

ФГБОУ ВО “Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”

На правах рукописи



ПЛОТНИКОВА Анастасия Дмитриевна

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ
СЛОЖНОЙ ДИНАМИКИ И СИНХРОННОГО ПОВЕДЕНИЯ В
РАДИОФИЗИЧЕСКИХ ГЕНЕРАТОРАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И
РЕАЛЬНЫХ НЕЙРОФИЗИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

1.3.4. – Радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени кандидата
физико–математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Москаленко О. И.

Саратов 2022

Содержание

Введение	4
1 Метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием	18
1.1 Системы с запаздыванием	18
1.2 Метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием	20
1.3 Применение метода расчета спектра показателей Ляпунова к системе “генератор с запаздыванием”	23
1.4 Применение метода расчета спектра показателей Ляпунова к уравнению Маккея-Гласса	25
1.5 Выводы по главе 1	26
2 Обобщенная синхронизация в системах с запаздыванием	29
2.1 Режим обобщенной синхронизации. Концепция и методы диагностики	30
2.2 Обобщенная синхронизация в генераторах с запаздыванием. Однонаправленный тип связи	34
2.3 Обобщенная синхронизация в связанных уравнениях Маккея-Гласса. Однонаправленный тип связи	40
2.4 Обобщенная синхронизация в связанных уравнениях Маккея-Гласса. Взаимный тип связи	46
2.5 Влияние времени запаздывания на порог установления режима обобщенной синхронизации	48
2.6 Выводы по главе 2	52
3 Фазовая и перемежающаяся фазовая синхронизация в модельных и реальных нейрофизиологических системах	54
3.1 Основные понятия и вероятностные характеристики	54
3.2 Оценка степени синхронизма, основанная на расчете показателей Ляпунова	65
3.3 Применение метода расчета показателей Ляпунова для оценки степени синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации в реальных нейрофизиологических системах	70
3.4 Анализ данных электроэнцефалограмм крыс линии WAG/Rij	73
3.5 Анализ данных электроэнцефалограмм человека с диагностированной эпилепсией	76
3.6 Выводы по главе 3	79

Заключение	81
Список литературы	86

Введение

Актуальность исследуемой проблемы

Феномен хаотической синхронизации появился на рубеже 21 века, и за достаточно короткое время в этой научной области был сделан значительный исследовательский прорыв [1–3]. Это связано с тем, что явление хаотической синхронизации может наблюдаться во многих сферах деятельности человека и может принести колоссальную пользу в различных областях знаний.

К настоящему времени были выявлены и хорошо изучены разные типы хаотической синхронизации, среди которых наибольшее распространение получили режимы полной синхронизации [4], синхронизации с запаздыванием (lag-синхронизации) [5], обобщенной синхронизации [6], фазовой синхронизации [7, 8], синхронизации временных масштабов [9] и другие.

Среди различных областей науки и техники, в которых каждый из вышеперечисленных типов хаотической синхронизации нашел свое применение, можно выделить СВЧ-электронику и радиофизику [10–13], сферу скрытой передачи информации [14–18], лазерную физику [19–24], исследования в области биологии и медицины [25–33].

Непосредственно на границе различных типов синхронного поведения наблюдается перемежающееся поведение [1, 34]. Соответственно, существуют режимы перемежающейся фазовой синхронизации [35–37], перемежающейся обобщенной синхронизации [38, 39], перемежающейся синхронизации с запаздыванием [40], перемежающейся синхронизации временных масштабов [41, 42] и т.п. Подобные явления возможно наблю-

дать также в неавтономных периодических и хаотических осцилляторах, находящихся под внешним шумовым воздействием [43, 44]. Перемежаемость также часто встречается в реальных системах, в том числе в нейрофизиологических, где в качестве примера можно привести эпилептическую активность у животных и человека [45, 46]. Таким образом, изучение особенностей синхронизации связанных хаотических осцилляторов и перемежающегося поведения на границе синхронных режимов в настоящее время представляется актуальным направлением теоретических и экспериментальных исследований, имеющим важное практическое значение.

Для исследования поведения динамических систем существует множество количественных и качественных критериев, которые предоставляют информацию о состоянии и изменениях изучаемого объекта. Одним из таких базовых и фундаментальных инструментов является расчет спектра показателей Ляпунова [47–51], который эффективен как при изучении автономной, так и неавтономной динамики систем с сосредоточенными и распределенными параметрами. С помощью расчета спектра показателей Ляпунова возможно отследить качественные изменения в динамике системы при варьировании управляющих параметров. Методика расчета показателей Ляпунова хорошо зарекомендовала себя в таких исследованиях систем, при которых происходит переход от хаотического режима к гиперхаосу [52] или для выявления наличия гиперболического аттрактора [49, 53]. При изучении синхронных режимов в неавтономных и связанных системах расчет показателей Ляпунова позволяет детектировать границы их возникновения [54–59].

Методология расчета показателей Ляпунова применительно к вопросам исследования хаотической синхронизации используется повсеместно. Например, смена знака у одного из положительных показателей Ляпунова на отрицательный указывает на наступление режима обобщенной синхронизации [54, 57, 59–61]. Момент перехода нулевого условного ляпуновского показателя в отрицательную область предшествует установлению режима фазовой синхронизации в неавтономных системах,

находящихся в периодическом режиме под действием шума, и связанных системах, демонстрирующих хаотическую динамику [55, 56, 58, 62]. Важно учитывать, что разница между моментом смены знака показателя Ляпунова и наступлением режима фазовой синхронизации может быть достаточно велика, из чего следует вывод, что величину соответствующего показателя Ляпунова можно рассматривать как степень синхронизма при перемежающейся фазовой синхронизации [62, 63].

Необходимо отметить, что подход для изучения хаотической синхронизации, основанный на расчете спектра показателей Ляпунова, является универсальным и применяется как в сосредоточенных, так и распределенных системах. Например, режим обобщенной синхронизации был исследован в моделях систем с дискретным временем, связанных однонаправленно [54] и взаимно [64], потоковых динамических системах с однонаправленной [65] и взаимной [59] связью, а также в пространственно-распределенных системах [59, 66, 67]. Режим фазовой синхронизации был подробно изучен в однонаправленно и взаимно связанных системах с фазово-когерентными и фазово-некогерентными аттракторами [5, 68] и сетях связанных нелинейных элементов [69–73].

Существует ряд распространенных и хорошо зарекомендовавших себя методов для расчета показателей Ляпунова по заданному оператору эволюции и по временной реализации. Это алгоритм Бенеттина и процедура ортогонализации Грама-Шмидта в первом случае и методы Вольфа, Экмана и Розенштейна во втором [74–76]. Однако, к настоящему времени еще существуют открытые вопросы, связанные с особенностями применения данного подхода в более сложных, нетривиальных системах. Это может быть связано, например, с пространственно-распределенной природой системы, где существует бесконечномерное фазовое пространство, а спектр показателей Ляпунова таких систем содержит бесконечное число показателей Ляпунова. В данном случае общепринятые методы расчета показателей Ляпунова оказываются неработоспособными, что говорит о необходимости разработки и использования новых методов и алгоритмов. Также сложности могут возникнуть при исследовании реальных

данных, когда из доступных характеристик в распоряжении оказывается только временная реализация, а оператор эволюции вовсе отсутствует. При необходимости рассматривать не только старший показатель Ляпунова, но и нулевой (что является неотъемлемой частью при исследовании фазовой и перемежающейся фазовой хаотической синхронизации) использование классических алгоритмов оценки старших показателей Ляпунова по временному ряду становится недостаточным.

Таким образом, на основании вышеизложенного, можно сделать вывод о необходимости дальнейшего изучения и внедрения новых подходов по расчету спектра показателей Ляпунова в связанных системах, демонстрирующих режимы хаотической синхронизации.

Цель диссертационной работы

Целью настоящей диссертационной работы является изучение сложной динамики и синхронного поведения хаотических динамических систем с использованием расчета спектра показателей Ляпунова. В качестве исследуемых объектов в диссертации выбраны сложные модельные системы, такие как однонаправленно и взаимно связанные системы с запаздыванием, а также экспериментальные данные нейрофизиологической природы — сигналы электроэнцефалограмм (ЭЭГ), полученные с различных областей головного мозга крысы линии WAG/Rij и человека, страдающего эпилепсией. Основным инструментом для выявления закономерностей был выбран подход, основанный на расчете спектра показателей Ляпунова, для использования которого в рамках настоящей диссертационной работы были разработаны и апробированы новые методы и подходы.

В соответствии с поставленной целью определены основные задачи исследования, которые можно разделить на два блока:

- изучение особенностей режима обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с запаздыванием:

- разработка и апробация метода расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием;
- исследование режима обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием, связанных однонаправленно и взаимно, анализ влияния значений управляющих параметров и времени запаздывания на порог возникновения режима обобщенной синхронизации;
- определение степени синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации по экспериментальным временным рядам нейрофизиологической природы:
 - разработка и апробация метода оценки степени синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации, основанного на расчете условного нулевого показателя Ляпунова по временному ряду;
 - применение разработанного метода для оценки степени синхронизма перемежающегося поведения реальных нейрофизиологических систем.

Для решения задач второго блока также рассмотрены модельные однонаправленно связанные хаотические системы, способные демонстрировать режим перемежающейся фазовой синхронизации, и оценены их статистические характеристики.

