

ФГБОУ ВО “Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”

На правах рукописи



ХАНАДЕЕВ Владислав Андреевич

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ
ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМАХ
СО СЛОЖНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ АТТРАКТОРА

1.3.4. – Радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени кандидата
физико–математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Москаленко О. И.

Саратов 2023

Содержание

Введение	4
1 Обобщенная синхронизация в системах со сложной топологией аттрактора	20
1.1 Определение режима обобщенной синхронизации, классические методы диагностики этого режима	20
1.1.1 Метод вспомогательной системы	21
1.1.2 Метод расчета спектра показателей Ляпунова	24
1.1.3 Метод ближайших соседей	25
1.2 Диагностика режима обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора	26
1.3 Выводы по главе 1	33
2 Перемежающееся поведение на границе обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора	35
2.1 Перемежаемость на границах различных типов хаотической синхронизации	35
2.2 Метод вспомогательной системы для выделения характерных фаз поведения в однонаправленно связанных системах, находящихся вблизи границы обобщенной синхронизации	37
2.3 Перемежающаяся обобщенная синхронизация в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора	38
2.4 Метод, основанный на анализе расположения изображающих точек на аттракторах взаимодействующих систем	45
2.5 Теоретические основы перемежаемости “перескоков”	47
2.6 Перемежающаяся обобщенная синхронизация в системах со сложной топологией аттрактора с взаимным типом связи	51
2.6.1 Взаимно связанные системы Лоренца	52
2.6.2 Взаимно связанные системы Чена	55
2.7 Выводы по главе 2	58
3 Влияние шума на обобщенную синхронизацию в системах со сложной топологией аттрактора	60
3.1 Теоретические предпосылки изучения влияния шума на обобщенную синхронизацию	60
3.2 Обобщенная синхронизация в присутствии шума в двух однонаправленно связанных системах Лоренца	61

3.3	Обобщенная синхронизация в присутствии шума в двух однаправленно связанных системах Чена	66
3.4	Влияние характеристик шумового сигнала на установле- ние обобщенной синхронизации в однаправленно свя- занных хаотических системах со сложной топологией ат- трактора	68
3.5	Обобщенная синхронизация в присутствии шума во вза- имно связанных системах со сложной топологией аттрак- тора	74
3.6	Выводы по главе 3	78
	Заключение	80
	Список литературы	85

Введение

Актуальность диссертационного исследования

Одним из актуальных направлений радиофизики, вызывающих большой интерес современных ученых, является изучение синхронизации нелинейных динамических систем, демонстрирующих хаотическое поведение [1–8]. Такое внимание исследователей к явлению хаотической синхронизации обусловлено, в первую очередь, его фундаментальностью. В то же самое время, известно, что это явление может найти практическое применение, например, в задачах передачи информации [9–14], в том числе, скрытой, при диагностике динамики некоторых биологических систем [15–26], при контроле хаоса в СВЧ генераторах [27–30] и пр. За последние несколько десятилетий выявлено несколько различных типов хаотической синхронизации, среди которых наиболее широко известны режимы фазовой синхронизации [31, 32], полной синхронизации [33], синхронизации с запаздыванием [34] и обобщенной синхронизации [35, 36].

Особый интерес представляет собой обобщенная синхронизация. Этот режим может наблюдаться в однонаправленно и взаимно связанных системах и означает установление функциональной связи между их состояниями [35–37]. В настоящее время существует достаточно большое число работ, направленных на исследование данного режима в системах с различным типом связи (см., например, [29, 35–47]). Для

данного режима были предложены методы диагностики, выявлены механизмы возникновения, показана возможность его наблюдения в эксперименте. В то же самое время, несмотря на активное изучение обобщенной синхронизации и наличие многочисленных работ, посвященных этому явлению, можно с достаточно большой долей уверенности утверждать, что этот режим исследован достаточно хорошо только в системах с относительно простой топологией аттрактора (в частности, с аттрактором ленточного типа) [48]. Однако, наряду с относительно простыми системами существует достаточно широкий класс систем, топология аттрактора которых является достаточно сложной. В рамках настоящей диссертационной работы под системами со сложной топологией аттрактора мы будем понимать системы с двулистной структурой аттрактора. Это такие системы, фазовое пространство которых состоит из двух различных подпространств, имеющих малую общую область, внутри которой фазовые траектории могут переходить из одного подпространства в другое и наоборот [49]. Так как каждое из подпространств визуально выглядит как гладкий лист, эти системы и называются осцилляторами с двулистной структурой аттрактора, а каждое из подпространств – листом. Примерами систем с двулистной структурой аттрактора являются, например, такие классические модели как осцилляторы Лоренца (системы с псевдогиперболическим аттрактором) [50–53], широко известные в метеорологии, или радиотехнические генераторы Чуа [54–58]. При определенном выборе значений управляющих параметров фазовые траектории таких систем как будто переходят с одного листа хаотического аттрактора на другой, фактически описывая двойную петлю на фазовой плоскости. Можно ожидать, что для систем с таким строением аттрактора процесс наступления режима обобщенной синхронизации будет отличаться от случая систем с относительно простой топологией. Поэтому настоящая диссертационная работа нацелена на изучение

особенностей режима обобщенной синхронизации и разработку новых методов диагностики для данного режима в системах со сложной топологией аттрактора.

Другим важным вопросом, тесно связанным с предыдущим, является анализ характеристик перемежающегося поведения [3, 59–62], имеющего место вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. В данном случае под перемежаемостью понимается чередование фаз синхронного и асинхронного поведения, а статистические характеристики длительностей синхронных фаз, как правило, подчиняются закономерностям, характерным для перемежаемости типа “on-off” [63, 64]. Опять же, эта закономерность характерна для систем с относительно простой топологией аттрактора, в то время как для систем со сложной топологией этот вопрос ранее не рассматривался. В то же самое время, можно ожидать, что отличия в механизмах возникновения данного режима в системах с различной топологией аттрактора смогут привести к отличиям в их поведении вблизи соответствующих границ. В связи с этим появляется вопрос о том, как перемежающееся поведение на границе обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора будет отличаться от уже известных типов перемежающегося поведения в системах с простой топологией? Этому вопросу также посвящена настоящая диссертация.

Еще одной существенной проблемой при изучении обобщенной синхронизации является влияние шума на установление этого режима. Наличие шума при функционировании реальных систем неизбежно, при этом сам шум может оказывать как конструктивное, так и деструктивное влияние на поведение систем [65–70]. Для систем с достаточно простой топологией аттрактора известно, что этот режим является, как правило, устойчивым по отношению к шумам [71, 72], что делает возможным его применение при скрытой передаче информации по каналам

связи с высоким уровнем шума [13]. На данный момент влияние шума на обобщенную синхронизацию в системах со сложной топологией аттрактора не изучено. Хотя, использование именно таких систем может повысить конфиденциальность передачи информации при использовании режима обобщенной синхронизации в системах скрытой коммуникации. Поэтому в рамках настоящей диссертационной работы будет также исследовано влияние шума на установление обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора и проведен анализ влияния характеристик шумового сигнала на границу установления этого режима.

Таким образом, на основании вышеизложенного можно заключить, что изучение особенностей режима обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора представляет интерес для современной радиофизики, что делает тему диссертационной работы важной и актуальной.

Цель диссертационной работы

Целью настоящей диссертационной работы является изучение особенностей обобщенной синхронизации и перемежающегося поведения, имеющего место вблизи ее границы, в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора, разработка новых методов анализа этого режима и исследование влияния шумов на его границу.

В соответствии с поставленной целью определены основные задачи диссертационного исследования:

- Исследование обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора, раз-

работка новых методов диагностики и выявление механизмов возникновения синхронного режима в таких системах.

- Анализ характеристик перемежающегося поведения, наблюдающегося вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора, разработка универсального метода выделения характерных фаз поведения в таких системах, справедливого как для однонаправленного, так и взаимного типов связи.
- Изучение влияния шума и его характеристик на границу обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора.

Научная новизна

Диссертационная работа содержит новые фундаментальные научные результаты в области изучения обобщенной хаотической синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора, в том числе, в системах с несколькими положительными показателями Ляпунова. В частности, в диссертационной работе впервые получены следующие результаты:

- Обнаружена обобщенная синхронизация в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора. Показано, что диагностирование этого режима возможно при помощи расчета спектра показателей Ляпунова и метода фазовых трубок, а для однонаправленно связанных систем — и при помощи метода вспомогательной системы. Применение метода ближайших соседей в данном случае приводит к некорректным результатам [73].

- Разработан универсальный метод выделения характерных (ламинарных и турбулентных) фаз поведения в системах со сложной топологией аттрактора, находящихся вблизи границы обобщенной синхронизации, справедливый как для систем с однонаправленной, так и взаимной связью [74].
- Показано, что вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора имеет место новый тип поведения, названный перемежаемостью перескоков (jump intermittency). Выявлены механизмы возникновения данного типа поведения. Показано, что тип перемежаемости в данном случае не зависит от типа связи между системами (однонаправленного или взаимного) [49, 75, 76].
- Изучен вопрос о влиянии шума на обобщенную синхронизацию в системах со сложной топологией аттрактора. Показано, что режим обобщенной синхронизации в данном случае оказывается устойчивым по отношению к шумам в широком, но ограниченном диапазоне изменения интенсивности шумового воздействия. При этом, характеристики шумового сигнала не оказывают существенного влияния на установление синхронного режима [77, 78].

Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с известными результатами в данной области. Они опубликованы в ряде научных статей в престижных отечественных и зарубежных научных журналах, в том числе, с высоким импакт-фактором.

Личный вклад

Все защищаемые результаты и положения, вошедшие в настоящую диссертационную работу, получены соискателем лично. Автором разра-

ботаны оригинальные программы, с помощью которых осуществлялось численное моделирование нелинейных динамических систем и производилась обработка полученных результатов. Планирование и постановка задач, интерпретация и обсуждение результатов, а также написание научных статей и тезисов докладов осуществлялись совместно с научным руководителем.

Научная и практическая значимость

В диссертационной работе решена научная задача, имеющая большое значение для современной радиофизики в части изучения особенностей обобщенной синхронизации и явлений, имеющих место вблизи ее границы, в системах со сложной топологией аттрактора. Научные результаты, полученные в ходе выполнения этой работы, являются, прежде всего, фундаментальными. Они оказали и будут оказывать существенное влияние на дальнейшее развитие научного направления, связанного с изучением обобщенной хаотической синхронизации в таких системах. Кроме того, полученные результаты могут найти практическое применение в информационно-телекоммуникационных системах, в частности, для повышения конфиденциальности известных способов скрытой передачи информации, основанных на режиме обобщенной синхронизации, в том числе, при наличии внешних шумов [10, 12, 13, 79]. А разработанные и адаптированные методы и подходы к анализу обобщенной синхронизации (метод фазовых трубок, метод перескоков и др.) смогут найти практическое применение при обработке экспериментальных данных, в том числе радиофизической и нейрофизиологической природы. На компьютерные программы, реализующие эти методы, получено два свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [80, 81].

Результаты фундаментальных исследований, полученные при подготовке диссертационной работы, внедрены в учебный процесс подготовки специалистов, обучающихся в институте физики ФГБОУ ВО “СГУ имени Н.Г. Чернышевского” по направлениям подготовки бакалавров и магистров “Прикладная математика и физика”, “Радиофизика” и “Информационные системы и технологии”.

Основные научные положения, выносимые на защиту

- Диагностика режима обобщенной синхронизации в системах со сложной (двулистной) топологией аттрактора возможна при помощи расчета спектра показателей Ляпунова и метода фазовых трубок, а для однонаправленно связанных систем — еще и при помощи метода вспомогательной системы. При этом, применение метода ближайших соседей к таким системам приводит к некорректным результатам.
- Разрушение режима обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора может быть обусловлено переключением системы между состояниями, соответствующими различным листам аттрактора, что позволяет для таких систем разработать метод выделения характерных фаз поведения, основанный на анализе расположения изображающих точек на аттракторах взаимодействующих систем.
- Вблизи границы режима обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора наблюдается перемежающееся поведение, характеристики которого (распределения длительностей фаз синхронного поведения и зависимость средней длительности фаз синхронного поведения от параметра связи) подчиняются экспоненциальным законам. Обнаруженный тип поведения, названный

перемежаемостью перескоков (jump intermittency), не зависит от типа связи между системами (однонаправленного или взаимного).

- Режим обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора устойчив по отношению к шумам в широком, но ограниченном диапазоне изменения интенсивности шумового воздействия, сопоставимым с амплитудой сигнала системы, на которую воздействует шум. При этом закон распределения шумового сигнала не оказывает существенного влияния на порог возникновения синхронного режима.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Она содержит 100 страниц текста, включая 25 иллюстраций и 1 таблицу. Список литературы содержит 122 источника.

Во **Введении** определена актуальность диссертационного исследования, сформулированы цели и задачи, описаны научная новизна и практическая значимость, приведены сведения о достоверности и апробации полученных результатов, сформулированы основные положения, выносимые на защиту, даны сведения о структуре и объеме работы, приведено краткое содержание основных разделов диссертации.

Первая глава диссертационной работы направлена на рассмотрение режима обобщенной синхронизации и методов его диагностики в системах со сложной (двулистной) топологией аттрактора. В начале главы приведено краткое описание известных результатов в области изучения обобщенной синхронизации: дано определение режима обобщенной синхронизации, сделан краткий обзор существующих классических методов и подходов для диагностики этого режима в однонаправленно и взаим-

но связанных системах, отмечены их достоинства и недостатки. Остальная часть главы направлена на рассмотрение возможности применения этих методов для диагностики обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. В качестве объектов исследования выбраны два однонаправленно связанных хаотических осциллятора Лоренца и две взаимно связанные системы Чена, являющиеся четырехмерной модификацией уравнений систем Лоренца. Установлено, что в обеих системах возможно диагностирование режима обобщенной синхронизации при помощи расчета спектра показателей Ляпунова, метод вспомогательной системы дает корректные результаты только в случае однонаправленной связи между системами, а метод ближайших соседей для обеих систем оказывается несправедливым. Взамен метода ближайших соседей предложено использовать его модификацию, учитывающую предысторию состояний взаимодействующих систем, – метод фазовых трубок, показана его эффективность как в случае однонаправленной, так и взаимной связи между системами. Результаты, полученные при помощи метода фазовых трубок, сопоставлены с методом расчета спектра показателей Ляпунова, получено хорошее соответствие между ними.

Во **второй главе** диссертации изложены результаты исследования перемежающегося поведения, имеющего место вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора. По аналогии с первой главой в начале главы приведены краткие теоретические сведения о перемежаемости и различных типах перемежающегося синхронного поведения, имеющего место вблизи границ различных типов хаотической синхронизации. Особое внимание уделено перемежаемости типа “on-off”, наблюдаемой на границе обобщенной синхронизации в системах с относительно простой топологией аттрактора. Путем численного моделирования двух однонаправленно связанных осцилляторов Лоренца установлено, что ха-

рактики перемежаемости, имеющей место вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, существенно отличаются от характеристик перемежаемости типа “on-off”.

Для выделения характерных фаз синхронного и асинхронного поведения (ламинарных и турбулентных фаз, соответственно) вблизи границы обобщенной синхронизации в системах с однонаправленным типом связи использовался метод вспомогательной системы, являющийся одним из классических методов анализа в данном случае. Выявлены механизмы возникновения/разрушения режима обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. Показано, что разрушение режима обобщенной синхронизации в данном случае обусловлено переключением системы между состояниями, соответствующими различным листам аттрактора, что позволяет предложить метод выделения характерных фаз поведения систем, основанный на анализе расположения изображающих точек на аттракторе, для определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации. Предложенный метод назван методом перескоков, а тип перемежаемости, реализуемый в данном случае, – перемежаемостью “перескоков” (jump intermittency). При помощи метода вспомогательной системы и метода перескоков численно получены распределения длительностей ламинарных фаз (временных интервалов, в течение которых обе взаимодействующие системы характеризуются изображающими точками, находящимися на одинаковых листах хаотических аттракторов) и зависимости средней длительности ламинарных фаз (вышеназванных временных интервалов) от параметра связи. Показано, что результаты обоих методов хорошо согласуются друг с другом.

Изложены теоретические основы перемежаемости “перескоков”. Приведены аналитические выражения для распределений длительностей ла-

минарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра связи. Показано, как теоретически, так и численно, что обе закономерности в режиме перемежаемости “перескоков” подчиняются экспоненциальным законам. Путем расчета среднеквадратичных отклонений численно полученных распределений от аналитических закономерностей произведена оценка эффективности метода перескоков по сравнению с методом вспомогательной системы для двух однонаправленно связанных систем Лоренца. Показано, что по данной мере предложенный метод совсем немного уступает классическому методу вспомогательной системы, но с ростом величины параметра связи оба метода становятся практически равнозначными, что позволяет использовать его для анализа перемежаемости даже в том случае, когда реализация метода вспомогательной системы не представляется возможной.

Предложенный метод применен к системам с взаимным типом связи со сложной топологией аттрактора – двум взаимно связанным системам Лоренца и двум взаимно связанным осцилляторам Чена, находящимся вблизи границы обобщенной синхронизации. Впервые показано, что в данном случае также имеет место перемежаемость “перескоков”: распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средних длительностей ламинарных фаз от параметра связи подчиняются экспоненциальным законам, а разрушение синхронного режима по-прежнему связано с перескоком изображающих точек на разные листы хаотических аттракторов взаимодействующих систем. Вышесказанное свидетельствует о независимости типа перемежаемости, имеющего место вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, от типа связи между системами (однаправленная или взаимная).

Третья глава диссертационной работы посвящена изучению влияния шума на обобщенную синхронизацию в системах со сложной топологией

аттрактора. Исследования по-прежнему проводились на примере систем Лоренца и систем Чена, связанных однонаправленно и взаимно, а для диагностики обобщенной синхронизации использовались те же методы, что и для систем без шума: метод вспомогательной системы (только для однонаправленной связи) и метод расчета спектра показателей Ляпунова (для обоих типов связи). Показано, что показатели Ляпунова, отвечающие за установление режима обобщенной синхронизации, полученные в отсутствие и при наличии шума, хотя и немного отличаются друг от друга, всегда переходят в область отрицательных значений практически при одних и тех же значениях параметра связи, что и соответствует одинаковым порогам установления обобщенной синхронизации в исследуемой системе. Аналогичные результаты для однонаправленной связи показывает и метод вспомогательной системы. При помощи этих методов построены зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации от интенсивности шумового воздействия. Показано, что режим обобщенной синхронизации в исследуемых системах оказывается устойчивым по отношению к шумам в широком, но ограниченном диапазоне изменения интенсивности шумового воздействия. Если мощность шума сопоставима с мощностью сигнала одной из взаимодействующих (в случае однонаправленной связи – ведущей) систем и даже немного превышает ее, шум практически не влияет на пороговое значение установления синхронного режима. Такое поведение границы обобщенной синхронизации в присутствии шума обусловлено слабым влиянием шума на аттракторы взаимодействующих систем. Показано, что внешнее шумовое воздействие приводит к зашумлению аттракторов систем, подверженных шумовому воздействию, но при этом не нарушает их двулистную структуру.

Изучен вопрос о влиянии характеристик шумового сигнала на установление обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией

аттрактора. Установлено, что характер распределения шумового воздействия оказывает слабое влияние на порог обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах.

В **Заключении** сформулированы основные результаты и выводы диссертационного исследования.

Достоверность полученных результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением хорошо известных и общепринятых моделей, использованием строгих математических методов и подходов, обоснованных в научной литературе. Достоверность полученных результатов подтверждается отсутствием противоречий с уже существующими результатами, известными в научной литературе, воспроизводимостью результатов, а также согласованностью получаемых данных с помощью разных методов диагностики.

Апробация работы и публикации

Настоящая диссертационная работа выполнена на кафедре физики открытых систем института физики ФГБОУ ВО “Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского” (СГУ).

Материалы диссертационной работы использовались при выполнении научно–исследовательских работ, проводимых в СГУ, среди которых гранты Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (проекты №№ МК-531.2018.2, МД-21.2020.2, МД-18.2022.1.2) и грант Российского научного фонда (проект № 19-12-00037).

Результаты, представленные в диссертационной работе, неоднократно докладывались на научных конференциях и школах и отражены в тезисах докладов: XVIII Научной школе “Нелинейные волны – 2018”, 26 февраля – 4 марта 2018 г., Нижний Новгород, Российская Федерация [82] (стендовый доклад), IX научно-практической конференции “Presenting Academic Achievements to the World”, 10-11 апреля 2018 г., Саратов, Российская Федерация [83] (стендовый доклад), XIII Всероссийской научной конференции молодых ученых “Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”, 4-6 сентября 2018 г., Саратов, Российская Федерация [84] (стендовый доклад), XVII Всероссийской школе-семинаре “Физика и применение микроволн” имени А.П. Сухорукова” (“Волны-2019”), 26-31 мая 2019 г., Можайск, Российская Федерация [85] (стендовый доклад), XI научно-практической конференции “Presenting Academic Achievements to the World”, 3 июня 2020 г., Саратов, Российская Федерация (стендовый доклад), XVII Всероссийской школе-семинаре “Волновые явления в неоднородных средах имени профессора А.П. Сухорукова” (“Волны-2020”), 23-28 августа 2020 г., Можайск, Российская Федерация [86] (устный доклад), XV Всероссийской научной конференции молодых ученых “Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”, 8–10 сентября 2020 г., Саратов, Российская Федерация [87] (стендовый доклад), XX Международной конференции и молодежной школе “Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии”, 23–27 ноября 2020 г., Нижний Новгород, Российская Федерация [88] (устный доклад), Всероссийской школе-конференции “Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2020”, 30 ноября - 4 декабря 2020г., г. Саратов, Российская Федерация (устный доклад), XXII Всероссийской школе-семинаре “Волновые явления: физика и применения имени профессора А.П. Сухорукова” (“Волны-2021”), 6-11 июня 2021 г., Можайск, Российская Федерация [89] (устный до-

клад), Конференции международных математических центров мирового уровня, 9-13 августа 2021 г. Сочи, Российская Федерация (устный доклад), XXI Международной конференции “Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии”, 22-26 ноября 2021 г., Нижний Новгород, Российская Федерация [90] (устный доклад), Международной научной конференции “Динамические системы. Теория и приложения”, 26-29 июня 2022 г., Нижний Новгород, Российская Федерация [91].

