряженным пространством $Y = X^*$ если существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любого непрерывного линейного функционала $g \in G = F^*$ последовательность его коэффициентов Фурье удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_G \leq \|\{\langle\varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \leq B\|g\|_G.$$

Число $\mathrm{cond}(\Phi) = \frac{B}{A} \geq 1$ называется числом обусловленности фрейма $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение банахова фрейма совпадает с определением фрейма Даффина-Шеффера в случае, когда $F = G = H$ гильбертово пространство и $X = Y = \ell_2$. Важным отличием банахова фрейма от атомарного разложения и банахова фрейма по Грохенигу является то, что автоматически обеспечивается справедливость следующей теоремы, доказанной П.А.Терехиным в работе [9].

Теорема 1.7.3. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F\setminus\{0\}$ является банаховым фреймом в пространстве F относительно модельного пространства X тогда и только тогда, когда

(i) для всех $x \in X$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n$ сходится в F,

(ii) для всех $f \in F$ существует элемент $x \in X$ такой, что $f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n$.

В параграфе 1.8 мы даем положительный конструктивный ответ на открытый вопрос 1 о существовании систем представления на основе дискретизированных ядер Сеге в пространстве Харди H^2 построив банахов фрейм этого пространства.

По-прежнему будем обозначать значения ядра Сеге для пространства H^2

$$K_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda_n}z}, \qquad \lambda_n, z \in \mathbb{D}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Построим последовательность точек $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ на единичном диске $\mathbb{D}$. Разделим $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ на группы так, что каждая группа состоит из корней из единицы k-ой степени расположенных на окружности радиуса $r_k = 1 - \frac{1}{k}$

$$\lambda_n = \lambda_{k,j} = \left(1 - \tfrac{1}{k}\right) e^{\frac{2\pi i j}{k}}, \qquad j = 0, \ldots, k-1, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.44}$$

Основным результатом главы 1 является следующий результат.

Теорема 1.8.1. Пусть точки $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ определены равенством (1.44). Тогда последовательность $\{K_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является системой представления в пространстве H^2.

Замечание 1.8.5. Фактически, доказано, что система нормированных ядер Сеге $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$, где точки дискретизации $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют вид (1.44), является фреймом в пространстве H^2 относительно модельного пространства $X = \ell^1(\ell^2_k)$

$$X = \ell^1(\ell^2_k) = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell^2_k\right)_{\ell^1},$$

где ℓ^2_k - конечномерное унитарное пространство.

Замечание 1.8.6. Несуществование фрейма Даффина-Шеффера в пространстве H^2 на основе дискретизированных ядер Сеге, которое мы обсуждали в пункте 1.6, означает, что в качестве модельного пространства фрейма $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ нельзя взять пространство ℓ^2. Кроме того, как показано в [39], таким модельным пространством не может быть пространство ℓ^1. Наш результат утверждает, что при выборе промежуточного пространства $\ell^1(\ell^2_k)$ фрейм вида $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ существует для подходящим образом подобранной последовательности точек $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Основной результат главы 1 (теорема 1.8.1), который дает ответ на открытый вопрос поставленный в работе [39] приводит нас к следующей более общей задаче. А именно, каковы должны быть последовательности натуральных чисел $n_k \nearrow \infty$ и радиусов $r_k \nearrow 1$ для того, чтобы последовательность точек

$$\lambda_n = \lambda_{k,j} = r_k e^{\frac{2\pi i j}{n_k}}, \qquad j = 0, \dots, n_k - 1, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{2.1}$$

где

$$n_1 < \dots < n_k < \dots, \qquad 0 < r_1 < \dots < r_k < \dots, \qquad \lim_{k\to\infty} r_k = 1,$$

имеющая более общий вид чем (1.44), являлась последовательностью точек дискретизации ядер Сеге образующих фрейм (систему представления) в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$.

В главе 2 мы даем ответ на этот вопрос. Нам понадобится определение границ Рисса.

Определение 2.1.1. Постоянные $A, B > 0$ называются нижней и верхней границей Рисса для системы функций $\{\varphi_j\}_{j=0}^{n-1} \subset H$ если для всех коэффициентов $\{c_j\}_{j=0}^{n-1}$ выполняются неравенства

$$A \sum_{j=0}^{n-1} |c_j|^2 \le \left\| \sum_{j=0}^{n-1} c_j \varphi_j \right\|^2 \le B \sum_{j=0}^{n-1} |c_j|^2.$$

В следующей лемме мы определим границы Рисса для блоков дискретизированных ядер Сеге $\{\widehat{K}_j\}_{j=0}^{n-1}$ при произвольных фиксированных параметрах $n \in \mathbb{N}$ и $r \in (0,1)$, задающих положение точек дискретизации $\lambda_j = \lambda_{r,n,j} = r e^{\frac{2\pi i j}{n}}$, $j = 0, \dots, n-1$.

Лемма 2.1.3. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $r \in (0,1)$ выполняются неравенства

$$\frac{r^{2n} n (1 - r^2)}{1 - r^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} |\xi_j|^2 \le \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \widehat{K}_j \right\|_2^2 \le \frac{n(1 - r^2)}{1 - r^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} |\xi_j|^2.$$

Согласно лемме 2.1.3 нижняя A и верхняя B границы Рисса для системы $\{e_j\}_{j=0}^{n-1}$ могут быть записаны в виде

$$A = \frac{r^{2n} n (1 - r^2)}{1 - r^{2n}}, \quad B = \frac{n(1 - r^2)}{1 - r^{2n}}, \qquad n \in \mathbb{N},\ r \in (0,1).$$

Потребуем, что “номера” n_k и “радиусы” r_k удовлетворяют следующему *условию согласования*: существуют постоянные $0 < a \le b < \infty$ такие, что

$$\frac{a}{n_k} \le 1 - r_k \le \frac{b}{n_k}, \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{2.9}$$

Теорема 2.2.3. Пусть точки $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют вид (2.1) и удовлетворяют условию согласования (2.9). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) для коэффициентов $\xi_n = \xi_{k,j}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{K}_{\lambda_n}$ выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k - 1} |\xi_{k,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

(ii) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{K}_{\lambda_n}$ абсолютно сходится по блокам в H^2, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n_k - 1} \xi_{k,j} \widehat{K}_{\lambda_{k,j}} \right\|_2 < \infty.$$

При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{K}_{\lambda_n}$ безусловно сходится в H^2.

Теорема 2.2.3 побуждает к выбору в качестве ассоциированного с системой $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ модельного пространства X, являющегося ℓ^1 - суммой конечномерных ℓ^2 - пространств:

$$X = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell^2_{n_k} \right)_{\ell^1},$$

т.е. пространство X состоит из всех числовых последовательностей $x = \{x_n\} = \{x_{k,j}\}$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k - 1} |x_{k,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Следующая теорема, являющаяся центральной в главе 2, показывает, что такой выбор модельного пространства вполне оправдан.

Теорема 2.3.1. Пусть точки дискретизации $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ имеют вид (2.1) и удовлетворяют условию согласования (2.9). Тогда последовательность нормированных дискретизированных ядер Сеге $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ образуют фрейм в H^2 относительно модельного пространства

$$X = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell^2_{n_k}\right)_{\ell^1}.$$

Из теоремы 2.3.1 вытекает следствие о представлении функций из пространства H^2.

Следствие 2.3.2. Пусть точки $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют вид (2.8) и удовлетворяют условию согласования (2.9). Тогда для любой функции $f \in H^2$ существует последовательность коэффициентов $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\xi_{k,j}\}_{(k,j)\in I}$ такая, что справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (1 - |\lambda_n|^2)^{\frac{1}{2}} K_{\lambda_n}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k - 1} |\xi_{k,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Замечание 2.3.3. Следует отметить, что коэффициенты данного представления $\xi_n = \xi_n(f)$, $n = 1, 2, \ldots$, нелинейно зависят от $f \in H^2$. В частности, для каждой точки $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$K_z = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(z)(1 - |\lambda_n|^2)^{\frac{1}{2}} K_{\lambda_n},$$

откуда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\lambda_n|^2)^{\frac{1}{2}} f(\lambda_n) \overline{\xi_n(z)}$$

— формула восстановления в виде ряда, дающая при фиксированном z вычислительные преимущества по сравнению с аппроксимационной формулой восстановления Тотика.

В главе 3 мы переходим к более общему вопросу о построении системы представления для пространства Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$, определенного на полидиске

$$\mathbb{D}^d = \{(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_1| < 1, \ldots |z_d| < 1\}.$$

Мы построим фрейм пространства $H^2(\mathbb{D}^d)$ и покажем, что число обусловленности этого фрейма имеет степенной рост в зависимости от размерности d полидиска $\mathbb{D}^d$.

В третьей главе мы будем использовать следующие обозначения

$$\mathbb{Z}_+ = \{k \in \mathbb{Z} : k \geq 0\},$$

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\},$$

и для произвольного $d \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_+^d =&\{(k_1, \dots, k_d) : k_\nu = \mathbb{Z}_+,\ 1 \le \nu \le d\},\\ \mathbb{Z}_n^d =&\{(k_1, \dots, k_d) : k_\nu = \mathbb{Z}_n,\ 1 \le \nu \le d\},\\ |k| =&k_1 + \dots + k_d, \quad \langle k, m\rangle = \sum_{\nu=1}^{d} k_\nu m_\nu.\end{aligned}$$

Основные определения для пространства $H^2(\mathbb{D}^d)$ во многом аналогичны соответствующим определениям для пространства $H^2(\mathbb{D})$.

Определение 3.1.1. Пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D}^d)$ состоит из всех аналитических функций $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^d} c_k z^k,\ z^k = z_1^{k_1} \dots z_d^{k_d}$ на полидиске $\mathbb{D}^d$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D}^d)} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0,2\pi]^d} \left| f(re^{it_1}, \dots, re^{it_d}) \right|^2 dt_1 \dots dt_d \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Подобно пространству $H^2(\mathbb{D})$, пространство $H^2(\mathbb{D}^d)$ является пространством с воспроизводящим ядром.

Определение 3.1.2. Воспроизводящее ядро K_λ пространства $H^2(\mathbb{D}^d)$ называется (d-мерным) ядром Сеге и имеет вид

$$K_\lambda(z) = K(z, \lambda) = \prod_{\nu=1}^{d} \frac{1}{1 - \overline{\lambda_\nu} z_\nu}, \quad z, \lambda \in \mathbb{D}^d.$$

Нормированное ядро Сеге в пространстве $H^2(\mathbb{D}^d)$ можно записать в виде

$$\widehat{K}_\lambda(z) = \frac{K(\lambda, z)}{\|K(\lambda, z)\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}} = \prod_{\nu=1}^{d} \frac{(1 - |\lambda_\nu|^2)^{1/2}}{1 - \overline{\lambda_\nu} z_\nu}.$$

Пусть последовательность радиусов имеет вид

$$0 < r_1 < \ldots < r_k < \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} r_k = 1 \tag{3.1}$$

и $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots$. Выберем точки $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}^d$ вида

$$\lambda_n = \lambda_k^j = \left(r_k e^{\frac{2\pi i j_1}{n_k}}, \dots, r_k e^{\frac{2\pi i j_d}{n_k}} \right), \quad j = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}_{n_k}^d,\ k = 1, 2, \dots. \tag{3.2}$$

Под условием согласования для n_k и r_k будем понимать выполнение неравенств

$$0 < a \leq n_k(1 - r_k) \leq b < \infty \tag{3.3}$$

с некоторыми постоянными $0 < a \leq b < \infty$.

Теорема 3.1.3. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}^d$ - последовательность точек вида (3.2), удовлетворяющая условиям согласования (3.3). Тогда последовательность нормированных ядер Сеге $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$, дискретизированных в этих точках, образует фрейм пространства Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$ относительно пространства коэффициентов X, состоящего из всех числовых последовательностей $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\xi_{kj}\} \subset \mathbb{C}$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}_{n_k}^d} |\xi_{kj}|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Следствие 3.1.4. Для каждой функции $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$ существует последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ такая, что справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{K}_{\lambda_n}.$$

При переходе от пространства $H^2(\mathbb{D})$ к пространству $H^2(\mathbb{D}^d)$ возникает новый вопрос о росте числа обусловленности фрейма в $H^2(\mathbb{D}^d)$ с ростом размерности d полидиска $\mathbb{D}^d$. Ответ на данный вопрос дается в следующем утверждении.

Следствие 3.1.5. Пусть Φ^d - фрейм пространства $H^2(\mathbb{D}^d)$ на основе дискретизированных ядер Сеге. Тогда для числа обусловленности этого фрейма $\mathrm{cond}(\Phi^d)$ справедливо неравенство

$$\mathrm{cond}(\Phi^d) \leq \left(\frac{2b/a}{1 - e^{-2a}} \right)^{d/2}.$$

В главе 4 мы даем ответ на следующий вопрос: при каких условиях на последовательность точек единичного диска имеет место сходимость порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма для соответствующих подпространств, порожденных дискретизированным ядром Сеге пространства Харди H^2. Также мы уточняем один результат Тотика о приближении функций из пространства Харди H^2 посредством ядер Сеге за счет выбора последовательности точек дискретизации специального вида.

Теорема 1.8.1 является теоремой существования коэффициентов представляющего ряда (1.19). Построенный нами фрейм на основе дискретизированных ядер Сеге это безусловная система представления пространства Харди, поэтому возникает вопрос об алгоритме нахождения коэффициентов разложения, который бы сохранил порядок элементов в естественной нумерации.

Для решения задачи нахождения коэффициентов системы представления широко применяются слабые жадные алгоритмы. Однако, в общем случае, слабый жадный алгоритм не дает ряда по естественно упорядоченной системе, ряд не является безусловно сходящимся. Выходом из сложившейся ситуации является порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм предложенный А.В.Сильниченко в работе [8] для пространств с равномерно непрерывной квазинормой.

Сначала напомним определение слабого жадного алгоритма для дискретизированных нормированных воспроизводящих ядер.

Определение 4.1.1. Пусть H - гильбертово пространство с воспроизводящим ядром и словарь элементов состоит из нормализованных воспроизводящих ядер $\widehat{K}_z = K_z/\|K_z\|$ для некоторого подмножества $z \in \Lambda \subset \Omega$ основного множества Ω. Пусть $f_0 = f$ и для каждого $n \geq 0$ если $f_n \neq 0$ найдем $z_n \in \Lambda$ такое, что

$$\frac{|f_n(z_n)|}{\|K_{z_n}\|} \geq \gamma \sup_{z\in\Lambda} \frac{f_n(z)}{\|K_z\|}, \qquad 0 < \gamma < 1. \qquad (\textbf{??})$$

Далее примем

$$f_n = f_n(z_n)K_{z_n}/\|K_{z_n}\|^2 + f_{n+1} = h_n + f_{n+1}$$

и продолжим эту итеративную процедуру. Данная итеративная процедура называется жадным алгоритмом.

Известно, что для слабого жадного алгоритма справедлив следующий общий результат Джонса [54] и Маллата и Джанга [60] (см. также [63], глава 5, параграф 2).

Теорема 4.1.2. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ сходится к ортогональной проекции f на замыкание линейной оболочки $\overline{\text{span}}\{\widehat{K}_z\}_{z\in\Lambda}$. Поэтому если линейная оболочка функций составляющих словарь плотна в пространстве H, то $\|f_{n+1}\| \to 0$ и

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} h_n.$$

Согласно этой теореме, слабый жадный алгоритм по каждой полной системе функций всегда сходится.

Переходя к порядкосохраняющему слабому жадному алгоритму напомним, что квазинормированное пространство X - это такое векторное пространство с квазинормой, в котором для каждых $x, y \in X$ выполняется неравенство

$$\|x + y\| \le C(\|x\| + \|y\|),$$

где $C > 0$ - некоторая постоянная.

Определение 4.2.1. Векторное пространство X называется пространством с равномерно непрерывной квазинормой если для любых $\varepsilon > 0,\ R > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для произвольных $x \in X$ и $y \in X$ с нормами $\|x\| < R,\ \|y\| < \delta$ выполняется неравенство

$$\|x + y\| \le \|x\| + \varepsilon.$$

Далее, напомним определение порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма, введенное А.В.Сильниченко.

Определение 4.2.2. Пусть $\{L_k\}$ - последовательность линейных подпространств X и $\{\alpha_k\}$ - последовательность неотрицательных чисел. Порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм для произвольного вектора $f \in X$ определяется следующей итеративной процедурой. Пусть исходная аппроксимация равна нулю $s_0(f) = 0$, остаток $r_0(f) = f$ и оптимальный аппроксимирующий элемент $k_0(f) = 0$. Если $s_n(f), r_n(f)$ и $k_n(f)$ определены, то мы можем выбрать $k_{n+1} = k_{n+1}(f) > k_n(f)$ и $\varphi_{k_{n+1}} \in L_{k_{n+1}}$ такие, что выполняется соотношение

$$\|r_n(f) - \varphi_{k_{n+1}}\| \le \inf_{\varphi\in L_k, k>k_n} \|r_n(f) - \varphi\| + \alpha_n,$$

где α_n может быть неформально названо релаксацией. Далее положим $s_{n+1}(f) = s_n(f) + \varphi_{k_{n+1}}$ и $r_{n+1}(f) = f - s_{n+1}(f)$.

Если для всех $f \in X$ слагаемое $r_n(f)$ сходится к нулю при $n \to \infty$ или эквивалентно мы имеем представление $f = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{k_n}$ то говорят что алгоритм сходится (т.е. $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k_\nu}$). Наш основной результат основан на следующей теореме А.В.Сильниченко о сходимости порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов.

Теорема 4.2.3. Предположим, что X - пространство с равномерно непрерывной квазинормой. Порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм по системе $\{L_k\}$ сходится для любой последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$ тогда и только тогда, когда существует $\sigma < 1$ такое, что для любых $f \in X$ и N существуют $n > N$ и $\varphi \in L_n$ такие, что

$$\|f - \varphi\| \le \sigma \|f\|$$

Результаты А.В.Сильниченко справедливы для произвольных квази-банаховых пространств, но в нашей работе мы рассматриваем только гильбертово пространство Харди H^2.

В качестве подпространств L_k, $k = 1, 2, \dots$ мы выберем пространства порожденные ядрами Сеге $K_{\lambda_{k,j}}$, $j = 0, \dots, n_k - 1$, которые дискретизированы в точках $\lambda_{k,j} \in \mathbb{D}$:

$$L_k := \left[K_{\lambda_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1} = \operatorname{span}\left\{K_{\lambda_{k,j}}\right\}_{j=0}^{n_k-1}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Выберем точки дискретизации ядер Сеге также как и прежде

$$\lambda_{k,j} = r_k e^{\frac{2\pi i j}{n_k}}, \qquad j = 0, 1, \dots, n_k - 1, \tag{4.2}$$

где мы предполагаем, что

$$r_k \nearrow 1, \qquad n_k \nearrow \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{4.3}$$

Основной результат главы 4 может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 4.3.1. Пусть последовательность подпространств $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ порождена ядрами Сеге дискретизированными в точках удовлетворяющих (4.2) и (4.3). Тогда порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм сходится в пространстве H^2 тогда и только тогда, когда r_k и n_k удовлетворяют предельному соотношению

$$\limsup_{k\to\infty} n_k(1-r_k) > 0.$$

Для формулировки следующей леммы, используемой при доказательстве теоремы 4.3.1, нам потребуется определение расстояния между функцией и линейным подпространством.

Определение 4.3.4. В качестве расстояния между функцией $f \in H^2$ и линейным подпространством $L_k \subset H^2$ определенным как (замкнутая) линейная оболочка $\left[K_{\lambda_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1}$ из дискретизированных ядер Сеге $\left\{K_{\lambda_{k,j}}\right\}_{j=0}^{n_k-1}$ мы принимаем

$$\operatorname{dist}(f,\ L_k) = \operatorname{dist}\left(f,\ \left[K_{\lambda_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1}\right) = \min_{a_0,\dots a_{n_k-1}} \left\| f - \sum_{j=0}^{n_k-1} a_j K_{\lambda_{k,j}} \right\|.$$

Лемма 4.3.5. Пусть $0 < r < 1$. Расстояние от произвольного полинома $p_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ степени $< n$ до линейного пространства порожденного системой из ядер Сеге $\{K_j\}_{j=0}^{n-1}$ дискретизированных в точках

$$\lambda_j = \lambda_{r,n,j} = re^{\frac{2\pi i j}{n}}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

удовлетворяет следующему неравенству

$$\operatorname{dist}\left(p_n, [K_j]_{j=0}^{n-1}\right) \le r^n \|p_n\|_{H^2}. \tag{4.8}$$

Следующее замечание уточняет один из результатов Тотика.