Научная новизна

В настоящей диссертационной работе представлены фундаментальные результаты исследования режима обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с запаздыванием, а также режимов фазовой и перемежающейся фазовой синхронизации в реальных нейрофизиологических системах. В соответствии с поставленной

целью и по мере выполнения работы были получены новые научные результаты:

- разработан и апробирован метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием;
- выявлены особенности обобщенной синхронизации, присущие системам с запаздыванием;
- получена зависимость значения параметра связи, отвечающего за установление режима обобщенной синхронизации, от величины времени запаздывания;
- выявлена степень синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации крысы линии WAG/Rij без лекарств и под действием препарата клонидин;
- продемонстрированы законы изменения показателя Ляпунова в обоих рассматриваемых случаях;
- проанализированы аналогичные результаты для ЭЭГ головного мозга человека, страдающего эпилепсией;
- проведено изучение поведения вероятности детектирования ламинарной фазы в ансамбле однонаправленно связанных неидентичных осцилляторов Ресслера с использованием двух принципиально различных методов вычисления вероятности наблюдения ламинарной фазы: по времени и по ансамблю;
- определено влияние количества осцилляторов на вероятность детектирования ламинарной фазы в режимах перемежающейся фазовой синхронизации и фазовой синхронизации.

Личный вклад

Исследования, проведенные в рамках настоящей диссертационной работы, осуществлялись автором лично, либо при его непосредственном

участии. Задачи исследования были сформулированы научным руководителем работы – д.ф.-м.н., профессором Москаленко О.И. Разработка и апробация метода расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием проводилась совместно с научным руководителем и д.ф.-м.н., профессором Короновским А.А.

В рамках диссертационной работы были изучены реальные экспериментальные данные нейрофизиологической природы – сигналы электроэнцефалограмм, полученные с различных областей головного мозга крысы линии WAG/Rij и человека, страдающего эпилепсией. Экспериментальные данные были получены специалистами-нейрофизиологами в Радбаут университете Наймегена (Нидерланды) в лаборатории профессора Ж. ван Люжетаалар и в Институте высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН под руководством д.б.н. Е.Ю. Ситниковой, а также в НИИ кардиологии Саратовского государственного медицинского университета.

Метод расчета показателя Ляпунова для оценки степени синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации по временным рядам был модифицирован на основе работ д.ф.-м.н., профессора Москаленко О.И. и к.ф.-м.н. Павлова А.С. с учетом специфики решаемой задачи [63,77,78].

Научная и практическая значимость

В диссертационной работе решена научная задача, имеющая большое значение для современной радиофизики в части разработки новых методов расчета спектра показателей Ляпунова для объектов различной природы и анализа многочисленных явлений и закономерностей при помощи разработанных подходов. Результаты настоящей диссертационной работы носят фундаментальный характер и вносят существенный вклад в область исследований обобщенной и перемежающейся фазовой синхронизации. В частности, важное практическое значение имеют разработанные методы расчета показателей Ляпунова для систем с запаздыванием и по временным рядам. Для систем с запаздыванием пред-

ложенный метод может использоваться на практике в системах скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации, а метод оценки нулевого условного показателя Ляпунова по временному ряду может найти применение в области нейрофизиологической медицины для диагностики различных заболеваний нервной системы.

Данные и закономерности, полученные при исследовании поведения вероятности детектирования ламинарной фазы в ансамбле однонаправленно связанных неидентичных осцилляторов Ресслера, носят теоретический характер и имеют перспективы для дальнейшего детального изучения.

Основные научные положения и результаты, выносимые на защиту

1. Разработанный метод расчета спектра показателей Ляпунова позволяет исследовать автономную и неавтономную динамику систем с запаздыванием. Для автономных систем он может использоваться для определения режима, реализуемого в системах, а для однонаправленно и взаимно связанных систем – диагностировать наступление режима обобщенной синхронизации.
2. Порог обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с запаздыванием при изменении времени запаздывания выходит на уровень насыщения, величина которого существенным образом зависит от типа связи между системами и числа положительных показателей Ляпунова, реализуемых во взаимодействующих системах в отсутствие связи между ними.
3. Разработанная модификация метода оценки нулевого условного показателя Ляпунова по временным рядам учитывает специфику сигналов активности головного мозга и делает возможной оценку степени синхронизма в реальных нейрофизиологических системах, что

показано на примере анализа различных участков электроэнцефалограмм человека, страдающего эпилепсией, и крыс линии WAG/Rij – генетических моделей абсансной эпилепсии.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Она содержит 104 страницы текста, включая 29 иллюстраций и 2 таблицы. Список литературы содержит 162 источника.

Введение содержит раздел с обоснованием актуальности диссертационного исследования. Здесь поставлены соответствующие цели, определены научная новизна и практическая значимость полученных результатов, а также представлена информация о достоверности и апробации результатов и основные положения и результаты, выносимые на защиту.

Первая глава диссертационной работы посвящена вопросу о применении показателей Ляпунова для анализа сложной динамики и синхронного поведения в системах с запаздыванием. В начале главы представлен краткий обзор существующих методов и подходов для вычисления спектра показателей Ляпунова в сосредоточенных и распределенных системах, а также отмечены их достоинства и недостатки. Определена необходимость разработки и адаптации методик, способных решить открытые вопросы в области исследований динамики систем с запаздыванием.

Далее представлен и пошагово описан разработанный метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием, основанный на рассмотрении эволюции во времени пространственного состояния системы и (с периодическими ортогонализациями и перенормировками) его возмущений. Все расчеты проводились для одномерной системы, у которой в качестве состояния выступает скалярная переменная, определенная на интервале времени с длительностью, равной времени запаздывания, при этом верхняя граница интервала совпадает с текущим моментом времени.

Разработанный метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием был апробирован на генераторе с запаздыванием и модели кроветворения Маккея-Гласса. Наряду со спектром показателей Ляпунова были построены бифуркационные диаграммы исследуемых систем при изменении одного из их управляющих параметров. Сопоставление полученных результатов друг с другом выявило хорошее соответствие между ними.

Во **второй главе** изложены результаты исследования общих закономерностей установления режима обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с запаздыванием. В качестве моделей исследования в продолжение первой главы выбраны связанные уравнения Маккея-Гласса, а также система из двух связанных генераторов с запаздыванием.

Для диагностики обобщенной синхронизации использовался метод расчета спектра показателей Ляпунова, разработанный в главе 1. Для однонаправленного типа связи применялся также метод вспомогательной системы. Исследование динамики взаимодействующих систем проводилось путем варьирования значений управляющих параметров, отвечающих за различное количество положительных показателей Ляпунова в автономных системах, а следовательно, характеризующих различную степень их хаотичности. При изучении однонаправленно связанных систем по мере увеличения интенсивности связи между ними наблюдался переход условных положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений с последующим установлением режима обобщенной синхронизации, что полностью соответствует известным теоретическим закономерностям для систем с сосредоточенными и распределенными параметрами. В ходе проведения исследований обнаружено, что независимо от выбора значений управляющих параметров взаимодействующих систем в исследуемых моделях наблюдается обобщенная синхронизация, однако, пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению этого режима, зависит от выбора значений этих параметров. Наибольшее значение силы связи требуется в случае, когда

ведущая система с меньшим числом положительных показателей Ляпунова воздействует на ведомую систему с большим количеством этих показателей. Схожие изменения в спектре показателей Ляпунова наблюдаются также при взаимном типе связи.

Отдельно рассмотрен вопрос о зависимости порога установления обобщенной синхронизации от времени запаздывания. Показано, что при увеличении времени запаздывания порог обобщенной синхронизации сначала монотонно возрастает, а затем выходит на уровень насыщения, величина которого зависит от значений управляющих параметров взаимодействующих систем. Подобное поведение наблюдается как в случае однонаправленной, так и взаимной связи.

Третья глава направлена на изучение фазовой и перемежающейся фазовой синхронизации в модельных и реальных нейрофизиологических системах. В начале этой главы приведен краткий обзор феноменов фазовой и перемежающейся фазовой синхронизации, отмечена важность статистических характеристик при исследовании перемежаемости вблизи границы фазовой синхронизации. На примере однонаправленно связанных неидентичных осцилляторов Ресслера со слабой расстройкой собственных частот проведено исследование поведения вероятности детектирования ламинарной фазы. В качестве сравнительной характеристики выступала вероятность, рассчитанная с помощью определения средней длительности ламинарных фаз в одной паре осцилляторов на всем временном ряду, а также вероятность, рассчитанная в каждой паре из ансамбля осцилляторов Ресслера на каждом шаге по времени. Два способа определения вероятности детектирования ламинарной фазы показали идентичные результаты: графики зависимостей рассматриваемых величин от параметра связи оказались практически идентичными друг другу. Установлено, что в режиме фазовой синхронизации количество пар осцилляторов не влияет на факт существования ламинарной фазы, а в режиме перемежающейся фазовой синхронизации при достаточно большом количестве пар вероятность выходит на уровень насыщения.

Вторая часть главы и основной упор сделан на разработанный в рамках этой главы новый метод для оценки степени синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации на основе расчета условного нулевого показателя Ляпунова взаимодействующих систем по временному ряду. Для апробации метода использовано квадратичное отображение с дополнительным гауссовским шумом. Представленный метод применен к сигналам электроэнцефалограмм человека, страдающего эпилепсией. Отдельно рассмотрены участки ЭЭГ, соответствующие пик-волновым разрядам (приступам эпилепсии), и синхронные участки фоновой активности головного мозга. В результате проведенных расчетов показателя Ляпунова оказались отрицательными для обоих видов активности головного мозга, а на основании вычисленного отношения показателей был сделан вывод, что пик-волновые разряды обладают большей степенью синхронизма. Аналогичным способом проанализированы ЭЭГ крыс линии WAG/Rij. Произведена оценка степени синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации крыс линии WAG/Rij, находящихся в свободном состоянии и под действием лекарственных препаратов. Обнаружено, что пик-волновые разряды лучше синхронизированы под действием лекарства.