Результаты диссертационной работы опубликованы в научных журналах, входящих в международные системы цитирования Web of Science и Scopus, рекомендованных ВАК РФ для опубликования материалов кандидатских и докторских диссертаций [49, 73–78] (всего 7 статей). Автором получено два свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [80, 81].

Глава 1

Обобщенная синхронизация в системах со сложной топологией аттрактора

[73, 81–84, 90, 91]

В данной главе подробно рассмотрен режим обобщенной синхронизации и методы его диагностики в системах со сложной топологией аттрактора. Начнем рассмотрение с краткого описания известных результатов в области обобщенной синхронизации.

1.1 Определение режима обобщенной синхронизации, классические методы диагностики этого режима

О режиме обобщенной синхронизации известно, начиная с 1995 года. Изначально он был введен в рассмотрение для двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов [35]. В контексте потоковых динамических систем режим обобщенной синхронизации означает, что между состояниями взаимодействующих ведущей системы $\mathbf{x}(t)$ и ведомой системы $\mathbf{y}(t)$ после завершения переходного процесса устанавливается функциональная зависимость:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)]. \quad (1.1)$$

Вид этой зависимости $\mathbf{F}[\cdot]$ может быть достаточно сложным, и поэтому не всегда может быть найден аналитически. При этом, эта зависимость

может иметь как гладкую, так и фрактальную структуру, в связи с чем выделяют сильную и слабую обобщенную синхронизацию [92]. Также стоит иметь в виду, что в качестве взаимодействующих систем могут выступать даже динамические системы с различной размерностью фазового пространства [67, 92].

Для случая взаимной связи уравнение (1.1) необходимо модифицировать, чтобы отразить тот факт, что существует двунаправленное взаимодействие между исследуемыми системами. В случае взаимного типа связи взаимодействующие осцилляторы эквивалентны с точки зрения связи, и эволюция первой системы определяется не только состоянием первой системы $\mathbf{x}(t)$, но и также состоянием второй системы $\mathbf{y}(t)$, и наоборот. Чтобы учесть общее действие систем друг на друга, уравнение (1.1) для случая взаимной связи нужно переписать следующим образом [37]:

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)] = 0. \quad (1.2)$$

Примечательно, что уравнение (1.2) может использоваться как для однонаправленного, так и двунаправленного типов связи (а также любой связи с произвольной асимметрией между системами) [93]. Кроме того, уравнение (1.1) можно рассматривать как частный случай (1.2).

Для диагностирования режима обобщенной синхронизации существуют различные методы, среди которых наибольшее распространение получили метод ближайших соседей [35, 94], метод расчета спектра показателей Ляпунова [37, 95] и метод вспомогательной системы [38]. Перейдем к более детальному рассмотрению этих методов.

1.1.1 Метод вспомогательной системы

Для определения наличия обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах удобно использовать метод вспомогательной

системы [38]. Данный метод заключается в том, что при рассмотрении однонаправленно связанных осцилляторов, состоящих из ведущей $\mathbf{x}(t)$ и ведомой $\mathbf{y}(t)$ систем, нужно дополнительно ввести вспомогательную систему $\mathbf{z}(t)$, идентичную ведомой системе по оператору эволюции и значениям параметров, но с несильно отличающимися начальными условиями, лежащими в бассейне притяжения того же аттрактора.

Динамика ведущей $\mathbf{x}(t)$ и ведомой $\mathbf{y}(t)$ систем описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{H}(\mathbf{x}(t)), \\ \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} &= \mathbf{G}(\mathbf{y}(t), \mathbf{g}, \mathbf{x}(t)),\end{aligned}\tag{1.3}$$

где матрицы \mathbf{H} и \mathbf{G} определяют операторы эволюции взаимодействующих систем.

Связь ведомой системы с ведущей определяется набором параметров \mathbf{g} . Предполагается, что когда $\mathbf{g} = 0$, $\mathbf{G}(\mathbf{y}(t), 0, \mathbf{x}(t))$ не зависит от переменных ведущей системы \mathbf{x} , следовательно, ведущая и ведомая системы развиваются независимо друг от друга. Хаотическая динамика ведущей системы не зависит от параметров ведомой системы, так как связь между системами является однонаправленной. Вспомогательная система описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{z}(t), \mathbf{g}, \mathbf{x}(t)),\tag{1.4}$$

которое с точностью до замены \mathbf{y} на \mathbf{z} идентично уравнению ведомой системы из (1.3). Когда ведомая (1.3) и вспомогательная (1.4) системы находятся под воздействием одного и того же сигнала $\mathbf{x}(t)$, то векторные поля в фазовых пространствах ведомой и вспомогательной систем являются идентичными, а системы смогут эволюционировать на одинаковых аттракторах. Это объясняется тем, что в общем случае существует несколько бассейнов притяжения для ведомой системы с векторным полем \mathbf{G} , и, соответственно, если $\mathbf{y}(0)$ и $\mathbf{z}(0)$ лежат в разных бассейнах

притяжения, то со временем они окажутся на разных орбитах. Однако, если эти начальные условия лежат в одной и той же области притяжения, то после того, как некоторые переходные процессы завершатся, траектории $\mathbf{z}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ будут принадлежать идентичным аттракторам в фазовом пространстве.

Другими словами, вспомогательная система – это еще одна ведомая система, и в отсутствие обобщенной синхронизации между ведомой и ведущей системами, орбиты ведомой и вспомогательной систем будут располагаться на одном и том же сложном аттракторе и никак по-другому не будут связаны. В случае обобщенной синхронизации существует устойчивый режим колебаний, при котором орбиты ведомой системы и орбиты вспомогательной системы становятся идентичными после того, как переходные процессы заканчиваются, наблюдается простое тождественное соотношение $\mathbf{y}(t) = \mathbf{z}(t)$. Устойчивый режим этих идентичных колебаний гарантирует возможность прогнозирования текущего состояния ведомой системы, учитывая историю развития ведущей системы, и, следовательно, указывает на наличие обобщенной синхронизации. Тождество $\mathbf{y}(t) = \mathbf{z}(t)$ является гораздо более простым отношением для проверки, чем неизвестное, сложное отношение $\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)]$.

Таким образом, метод вспомогательной системы является простым и удобным способом диагностики режима обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной связью. Однако, он не может быть применен к системам с взаимным типом связи. Как было показано в работе [96], известные попытки обобщения этого метода на случай взаимной связи приводят к некорректным результатам. Поэтому для взаимно связанных систем возможными способами диагностики режима обобщенной синхронизации являются расчет спектра показателей Ляпунова [95, 97] и метод ближайших соседей [35, 37].

1.1.2 Метод расчета спектра показателей Ляпунова

Другим методом диагностики обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах, как отмечалось выше, является расчет спектра показателей Ляпунова. Для однонаправленно связанных хаотических систем данный метод часто используется в совокупности с методом вспомогательной системы и носит название метода расчета условных показателей Ляпунова. Если размерности фазовых пространств каждой из взаимодействующих ведущей и ведомой систем равны 3, то поведение однонаправленно связанных хаотических систем может быть охарактеризовано при помощи 6 показателей Ляпунова. В случае если поведение ведущей системы не зависит от интенсивности связи с ведомой системой (в силу однонаправленного характера связи), то спектр показателей Ляпунова для исследуемой системы может быть разделен на две части: показатели Ляпунова ведущей системы $\lambda_1^x \geq \lambda_2^x \geq \lambda_3^x$ и условные показатели Ляпунова $\lambda_1^y \geq \lambda_2^y \geq \lambda_3^y$. Критерием существования обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах является отрицательность старшего условного показателя Ляпунова λ_1^y [95].

Для систем с взаимным типом связи разделить спектр показателей Ляпунова на две части не представляется возможным. В данном случае расчет показателей Ляпунова производится для обеих систем одновременно, а обобщенная синхронизация хаотических систем диагностируется по моменту перехода второго по старшинству показателя Ляпунова λ_2 в область отрицательных значений. Важно отметить, что если размерности фазового пространства взаимодействующих систем оказываются больше 3 и каждая из взаимодействующих систем в отсутствие связи характеризуется K положительными показателями Ляпунова, режим

обобщенной синхронизации в данном случае может быть диагностирован по моменту смены знака $K + 1$ показателя Ляпунова.

1.1.3 Метод ближайших соседей

Метод ближайших соседей может быть применен к любым системам, независимо от типа связи между ними, и даже используется для анализа экспериментальных временных рядов [35, 37].

Согласно данному подходу, необходимо зафиксировать несколько опорных состояний в фазовом пространстве одной из взаимодействующих систем, найти их ближайших соседей и посмотреть, каким образом будут вести себя их образы в фазовом пространстве другой системы. Если для всех опорных состояний образы ближайших соседей будут локализованы в ограниченных областях аттрактора, можно говорить о наличии обобщенной синхронизации в системе. Если такая закономерность наблюдается только для части опорных точек, в системе диагностируется режим перемежающейся обобщенной синхронизации. Если образы ближайших соседей оказываются разбросанными случайным образом по всему аттрактору, в системе диагностируется асинхронный режим.

Количественной характеристикой степени близости состояний взаимодействующих систем является среднее расстояние между двумя состояниями одной из систем, нормированное на среднее расстояние δ между случайно выбранными состояниями другой системы [94]:

$$d = \frac{1}{M\delta} \sum_{k=0}^{M-1} \|y^k - y^{kn}\|. \quad (1.5)$$

где M – количество итераций, δ – среднее расстояние между состояниями первой системы, x^k – опорные состояния этой системы, x^{kn} – их ближайшие соседи, y^k и y^{kn} – образы x^k и x^{kn} в фазовом пространстве другой системы, соответственно. В режиме обобщенной синхро-

низации d близко к нулю, в отсутствие функционального соотношения между состояниями взаимодействующих систем $d \approx 1$. Режим обобщенной синхронизации диагностируется, как правило, примерно в середине падающего участка на зависимости количественной меры d от параметра связи между системами.

Одним из принципиальных недостатков метода ближайших соседей является невозможность точного определения порогового значения установления синхронного режима. Метод позволяет установить лишь факт наличия/отсутствия режима обобщенной синхронизации, а следовательно, используется, как правило, для подтверждения работоспособности других методов и подходов, например, при расчете спектра показателей Ляпунова [37, 98].

1.2 Диагностика режима обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора

Как отмечалось во Введении, в настоящее время явление обобщенной синхронизации исследовано достаточно полно для хаотических систем с относительно простой топологией аттрактора, например, систем Ресслера с аттрактором ленточного типа. Однако, наряду с “простыми” системами не менее широко распространены системы с так называемой сложной (двулистной) структурой аттрактора. Диагностированию обобщенной синхронизации в таких системах и посвящена данная глава диссертационной работы. В качестве примеров таких систем рассмотрены два однонаправленно связанных хаотических осциллятора Лоренца и две взаимно связанные системы Чена, являющиеся четырехмерной модификацией уравнений систем Лоренца.

Начнем рассмотрение с взаимно связанных систем Чена [99]. Уравнения, описывающие динамику этих систем, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1,2} &= a(y_{1,2} - x_{1,2}) + ey_{1,2}z_{1,2}, \\
 \dot{y}_{1,2} &= cx_{1,2} - dx_{1,2}z_{1,2} + y_{1,2} + u_{1,2}, \\
 \dot{z}_{1,2} &= x_{1,2}y_{1,2} - bz_{1,2}, \\
 \dot{u}_{1,2} &= -k_{1,2}y_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}),
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2}, u_{1,2})$ – векторы состояний взаимодействующих систем, $a = 35$, $b = 4.9$, $c = 25$, $d = 5$, $e = 35$, $k_1 = 110$, $k_2 = 190$ – управляющие параметры, ε – параметр связи. Управляющие параметры k_1 и k_2 подобраны таким образом, чтобы первая система находилась в режиме гиперхаоса, а вторая – в хаотическом режиме. На рисунке 1.1 представлена зависимость шести старших показателей Ляпунова от параметра связи. Видно, что при увеличении силы связи в системе происходит последовательный переход двух положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений. Когда оба показателя Ляпунова становятся отрицательными, то есть, при $\varepsilon > 105$, в системе диагностируется режим обобщенной синхронизации.

Чтобы доказать наличие обобщенной синхронизации в данном случае, воспользуемся методом ближайших соседей. На рисунке 1.2 представлены фазовые портреты взаимодействующих систем Чена при значении параметра связи $\varepsilon = 250$, что соответствует режиму достаточно “сильной” обобщенной синхронизации. На фазовом портрете первой системы (рисунок 1.2,а) показаны три случайные точки, выбранные в качестве опорных, и их ближайшие соседи. Очевидно, что они сосредоточены в ограниченных областях аттрактора, представляющих собой малые окрестности опорных точек. Аналогичная ситуация, в соответствии с идеологией метода ближайших соседей, должна наблюдаться и во второй системе, однако, образы ближайших соседей в фазовом

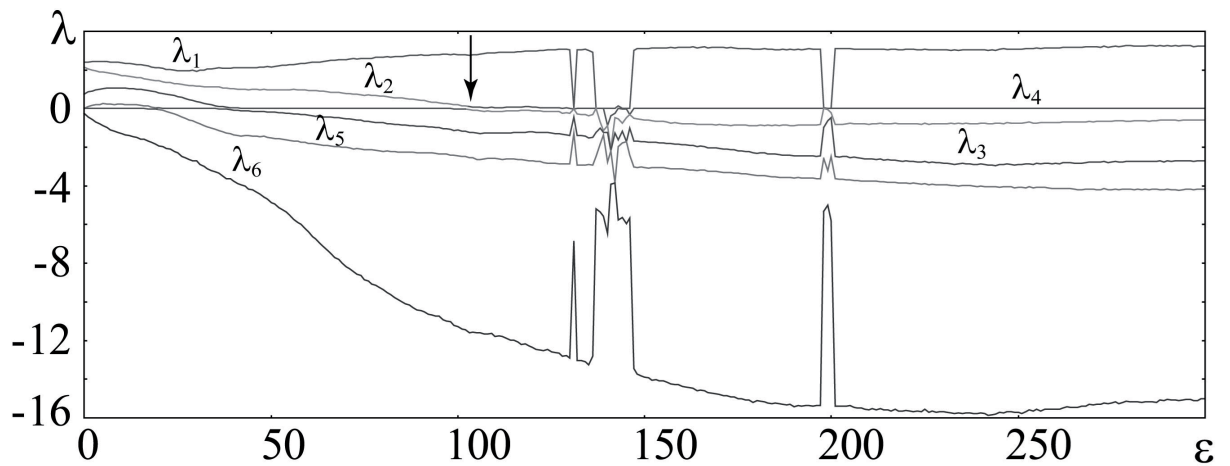


Рисунок 1.1 — Зависимости 6 старших показателей Ляпунова для системы (1.6) от параметра связи ε . Значение параметра связи, соответствующее установлению режима обобщенной синхронизации, показано стрелкой

пространстве второй системы оказываются разбросанными достаточно сильно по аттрактору (см. рисунок 1.2,б).

Таким образом, из-за сложной топологии хаотических аттракторов взаимодействующих систем метод ближайших соседей оказывается неработоспособным методом диагностики режима обобщенной синхронизации и его необходимо усовершенствовать. Хорошей альтернативой данному методу является метод фазовых трубок [36], суть которого заключается в рассмотрении трубок траекторий в фазовом пространстве взаимодействующих систем. Метод по своей сути является модификацией метода ближайших соседей за тем лишь исключением, что при поиске ближайших соседей учитываются не все ближайшие состояния системы, а только те, которые остаются близкими на всей длине предистории (длине фазовой трубки), длительность которой определяется абсолютной величиной показателя Ляпунова, отвечающего за установление режима обобщенной синхронизации.

Применим данный метод для диагностики режима обобщенной синхронизации в системе (1.6). На рисунке 1.3 приведены результаты при-

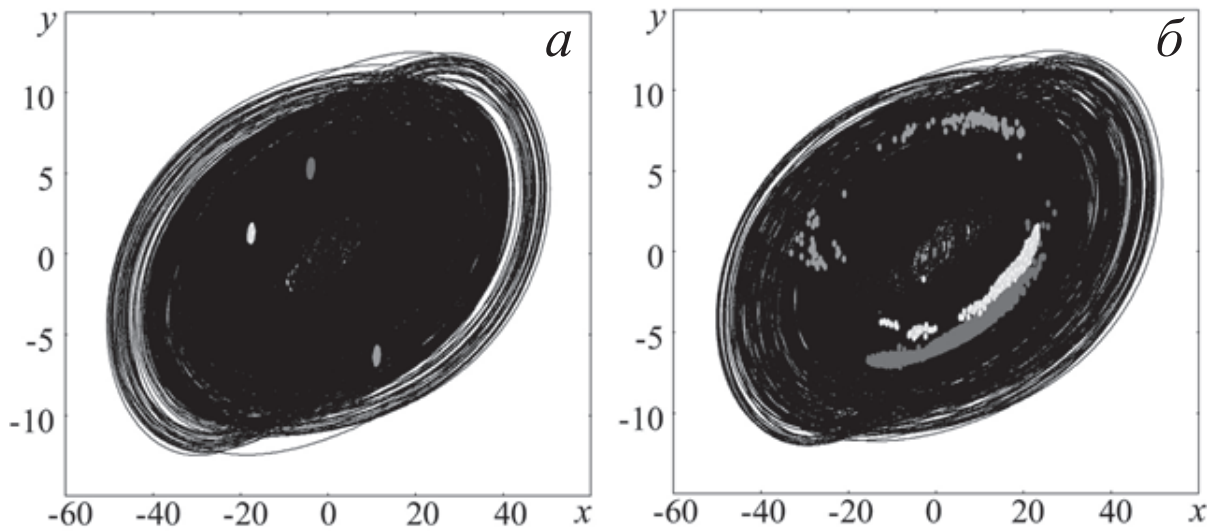


Рисунок 1.2 — Фазовые портреты первой (а) и второй (б) взаимодействующих систем Чена (1.6) при значении параметра связи $\varepsilon = 250$. На фазовом портрете первой системы выбраны три случайные опорные точки и найдены их ближайшие соседи (показаны оттенками серого). Образы этих ближайших соседей в фазовом пространстве второй системы показаны теми же оттенками серого на рисунке 1.2,б

менения данного метода. Также как и на рисунке 1.2, здесь представлены фазовые портреты первой и второй систем Чена (при тех же самых значениях управляющих параметров), те же опорные состояния, выбранные в фазовом пространстве первой системы, их ближайшие соседи (рисунок 1.3,а) и их образы в фазовом пространстве второй системы (рисунок 1.3,б). Длина фазовой трубки выбрана равной $\tau = 0.03$. Видно, что даже при малой длине фазовой трубки образы ближайших соседей оказываются локализованными в ограниченных областях аттрактора, а размеры этих областей оказываются сопоставимыми с размерами областей, занимаемыми ближайшими соседями в фазовом пространстве первой системы. Полученные результаты свидетельствуют о применимости метода фазовых трубок для диагностики режима обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией хаотических аттракторов. Полученные результаты сопоставлены с методом расчета спектра пока-

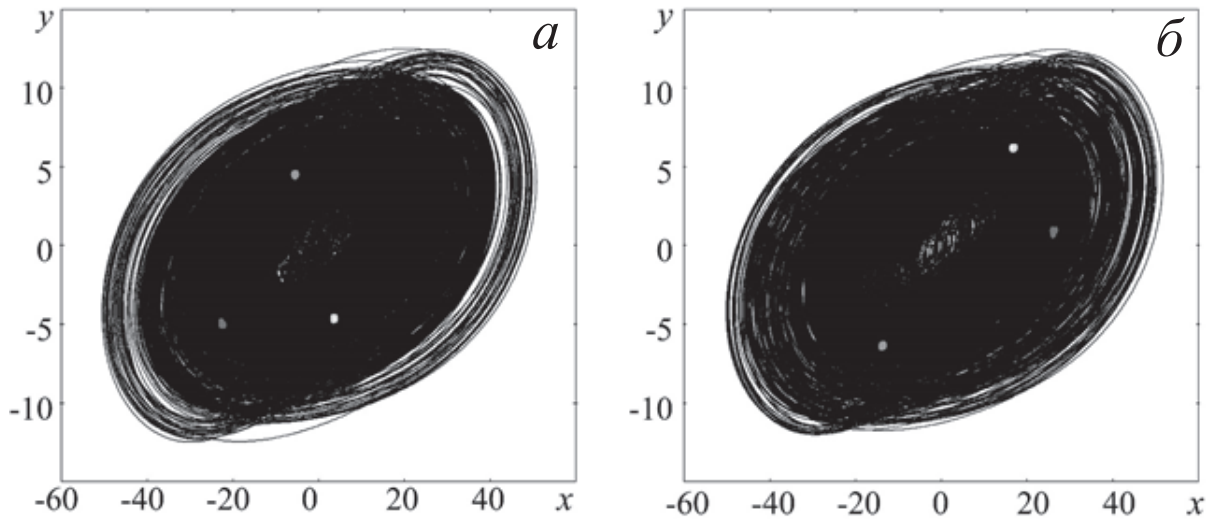


Рисунок 1.3 — Результаты применения метода фазовых трубок к осцилляторам Чена (1.6). Фазовые портреты первой (а) и второй (б) взаимодействующих систем Чена получены при значении параметра связи $\varepsilon = 250$. На фазовом портрете первой системы выбраны три случайные опорные точки и найдены их ближайшие соседи, прошедшие через фазовую трубку длиной $\tau = 0.03$ (показаны оттенками серого). Образы этих “ближайших” соседей в фазовом пространстве второй системы показаны теми же оттенками серого на рисунке 1.3,б

зателей Ляпунова. Показано, что оба метода диагностируют наличие обобщенной синхронизации в данном случае.