Замечание 4.3.6. В работе [76] Тотик показал, что для произвольного выбора точек дискретизации ядер Сеге $\{\lambda_{k,j}\}_{j=0}^{n_k-1} \subset \mathbb{D}$ выполняется равенство

$$\operatorname{dist}(1,\ L_k) = \operatorname{dist}\left(1,\ \left[K_{\lambda_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1}\right) = \prod_{j=0}^{n_k-1} |\lambda_{k,j}|. \tag{4.15}$$

Однако, в лемме 4.3.5 мы выбрали точки дискретизации специального вида (4.2), что позволило нам получить получить оценку на расстояние от каждого полинома

p_{n_k}, $\deg p_{n_k} < n_k$ до L_k, а не только для случая $p_{n_k} = 1$. Равенство (4.15) показывает, что неравенство (4.8) точное.

Замечание 4.3.7. Мы можем выбрать последовательности $\{r_k\}, \{n_k\}$ так, чтобы величины наилучших приближений функции $f \in H^2$ по подпространствам $\{L_k\}$ стремились к нулю, т.е.:

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(f, \left[K_{\lambda_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1}) = 0.$$

Действительно, как следует из леммы 4.3.5, последнее соотношение имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k\to\infty} n_k(1 - r_k) = \infty.$$

Благодарности

Выражаю искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Терехину Павлу Александровичу.

Глава 1

Построение фрейма в пространстве Харди

Постановка и решение задач представления и восстановления зависит от пространства которому принадлежит искомая функция. Мы рассматриваем пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ на открытом диске $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости. Это гильбертово пространство с воспроизводящим ядром K которое называется ядром Сеге и является функцией двух аргументов - точек единичного диска. Фиксируя один из аргументов $K(\,\cdot\,, z_n) \in H^2$ мы дискретизируем ядро в точках $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$. В данной главе мы построим систему представления в пространстве H^2 на основе последовательности дискретизированных ядер Сеге, тем самым ответив на открытый вопрос, поставленный в работе Фрикейна, Хоя и Лефевра [39].

Вопрос 1. *Существует ли последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ в открытом единичном диске $\mathbb{D}$ такая, что последовательность дискретизированных ядер Сеге $\{K(\,\cdot\,, z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является системой представления в пространстве $H^2(\mathbb{D})$?*

Далее в пункте 1.1 мы приводим определение абстрактных гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром и обсуждаем их основные свойства. В пунктах 1.2 и 1.3 мы более подробно останавливаемся на классических пространствах с воспроизводящим ядром, а именно пространстве Харди и пространстве Бергмана. В пункте 1.4 мы напоминаем определение системы представления и приводим основные типы систем представления, необходимые в контексте данной работы. В пункте 1.5 мы обсуждаем существование фрейма Даффина-Шеффера на основе дискретизированных воспроизводящих ядер в пространстве Бергмана. Невозможность построения фрейма Даффина-Шеффера на основе дискретизированных воспроизводящих ядер в пространстве Харди и необходимость перехода к системам представления более общего вида обсуждается в пункте 1.6. Пункт 1.7 содержит информацию о банаховых фреймах, предложенных Терехиным в работе [9]. Банаховы фреймы являются системами представления более общего вида, чем фреймы Даффина-Шеффера и ложатся в основу доказательства теоремы 1.8.1 в пункте 1.8, дающей ответ на открытый вопрос 1.

1.1 Абстрактные гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром

Определение 1.1.1 (Оценочный функционал [14]). *Пусть H - комплексное гильбертово пространство состоящее из функций $f : \Omega \to \mathbb{C}$, определенных на непустом основном множестве Ω. Для фиксированного элемента $\omega \in \Omega$ отображение $\delta_\omega : f \to f(\omega)$ из H в $\mathbb{C}$ называется оценочным функционалом в точке ω.*

Оценочный функционал δ_ω, примененный к функции $f \in H$, порождает ее значение в заданной точке области определения $\omega \in \Omega$. Оценочный функционал всегда линеен, поскольку для $\forall f, g \in H$ и $\forall a, b \in \mathbb{C}$ выполняется $\delta_\omega(af+bg) = (af+bg)(\omega) = af(\omega)+bg(\omega) = a\delta_\omega(f) + b\delta_\omega(g)$. Однако, не в каждом пространстве H всякий оценочный функционал является непрерывным (ограниченным). По определению, оценочный функционал непрерывен если существует число $C > 0$ такое, что для всех функций $f \in H$ выполняется неравенство

$$|\delta_\omega(f)| = |f(\omega)| \leq C\|f\|_H. \tag{1.1}$$

Гильбертовы пространства в которых каждый оценочный функционал ограничен обладают воспроизводящим ядром и называются функциональными гильбертовыми пространствами [14].

Определение 1.1.2 (Гильбертово пространство с воспроизводящим ядром [64]). *Пусть Ω - основное непустое множество. Гильбертово пространство H называется функциональным пространством или гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром (над Ω), если каждый элемент $f \in H$ является функцией $f : \Omega \to \mathbb{C}$ и при этом для всех $x \in \Omega$ линейный функционал $\delta_x(f) = f(x)$ на H, который называется оценочным функционалом, корректно определен и непрерывен, т.е. найдется $C_x < \infty$ такое, что для всех $f \in H$ выполняется неравенство*

$$|f(x)| \leq C_x \|f\|.$$

По теореме Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве для каждого $x \in \Omega$ существует и при том единственный элемент $K_x \in H$ такой, что

$$\delta_x(f) = \langle f, K_x \rangle, \quad f \in H.$$

Определение 1.1.3 (Воспроизводящее ядро [18]). *Пусть H является гильбертовым функциональным пространством над основным множеством Ω. Функция $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ называется воспроизводящим ядром гильбертового пространства H если*

$$K(\,\cdot\,, x) \in H, \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$f(x) = \langle f, K(\,\cdot\,, x) \rangle, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall f \in H. \tag{1.3}$$

Свойство (1.3) называется воспроизводящим свойством. В частности, для любых $x, y \in \Omega$ выполняется равенство, являющееся ключевым при применении воспроизводящих ядер в прикладных задачах и которое можно рассматривать как аналог скалярного произведения при нелинейном отображении

$$K(x, y) = \langle K(\,\cdot\,, x), K(\,\cdot\,, y) \rangle. \tag{1.4}$$

Воспроизводящее ядро $K(x, y)$ пространства H является функцией двух переменных $x, y \in \Omega$. Если вторая из этих переменных фиксирована, то ядро становится функцией одной переменной принадлежащей пространству H. Согласно (1.3), значение произвольной функции $f \in H$ в точке x можно получить как скалярное произведение функции f и ядра $K(\,\cdot\,, x)$, дискретизированного в точке x.

Связь между непрерывностью оценочного функционала гильбертова пространства и наличием в нем воспроизводящего ядра может быть формализована в виде следующего замечания [5].

Замечание 1.1.4. *Гильбертово пространство H комплекснозначных функций над Ω имеет воспроизводящее ядро тогда и только тогда, когда оценочный функционал δ_ω непрерывен для всех $\omega \in \Omega$.*

Важным следствием из замечания 1.1.4 является то, что в гильбертовых пространствах с воспроизводящим ядром сходимость по норме H обеспечивает поточечную сходимость. Действительно, используя линейность и ограниченность оценочного функционала δ_ω для всех $f \in H$ и $\omega \in \Omega$ имеем

$$|f_n(\omega) - f(\omega)| = |\delta_\omega(f_n) - \delta_\omega(f)| = |\delta_\omega(f_n - f)| \leq \|\delta_\omega\| \|f_n - f\|_H \to 0.$$

Существуют гильбертовы пространства которые не обладают ограниченным оценочным функционалом и, соответственно, не являются пространствами с воспроизводящим ядром. Например, пространство $L^2[0,1]$ не является пространством с воспроизводящим ядром.

Воспроизводящее ядро является положительно определенной функцией. Используя (1.4), легко показать, что для всех $x_1, ..., x_n \in \Omega$ и $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ справедливо

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} K(x_j, x_k) = \left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j K(\cdot, x_j), \sum_{k=1}^{n} c_k K(\cdot, x_k) \right\rangle \geq 0.$$

Из положительной определенности следуют важные свойства воспроизводящих ядер

$$\begin{aligned} K(x,x) &\geq 0, \\ K(x,y) &= \overline{K(y,x)}, \\ |K(x,y)|^2 &\leq K(x,x)K(y,y), \end{aligned}$$

поэтому можно говорить о том, что воспроизводящие ядра в некотором смысле являются аналогом метрики.

Еще одним важным свойством (см. [35]) воспроизводящих ядер является то, что их можно представить через произвольный ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x)\overline{e_n(y)}, \quad x, y \in \Omega. \tag{1.5}$$

1.2 Пространство Харди

Классическим примером пространства с воспроизводящим ядром является пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ определенное на единичном диске комплексной плоскости $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.

Определение 1.2.1 (Пространство Харди H^2 [34])**.** *Пространством Харди H^2 называется пространство состоящее из всех аналитических функций $f(z)$ на единичном диске $|z| < 1$ для которых конечна норма*

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{1.6}$$

Согласно широко известной теореме Харди [48] величина

$$M_2(r,f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \right\}^{1/2}$$

строго возрастает по r при $0 < r < 1$ (см. также [34]). Поэтому H^2-норма (1.6) допускает эквивалентное определение

$$\|f\|_{H^2} = \lim_{r \to 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Пространство Харди H^2 может быть рассмотрено как замкнутое подпространство комплексного пространства $L^2(\mathbb{T})$ на единичной окружности $\mathbb{T} = \{|z| = 1\}$. Эта взаимосвязь может быть сформулирована в виде следующего замечания, доказательство которого приведено в [56].

Замечание 1.2.2. *Пусть $f \in H^2$. Тогда радиальный предел*

$$\tilde{f}(e^{it}) = \lim_{r \to 1} f(re^{it})$$

существует для почти всех $t \in \mathbb{T}$, а также $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{T})$ и

$$\|\tilde{f}\|_{L^2} = \|f\|_{H^2}. \tag{1.7}$$

Пространство H^2 состоит из аналитических функций, поэтому каждая функция может быть представлена в виде степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $\forall f \in H^2$. Норму функции в пространстве H^2 можно выразить через коэффициенты разложения в ряд Тейлора. Действительно, для $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^2}^2 &= \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \mathrm{d}t \\ &= \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{int} \right|^2 \mathrm{d}t \\ &= \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} c_n \overline{c_m} r^n r^m \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} \mathrm{d}t \\ &= \sup_{0<r<1} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Из (1.8) очевидно, что пространство H^2 изометрически изоморфно l^2, поэтому скалярное произведение аналитических функций $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ в H^2 можно записать в виде

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \overline{d_n}, \quad f, g \in H^2. \tag{1.9}$$

Учитывая (1.7) мы можем также записать скалярное произведение в виде

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt, \tag{1.10}$$

где $f(e^{it})$ и $g(e^{it})$ - граничные значения функций $f(z)$ и $g(z)$ (см. замечание 1.2.2).

Следующее замечание показывает, что пространство Харди H^2 имеет ограниченный оценочный функционал на всей области определения $\mathbb{D}$ и, соответственно, является пространством с воспроизводящим ядром.

Замечание 1.2.3. *Пусть $z \in \mathbb{D}$, тогда*

$$|f(z)| \leq \|f\|_{H^2} \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

Действительно, применяя интегральную формулу Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{it}-z} ie^{it} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{1-ze^{-it}} \mathrm{d}t. \tag{1.11}$$

Поскольку мы можем вычислить значение интеграла

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-ze^{-it}|^2} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-ze^{-it})(1-\overline{z}e^{-it})} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} z^n \overline{z}^m \int_0^{2\pi} e^{(m-n)it} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi (z\overline{z})^n = \frac{1}{1-|z|^2}, \end{aligned}$$

то используя (1.11), неравенство Коши и далее (1.7) получаем

$$|f(z)| \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 \mathrm{d}t} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-ze^{-it}|^2} \mathrm{d}t} = \|f\|_{H^2} \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

Воспроизводящее ядро K пространства Харди H^2 можно получить разлагая функцию $f \in H^2$ по степенному базису $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} \mathrm{d}t \cdot \zeta^n = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1}{1-\zeta e^{-it}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{K(e^{it}, \zeta)} \mathrm{d}t = \langle f, K_\zeta \rangle, \end{aligned} \tag{1.12}$$

где $e_n(z) = z^n$ и скалярное произведение имеет вид (1.10).

Определение 1.2.4 (Ядро Сеге [14])**.** *Воспроизводящее ядро K пространства H^2 называется ядром Сеге и имеет вид*

$$K(z,\zeta) = K_\zeta(z) = \frac{1}{1-\overline{\zeta} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\zeta^n} z^n, \quad z, \zeta \in \mathbb{D}. \tag{1.13}$$

Ключевым объектом при изучении пространства H^2 является произведение Бляшке $B(z) \in H^2$. Эта ненулевая функция имеет нули в предопределенных точках $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$. При этом оказывается, что во всех прочих точках произведение Бляшке не равно нулю [30].

Определение 1.2.5 (Произведение Бляшке [34]). *Произведением Бляшке* $B(z)$ *называется аналитическая в* $\mathbb{D}$ *функция, обладающая нулями в заранее определенных точках* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$

$$B(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1.14}$$

В выражении (1.14) множитель z^m присутствует для того, чтобы произведение Бляшке могло иметь ноль порядка m в начале координат. Если произведение (1.14) сходится, то произведение Бляшке аналитично на открытом диске $\mathbb{D}$ и ограничено на нем.

Замечание 1.2.6 (Условие Бляшке [34]). *Пусть функция* $f \in H^2$, $f \neq 0$, *имеет нули в точках* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$. *Тогда сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty. \tag{1.15}$$

При этом, произведение Бляшке (1.14) *сходится только тогда, когда последовательность точек* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию Бляшке* (1.15).

Также приведем важную теорему Сеге характеризующую множество точек на которых нетривиальная функция $f \in H^2$ может обращаться в ноль.

Теорема 1.2.7 (Теорема Сеге [63]). *Пусть функция* $f(z) \in H^2$, $f \neq 0$. *Тогда множество нулей* $\{z_n\}$ *функции* f *является счетным множеством и удовлетворяет условию Бляшке*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

1.3 Пространство Бергмана

Еще одним классическим примером пространства с воспроизводящим ядром является пространство Бергмана $A^2 = A^2(\mathbb{D})$ определенное на единичном диске комплексной плоскости $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.

Определение 1.3.1 (Пространство Бергмана A^2 [49]). *Пространство Бергмана A^2 состоит из всех аналитических функций $f(z)$ в единичном диске $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ для которых конечна норма*

$$\|f\|_{A^2} = \left(\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Из определения пространства Бергмана очевидно вложение $H^2 \subset A^2$. Также отметим, что в пространствах H^2 и A^2 полиномы плотны. Скалярное произведение в пространстве A^2 может быть записано в виде

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\, dx\, dy, \quad f, g \in A^2.$$

Подобно пространству H^2, оценочный функционал в пространстве A^2 является ограниченным.

Замечание 1.3.2 (Ограниченность оценочного функционала в A^2 [77]). *Для каждой функции $f \in A^2$ справедливо неравенство*

$$|f(z)| \le \frac{1}{1-|z|^2}\|f\|_{A^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Согласно замечанию 1.3.2 каждый оценочный функционал является ограниченным, поэтому теорема Рисса обеспечивает существование воспроизводящего ядра $K(z,\zeta)$

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}} f(z)\overline{K(z,\zeta)}\, dx\, dy, \quad z, \zeta \in \mathbb{D},\ \forall f \in A^2.$$

Для получения вида воспроизводящего ядра в A^2 воспользуемся тем, что множество функций $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ является полной и ортогональной системой в A^2. Интегрируя по диску $\mathbb{D}$ произведение функций этой системы для всех $n, m = 1, 2, \dots$ получаем

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}} z^n\overline{z^m}\, dx\, dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^n e^{in\theta} r^m e^{-im\theta} r\, dr\, d\theta = \frac{2}{n+m+2}\delta_{nm}, \tag{1.16}$$

где δ_{nm} - функция Кронекера. При $n = m$ из (1.16) следует, что $\|z^n\|_{A^2} = \sqrt{1/(n+1)}$ и система $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированным базисом в A^2

$$e_n(z) = \sqrt{(n+1)}z^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.17}$$

Применяя (1.5) получаем вид воспроизводящего ядра пространства A^2

$$K(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}e_n(z)\overline{e_n(\zeta)}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(z\overline{\zeta})^n=\frac{1}{(1-\overline{\zeta}z)^2}. \tag{1.18}$$

Определение 1.3.3 (Ядро Бергмана [49]). *Воспроизводящее ядро пространства A^2 называется ядром Бергмана и имеет вид*

$$K(z,\zeta)=\frac{1}{(1-\overline{\zeta}z)^2},\quad \forall z,\zeta\in\mathbb{D}.$$

1.4 Системы представления в функциональных пространствах

Определение 1.4.1 (Система представления [10]). *Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов банахова пространства F называется системой представления, если для любого вектора пространства $f\in F$ существует числовая последовательность $\{c_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что ряд*

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(f)\varphi_n \tag{1.19}$$

сходится к f по норме пространства F, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k(f)\varphi_k\right\|_F=0.$$

Напомним несколько важных свойств систем представления.

Определение 1.4.2 (Полнота [29]). *Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset F$* полна *в пространстве F, если замыкание её линейной оболочки совпадает со всем F*

$$\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}=F. \tag{1.20}$$

Другими словами, элементов системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ достаточно, чтобы приблизить произвольный вектор пространства F с помощью линейной комбинации элементов системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для ортонормированных систем необходимым и достаточным условием полноты является равенство Парсеваля.

Определение 1.4.3 (Минимальность [29]). *Последовательность* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ минимальна *в пространстве* F*, если каждый элемент последовательности не принадлежит замыканию линейной оболочки остальных элементов*

$$\varphi_j \notin \overline{\operatorname{span}}\{\varphi_n\}_{n \neq j}, \quad \forall j \in 1, 2.... \tag{1.21}$$

В банаховых пространствах известны различные типы систем представления, такие как ортогональные базисы, базисы Рисса и фреймы.

Определение 1.4.4 (Базис [29]). *Последовательность* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ *называется базисом в банаховом пространстве* F *если для каждого элемента* $f \in F$ *существуют единственные скалярные коэффициенты* $\{c_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n. \tag{1.22}$$

Каждый базис является полной и минимальной системой [50].

Напомним определения базиса Рисса и последовательности Рисса.

Определение 1.4.5 (Базис Рисса [29]). *Базисом Рисса гильбертова пространства* H *называется последовательность вида* $\{Ue_n\}_{n=1}^{\infty}$*, где* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- ортонормированный базис в* H *и* $U : H \to H$ *- ограниченный биективный оператор.*

Определение 1.4.6 (Последовательность Рисса [29]). *Последовательность функций* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ *удовлетворяющая неравенствам*

$$A \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \right\|^2 \leq B \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \tag{1.23}$$

для всех $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ *называется последовательностью Рисса.*

Понятие фрейма было введено в 1952 г. Даффином и Шеффером [33]. Сразу отметим, что фрейм Даффина-Шеффера является системой представления в гильбертовом пространстве. В общем случае, фрейм не является минимальной системой, поэтому коэффициенты разложения могут быть не единственны. Известно, что всякий фрейм Даффина-Шеффера является проекцией базиса Рисса объемлющего гильбертова пространства [3]. Также справедливо утверждение, что фрейм Даффина-Шеффера гильбертова пространства H является семейством вида $\{Ue_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ортонормированный базис в H и $U : H \to H$ - ограниченный сюръективный оператор [29].