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы.

Достоверность полученных результатов

Достоверность теоретических результатов, представленных в настоящей диссертационной работе, обоснована выбранными классическими математическими моделями, базовыми методами для их решения и исследования. В качестве изначальных данных были выбраны достоверные, ранее полученные результаты. Для валидации разработанных методов были также использованы дополнительные хорошо зарекомендовавшие себя методики, при этом итоговые результаты хорошо согласо-

ются между собой. Расхождения с существующими опубликованными и общепризнанными научными результатами отсутствуют.

Апробация результатов и публикации

Настоящая диссертационная работа выполнена на кафедре физики открытых систем института физики ФГБОУ ВО “Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского” (СГУ).

Результаты, изложенные в данной работе, опубликованы в отечественных и зарубежных научных журналах, входящих в международные системы цитирования Web of Science и Scopus и рекомендованных ВАК РФ для опубликования материалов диссертаций [79–85]¹. Полученные результаты представлялись на международных, всероссийских и региональных научных конференциях, в том числе на 11 и 12 Международной школе-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур” (Саратов, 2016, 2019) [86,87]; 18 и 19 Научной школе “Нелинейные волны” (ННГУ и ИПФ РАН, Нижний Новгород, 2018, 2020) [88, 89]; 16 и 18 Всероссийской школе-семинаре “Физика и применение микроволн” им. А.П. Сухорукова (МГУ, Москва, 2017, 2019) [90,91]; 14 Всероссийской научной школе молодых ученых “Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика” (Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН и СГУ им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2019) [92]; Всероссийской школе-конференции “Нелинейные дни в Саратове для молодых” (СГУ им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2018-2020); научной конференции “Presentic academic achievements to the world” (СГУ им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2016, 2018); а также на студенческих конференциях факультета нелинейных процессов (СГУ им. Н.Г.Чернышевского, Саратов, 2017-2019) [93–95].

Материалы работы использовались при выполнении грантов Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых

¹ До 2018 года автор диссертации публиковала свои работы под фамилией Колоскова А.Д.

российских ученых (проекты № МК-4574.2016.2, № МК-531.2018.2, № МД-21.2020.2), а также гранта Российского научного фонда (№ 19-12-00037). По результатам исследований были зарегистрированы 3 программы для ЭВМ [96–98].

Глава 1

Метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием

[82, 85, 88, 92, 94, 98]

1.1 Системы с запаздыванием

Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом получили широкое распространение в иммунологии [99], химии [100], электронике [101], механике деформируемого твердого тела [102] и термодинамике [103]. Именно введение запаздывания в дифференциальные уравнения позволяет корректно описать процессы, протекающие в рассматриваемых системах. Так, в задаче о динамике популяций оно может учитывать характеристики их развития, рождаемости или вымирания, в биологических задачах в качестве времени запаздывания используется время транспорта молекул от места их синтеза к месту их включения в реакцию – время формирования клеток определенного типа, участвующих в иммунной реакции [104].

Такие системы в простейшем случае описываются обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздывающим (отклоняющимся) аргументом [104]

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t - \tau)], \quad (1.1)$$

где x – неизвестная функция независимого аргумента t , f – нелинейная функция, τ – время запаздывания (некоторая, как правило, положительная константа).

При изучении систем с отклоняющимся аргументом необходимо использовать различные методы и подходы. Наглядное представление о свойствах системы можно получить с помощью временных реализаций, фазовых портретов, бифуркационных диаграмм, фурье- и вейвлет-спектров и т. п. (см., например, [105, 106]).

Однако, численные алгоритмы, традиционно используемые для решения и анализа моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, требуют адаптации с учетом специфики сложных систем. Это относится и к такому мощному инструменту изучения динамики систем, как расчет спектра показателей Ляпунова, который снабжает исследователей более детальной информацией о природе наблюдаемых режимов и поведении системы при изменении управляющих параметров [51, 107, 108].

Это связано с тем фактом, что системы с запаздыванием характеризуются бесконечномерным фазовым пространством. Из этого следует, что и спектр показателей Ляпунова таких систем содержит бесконечное число показателей. Традиционные методы расчета показателей Ляпунова в данном случае перестают работать, что требует разработки и использования специальных подходов и алгоритмов. В настоящее время известно несколько методов расчета показателей Ляпунова для систем с запаздыванием. Например, в работах [109–111] описывались численные подходы к расчету показателей Ляпунова применительно к изучению автономной динамики систем (например, определения различных динамических режимов: от периодической автомодуляции до гиперхаоса). В работе [112] описана численная схема расчета спектра показателей Ляпунова для распределенных систем с запаздыванием, основанная на модификации метода Бенеттина с помощью искусственной дискретизации системы. В этих работах основной уклон делался на изучение поведения показателей Ляпунова при больших значениях времени запаздывания. Более того, неавтономная динамика подобных систем при помощи расчета показателей Ляпунова, как правило, не исследовалась.

Таким образом, из вышесказанного следует необходимость разработки и адаптации методов, которые позволят с высокой точностью отслеживать изменения в динамике таких сложных систем, как системы с запаздыванием.

1.2 Метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием

В настоящей диссертационной работе предложен и апробирован метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием. Метод в некоторой степени аналогичен подходу, разработанному в работах [51, 107] для пространственно-распределенных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Такие системы также характеризуются бесконечномерным фазовым пространством, а следовательно, спектр показателей Ляпунова для таких систем также содержит бесконечное число показателей. Метод основан на рассмотрении эволюции во времени пространственного состояния изучаемой системы и его возмущений (с периодическими ортогонализациями и перенормировками). Для систем с запаздыванием использовать этот метод “в чистом виде” не представляется возможным, однако идеологию подхода можно взять за основу для дальнейших разработок нового алгоритма.

Идея предложенного метода заключается в следующем. Основными рассматриваемыми величинами являются состояние системы и ортонормированный набор возмущений этого состояния. Каждое возмущение соответствует одному из показателей в спектре показателей Ляпунова. При изучении одномерных систем в качестве состояния выступает скалярная переменная, описывающая динамику изучаемой системы, определенная на интервале времени с длительностью, равной времени запаздывания, при этом верхняя граница интервала совпадает с текущим моментом времени. Соответственно, каждое возмущение состояния си-

стемы представляет собой также одномерную величину, зависящую от времени и заданную на том же самом временном интервале. Для расчета спектра показателей Ляпунова все возмущения, определенные на интервале времени запаздывания, в начальный момент рассмотрения должны быть выбраны ортогональными друг другу

$$(\tilde{x}_i(\zeta), \tilde{x}_j(\zeta)) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (1.2)$$

и иметь единичную норму

$$\|\tilde{x}_i(\zeta)\| = 1, \quad (1.3)$$

где $(x(\zeta), y(\zeta)) = \int_0^T x(\zeta)y(\zeta)d\zeta$ – скалярное произведение, $\|x(\zeta)\| = (x(\zeta), x(\zeta))$.

Нетрудно получить такой набор функций возмущений опорного состояния при помощи ортогонализации Грама-Шмидта и последующих перенормировок [74].

В ходе вычисления спектра показателей Ляпунова осуществляется численное моделирование уравнения с отклоняющимся аргументом, являющееся оператором эволюции рассматриваемой системы, в результате чего удастся получить эволюцию во времени опорного состояния системы. Одновременно с численным моделированием оператора эволюции осуществляется расчет эволюции набора возмущений опорного состояния системы, для чего численно интегрируется линеаризованное уравнение эволюции для каждого возмущения опорного состояния.

По истечении наперед заданного интервала времени осуществляется ортогонализация возмущений опорного состояния с помощью процедуры Грама-Шмидта, и для каждого возмущения вычисляется слагаемое ляпуновской суммы:

$$S_i(M\Gamma) = \sum_{k=0}^M \ln \|\tilde{x}_i(\zeta)\|, \zeta \in (k\Gamma - \tau, k\Gamma), \quad (1.4)$$

где Γ – интервал времени между применением процедур ортогонализации и нормировки, $\Gamma > \tau$.

После этого осуществляется перенормировка всех возмущений опорного состояния таким образом, чтобы все они имели единичную норму. Описанная последовательность действий повторяется, начиная с нового текущего состояния системы и для вновь полученного ортонормированного набора возмущений опорного состояния. Каждое возмущение соответствует одному из показателей в спектре показателей Ляпунова.

Данный алгоритм повторяется многократно (M раз), на каждом шаге вычисляются промежуточные значения показателей Ляпунова

$$\widehat{\Lambda}_i(M\Gamma) = \frac{S_i(M\Gamma)}{M\Gamma} \quad (1.5)$$

и ведется мониторинг их изменения с течением времени. Когда величины промежуточных значений показателей Ляпунова выходят на уровень насыщения и изменяются слабо (в пределах заранее установленной погрешности), процедуру вычислений спектра значений показателей Ляпунова

$$\Lambda_i = \lim_{M \rightarrow \infty} \widehat{\Lambda}_i(M\Gamma) \quad (1.6)$$

для систем с запаздыванием можно завершить.

В результате последовательного проведения вышеописанных операций набор возмущений опорного состояния системы оказывается упорядоченным по величине соответствующих им показателей Ляпунова: первое возмущение соответствует самому старшему показателю Ляпунова, второе – второму по старшинству показателю и т.д. Таким образом, число рассматриваемых функций возмущений опорного состояния изучаемой системы должно быть выбрано равным интересующему числу старших показателей Ляпунова (при этом, в случае большого числа изучаемых показателей шаг дискретизации по времени должен быть меньше отношения времени запаздывания к числу рассматриваемых показателей Ляпунова).