Аналогичные результаты получены для системы двух однонаправленно связанных осцилляторов Лоренца [100]

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), \\
 \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1, \\
 \dot{z}_1 &= -b z_1 + x_1 y_1,
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + \varepsilon(x_1 - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= r_2 x_2 - y_2 - x_2 z_2, \\
 \dot{z}_2 &= -b z_2 + x_2 y_2,
 \end{aligned}$$

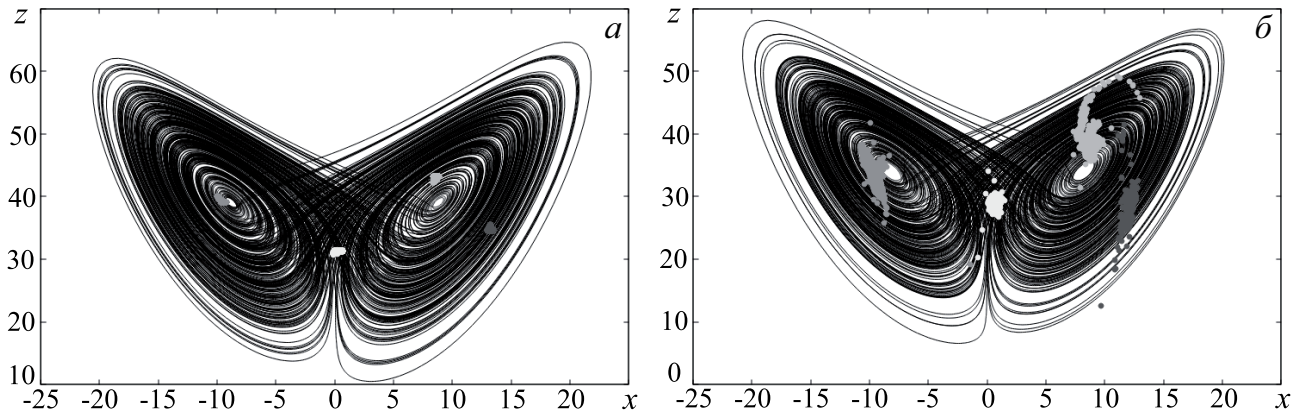


Рисунок 1.4 — Результаты применения метода ближайших соседей для диагностики режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Лоренца (1.7). На рисунке представлены фазовые портреты взаимодействующих ведущей (а) и ведомой (б) систем Лоренца (1.7) при $\varepsilon = 25$. На фазовом портрете ведущей системы оттенками серого отмечены четыре случайно выбранные опорные точки и их ближайшие соседи. Образы этих ближайших соседей в фазовом пространстве ведомой системы показаны теми же оттенками серого на рисунке 1.4,б

находящихся в хаотическом режиме, где $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$ – векторы состояний взаимодействующих систем, $a = 10$, $b = 8/3$, $r_1 = 40$ и $r_2 = 35$ – управляющие параметры, ε – параметр связи. При выбранных значениях управляющих параметров режим обобщенной синхронизации возникает при $\varepsilon = 9.95$, что подтверждается и путем расчета спектра условных показателей Ляпунова для системы (1.7), и при помощи метода вспомогательной системы. На рисунке 1.4 приведены результаты применения метода ближайших соседей к системе (1.7) при достаточно сильной силе связи между системами $\varepsilon = 25$, а на рисунке 1.5 – аналогичные результаты, полученные при помощи метода фазовых трубок (длина фазовой трубки была выбрана равной $\tau = 2$). Из сопоставления рисунков 1.4–1.5 с рисунками 1.2–1.3, полученными для взаимно свя-

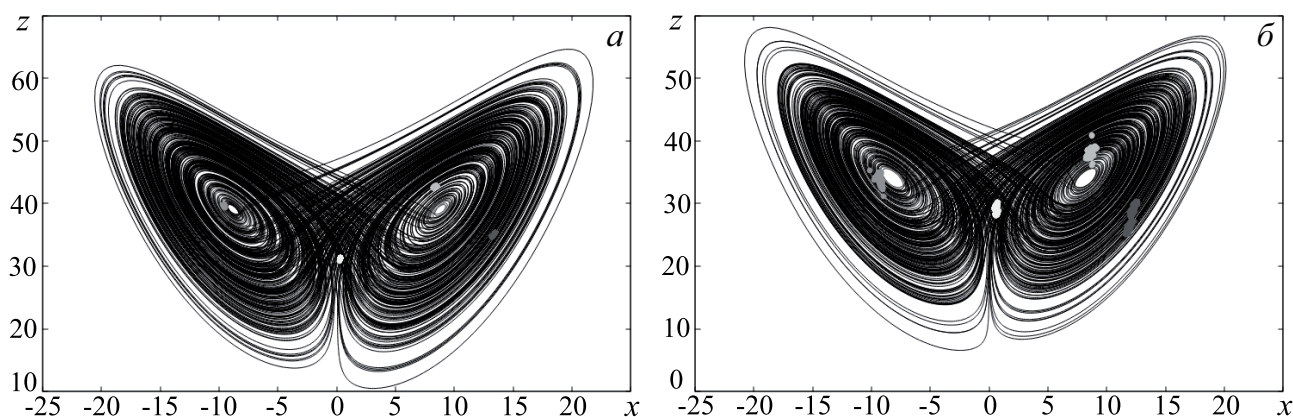


Рисунок 1.5 — Результаты применения метода фазовых трубок для диагностики режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Лоренца (1.7). На рисунке представлены фазовые портреты ведущей (а) и ведомой (б) систем Лоренца (1.7) при $\varepsilon = 25$. На фазовом портрете ведущей системы оттенками серого отмечены четыре случайно выбранные опорные точки и их ближайшие соседи, прошедшие через фазовую трубку длиной $\tau = 2$. Образы этих ближайших соседей в фазовом пространстве ведомой системы показаны теми же оттенками серого на рисунке 1.5,б

занных систем Чена, видно, что они качественно аналогичны друг другу: при диагностике обобщенной синхронизации при помощи классического метода ближайших соседей без учета предыстории образы ближайших соседей в фазовом пространстве второй (ведомой) системы оказываются распределенными по аттрактору достаточно широко, в то время как учет предыстории (применение метода фазовых трубок) позволяет локализовать образы ближайших соседей в ограниченных областях фазового пространства второй системы.

Таким образом, и в однонаправленно связанных системах Лоренца, и во взаимно связанных системах Чена метод ближайших соседей оказывается неработоспособным для диагностики режима обобщенной син-

хронизации, в то время как метод фазовых трубок может быть применен для диагностики синхронного режима в данном случае.

1.3 Выводы по главе 1

В настоящей главе диссертационной работы рассмотрен режим обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах, представлены методы диагностики этого режима, такие как метод вспомогательной системы, метод расчета спектра показателей Ляпунова и метод ближайших соседей, описаны принципы их работы, их преимущества и недостатки. На примере однонаправленно связанных систем Лоренца и взаимно связанных систем Чена, характеризующихся достаточно сложной (двулистной) структурой аттрактора, показана невозможность применения метода ближайших соседей для диагностики режима обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. Впервые установлено, что в данном случае возможно диагностировать режим обобщенной синхронизации при помощи метода фазовых трубок, принципиальным достоинством которого по сравнению с другими известными методами и подходами является возможность его применения к экспериментальным временным рядам, в то время как все остальные методы имеют существенные ограничения в данном случае: метод вспомогательной системы применим только в случае однонаправленного характера связи между системами, а расчет младших показателей Ляпунова, необходимых для определения порога обобщенной синхронизации, по временному ряду представляется затруднительным.

Результаты, полученные для систем с заданным оператором эволюции, сопоставлены с результатами расчета спектра показателей Ляпунова. Показано, что оба метода позволяют диагностировать наличие обобщенной синхронизации в данном случае.

На основе полученных результатов можно ожидать, что метод фазовых трубок сможет найти применение в различных областях науки и техники, включая информационно-телекоммуникационные системы и нейрофизиологические задачи, в основе которых лежит анализ и обработка больших объемов данных.

Глава 2

Переमेжающееся поведение на границе обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора

[49, 74–76, 80, 85–87, 90, 91]

2.1 Перемежаемость на границах различных типов хаотической синхронизации

Перемежаемость является хорошо известным явлением в радиофизике [59, 60, 101]. Данное явление подразумевает чередование регулярного (периодического или стационарного) и нерегулярного (хаотического) поведения или чередование различных хаотических режимов. Перемежаемость наблюдается в разных динамических системах, в том числе физических, медицинских и биологических [1, 3, 61, 102–106]. Она имеет место также вблизи границ синхронных режимов, в связи с чем различают перемежающиеся полную синхронизацию, фазовую синхронизацию, обобщенную синхронизацию, синхронизацию с запаздыванием и синхронизацию, индуцированную шумом [64, 107–114].

Одним из наиболее интересных типов перемежающегося синхронного поведения является режим перемежающейся обобщенной синхронизации [64]. Он наблюдается вблизи границы обобщенной синхронизации

хаотических систем, связанных однонаправленно или взаимно [35, 115], и подразумевает наличие функциональной связи (функционала) между состояниями этих систем только в определенные интервалы времени, называемые ламинарными фазами поведения, в то время как на фоне ламинарных фаз имеют место кратковременные турбулентные всплески, в течение которых функциональная связь между взаимодействующими системами не наблюдается.

Как отмечалось во Введении, режим перемежающейся обобщенной синхронизации в настоящее время изучен достаточно хорошо, но только для ограниченного класса динамических систем. В частности, известно, что на границе этого режима в однонаправленно связанных системах с достаточно простой топологией аттрактора, как, например, у систем Ресслера, наблюдается перемежаемость типа “on-off”, характеризующаяся степенными распределениями длительностей ламинарных фаз и зависимостей средних длительностей ламинарных фаз от параметра надкритичности [64]. Для систем с более сложной (двулистной) структурой подобных исследований до настоящего времени не проводилось, однако, понятно, что специфика таких систем может привести к изменению механизмов возникновения и характеристик перемежаемости. Поэтому настоящая глава диссертационной работы направлена на анализ характеристик перемежающегося поведения, наблюдаемого на границе обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора.

2.2 Метод вспомогательной системы для выделения характерных фаз поведения в однонаправленно связанных системах, находящихся вблизи границы обобщенной синхронизации

Для диагностики обобщенной синхронизации и исследования характеристик перемежающегося поведения вблизи ее границы традиционно используются метод расчета спектра показателей Ляпунова [37, 95] и метод вспомогательной системы [38]. При этом, метод вспомогательной системы, как отмечалось в главе 1, является одним из классических подходов к анализу обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной связью. Суть этого метода сводится к введению в рассмотрение дополнительной, так называемой, вспомогательной системы, идентичной ведомой системе по управляющим параметрам, но стартовой с других начальных условий, и сравнению состояний этих систем с течением времени. Если после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем полностью совпадают, в исходной паре ведущей и ведомой систем наблюдается режим обобщенной синхронизации. Если же состояния этих систем всегда различны, режим обобщенной синхронизации отсутствует.

Для диагностики перемежающейся обобщенной синхронизации [64] вблизи границы синхронного режима и определения ее характеристик в однонаправленно связанных системах традиционно рассматривают разность между состояниями или одной из координат ведомой и вспомогательной систем, $\xi(t) = x_2(t) - x_a(t)$, и анализируют ее поведение с течением времени [116]. Временные интервалы, в течение которых модуль этой разности оказывается меньше некоторой наперед заданной константы Δ ($|\xi(t)| < \Delta$), величина которой мала по сравнению с ампли-

тудой собственных колебаний в системе, соответствуют фазам синхронного поведения (в смысле обобщенной синхронизации) и носят название ламинарных фаз, в то время как участки временной реализации, на которых эта разность оказывается больше Δ , относятся к фазам асинхронного поведения или турбулентным всплескам. Таким образом, в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации при фиксированных значениях управляющих параметров во временных реализациях взаимодействующих систем происходит чередование участков с синхронной (ламинарные фазы) и асинхронной (турбулентные фазы) в смысле обобщенной синхронизации динамикой. Для изучения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации и определения ее типа необходимо рассчитать статистические характеристики длительностей ламинарных фаз: распределения длительностей ламинарных фаз $N(\tau)$ при фиксированных значениях управляющих параметров и зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle \tau \rangle$ от параметра надкритичности (параметра связи ε).

К сожалению, метод вспомогательной системы оказывается неприменимым для детектирования обобщенной синхронизации, а следовательно, изучения характеристик перемежаемости вблизи ее границы, в системах с взаимным типом связи [96]. Поэтому для определения характеристик перемежаемости в таких системах требуется разработка новых методов и подходов.

2.3 Перемежающаяся обобщенная синхронизация в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора

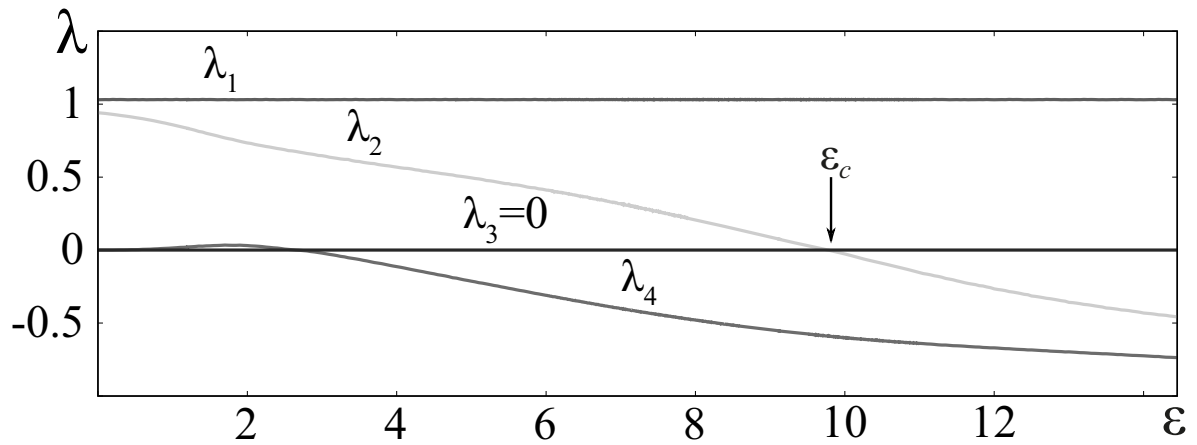


Рисунок 2.1 — Зависимости четырех старших показателей Ляпунова от параметра связи ε , полученные для двух однонаправленно связанных осцилляторов Лоренца (1.7) со сложной топологией аттрактора. Момент установления режима обобщенной синхронизации показан стрелкой

Начнем рассмотрение с однонаправленно связанных хаотических систем, допускающих анализ обобщенной синхронизации при помощи метода вспомогательной системы, и в качестве объекта исследования выберем две однонаправленно связанные системы Лоренца (1.7), рассмотренные в главе 1, находящиеся в хаотическом режиме и характеризующиеся двулистной структурой аттрактора, с теми же значениями управляющих параметров, что указаны на стр. 30. Как упоминалось в главе 1, режим обобщенной синхронизации в данном случае наступает при $\varepsilon_c = 9.95$. На рисунке 2.1 приведены зависимости четырех старших показателей Ляпунова λ_i , $i = \overline{1,4}$, рассчитанные для этой системы, от параметра связи ε ¹. Критическое значение параметра связи ε_c , соответствующее моменту перехода второго (старшего условного) показателя Ляпунова λ_2 в область отрицательных значений, отмечено стрелкой на рисунке.

Ниже границы обобщенной синхронизации, как отмечалось выше, наблюдается перемежающаяся обобщенная синхронизация. Статистические характеристики этого типа поведения, полученные при помощи ме-

¹Показатели Ляпунова $\lambda_{5,6}$ являются достаточно сильно отрицательными и не играют никакой роли в рамках данного исследования.

тогда вспомогательной системы, приведены на рисунке 2.2. Распределения длительностей ламинарных фаз при нескольких фиксированных значениях параметра связи ε показаны на рисунке 2.2,а, а зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи ε проиллюстрирована на рисунке 2.2,б. На этом же рисунке пунктиром показаны теоретические зависимости

$$T = \langle \tau \rangle \sim (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1} \quad (2.1)$$

и

$$N(\tau) \sim \tau^{-3/2}, \quad (2.2)$$

характерные для перемежаемости типа “on-off”, наблюдаемой традиционно вблизи границы обобщенной синхронизации. Как видно из рисунка, для однонаправленно связанных систем Лоренца (1.7) численно полученные статистические характеристики сильно отличаются от известных закономерностей и подчиняются экспоненциальным законам. Следовательно, можно заключить, что в рассматриваемом случае, то есть в двух однонаправленно связанных системах Лоренца со сложной топологией аттрактора, переход к обобщенной синхронизации сопровождается другим типом перемежающегося поведения.

Для подтверждения вышесказанного рассмотрим механизмы, приводящие к разрушению режима обобщенной синхронизации и возникновению перемежаемости вблизи ее границы в системах со сложной топологией аттрактора. На рисунке 2.3 приведены фрагменты временных реализаций взаимодействующих однонаправленно связанных систем Лоренца (1.7), находящихся вблизи границы обобщенной синхронизации. Рисунок 2.3,а иллюстрирует поведение координат x ведущей ($x_1(t)$) и ведомой ($x_2(t)$) систем Лоренца. Временная зависимость абсолютной величины разности между координатами x ведомой и вспомогательной систем, $\xi(t) = x_2(t) - x_a(t)$, показана на рисунке 2.3,б.

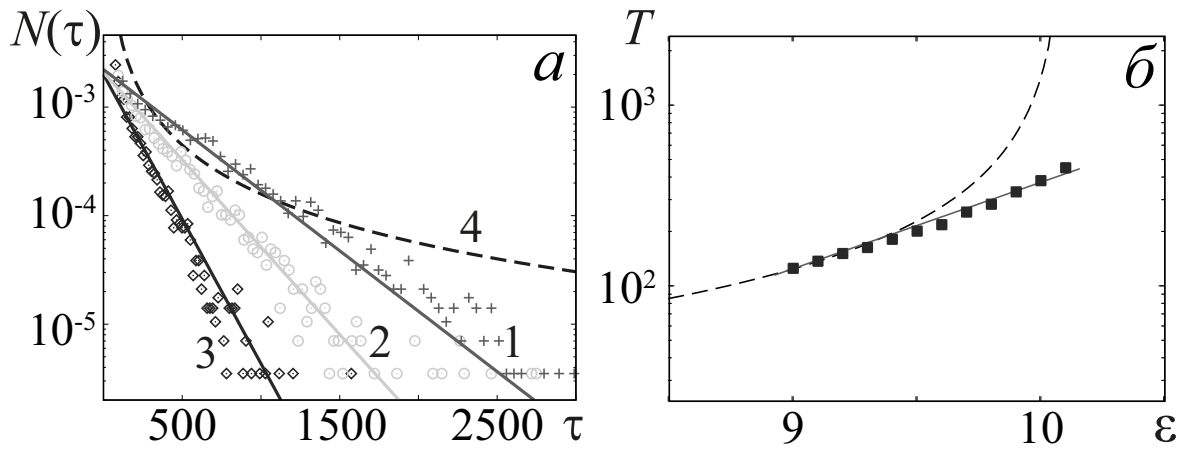


Рисунок 2.2 — (а) Нормированные распределения длительностей ламинарных фаз и их аппроксимации экспоненциальным законом (2.5), полученные для двух однонаправленно связанных систем Лоренца (1.7) при фиксированных значениях параметра связи: +, кривая 1 – $\varepsilon = 9.9$, o, кривая 2 – $\varepsilon = 9.7$, ◊, кривая 3 – $\varepsilon = 9.3$. (б) Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи ε , полученная для той же системы, и ее аппроксимация экспоненциальным законом (2.7) (сплошная линия). Пунктирной линией показаны теоретические закономерности, определяемые выражениями (2.1) и (2.2), соответствующими перемежаемости “on-off” типа

Согласно определению режима обобщенной синхронизации и концепции метода вспомогательной системы, синхронное поведение взаимодействующих однонаправленно связанных хаотических осцилляторов характеризуется совпадением состояний ведомой и вспомогательной систем и, как следствие, выполнением условия $\xi(t) \approx 0$. Таким образом, резкий рост разности состояний ведомой и вспомогательной систем, отмеченный на рисунке 2.3,б серым прямоугольником, означает окончание ламинарной фазы и начало турбулентной (асинхронной) фазы поведения, для которой $|\xi(t)|$ достаточно сильно отличается от нуля и оказывается сопоставимым с амплитудой собственных колебаний системы.