Определение 1.4.7 (Фрейм Даффина-Шеффера [33]). *Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ ненулевых элементов гильбертова пространства H называется фреймом Даффина-Шеффера, если существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любой функции $f \in H$ выполняются неравенства*

$$A\|f\|_H^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|_H^2. \tag{1.24}$$

Постоянная A называется нижней границей фрейма, а постоянная B - верхней. Если $A = B$, то фрейм называется жестким фреймом, а если $A = B = 1$, то фреймом Парсеваля. Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом пространства H, то простейшим примером фрейма в H который не является базисом может служить последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, ...\}$ с границами фрейма $A = 1,\ B = 2$. Каждый ортонормированный базис является фреймом Парсеваля, но обратное, вообще говоря, не верно.

Оператор $S : \ell^2 \to H$, заданный равенством

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2,$$

называется оператором синтеза. Оператор $R : H \to \ell^2$, определенный формулой

$$Rf = \{\langle f, \varphi_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}, \quad f \in H,$$

называется оператором анализа. Оператор анализа является сопряженным к оператору синтеза $R = S^*$. Композиция $T : H \to H$ из операторов S и R называется фреймовым оператором

$$Tf = SRf = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad f \in H. \tag{1.25}$$

В завершение этого параграфа приведем определение последовательности Бесселя из которого очевидно, что всякий фрейм Даффина-Шеффера в H является последовательностью Бесселя в H.

Определение 1.4.8 (Последовательность Бесселя в H [17])**.** *Система* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ *называется последовательностью Бесселя в гильбертовом пространстве* H *если существует положительная постоянная* B *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|_H^2. \tag{1.26}$$

1.5 Фрейм Даффина-Шеффера в пространстве Бергмана

Хорошо известно, что вопрос о существовании систем представления на основе дискретизированных воспроизводящих ядер в пространстве Бергмана решается положительно. А именно, в пространстве A^2 существует фрейм Даффина-Шеффера на основе дискретизированных ядер Бергмана. Напомним определение сэмплирующей последовательности в пространстве Бергмана.

Определение 1.5.1 (Сэмплирующая последовательность в A^2 [35])**.** *Последовательность точек* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ *называется сэмплирующей последовательностью в пространстве* A^2 *если существуют положительные постоянные* A *и* B *такие, что*

$$A\|f\|_{A^2}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1-|z_n|^2)^2 |f(z_n)|^2 \leq B\|f\|_{A^2}^2, \quad \forall f \in A^2.$$

Пусть $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ - нормированные ядра Бергмана дискретизированные в точках единичного диска $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$, тогда выполняется равенство

$$\langle f, \widehat{K}_{z_n} \rangle = \frac{\langle f, K_{z_n} \rangle}{\|K_{z_n}\|} = \frac{f(z_n)}{\sqrt{K_{z_n}(z_n)}} = (1-|z_n|^2) f(z_n), \quad \forall f \in A^2,\ n = 1, 2, \ldots. \tag{1.27}$$

Из (1.27) следует, что последовательность $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является фреймом Даффина-Шеффера пространства Бергмана тогда и только тогда, когда последовательность точек дискретизации $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует сэмплирующую последовательность в A^2.

Пример сэмплирующей последовательности в пространстве A^2 и, соответственно, пример фрейма Даффина-Шеффера в A^2 на основе дискретизированных ядер был впервые построен Сейпом в работе [69] (см. также [35]). Отметим, что в [35] приведены и более общие примеры сэмплирующих последовательностей в A^2.

Пример 1.5.2 (Сэмплирующая последовательность в A^2 [69])**.** *Определим решетку в верхней полуплоскости* $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ *относительно параметров* $a > 1$ *и* $b > 0$

$$\Lambda(a,b) = \{a^m(b \cdot n + i) : \ m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть ψ *- отображение из* $\mathbb{D}$ *на* $\mathbb{H}^+$*, заданное равенством*

$$\psi(z) = i \cdot \frac{1+z}{1-z}, \quad \psi^{-1}(\zeta) = \frac{\zeta - i}{\zeta + i},$$

для $z \in \mathbb{D}$ *и* $\zeta \in \mathbb{H}^+$*. Тогда* $\Gamma(a,b) = \psi^{-1}(\Lambda(a,b))$ *является решеткой из различных точек в* $\mathbb{D}$*.* $\Gamma(a,b)$ *является сэмплирующей последовательностью в пространстве* A^2 *тогда и только тогда, когда*

$$\frac{2\pi}{b \log a} > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, фрейм Даффина-Шеффера на основе дискритизированных воспроизводящих ядер в пространстве A^2 существует.

1.6 Системы представления в пространстве Харди

Начнем с необходимого условия для системы представления, а именно, с условия полноты системы. Напомним, что мы рассматриваем систему $\{K_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$, состоящую из ядер Сеге, дискретизированных в точках $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Предложение 1.6.1. *Система* $\{K_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *полна тогда и только тогда, когда точки* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не удовлетворяют условию Бляшке* (1.15)*, то есть выполняется*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|) = \infty. \tag{1.28}$$

Справедливость этого предложения вытекает из того, что при выполнении условия Бляшке (1.15) можно построить ненулевое произведение Бляшке (1.14) с нулями в определенных точках $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Тем не менее, система $\{K_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ не может быть базисом в H^2 ни при каком выборе точек дискретизации $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, поскольку условия полноты и минимальности системы $\{K_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ противоречат друг другу, что непосредственно следует из предложения 1.6.1 и следующего предложения.

Предложение 1.6.2. *Система $\{K_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ минимальна тогда и только тогда, когда точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условию Бляшке* (1.15), *то есть выполняется*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)<\infty.$$

Действительно, это предложение следует из теоремы Сеге (см. пункт 1.2) и из того, что минимальность системы эквивалентна наличию у нее биортогональной системы.

Точно также, не существует точек дискретизации $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ таких, что последовательность ядер Сеге $\{K_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ образует фрейм Даффина-Шеффера в пространстве Харди. Чтобы показать это приведем сначала широко известную теорему Карлесона, а также обсудим условия Карлесона и Ньюмана. Будем рассматривать нормированные ядра Сеге $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ имеющие вид

$$\widehat{K}_{z_n}=(1-|z_n|^2)^{\frac{1}{2}}K_{z_n}, \quad n=1,2,\dots. \tag{1.29}$$

Теорема 1.6.3 (Теорема Карлесона)**.** *Пусть точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условию Бляшке* (1.15). *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Рисса;

(ii) $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является равномерно минимальной последовательностью;

(iii) существует постоянная $\delta>0$ такая, что

$$\prod_{m\neq n}\left|\frac{z_m-z_n}{1-\bar{z}_n z_m}\right| \geq \delta>0, \qquad n=1,2,\dots. \tag{1.30}$$

Условие (1.30) называется *условием Карлесона* и, в свою очередь, эквивалентно тому, что точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют *интерполяционную последовательность*: для всех $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ существует функция $f \in H^{\infty}(\mathbb{D})$, для которой $f(z_n) = w_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Условие Ньюмана заключается в существовании постоянной $B < \infty$ такой, что для всех $f \in H^2$ выполнено неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|^2)|f(z_n)|^2 \le B\|f\|_2^2. \tag{1.31}$$

Это условие означает, что система $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Бесселя (1.26). Поскольку каждая последовательность Рисса является последовательностью Бесселя, то на основании теоремы 1.6.3 из условий Бляшке (1.15) и Карлесона (1.30) вытекает условие Ньюмана (1.31). Кроме того, имеет место

Предложение 1.6.4. *Каждое множество точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющее условию Ньюмана* (1.31)*, является конечным объединением интерполяционных последовательностей.*

Последнее предложение является отражением следующего общего факта:

Каждая последовательность Бесселя $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\inf_{n=1,2,\ldots} \|h_n\| > 0$, является конечным объединением последовательностей Рисса.

Это утверждение было высказано в качестве гипотезы Файхтингером и эквивалентно гипотезе Кадисона–Зингера, доказанной в 2015 году Маркусом, Шпильманом и Шриваставой [61].

Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|) \le \sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|^2)$ для $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$, то из выполнения условия Ньюмана (1.31) следует выполнение условия Бляшке (1.15) и поэтому очевидно следующее предложение.

Предложение 1.6.5. *Всякая последовательность Бесселя $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ заведомо не полна в H^2, в частности, не существует точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ образует фрейм Даффина–Шеффера.*

Таким образом, условие ℓ^2-стабильности (1.24) из определения фрейма Даффина–Шеффера не выполнимо для последовательности $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Неформально говоря, ℓ^2-норма слишком "мала" (и пространство ℓ^2 слишком "велико"), чтобы обеспечить оценку снизу в (1.24) при наличии оценки сверху. Однако, далее будет показано, что при подходящем обобщении понятия фрейма искомый обобщенный фрейм вида $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ может быть построен.

Заметим, что ситуация, при которой свойство полноты системы функций из некоторого класса входит в прямое противоречие с другими естественными свойствами такими, как минимальность или бесселевость, происходит во многих классических случаях. Например, для систем степеней $\{x^{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$ минимальность в $L^2(a,b)$ равносильна отрицанию условия Мюнца, эквивалентного полноте (см., например, Ахиезер, Глазман [1, Гл. 1, § 13]). Для систем сдвигов $\{\varphi(x-\lambda_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ бесселевость в $L^2(\mathbb{R})$ имеет следствием конечную верхнюю плотность Берлинга точек $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, в то время как существование нижней границы фрейма Даффина–Шеффера (из которого вытекает полнота) имплицирует бесконечную верхнюю плотность Берлинга и поэтому в $L^2(\mathbb{R})$ не существует фреймов Даффина–Шеффера из сдвигов одной функции (см. [25, Гл. 9, § 6]). Для систем дискретизированных воспроизводящих ядер гильбертовых пространств подобные тонкие результаты получены в статье [40].

Замечание 1.6.6. *Условие* (1.28), *т.е. отрицание условия Бляшке* (1.15), *гарантирует переполненность последовательности $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$: для каждого $n_0 \in \mathbb{N}$ подпоследовательность $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=n_0}^{\infty}$ также будет полной в H^2. Следовательно, для любой функции $f \in H^2$ найдется $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такое, что справедливо представление (полагаем $n_0 = 1$)*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-1} c_n \widehat{K}_{z_n}.$$

Однако, такое представление еще не означает, что $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является системой представления в H^2, поскольку номера n_k, вообще говоря, зависят от f. Кроме того, теорема Тотика [76] утверждает, что условие (1.28) *необходимо и достаточно для решения задачи восстановления, а именно, в предположении* (1.28) *существует семейство алгебраических полиномов $P_{n,k}$, где $n = 1, 2, \ldots$ и $k = 1, \ldots, n$, таких,* *что для любой функции $f \in H^2$ справедливо представление*

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k) P_{n,k}.$$

Ясно, что такое аппроксимационное представление также, вообще говоря, не гарантирует представления в виде ряда. Конкретный пример не удовлетворяющей условию Бляшке последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ для которой $\{\widehat{K}_{z_n}\}_{n=1}^{\infty}$ не является системой представления указан в работе [39].

1.7 Банаховы фреймы

В 1989 г. Грохениг обобщил понятие фрейма на банаховы пространства и ввел понятие атомарного разложения и банахова фрейма [43]. Его теория получила развитие в работах Касаззы, Хана, Ларсона [24], Касаззы, Кристенсена, Стоевой [25] и т.д. Важным отличием атомарного разложения и банахова фрейма по Грохенигу от классического определения фрейма Даффина-Шеффера является то, что теорема о представлении не выполняется автоматически и её приходится постулировать отдельно.

Альтернативное определение банахова фрейма, основанное на исследованиях Бари по биортогональным системам и базисам гильбертова пространства, было предложено Терехиным в работе [9]. Это альтернативное определение мы и рассмотрим далее.

Пусть дано сепарабельное банахово пространство F с сопряженным $G = F^*$ и $\langle f, g\rangle$ - значение непрерывного линейного функционала $g \in G$ на векторе $f \in F$. Нам потребуется определение модельного пространства.

Определение 1.7.1 (Модельное пространство [9]). *Банахово пространство X, элементами которого являются числовые последовательности $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется модельным если система канонических ортов $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\varepsilon_n = \{\delta_{mn}\}_{m=1}^{\infty}$, где δ_{mn} символ Кронекера) образует базис в X.*

Примерами модельных пространств являются пространства l_p, $1 \le p < \infty$ и c_0 (пространство всех последовательностей, сходящихся к 0 с равномерной нормой). Примером пространства, не являющегося модельным, служит пространство l_∞ поскольку оно не сепарабельно. Примером сепарабельного, но не модельного пространства служит пространство c с равномерной нормой (его базисом служит набор канонических ортов $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ с присоединенным вектором $(1, 1, \dots, 1, \dots)$).

Произвольный непрерывный линейный функционал ρ на модельном пространстве однозначно определяется последовательностью своих значений $\{\rho(\varepsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$ на элементах естественного базиса. Поэтому сопряженное пространство X^* изометрически изоморфно некоторому банахову пространству Y, элементами которого являются числовые последовательности $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ и любой непрерывный линейный функционал на модельном пространстве X можно представить в виде

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n. \tag{1.32}$$

Определение 1.7.2 (Банахов фрейм [9]). *Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ называется фреймом в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X с сопряженным пространством $Y = X^*$ если существуют постоянные $0 < A \le B < \infty$ такие, что для любого непрерывного линейного функционала $g \in G = F^*$ последовательность его коэффициентов Фурье удовлетворяет неравенствам*

$$A\|g\|_G \le \|\{\langle\varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \le B\|g\|_G. \tag{1.33}$$

Выбор модельного пространства влияет на тип сходимости ряда. Например, если естественный базис модельного пространства X является безусловным, то представляющий ряд сходится к f безусловно.

Оператор $R : G \to Y$ называется оператором анализа

$$Rg = \{\langle\varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}, \qquad g \in G. \tag{1.34}$$

Оператор $S : X \to F$ называется оператором синтеза

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n, \qquad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X. \tag{1.35}$$

Заметим, что оператор анализа является сопряженным к оператору синтеза $R = S^*$.

Определение банахова фрейма (1.33) совпадает с определением фрейма Даффина-Шеффера в случае, когда $F = G = H$ гильбертово пространство и $X = Y = \ell_2$. Важным отличием банахова фрейма (1.33) от атомарного разложения и банахова фрейма по Грохенигу является то, что автоматически обеспечивается справедливость следующей теоремы, доказанной в работе [9].

Теорема 1.7.3 (Теорема о представлении [9]). *Последовательность* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ *является банаховым фреймом в пространстве* F *относительно модельного пространства* X *тогда и только тогда, когда*

(i) для всех $x \in X$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ *сходится в* F*,*

(ii) для всех $f \in F$ *существует элемент* $x \in X$ *такой, что* $f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$.

Далее приведем доказательство этой ключевой теоремы. Пусть как и ранее, X будет банаховым пространством последовательностей с естественным базисом $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ и его дуальное пространство X^* изоморфно некоторому банахову пространству последовательностей Y. Напомним определение последовательности Бесселя в банаховых пространствах (см. [13]) аналогичное определению последовательности Бесселя в гильбертовых пространствах (1.26).

Определение 1.7.4 (Последовательность Бесселя в F [13]). *Система* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ *называется последовательностью Бесселя в банаховом пространстве* F *относительно пространства* X *если существует постоянная* $B > 0$ *такая, что для всех ограниченных линейных функционалов* $g \in G$ *их коэффициенты Фурье* $\langle \varphi_n, g \rangle$ *удовлетворяют*

$$\|\{\langle \varphi_n, g \rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \leq B\|g\|_G. \tag{1.36}$$

Лемма 1.7.5. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является последовательностью Бесселя в* F *относительно* X*,*

(ii) существует постоянная $B > 0$ *такая, что для всех* $N = 1, 2, \ldots$ *и всех*

$x_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, \dots, N$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_n \varphi_n \right\|_F \le B \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n \varepsilon_n \right\|_X,$$

(iii) для всех $x \in X$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ сходится в F.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$. Пусть оператор анализа $R : G \to Y$ определен как

$$Rg = \{\langle f_n, g \rangle\}_{n=1}^{\infty}.$$

По условию (i) оператор R является ограниченным $\|Rg\|_Y \le B\|g\|_G$. Обозначим через X_0 множество всех финитных последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Определим линейный оператор $S_0 : X_0 \to F$ следующим образом

$$S_0 \varepsilon_n = \varphi_n, \qquad n = 1, 2, \dots. \tag{1.37}$$

Тогда для всех $x \in X_0$ с учетом (1.37) имеем

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_n \varphi_n \right\|_F = \|S_0 x\|_F = \sup_{\|g\|_G \le 1} |\langle S_0 x, g \rangle| = \sup_{\|g\|_G \le 1} \left| \sum_{n=1}^{N} x_n \langle \varphi_n, g \rangle \right|. \tag{1.38}$$

Рассматривая последнее выражение в (1.38) как действие функционала из пространства $X^* = Y$ на элемент из X, а также учитывая формулу для нормы линейного оператора и неравенство (1.36) получаем эквивалентное (ii) утверждение

$$\sup_{\|g\|_G \le 1} \left| \sum_{n=1}^{N} x_n \langle \varphi_n, g \rangle \right| = \sup_{\|g\|_G \le 1} |\langle x, Rg \rangle| \le B\|x\|_X = B \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n \varepsilon_n \right\|_X. \tag{1.39}$$

$(ii) \implies (iii)$. Как было показано ранее, оператор $S_0 : X_0 \to F$ ограничен на множестве X_0 которое плотно в X. Поэтому S_0 имеет единственное продолжение до ограниченного линейного оператора $S : X \to F$. Поскольку $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом пространства X, то для всех $x \in X$ справедливо выражение

$$Sx = S \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varepsilon_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n. \tag{1.40}$$

Поскольку оператор S ограничен, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ сходится, т.е. выполняется (iii).

$(iii) \implies (i)$. Оператор синтеза S корректно определен $Sx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$, $\forall x \in X$ и последовательность ограниченных операторов

$$S_N x = \sum_{n=1}^{N} x_n \varphi_n, \qquad N = 1, 2, \dots, \tag{1.41}$$

сходится к Sx. Поскольку Sx существует для всех $x \in X$ согласно условию (iii), то по следствию из теоремы Банаха-Штейнгауза $S : X \to F$ является ограниченным оператором. Далее, из равенства

$$\langle Sx, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \langle f_n, g \rangle = \langle x, Rg \rangle$$

следует, что $R : G \to Y$ является сопряженным к оператору синтеза S и поэтому R также ограничен, что эквивалентно (i).

□

Отметим, что для применения теоремы Банаха-Штейнгауза в доказательстве леммы 1.7.5 операторы $S_N,\ N = 1, 2, \dots$ должны быть ограничены. Для этого элемент x_n должен непрерывно зависеть от x, что обеспечивается существованием сопряженной системы $\{\varepsilon_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ для базиса $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1.7.3.

Доказательство теоремы 1.7.3. Сначала докажем необходимость. Утверждение (i) следует из леммы 1.7.3 поскольку по определению фрейм является последовательностью Бесселя. Нижнее фреймовое неравенство в (1.33) означает, что оператор анализа $R : G \to Y$ является инъективным в операторном смысле. Поэтому оператор синтеза $S : X \to F$, который является предсопряженным к оператору R является сюръекцией [66]. Следовательно, для каждого вектора $f \in F$ существует элемент модельного пространства $x \in X$ такой что $f = Sx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$, что составляет утверждение (ii).

Перейдем к доказательству достаточности. Утверждение (i) показывает, что оператор синтеза S является ограниченным, а утверждение (ii) то, что S сюръективен.

Следовательно, оператор анализа $R : G \to Y$ (который является сопряженным к S) инъективен [66] и ограничен: $A\|g\|_G \leq \|Rg\|_Y \leq B\|g\|_G$, следовательно, фреймовые неравенства (1.33) выполняются. $\square$

Инъективность операторов в доказательстве теоремы 1.7.3 понимается не в теоретико - множественном смысле ($Tx = 0 \implies x = 0$), а в более сильном операторном смысле. Оператор T инъективен в операторном смысле если существует постоянная $A > 0$ такая, что для любого вектора $x \in X$ выполняется $\|Tx\| \geq A\|x\|$.

Из теоремы 1.7.3 следует, что любой фрейм является системой представления. Обратное также верно: любая система представления $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ является фреймом в пространстве F относительно пространства коэффициентов $X(\varphi_n)$ состоящего из всех последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ сходится в F. Пространство коэффициентов $X(\varphi_n)$ снабжено нормой

$$\|x\|_{X(\varphi_n)} = \sup_{N=1,2,\dots} \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n \varphi_n \right\|_F . \tag{1.42}$$

В общем случае, одна и та же система представления может быть фреймом относительно различных модельных пространств X.