1.3 Применение метода расчета спектра показателей Ляпунова к системе “генератор с запаздыванием”

Рассмотрим модельное уравнение первого порядка вида [113, 114]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + kf(x(t-\tau)), \quad (1.7)$$

где $x(t)$ и $x(t-\tau)$ характеризуют поведение системы в моменты времени t и $(t-\tau)$ (применительно к генератору с запаздывающей обратной связью могут означать напряжения на входе и выходе линии задержки, соответственно), τ — время запаздывания, $f(x) = a - x^2$ — нелинейная функция с параметром нелинейности a , $0 < a < 2$, k — управляющий параметр. Данная модель используется для описания колебаний в кольцевой радиофизической системе, состоящей из нелинейного усилителя, линии задержки и инерционного элемента.

Как упоминалось в разделе 1.2, для задания возмущений необходимо линеаризовать исходное уравнение (1.7) в окрестности опорного состояния. Введем малое возмущение $\tilde{x}(\xi)$, где $\xi \in [t-\tau; \tau]$, а также новую траекторию $y(\xi) = x(\xi) + \tilde{x}(\xi)$, где $\xi \in [t-\tau; \tau]$. Подставляя данные выражения в уравнение (1.7), пренебрегая членами второго и более высоких порядков малости, получаем линеаризованное уравнение генератора с запаздыванием:

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = -\tilde{x}(t) + kf'(x(t-\tau))\tilde{x}(t-\tau). \quad (1.8)$$

Применяя идеологию метода, изложенного в разделе 1.2, к уравнениям (1.7)–(1.8), был произведен расчет 9 старших показателей Ляпунова и построена бифуркационная диаграмма при изменении параметра k . Результаты представлены на рисунке 1.1 (а) и (б), соответственно.

Полученные данные сопоставлены друг с другом. Из рисунков видно, что в выбранном диапазоне изменений управляющего параметра k имеет место каскад бифуркаций удвоения периода с последующим переходом к хаосу при $k \approx 0.96$. При данном значении управляющего параметра старший показатель Ляпунова переходит в область положительных

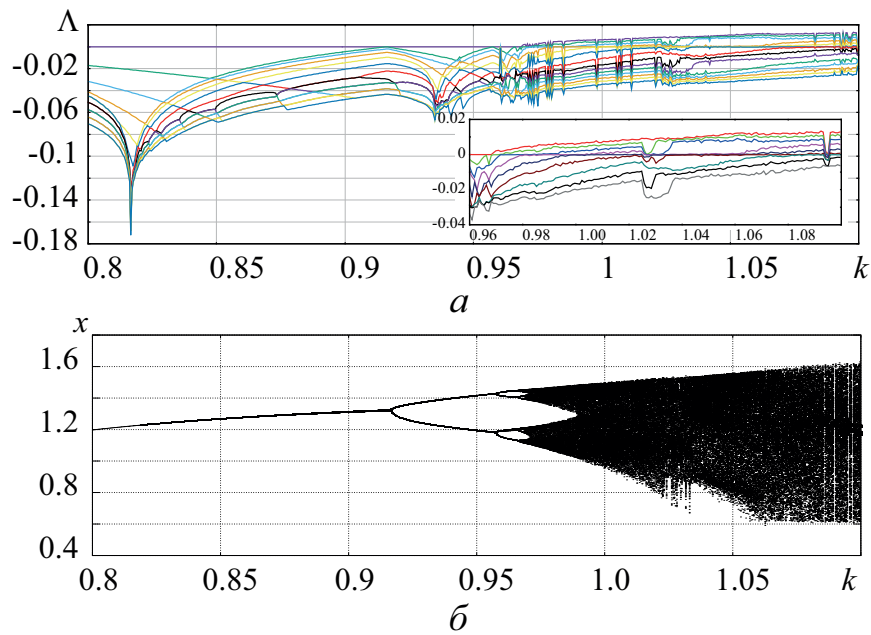


Рисунок 1.1 — Зависимости 9 старших показателей Ляпунова от параметра k (а) и бифуркационная диаграмма (б) автогенератора с запаздыванием (1.7) при $a = 1.5$, $\tau = 20$

значений. В области периодических режимов старший показатель Ляпунова равен нулю, а в точках бифуркаций второй показатель Ляпунова обращается в ноль в четком соответствии с теорией. Важно отметить, что по мере увеличения параметра k все большее количество показателей Ляпунова становится положительным, и, соответственно, в системе (1.7) реализуется гиперхаос (см. врезку к рисунку 1.1).

На рисунке 1.2 представлены фазовые портреты автогенератора с запаздыванием (1.7) при различных значениях управляющих параметров, иллюстрирующие различные режимы колебаний в системе. При значении параметра $k = 0.9$ в системе реализуется периодический режим, а на фазовом портрете отчетливо наблюдается предельный цикл (рисунок 1.2 (а)). При $k = 0.92$, как видно из бифуркационной диаграммы и спектра показателей Ляпунова, в системе (1.7) уже произошла бифуркация удвоения периода, наблюдается цикл периода 2 (рисунок 1.2 (б)). При $k = 0.965$ (рисунок 1.2 (в)) имеет место цикл периода 4, а при $k = 1.02$ реализуются хаотические колебания, наблюдается странный хаотический аттрактор (рисунок 1.2 (г)).

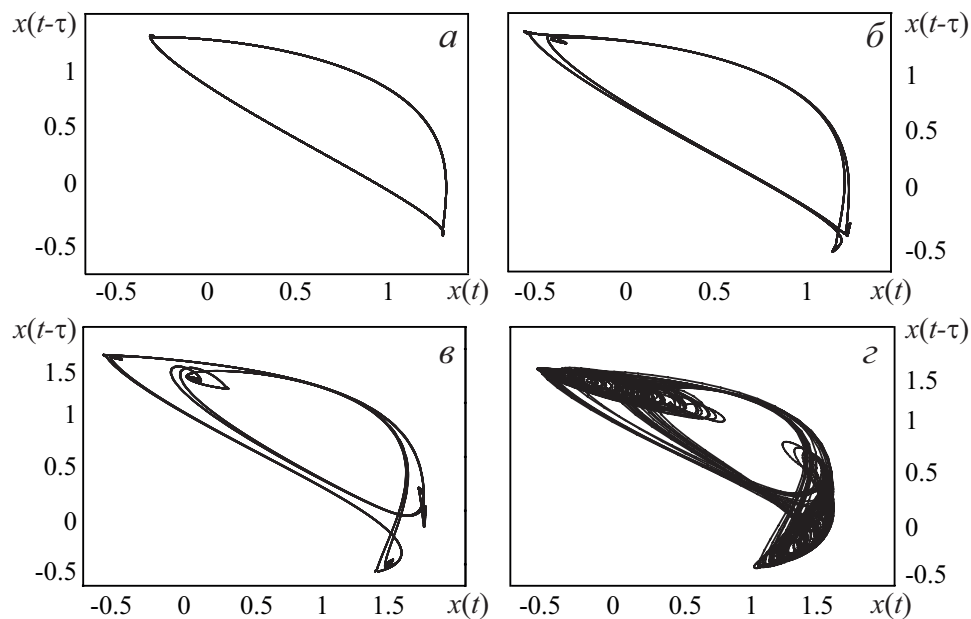


Рисунок 1.2 — Фазовые портреты автогенератора с запаздыванием (1.7) на плоскости $(x(t), x(t - \tau))$ при фиксированных значениях параметров $a = 1.5$, $\tau = 20$ и изменении параметра k : (а) $k = 0.9$, (б) $k = 0.92$, (в) $k = 0.965$, (г) $k = 1.02$

1.4 Применение метода расчета спектра показателей Ляпунова к уравнению Маккея-Гласса

В качестве еще одного примера рассмотрена модель кроветворения Маккея-Гласса [115]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \frac{x(t - \tau)}{1 + x^n(t - \tau)} - \gamma x(t), \quad (1.9)$$

где $x(t)$ — число клеток (эритроцитов) в момент времени t , τ — время запаздывания, n , β , γ — управляющие параметры (n — целое число). Первое слагаемое в правой части уравнения описывает скорость производства новых клеток, второе — скорость гибели. Изначально уравнение Маккея-Гласса было введено в качестве модели выработки красных кровяных клеток для пациентов с лейкемией. Позже эта модель стала популярной в теории хаоса как система с большим количеством положительных показателей Ляпунова, которое, к тому же, можно варьировать. Электронный аналог этой системы был предложен в работе [10].

Аналогичным способом, как для автогенератора с запаздыванием (раздел 1.3), для уравнения (1.9) с помощью введения малого возму-

щения и новой траектории было получено уравнение в вариациях:

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \beta \frac{1 - (n-1)x^n(t-\tau)}{(1+x^n(t-\tau))^2} \tilde{x}(t-\tau) - \gamma \tilde{x}(t), \quad (1.10)$$

на основе решения которого в совокупности с (1.9) получены бифуркационная диаграмма и спектр из 9 старших показателей Ляпунова, представленные на рисунке 1.3, (а) и (б), соответственно. Аналогично автогенератору с запаздыванием также построены фазовые портреты, демонстрирующие динамику системы и плавный переход к хаотическому режиму. Они приведены на рисунке 1.4.