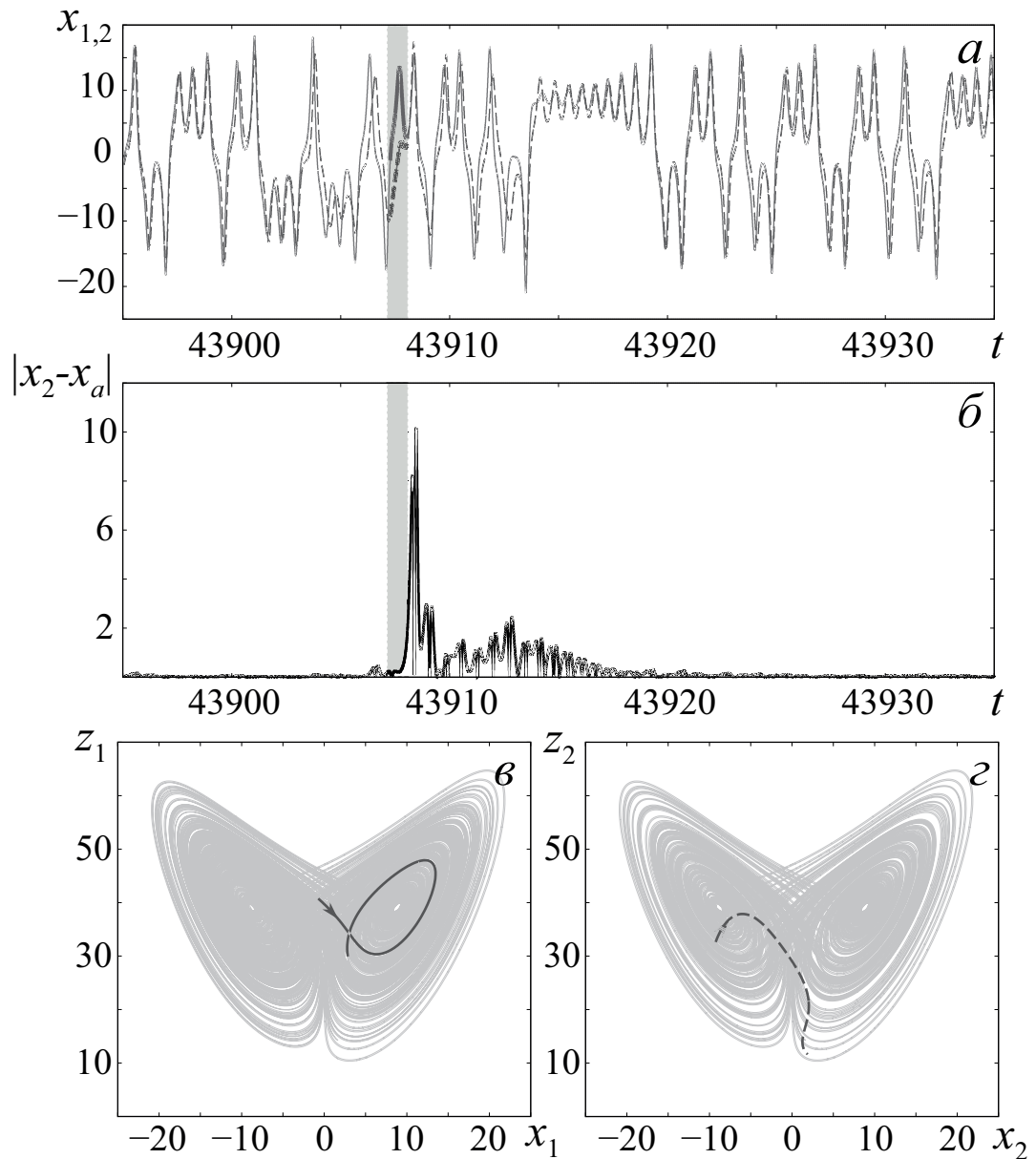


Рисунок 2.3 — (а) Фрагменты временных реализаций ведущей $x_1(t)$ (сплошная линия) и ведомой $x_2(t)$ (пунктирная линия) однонаправленно связанных систем Лоренца (1.7). (б) Эволюция во времени абсолютной величины разности между координатами x ведомой и вспомогательной систем, $|\xi(t)| = |x_2(t) - x_a(t)|$. Хаотические аттракторы ведущей (в) и ведомой (з) систем Лоренца (показаны светло-серым цветом) и участки фазовых траекторий, соответствующие началу турбулентного всплеска, в ведущей (сплошная линия) и ведомой (пунктирная линия) системах. Значение параметра связи $\varepsilon = 9.5$

Из рисунка 2.3 четко видно, что росту разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем (рисунок 2.3,б) предшествует расхождение (скачок) фазовых траекторий ведущего и ведомого осцилляторов на разные листы хаотических аттракторов (см. рисунок 2.3,а,в,г). Такое изменение динамики систем приводит к сильно резкому увеличению слагаемого $\varepsilon(x_1 - x_2)$, определяющего связь между системами, которое и отвечает за взаимодействие осцилляторов. Величина слагаемого связи быстро возрастает во много раз (в рассматриваемом случае примерно на порядок), что можно рассматривать и интерпретировать как внезапный мощный импульс, выводящий ведомый генератор из установившегося синхронного (в смысле обобщенной синхронизации) режима. Следовательно, расхождение фазовых траекторий взаимодействующих систем приводит к разрушению синхронного режима, и, как следствие, окончанию ламинарной фазы и переходу к турбулентной фазе, соответствующей асинхронному поведению. Из-за достаточно большой величины силы связи ε взаимодействующие системы стремятся вернуться к синхронному состоянию. Однако, так как для установления синхронизации требуется некоторое время, ведомая и ведущая системы становятся синхронизированными снова только после завершения некоторого переходного процесса (см. рисунок 2.3,а,б). Так как условие на существование ламинарных фаз определяет область на полном хаотическом аттракторе, а длительность ламинарных фаз соответствует времени пребывания в этой области, можно качественно объяснить экспоненциальный характер распределения длительностей этих фаз поведения.

Таким образом, можно заключить, что длительности ламинарных фаз и временные интервалы, в течение которых и ведущая, и ведомая системы характеризуются изображающими точками, расположенными на одинаковых листах хаотических аттракторов, не должны совпадать, но должны коррелировать друг с другом. Расхождение фазовых траекто-

рий систем на различные листы аттракторов, в свою очередь, из-за резкого увеличения слагаемого связи приводит к возникновению фазы асинхронного поведения, соответствующей турбулентному всплеску режима перемежающейся обобщенной синхронизации. Этот факт приводит к хорошему соответствию между распределениями длительностей ламинарных фаз и временных интервалов, во время которых фазовые траектории связанных систем находятся на одинаковых листах хаотических аттракторов, также как и зависимостями средних длительностей этих величин от параметра связи ε (сравните рисунки 2.2 и 2.4). Очевидно, это открытие может позволить нам предложить метод, основанный на рассмотрении расположения точек на аттракторах, для определения статистических характеристик перемежающегося поведения вблизи границы обобщенной синхронизации. Этот метод будет рассмотрен более подробно в следующем разделе этой главы диссертационной работы.

Таким образом, на основе проведенного рассмотрения можно заключить, что в однонаправленно связанных нелинейных осцилляторах, находящихся вблизи границы обобщенной синхронизации, возможно возникновение не только перемежаемости типа “on-off”, но и совершенно другого типа поведения, статистические характеристики которого удовлетворяют экспоненциальным законам. Такой тип поведения наблюдается в системах со сложной топологией аттрактора, а механизмы возникновения этого режима связаны с перескоком изображающих точек на разные листы аттракторов взаимодействующих систем (переключением системы между состояниями, соответствующими различным листам аттрактора). Данный тип поведения назван нами перемежаемостью “перескоков” (jump intermittency) [76].

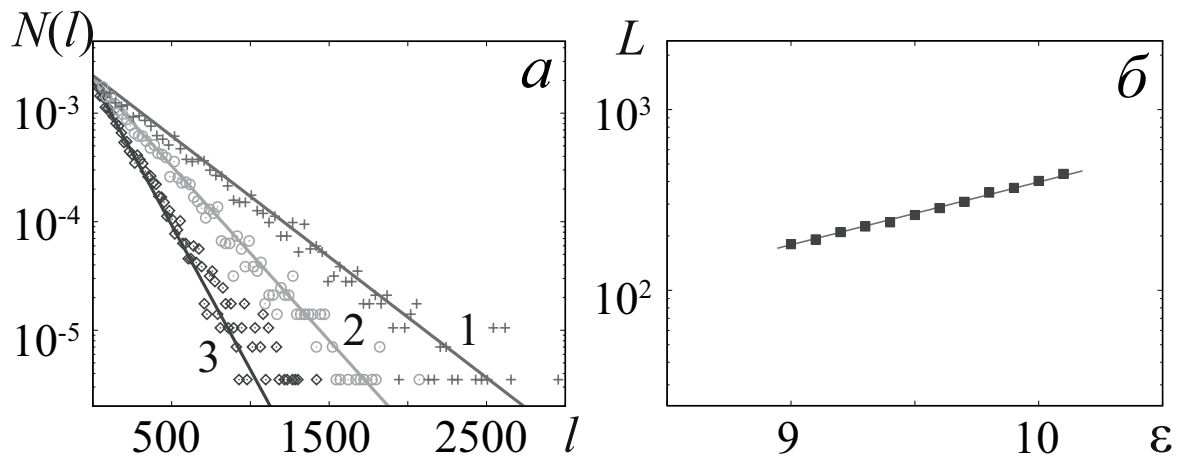


Рисунок 2.4 — (а) Нормированные распределения длительностей временных интервалов, в течение которых оба осциллятора Лоренца (1.7) характеризуются изображающими точками, находящимися на одинаковых листах хаотических аттракторов, и их аппроксимации экспоненциальным законом (2.5), полученные при фиксированных значениях параметра связи: +, кривая 1 — $\epsilon = 9.9$, o, кривая 2 — $\epsilon = 9.7$, ◇, кривая 3 — $\epsilon = 9.3$. (б) Зависимость средней длительности временных интервалов, во время которых фазовые траектории связанных систем находятся на одинаковых листах хаотических аттракторов, от параметра связи ϵ и ее аппроксимация экспоненциальным законом (2.7)

2.4 Метод, основанный на анализе расположения изображающих точек на аттракторах взаимодействующих систем

Остановимся на методе определения характеристик перемежаемости, основанном на анализе расположения изображающих точек на аттракторах взаимодействующих систем, более подробно. Как отмечалось в разделе 2.3, переходу к обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора предшествует перескок изображающих точек на разные листы аттракторов взаимодействующих систем, что позволяет

использовать данный факт для определения статистических характеристик перемежаемости.

Суть предложенного метода сводится к следующему. Чтобы определить, находятся ли изображающие точки, соответствующие текущим состояниям взаимодействующих систем, на одинаковых листах хаотических аттракторов, временные реализации этих систем должны быть сдвинуты друг относительно друга на время запаздывания $\Delta\tau$, которое можно найти при помощи расчета минимума функции подобия [34], для дальнейшего сравнения значений переменных $x_{1,2}$. Моменты времени, когда $x_1(t - \Delta\tau) > \Delta x$ и $x_2(t) < -\Delta x$ (где $\Delta x = 10$ для осцилляторов Лоренца (1.7)) или наоборот, соответствуют расхождению траекторий взаимодействующих систем на разные листы хаотических аттракторов (что предшествует началу турбулентной фазы поведения), которые снова собираются вместе, когда $|x_1(t - \Delta\tau) - x_2(t)| < \Delta x/2$.

Описанная методология позволяет найти длительности l интервалов пребывания изображающих точек на одинаковых листах аттракторов взаимодействующих систем и получить разумную статистику для анализа характеристик перемежаемости. В качестве характеристик перемежаемости в данном случае выступают нормированные распределения $N(l)$ длительностей временных интервалов, в течение которых фазовые траектории взаимодействующих систем находятся на одинаковых листах хаотических аттракторов, и зависимость средней длительности этих интервалов $\langle l \rangle$ от параметра связи ε . Как было показано в разделе 2.3, в однонаправленно связанных хаотических осцилляторах Лоренца (1.7) со сложной топологией аттрактора временные интервалы, во время которых ведущая и ведомая системы характеризуются изображающими точками, переходящими с одинаковых на разные листы хаотических аттракторов, ответственны за разрушение фаз синхронного поведения (в смысле обобщенной синхронизации), а, следовательно, ламинарные

(синхронные) фазы τ и временные интервалы l , во время которых изображающие точки и ведущего, и ведомого осцилляторов находятся на одинаковых листах хаотических аттракторов, должны сильно коррелировать между собой. Как следствие, статистические характеристики, полученные при помощи метода вспомогательной системы (см. раздел 2.2) и предложенного метода, основанного на анализе расположения изображающих точек на аттракторах, то есть $N(\tau)$ и $N(l)$ (также как и $\langle \tau \rangle$ и $\langle l \rangle$), в самом деле, совпадают друг с другом для осцилляторов, связанных однонаправленно (см. рисунки 2.2 и 2.4), что свидетельствует о том, что предложенный метод может использоваться для определения длительностей ламинарных и турбулентных фаз для взаимно связанных осцилляторов.

2.5 Теоретические основы перемежаемости “перескоков”

Перед тем, как перейти к анализу перемежающегося поведения в системах с взаимным типом связи, рассмотрим теоретические основы перемежаемости “перескоков”, имеющей место вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. С этой целью рассмотрим поведение бистабильного осциллятора, находящегося под действием шума. Так как синхронные (ламинарные) фазы поведения вблизи границы обобщенной синхронизации в таких системах прерываются участками фазовых траекторий, расходящимися на разные листы хаотических аттракторов, наблюдаемая динамика может быть рассмотрена как переключения между двумя возможными состояниями (синхронным, когда обе фазовые траектории находятся на одинаковых листах аттракторов, и асинхронными, когда фазовые траектории находятся

на разных листах), индуцированные детерминированной неустойчивостью динамического хаоса, играющего ту же роль, что и шум.

В качестве примера такого типа поведения рассмотрим простую теоретическую модель в форме одномерного стохастического дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dU(x)}{dx} + \eta(t), \quad (2.3)$$

с асимметричным бистабильным потенциалом

$$U(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + bx, \quad (2.4)$$

где $\eta(t)$ – δ -коррелированный гауссовский шум с нулевым средним [$\langle \eta(t) \rangle = 0$, $\langle \eta(t)\eta(\tau) \rangle = D\delta(t - \tau)$], b – параметр асимметрии, D – интенсивность шума. Такая рабочая гипотеза пока основана на эмпирических размышлениях, но, как будет показано ниже, она находит свое подтверждение прекрасным соответствием теоретических предсказаний, выведенных в рамках предложенной модели, и данных, полученных с помощью численных расчетов.

Предполагается, что в рамках предложенной модели один из минимумов потенциальной функции (2.4) соответствует синхронному (в смысле обобщенной синхронизации) состоянию x_s взаимодействующих систем, в то время как другой минимум x_a относится к асинхронному движению. Так как рост параметра связи приводит к увеличению интервалов синхронного движения, разумно предположить, что параметр связи в данном случае играет роль параметра асимметрии b в модельной системе (2.3)–(2.4). Анализ поведения этой системы, проведенный в работе [117], позволил получить аналитическое выражение для распределения длительностей сосуществующих режимов (что является аналогом распределения длительностей временных интервалов, во время которых

связанные хаотические осцилляторы характеризуются изображающими точками, находящимися на одинаковых листах аттракторов) в форме

$$p(l) = \frac{1}{L} \exp\left(-\frac{l}{L}\right), \quad (2.5)$$

где $L = \langle l \rangle$ – средняя длительность одного из сосуществующих режимов при фиксированных значениях управляющих параметров, определяемая выражением

$$L \sim \exp\left(\frac{2U(x^*)}{D}\right) \int_{-\infty}^{x^*} \exp\left(-\frac{2U(\xi)}{D}\right) d\xi, \quad (2.6)$$

(где x^* – неустойчивая точка равновесия, разделяющая два минимума потенциальной функции (2.4)), которое, в свою очередь, может быть приближенно упрощено до экспоненциального закона [117]

$$L \approx K \exp(\alpha b), \quad (2.7)$$

где K и α – некоторые константы, а параметр асимметрии b предполагается пропорциональным силе связи между системами $b \sim \varepsilon$.

Если наложить приведенные теоретические закономерности на данные численного моделирования, полученные для однонаправленно связанных осцилляторов Лоренца (1.7) (см. рисунки 2.2 и 2.4, сплошные линии), то, как видно из этих рисунков, теоретические закономерности (2.5) и (2.7) находятся в хорошем соответствии с численно полученными результатами как для распределений длительностей ламинарных фаз (временных интервалов, во время которых изображающие точки аттракторов взаимодействующих систем находятся на одинаковых листах аттракторов), так и зависимостей средних длительностей ламинарных фаз от параметра связи (средних длительностей вышеуказанных временных интервалов).

Тем не менее, существует одна очень важная особенность, на которую следует обратить внимание при анализе перемежаемости. Экспо-

экспоненциальная аппроксимация зависимости средней длительности L сосуществующих режимов от параметра связи ε (2.7) получена в работе [117] при предположении, что неустойчивая точка равновесия x^* приблизительно равна значению параметра асимметрии b , то есть $x^* \sim b$. Это означает, что в непосредственной близости к точке катастрофы $b_c = 2/(3\sqrt{3})$, соответствующей границе обобщенной синхронизации, выражение (2.7) может стать не совсем точным. Хотя в рассмотренном выше случае однонаправленно связанных осцилляторов Лоренца (1.7) такой точности вполне достаточно (см. рисунки 2.2 и 2.4), для более точного рассмотрения поведения системы в непосредственной близости к границе обобщенной синхронизации может потребоваться более тщательный анализ системы (2.3)–(2.4). Однако, этот вопрос выходит за рамки настоящей диссертационной работы. Более точные аналитические выражения для зависимости средней длительности сосуществующих режимов от параметра связи приведены в работе [76].

Теперь вернемся к предложенному в разделе 2.4 методу анализа статистических характеристик перемежаемости, основанному на анализе расположения изображающих точек на аттракторах взаимодействующих систем, и оценим его эффективность по сравнению с методом вспомогательной системы. Для этого был произведен расчет среднеквадратичных отклонений численно полученных распределений длительностей ламинарных фаз (интервалов времени, в течение которых изображающие точки находятся на одинаковых листах аттракторов) от теоретической закономерности (2.5) для обоих методов. Полученные результаты представлены в таблице 2.5.

Из данных таблицы видно, что хотя предложенный метод по мере среднеквадратичного отклонения от экспоненциальной аппроксимации несколько уступает классическому методу вспомогательной системы, степень отклонения данных численного моделирования от теоретиче-

Таблица 2.1 — Среднеквадратичные отклонения распределений длительностей ламинарных фаз, полученных численно для различных значений параметра связи ε при помощи метода вспомогательной системы (метод 1) и анализа расположения точек на аттракторе (метод 2), от теоретической закономерности (2.5)

	Метод 1	Метод 2
$\varepsilon = 9.3$	0.00008	0.00038
$\varepsilon = 9.7$	0.00013	0.00030
$\varepsilon = 9.9$	0.00014	0.00018

ской закономерности остается малой. Более того, с ростом параметра связи отклонение метода вспомогательной системы увеличивается, а метода, основанного на анализе расположения точек на аттракторе, наоборот, уменьшается, и при $\varepsilon = 9.9$ оба метода оказываются практически равнозначными. Следует также отметить, что, как отмечалось выше, предложенный подход может найти применение при анализе перемежаемости даже в том случае, когда реализация метода вспомогательной системы не представляется возможной, например, в случае взаимной связи между системами. Проиллюстрируем это на конкретных примерах в следующем разделе диссертационной работы.

2.6 Перемежающаяся обобщенная синхронизация в системах со сложной топологией аттрактора с взаимным типом связи

В качестве примера систем с взаимным типом связи рассмотрим взаимодействующие системы Лоренца и системы Чена. Как отмечалось

в предыдущих разделах (см. также [96]), применение метода вспомогательной системы в данном случае не представляется возможным, а следовательно, для определения характеристик перемежаемости можно использовать только метод, основанный на анализе расположения изображающих точек на аттракторах взаимодействующих систем (раздел 2.4), т.к. описанный выше механизм сильного резкого увеличения величины слагаемого связи в моменты расхождения фазовых траекторий на различные листы хаотических аттракторов, приводящий к разрушению синхронного режима, по всей видимости, должен сохраняться и в данном случае. При этом, диагностика самого режима обобщенной синхронизации может производиться по-прежнему путем расчета спектра показателей Ляпунова [37] или при помощи метода фазовых трубок (см. главу 1).

2.6.1 Взаимно связанные системы Лоренца

Начнем рассмотрение с взаимно связанных систем Лоренца, динамика которых описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= \sigma(y_{1,2} - x_{1,2}) + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= r_{1,2}x_{1,2} - y_{1,2} - x_{1,2}z_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= -bz_{1,2} + x_{1,2}y_{1,2}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

с теми же значениями управляющих параметров, что и для однонаправленно связанных систем (1.7). Зависимости четырех старших показателей Ляпунова от параметра связи ε , полученные для системы (2.8), приведены на рисунке 2.5. Так как спектр каждого осциллятора Лоренца состоит из положительного, нулевого и отрицательного показателей Ляпунова, для взаимно связанных осцилляторов Лоренца при увеличении параметра связи второй положительный показатель Ляпунова переходит через ноль и меняет свой знак с положительного на отрицательный при

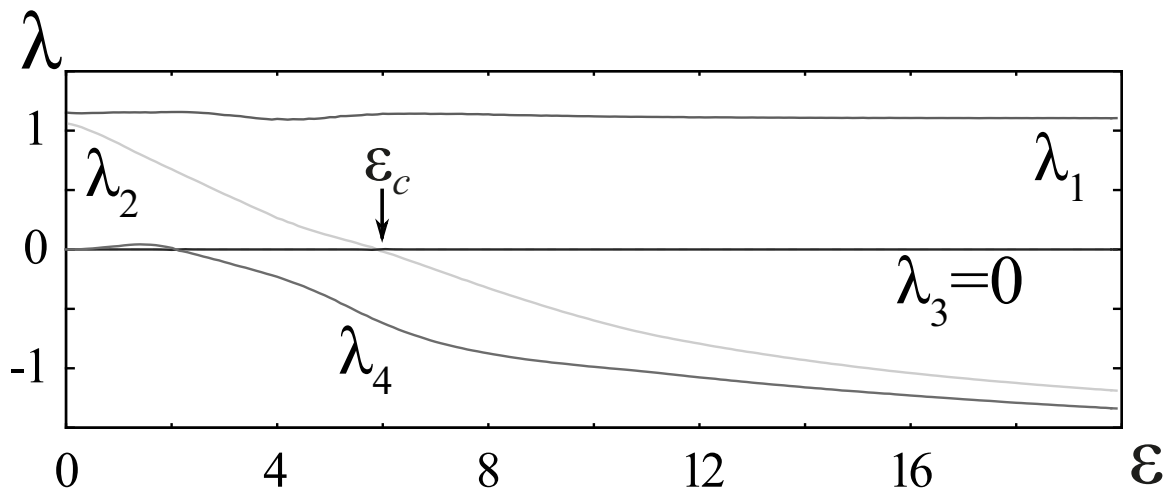


Рисунок 2.5 — Зависимости четырех старших показателей Ляпунова от параметра связи ε в двух взаимно связанных осцилляторах Лоренца (2.8). Момент возникновения режима обобщенной синхронизации показан стрелкой

критическом значении параметра связи $\varepsilon_c = 5.9$, соответствующем порогу обобщенной синхронизации. Ниже границы этого режима, то есть при $\varepsilon < \varepsilon_c$ имеет место перемежающееся поведение, характеристики которого, как отмечалось выше, могут быть найдены путем определения продолжительности временных интервалов, в течение которых фазовые траектории обеих взаимодействующих систем находятся на одинаковых листах хаотических аттракторов.

На рисунке 2.6,*a* приведены распределения длительностей таких интервалов, полученные для системы (2.8) при четырех различных значениях параметра связи ε . Как видно из этого рисунка, полученные распределения качественно совпадают с аналогичными распределениями, полученными для однонаправленно связанных систем Лоренца (1.7) (сравните с рисунком 2.4,*a*).