По аналогии с фреймами Даффина-Шеффера для банахового фрейма Φ с нижней границей A и верхней границей B может быть введено понятие числа обусловленности

$$\mathrm{cond}(\Phi) = \frac{B}{A} \geq 1.$$

Чем ниже число обусловленности фрейма, тем меньшее влияние ошибки в вычислении коэффициентов фрейма оказывают на результат представления.

1.8 Построение банахова фрейма в пространстве Харди

Пусть как и ранее

$$K_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda_n}z}, \qquad \lambda_n, z \in \mathbb{D}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.43}$$

обозначает значения воспроизводящего ядра Сеге $K(z,\lambda) = (1-\overline{\lambda}z)^{-1}$ для пространства Харди H^2.

Построим последовательность точек $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ на единичном диске $\mathbb{D}$. Разделим $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ на группы так, что каждая группа состоит из корней из единицы k-ой степени расположенных на окружности радиуса $r_k = 1 - \frac{1}{k}$

$$\lambda_n = \lambda_{k,j} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) e^{\frac{2\pi i j}{k}}, \qquad j = 0, \ldots, k-1, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.44}$$

Теорема 1.8.1. *Пусть точки $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ определены равенством* (1.44). *Тогда последовательность $\{K_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является системой представления в пространстве H^2.*

Система представления является полной последовательностью. Согласно предложению 1.6.1 полнота последовательности $\{K_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ вида (1.43) эквивалентна отрицанию условия Бляшке, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\lambda_n|) = \infty. \tag{1.45}$$

По теореме восстановления Тотика [76], если условие (1.45) соблюдено, то существуют полиномы $P_{n,k}$, где $k = 1, \ldots, n$ и $n = 1, 2, \ldots$, такие что для каждой функции $f \in H^2$ мы имеем формулу восстановления

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle f, K_{\lambda_k} \rangle P_{n,k},$$

либо используя дуальность, для каждой функции $g \in H^2$ получаем

$$g = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle g, P_{n,k} \rangle K_{\lambda_k}.$$

Однако, эта аппроксимация не обеспечивает представление рядом вида

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n K_{\lambda_n}.$$

Неформально, чтобы получить такое представление рядом мы должны взять "слишком много" точек $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и (1.44) является одним из таких вариантов выбора точек (см. также замечание 1.6.6).

Мы разделим доказательство теоремы 1.8.1 на несколько лемм.

Лемма 1.8.2. *Пусть ω_k^j является корнем k-ой степени из единицы*

$$\omega_k^j = e^{\frac{2\pi i j}{k}}, \qquad j = 0, \dots, k-1,$$

и пусть

$$\|f\|_k := \left(\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} |f(\omega_k^j)|^2 \right)^{1/2} \tag{1.46}$$

суть полунорма функции f с корректно определенными граничными значениями. Тогда для каждого полинома $P(z) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j$, $\deg P < k$ справедливо равенство

$$\|P\|_k = \|P\|_{H^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим (обратное) дискретное преобразование Фурье вектора $\{c_j\}_{j=0}^{k-1} \in \mathbb{C}^k$

$$\check{c}_l = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=0}^{k-1} c_j \omega_k^{jl} = \frac{P(\omega_k^l)}{\sqrt{k}}, \qquad l = 0, \dots, k-1. \tag{1.47}$$

Поскольку обратное дискретное преобразование Фурье является унитарным оператором на $\mathbb{C}^k$ со стандартным скалярным произведением

$$\langle c, d \rangle = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \overline{d}_j,$$

то используя (1.46), (1.47) и выражение для нормы аналитической функции получаем

$$\|P\|_k = \left(\sum_{l=0}^{k-1} |\check{c}_l|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=0}^{k-1} |c_j|^2 \right)^{1/2} = \|P\|_{H^2}.$$

□

Лемма 1.8.3. *Определим оператор σ_r посредством равенства*

$$\sigma_r f(z) = f(rz), \qquad 0 < r < 1.$$

Справедливо следующее неравенство

$$\|\sigma_r f\|_k \leq \frac{\|f\|_{H^2}}{(1 - r^{2k})^{1/2}}.$$

Доказательство. Мы можем разложить каждую функцию $f \in H^2$, $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ в ортогональный ряд

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} z^{kl} P_l(z),$$

где $P_l(z) = \sum_{j=0}^{k-1} c_{j+kl} z^j$ - полином степени меньшей, чем k. Тогда применяя лемму 1.8.2 и то, что оператор σ_r не увеличивает H^2-норму функций имеем

$$\|\sigma_r f\|_k \leq \sum_{l=0}^{\infty} r^{kl} \|\sigma_r P_l\|_k = \sum_{l=0}^{\infty} r^{kl} \|\sigma_r P_l\|_{H^2} \leq \sum_{l=0}^{\infty} r^{kl} \|P_l\|_{H^2}$$

Далее, применяя неравенство Коши-Шварца и выражение для нормы функций в H^2 через коэффициенты разложения в степенной ряд получаем

$$\sum_{l=0}^{\infty} r^{kl} \|P_l\|_{H^2} \leq \left(\sum_{l=0}^{\infty} r^{2kl} \right)^{1/2} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \|P_l\|_{H^2}^2 \right)^{1/2} = \frac{\|f\|_{H^2}}{(1 - r^{2k})^{1/2}}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.8.4. *Для всех $f \in H^2$ справедливы следующие неравенства*

$$\|f\|_{H^2} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\sigma_{1-1/k} f\|_k \leq \frac{\|f\|_{H^2}}{(1 - e^{-2})^{1/2}}. \tag{1.48}$$

Доказательство. Поскольку $(1 - \frac{1}{k})^k \nearrow e^{-1}$, то используя лемму 1.8.3 получаем верхнюю оценку

$$\|\sigma_{1-1/k} f\|_k \leq \frac{\|f\|_{H^2}}{(1 - (1 - \frac{1}{k})^{2k})^{1/2}} \leq \frac{\|f\|_{H^2}}{(1 - e^{-2})^{1/2}}. \tag{1.49}$$

Чтобы доказать нижнюю оценку, сначала проверим ее для произвольного полинома $P(z)$, $\deg P \leq N$. Применяя лемму 1.8.2 и устремляя $k \to \infty$ имеем

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\sigma_{1-1/k} P\|_k \geq \sup_{k > N} \|\sigma_{1-1/k} P\|_{H^2} = \|P\|_{H^2}. \tag{1.50}$$

Теперь предположим, что $f \in H^2$ - произвольная функция и выберем полином P так чтобы $\|f - P\|_{H^2} < \varepsilon$. Дважды используя неравенство треугольника, а также неравенства (1.49) и (1.50) получаем

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\sigma_{1-1/k} f\|_k \geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\sigma_{1-1/k} P\|_k - \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\sigma_{1-1/k}(f-P)\|_k$$
$$\geq \|P\|_{H^2} - \frac{\varepsilon}{(1-e^{-2})^{1/2}} \geq \|f\|_{H^2} - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{(1-e^{-2})^{1/2}}.$$

Закончим доказательство леммы устремляя ε к 0. □

Теперь мы имеем все необходимые компоненты для доказательства теоремы 1.8.1.

Доказательство теоремы 1.8.1. Определим ℓ_k^2 как гильбертово пространство размерности k с нормой

$$\|c\|_2 := \left(\sum_{j=0}^{k-1} |c_j|^2\right)^{1/2}.$$

Пусть I - множество индексов вида

$$I := \{(k,j) : j = 0, 1, \dots, k-1 \quad \text{и} \quad k = 1, 2, \dots\}.$$

Далее, определим X как пространство числовых семейств $x = \{x_{k,j}\}_{(k,j)\in I}$ таких, что

$$\|x\|_{1,2} := \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k-1} |x_{k,j}|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Другими словами имеем пространство X со смешанной нормой

$$X = \ell^1(\ell_k^2) = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell_k^2\right)_{\ell^1}.$$

Очевидно, двойственное для X пространство Y

$$Y = \ell^\infty(\ell_k^2) = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell_k^2\right)_{\ell^\infty}$$

является пространством числовых семейств $y = \{y_{k,j}\}_{(k,j)\in I}$ удовлетворяющих

$$\|y\|_{\infty,2} := \sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=0}^{k-1} |y_{k,j}|^2\right)^{1/2} < \infty$$

со стандартной двойственностью

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} x_{k,j} y_{k,j}.$$

Из неравенства (1.48) леммы 1.8.4 следует, что последовательность нормированных ядер Сеге

$$\widehat{K}_{\lambda_n} = (1-|\lambda_n|^2)^{1/2} K_{\lambda_n}, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

дискретизированных в точках $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ вида (1.44) удовлетворяет фреймовым неравенствам

$$A\|g\|_{H^2} \le \|\{\langle \widehat{K}_{\lambda_n}, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_{\infty,2} \le B\|g\|_{H^2}.$$

Действительно, в этом случае имеем

$$(1-|\lambda_{k,j}|^2)^{1/2} = (1-(1-\tfrac{1}{k})^2)^{1/2} \asymp \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

и по определению $\|\cdot\|_k$-нормы

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\sigma_{1-1/k} g\|_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} |g(\lambda_{k,j})|^2\right)^{1/2} \asymp \|\{\langle \widehat{K}_{\lambda_n}, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_{\infty,2}.$$

Применяя теорему 1.7.3 можем заключить, что для каждой функции $f \in H^2$ существуют коэффициенты $x_n = x_{k,j}$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k-1} |x_{k,j}|^2\right)^{1/2} < \infty$$

и верно представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \widehat{K}_{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n (1-|\lambda_n|^2)^{1/2} K_{\lambda_n}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 1.8.5. *Фактически, доказано, что система нормированных ядер Сеге $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$, где точки дискретизации $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют вид* (1.44), *является фреймом в пространстве H^2 относительно модельного пространства $X = \ell^1(\ell^2_k)$.*

Замечание 1.8.6. *Несуществование фрейма Даффина-Шеффера в пространстве H^2 на основе дискретизированных ядер Сеге, которое мы обсуждали в пункте 1.6* *означает, что в качестве модельного пространства фрейма* $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *нельзя взять пространство* ℓ^2. *Кроме того, как показано в [39], таким модельным пространством не может быть пространство* ℓ^1. *Наш результат утверждает, что при выборе промежуточного пространства* $\ell^1(\ell^2_k)$ *фрейм вида* $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *существует для подходящим образом подобранной последовательности точек* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Глава 2

Обобщение вида допустимых точек дискретизации

Основной результат главы 1 (теорема 1.8.1), который дает ответ на открытый вопрос поставленный в работе Фрикейна, Хоя и Лефевра [39] приводит нас к следующей более общей задаче. А именно, каковы должны быть последовательности натуральных чисел $n_k \nearrow \infty$ и "радиусов" $r_k \nearrow 1$ для того, чтобы последовательность точек

$$\lambda_n = \lambda_{k,j} = r_k e^{\frac{2\pi i j}{n_k}}, \qquad j = 0, \dots, n_k - 1, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{2.1}$$

имеющая более общий вид чем (1.44), где мы принимали

$$n_k = k, \quad r_k = 1 - \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

являлась последовательностью точек дискретизации ядер Сеге образующих фрейм (систему представления) в пространстве Харди H^2. В данной главе мы даем ответ на этот вопрос.

В пункте 2.1 мы определим границы Рисса для конечных блоков из дискретизированных ядер Сеге при произвольных фиксированных параметрах r и n, задающих последовательность точек дискретизации. Далее, в пункте 2.2 мы введем условия согласования для последовательностей натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и "радиусов" $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, а также покажем, каким должно быть модельное пространство фрейма, чтобы представляющий ряд на основе дискретизированных ядер Сеге сходился безусловно. Вопрос о том, является ли система из воспроизводящих ядер дискретизированных в точках вида (2.1) фреймом в H^2 при соблюдении условий согласования на $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет рассмотрен в пункте 2.3.

2.1 Границы Рисса для блоков дискретизированных ядер

Начнем параграф с определения границ Рисса.

Определение 2.1.1 (Границы Рисса [29]). *Постоянные $A, B > 0$ называются нижней и верхней границей Рисса для системы функций $\{\varphi_j\}_{j=0}^{n-1} \subset H$ если для всех коэффициентов $\{c_j\}_{j=0}^{n-1}$ выполняются неравенства*

$$A \sum_{j=0}^{n-1} |c_j|^2 \le \left\| \sum_{j=0}^{n-1} c_j \varphi_j \right\|^2 \le B \sum_{j=0}^{n-1} |c_j|^2.$$

Также напомним определение дискретного преобразования Фурье, которое понадобится нам при доказательстве леммы в этом параграфе.

Определение 2.1.2 (Дискретное преобразование Фурье). *Дискретное преобразование Фурье — это унитарный оператор в n-мерном унитарном пространстве ℓ_n^2, определяемый равенством*

$$\hat{\xi}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e^{-\frac{2\pi i jk}{n}}, \qquad k = 0, \ldots, n-1. \tag{2.2}$$

Пусть далее $0 < r < 1$. Рассмотрим нормированные ядра Сеге

$$e_j = \left(1 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} K_{z_j}, \qquad z_j = re^{\frac{2\pi i j}{n}}, \qquad j = 0, \ldots, n-1. \tag{2.3}$$

В следующей лемме мы определим границы Рисса для блоков дискретизированных ядер Сеге $\{e_j\}_{j=0}^{n-1}$ при произвольных фиксированных параметрах $n \in \mathbb{N}$ и $r \in (0,1)$, задающих положение точек дискретизации $\{z_j\}_{j=0}^{n-1} \subset \mathbb{D}$.

Лемма 2.1.3. *Для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $r \in (0,1)$ *выполняются неравенства*

$$\frac{r^{2n} n(1-r^2)}{1-r^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} |\xi_j|^2 \le \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e_j \right\|_2^2 \le \frac{n(1-r^2)}{1-r^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} |\xi_j|^2. \tag{2.4}$$

Доказательство. Используя выражение (2.3), определение ядра Сеге (1.13) и сумму геометрической прогрессии, имеем равенство

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e_j(z) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\xi_j (1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - re^{-\frac{2\pi i j}{n}} z} \\ &= (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \xi_j r^m e^{-\frac{2\pi i j m}{n}} z^m \\ &= (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left(\sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e^{-\frac{2\pi i j m}{n}} \right) z^m. \end{aligned} \tag{2.5}$$

С учетом выражения (1.8) для нормы пространства H^2 из (2.5) следует равенство

$$\left\| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e_j \right\|_{H^2}^2 = (1-r^2) \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e^{-\frac{2\pi i j m}{n}} \right|^2, \tag{2.6}$$

где мы использовали то, что $0 < r < 1$.

Учитывая периодичность экспонент $e^{-\frac{2\pi i j(ln+k)}{n}} = e^{-\frac{2\pi i j k}{n}}$ по модулю n и делая замену $m = ln + k,\ 0 \le k < n$ (напомним, что n фиксировано) находим выражение

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e_j \right\|_{H^2}^2 &= (1-r^2) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} r^{2(ln+k)} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e^{-\frac{2\pi i j(ln+k)}{n}} \right|^2 \\ &= (1-r^2) \sum_{l=0}^{\infty} r^{2ln} \sum_{k=0}^{n-1} r^{2k} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e^{-\frac{2\pi i j k}{n}} \right|^2 \\ &= (1-r^2) \sum_{k=0}^{n-1} r^{2k} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e^{-\frac{2\pi i j k}{n}} \right|^2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} r^{2ln} \\ &= \frac{n(1-r^2)}{1-r^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} r^{2k} |\hat{\xi}_k|^2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где последнее равенство получается с использованием дискретного преобразования Фурье (2.2) и выражения для суммы степенного ряда.

Можем записать тривиальные оценки $r^{2n} < r^{2k} \le 1,\ k = 0, \dots, n-1$. Используя эти оценки для r^{2k} в формуле (2.7), а также унитарность дискретного преобразования Фурье $\|\hat{\xi}\|^2 = \|\xi\|^2$ получаем искомые неравенства (2.4).

□

Отметим, что согласно неравенству (2.4) нижняя A и верхняя B границы Рисса для системы $\{e_j\}_{j=0}^{n-1}$ могут быть записаны в виде

$$A = \frac{r^{2n} n(1-r^2)}{1-r^{2n}}, \quad B = \frac{n(1-r^2)}{1-r^{2n}}, \qquad n \in \mathbb{N},\ r \in (0,1).$$

2.2 Условия согласования для точек дискретизации

Далее будем рассматривать точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеющие специальный вид:

$$z_n = z_{k,j} = r_k e^{\frac{2\pi i j}{n_k}}, \qquad j = 0, \dots, n_k - 1, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{2.8}$$

где

$$n_1 < \ldots < n_k < \ldots, \qquad 0 < r_1 < \ldots < r_k < \ldots, \qquad \lim_{k \to \infty} r_k = 1,$$

причем потребуем, что “номера” n_k и “радиусы” r_k удовлетворяют следующему *условию согласования*: существуют постоянные $0 < a \le b < \infty$ такие, что

$$\frac{a}{n_k} \le 1 - r_k \le \frac{b}{n_k}, \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{2.9}$$

Будем использовать обозначение

$$I := \big\{(k,j) : j = 0, \dots, n_k - 1, \quad k = 0, 1, \dots\big\}$$

для множества пар (k,j), индексирующих точки $z_n = z_{k,j}$ и соответствующие им значения нормированного ядра Сеге $e_n = e_{k,j}$.

Напомним определение суммируемого семейства, которое потребуется для доказательства теоремы в данном параграфе.

Определение 2.2.1 (Суммируемое семейство [67]). *Семейство* $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *элементов банахова пространства* F *называется суммируемым с суммой* $\varphi \in F$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует конечное множество* $\Omega_0 \subset \Lambda$ *такое, что для всех конечных множеств* Ω *с вложением* $\Omega_0 \subset \Omega \subset \Lambda$ *справедливо неравенство*

$$\|\varphi - \sum_{\lambda\in\Omega} \varphi_\lambda\|_F < \varepsilon.$$

Отметим следующий важный факт (см., например [67, Гл. 3, С. 120]):

Замечание 2.2.2. *Если* $\Lambda = \mathbb{N}$ *и* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- суммируемое семейство в банаховом пространстве* F, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится безусловно (обратное также верно).*

Теорема 2.2.3. *Пусть точки* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имеют вид* (2.8) *и удовлетворяют условию согласования* (2.9). *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) для коэффициентов $\xi_n = \xi_{k,j}$ *ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ *выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n_k-1} |\xi_{k,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \tag{2.10}$$

(ii) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ *абсолютно сходится по блокам в* H^2, *т.е.*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\sum_{j=0}^{n_k-1} \xi_{k,j} e_{k,j}\right\|_2 < \infty. \tag{2.11}$$

При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ *безусловно сходится в* H^2.

Доказательство. На основании леммы 2.1.3 для всех $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$A_k \sum_{j=0}^{n_k-1} |\xi_{k,j}|^2 \le \left\|\sum_{j=0}^{n_k-1} \xi_{k,j} e_{k,j}\right\|_2^2 \le B_k \sum_{j=0}^{n_k-1} |\xi_{k,j}|^2, \tag{2.12}$$

где

$$A_k = \frac{r_k^{2n_k} n_k(1-r_k^2)}{1-r_k^{2n_k}}, \qquad B_k = \frac{n_k(1-r_k^2)}{1-r_k^{2n_k}}.$$

Используя условия согласования (2.9) и второй замечательный предел имеем с одной стороны

$$r_k^{2n_k} \ge \left(1 - \frac{b}{n_k}\right)^{2n_k} \to e^{-2b} > 0, \qquad k \to \infty,$$

откуда $r_k^{2n_k} \geq \alpha > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. С другой стороны

$$r_k^{2n_k} \leq \left(1 - \frac{a}{n_k}\right)^{2n_k} \to e^{-2a} < 1, \qquad k \to \infty,$$

откуда $r_k^{2n_k} \leq \beta < 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Таким образом имеем оценки

$$0 < \alpha < r_k^{2n_k} \leq \beta < 1, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.13}$$

Поскольку $0 < r_k < 1$, то из условий согласования (2.9) получаем неравенства

$$\frac{a}{n_k} \leq 1 - r_k \leq \frac{b}{n_k} \implies \frac{a}{n_k} \leq \frac{(1 - r_k)(1 + r_k)}{1 + r_k} \leq \frac{b}{n_k} \implies a \leq n_k(1 - r_k^2) \leq 2b.$$

Следовательно, для постоянных Рисса A_k и B_k справедливы оценки

$$0 < \frac{\alpha a}{1 - \alpha} \leq A_k \leq B_k \leq \frac{2b}{1 - \beta} < \infty, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.14}$$

Используя оценки (2.13) и (2.14) в неравенствах Рисса (2.12), а также извлекая квадратный корень и суммируя по k приходим к неравенствам

$$\left(\frac{\alpha a}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k - 1} |\xi_{k,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n_k - 1} \xi_{k,j} e_{k,j} \right\|_2 \leq \left(\frac{2b}{1 - \beta}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k - 1} |\xi_{k,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Эквивалентность $(i) \Leftrightarrow (ii)$ установлена, один из рядов сходится тогда и только тогда, когда сходится другой. Осталось показать, что из абсолютной сходимости по блокам следует безусловная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$.

Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ абсолютно сходится по блокам в H^2. Используя доказанную эквивалентность между сходимостью рядов (2.10) и (2.11), для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k - 1} |\xi_{k,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Обозначим как Ω_0 конечное подмножество всех индексов $(k, j) \in I$ для которых $k = 1, 2, \ldots, k_0 - 1$ и $j = 0, 1, \ldots, n_k - 1$. Для произвольного конечного подмножества Ω индексов $(k, j) \in I$ такого, что $\Omega \supset \Omega_0$ используя неравенство треугольника и полученную ранее оценку сверху

$$\left\| \sum_{(k,j) \in I \setminus \Omega} \xi_{k,j} e_{k,j} \right\|_2 \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \left\| \sum_{\{j : (k,j) \in I \setminus \Omega\}} \xi_{k,j} e_{k,j} \right\|_2 < \left(\frac{2b}{1 - \beta}\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon.$$

Это означает, что семейство $\{\xi_{k,j}e_{k,j}\}_{(k,j)\in I}$ является суммируемым, что согласно замечанию 2.2.2 равносильно его безусловной сходимости. $\square$

Доказанная теорема 2.2.3 побуждает к выбору в качестве ассоциированного с системой $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ модельного пространства X, являющегося ℓ^1 - суммой конечномерных ℓ^2 - пространств:

$$X = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell^2_{n_k}\right)_{\ell^1},$$

т.е. пространство X состоит из всех числовых последовательностей $x = \{x_n\} = \{x_{k,j}\}$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n_k-1}|x_{k,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

В самом деле, как мы покажем в следующем параграфе, такой выбор оказывается вполне оправданным.

2.3 Построение фрейма с условиями согласования

Перейдем к формулировке и доказательству центральной теоремы главы 2.

Теорема 2.3.1. *Пусть точки дискретизации* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ *имеют вид* (2.8) *и удовлетворяют условию согласования* (2.9)*. Тогда последовательность нормированных дискретизированных ядер Сеге*

$$e_n = \left(1 - |z_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} K_{z_n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.15}$$

образуют фрейм в H^2 *относительно модельного пространства*

$$X = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell^2_{n_k}\right)_{\ell^1}.$$

Доказательство. Определим оператор синтеза $S : X \to H^2$ аналогично тому, как мы делали ранее в пункте 1.7:

$$S\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n. \tag{2.16}$$

Оператор синтеза S является корректно определенным линейным оператором, поскольку соответствующий ряд сходится согласно теореме 2.2.3. Также по этой теореме оператор синтеза S ограничен. Действительно, используя неравенство треугольника и принимая $B = (\frac{2b}{1-\beta})^{\frac{1}{2}}$ в обозначениях доказательства теоремы 2.2.3 получаем неравенство

$$\|S\xi\|_{H^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \xi_{k,j} e_{k,j} \right\|_{H^2} \leq B\|\xi\|_X.$$

Оператор анализа $R : H^2 \to X^*$, определяемый равенством

$$Rg = \{\langle e_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty},$$

является сопряженным к оператору синтеза поскольку верно равенство

$$\langle S\xi, g\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n, g \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \langle e_n, g\rangle = \langle \xi, Rg\rangle.$$

Норма оператора равна норме его сопряженного оператора $\|S\| = \|R\| = B$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\|Rg\|_{X^*} \leq B\|g\|_{H^2},$$

что означает справедливость оценки сверху из фреймовых неравенств (1.33):

$$\|\{\langle e_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_{X^*} \leq B\|g\|_{H^2}. \tag{2.17}$$

Таким образом, для доказательства теоремы требуется получить оценку снизу во фреймовых неравенствах (1.33). Сопряженным к модельному пространству X будет ℓ^{∞} - сумма конечномерных ℓ^2-пространств:

$$X^* = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} l_{n_k}^2 \right)_{l^{\infty}}, \tag{2.18}$$

т.е. пространство X^* состоит из всех числовых последовательностей $y = \{y_n\} = \{y_{k,j}\}$ таких, что

$$\sup_{k=1,2,\dots} \left(\sum_{j=0}^{n_k-1} |y_{k,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Учитывая определение нормированного ядра Сеге (2.15), вид сопряженного пространства (2.18) и используя воспроизводящее свойство ядра Сеге $\langle K_\zeta, g\rangle = g(\zeta)$, нижнее фреймовое неравенство можно записать в виде

$$\|\{\langle e_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_{X^*} = \sup_{k=1,2\ldots} \left((1-r_k^2) \sum_{j=0}^{n_k-1} \left| g\left(r_k e^{\frac{2\pi i j}{n_k}} \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq A\|g\|_{H^2}, \tag{2.19}$$

к доказательству которого мы сейчас и перейдем.

Пусть функция $g(z)$ принадлежит диск-алгебре $A(\mathbb{D})$, т.е. функция $g(z)$ аналитична на единичном диске $\mathbb{D}$ и непрерывна на $\overline{\mathbb{D}} = (|z| \leq 1)$. Сначала мы докажем существование нижней границы фрейма (2.19) для $g \in A(\mathbb{D})$, а потом обобщим результат для произвольного $g \in H^2$.

Поскольку функция $G(z) = |g(z)|^2$ непрерывна на компактном множестве $\overline{\mathbb{D}}$ она равномерно непрерывна: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для произвольных $z, \zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ из условия $|z-\zeta| < \delta$ следует $|G(z) - G(\zeta)| < \varepsilon$.

Рассмотрим семейство функций $G_r(t) = |g(re^{it})|^2,\ 0 < r \leq 1$. Для всех $0 < r \leq 1$ справедлива оценка $|re^{is} - re^{it}| \leq |s-t|$. Действительно, делая замену переменных $s - t = 2p$ получаем

$$\begin{aligned} |re^{is} - re^{it}| &= r\left|e^{it}(e^{i(s-t)} - 1)\right| = r\left|e^{it}e^{ip}(e^{ip} - e^{-ip})\right| = \\ &= 2\left|ie^{it}e^{ip}\sin p\right| = 2\left|\sin p\right| \leq 2\frac{|s-t|}{2} = |s-t|, \end{aligned} \tag{2.20}$$

при $|s-t| < 2\pi$.

Выбирая $s, t \in \mathbb{R}$ таким образом, чтобы выполнялось $|s-t| < \delta$ и используя определение равномерной непрерывности получаем для всех $0 < r \leq 1$ неравенство

$$|G_r(s) - G_r(t)| = |G(re^{is}) - G(re^{it})| < \varepsilon,$$

что эквивалентно равностепенной непрерывности семейства функций

$$G_r(t) = |g(re^{it})|^2, \quad 0 < r \leq 1.$$

Кроме того, $G_r(t)$ стремится к $G_1(t)$ при $r \to 1$ равномерно по t. В самом деле, выберем r так, чтобы $1 - r < \delta$. Поскольку для всех $0 < r \leq 1$ справедливо неравенство

$$|re^{it} - e^{it}| = 1 - r < \delta,$$

то по определению равномерной непрерывности для всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$|G_r(t) - G_1(t)| = |g(re^{it}) - g(e^{it})| < \varepsilon.$$

Покажем, что интегральные суммы Римана функций $G_r(t) = |g(re^{it})|^2$

$$S(G_r, \varkappa_n) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} G_r\left(\frac{2\pi j}{n}\right), \quad 0 < r \leq 1, \tag{2.21}$$

соответствующие разбиениям $\varkappa_n = \left\{\frac{2\pi j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ отрезка $[0, 2\pi]$, сходятся к $\int_0^{2\pi} G_1(t)dt = 2\pi\|g\|_2^2$ при независимом стремлении $r \to 1$ и $n \to \infty$. Доказательство этого факта будем производить в 2 этапа. Сначала оценим уклонение $S(G_r, \varkappa_n)$ от $\int_0^{2\pi} G_r(t)dt$, далее оценим уклонение $\int_0^{2\pi} G_r(t)dt$ от $\int_0^{2\pi} G_1(t)dt$.

Во-первых, используя неравенство треугольника, имеем

$$\begin{aligned}\left|S(G_r, \varkappa_n) - \int_0^{2\pi} G_r(t)dt\right| &= \left|\frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} G_r\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\frac{2\pi j}{n}}^{\frac{2\pi(j+1)}{n}} G_r(t)dt\right| \\ &= \left|\sum_{j=0}^{n-1} \int_{\frac{2\pi j}{n}}^{\frac{2\pi(j+1)}{n}} G_r\left(\frac{2\pi j}{n}\right) dt - \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\frac{2\pi j}{n}}^{\frac{2\pi(j+1)}{n}} G_r(t)dt\right| \\ &= \left|\sum_{j=0}^{n-1} \int_{\frac{2\pi j}{n}}^{\frac{2\pi(j+1)}{n}} \left[G_r\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - G_r(t)\right] dt\right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\frac{2\pi j}{n}}^{\frac{2\pi(j+1)}{n}} \left|G_r\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - G_r(t)\right| dt \\ &\leq 2\pi\omega\left(\{G_r\}_{0<r\leq 1}, \frac{2\pi}{n}\right).\end{aligned} \tag{2.22}$$

В неравенстве (2.22) модуль непрерывности $\omega(\{G_r\}_{0<r\leq 1}, \delta)$ семейства функций $G_r(t)$

$$\omega(\{G_r\}_{0<r\leq 1}, \delta) = \sup_{0<r\leq 1} \sup_{|s-t|<\delta} |G_r(s) - G_r(t)|$$

мажорируется модулем непрерывности функции $g(z)$

$$\omega(g, \delta) = \sup_{|\zeta - z|<\delta} |g(\zeta) - g(z)| \tag{2.23}$$

поскольку согласно (2.20) справедлива оценка $|\zeta - z| = |re^{is} - re^{it}| \leq |s - t|$ и следовательно множество $|s - t| < \delta$ включено во множество $|\zeta - z| < \delta$.

Во-вторых, имеем

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{2\pi} G_r(t)dt - \int_0^{2\pi} G_1(t)dt\right| &\le \int_0^{2\pi} \Big||g(re^{it})|^2 - |g(e^{it})|^2\Big|dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big|\big(|g(re^{it})| + |g(e^{it})|\big)\big(|g(re^{it})| - |g(e^{it})|\big)\Big|dt \\
&\le \int_0^{2\pi} 2\max\big\{|g(z)||z \in \mathbb{D}\big\}\Big|\big(|g(re^{it})| - |g(e^{it})|\big)\Big|dt \qquad (2.24)\\
&= 2\|g\|_{A(\mathbb{D})}\int_0^{2\pi}\Big||g(re^{it})| - |g(e^{it})|\Big|dt \\
&\le 2\|g\|_{A(\mathbb{D})} \cdot 2\pi\omega(g, 1-r),
\end{aligned}$$

где последнее неравенство выполняется поскольку расстояние между точками re^{it} и e^{it} составляет $1 - r$.

Комбинируя оценки (2.22) и (2.24), при $r \to 1$ и $n \to \infty$ получаем выражение

$$\left|S(G_r, \varkappa_n) - \int_0^{2\pi} G_1(t)dt\right| \le C_1\omega\left(g, \frac{2\pi}{n}\right) + C_2\omega(g, 1-r) \to 0. \qquad (2.25)$$

Мы показали, что интегральные суммы $S(G_r, \varkappa_n)$ сходятся к $\int_0^{2\pi} G_1(t)dt = 2\pi\|g\|_2^2$. Это означает, что для интегральных сумм Римана $S(G_r, \varkappa_n)$ определенных равенством (2.21) справедливо, в частности, предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\left|g\left(r_k e^{\frac{2\pi ij}{n_k}}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|g\|_{H^2}. \qquad (2.26)$$

Поскольку $\lim_{k\to\infty} \le \sup_k$ и для всех $k = 1, 2...$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n_k} \le \frac{1 - r_k^2}{a},$$

то из соотношения (2.26) следует нижнее фреймовое неравенство (2.19) с постоянной $A = \sqrt{a} > 0$ для функций $g \in A(\mathbb{D})$.

Пусть теперь функция g принадлежит пространству H^2, но необязательно пространству $A(\mathbb{D})$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $g_\varepsilon \in A(\mathbb{D})$ так, чтобы $\|g - g_\varepsilon\|_{H^2} < \varepsilon$. Тогда в силу (2.17) имеем $\|R(g - g_\varepsilon)\|_{X^*} < B\varepsilon$ и поскольку оператор анализа R линеен имеем оценку

$$\begin{aligned}
\|Rg\|_{E^*} &= \|R(g+g_\varepsilon-g_\varepsilon)\|_{X^*}\\
&= \|R(g_\varepsilon)-R(g-g_\varepsilon)\|_{X^*}\\
&\geq \|R(g_\varepsilon)\|_{X^*}-\|R(g-g_\varepsilon)\|_{X^*}\\
&\geq A\|g_\varepsilon\|_{H^2}-B\varepsilon\\
&\geq A\|g\|_{H^2}-(A+B)\varepsilon,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

где в предпоследнем неравенстве учтены оценки на нижнюю и верхнюю границы фрейма, а в последнем использовано то, что $\|g\|_{H^2}-\|g_\varepsilon\|_{H^2}\leq\|g-g_\varepsilon\|_{H^2}<\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, то получаем (2.19) для всех $g\in H^2$.

$\square$

Следствие 2.3.2. *Пусть точки $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ имеют вид* (2.8) *и удовлетворяют условию согласования* (2.9). *Тогда для любой функции $f\in H^2$ существует последовательность коэффициентов $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty=\{\xi_{k,j}\}_{(k,j)\in I}$ такая, что справедливо представление*

$$f=\sum_{n=1}^\infty \xi_n(1-|z_n|^2)^{\frac12}K_{z_n},\qquad \sum_{k=1}^\infty\left(\sum_{j=0}^{n_k-1}|\xi_{k,j}|^2\right)^{\frac12}<\infty.$$

Замечание 2.3.3. *Следует отметить, что коэффициенты данного представления $\xi_n=\xi_n(f)$, $n=1,2,\ldots$, нелинейно зависят от $f\in H^2$. В частности, для каждой точки $z\in\mathbb{D}$ имеем*

$$K_z=\sum_{n=1}^\infty \xi_n(z)(1-|z_n|^2)^{\frac12}K_{z_n},$$

откуда

$$f(z)=\sum_{n=1}^\infty(1-|z_n|^2)^{\frac12}f(z_n)\overline{\xi_n(z)}$$

— формула восстановления в виде ряда, дающая при фиксированном z вычислительные преимущества по сравнению с аппроксимационной формулой восстановления Тотика (см. замечание 1.6.6).

Глава 3

Фрейм в пространстве Харди на полидиске

В главах 1 и 2 мы обсуждали построение систем представления (фреймов) для пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$. В данной главе мы переходим к более общему вопросу о построении системы представления для пространства Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$, определенном на полидиске $\mathbb{D}^d = \{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_1| < 1, \dots |z_d| < 1\}$. Мы построим фрейм пространства $H^2(\mathbb{D}^d)$, а также покажем, что число обусловленности этого фрейма имеет степенной рост в зависимости от размерности d полидиска $\mathbb{D}^d$.

В пункте 3.1 мы обсудим постановку задачи, а также напомним основные определения для пространства Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$. Далее в пункте 3.2 мы рассмотрим вспомогательный результат о двойственности для систем Бесселя играющий важную роль в последующем доказательстве. В пунктах 3.3 и 3.4 приводятся доказательства верхнего и нижнего фреймовых неравенств, а в пункте 3.5 приводятся доказательства основных результатов данной главы.

3.1 Постановка задачи

Введем обозначения

$$\mathbb{Z}_+ =\{k \in \mathbb{Z} : k \geq 0\},$$

$$\mathbb{Z}_n =\{0, 1, \dots, n-1\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и для произвольного $d \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_+^d =& \{(k_1, \ldots, k_d) : k_\nu = \mathbb{Z}_+,\ 1 \le \nu \le d\},\\
\mathbb{Z}_n^d =& \{(k_1, \ldots, k_d) : k_\nu = \mathbb{Z}_n,\ 1 \le \nu \le d\}, \quad n \in \mathbb{N},\\
|k| =& k_1 + \cdots + k_d, \quad \langle k, m\rangle = \sum_{\nu=1}^{d} k_\nu m_\nu.
\end{aligned}$$

В предыдущих главах мы рассматривали пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ определенное на единичном диске $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. В этой главе мы будем рассматривать пространство Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$, определенное на d-мерном полидиске $\mathbb{D}^d = \{(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_1| < 1, \ldots |z_d| < 1\}$.

Напомним несколько определений аналогичных введенным ранее определениям, но для случая пространства $H^2(\mathbb{D}^d)$.

Определение 3.1.1 (Пространство Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$)**.** *Пространство Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$ состоит из всех аналитических функций $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^d} c_k z^k$, $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_d^{k_d}$ на полидиске $\mathbb{D}^d$ для которых конечна норма*

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D}^d)} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0,2\pi]^d} \left| f(re^{it_1}, \ldots, re^{it_d}) \right|^2 dt_1 \ldots dt_d \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Норма функции $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^d} c_k z^k$ принадлежащей пространству $H^2(\mathbb{D}^d)$ также может быть записана в виде

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D}^d)} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^d} |c_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Подобно пространству $H^2(\mathbb{D})$, пространство $H^2(\mathbb{D}^d)$ является пространством с воспроизводящим ядром.

Определение 3.1.2 (Ядро Сеге в $H^2(\mathbb{D}^d)$)**.** *Воспроизводящее ядро K_λ пространства $H^2(\mathbb{D}^d)$ называется (d-мерным) ядром Сеге и имеет вид*

$$K_\lambda(z) = K(z, \lambda) = \prod_{\nu=1}^{d} \frac{1}{1 - \overline{\lambda_\nu} z_\nu}, \quad z, \lambda \in \mathbb{D}^d.$$

Нормированное ядро Сеге в пространстве $H^2(\mathbb{D}^d)$ имеет вид

$$\widehat{K}_\lambda(z) = \frac{K(\lambda, z)}{\|K(\lambda, z)\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}} = \prod_{\nu=1}^{d} \frac{(1-|\lambda_\nu|^2)^{1/2}}{1-\overline{\lambda_\nu} z_\nu}.$$

Пусть последовательность радиусов имеет вид

$$0 < r_1 < \ldots < r_k < \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} r_k = 1 \tag{3.1}$$

и $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots$. Выберем точки $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}^d$ вида

$$\lambda_n = \lambda_k^j = \left(r_k e^{\frac{2\pi i j_1}{n_k}}, \ldots, r_k e^{\frac{2\pi i j_d}{n_k}}\right), \quad j = (j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{Z}_{n_k}^d,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{3.2}$$

Под условием согласования для n_k и r_k будем понимать выполнение неравенств

$$0 < a \le n_k(1 - r_k) \le b < \infty \tag{3.3}$$

с некоторыми постоянными $0 < a \le b < \infty$. В общем случае, для произвольного множества $M \subset \mathbb{N} \times (0,1)$ пар (n, r) условие согласования аналогично (3.3), т.е. имеет вид $0 < a \le n(1-r) \le b < \infty$ и будет обозначаться по-прежнему (3.3).