Из рисунков видно, что также, как и для генератора с запаздыванием, полученные результаты хорошо соотносятся друг с другом: при изменении управляющего параметра τ происходит каскад бифуркаций удвоения периода с последующим переходом к хаосу при $\tau \approx 26$ (см. также [116]). В этой точке старший показатель Ляпунова становится положительным, а на фазовых портретах прослеживается усложнение траектории периодического цикла с последующей трансформацией в хаотический аттрактор. В то же самое время, в отличие от генератора с запаздыванием, рассмотренного в разделе 1.2, при выбранных значениях управляющих параметров в указанном диапазоне изменения времени запаздывания только один показатель Ляпунова становится положительным, а следовательно, переход к гиперхаосу не наблюдается. Однако, при других значениях параметров положительных показателей Ляпунова может быть много, что будет использоваться в главе 2.

1.5 Выводы по главе 1

В настоящей главе диссертационной работы предложен и апробирован метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с отклоняющимся аргументом. С помощью разработанного метода проведено изучение поведения нескольких старших показателей Ляпунова при изменении одного из управляющих параметров для генератора с запаздыванием и уравнения Маккея-Гласса. Показано, что количество положи-

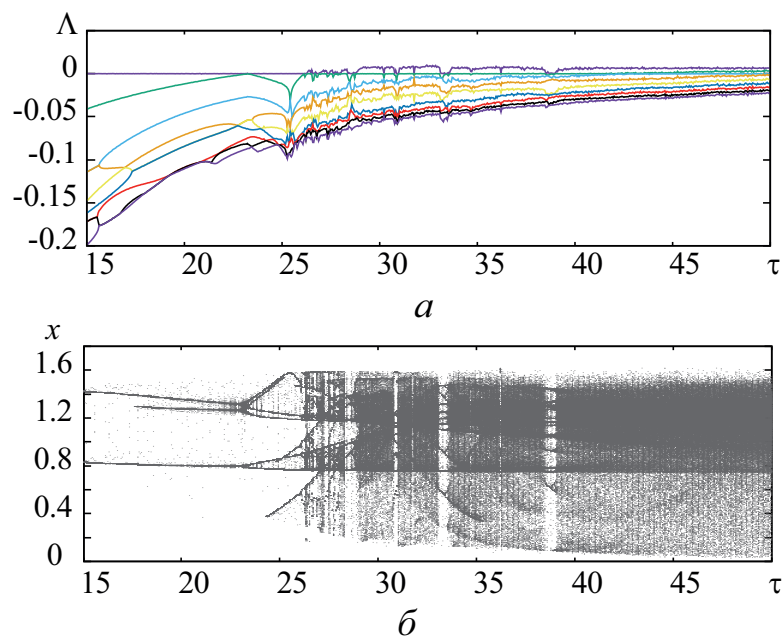


Рисунок 1.3 — Зависимости 9 старших показателей Ляпунова от времени запаздывания τ (а) и бифуркационная диаграмма (б) для уравнения Маккея-Гласса (1.9) при значениях управляющих параметров $n = 21$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.1$

тельных показателей Ляпунова при изменении одного из управляющих параметров меняется в достаточно широком диапазоне. Это может позволить использовать данные системы в качестве объектов исследования в других задачах, связанных с изучением влияния числа показателей Ляпунова на изменение динамики системы. Основываясь на полученных результатах, можно говорить о том, что системы с отклоняющимся аргументом оказываются более удобными модельными системами с точки зрения управления числом положительных показателей Ляпунова по сравнению с системами, характеризующимися малым числом степеней свободы (где число показателей Ляпунова ограничивается размерностью фазового пространства исследуемой системы, и, соответственно, число старших положительных показателей Ляпунова также ограничено). Не самым удобным объектом исследования в данном случае будут выступать и пространственно-распределенные системы, которые также характеризуются бесконечномерным фазовым пространством (как и системы с отклоняющимся аргументом). Это обосновано несколькими причинами: во-первых, они оказываются более сложными с точки зрения численного моделирования их динамики (по сравнению с системами с запаздывани-

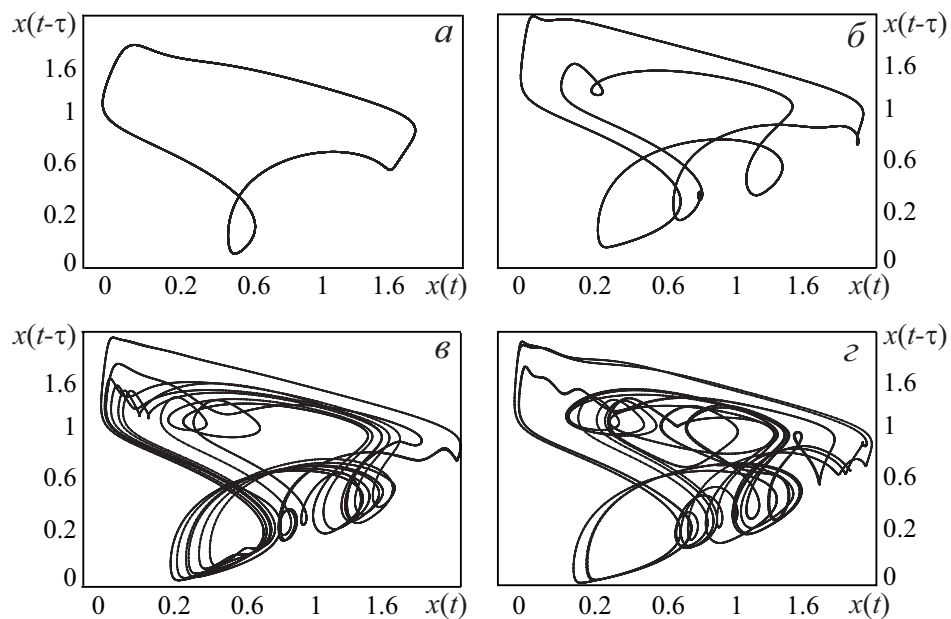


Рисунок 1.4 — Фазовые портреты для уравнения Маккея-Гласса (1.9) на плоскости $(x(t), x(t - \tau))$ при фиксированных значениях параметров $n = 21$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.1$ и изменении времени запаздывания τ : (а) $\tau = 15$, (б) $\tau = 25$, (в) $\tau = 27$, (г) $\tau = 30$

ем); а во-вторых, что более важно, они оказываются менее гибкими и существенно уступают системам с отклоняющимся аргументом в плане эффективности управления числом положительных показателей Ляпунова в спектре.

Важно также отметить, что, хотя в рамках настоящей диссертационной работы апробация метода была осуществлена с помощью систем с запаздыванием, динамика которых характеризуется только одной скалярной переменной, не видно никаких концептуальных проблем использовать разработанный подход для расчета спектра показателей Ляпунова в динамических системах с отклоняющимся аргументом, для описания динамики которых используются векторные переменные.

Глава 2

Обобщенная синхронизация в системах с запаздыванием

[83–85, 87, 89, 91, 95, 97]

Как уже было отмечено во введении, феномен хаотической синхронизации является одним из фундаментальных, уже ставших базовыми явлений современной радиофизики [1–3]. Наряду с различными типами хаотической синхронизации особенно выделяется режим обобщенной синхронизации [6, 16, 22, 117–120]. Реализация данного режима возможна не только в однонаправленно и взаимно связанных системах с малым числом степеней свободы [6, 54, 59], но и также в пространственно-распределенных средах [51, 117, 119, 121].

К настоящему моменту времени разработаны и предложены различные методики для диагностирования обобщенной синхронизации в системе из двух связанных осцилляторов. В качестве основных можно выделить такие методы, как метод ближайших соседей [6, 122], метод фазовых трубок [64, 123], метод расчета спектра показателей Ляпунова [51, 60, 107, 109] и метод вспомогательной системы [65] (применимый только в случае однонаправленной связи [124]). Все вышеперечисленные методы могут быть применены как к сосредоточенным, так и распределенным системам, при этом некоторые методы и подходы требуют адаптации с учетом специфики рассматриваемых систем.

К настоящему моменту времени известно огромное число работ, посвященных изучению различных аспектов режима обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах (см., например, вышеупомянутые работы). В то же самое время, до сих пор существует значительный пробел в изучении этого явления в системах

с запаздыванием, что обусловлено, в первую очередь, необходимостью адаптации известных методов анализа обобщенной синхронизации на случай таких систем. Эта проблема особенно существенна для систем с взаимным типом связи, в которых, как отмечалось выше, наиболее простой метод для детектирования обобщенной синхронизации, метод вспомогательной системы, оказывается неработоспособным [124], что требует адаптации других методов и подходов на данный случай.

Адаптация метода расчета спектра показателей Ляпунова на случай систем с запаздыванием реализована в главе 1 настоящей диссертационной работы. В этой главе разработанный метод будет применен для изучения особенностей режима обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с запаздыванием и выявления общих закономерностей этого режима для обоих типов связи.

2.1 Режим обобщенной синхронизации. Концепция и методы диагностики

Режим обобщенной синхронизации в случае систем с конечномерным фазовым пространством означает установление функциональной зависимости $\mathbf{F}[\cdot]$ между состояниями взаимодействующих систем после завершения переходного процесса [123]. Данное утверждение справедливо как для однонаправленного, так и для взаимного типа связи [6, 59]. В случае однонаправленной связи эта функциональная зависимость выглядит следующим образом:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{F}[\mathbf{x}_1], \quad (2.1)$$

где векторы состояний \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 характеризуют ведущую и ведомую системы, соответственно. Для взаимно связанных систем невозможно разделить взаимодействующие системы на ведущую и ведомую, таким образом обе системы считаются эквивалентными и носят названия “первая и вторая системы”. В данном случае функциональную связь необходимо

заданы в неявной форме:

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] = 0, \quad (2.2)$$

где векторы состояний \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 относятся к первой и второй системам, соответственно.