Схожая ситуация имеет место для зависимости средней длительности временных интервалов $L = \langle l \rangle$, в течение которых фазовые траектории располагаются на одинаковых листах хаотических аттракторов, от па-

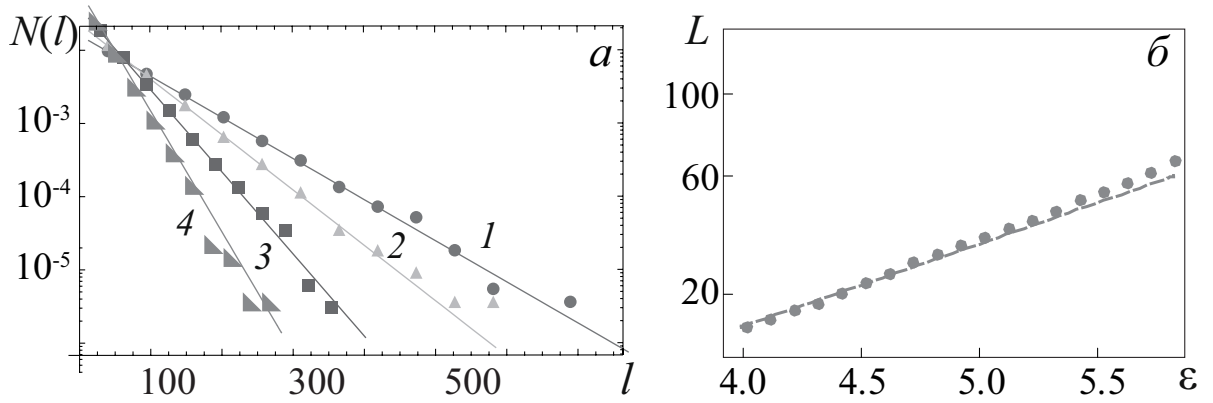


Рисунок 2.6 — (а) Нормированные распределения длительностей временных интервалов, во время которых обе системы Лоренца (2.8) характеризуются изображающими точками, находящимися на одинаковых листах хаотических аттракторов, и их аппроксимации экспоненциальными законами (2.5), полученные при фиксированных значениях параметра связи: \bullet , кривая 1 — $\varepsilon = 5.8$, \blacktriangle , кривая 2 — $\varepsilon = 5.5$, \blacksquare , кривая 3 — $\varepsilon = 5.0$, \blacktriangledown , кривая 4 — $\varepsilon = 4.5$. (б) Зависимость средней длительности временных интервалов, во время которых фазовые траектории связанных систем (2.8) находятся на одинаковых листах хаотических аттракторов, от параметра связи ε (точки) и ее теоретическая аппроксимация экспоненциальным законом (2.7) (сплошная линия)

параметра связи ε . Такая зависимость приведена на рисунке 2.6,б и, как видно из рисунка, в случае относительно большой расстройки значений параметров r_1 и r_2 она по-прежнему очень близка к экспоненциальной закономерности (2.7). Этот результат находится также в хорошем соответствии с результатами, полученными для однонаправленно связанных систем Лоренца (1.7), рассмотренных в разделе 2.3.

Таким образом, на основании проведенного рассмотрения можно сделать вывод о том, что и в однонаправленно, и во взаимно связанных системах Лоренца со сложной топологией хаотического аттрактора на границе обобщенной синхронизации имеет место один и тот же тип перемежаемости — перемежаемость “перескоков” (jump intermittency),

статистические характеристики которой сильно отличаются от характеристик перемежаемости типа “on-off”, имеющей место в классическом случае.

2.6.2 Взаимно связанные системы Чена

В качестве еще одного примера систем с взаимным типом связи рассмотрим два взаимно связанных осциллятора Чена (1.6), характеризующихся четырехмерным фазовым пространством и двулистной структурой хаотического аттрактора. Эта система с тем же набором управляющих параметров была рассмотрена в главе 1 с точки зрения возможности установления в ней режима обобщенной синхронизации. Как было установлено в этой главе, режим обобщенной синхронизации в данном случае возникает при $\varepsilon_c \approx 105$, что подтверждается и при помощи метода фазовых трубок, и путем расчета спектра показателей Ляпунова для этой системы. Ниже границы обобщенной синхронизации имеет место перемежающееся поведение, характеризующееся чередованием ламинарных и турбулентных фаз. Ламинарные фазы в данном случае соответствуют интервалам времени, когда фазовые траектории обеих систем на протяжении долгого времени ведут себя синхронно, а турбулентные фазы – ситуации, когда фазовые траектории взаимодействующих систем на протяжении короткого времени резко расходятся. Описанная ситуация проиллюстрирована на рисунке 2.7, где представлены фрагменты временных реализаций и соответствующие им фазовые траектории в моменты их расхождения, а также сами фазовые портреты при $\varepsilon = 100$. Из рисунка видно, что как и в системах Лоренца, перемежающееся поведение на границе обобщенной синхронизации в данном случае обусловлено асинхронным перескоком изображающих точек взаимодействующих систем с одного листа хаотического аттрактора на другой, а следова-

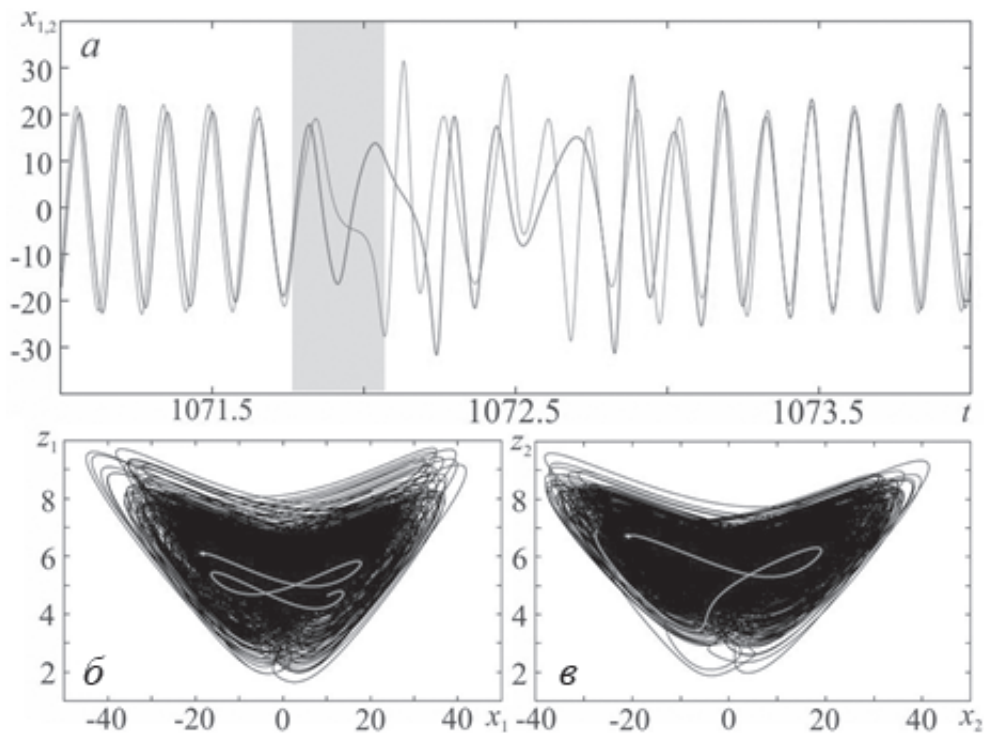


Рисунок 2.7 — Фрагменты временных реализаций двух взаимно связанных осцилляторов Чена (1.6), находящихся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации, $\varepsilon = 100$ (а). Фазовые портреты первой (б) и второй (в) взаимно связанных систем Чена и фазовые траектории, соответствующие временным интервалам, показанным на рисунке 2.7,а тельно, статистические характеристики перемежаемости в данном случае должны также удовлетворять экспоненциальным законам (2.5) и (2.7).

Для подтверждения вышесказанного при помощи предложенного метода, основанного на анализе расположения изображающих точек на аттракторах взаимодействующих систем, были построены и проанализированы статистические характеристики длительностей характерных фаз поведения систем Чена (1.6), находящихся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации. Полученные характеристики представлены на рисунке 2.8 и, как видно из этого рисунка, эти характеристики оказываются в точности такими же, как и для систем Лоренца, связанных однонаправленно и взаимно. Иными словами, распределения длитель-

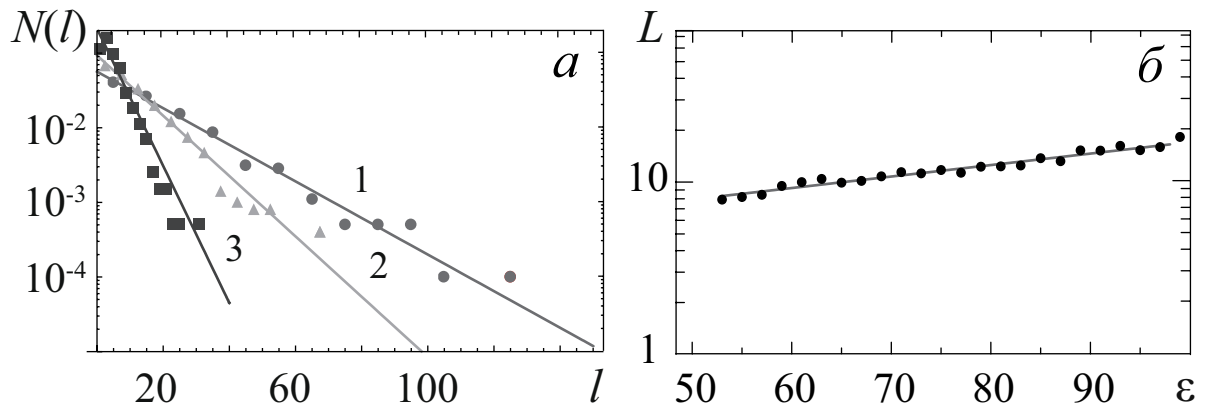


Рисунок 2.8 — (а) Нормированные распределения длительностей временных интервалов, в течение которых два хаотических осциллятора Чена (1.6) характеризуются изображающими точками, расположенными на одинаковых листах хаотических аттракторов, полученные при фиксированных параметра связи, и их теоретические аппроксимации экспоненциальным законом (2.5): ●, кривая 1 – $\epsilon = 100$, ▲, кривая 2 – $\epsilon = 70$, ■, кривая 3 – $\epsilon = 50$. (б) Зависимость средней длительности временных интервалов, в течение которых фазовые траектории связанных систем находятся на одинаковых листах хаотических аттракторов, от параметра связи ϵ (●) и ее аппроксимация экспоненциальным законом (2.7) (сплошная линия)

ностей временных интервалов, во время которых оба осциллятора Чена характеризуются изображающими точками, расположенными на одинаковых листах хаотических аттракторов, подчиняются экспоненциальному закону (2.5) (рисунок 2.8,а), а зависимость средней длительности этих интервалов от параметра связи удовлетворяют экспоненциальной закономерности (2.7) (рисунок 2.8,б).

Таким образом, в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора на границе обобщенной синхронизации наблюдается новый тип перемежающегося поведения – перемежаемость “перескоков”, статистические характеристики и механизмы возникновения которого существенным образом отличаются от характеристик пе-

ремежаемости типа “on-off”, имеющей место на границе этого режима в системах с относительно простой топологией аттрактора.

2.7 Выводы по главе 2

В рамках данной главы диссертационной работы изучены характеристики перемежающегося поведения, имеющего место вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной (двулистной) топологией аттрактора. Впервые установлено, что переход к синхронному режиму в данном случае сопровождается перемежаемостью “перескоков” (jump intermittency), статистические характеристики которой существенным образом отличаются от характеристик перемежаемости типа “on-off”, имеющей место вблизи границы обобщенной синхронизации в системах с относительно простой топологией аттрактора, как, например, у систем Ресслера.

Выявлены механизмы возникновения перемежаемости “перескоков” в исследуемых системах. Установлено, что разрушение режима обобщенной синхронизации обусловлено асинхронным переском изображающих точек с одного листа хаотического аттрактора на другой, что позволяет предложить метод определения статистических характеристик перемежаемости, основанный на анализе расположения изображающих точек на аттракторах взаимодействующих систем. Эффективность метода проверена на системах с однонаправленным типом связи – однонаправленно связанных системах Лоренца, допускающих анализ режима обобщенной синхронизации и перехода к нему при помощи метода вспомогательной системы. Установлено, что оба метода позволяют с высокой степенью точности определить статистические характеристики перемежаемости в системах с однонаправленным типом связи, в то время как для взаимно связанных систем предложенный метод является практически един-

ственным подходом, позволяющим определить длительности характерных (ламинарных и турбулентных) фаз поведения систем.

Изложены теоретические основы перемежаемости “перескоков”. Показано как теоретически, так и численно, что распределения длительностей ламинарных фаз и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи в режиме перемежаемости “перескоков” подчиняются экспоненциальным законам. Подобные закономерности имеют место как в системах с однонаправленным, так и взаимным типами связи, что свидетельствует о независимости типа перемежаемости, имеющего место вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, от типа связи между системами. Полученные результаты проиллюстрированы на примере двух однонаправленно и взаимно связанных систем Лоренца, а также двух взаимно связанных систем Чена со сложной структурой аттрактора.

Результаты, полученные в рамках настоящей главы диссертационной работы, существенным образом расширяют существующие теоретические представления о механизмах и свойствах обобщенной синхронизации и переходе к этому режиму во взаимодействующих системах, демонстрирующих сложное хаотическое поведение. Можно ожидать, что они найдут практическое применение при обработке экспериментальных временных рядов динамических систем, топология аттрактора которых является достаточно сложной.

Глава 3

Влияние шума на обобщенную синхронизацию в системах со сложной топологией аттрактора

[77, 78, 88, 89]

3.1 Теоретические предпосылки изучения влияния шума на обобщенную синхронизацию

Еще одним важным вопросом, связанным с изучением обобщенной синхронизации, является исследование влияния шума на установление этого синхронного режима [67, 71, 72]. Как отмечалось во Введении, шум всегда присутствует в реальных системах и устройствах, при этом его влияние на поведение этих систем может быть как конструктивным, так и деструктивным [65–67, 72]. Для систем с относительно простой топологией аттрактора режим обобщенной синхронизации оказывается, как правило, устойчивым по отношению к шумам [71, 72]. Этот вопрос исследован достаточно хорошо для осцилляторов с диссипативным типом связи в виду того, что именно этот тип связи характерен для большинства систем, используемых в качестве генераторов передающего и принимающего устройств в схемах скрытой передачи информации, основанных на явлении обобщенной синхронизации [12]. Системы со сложной топологией аттрактора, в частности, рассмотренные в главах 1-2, также характеризуются диссипативным типом связи и являются моделями ре-

альных радиотехнических генераторов [118–121], а, следовательно, наряду с системами с относительно простой топологией аттрактора могут использоваться в схемах скрытой коммуникации. Именно эти системы могут повысить конфиденциальность передачи информации, а следовательно, вопрос о влиянии шума на поведение границы обобщенной синхронизации в таких системах имеет важное практическое значение.

Рассмотрим вопрос о влиянии шума на установление обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора на конкретных примерах. Начнем рассмотрение с однонаправленно связанных систем и в качестве объектов исследования выберем по-прежнему однонаправленно связанные системы Лоренца (1.7) и системы Чена (1.6).

3.2 Обобщенная синхронизация в присутствии шума в двух однонаправленно связанных системах Лоренца

Динамика однонаправленно связанных систем Лоренца, находящихся под внешним шумовым воздействием, описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), \\
 \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1, \\
 \dot{z}_1 &= -b z_1 + x_1 y_1, \\
 \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + \varepsilon(x_1 - x_2) + D\zeta, \\
 \dot{y}_2 &= r_2 x_2 - y_2 - x_2 z_2, \\
 \dot{z}_2 &= -b z_2 + x_2 y_2.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Система (3.1) отличается от системы (1.7) наличием дополнительного шумового слагаемого $D\zeta$ в первом уравнении второй системы Лоренца. Здесь ζ – дельта-коррелированный (белый) гауссовский шум, $\langle \zeta_i(t) \rangle = 0$,

$\langle \zeta_i(t)\zeta_j(t) \rangle = \delta_{ij}\delta(t-t'), \forall i, j, D$ – интенсивность шумового воздействия. Значения остальных управляющих параметров выбраны теми же, что и для системы (1.7).

Решение системы (3.1) осуществлялось численно при помощи метода Рунге-Кутты 4 порядка, адаптированного для стохастических дифференциальных уравнений [122], с шагом $h = 0.001$. Для определения наступления режима обобщенной синхронизации в этой системе использовались метод вспомогательной системы и расчет спектра показателей Ляпунова, подробно описанные в главе 1. При этом, ведомая и вспомогательная системы из (3.1) подвергались одному и тому же шумовому воздействию.

На рисунке 3.1 приведено сравнение границ обобщенной синхронизации, полученных с помощью метода расчета спектра показателей Ляпунова и методом вспомогательной системы, для системы (3.1). Из рисунка 3.1 видно, что при относительно малых значениях интенсивности шума, сопоставимых с амплитудой собственных колебаний системы Лоренца и даже немного превышающих ее, порог обобщенной синхронизации практически не меняется, а также, что оба метода демонстрируют схожий результат. При этом, граница обобщенной синхронизации, диагностируемая при помощи расчета спектра показателей Ляпунова, в ряде случаев лежит несколько ниже аналогичной границы, полученной с использованием метода вспомогательной системы, что обусловлено наличием перемежающегося поведения вблизи границы возникновения синхронного режима (см. главу 2).

Далее рассмотрен вопрос о влиянии управляющих параметров взаимодействующих систем Лоренца (3.1) на установление в них режима обобщенной синхронизации в присутствии шума. На рисунке 3.2 приведены зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации в этих системах от интенсивности шума при различных значени-

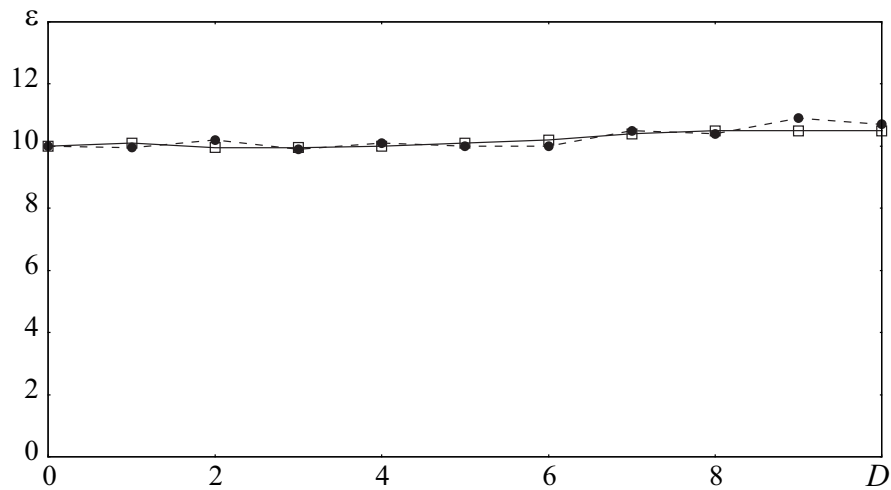


Рисунок 3.1 — Сравнение зависимостей порога возникновения режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Лоренца (3.1) от интенсивности шума, полученных методом расчета спектра показателей Ляпунова (сплошная линия) и методом вспомогательной системы (пунктирная линия)

ях управляющих параметров, полученные при помощи метода вспомогательной системы. Из рисунка видно, что, порог обобщенной синхронизации практически не меняется. Иными словами, режим обобщенной синхронизации в связанных системах Лоренца (3.1) оказывается устойчивым по отношению к шумам.

Для пояснения такого поведения границы обобщенной синхронизации на рисунке 3.3 приведены зависимости старшего условного показателя Ляпунова λ_1^r от параметра связи ε для различных значений интенсивности шумового воздействия D , а также показаны фазовые портреты ведомой системы Лоренца при тех же значениях D . Видно, что независимо от интенсивности шума при увеличении параметра связи старший условный показатель Ляпунова переходит в область отрицательных значений, что и соответствует порогу установления обобщенной синхронизации в исследуемой системе. При этом, при относительно малом значении интенсивности шума ($D = 2$) старший условный показатель

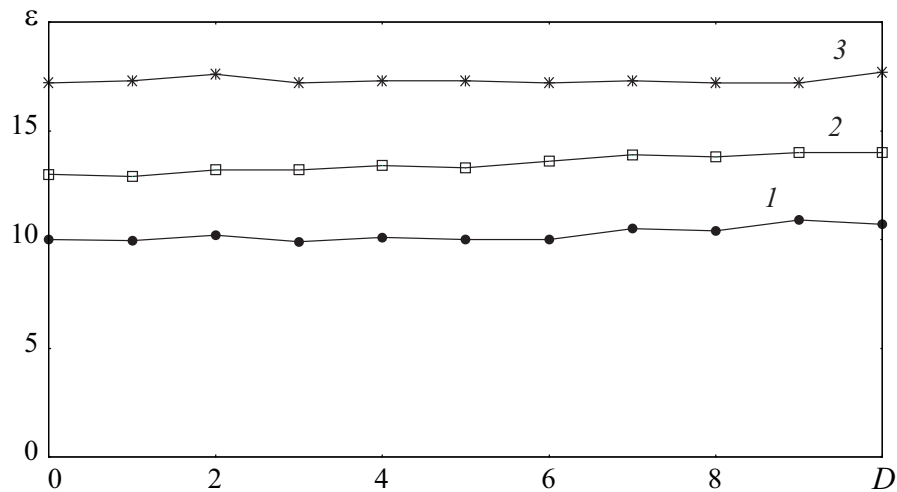


Рисунок 3.2 — Зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Лоренца (3.1), полученные при помощи метода вспомогательной системы, от интенсивности шума при значениях управляющих параметров: 1 – $r_1 = 40, r_2 = 35$; 2 – $r_1 = 40, r_2 = 45$; 3 – $r_1 = 40, r_2 = 50$

Ляпунова практически в точности совпадает с аналогичным показателем, рассчитанным для той же системы в отсутствие шума. При относительно больших значениях интенсивности шума ($D = 8$) показатель Ляпунова переходит в область отрицательных значений чуть позже, что и приводит к незначительному росту порогового значения установления синхронного режима.