Теорема 3.1.3. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}^d$ *- последовательность точек вида* (3.2)*, удовлетворяющая условиям согласования* (3.3)*. Тогда последовательность нормированных ядер Сеге* $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^\infty$*, дискретизированных в этих точках образует фрейм пространства Харди* $H^2(\mathbb{D}^d)$ *относительно пространства коэффициентов* X*, состоящего из всех числовых последовательностей* $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty = \{\xi_{kj}\} \subset \mathbb{C}$*, для которых*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}_{n_k}^d} |\xi_{kj}|^2 \right)^{1/2} < \infty. \tag{3.4}$$

Оставляя доказательство этой теоремы до пункта 3.5 отметим справедливость непосредственного следствия из теоремы 3.1.3:

Следствие 3.1.4. *Для каждой функции* $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$ *существует последовательность* $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in X$ *такая, что справедливо представление*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{K}_{\lambda_n}.$$

При переходе к пространству $H^2(\mathbb{D}^d)$ возникает новый вопрос о росте числа обусловленности фрейма (см. Гл. 1 п. 1.7) пространства $H^2(\mathbb{D}^d)$ с ростом размерности d полидиска $\mathbb{D}^d$. Ответ на данный вопрос дается в следующем следствии из теоремы (3.1.3), доказательство которого приводится в пункте 3.5.

Следствие 3.1.5. *Пусть Φ^d - фрейм пространства $H^2(\mathbb{D}^d)$ на основе дискретизированных ядер Сеге. Тогда для числа обусловленности этого фрейма* $\mathrm{cond}(\Phi^d)$ *справедливо неравенство*

$$\mathrm{cond}(\Phi^d) \leq \left(\frac{2b/a}{1-e^{-2a}}\right)^{d/2}.$$

3.2 Двойственность для систем Бесселя

В дальнейшем доказательстве будет использоваться следующий известный результат непосредственно вытекающий из равенства $R = S^*$ для операторов анализа и синтеза.

Предложение 3.2.1. *Для системы элементов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства F с сопряженным пространством G следующие условия эквивалентны:*

(i) существует постоянная $B > 0$ такая, что для всех $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n \right\|_F \leq B\|x\|_{\ell^2}; \tag{3.5}$$

(ii) существует постоянная $B > 0$ такая, что для всех $g \in G$

$$\|\{\langle \varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_{\ell^2} \leq B\|g\|_G. \tag{3.6}$$

Доказательство. С одной стороны, используя неравенство (3.5) и неравенство Коши-

Шварца получаем

$$\begin{aligned}
\|\{\langle\varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_{\ell^2} &= \sup_{\|\{c_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\ell^2}\le 1} \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n\langle\varphi_n, g\rangle\right| \\
&= \sup_{\|\{c_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\ell^2}\le 1} \left|\left\langle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n, g\right\rangle\right| \\
&\le \sup_{\|\{c_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\ell^2}\le 1} B\|\{c_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\ell^2}\|g\|_G \\
&\le B\|g\|_G.
\end{aligned}$$

С другой стороны, для произвольного $\varphi \in F$ в силу следствия из теоремы Хана-Банаха (см. например [66]), справедливо:

$$\|\varphi\|_F = \sup_{\|y\|_G\le 1} |\langle\varphi, g\rangle|, \quad g \in G.$$

Поэтому используя неравенство Коши-Шварца и неравенство (3.6) можем записать

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n\right\|_F &= \sup_{\|g\|_G\le 1} \left|\left\langle\sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n, g\right\rangle\right| \\
&= \sup_{\|g\|_G\le 1} \sum_{n=1}^{\infty} x_n\langle\varphi_n, g\rangle \\
&\le \sup_{\|g\|_G\le 1} \|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{l^2}\|\{\langle\varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_{l^2} \\
&\le \sup_{\|g\|_G\le 1} B\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{l^2}\|g\|_G \\
&\le B\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{l^2}.
\end{aligned}$$

□

Отметим, что неравенство (3.5) можно рассматривать как ограниченность оператора синтеза, а неравенство (3.6) как ограниченность оператора анализа (см. Гл. 1, п. 1.7).

3.3 Верхнее фреймовое неравенство

Сначала получим верхнее фреймовое неравенство.

Лемма 3.3.1. *Пусть нормированные ядра Сеге* $\widehat{K}_{\lambda_n^j}$ *дискретизированы в точках*

$$\lambda_n^j = r\omega_n^j, \quad \omega_n^j = (e^{2\pi i j_1/n}, \dots, e^{2\pi i j_d/n}), \quad j = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}_n^d.$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < r < 1$ *выполняется неравенство*

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^d} \xi_j \widehat{K}_{r\omega_n^j} \right\|_{H^2(\mathbb{D}^d)} \leq \left(\frac{n(1-r^2)}{1-r^{2n}} \right)^{d/2} \cdot \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_n^d} |\xi_k|^2 \right)^{1/2}. \tag{3.7}$$

Доказательство. По определению ядра Сеге

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^d} \xi_j \widehat{K}_{r\omega_n^j}(z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^d} \frac{\xi_j (1-r^2)^{d/2}}{\prod_{\nu=1}^d \left(1 - re^{-\frac{2\pi i j_\nu}{n}} z_\nu\right)} \\ &= (1-r^2)^{d/2} \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^d} \xi_j \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} r^{|m|} e^{-\frac{2\pi i \langle j,m \rangle}{n}} z^m \\ &= (1-r^2)^{d/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} r^{|m|} \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^d} \xi_j e^{-\frac{2\pi i \langle j,m \rangle}{n}} z^m, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $|m| = m_1 + \dots + m_d$, $z^m = z_1^{m_1} \dots z_d^{k_d}$ и $\xi_j = \xi_{j_1 \dots j_d}$. В выражении (3.8) абсолютная сходимость ряда по индексам $m \in \mathbb{Z}_+^d$ обеспечивает возможность замены порядка суммирования.

Переходя в равенстве (3.8) к нормам функций

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^d} \xi_j \widehat{K}_{r\omega_n^j} \right\|^2 = (1-r^2)^d \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} r^{2|m|} \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^d} \xi_j e^{-\frac{2\pi i \langle j,m \rangle}{n}} \right|^2 \tag{3.9}$$

и делая в (3.9) замену переменных

$$m_\nu \mapsto l_\nu n + k_\nu, \quad l_\nu = 0, 1, \dots, \quad k_\nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad \nu = 1, 2, \dots, d,$$

а также учитывая периодичность экспонент и используя d-мерное дискретное преобразование Фурье

$$\widehat{\xi}_k = \frac{1}{n^{d/2}} \cdot \sum_{j \in \mathbb{Z}_n^d} \xi_j e^{-\frac{2\pi i \langle j,k \rangle}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}_n^d,$$

получаем

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}_n^d}\xi_j\widehat{K}_{r\omega_n^j}\right\|^2_{H^2(\mathbb{D}^d)} =&(1-r^2)^d\sum_{l\in\mathbb{Z}_+^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}_n^d} r^{2|l|n}r^{2|k|}\cdot\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}_n^d}\xi_j e^{-\frac{2\pi i\langle j,ln+k\rangle}{n}}\right|^2\\
=&(1-r^2)^d\sum_{l\in\mathbb{Z}_+^d} r^{2|l|n}\sum_{k\in\mathbb{Z}_n^d} r^{2|k|}\cdot\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}_n^d}\xi_j e^{-\frac{2\pi i\langle j,k\rangle}{n}}\right|^2\\
=&(1-r^2)^d\sum_{k\in\mathbb{Z}_n^d} r^{2|k|}\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}_n^d}\xi_j e^{-\frac{2\pi i\langle j,k\rangle}{n}}\right|^2\cdot\sum_{l\in\mathbb{Z}_+^d} r^{2|l|n}\\
=&\left(\frac{n(1-r^2)}{1-r^{2n}}\right)^d\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}_n^d} r^{2|k|}\left|\widehat{\xi}_k\right|^2.
\end{aligned}$$

Очевидно, что $r^{2k_\nu}<1$, $\nu=1,2,\dots d$, поэтому на основании унитарности преобразования Фурье получаем выражение

$$\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}_n^d}\xi_j\widehat{K}_{r\omega_n^j}\right\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}\leq\left(\frac{n(1-r^2)}{1-r^{2n}}\right)^{d/2}\cdot\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_n^d}|\xi_k|^2\right)^{1/2}.$$

□

Следствие 3.3.2. *В обозначениях леммы 3.3.1 и при выполнении условий согласования* (3.3) *для всех* $n\in\mathbb{N}$ *и* $0<r<1$ *выполняется неравенство*

$$\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}_n^d}\xi_j\widehat{K}_{r\omega_n^j}\right\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}\leq B\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_n^d}|\xi_k|^2\right)^{1/2}, \tag{3.10}$$

с постоянной

$$B=\left(\frac{2b}{1-e^{-2a}}\right)^{d/2}.$$

Доказательство. Используя условие согласования и второй замечательный предел, находим

$$r^{2n}\leq\left(1-\frac{a}{n}\right)^{2n}\nearrow e^{-2a}<1, \tag{3.11}$$

откуда получаем оценку

$$\left(\frac{n(1-r^2)}{1-r^{2n}}\right)^{d/2}=\left(\frac{n(1-r)(1+r)}{1-r^{2n}}\right)^{d/2}<\left(\frac{2n(1-r)}{1-r^{2n}}\right)^{d/2}\leq\left(\frac{2b}{1-e^{-2a}}\right)^{d/2}=B.$$

□

Следствие 3.3.3. *В обозначениях леммы 3.3.1 и при выполнении условий согласования* (3.3) *для всех* $g \in H^2(\mathbb{D}^d)$ *справедливо неравенство*

$$\left\| \{\langle \widehat{K}_{r\omega_n^j}, g\rangle\}_{j\in\mathbb{Z}_n^d} \right\|_{\ell^2} \le B\|g\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}, \tag{3.12}$$

с постоянной

$$B = \left(\frac{2b}{1-e^{-2a}}\right)^{d/2}.$$

Доказательство. Используя предложение 3.2.1, из следствия 3.3.2 получаем (3.12). □

3.4 Нижнее фреймовое неравенство

Разобьем доказательство нижнего фреймового неравенства на серию лемм.

Рассмотрим семейство полунорм

$$\|f\|_n = \left(\frac{1}{n^d}\sum_{j\in\mathbb{Z}_n^d}|f(\omega_n^j)|^2\right)^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{3.13}$$

определенных для функции $f(z)$, имеющей граничные значения на торе

$$\mathbb{T}^d = \{z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_1| = 1, \dots, |z_d| = 1\}.$$

Лемма 3.4.1. *Для каждого полинома вида*

$$P(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_n^d} c_k z^k, \qquad c_k = c_{k_1,\dots,k_d} \in \mathbb{C}, \quad z^k = z_1^{k_1}\dots z_d^{k_d}$$

справедливо равенство

$$\|P\|_n = \|P\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}.$$

Доказательство. Применяя обратное дискретное преобразование Фурье

$$\check{c}_j = \frac{1}{n^{d/2}}\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}_n^d} c_k e^{\frac{2\pi i\langle j,k\rangle}{n}} = \frac{1}{n^{d/2}}\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}_n^d} c_k \omega_n^{\langle j,k\rangle} = \frac{1}{n^{d/2}}\cdot P(\omega_n^j).$$

Далее, используя унитарность дискретного преобразования Фурье получаем

$$\|P\|_n = \left(\frac{1}{n^d}\sum_{j\in\mathbb{Z}_n^d}|n^{d/2}\cdot\check{c}_j|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}_n^d}|c_j|^2\right)^{1/2} = \|P\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}.$$

□

Определение 3.4.2 (Оператор растяжения)**.** *Для всех $0 < r < 1$ и $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$ определим оператор растяжения σ_r следующим образом*

$$\sigma_r f(z) = f(rz), \quad rz = (rz_1, \dots, rz_d).$$

Лемма 3.4.3. *Для всех $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$ и всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется следующее неравенство*

$$\|\sigma_r f\|_n \le \frac{\|f\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}}{(1-r^{2n})^{d/2}}.$$

Доказательство. Используя неравенство (3.7) и предложение 3.2.1, получаем

$$\begin{aligned}
\|\sigma_r f\|_n &= \left(\frac{1}{n^d}\sum_{j\in\mathbb{Z}_n^d}\left|f(r\omega_n^j)\right|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{n^d}\sum_{j\in\mathbb{Z}_n^d}\left|\frac{\langle f, \widehat{K}_{r\omega_n^j}\rangle}{(1-r^2)^{d/2}}\right|^2\right)^{1/2} \\
&\le \left(\frac{1}{n(1-r^2)}\right)^{d/2}\cdot\left(\frac{n(1-r^2)}{1-r^{2n}}\right)^{d/2}\cdot\|f\|_{H^2(\mathbb{D}^d)} \\
&= \left(\frac{1}{1-r^{2n}}\right)^{d/2}\cdot\|f\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}.
\end{aligned}$$

□

Следствие 3.4.4. *При выполнении условий согласования* (3.3) *семейство операторов растяжения σ_r, $0 < r < 1$ является равномерно ограниченным относительно последовательности полунорм $\|\cdot\|_n$, т.е. справедливо неравенство*

$$\|\sigma_r f\|_n \le C\|f\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 < r < 1,$$

с постоянной

$$C = \left(\frac{1}{1-e^{-2a}}\right)^{d/2}.$$

Доказательство. Достаточно учесть оценку $r^{2n} \le e^{-2a}$ из соотношения (3.11). $\square$

Лемма 3.4.5. *Пусть M множество всех пар (n, r), $n \in \mathbb{N}$, $r \in (0, 1)$ для которых выполняются условия согласования* (3.3). *Тогда для всех $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$ справедлива оценка*

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D}^d)} \le \sup_{(n,r)\in M} \|\sigma_r f\|_n. \tag{3.14}$$

Доказательство. Сначала проверим неравенство для полиномов вида

$$P(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_N^d} c_k z^k, \qquad c_k = c_{k_1\ldots k_d} \in \mathbb{C}.$$

Используя лемму 3.4.1 имеем

$$\begin{aligned}
\sup_{(n,r)\in M} \|\sigma_r P\|_n \ge & \sup_{(n,r)\in M, n>N} \|\sigma_r P\|_n \\
= & \sup_{(n,r)\in M, n>N} \|\sigma_r P\|_{H^2(\mathbb{D}^d)} \\
= & \sup_{0<r<1} \|\sigma_r P\|_{H^2(\mathbb{D}^d)} \\
= & \|P\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

В последнем равенстве мы использовали то, что $\sigma_r f$ стремится к f при $r \to 1$ для всех $f \in H^2$ и $\|\sigma_r f\|_{H^2(\mathbb{D})}$ монотонно возрастает с ростом r.

Теперь проверим неравенство (3.14) для произвольной функции $f \in H^2(\mathbb{D}^d)$, для которой выберем полином P таким образом, что $\|f - P\|_{H^2(\mathbb{D}^d)} < \varepsilon$. Используя неравенство треугольника имеем

$$\sup_{(n,r)\in M} \|\sigma_r f\|_n \ge \sup_{(n,r)\in M} \|\sigma_r P\|_n - \sup_{(n,r)\in M} \|\sigma_r (f - P)\|_n.$$

Используя уже полученную оценку для полиномов (3.15) и следствие 3.4.4 о равномерной ограниченности операторов растяжения σ_r

$$\begin{aligned}
\sup_{(n,r)\in M} \|\sigma_r P\|_n - \sup_{(n,r)\in M} \|\sigma_r (f - P)\|_n \ge & \|P\|_{H^2(\mathbb{D}^d)} - \frac{\|f - P\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}}{(1 - e^{-2a})^{d/2}} \\
\ge & \|f\|_{H^2(\mathbb{D}^d)} - \|f - P\|_{H^2} - \frac{\|f - P\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}}{(1 - e^{-2a})^{d/2}} \\
\ge & \|f\|_{H^2(\mathbb{D}^d)} - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{(1 - e^{-2a})^{d/2}}.
\end{aligned}$$

Ввиду произвольного $\varepsilon > 0$ окончательно находим

$$\sup_{(n,r)\in M} \|\sigma_r f\|_n \geq \|f\|_{H^2}.$$

$\square$

Замечание 3.4.6. *Лемма 3.4.5 остается в силе при замене множества M всех согласованных пар (n, r) на его подмножество $M' \subset M$, удовлетворяющее условию*

$$\sup_{(n,r)\in M'} r = 1.$$

Последнее условие означает, что вторая компонента пары $(n, r) \in M'$ принимает значения сколь угодно близкие к 1, что эквивалентно следующем условию

$$\sup_{(n,r)\in M'} n = \infty.$$

В самом деле, такое условие на M' обеспечивает справедливость аналога оценки (3.15) *при замене M на M' (надо лишь учесть монотонность роста $\|\sigma_r f\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}$ с ростом r).*

3.5 Доказательство основных результатов главы

Чтобы показать существование фрейма, описанного в условии теоремы 3.1.3, достаточно доказать справедливость фреймовых неравенств для всех $g \in H^2(\mathbb{D}^d)$. В качестве пространства коэффициентов X выберем пространство последовательностей, для которых выполняется (3.4). Очевидно, что дуальное пространство $Y = X^*$ будет снабжено нормой

$$\sup_{k=1,2,\dots} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d_{n_k}} |\xi_{kj}|^2 \right)^{1/2},$$

и поэтому фреймовые неравенства могут быть записаны в эквивалентном виде

$$A\|g\|_{H^2(\mathbb{D}^d)} \leq \sup_{k=1,2,\dots} \left\| \left\{ \langle \widehat{K}_{\lambda_{kj}}, g \rangle \right\}_{j\in\mathbb{Z}^d_{n_k}} \right\|_{\ell_2} \leq B\|g\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}, \quad 0 < A \leq B < \infty. \tag{3.16}$$

Выберем последовательность пар вида (3.1) которые удовлетворяют условиям согласования (3.3). Далее дискретизируем ядра Сеге в точках

$$\lambda_n = \lambda_k^j = r_k e^{\frac{2\pi i j}{n_k}} = \left(r_k e^{\frac{2\pi i j_1}{n_k}}, \ldots, r_k e^{\frac{2\pi i j_d}{n_k}} \right) = \left(r_k \omega_{n_k}^{j_1}, \ldots, r_k \omega_{n_k}^{j_d} \right).$$

При таком выборе точек дискретизации верхнее неравенство в формуле (3.16) очевидно следует из неравенства (3.10) и следствия 3.3.3.

Для доказательства нижнего неравенства из (3.16) воспользуемся определением семейства полунорм (3.13) и оценкой (3.14)

$$\begin{aligned}
\sup_{k=1,2,\ldots} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}_{n_k}^d} |\langle f, \widehat{K}_{r_k\omega_{n_k}^j}\rangle|^2 \right)^{1/2} &= \sup_{k=1,2,\ldots} (1-r_k^2)^{d/2} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}_{n_k}^d} |\langle f, K_{r_k\omega_{n_k}^j}\rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&= \sup_{k=1,2,\ldots} n_k^{d/2}(1-r_k^2)^{d/2} \left(\frac{1}{n_k^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}_{n_k}^d} |f(r_k\omega_{n_k}^j)|^2 \right)^{1/2} \\
&= \sup_{k=1,2,\ldots} n_k^{d/2}(1-r_k)^{d/2}(1+r_k)^{d/2}\|\sigma_{r_k} f\|_{n_k} \\
&\geq a^{d/2}\|f\|_{H^2(\mathbb{D}^d)}.
\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$A\|g\|_{H^2(\mathbb{D}^d)} \leq \sup_{k=1,2,\ldots} \left\| \left\{ \langle \widehat{K}_{r_k\omega_{n_k}^j}, g\rangle \right\}_{j\in\mathbb{Z}_{n_k}^d} \right\|_{\ell_2} \leq B\|g\|_{H^2(\mathbb{D}^d)},$$

с постоянными

$$A = a^{d/2},\ B = \left(\frac{2b}{1-e^{-2a}} \right)^{d/2}. \tag{3.17}$$

Теорема 3.1.3 доказана. Следствие 3.1.4 непосредственно вытекает из теоремы представления 1.7.3.

Доказательство следствия 3.1.5 следует из полученных в теореме 3.1.3 верхней и нижней границ фрейма (3.17).