Обобщенная синхронизация является пороговым явлением и может наблюдаться в связанных динамических системах при увеличении параметра связи между ними. Важно отметить, что в роли взаимодействующих систем могут выступать хаотические системы, различные не только по своей природе, но и характеризующиеся различной размерностью фазового пространства [6], а полная синхронизация и синхронизация с запаздыванием являются частными случаями обобщенной синхронизации.

Коротко остановимся на методах диагностики обобщенной синхронизации: методе ближайших соседей [6, 122], методе фазовых трубок [64, 123], методе расчета спектра показателей Ляпунова [51, 60, 107, 109] и методе вспомогательной системы [65]. Напомним, что метод вспомогательной системы, хотя и является классическим инструментом для детектирования обобщенной синхронизации, его применение возможно только для однонаправленно связанных систем [65] (в противном случае метод демонстрирует некорректные результаты [124]).

Основной идеей метода ближайших соседей является сопоставление состояний всех ближайших соседей в фазовом пространстве первой и второй систем. Иными словами, должна существовать такая функциональная зависимость между состояниями связанных систем, что все близкие состояния в фазовом пространстве первой системы будут соответствовать близким состояниям в фазовом пространстве второй системы. Для того, чтобы проверить наличие функциональной зависимости между состояниями взаимодействующих систем, необходимо задать несколько опорных точек \mathbf{x}_0^j в фазовом пространстве первой системы, найти их ближайших соседей \mathbf{x}_i^j (таких, что $\|\mathbf{x}_i^j - \mathbf{x}_0^j\| < \delta$), а затем проанализировать, каким образом будут вести себя образы этих ближайших соседей в фазовом пространстве второй системы. Если образы

будут оставаться близкими друг к другу, независимо от выбора опорного состояния, то можно говорить о наличии обобщенной синхронизации. Важно отметить, что данный метод не позволяет точно определить порог обобщенной синхронизации, а лишь констатирует ее наличие или отсутствие.

Метод фазовых трубок, по сути, является модификацией метода ближайших соседей. Вместо состояний систем в фиксированные моменты времени рассматриваются “трубки” траекторий в фазовом пространстве взаимодействующих систем, а для поиска ближайших соседей учитываются только такие состояния системы, которые остаются близкими на всей длине фазовой трубки. Длительность такой “предыстории” определяется абсолютной величиной показателя Ляпунова, отвечающего за установление обобщенной синхронизации (для однонаправленной связи – старшего условного показателя Ляпунова).

Из-за невозможности определить точный порог наступления режима обобщенной синхронизации рассмотренные методы не так распространены, как другие методы диагностики. Однако, их можно использовать, например, для проверки полученных результатов при разработке новых методов и подходов.

Каноническим методом является метод вспомогательной системы. Его идея заключается в том, что в бассейне притяжения того же аттрактора, что и у ведомой системы x_2 , рассматривается идентичная ей вспомогательная система x_3 , но лишь с другими начальными условиями. В случае наступления обобщенной синхронизации после переходного процесса согласно определению режима обобщенной синхронизации между состояниями ведущей и ведомой, а также ведущей и вспомогательной систем установятся идентичные функциональные соотношения $x_2 = F[x_1]$ и $x_3 = F[x_1]$. При этом, до наступления режима обобщенной синхронизации ведомая и вспомогательная системы будут эволюционировать на одном и том же хаотическом аттракторе, демонстрируя в разные моменты времени различные состояния.

Для анализа наступления режима обобщенной синхронизации при увеличении параметра связи целесообразно рассчитывать ошибку синхронизации:

$$d = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3\| dt, \quad (2.3)$$

где T_0 – время переходного процесса, T – время вычислений. Понятно, что в отсутствие обобщенной синхронизации величина d будет положительной (состояния ведомой и вспомогательной систем в общем случае оказываются различными), она будет уменьшаться по мере увеличения параметра связи, а в режиме обобщенной синхронизации $d = 0$ (состояния ведомой и вспомогательной систем в точности совпадают).

Еще один подход основан на вычислении спектра показателей Ляпунова взаимодействующих систем. Режим обобщенной синхронизации наступает в двух связанных хаотических системах в момент перехода второго по старшинству показателя Ляпунова в область отрицательных значений. В случае исследования взаимодействия гиперхаотических систем, каждая из которых в автономном режиме имеет N положительных показателей Ляпунова, порог аналогичного синхронного режима приходится на момент смены знака $(N + 1)$ -го ляпуновского показателя.

В случае однонаправленного типа связи возможно оперировать понятием “условных показателей Ляпунова”. Пусть размерности фазовых пространств ведущей и ведомой систем равны N_d и N_r , соответственно. Тогда полный спектр показателей Ляпунова двух связанных систем состоит из

$$\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_{N_d+N_r} \quad (2.4)$$

показателей Ляпунова. Динамика ведущей системы не зависит от параметра связи, а следовательно, ее ляпуновские показатели можно исключить из рассмотрения. Из-за влияния ведущей системы на ведомую показатели Ляпунова второй системы будут отличаться от тех же величин, рассчитанных в случае автономной динамики, а также эти значения будут зависеть от параметра связи. Эти показатели Ляпунова

$$\Lambda_{r_1} \geq \Lambda_{r_2} \geq \dots \geq \Lambda_{r_{N_r}} \quad (2.5)$$

принято называть условными. В данном случае обобщенная синхронизация может диагностироваться по смене знака старшего условного показателя Ляпунова Λ_{r_1} .

Таким образом, можно сделать вывод, что диагностирование обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах является более простой задачей, чем в случае с взаимным типом связи. Действительно, в первом случае возможно применение метода вспомогательной системы, а метод вычисления показателей Ляпунова является достаточно легко реализуемым. В случае взаимной связи между системами метод расчета спектра показателей Ляпунова остается одним из наиболее эффективных. Поэтому дальнейшее содержание этой главы будет направлено на применение метода расчета спектра показателей Ляпунова, предложенного в главе 1, для исследования режима обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с запаздыванием.

2.2 Обобщенная синхронизация в генераторах с запаздыванием. Однонаправленный тип связи

В качестве первого примера рассмотрим поведение двух однонаправленно связанных генераторов с запаздыванием, автономная динамика которых была изучена в главе 1:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + k_1 f(x_1(t - \tau)), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + k_2 f(x_2(t - \tau)) + k_3 (f(x_1(t - \tau)) - f(x_2(t - \tau))), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где k_1 и k_2 – параметры, относящиеся к первому (ведущему) и второму (ведомому) генераторам, соответственно, k_3 – параметр связи, время запаздывания $\tau = 10$ выбрано одинаковым для обеих систем. В качестве метода исследования был выбран предложенный в главе 1 метод расчета спектра показателей Ляпунова, а для уточнения полученных результатов использовался также метод вспомогательной системы. Для реализации последнего метода необходимо ввести в рассмотрение до-

полнительную вспомогательную систему, динамика которой описывается уравнением:

$$\dot{x}_3(t) = -x_3(t) + k_2^* f(x_3(t - \tau)) + k_3(f(x_1(t - \tau)) - f(x_3(t - \tau))), \quad (2.7)$$

где параметр $k_2^* = k_2 - 10^{-14}$ отвечает за расстройку ведомой и вспомогательной систем, необходимую для преодоления ловушки численного счета. Еще раз отметим, что вспомогательная и ведомая системы идентичны, но имеют различные начальные условия (однако оба набора начальных условий лежат в бассейне притяжения одного аттрактора).

Исследуем динамику системы (2.6) при различных значениях управляющих параметров k_1 и k_2 . Эти параметры характеризуют режимы, наблюдающиеся в ведущей и ведомой системах, соответственно, и могут отвечать различному количеству положительных показателей Ляпунова в этих системах в автономном случае.

Рассмотрим самый простой случай, когда параметры $k_1 = 0.996$ и $k_2 = 0.988$ выбраны таким образом, чтобы в автономном режиме каждая из систем характеризовалась только одним положительным показателем Ляпунова. Спектр показателей Ляпунова в данном случае представлен на рисунке 2.1 (а). Отчетливо видно, как единственный условный положительный показатель Ляпунова, отвечающий за ведомую систему, плавно переходит в область отрицательных значений, в то время как самый старший ляпуновский показатель, принадлежащий ведущей системе, остается неизменным. В момент перехода старшего условного показателя Ляпунова в область отрицательных значений при $k_3 = 0.025$ наступает режим обобщенной синхронизации.