Если рассмотреть фазовые портреты, то на рисунке 3.3,б-г можно наблюдать, как трансформируется аттрактор ведомой системы при добавлении шума различной интенсивности. Видно, что внешнее шумовое воздействие приводит к зашумлению аттрактора, но при этом не нарушает его двулистную структуру.

Таким образом, режим обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных осцилляторах Лоренца оказывается устойчивым по отношению к шумам.

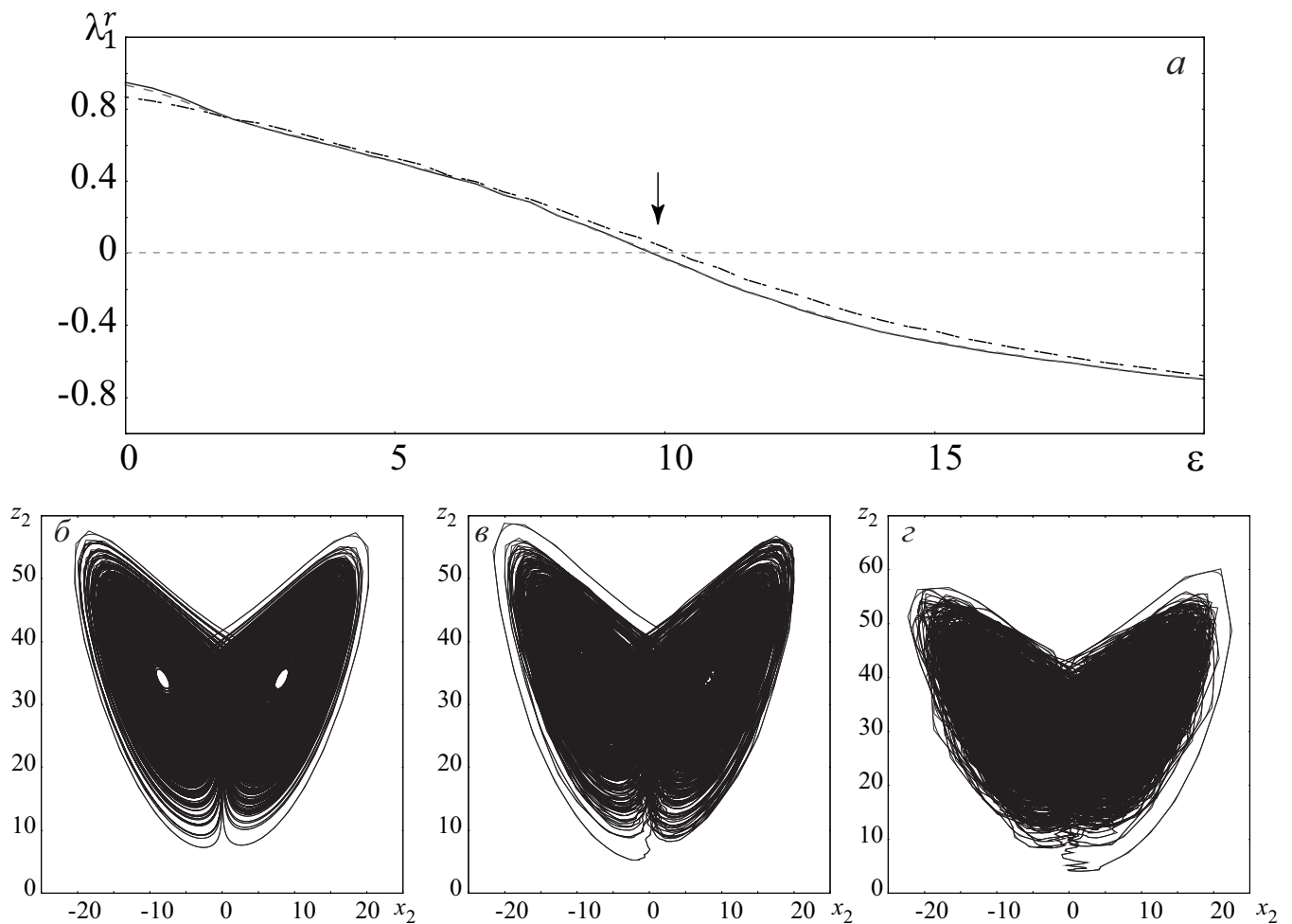


Рисунок 3.3 — Зависимости старшего условного показателя Ляпунова λ_1^r от параметра связи ε при различных значениях интенсивности шумового воздействия (а) и фазовые портреты ведомой системы Лоренца (3.1) при тех же значениях интенсивности шума (б-г): $D = 0$ – сплошная линия (б), $D = 2$ – штриховая линия (в), $D = 8$ – штрихпунктирная линия (г). Значение параметра связи, соответствующее порогу возникновения обобщенной синхронизации в отсутствие шума, показано стрелкой

3.3 Обобщенная синхронизация в присутствии шума в двух однонаправленно связанных системах Чена

Теперь перейдем к рассмотрению установления режима обобщенной синхронизации в присутствии шума в двух однонаправленно связанных системах Чена, уравнения для которых выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha(y_1 - x_1) + ey_1z_1, \\ \dot{y}_1 &= cx_1 - dx_1z_1 + y_1 + u_1, \\ \dot{z}_1 &= x_1y_1 - bz_1, \\ \dot{u}_1 &= -k_1y_1, \\ \dot{x}_2 &= \alpha(y_2 - x_2) + ey_2z_2, \\ \dot{y}_2 &= cx_2 - dx_2z_2 + y_2 + u_2, \\ \dot{z}_2 &= x_2y_2 - bz_2, \\ \dot{u}_2 &= -k_2y_2 + \varepsilon(x_1 - x_2) + D\zeta.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Здесь слагаемое $D\zeta$ определяет внешнее шумовое воздействие с теми же характеристиками, что и для систем Лоренца (3.1), значения управляющих параметров выбраны теми же, что и для взаимно связанных систем Чена (1.6), подробно исследованных в рамках глав 1-2, параметры $k_1 = 190$ и $k_2 = 110$ “поменяны местами”, определяя воздействие первой (ведущей) системы, находящейся в хаотическом режиме, на вторую (ведомую) систему, демонстрирующую режим гиперхаоса. Решение системы (3.2) осуществлялось при помощи той же численной схемы, что и для систем Лоренца (3.1), с теми же параметрами расчета. Диагностика обобщенной синхронизации в системе (3.2) производилась также при помощи метода вспомогательной системы и путем расчета старшего условного показателя Ляпунова для системы (3.2).

По аналогии с системами Лоренца (3.1), для однонаправленно связанных систем Чена также при помощи метода вспомогательной системы

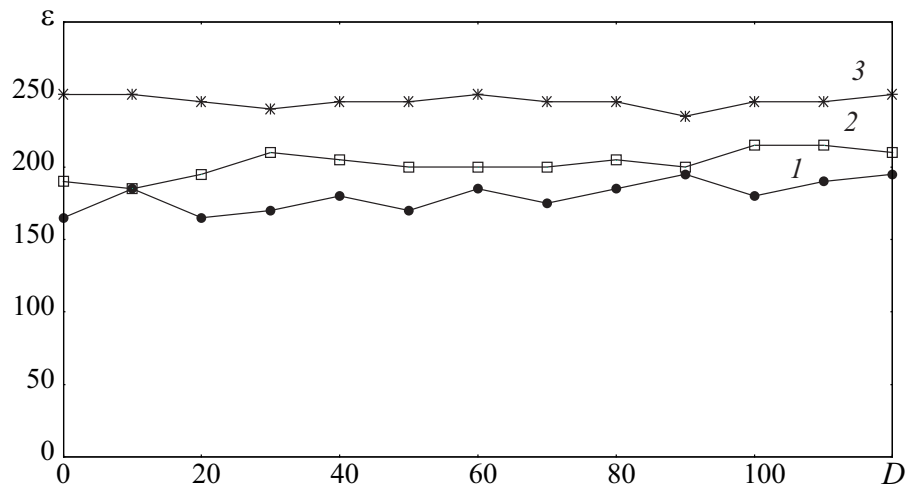


Рисунок 3.4 — Зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Чена (3.2) от интенсивности шума D , полученные при помощи метода вспомогательной системы, при следующих значениях управляющих параметров: 1 — $k_1 = 190$, $k_2 = 110$; 2 — $k_1 = 240$, $k_2 = 110$; 3 — $k_1 = 310$, $k_2 = 110$

получены зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации от интенсивности шума при различных значениях управляющих параметров. На рисунке 3.4 приведены зависимости порога возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации от интенсивности шума для трех различных значений управляющего параметра k_1 при фиксированных значениях остальных управляющих параметров. Легко увидеть, что при различных значениях управляющего параметра k_1 границы возникновения режима обобщенной синхронизации практически не зависят от интенсивности шума $D \in [0; 120]$.

Устойчивость режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Чена по отношению к шумам обусловлена также слабым влиянием шума на поведение старшего условного показателя Ляпунова и структуру аттрактора ведомой системы. На рисунке 3.5 по аналогии с рисунком 3.3 приведены зависимости двух старших условных показателей Ляпунова от параметра связи и фазовые портреты ве-

домой системы Чена при различных значениях интенсивности шумового воздействия. Видно, что, как и в системах Лоренца, при относительно слабых значениях интенсивности шумового воздействия показатели Ляпунова практически не отличаются от аналогичных показателей в отсутствие шума. Увеличение интенсивности шумового сигнала приводит к небольшим изменениям показателей Ляпунова, но переход старшего условного показателя Ляпунова в область отрицательных значений происходит практически при том же значении параметра связи, что и в отсутствие шума или при наличии шума слабой интенсивности. При этом, двулистная структура аттрактора во всех случаях также не разрушается.

Таким образом, в рассмотренных однонаправленно связанных осцилляторах Чена режим обобщенной синхронизации оказывается также устойчивым по отношению к шумам.

3.4 Влияние характеристик шумового сигнала на установление обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных хаотических системах со сложной топологией аттрактора

Теперь обсудим вопрос о влиянии характеристик внешнего шумового воздействия на установление режима обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. В качестве объектов исследования рассмотрим те же однонаправленно связанные системы Лоренца (3.1) и системы Чена (3.2), находящиеся под внешним шумовым воздействием $D\zeta$, а в качестве шумовых сигналов наряду с гауссовским белым шумом выберем еще шум с нулевым средним и равномерной плотностью распределения вероятностей. Для диагностики обобщенной синхронизации

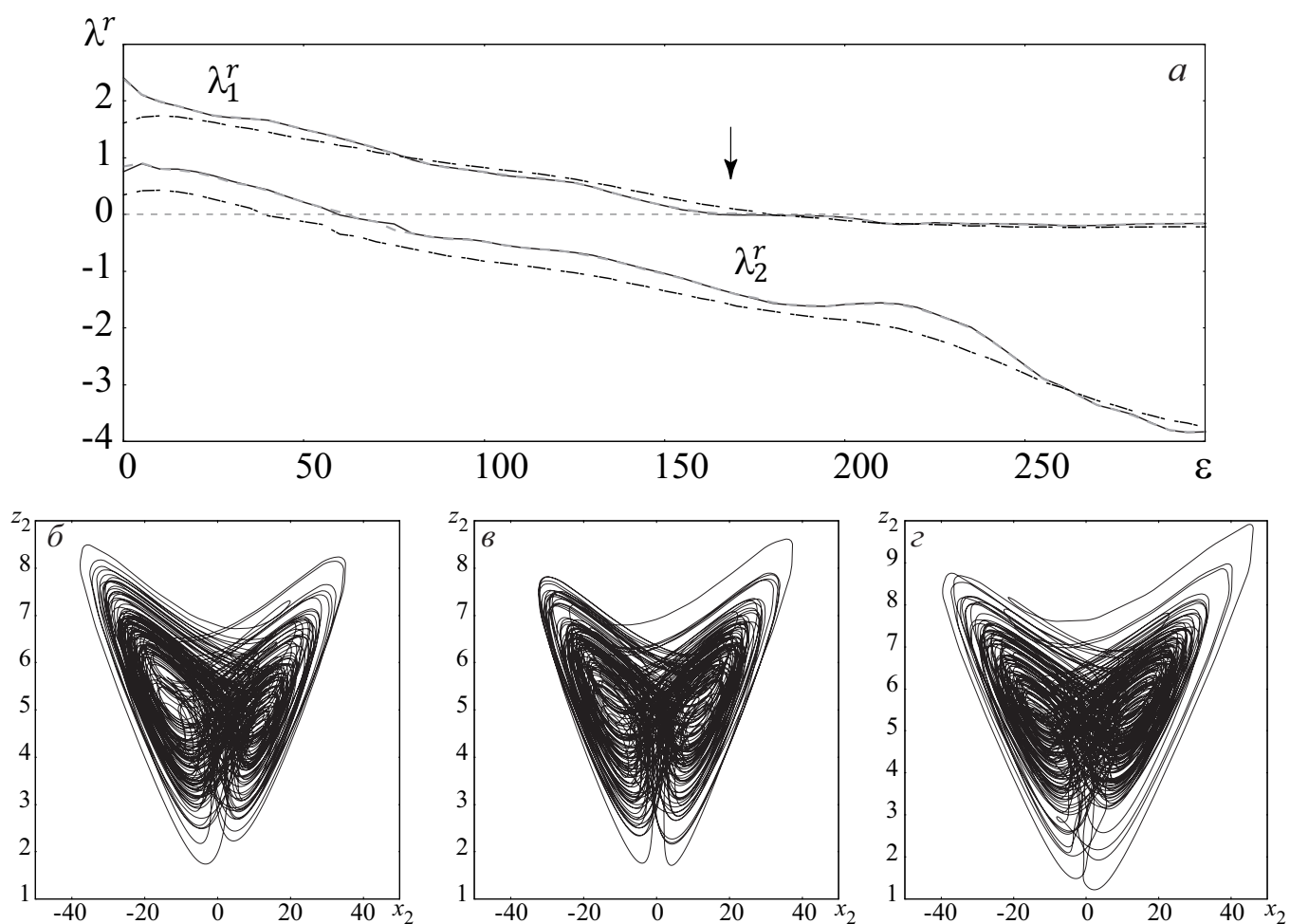


Рисунок 3.5 — Зависимости двух старших условных показателей Ляпунова $\lambda_{1,2}^r$ от параметра связи ε при различных значениях интенсивности шумового воздействия (а) и фазовые портреты ведомой системы Чена (3.2) при тех же значениях интенсивности шума (б-г): $D = 0$ — сплошная линия (б), $D = 10$ — штриховая линия (в), $D = 100$ — штрихпунктирная линия (г). Значение параметра связи, соответствующее порогу возникновения обобщенной синхронизации в отсутствие шума, показано стрелкой

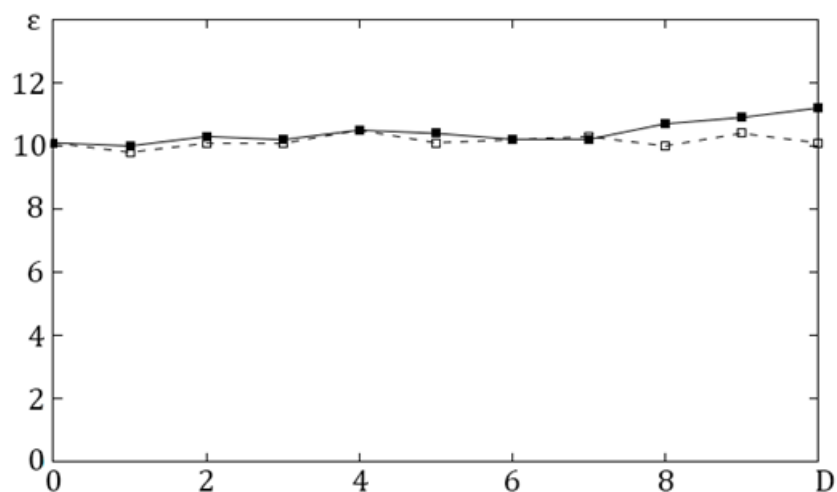


Рисунок 3.6 — Зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Лоренца (3.1) от интенсивности шумового воздействия с гауссовской плотностью распределения вероятностей (сплошная линия) и равномерной плотностью распределения вероятностей (пунктирная линия)

ции по-прежнему будем использовать метод вспомогательной системы и метод расчета старшего условного показателя Ляпунова.

На рисунке 3.6 приведены рассчитанные таким образом границы обобщенной синхронизации на плоскости параметров “интенсивность шумового воздействия – параметр связи” в системе двух однонаправленно связанных осцилляторов Лоренца (3.1) для двух типов шумового воздействия, с гауссовской и равномерной плотностью распределения вероятностей. Из рисунка наглядно видно, что полученные границы слабо отличаются друг от друга. Более того, пороговые значения установления синхронных режимов оказываются практически одинаковыми в широком диапазоне изменения интенсивности шумового воздействия для обоих типов шума. Иными словами, режим обобщенной синхронизации в системе (3.1) оказывается устойчивым по отношению к шумам независимо от интенсивности и типа шумового воздействия.

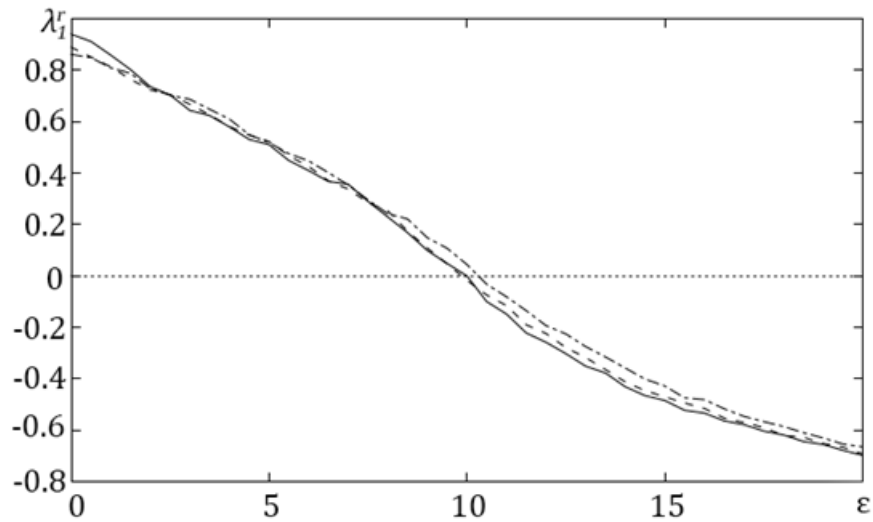


Рисунок 3.7 — Зависимости старшего условного показателя Ляпунова λ_1^r системы (3.1) от параметра связи ε в отсутствии и при наличии различных типов шумового воздействия. Сплошной линией показан старший условный ляпуновский показатель в отсутствии шума $D = 0$, штриховой линией – при воздействии шума с гауссовским распределением вероятности интенсивности $D = 8$, и штрих-пунктирной линией – при воздействии шума с равномерным распределением вероятности интенсивности $D = 8$

На рисунке 3.7 представлены зависимости старшего условного показателя Ляпунова от параметра связи для систем Лоренца в отсутствии шума и при наличии шума одинаковой интенсивности $D = 8$ с гауссовским и равномерным распределениями вероятностей. Видно, что приведенные зависимости немного отличаются друг от друга. Однако, во всех рассмотренных случаях при увеличении параметра связи старший условный показатель Ляпунова переходит в область отрицательных значений практически при одних и тех же значениях параметра связи, что и соответствует одинаковым порогам установления обобщенной синхронизации в исследуемой системе.

На рисунке 3.8 представлены фазовые портреты ведомой системы Лоренца при тех же значениях характера и интенсивности шумового воз-

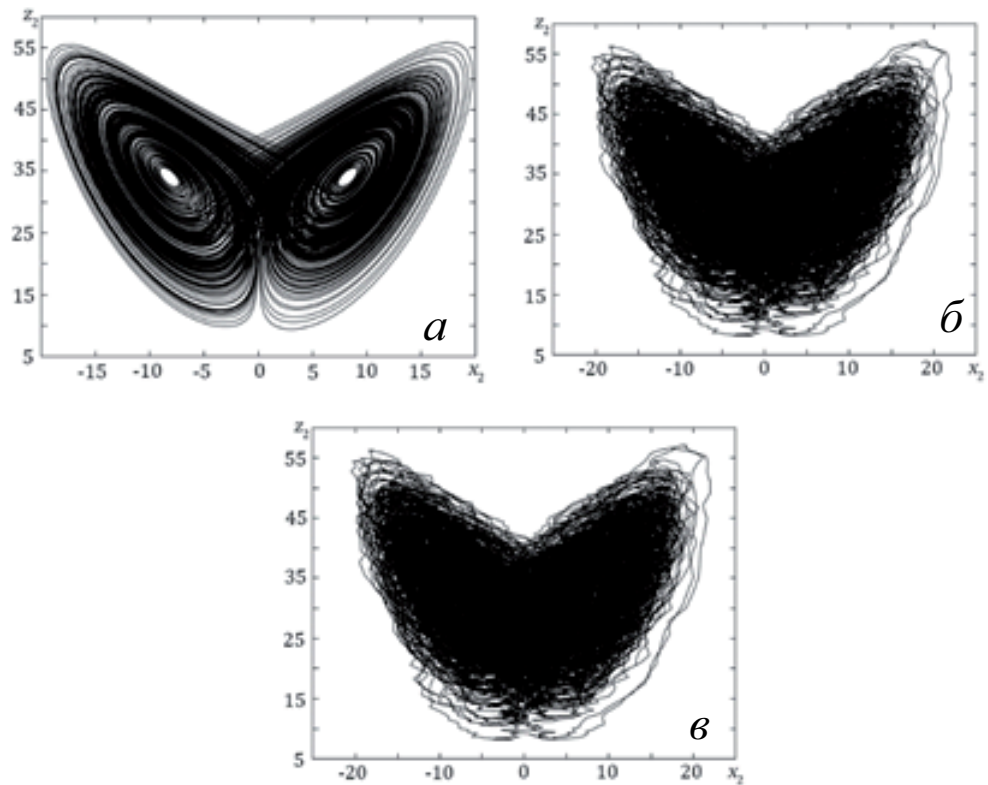


Рисунок 3.8 — Фазовые портреты ведомой системы Лоренца (3.1) в отсутствие шума (*а*) и при наличии шума интенсивности $D = 8$ с гауссовским (*б*) и равномерным (*в*) распределениями вероятности

действия. Из рисунка видно, что, как отмечалось выше, при добавлении шума аттрактор Лоренца заметно трансформируется, в частности, для обоих источников шума происходит его достаточно сильное зашумление, но в обоих случаях двулистная структура аттрактора сохраняется, что может быть причиной устойчивости режима обобщенной синхронизации по отношению к шумам.