Замечание 3.5.1. *Можно показать, что в одномерном случае жесткий фрейм относительно указанного в теореме 3.1.3 пространства последовательностей построить нельзя и поэтому число обусловленности фрейма Φ пространства $H^2(\mathbb{D})$ удовлетворяет неравенству*

$$\mathrm{cond}(\Phi) > 1. \tag{3.18}$$

С одной стороны, неравенство (3.18) *гарантирует как минимум степенной рост числа обусловленности построенного выше фрейма* Φ^d *пространства* $H^2(\mathbb{D}^d)$ *с ростом размерности* d *полидиска* $\mathbb{D}^d$*. С другой стороны, из следствия 3.1.5 следует, что рост числа обусловленности* $\mathrm{cond}(\Phi^d)$ *с ростом размерности* d *полидиска* $\mathbb{D}^d$ *остается не выше степенного.*

Глава 4

Порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм

В главе 1 нами была построена система представления в пространстве Харди H^2 на основе дискретизированных ядер Сеге. В данной главе мы переходим к эффективному алгоритму получения подобного представления и опираемся на работу Сильниченко [8], в которой было введено понятие порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма. В отличие от слабых жадных алгоритмов, порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм гарантирует сходимость представляющего ряда в естественной упорядоченности исходной системы.

Мы даем ответ на следующий вопрос: при каких условиях на последовательность точек единичного диска специального вида имеет место сходимость порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма для соответствующих подпространств, порожденных дискретизированным ядром Сеге в пространстве Харди H^2. Применяемый нами метода требует уточнения одного результата Тотика о приближении функций из пространства Харди H^2 посредством ядер Сеге для точек дискретизации специального вида.

В пункте 4.1 мы приводим краткие сведения о слабых жадных алгоритмах и их использовании для приближения функций элементами заданной системы представления. Далее в пункте 4.2 мы приводим результаты Сильниченко [8] относительно порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов. Доказательство основного результата приведено в пункте 4.3.

4.1 Предварительные сведения о слабых жадных алгоритмах

Жадные алгоритмы являются популярным способом нахождения представления при котором на каждом шаге находится субоптимальное решение. Жадные алгоритмы реализуют нелинейную аппроксимацию функций из заданного пространства при которой аппроксимирующие элементы выбираются из заранее фиксированного множества (словаря) и зависят от аппроксимируемой функции.

Разработано большое количество типов жадных алгоритмов: чистый жадный алгоритм, ортогональный жадный алгоритм, слабый жадный алгоритм, жадный алгоритм с релаксацией и т.д. Обзор теории жадных алгоритмов приведен в монографии В.Н.Темлякова [73]. Мы будет рассматривать один из типов жадных алгоритмов - порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм. Этот тип жадных алгоритмов сохраняет порядок элементов в представляющем ряде, сходимость такого жадного алгоритма была рассмотрена А.В.Сильниченко [8].

Сначала напомним определение слабого жадного алгоритма для дискретизированных нормированных воспроизводящих ядер.

Определение 4.1.1 (Слабый жадный алгоритм). *Пусть H - гильбертово пространство с воспроизводящим ядром и словарь элементов состоит из нормализованных воспроизводящих ядер $\widehat{K}_z = K_z/\|K_z\|$ для некоторого подмножества $z \in \Lambda \subset \Omega$ основного множества Ω. Пусть $f_0 = f$ и для каждого $n \geq 0$ если $f_n \neq 0$ найдем $z_n \in \Lambda$ такое, что*

$$\frac{|f_n(z_n)|}{\|K_{z_n}\|} \geq \gamma \sup_{z\in\Lambda} \frac{f_n(z)}{\|K_z\|}, \qquad 0 < \gamma < 1. \tag{??}$$

Далее примем

$$f_n = f_n(z_n)K_{z_n}/\|K_{z_n}\|^2 + f_{n+1} = h_n + f_{n+1}$$

и продолжим эту итеративную процедуру. Данная итеративная процедура называется жадным алгоритмом.

Отметим, что в обозначениях из определения жадного алгоритма остаток f_{n+1} ортогонален K_{z_n}, а именно

$$f_{n+1}(z_n) = \langle f_{n+1}, K_{z_n} \rangle = \langle f_n, K_{z_n} \rangle - f_n(z_n) \langle K_{z_n}, K_{z_n} \rangle / \|K_{z_n}\|^2 = 0$$

Известно, что для слабого жадного алгоритма справедлив следующий общий результат Джонса [54] и Маллата и Джанга [60] (см. также [63], глава 5, параграф 2).

Теорема 4.1.2. *Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ сходится к ортогональной проекции f на замыкание линейной оболочки $\overline{\text{span}}\{\widehat{K}_z\}_{z \in \Lambda}$. Поэтому если линейная оболочка функций составляющих словарь плотна в пространстве H, то $\|f_{n+1}\| \to 0$ и*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} h_n.$$

Согласно этой теореме, слабый жадный алгоритм по каждой полной системе функций всегда сходится. Однако, в общем случае слабый жадный алгоритм не дает ряда по естественно упорядоченной системе, ряд не является безусловно сходящимся. Полученная ранее система представления (фрейм) на основе дискретизированных ядер Сеге сходится безусловно в пространстве H^2, поэтому возникает вопрос об алгоритме, который бы сохранил порядок элементов в естественной нумерации.

Выходом из сложившейся ситуации является порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм предложенный А.В.Сильниченко в работе [8].

4.2 Порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм

В работе А.В.Сильниченко [8] рассматривались порядкосохраняющие слабые жадные алгоритмы в квазинормированных пространствах. Напомним, что квазинормированное пространство X - это такое векторное пространство с квазинормой, в котором для каждых $x, y \in X$ выполняется неравенство

$$\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|),$$

где $C > 0$ - некоторая постоянная.

Определение 4.2.1 (Пространство с равномерно непрерывной квазинормой)**.** *Векторное пространство X называется пространством с равномерно непрерывной квазинормой если для любых $\varepsilon > 0$, $R > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для произвольных $x \in X$ и $y \in X$ с нормами $\|x\| < R$, $\|y\| < \delta$ выполняется неравенство*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \varepsilon.$$

Далее, приведем определение порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма, введенное Сильниченко.

Определение 4.2.2 (Порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм [8])**.** *Пусть $\{L_k\}$ - последовательность линейных подпространств X и $\{\alpha_k\}$ - последовательность неотрицательных чисел. Порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм для произвольного вектора $f \in X$ определяется следующей итеративной процедурой. Пусть исходная аппроксимация равна нулю $s_0(f) = 0$, остаток $r_0(f) = f$ и оптимальный аппроксимирующий элемент $k_0(f) = 0$. Если $s_n(f), r_n(f)$ и $k_n(f)$ определены, то мы можем выбрать $k_{n+1} = k_{n+1}(f) > k_n(f)$ и $\varphi_{k_{n+1}} \in L_{k_{n+1}}$ такие, что выполняется соотношение*

$$\|r_n(f) - \varphi_{k_{n+1}}\| \leq \inf_{\varphi \in L_k, k > k_n} \|r_n(f) - \varphi\| + \alpha_n,$$

где α_n может быть неформально названо релаксацией. Далее положим $s_{n+1}(f) = s_n(f) + \varphi_{k_{n+1}}$ и $r_{n+1}(f) = f - s_{n+1}(f)$.

В отличие от обычных жадных алгоритмов, порядкосохраняющий алгоритм сохраняет заданный порядок элементов системы.

Если для всех $f \in X$ слагаемое $r_n(f)$ сходится к нулю при $n \to \infty$ или эквивалентно мы имеем представление $f = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{k_n}$ то говорят что алгоритм сходится (т.е. $s_n =$

$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k_\nu}$). Наш основной результат основан на следующей теореме А.В.Сильниченко о сходимости порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов.

Теорема 4.2.3 (Сходимость порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов [8])**.** *Предположим, что X - пространство с равномерно непрерывной квазинормой. Порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм по системе $\{L_k\}$ сходится для любой последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$ тогда и только тогда, когда существует $\sigma < 1$ такое, что для любых $f \in X$ и N существуют $n > N$ и $\varphi \in L_n$ такие, что*

$$\|f - \varphi\| \leq \sigma \|f\| \tag{4.1}$$

Результаты Сильниченко справедливы для произвольных квази-банаховых пространств, но в нашей работе мы рассматриваем только гильбертово пространство Харди H^2.

В качестве подпространств L_k, $k = 1, 2, \ldots$ мы выберем пространства порожденные ядрами Сеге $K_{\zeta_{k,j}}$, $j = 0, \ldots, n_k - 1$, которые дискретизированы в точках $\zeta_{k,j} \in \mathbb{D}$:

$$L_k := \left[K_{\zeta_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1} = \operatorname{span}\left\{K_{\zeta_{k,j}}\right\}_{j=0}^{n_k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

4.3 Доказательство основного результата

Выберем точки дискретизации ядер Сеге также как и прежде

$$\zeta_{k,j} = r_k e^{\frac{2\pi i j}{n_k}}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n_k - 1, \tag{4.2}$$

где мы предполагаем, что

$$r_k \nearrow 1, \qquad n_k \nearrow \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{4.3}$$

Основной результат главы 4 может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 4.3.1. *Пусть последовательность подпространств $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ порождена ядрами Сеге дискретизированными в точках удовлетворяющих* (4.2) *и* (4.3)*. Тогда* *порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм сходится в пространстве H^2 тогда и только тогда, когда r_k и n_k удовлетворяют предельному соотношению*

$$\limsup_{k\to\infty} n_k(1-r_k) > 0. \tag{4.4}$$

Неформально говоря, в теореме 4.3.1 каждое из подпространств $L_k,\ k = 1, 2, \dots$ порождено ядрами Сеге дискретизированными в корнях из единицы n_k-ой степени расположенных на окружности радиуса r_k.

Напомним несколько важных определений которые потребуются нам при доказательстве теоремы 4.3.1.

Определение 4.3.2 (Условие Бляшке [34])**.** *Последовательность точек $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию Бляшке если соблюдается неравенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-|z_n|) < \infty. \tag{4.5}$$

Определение 4.3.3 (Произведение Бляшке [34])**.** *Произведение Бляшке $B(z) \in H^2$ - это функция имеющая следующий вид*

$$B(z) = \prod_{n\geq 1} \frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n - z}{1-\overline{z_n}z}, \tag{4.6}$$

где $z_n,\ n = 1, 2, \dots$ - точки удовлетворяющие условию Бляшке (4.5).

В этой главе мы используем только конечные произведения Бляшке. Из определения произведения Бляшке очевидно, что оно имеет нули в точках z_n.

Определение 4.3.4 (Расстояние)**.** *В качестве расстояния между функцией $f \in H^2$ и линейным подпространством $L_k \subset H^2$ определенным как (замкнутая) линейная оболочка $\left[K_{\zeta_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1}$ из дискретизированных ядер Сеге $\left\{K_{\zeta_{k,j}}\right\}_{j=0}^{n_k-1}$ мы принимаем*

$$\operatorname{dist}(f,\ L_k) = \operatorname{dist}\left(f,\ \left[K_{\zeta_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1}\right) = \min_{a_0,\dots a_{n_k-1}}\left\|f - \sum_{j=0}^{n_k-1} a_j K_{\zeta_{k,j}}\right\|.$$

Сначала докажем вспомогательную лемму, необходимую для получения основного результата в теореме 4.3.1.

Лемма 4.3.5. *Пусть* $0 < r < 1$. *Расстояние от произвольного полинома* $p_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ *степени* $< n$ *до линейного пространства порожденного системой из ядер Сеге* $\{K_j\}_{j=0}^{n-1}$ *дискретизированных в точках*

$$z_j = re^{\frac{2\pi i j}{n}}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{4.7}$$

удовлетворяет следующему неравенству

$$\operatorname{dist}\left(p_n, [K_j]_{j=0}^{n-1}\right) \leq r^n \|p_n\|_{H^2}. \tag{4.8}$$

Доказательство. По следствию из теоремы Хана-Банаха, в произвольном банаховом пространстве B расстояние от функции $f \in B$ до подпространства $L \subset B$ может быть записано в виде

$$\operatorname{dist}(f, L) = \sup_{\|g\|=1,\, g \in L^\perp} |\langle f, g \rangle|. \tag{4.9}$$

Пусть $\mathcal{K}_{r,n}$ - это n-мерное пространство порожденное ядрами Сеге K_j дискретизированными в точках $z_j = re^{\frac{2\pi i j}{n}},\ j = 0, 1, \ldots n-1$. Тогда ортогональное дополнение пространства $\mathcal{K}_{r,n}$ имеет вид (см. например [63])

$$\mathcal{K}_{r,n}^\perp = \left\{ f \in H^2 : f\left(re^{\frac{2\pi i j}{n}}\right) = 0,\ j = 0, \ldots n-1 \right\}, \tag{4.10}$$

поскольку $f(z) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется

$$\langle f, K_j \rangle = 0, \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

Если аналитическая функция $f \in H^2$ имеет нулевые значения в точках $z_1, z_2, \ldots$ которые удовлетворяют условию Бляшке (4.5), то ее можно представить в видн $f = Bh$, где B - это соответствующее произведение Бляшке и h - функция из H^2. Обратное также верно.

Следовательно мы можем переписать выражение (4.10) как

$$\mathcal{K}_{r,n}^\perp = BH^2 = \{Bh : h \in H^2\},$$

где $B = B_{r,n}$ - произведение Бляшке с нулями в точках $z_j = re^{\frac{2\pi i j}{n}},\ j = 0, 1, \ldots n-1$.

Используя (4.9) мы можем найти расстояние между полиномом p_n и n-мерным пространством $\mathcal{K}_{r,n}$ порожденным ядрами Сеге $K_{r,n}$ следующим образом

$$\operatorname{dist}(p_n, \mathcal{K}_{r,n}) = \sup_{\|g\|=1,\ g\in\mathcal{K}_{r,n}^{\perp}} |\langle p_n, g\rangle| = \sup_{\|h\|=1} |\langle p_n, B_{r,n}h\rangle|. \tag{4.11}$$

Учитывая, что точки дискретизации расположены на окружности радиуса r и имеют специальный вид (4.7), запишем определение произведения Бляшке (4.6) для нашего конкретного случая в виде

$$\begin{aligned} B_{r,n}(z) &= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{r}{re^{\frac{2\pi ij}{n}}} \cdot \frac{re^{\frac{2\pi ij}{n}} - z}{1 - zre^{-\frac{2\pi ij}{n}}} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{e^{\frac{2\pi ij}{n}}} \cdot \frac{z - re^{\frac{2\pi ij}{n}}}{zre^{-\frac{2\pi ij}{n}} - 1} \\ &= \frac{z^n - r^n}{r^n \prod_{j=0}^{n-1} z - \frac{e^{\frac{2\pi ij}{n}}}{r}} = \frac{z^n - r^n}{r^n\left(z^n - \frac{1}{r^n}\right)} = \frac{r^n - z^n}{1 - r^n z^n}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

где в числителе находятся корни из единицы n-ой степени расположенные на окружности радиуса r, а в знаменателе находятся корни из единицы n-ой степени расположенные на окружности радиуса $1/r$.

Отметим, что мы можем представить произведение Бляшке (4.12) в виде ряда с лакунарной структурой

$$\begin{aligned} B_{r,n}(z) &= \frac{r^n - z^n}{1 - r^n z^n} = (r^n - z^n) \sum_{j=0}^{\infty} r^{nj} z^{nj} \\ &= r^n + r^n \sum_{j=1}^{\infty} r^{nj} z^{nj} - \frac{r^n}{r^n} \sum_{j=0}^{\infty} r^{nj} z^{n(j+1)} \\ &= r^n + r^n \sum_{j=1}^{\infty} r^{nj} z^{nj} - \frac{1}{r^n} \sum_{j=1}^{\infty} r^{nj} z^{nj} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^{nj}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

где коэффициенты ряда имеют вид $b_0 = r^n$ и $b_j = \left(r^n - \frac{1}{r^n}\right) r^{nj},\ j = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим функцию $h(z) \in H^2$ следующего вида:

$$h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, \quad \|h\| = 1.$$

Принимая во внимание (4.13), мы можем записать произведение $B_{r,n}(z)h(z)$ в виде

$$B_{r,n}(z)h(z) = r^n \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j + \ldots, \tag{4.14}$$

поскольку только эти слагаемые представлены для $z^j,\ j<n$.

По условию теоремы имеем $p_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$. Подставляя p_n и (4.14) в (4.11) мы получаем

$$|\langle p_n, B_{r,n}h\rangle| = r^n \left|\sum_{j=0}^{n-1} a_j\overline{c_j}\right| \le r^n\|p_n\|\|h\| = r^n\|p_n\|$$

где мы использовали то, что $\deg p_n < n$, определение скалярного произведения в H^2 через коэффициенты разложения в степенной ряд Тейлора (1.9) и неравенство Коши-Шварца. Также мы применили следующий тривиальный факт

$$\|h\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2 \ge \sum_{k=0}^{n-1}|c_n|^2.$$

□

Замечание 4.3.6. *В работе [76] Тотик показал, что для произвольного выбора точек дискретизации ядер Сеге* $\{\zeta_{k,j}\}_{j=0}^{n_k-1}\subset\mathbb{D}$ *выполняется равенство*

$$\mathrm{dist}(1,\ L_k) = \mathrm{dist}\left(1,\ \left[K_{\zeta_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1}\right) = \prod_{j=0}^{n_k-1}|\zeta_{k,j}|. \tag{4.15}$$

Однако, в лемме 4.3.5 мы выбрали точки дискретизации специального вида (4.7), *что позволило нам получить получить оценку на расстояние от каждого полинома* $p_{n_k},\ \deg p_{n_k} < n_k$ *до* L_k, *а не только для случая* $p_{n_k}=1$. *Равенство* (4.15) *показывает, что неравенство* (4.8) *точное.*

Замечание 4.3.7. *Мы можем выбрать последовательности* $\{r_k\},\{n_k\}$ *так, чтобы величины наилучших приближений функции* $f\in H^2$ *по подпространствам* $\{L_k\}$ *стремились к нулю, т.е.:*

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{dist}(f,\left[K_{\zeta_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1}) = 0.$$

Действительно, как следует из леммы 4.3.5, последнее соотношение имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k\to\infty} n_k(1-r_k) = \infty.$$

Доказательство теоремы 4.3.1. Перейдем к доказательству основной теоремы. Для этого достаточно проверить, что условие критерия Сильниченко (4.1) верно, заметим, что оно эквивалентно неравенству

$$\liminf \operatorname{dist}(f, L_k) < \sigma \|f\|. \tag{4.16}$$

Поскольку полиномы плотны в пространстве H^2, то для произвольного $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать полином p_n степени $< n$ который приближает функцию $f \in H^2$

$$\|f - p_n\| \leq \varepsilon \|f\|.$$

Далее, пусть k будет достаточно велико $n_k > n$. Используя лемму 4.3.5 и неравенство треугольника имеем выражение

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(f, L_k) &\leq \operatorname{dist}(f - p_n, L_k) + \operatorname{dist}(p_n, L_k) \\ &\leq \varepsilon \|f\| + r_k^n \|p_n\| \\ &\leq (r_k^n + r_k^n \varepsilon + \varepsilon) \|f\|. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Следовательно, критерий Сильниченко (4.1) соблюдается если

$$\liminf r_k^{n_k} < 1,$$

что эквивалентно (4.4) с учетом

$$\ln \frac{1}{r_k} \sim 1 - r_k, \qquad \text{при} \quad r_k \to 1.$$

Исходя из вышесказанного, порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм сходится если соблюдается неравенство (4.4). Учитывая замечание 4.3.6 о точности неравенства (4.15) мы видим, что обратное также верно. □

Заключение

В диссертации исследованы задачи представления функций рядами по последовательности дискретизированных значений воспроизводящего ядра Сеге пространства Харди. В работе получены следующие результаты.

1. Построен фрейм на основе последовательности дискретизированного ядра Сеге в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ и как следствие, получен ответ на открытый вопрос из работы Фрикейна, Хоя и Лефевра.
2. Найдены условия на последовательность точек единичного диска комплексной плоскости $\mathbb{D}$, при выполнении которых последовательность дискретизированных в этих точках значений ядра Сеге образует систему представления в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$.
3. Построен фрейм пространства Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$ и получена оценка роста числа обусловленности этого фрейма в зависимости от размерности d полидиска $\mathbb{D}^d$.
4. Найдены условия на последовательность точек единичного диска $\mathbb{D}$ при которых сходится порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ для соответствующих подпространств, порожденных ядром Сеге дискретизированным в точках этой последовательности.