Аналогичные результаты можно получить, применив метод вспомогательной системы к системе (2.6)–(2.7). На рисунке 2.1 (б) представлен график зависимости разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем, рассчитанной по формуле (2.3), от параметра связи k_3 . Очевидно, что в момент, когда поведение систем становится одинаковым, а величина d обращается в ноль, наступает режим обобщенной синхронизации. Кроме того, на врезках к рисунку 2.1 (б) приведены плоскости состояний ведомой и вспомогательной систем $(x_2; x_3)$ в

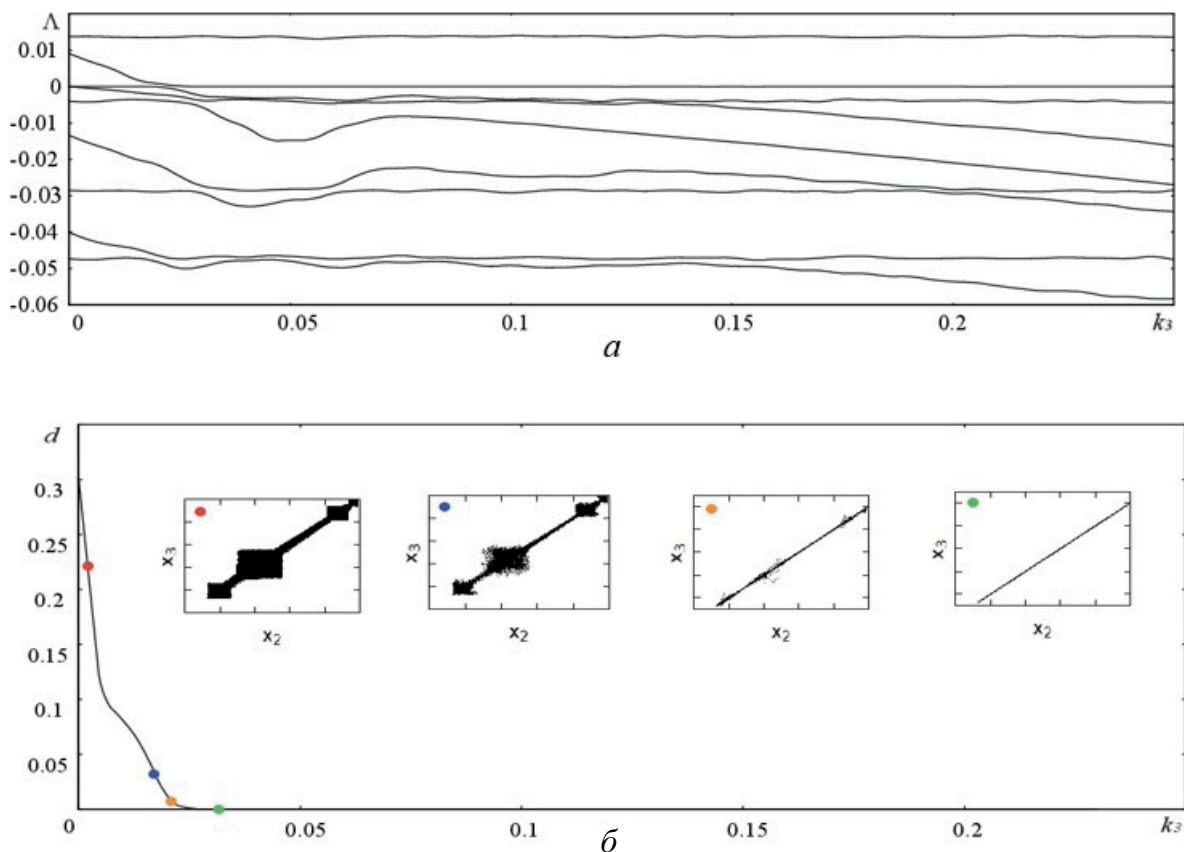


Рисунок 2.1 — Зависимости 9 старших показателей Ляпунова от параметра связи k_3 , рассчитанные для однонаправленно связанных генераторов с запаздыванием (2.6) при $k_1 = 0.996$, $k_2 = 0.988$ (а), и зависимость среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной систем d от параметра связи k_3 (б). На врезках к рисунку (б) приведены плоскости $(x_2; x_3)$ при различных значениях параметра k_3 , отмеченных точками на зависимости $d(k_3)$

нескольких характерных точках по параметру k_3 . Отчетливо видно, как при увеличении параметра связи k_3 точки на плоскости $(x_2; x_3)$ постепенно выстраиваются вдоль главной диагонали, а на границе наступления режима обобщенной синхронизации наблюдается перемежающееся поведение ($k_3 = 0.0235$). Таким образом, эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем, а, следовательно, диагональная линия на плоскости $(x_2; x_3)$, определяет наличие режима обобщенной синхронизации (плоскость $(x_2; x_3)$ при $k_3 = 0.026$).

“Увеличим” количество положительных показателей Ляпунова у ведущей системы, выбрав $k_1 = 1.013$, в то время как ведомая система по-прежнему будет характеризоваться одним положительным показателем ($k_2 = 1.005$). На спектре показателей Ляпунова (рисунок 2.2 (а))

вновь наблюдается переход условного положительного показателя в область отрицательных значений, в то время как уже два положительных показателя ведущей системы остаются неизменными. Однако, стоит отметить некоторую особенность в поведении старшего условного показателя Ляпунова по сравнению со случаем взаимодействия двух систем с одним положительным показателем Ляпунова: старший условный показатель Ляпунова переходит в область отрицательных значений дважды, причем первый переход сопровождается последующим выходом этого показателя Ляпунова в положительную область; когда указанный ляпуновский показатель становится снова отрицательным, в системе окончательно устанавливается режим обобщенной синхронизации.

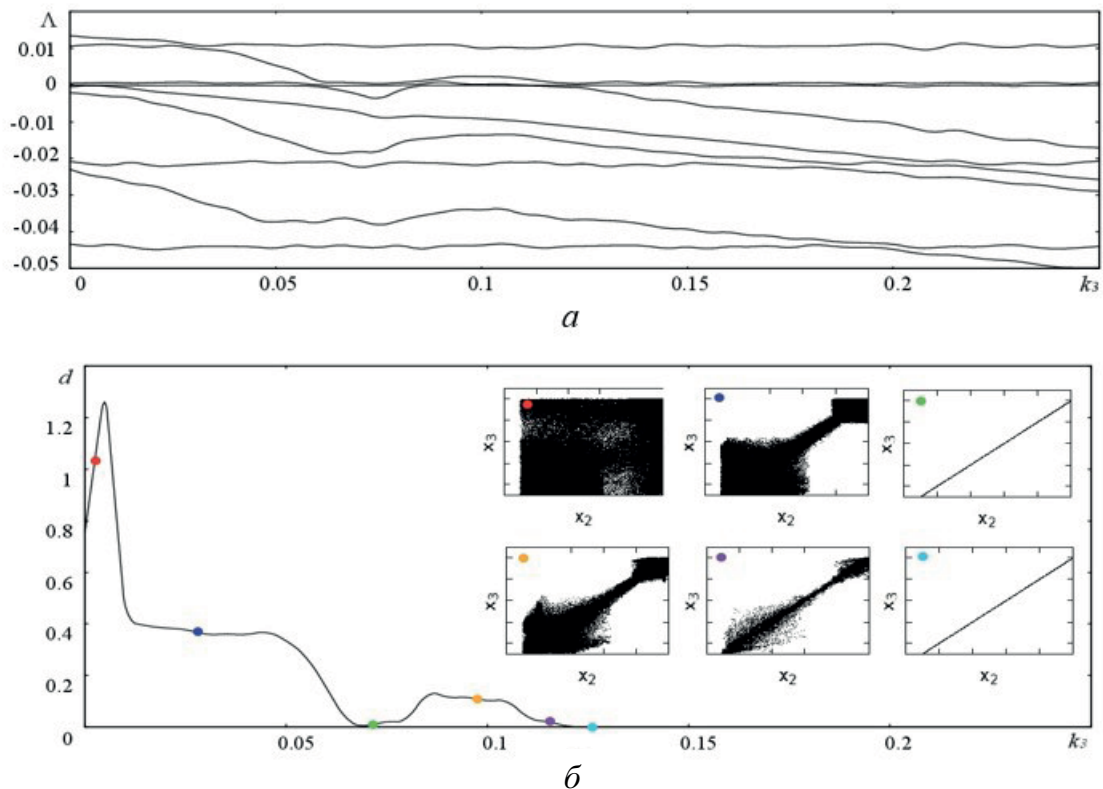


Рисунок 2.2 — Зависимости 9 старших показателей Ляпунова от параметра связи k_3 , рассчитанные для однонаправленно связанных генераторов с запаздыванием (2.6) при $k_1 = 1.013$, $k_2 = 1.005$ (а), и зависимость среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной систем d от параметра связи k_3 (б). На врезках к рисунку (б) приведены плоскости $(x_2; x_3)$ при различных значениях параметра k_3 , отмеченных точками на зависимости $d(k_3)$

Также как и на спектре показателей Ляпунова, на графике зависимости среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной

систем от управляющего параметра k_3 (рисунок 2.2 (б)) наблюдается уже две области, где характеристика d обращается в 0. При этом, на плоскостях состояний $(x_2; x_3)$ наблюдается характерный переход к режиму обобщенной синхронизации через перемежаемость (см. врезки на рисунке 2.2 (б)).

Рассмотрим “обратную” задачу, выбрав значения управляющих параметров таким образом, чтобы у ведущей системы был один положительный показатель Ляпунова, а у ведомой – два. Поведение показателей Ляпунова в данном случае качественно не меняется (ср. рисунки 2.2 (а) и 2.3 (а)), но порог установления синхронного режима увеличивается. То есть, на спектре также наблюдается поочередный переход уже двух положительных условных показателей Ляпунова в область отрицательных значений с последующим выходом старшего условного ляпуновского показателя в область положительных значений и обратно (рисунок 2.3 (а)). Качественно картина на рисунке 2.3 (б) не изменилась.

Наконец, рассмотрим случай, когда ведущий и ведомый генераторы имеют по два положительных показателя Ляпунова. В данном случае на зависимости спектра показателей Ляпунова от параметра связи исчезает “провал” старшего условного показателя Ляпунова в область отрицательных значений, однако появляется область, в которой он практически не меняет своего значения (рисунок 2.4 (а)). При этом на графике, полученном с помощью метода вспомогательной системы, аналогично предыдущим рассмотренным примерам, все также наблюдается установление режима обобщенной синхронизации с перемежающимся поведением, имеющим место вблизи его границы.