Таким образом, режим обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных осцилляторах Лоренца оказывается устойчивым к любому типу шумового воздействия, что может быть объяснено также слабым влиянием шума на аттрактор системы Лоренца.

Аналогичное поведение границ обобщенной синхронизации наблюдается и для однонаправленно связанных систем Чена. На рисунке 3.9 приведены зависимости порога возникновения режима обобщенной ха-

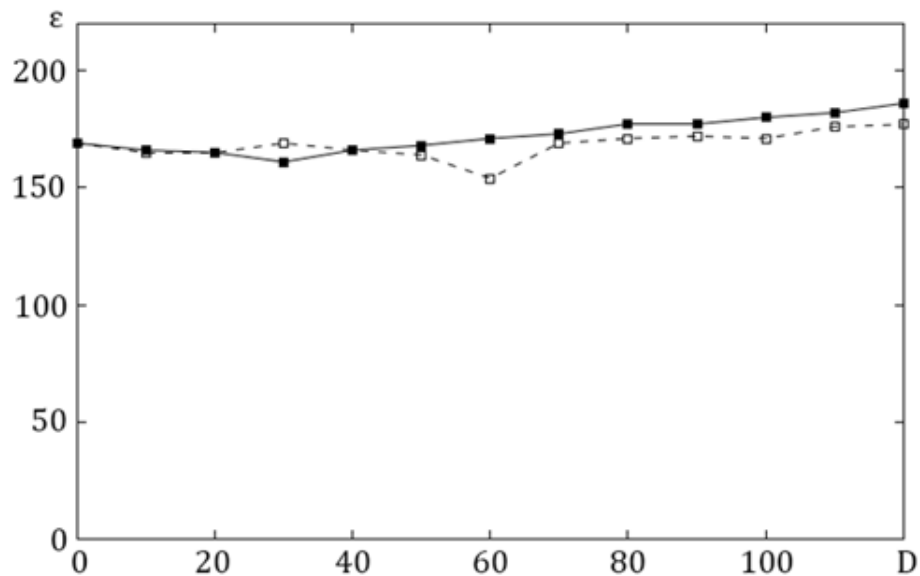


Рисунок 3.9 — Зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Чена (3.2) от интенсивности шума с гауссовской плотностью распределения вероятностей (сплошная линия) и равномерной плотностью распределения вероятностей (пунктирная линия)

отической синхронизации от интенсивности шума для систем Чена, находящихся под воздействием шума с гауссовским и равномерным распределениями. Легко видеть, что по аналогии с осцилляторами Лоренца, при различных типах шумового воздействия границы режима обобщенной синхронизации практически не зависят от интенсивности шума D во всем построенном диапазоне ее изменения. Устойчивость режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Чена по отношению к шумам обусловлена также слабым влиянием шума на структуру аттрактора ведомой системы и поведение старшего условного показателя Ляпунова.

3.5 Обобщенная синхронизация в присутствии шума во взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора

Теперь перейдем к рассмотрению вопроса о влиянии шума на обобщенную синхронизацию в двух взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора, а в качестве объектов исследования выберем те же системы Лоренца и системы Чена, но связанные взаимно. Ввиду независимости полученных результатов в системах с однонаправленным типом связи от характеристик шумового сигнала, в данном разделе ограничимся рассмотрением только источника белого шума с гауссовским распределением плотности вероятности. По аналогии со случаем однонаправленной связи шум будем вводить только в одно из уравнений второй системы. Из-за неработоспособности метода вспомогательной системы для осцилляторов с взаимным типом связи, для диагностики обобщенной синхронизации в данном случае будем использовать только метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем, находящихся под действием шума. Параметры численных схем выберем те же, что и в случае однонаправленной связи.

Уравнения взаимодействующих систем в данном случае запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1) + \varepsilon(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= r_1x_1 - y_1 - x_1z_1, \\ \dot{z}_1 &= -bz_1 + x_1y_1, \\ \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + \varepsilon(x_1 - x_2) + D\zeta, \\ \dot{y}_2 &= r_2x_2 - y_2 - x_2z_2, \\ \dot{z}_2 &= -bz_2 + x_2y_2.\end{aligned}\tag{3.3}$$

для взаимно связанных систем Лоренца и

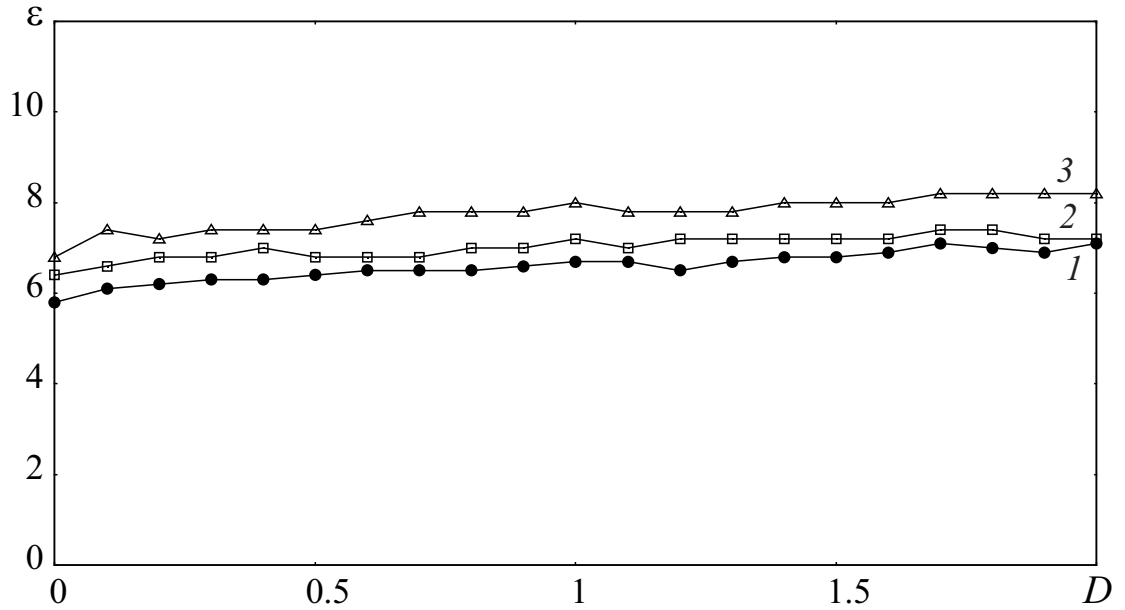


Рисунок 3.10 — Зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации в двух взаимно связанных системах Лоренца (3.3), находящихся под действием шума, от интенсивности D шумового воздействия, полученные при различных значениях управляющих параметров: $1 - r_1 = 40, r_2 = 35$; $2 - r_1 = 40, r_2 = 45$; $3 - r_1 = 40, r_2 = 50$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \alpha(y_1 - x_1) + \epsilon y_1 z_1, \\
 \dot{y}_1 &= cx_1 - dx_1 z_1 + y_1 + u_1, \\
 \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - bz_1, \\
 \dot{u}_1 &= -k_1 y_1 + \epsilon(x_2 - x_1), \\
 \dot{x}_2 &= \alpha(y_2 - x_2) + \epsilon y_2 z_2, \\
 \dot{y}_2 &= cx_2 - dx_2 z_2 + y_2 + u_2, \\
 \dot{z}_2 &= x_2 y_2 - bz_2, \\
 \dot{u}_2 &= -k_2 y_2 + \epsilon(x_1 - x_2) + D\zeta.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

для систем Чена. Значения управляющих параметров оставим теми же, что и в случае однонаправленной связи.

На рисунках 3.10–3.11 приведены рассчитанные границы обобщенной синхронизации на плоскости параметров “интенсивность шумового воздействия – параметр связи” для обеих рассматриваемых систем. Из

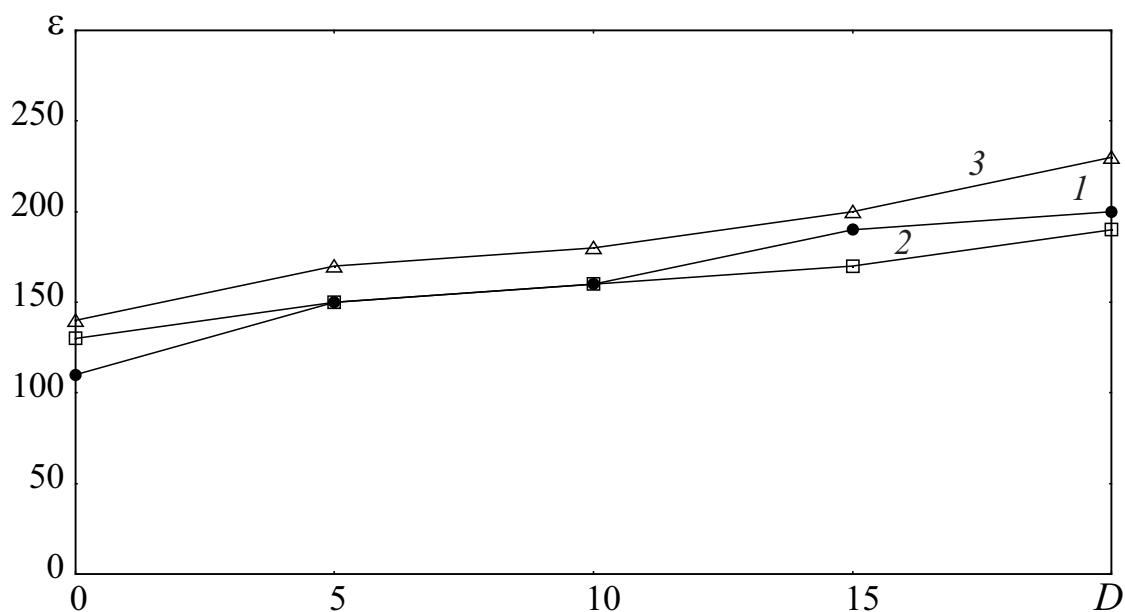


Рисунок 3.11 — Зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации в двух взаимно связанных системах Чена (3.4), находящихся под действием шума, от интенсивности шумового воздействия D , полученные при различных значениях управляющих параметров: 1 — $k_1 = 190$, $k_2 = 110$; 2 — $k_1 = 240$, $k_2 = 110$; 3 — $k_1 = 310$, $k_2 = 110$

рисунков видно, что режим обобщенной синхронизации в данном случае остается по-прежнему устойчивым по отношению к шумам в ограниченном диапазоне изменения интенсивности шумового воздействия, однако, степень устойчивости в данном случае оказывается значительно ниже. Это может быть обусловлено взаимным характером взаимодействия между системами: при однонаправленной связи шум воздействует только на ведомую систему, а при взаимной связи фактически распространяется на обе системы, тем самым трансформируя аттракторы обеих взаимодействующих систем. На рисунке 3.12 представлены фазовые портреты обеих систем Лоренца в присутствии шума интенсивности $D = 1$ при изменении параметра связи. Видно, что шум трансформирует аттракторы обеих систем, но при этом сохраняет их двулистную структуру.

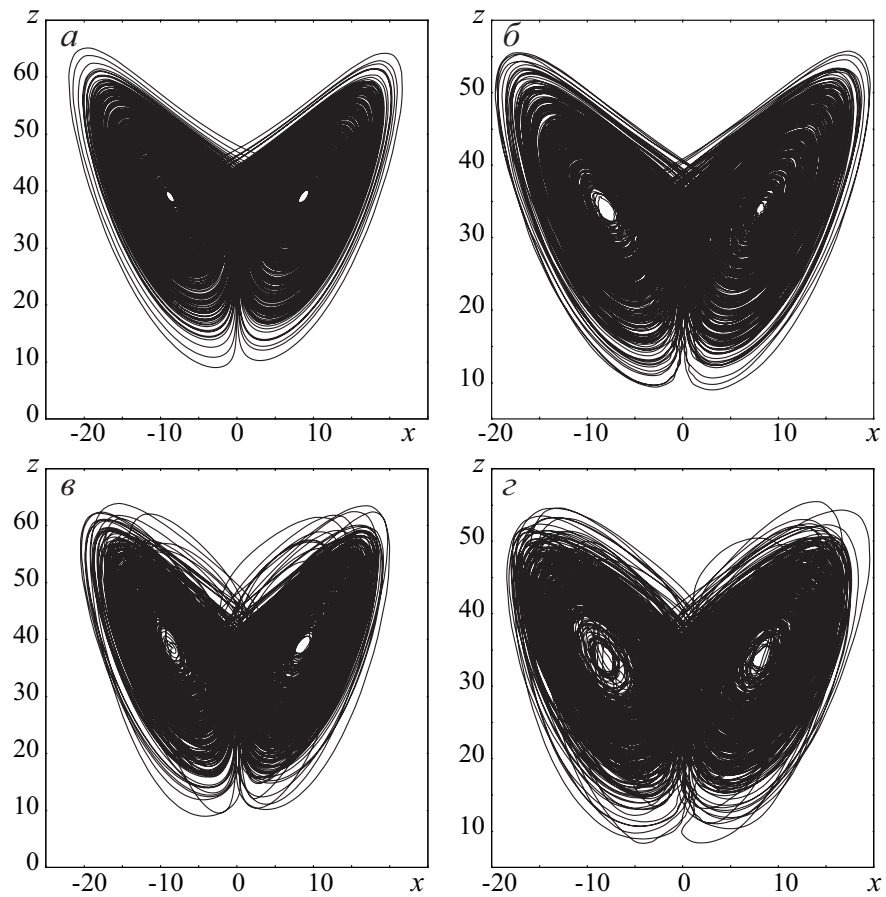


Рисунок 3.12 — Фазовые портреты взаимодействующих первой ($a, в$) и второй ($б, г$) систем Лоренца (3.3), находящихся под действием шума интенсивности $D = 1$, при изменении параметра связи ε : ($a, б$) $\varepsilon = 0.1$, ($в, г$) $\varepsilon = 6$

3.6 Выводы по главе 3

Таким образом, в третьей главе диссертационной работы проанализировано влияние шума на порог установления режима обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора. Установлено, что независимо от типа связи между системами и характера распределения случайной величины, описывающей шумовой процесс, режим обобщенной синхронизации в таких системах оказывается устойчивым по отношению к шумам в широком, но ограниченном диапазоне изменения интенсивности шумового воздействия. При этом, диапазон устойчивости к шумам практически не зависит от характеристик шумового сигнала, но сильно зависит от типа связи между системами.

Для диагностики обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах, находящихся под действием шума, использовались метод вспомогательной системы и метод расчета старшего условного показателя Ляпунова. Показано, что оба метода дают хорошо согласующиеся между собой результаты, а расхождение между ними можно объяснить наличием перемежаемости вблизи границы возникновения синхронного режима. Для взаимно связанных систем, как неоднократно упоминалось в рамках данной диссертации, метод вспомогательной системы не работает, а следовательно, диагностика обобщенной синхронизации в таких системах в присутствии шума осуществлялась только при помощи расчета спектра показателей Ляпунова. В качестве объектов исследования выбраны осцилляторы Лоренца и системы Чена, связанные однонаправленно и взаимно. Для обеих систем получены качественно одинаковые результаты.

Для объяснения устойчивости режима обобщенной синхронизации по отношению к шумам изучен вопрос о трансформации аттракторов

взаимодействующих систем Лоренца и Чена при добавлении в них шума разной интенсивности. Показано, что внешний шумовой сигнал не разрушает двулистную структуру аттракторов этих систем, что и объясняет слабую зависимость порога возникновения синхронного режима от интенсивности и типа шумового воздействия. Также установлено, что внешний источник шума практически не меняет величину старшего условного (в случае взаимной связи, как правило, второго) показателя Ляпунова, отвечающего за установление обобщенной синхронизации, что является дополнительным доказательством устойчивости режима обобщенной синхронизации к шумам в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора.

Заключение

Таким образом, в рамках настоящей диссертационной работы решена научная задача, имеющая существенное значение для радиофизики, связанная с разработкой методов анализа обобщенной синхронизации и перемежающегося поведения, имеющего место вблизи ее границы, в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной (двулистной) топологией аттрактора и исследованием особенностей этого режима при помощи разработанных методов и подходов. В качестве объектов исследования выбраны однонаправленно и взаимно связанные системы Лоренца и Чена. Получены следующие основные научные результаты:

1. Проверена работоспособность классических методов диагностики режима обобщенной синхронизации применительно к системам со сложной структурой аттрактора. Установлено, что в однонаправленно связанных системах возможно корректно использовать метод вспомогательной системы и метод расчета условных показателей Ляпунова, в то время как для систем с взаимным типом связи только метод расчета спектра показателей Ляпунова оказывается применимым. Кроме того, на конкретных примерах показано, что известный метод ближайших соседей не позволяет корректно диагностировать наступление режима обобщенной синхронизации в случае обоих типов связи.

2. Впервые предложено использовать метод фазовых трубок, который является модификацией метода ближайших соседей, для диагностики обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. Результаты предложенного метода хорошо согласуются с данными, полученными с помощью расчета показателей Ляпунова для обоих типов связи между системами, а для однонаправленно связанных систем – еще и с результатами метода вспомогательной системы.
3. Выявлены механизмы возникновения/разрушения режима обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. Показано, что разрушение режима обобщенной синхронизации в данном случае обусловлено асинхронным перескоком изображающих точек с одного листа хаотического аттрактора на другой, что приводит к возникновению перемежаемости вблизи границы этого режима.
4. Исследованы характеристики перемежаемости, имеющей место вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора. При помощи метода вспомогательной системы установлено, что статистические характеристики перемежаемости, полученные в данном случае, существенно отличаются от характеристик перемежаемости типа “on-off”, реализуемой в системах с относительно простой топологией аттрактора. Обнаруженный тип перемежаемости назван перемежаемостью “перескоков” (jump intermittency).
5. Предложен метод перескоков, основанный на анализе расположения изображающих точек на аттракторах взаимодействующих систем, для определения характеристик перемежающегося поведения на границе режима обобщенной синхронизации в системах со слож-

ной топологией аттрактора. Апробация метода проведена на однонаправленно связанных системах Лоренца со сложной топологией аттрактора, находящихся вблизи границы обобщенной синхронизации. Вычислены распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительностей ламинарных фаз от параметра связи при помощи этого метода, полученные результаты сопоставлены с аналогичными характеристиками, полученными при помощи метода вспомогательной системы. Показано, что предложенный метод несильно уступает классическому методу вспомогательной системы, что позволяет использовать его в том случае, где реализация метода вспомогательной системы не представляется возможной, например, в случае взаимной связи между системами.

6. Численно получены характеристики перемежаемости, имеющей место вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, связанных взаимно. На примере осцилляторов Лоренца и систем Чена установлено, что распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средних длительностей ламинарных фаз от параметра связи подчиняются экспоненциальным законам. Те же закономерности присущи однонаправленно связанным системам, что свидетельствует о независимости типа перемежаемости, имеющего место вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, от типа связи между системами.
7. Изложены теоретические основы перемежаемости “перескоков”. Получены экспоненциальные законы для распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра связи. Показано, что результаты численного моделирования находятся в хорошем соответствии с теорети-

ческими закономерностями как для однонаправленного, так и взаимного типов связи между системами.

8. Изучен вопрос о влиянии шума на порог установления режима обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора. Для систем с однонаправленным типом связи для диагностики синхронного режима использовались метод вспомогательной системы и метод расчета старшего условного показателя Ляпунова. Показано, что оба метода дают хорошо согласующиеся между собой результаты, а расхождение между ними можно объяснить наличием перемежаемости вблизи границы возникновения синхронного режима. При этом, для взаимно связанных систем, находящихся под действием шума, диагностика синхронного режима возможна только при помощи расчета спектра показателей Ляпунова для этих систем.
9. Для систем со сложной топологией аттрактора, находящихся под действием шума, установлено, что независимо от типа связи между системами и характера распределения случайной величины, описывающей шумовой процесс, режим обобщенной синхронизации в таких системах оказывается устойчивым по отношению к шумам в широком, но ограниченном диапазоне изменения интенсивности шумового воздействия. При этом, диапазон устойчивости к шумам практически не зависит от характеристик шумового сигнала, но сильно зависит от типа связи между системами.
10. Для объяснения причин устойчивости режима обобщенной синхронизации по отношению к шумам изучен вопрос о трансформации аттракторов взаимодействующих систем при изменении интенсивности шумового воздействия. Показано, что внешний шумовой сигнал не разрушает двулистную структуру аттракторов этих систем,

что и объясняет слабую зависимость порога возникновения синхронного режима от интенсивности и типа шумового воздействия. Также установлено, что внешний источник шума практически не меняет величину показателя Ляпунова, отвечающего за установление обобщенной синхронизации, что еще раз подтверждает устойчивость режима обобщенной синхронизации к шумам в однонаправленно и взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора.

В завершение работы хочу выразить искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору, доктору физико-математических наук Москаленко Ольге Игоревне за многолетнюю и продуктивную совместную работу, поддержку на протяжении всего процесса обучения, а также за всестороннюю и неоценимую помощь при подготовке настоящей диссертации. Отдельную благодарность также выражаю профессору, доктору физико-математических наук Короновскому Алексею Александровичу, с которым я начинал свою научную работу, а также рецензентам диссертации профессору, доктору физико-математических наук Вадивасовой Татьяне Евгеньевне и профессору, доктору физико-математических наук Павлову Алексею Николаевичу за полезные замечания и обсуждения, позволившие повысить ее качество.