Литература

[1] Ахиезер, Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. – Москва: Наука, 1966. – 543 с.

[2] Галатенко, В. В. О свойствах орторекурсивных разложений по подпространствам / В. В. Галатенко, Т. П. Лукашенко, В. Н. Садовничий // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. – 2014. – Т. 284. – С. 138–141. – DOI: 10.1134/S0371968514010075

[3] Кашин, Б. С. Замечание об описании фреймов общего вида / Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова // Математические заметки. – 2002. – Т. 72, № 6. – С. 941–945. – DOI: 10.4213/mzm675

[4] Лукашенко, Т. П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам / Т. П. Лукашенко // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2001. – № 1. – С. 6–10.

[5] Напалков, В. В. Ортоподобные системы разложения в пространствах с воспроизводящим ядром / В. В. Напалков // Уфимский математический журнал. – 2013. – Т. 5, № 4. – С. 91–104.

[6] Новиков, И. Я. Теория всплесков / И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 616 с. – ISBN: 5-922106-42-2

[7] Свешников, А. Г. Лекции по математической физике: Учебное пособие / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов. – Москва: Издательство МГУ, 1993. – 352 с. – ISBN: 5-211-02073-1

[8] Сильниченко, А. В. О сходимости порядкосохраняющих слабых жадных алго-

ритмов / А. В. Сильниченко // Математические заметки. – 2008. – Т. 84, № 5. – С. 795–800. – DOI: 10.4213/mzm6365

[9] Терехин, П. А. Фреймы в банаховом пространстве и их приложения к построению всплесков / П. А. Терехин // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. – Вып. 2. – С. 65–81.

[10] Терехин, П. А. Системы представления и проекции базисов / П. А. Терехин // Математические заметки. – 2004. – Т. 75, № 6. – С. 944–947. – DOI: 10.4213/mzm562

[11] Терехин, П. А. Банаховы фреймы в задаче аффинного синтеза / П. А. Терехин // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 9. – С. 127–146. – DOI: 10.4213/sm5655

[12] Терехин, П. А. Фреймы в банаховом пространстве / П. А. Терехин // Функциональный анализ и его приложения. – 2010. – Т. 44, № 3. – С. 50–62. – DOI: 10.4213/faa2994

[13] Терехин, П. А. О бесселевых системах в банаховом пространстве / П. А. Терехин // Математические заметки. – 2012. – Т. 91, №. 2. – С. 285–296. – DOI: 10.4213/mzm7697

[14] Халмош, П. Гильбертово пространство в задачах / П. Халмош – Москва: Мир, 1970. – 351 с.

[15] Ali, S. Coherent States, Wavelets, and Their Generalizations / S. Ali, J-P. Antoine, J-P. Gazeau. – 2nd ed. – New York: Springer-Verlag, 2014. – 586 p. – DOI: 10.1007/978-1-4612-1258-4

[16] Alroubi, A. Nonuniform sampling and reconstruction in shift invariant spaces / A. Alroubi, K. Gröchenig // SIAM Review. – 2001. – Vol. 43, № 4. – P. 585–620. – DOI: 10.1137/S0036144501386986

[17] Arias, M. Characterization of Bessel Sequences / M. Arias, G. Corach, M. Pacheco // Extracta mathematicae. – 2007. – Vol. 22, № 1. – P. 55–66.

[18] Aronszajn, N. Theory of reproducing kernels / N. Aronszajn // Transactions of the American mathematical society. – 1950. – Vol. 68. – P. 337–404. – DOI: 10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7

[19] Arqub, O. A. Solving optimal control problems of Fredholm constraint optimality via the reproducing kernel Hilbert space method with error estimates and convergence analysis / O. A. Arqub, N. Shawagfeh // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2021. – Vol. 44, № 10. – P. 7915–7932. – DOI: 10.1002/mma.5530

[20] Arroyo, J.E.C. An iterated greedy algorithm for total flow time minimization in unrelated parallel batch machines with unequal job release times / J.E.C. Arroyo, J.Y.-T. Leung, R. G. Tavares // Engineering Applications of Artificial Intelligence. – 2019. – Vol. 77. – P. 239–254. – DOI: 10.1016/j.engappai.2018.10.012

[21] Balazs, P. Frame Theory for Signal Processing in Psychoacoustics / P. Balazs, N. Holighaus, T. Necciari, D. Stoeva // Excursions in Harmonic Analysis, Vol. 5. Applied and Numerical Harmonic Analysis. – Birkhäuser, 2017. – P. 225–268. – DOI: 10.1007/978-3-319-54711-4_10

[22] Belkin, M. To understand deep learning we need to understand kernel learning / M. Belkin, S. Ma, S. Mandal // Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning, ICML 2018. – 2018.– P. 541–549.

[23] Cai, J.-F. Linearized Bregman Iterations for Frame-Based Image Deblurring / J.-F. Cai, S. Osher, S. Zuowei // SIAM Journal on Imaging Sciences. – 2009. – Vol. 2, № 1. – P. 226–252. – DOI: 10.1137/080733371

[24] Casazza, P. Frames for Banach spaces / P. Casazza, D. Han, D. R. Larson // Contemporary Mathematics. – 1999. – Vol. 247. – P. 149–182. – DOI: 10.1090/conm/247/03801

[25] Casazza, P. Frame expansion in separable Banach spaces / P. Casazza, O.

Christensen, D. T. Stoeva // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2005. – Vol. 307, №. 2. – P. 710–723. – DOI: 10.1016/j.jmaa.2005.02.015

[26] Casazza, P. Frames and the Feichtinger Conjecture / P. Casazza, O. Christensen, A. Lindner, R. Vershynin // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2005. – Vol. 133, № 4. – P. 1025–1033. – DOI: 10.2307/4097661

[27] Casazza, P. Finite Frames: Theory and Applications / P. Casazza, G. Kutyniok. – New York: Springer, 2012. – 485 p. – DOI: 10.1007/978-0-8176-8373-3

[28] Chen, L. Deep Neural Tangent Kernel and Laplace Kernel Have the Same RKHS / L. Chen, S. Xu // International Conference on Learning Representations. – 2021. – http://doi.org/10.48550/arXiv.2009.10683

[29] Christensen, O. An introduction to Frames and Riesz bases / O. Christensen. – 2nd ed. – Basel: Birkhauser, 2016. – 729 p. – DOI: 10.1007/978-3-319-25613-9

[30] Conway, J. Functions of one complex variable II / J. Conway. – New York: Springer-Verlag, 1995. – 412 p. – DOI: 10.1007/978-1-4612-0817-4

[31] Daubechies, I. Ten Lectures on Wavelets / I. Daubechies. – Philadelphia: SIAM Press, 1992. – 357 p. – DOI: 10.1137/1.9781611970104

[32] Donoho, D. L. Optimally sparse representations in general non orthogonal dictionaries via l_1 minimization / D. L. Donoho, M. Elad // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 2003. – Vol. 100, № 5. – P. 2197–2202. – DOI: 10.1073/pnas.0437847100

[33] Duffin, R. J. A class of nonharmonic Fourier series / R. J. Duffin, A. C. Schaeffer // Transactions of the American Mathematical Society. – 1952. – Vol. 72, № 2. – P. 341–366. –DOI: 10.1090/s0002-9947-1952-0047179-6

[34] Duren, P. L. Theory of H^p spaces / P. L. Duren. – New York: Academic Press, 1970. – 258 p. – ISBN: 978-0122251504

[35] Duren, P. L. Bergman spaces / P. L. Duren, A. P. Schuster. – Providence: AMS, 2004. – 318 p. – ISBN: 0-8218-0810-9

[36] Eldar, Y. C. Optimal tight frames and quantum measurement / Y. C. Eldar, G. D. Forney // IEEE Transactions on Information Theory. – 2002. – Vol. 48, № 3. – P. 599–610. – DOI: 10.1109/18.985949

[37] Feichtinger, H. G. Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions. Part I / H. G. Feichtinger, K. Grochenig // Journal of Functional Analysis. – 1989. – Vol. 86, № 2. – P. 307–340. – DOI: 10.1016/0022-1236(89)90055-4

[38] Feichtinger, H. G. Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions. Part II / H. G. Feichtinger, K. Grochenig // Monatshefte für Mathematik. – 1989. – Vol. 108. – P. 129–148. – DOI: 10.1007/BF01308667

[39] Fricain, E. Representing systems generated by reproducing kernels / E. Fricain, L. Khoi, P. Lefèvre // Indagationes Mathematicae. – 2018. – Vol. 29, № 3. – P. 860–872. – DOI: 10.1016/j.indag.2018.01.004

[40] Führ, H. Density of sampling and interpolation in reproducing kernel Hilbert spaces / H. Führ, K. Gröchenig, A. Haimi, A. Klotz, J. L. Romero // Journal of the London Mathematical Society. – 2017. – Vol. 96, № 3. – P. 663–686. – DOI: 10.1112/jlms.12083

[41] Gao, J. On a class of a support vector kernels based on frames in function Hilbert spaces / J. Gao, C. Harris, S. Gunn // Neural Computation. – 2001. – Vol. 13, № 9. – P. 1975–1994. –DOI: 10.1162/089976601750399263

[42] Gazeau, J-P. Coherent States in Quantum Physics / J-P. Gazeau. – Wiley, 2009. – 258 p. – DOI: 10.1002/9783527628285

[43] Gröchenig, K. Describing functions: Atomic decompositions versus frames / K. Gröchenig // Monatshefte für Mathematik. – 1991. – Vol. 112, № 1. – P. 1–42. – DOI: 10.1007/BF01321715

[44] Gröchenig, K. Modulation spaces and pseudodifferential operators / K. Gröchenig,

C. Heil // Integral Equations and Operator Theory. – 1999. – Vol. 34. – P. 439–457. – DOI: 10.1007/BF01272884

[45] Gröchenig, K. Foundations of Time-Frequency Analysis / K. Gröchenig. – Birkhauser, 2000. – 376 p. – DOI: 10.1007/978-1-4612-0003-1

[46] Gumah, G. Application of reproducing kernel Hilbert space method for solving second-order fuzzy Volterra integro-differential equations / G. Gumah, M. F. M. Naser, M. Al-Smadi, S. K. Al-Omari // Advances in Difference Equations. – 2018. –Vol. 1. – P. 1–15. – DOI: 10.1186/s13662-018-1937-8

[47] Harbrecht, H. Multilevel frames for sparse tensor product spaces / H. Harbrecht, R. Schneider, C. Schwab // Numerische Mathematik. – 2008. – Vol. 110. – P. 199–220. – DOI: 10.1007/s00211-008-0162-x

[48] Hardy, G. H. The Mean Value of the Modulus of an Analytic Function / G. H. Hardy // Proceedings of London Mathematical Society. – 1915. – Vol. 14. – P. 269-277. – DOI: 10.1112/plms/s2_14.1.269

[49] Hedenmalm, H. Theory of Bergman Spaces / H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu. – New York: Springer-Verlag, 2000. – 289 p. – DOI: 10.1007/978-1-4612-0497-8

[50] Heil, C. A Basis Theory Primer: Expanded Edition / C. Heil. – Basel: Birkhauser, 2011. – 562 p. – ISBN: 978-0817646868

[51] Horowitz, C. Zeros of functions in the Bergman spaces / C. Horowitz // Duke Mathematical Journal. – 1974. – Vol. 41. – P. 693–710. – DOI: 10.1215/S0012-7094-74-04175-1

[52] Hui, L. Kernel machines beat deep neural networks on mask-based single-channel speech enhancement / L. Hui, S. Ma, M. Belkin // Proceedings of the 20th Annual Conference of the International Speech Communication Association. – 2019. – P. 2748–2752. – DOI: 10.21437/Interspeech.2019-1344

[53] Jacot, A. Neural Tangent Kernel: Convergence and Generalization in Neural Networks / A. Jacot, C. Hongler, F. Gabriel // Proceedings of the 32nd International

Conference on Neural Information Processing Systems. – 2018. – P. 8580–8589. – DOI: 10.48550/arXiv.1806.07572

[54] Jones, L. K. On a Conjecture of Huber Concerning the Convergence of Projection Pursuit Regression / L. K. Jones // The Annals of Statistics. – 1987. – Vol. 15, № 2. – P. 880–882. – DOI: 10.1214/aos/1176350382

[55] Jorgensen, P. E. T. Reproducing Kernel Hilbert Space vs. Frame Estimates / P. E. T. Jorgensen, M.-S. Song // Mathematics. – 2015. – Vol. 3, № 3. – P. 615–625. – DOI: 10.3390/math3030615

[56] Katznelson, Y. An Introduction to Harmonic Analysis, 3rd edition / Y. Katznelson. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 336 p. – DOI: 10.1017/CBO9781139165372

[57] Kontak, M. A greedy algorithm for nonlinear inverse problems with an application to nonlinear inverse gravimetry / M. Kontak, V. Michel // International Journal on Geomathematics. – 2018. – Vol. 9, № 2. – P. 167–198. – DOI: 10.1007/s13137-018-0110-6

[58] Koosis, P. Introduction to H_p spaces / P. Koosis. – 2nd ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 304 p. – ISBN: 978-0521056816

[59] Kreyszig, E. Introductory functional analysis with applications / E. Kreyszig. – New York: Wiley, 1989. – 704 p. –ISBN: 978-0471504597

[60] Mallat, S. G. Matching pursuits with time-frequency dictionaries / S. G. Mallat, Z. Zhang // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1993. – Vol. 41, № 12. – P. 3397–3415. – DOI: 10.1109/78.258082

[61] Marcus, A. W. Interlacing Families II: mixed characteristic polynomials and the Kadison–Singer problem / A. W. Marcus, D. A. Spielman, N. Srivastava // Annals of Mathematics. – 2015. – Vol. 182, № 1. – P. 327–350. – DOI: 10.4007/annals.2015.182.1.8

[62] Nam, S. Recovery of cosparse signals with Greedy Analysis Pursuit in the presence of noise / S. Nam, M. E. Davies, M. Elad, R. Gribonval // 4th IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing. – 2011. – P. 361–364. – DOI: 10.1109/CAMSAP.2011.6136026

[63] Partington, J. Interpolation, identification, and sampling / J. Partington. – Oxford: Clarendon Press, 1997. – 267 p. – ISBN: 978-0198500247

[64] Paulsen, V. I. An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces / V. I. Paulsen. – Cambridge University Press, 2016. – 192 p. – DOI: 10.1017/CBO9781316219232

[65] Rakotomamonjy, A. Frames, reproducing kernels, regularization and learning / A. Rakotomamonjy, S. Canu // Journal of Machine Learning Research. – 2005. – Vol. 6. – P. 1485–1515.

[66] Rudin, W. Functional Analysis, 2nd edition / W. Rudin. – New York: McGraw-Hill, 1991. – 448 p. – ISBN: 978-0070542365

[67] Schaefer, H. H. Topological Vector Spaces / H. H. Schaefer, M. P. Wolff. – New York: Springer, 1999. – 346 p. – DOI: 10.1007/978-1-4612-1468-7

[68] Schölkopf, B. Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond / B. Schölkopf, A. J. Smola. – MIT Press, 2001. – 644 p. – ISBN: 978-0262194754

[69] Seip, K. Regular sets of sampling and interpolation for weighted Bergman spaces / K. Seip // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1993. – Vol. 117, № 1. – P. 213–220. – DOI: 10.2307/2159719

[70] Schuld, M. Quantum Machine Learning in Feature Hilbert Spaces / M. Schuld, N. Killoran // Physical Review Letters. – 2019. – Vol. 122, № 4. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.040504

[71] Takhtabnoos, F. A greedy MLPG method for identifying a control parameter in 2D parabolic PDEs / F. Takhtabnoos, A. Shirzadi // Inverse Problems

in Science and Engineering. – 2018. – Vol. 26, № 11. – P. 1676–1694. – DOI: 10.1080/17415977.2018.1428967

[72] Temlyakov, V. N. Greedy approximation / V. N. Temlyakov // Acta Numerica. – 2008. – Vol. 17. – P. 235–409. – DOI: 10.1017/S0962492906380014

[73] Temlyakov, V. N. Greedy approximation / V. N. Temlyakov. – New York: Cambridge University Press, 2011. – 418 p. – DOI: 10.1017/CBO9780511762291

[74] Temlyakov, V. N. Greedy algorithms in convex optimization on Banach spaces / V. N. Temlyakov // 48th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. – 2014. – P. 1331–1335. – DOI: 10.1109/ACSSC.2014.7094676

[75] Theodoridis, S. Machine Learning: A Bayesian and Optimization Perspective / S. Theodoridis. – Academic Press, 2015. – 1062 p. – ISBN: 978-0128015223

[76] Totik, V. Recovery of H^p functions / V. Totik // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1984. – Vol. 90, № 4. – P. 531–537. – DOI: 10.2307/2045025

[77] Vukotic D. A Sharp Estimate for A^p_α Functions in $\mathbb{C}^n$ / D. Vukotic // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1993. – Vol. 117, № 3. – P. 753–756. – DOI: 10.2307/2159138

[78] Yang, L.-H. The reproducing kernel method for solving the system of the linear Volterra integral equations with variable coefficients / L.-H. Yang, J.-H. Shen, Y. Wang // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 236, № 9. – P. 2398–2405. – DOI: 10.1016/j.cam.2011.11.026

[79] Yang, Y. Sparse online kernelized actor-critic Learning in reproducing kernel Hilbert space / Y. Yang, H. Zhu, Q. Zhang, B. Zhao, Z. Li, D. Wunsch // Artificial Intelligence Review. – 2021. – Vol. 55, № 1. – P. 1–36. – DOI: 10.1007/s10462-021-10045-9

[80] Zhang, H. Frames, Riesz bases, and sampling expansions in Banach spaces via semi-inner products / H. Zhang, J. Zhang // Applied and Computational Harmonic Analysis. – 2011. – Vol. 31. – No. 1. – P. 1–25. – DOI: 10.1016/j.acha.2010.09.007

[81] Zhang, J. Online Kernel Learning With Adaptive Bandwidth by Optimal Control Approach / J. Zhang, H. Ning, X. Jing, T. Tian // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. – 2021. – Vol. 32, № 5. – P. 1920-1934. – DOI: 10.1109/TNNLS.2020.2995482

Публикации автора по теме диссертации

[82] Speransky, K. S. A representing system generated by the Szegö kernel for the Hardy space / K. S. Speransky, P. A. Terekhin // Indagationes Mathematicae. – 2018. – Vol. 29, № 5. – P. 1318–1325. – DOI: 10.1016/j.indag.2018.06.001

[83] Сперанский, К. С. О существовании фреймов в пространстве Харди, построенных на основе ядра Сеге / К. С. Сперанский, П. А. Терехин // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2019. – № 2. – С. 57–68. – DOI: 10.26907/0021-3446-2019-2-57-68

[84] Сперанский, К. С. Построение фрейма в пространстве Харди, определенном на двумерном полидиске / К. С. Сперанский // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2019. – Т. 25, № 2. – С. 21–29. – DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-21-29

[85] Speransky, K. S. On the convergence of the order-preserving weak greedy algorithm for subspaces generated by the Szego kernel in the Hardy space / K. S. Speransky // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2021. – Т. 21, вып. 3. – С. 336–342. – DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-3-336-342

Материалы конференций и другие публикации

[86] Сперанский, К. С. Фреймовые свойства ядра Сеге в пространстве Харди / К. С. Сперанский, П. А. Терехин // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. – 2017. – Т. 54. – С. 337–339.

[87] Сперанский, К. С. О системах представления на основе воспроизводящих ядер в пространствах Харди и Бергмана / К. С. Сперанский // Исследования по

алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. – 2019. – № 9. – С. 17–54.

[88] Сперанский, К. С. О сходимости порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма для подпространств, порожденных ядром Сеге в пространстве Харди / К. С. Сперанский, П. А. Терехин // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. – 2022. – С. 273–274.

[89] Сперанский, К. С. Построение банахова фрейма в пространстве Харди, определенном на полидиске / К. С. Сперанский, П. А. Терехин // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. – 2020. – С. 382–384.

[90] Сперанский, К. С. Представляющие свойства ядра Сеге в пространстве Харди / К. С. Сперанский, П. А. Терехин // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы. – 2018. – С. 299–301.