Список литературы

- [1] И. И. Блехман, Синхронизация в природе и технике, М.: Наука, 1981.
- [2] V. S. Anishchenko, V. Astakhov, A. Neiman, T. E. Vadivasova, L. Schimansky-Geier, Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Developments, Springer–Verlag, Heidelberg, 2001.
- [3] А. С. Пиковский, М. Г. Розенблюм, Ю. Куртс, Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление, М.: Техносфера, 2003.
- [4] S. Boccaletti, J. Kurths, G. V. Osipov, D. L. Valladares, C. S. Zhou, The synchronization of chaotic systems, Physics Reports 366 (2002) 1–101.
- [5] V. S. Anishchenko, V. V. Astakhov, A. B. Neiman, T. E. Vadivasova, L. Schimansky-Geier, Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development., 2nd Edition, Springer, 2007.
- [6] В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, Г. И. Стрелкова, Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний, М.-Ижевск: Научно-издательский центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008.
- [7] A. G. Balanov, N. B. Janson, D. E. Postnov, O. V. Sosnovtseva, Synchronization: from simple to complex, Springer, 2009.

- [8] S. Boccaletti, A. N. Pisarchik, C. I. del Genio, A. Amann, Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks. 1st Edition, Cambridge University Press, 2018.
- [9] L. Kocarev, U. Parlitz, General approach for chaotic synchronization with applications to communication, *Physical Review Letters* 74 (25) (1995) 5028–5031.
- [10] J. Terry, G. VanWiggeren, Chaotic communication using generalized synchronization, *Chaos, Solitons & Fractals* 12 (2001) 145–152.
- [11] J. Y. Chen, K. W. Wong, L. M. Cheng, J. W. Shuai, A secure communication scheme based on the phase synchronization of chaotic systems, *Chaos* 13 (2) (2003) 508–514.
- [12] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации, *Успехи физических наук* 179 (12) (2009) 1281–1310.
- [13] О. И. Moskalenko, А. А. Koronovskii, А. Е. Hramov, Generalized synchronization of chaos for secure communication: Remarkable stability to noise, *Phys. Lett. A* 374 (2010) 2925–2931.
- [14] V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov, A. S. Karavaev, D. D. Kulminskiy, An experimental digital communication scheme based on chaotic time-delay system, *Nonlinear Dynamics* 74 (2013) 1013–1020.
- [15] P. A. Tass, et al., Detection of n:m phase locking from noisy data: Application to magnetoencephalography, *Phys. Rev. Lett.* 81 (15) (1998) 3291–3294.
- [16] V. S. Anishchenko, A. G. Balanov, N. B. Janson, N. B. Igosheva, G. V. Bordyugov, Entrainment between heart rate and weak

- nonlinear forcing, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 10 (10) (2000) 2339–2348.
- [17] A. N. Pavlov, O. V. Sosnovtseva, A. R. Ziganshin, N. H. Holstein-Rathlou, E. Mosekilde, Multiscality in the dynamics of coupled chaotic systems, *Physica A* 316 (2002) 233–249.
- [18] N. F. Rulkov, Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 041922.
- [19] O. V. Sosnovtseva, A. N. Pavlov, E. Mosekilde, N. H. Holstein-Rathlou, Synchronization phenomena in multimode dynamics of coupled perhrons, *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика* 11 (3) (2003) 133–147.
- [20] M. D. Prokhorov, V. I. Ponomarenko, V. I. Gridnev, M. B. Bodrov, A. B. Bespyatov, Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system, *Phys. Rev. E* 68 (2003) 041913.
- [21] D. Sato, L.-H. Xie, A. A. Sovari, D. X. Tran, N. Morita, F. Xie, H. Karagueuzian, A. Garfinkel, J. N. Weiss, , Z. Qu, Synchronization of chaotic early afterdepolarizations in the genesis of cardiac arrhythmias, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 106 (9) (2009) 2983–2988.
- [22] F. Mormann, R. G. Andrzejak, T. Kreuz, C. Rieke, P. David, C. E. Elger, K. Lehnertz, Automated detection of a preseizure state based on a decrease in synchronization in intracranial electroencephalogram recordings from epilepsy patients, *Phys. Rev. E* 67 (2003) 021912.
- [23] О. В. Масленников, В. И. Некоркин, Адаптивные динамические сети, *Усп. физ. наук* 187 (7) (2017) 745–756.
- [24] E. E. Kharkovskaya, G. V. Osipov, I. V. Mukhina, Ventricular fibrillation induced by 2-aminoethoxydiphenyl borate under

- conditions of hypoxia/reoxygenation, *Minerva Cardioangiologica* 68 (6) (2020) 619–628.
- [25] А. Е. Храмов, Н. С. Фролов, В. А. Максименко, С. А. Куркин, В. Б. Казанцев, А. Н. Писарчик, Функциональные сети головного мозга: от восстановления связей до динамической интеграции, *Усп. физ. наук* 191 (6) (2021) 614–650.
- [26] С. Huang, Z. Song, Z. Qu, Synchronization of spatially discordant voltage and calcium alternans in cardiac tissue, *Phys. Rev. E* 106 (2022) 024406.
- [27] Д. И. Трубецков, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Синхронизация распределенных автоколебательных систем электронно-волновой природы с обратной волной, *Изв. вузов. Радиофизика* XLVII (5–6) (2004) 343–372.
- [28] А. Е. Храмов, А. А. Короновский, P. V. Popov, I. S. Rempen, Chaotic synchronization of coupled electron-wave systems with backward waves, *Chaos* 15 (1) (2005) 013705.
- [29] B. S. Dmitriev, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, A. V. Starodubov, D. I. Trubetskov, Y. D. Zharkov, First experimental observation of generalized synchronization phenomena in microwave oscillators, *Physical Review Letters* 102 (7) (2009) 074101.
- [30] L. Minati, B. Li, J. Bartels, Z. Li, M. Frasca, H. Ito, Incomplete synchronization of chaos under frequency-limited coupling: Observations in single-transistor microwave oscillators, *Chaos, Solitons & Fractals* 165 (2022) 112854.
- [31] В. С. Анищенко, Д. Э. Постнов, Эффект захвата фазовой частоты хаотических колебаний. Синхронизация странных аттракторов, *Письма в ЖТФ* 14 (6) (1988) 569.

- [32] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, Phase synchronization of chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* 76 (11) (1996) 1804–1807.
- [33] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.* 64 (8) (1990) 821–824.
- [34] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* 78 (22) (1997) 4193–4196.
- [35] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, H. D. I. Abarbanel, Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems, *Phys. Rev. E* 51 (2) (1995) 980–994.
- [36] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization, *Phys. Rev. E* 84 (3) (2011) 037201.
- [37] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, S. Boccaletti, Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks, *Phys. Rev. E* 86 (2012) 036216.
- [38] H. D. I. Abarbanel, N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach, *Phys. Rev. E* 53 (5) (1996) 4528–4535.
- [39] N. J. Corron, S. D. Pethel, K. Myneni, Synchronizing the information content of a chaotic map and flow via symbolic dynamics, *Phys. Rev. E* 66 (2002) 036204.
- [40] E. A. Rogers, R. Kalra, R. D. Schroll, A. Uchida, D. P. Lathrop, R. Roy, Generalized synchronization of spatiotemporal chaos in a liquid crystal spatial light modulator, *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004) 084101.

- [41] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, Generalized synchronization: a modified system approach, *Phys. Rev. E* 71 (6) (2005) 067201.
- [42] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, Generalized synchronization onset, *Europhysics Letters* 72 (6) (2005) 901–907.
- [43] S. Guan, X. Gong, K. Li, Z. Liu, C. H. Lai, Characterizing generalized synchronization in complex networks, *New Journal of Physics* 12 (2010) 073045.
- [44] S. Chishti, R. Ramaswamy, Design strategies for generalized synchronization, *Phys. Rev. E* 98 (2018) 032217.
- [45] T. Stankovski, P. V. E. McClintock, A. Stefanovska, Dynamical inference: Where phase synchronization and generalized synchronization meet, *Phys. Rev. E* 89 (2014) 062909.
- [46] X. Yu, Z. Zuo, S. Zhu, X. Zhang, Study on general criteria for generalized chaotic synchronization with a desired manifold, *AIP Advances* 12 (11) (2022) 115124.
- [47] T. Kano, K. Umeno, Chaotic synchronization of mutually coupled systems—arbitrary proportional linear relations, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 32 (11) (2022) 113137.
- [48] С. П. Кузнецов, *Динамический хаос, серия “Современная теория колебаний и волн”*, М.: Физматлит, 2006.
- [49] В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Перемежаемость вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, *Известия Российской академии наук. Серия физическая* 85 (2) (2021) 265–269.
- [50] E. Lorenz, The Predictability of Hydrodynamic Flow, *Transactions of the New York Academy of Sciences* 25 (4) (1963) 409–432.

- [51] В. С. Анищенко, А. Н. Сильченко, И. А. Хованов, Взаимная синхронизация процессов переключений в связанных системах Лоренца, Письма в ЖТФ 23 (8) (1997) 14–19.
- [52] Y. Yu, L. Li, X. Meng, S. Wang, Chaotic synchronization of fractional-order unidirectionally coupled Lorenz systems, Beijing Jiaotong Daxue Xuebao/Journal of Beijing Jiaotong University 33 (3) (2009) 103–106.
- [53] R.-r. Ma, J. Wu, K. Wu, X. Pan, Adaptive fixed-time synchronization of Lorenz systems with application in chaotic finance systems, Nonlinear Dynamics 109 (4) (2022) 3145–3156.
- [54] L. O. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto, The double scroll family, IEEE Trans. Circuits and Syst. cas-33 (11) (1986) 1073–1118.
- [55] A. Andreatos, A. Leros, Secure image encryption based on a chua chaotic noise generator, Journal of Engineering Science and Technology Review 6 (4) (2013) 90–103.
- [56] N. V. Stankevich, N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, L. O. Chua, Scenario of the birth of hidden attractors in the Chua circuit, International Journal of Bifurcation and Chaos 27 (12) (2017) 17300385.
- [57] W. A. Al-Musawi, W. A. Wali, M. A. A. Al-Ibadi, New artificial neural network design for Chua chaotic system prediction using fpga hardware co-simulation, International Journal of Electrical and Computer Engineering 12 (2) (2022) 1955 – 1964.
- [58] N. Kuznetsov, T. Mokaev, V. Ponomarenko, E. Seleznev, N. Stankevich, L. Chua, Hidden attractors in Chua circuit: mathematical theory meets physical experiments, Nonlinear Dynamics 111 (6) (2023) 5859 – 5887.

- [59] P. Manneville, Dissipative structures and weak turbulence, N. Y.: Academic Press, 1990.
- [60] Г. Шустер, Детерминированный хаос, М.: Мир, 1988.
- [61] В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, и др., Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах, М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [62] A. Carballosa, A. P. Munuzuri, Intermittency regimes of poorly-mixed chemical oscillators, *Chaos, Solitons & Fractals* 157 (2022) 111920.
- [63] J. F. Heagy, N. Platt, S. M. Hammel, Characterization of on–off intermittency, *Phys. Rev. E* 49 (2) (1994) 1140–1150.
- [64] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators, *Europhysics Lett.* 70 (2) (2005) 169–175.
- [65] J. F. Heagy, T. L. Carroll, L. M. Pecora, Desynchronization by periodic orbits, *Physical Review E* 52 (2) (1995) R1253–R1256.
- [66] C. S. Zhou, J. Kurths, I. Z. Kiss, J. L. Hudson, Noise-enhanced phase synchronization of chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* 89 (1) (2002) 014101.
- [67] S. Guan, Y. C. Lai, C. H. Lai, Effect of noise on generalized chaotic synchronization, *Phys. Rev. E* 73 (2006) 046210.
- [68] K. Sakai, P. H. Brown, T. S. Rosenstock, S. K. Upadhyaya, A. Hastings, Spatial phase synchronisation of pistachio alternate bearing: Common-noise-induced synchronisation of coupled chaotic oscillators, *Chaos, Solitons & Fractals* 165 (2022) 112764.

- [69] V. Munyaev, L. Smirnov, V. Kostin, G. Osipov, A. Pikovsky, Analytical approach to synchronous states of globally coupled noisy rotators, *New Journal of Physics* 22 (2) (2020) 023036.
- [70] Y. Song, T. A. Witten, Stochastic synchronization induced by noise, *Phys. Rev. E* 106 (2022) 044207.
- [71] О. И. Москаленко, А. А. Овчинников, Исследование влияния шума на обобщенную хаотическую синхронизацию в диссипативно связанных динамических системах: устойчивость синхронного режима по отношению к внешним шумам и возможные практические приложения, *Радиотехника и электроника* 55 (4) (2010) 436–449.
- [72] O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, A. A. Ovchinnikov, Effect of noise on generalized synchronization of chaos: theory and experiment, *Europhysics Journal B* 82 (1) (2011) 69–82.
- [73] О. И. Москаленко, В. А. Ханадеев, А. А. Короновский, Метод диагностики обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией хаотического аттрактора, *Письма в ЖТФ* 44 (19) (2018) 87–95.
- [74] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, В. А. Ханадеев, Метод выделения характерных фаз поведения в системах со сложной топологией аттрактора, находящихся вблизи границы обобщенной синхронизации, *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* 28 (3) (2020) 274–281.
- [75] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, В. А. Ханадеев, Переменяющееся поведение на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора, *Журнал технической физики* 89 (3) (2019) 338–341.

- [76] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. A. Pivovarov, V. A. Khanadeev, A. E. Hramov, A. N. Pisarchik, Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization, *Physical Review E* 102 (1) (2020) 012205.
- [77] В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, Влияние шума на обобщенную синхронизацию в системах со сложной топологией аттрактора, *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика* 21 (3) (2021) 233–241.
- [78] В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, О влиянии характеристик шумового сигнала на установление обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, *Известия Российской академии наук. Серия физическая* 86 (2) (2022) 283–287.
- [79] M. D. Prokhorov, V. I. Ponomarenko, D. D. Kulminskiy, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, Resistant to noise chaotic communication scheme exploiting the regime of generalized synchronization, *Nonlinear Dynamics* 87 (3) (2017) 2039–2050.
- [80] В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Программа для анализа перемежаемости на границе обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора методом перекоков. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020661110, *Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 18.09.2020* (2020).
- [81] В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Программа для реализации метода фазовых трубок и диагностики режима обобщенной синхронизации в двух взаимно связанных системах Чена. Свидетельство о государственной регистрации программы

для ЭВМ № 2021668020, Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 04.11.2021 (2021).

- [82] В. А. Ханадеев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, Обобщенная синхронизация в хаотических системах, характеризующихся двумя положительными показателями Ляпунова, Нелинейные волны – 2018. XVIII научная школа. Тезисы докладов молодых ученых, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 2018, С. 198–200.
- [83] V. A. Khanadeev, Generalized synchronization in chaotic systems with two positive Lyapunov exponents, Представляем научные достижения миру. Естественные науки: Материалы IX научной конференции молодых ученых “Presenting Academic Achievements to the world”, Изд-во “Саратовский источник”, Саратов, 2019, С. 51–55.
- [84] В. А. Ханадеев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, Обобщенная синхронизации в системах с двумя положительными показателями Ляпунова, “Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”: сборник трудов XIII Всерос. конф. молодых ученых, Издательство “Техно-Декор”, Саратов, 2018, С. 373–374.
- [85] В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Механизмы возникновения перемежаемости на границе обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, Труды школы-семинара “Волны-2019”. Нелинейная динамика, Можайск, 2019, С. 30–32.
- [86] В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Перемежаемость вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, Труды школы-семинара “Волны-

- 2020”. Нелинейная динамика и информационные системы, Можайск, 2020, С. 11–12.
- [87] В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Метод выделения ламинарных и турбулентных фаз поведения в системах со сложной топологией аттрактора, находящихся вблизи границы обобщенной синхронизации, “Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”: Сборник трудов XV Всероссийской конференции молодых ученых, Изд-во “Техно-Декор”, Саратов, 2020, С. 292–293.
- [88] В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, Влияние шума на обобщенную синхронизацию в системах со сложной топологией аттрактора, Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии: Труды XX Международной конференции. под ред. проф. В.П. Гергеля, Изд-во: Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 2020, С. 405–406.
- [89] В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, О влиянии характеристик шумового сигнала на установление обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, Труды школы-семинара “Волны-2021”. Нелинейная динамика и информационные системы, Можайск, 2021, С. 21–22.
- [90] В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, Особенности обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии: Труды XXI Международной конференции. Под ред. проф. Д.В. Баландина, Изд-во: Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 2021, С. 385–388.

- [91] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Е. В. Евстифеев, В. А. Ханадеев, Особенности обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора, *Динамические системы. Теория и приложения. Тезисы докладов международной конференции*, Нижний Новгород, 2022, С. 66–67.
- [92] K. Pyragas, Weak and strong synchronization of chaos, *Phys. Rev. E* 54 (5) (1996) R4508–R4511.
- [93] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, С. А. Шурыгина, Влияние степени взаимности связи на установление типов хаотической синхронизации, *Радиотехника и электроника* 56 (12) (2011) 1490–1500.
- [94] U. Parlitz, L. Junge, W. Lauterborn, L. Kocarev, Experimental observation of phase synchronization, *Phys. Rev. E* 54 (2) (1996) 2115–2117.
- [95] K. Pyragas, Conditional Lyapunov exponents from time series, *Phys. Rev. E* 56 (5) (1997) 5183–5188.
- [96] O. Moskalenko, A. Koronovskii, A. Hramov, Inapplicability of an auxiliary-system approach to chaotic oscillators with mutual-type coupling and complex networks, *Phys. Rev. E* 87 (2013) 064901.
- [97] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. M. Strelcyn, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. P. I. Theory. P. II. Numerical application, *Meccanica* 15 (1980) 9–30.
- [98] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, В. А. Максименко, А. Е. Храмов, О возникновении обобщенной синхронизации в пучково-плазменных системах, связанных взаимно, *Письма в ЖТФ* 37 (13) (2011) 40–47.

- [99] Z. Chen, Y. Yang, G. Qi, Z. Yuan, A novel hyperchaos system only with one equilibrium, *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics* 360 (6) (2007) 696–701.
- [100] Z. Zheng, X. Wang, M. C. Cross, Transitions from partial to complete generalized synchronizations in bidirectionally coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 056211.
- [101] P. Berge, Y. Pomeau, C. Vidal, *Order within Chaos*, John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [102] И. И. Блехман, *Синхронизация динамических систем*, М.: Наука, 1971.
- [103] J. L. Cabrera, J. G. Milton, On-off intermittency in a human balancing task, *Phys. Rev. Lett.* 89 (15) (2002) 158702.
- [104] E. Sitnikova, A. E. Hramov, V. V. Grubov, A. A. Ovchinnikov, A. A. Koronovsky, On-off intermittency of thalamo-cortical oscillations in the electroencephalogram of rats with genetic predisposition to absence epilepsy, *Brain Research* 1436 (2012) 147–156.
- [105] A. Campos-Mejía, A. N. Pisarchik, D. A. Arroyo-Almanza, Noise-induced on-off intermittency in mutually coupled semiconductor lasers, *Chaos, Solitons & Fractals* 54, 96–100.
- [106] A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, V. V. Grubov, O. I. Moskalenko, E. Sitnikova, A. N. Pavlov, Coexistence of intermittencies in the neuronal network of the epileptic brain, *Phys. Rev. E* 93 (3) (2016) 032220.
- [107] E. Ott, J. C. Sommerer, Blowout bifurcations: The occurrence of riddled basins and on-off intermittency, *Phys. Lett. A* 188 (1994) 39.

- [108] A. S. Pikovsky, G. V. Osipov, M. G. Rosenblum, M. Zaks, J. Kurths, Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization, *Phys. Rev. Lett.* 79 (1) (1997) 47–50.
- [109] K. J. Lee, Y. Kwak, T. K. Lim, Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* 81 (2) (1998) 321–324.
- [110] S. Boccaletti, D. L. Valladares, Characterization of intermittent lag synchronization, *Phys. Rev. E* 62 (5) (2000) 7497–7500.
- [111] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, S. Boccaletti, Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization, *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006) 114101.
- [112] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, С. А. Шурыгина, Переменяющееся поведение на границе индуцированной шумом синхронизации, *ЖТФ* 81 (9) (2011) 150–153.
- [113] М. О. Zhuravlev, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. A. Ovchinnikov, A. E. Hramov, Ring intermittency near the boundary of the synchronous time scales of chaotic oscillators, *Phys. Rev. E* 83 (2011) 027201.
- [114] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, M. O. Zhuravlev, V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov, Intermittency of intermitencies, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 23 (3) (2013) 033129.
- [115] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. A. Pivovarov, E. V. Evstifeev, Intermittent route to generalized synchronization in bidirectionally coupled chaotic oscillators, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 30 (8) (2020) 083133.

- [116] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. О. Сельский, Корректность определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации при использовании только одной переменной ведомой и вспомогательной систем, Письма в ЖТФ 46 (7) (2020) 48–51.
- [117] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, M. O. Zhuravlev, A. E. Hramov, Characteristics of noise-induced intermittency, Chaos, Solitons & Fractals 117 (2018) 269–275.
- [118] M. K. Cuomo, A. V. Oppenheim, S. H. Strogatz, Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with application to communications, IEEE Trans. Circuits and Syst. 40 (10) (1993) 626.
- [119] M. S. Baptista, T. P. Silva, T. P. Sartorelli, I. L. Caldas, E. Rosa, Phase synchronization in the perturbed Chua circuit, Phys. Rev. E 67 (5) (2003) 056212.
- [120] P. Palaniyandi, M. Lakshmanan, Secure digital signal transmission by multistep parameter modulation and alternative driving of transmitter variables, International Journal of Bifurcation and Chaos 11 (7) (2001) 2031–2036.
- [121] S. Tsay, C. Huang, D. Qiu, W. Chen, Implementation of bidirectional chaotic communication systems based on Lorenz circuits, Chaos, Solitons & Fractals 20 (3) (2004) 567–579.
- [122] Н. Н. Никитин, С. В. Первачев, В. Д. Разевиг, О решении на ЦВМ стохастических дифференциальных уравнений следящих систем, Автоматика и телемеханика 4 (1975) 133–137.