Полученные результаты систематизированы в таблице 2.1. Здесь представлены критические значения параметра связи k_3^{cr} , соответствующие установлению режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных генераторах с запаздыванием (2.6) при различных значениях управляющих параметров k_1, k_2 в порядке увеличения k_3^{cr} . Отчетливо видно, что значение k_3^{cr} увеличивается при “усложнении” динамики системы. Самое малое значение параметра связи k_3^{cr} , отвечающе-

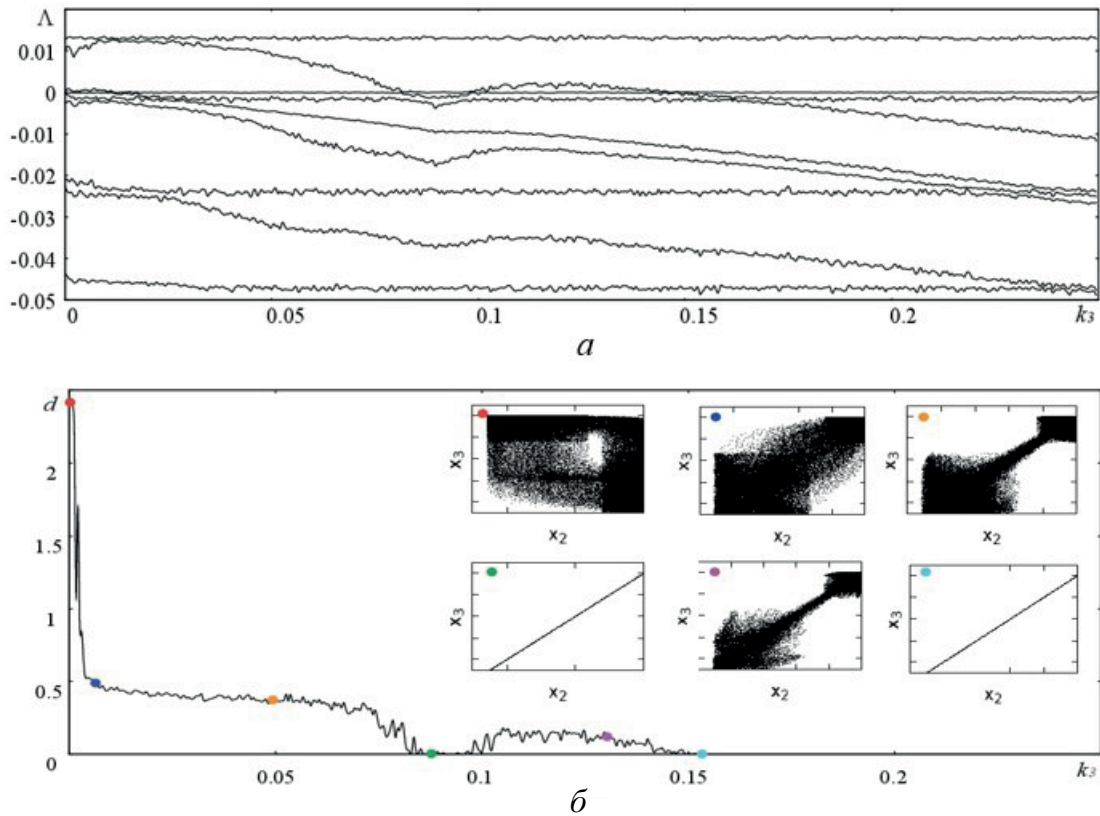


Рисунок 2.3 — Зависимости 9 старших показателей Ляпунова от параметра связи k_3 , рассчитанные для однонаправленно связанных генераторов с запаздыванием (2.6) при $k_1 = 1.005$, $k_2 = 1.013$ (а), и зависимость среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной систем d от параметра связи k_3 (б). На врезках к рисунку (б) приведены плоскости $(x_2; x_3)$ при различных значениях параметра k_3 , отмеченных точками на зависимости $d(k_3)$

го за установление обобщенной синхронизации, имеет место в системе связанных генераторов при таких k_1 и k_2 , что у ведущей и ведомой систем реализуется хаотический режим в автономном случае. По мере изменения соотношения между управляющими параметрами смещается и значение порога обобщенной синхронизации. Стоит отметить, что, когда у обоих генераторов по два положительных показателя Ляпунова, значение параметра k_3^{cr} не является самым большим, как могло бы ожидать. Так как в обеих системах одинаковое количество положительных показателей Ляпунова, то на качественном уровне данный процесс будет таким же, как и для первого, самого простого случая. Разница лишь в затрачиваемом “времени” на установление синхронного режима, откуда и следует больший по величине порог режима обобщенной

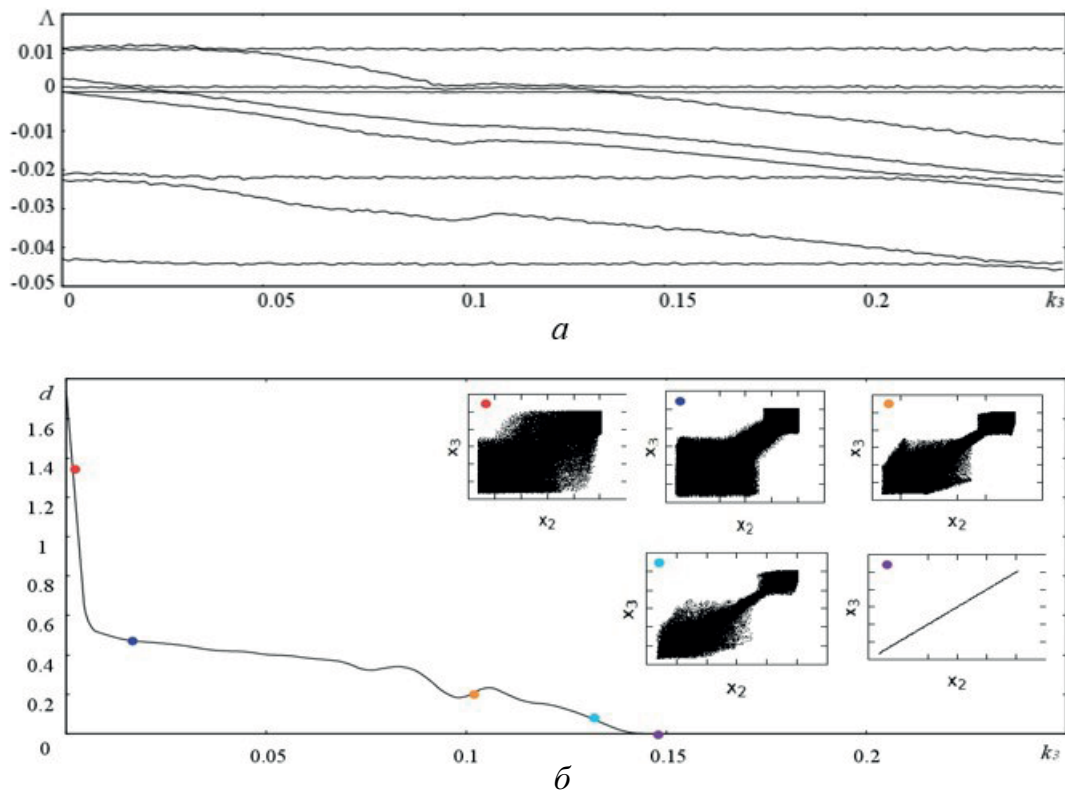


Рисунок 2.4 — Зависимости 9 старших показателей Ляпунова от параметра связи k_3 , рассчитанные для однонаправленно связанных генераторов с запаздыванием (2.6) при $k_1 = 1.013$, $k_2 = 1.018$ (а), и зависимость среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной систем d от параметра связи k_3 (б). На врезках к рисунку (б) приведены плоскости $(x_2; x_3)$ при различных значениях параметра k_3 , отмеченных точками на зависимости $d(k_3)$

синхронизации. Наконец, ведущему генератору с одним положительным показателем Ляпунова становится сложнее всего подавить собственную динамику ведомого генератора с двумя положительными показателями Ляпунова.

2.3 Обобщенная синхронизация в связанных уравнениях Маккея-Гласса. Однонаправленный тип связи

В качестве второго примера рассмотрим систему двух однонаправленно связанных уравнений Маккея-Гласса, автономная динамика которых была рассмотрена ранее в главе 1, со значениями управляющих пара-

Таблица 2.1 — Значения порога режима обобщенной синхронизации для различных значений управляющих параметров k_1 и k_2 в однонаправленно связанных генераторах с запаздыванием (2.6)

Рисунок	k_1 , ведущая система	k_2 , ведомая система	k_3^{cr} , порог обобщенной синхронизации
Рисунок 2.1	0.996 (1 $\Lambda > 0$ в автономном режиме, хаос)	0.988 (1 $\Lambda > 0$ в автономном режиме, хаос)	0.026
Рисунок 2.2	1.013 (2 $\Lambda > 0$ в автономном режиме, гиперхаос)	1.005 (1 $\Lambda > 0$ в автономном режиме, хаос)	0.07, 0.12
Рисунок 2.3	1.005 (1 $\Lambda > 0$ в автономном режиме, хаос)	1.013 (2 $\Lambda > 0$ в автономном режиме, гиперхаос)	0.082, 0.151
Рисунок 2.4	1.013 (2 $\Lambda > 0$ в автономном режиме, гиперхаос)	1.018 (2 $\Lambda > 0$ в автономном режиме, гиперхаос)	0.142

метров, при которых системы характеризуются большим числом положительных показателей Ляпунова:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f(x_1(t - \tau)) - k_1 x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= f(x_2(t - \tau)) - k_2 x_2(t) + k_3(x_1(t) - x_2(t)), \end{aligned} \quad (2.8)$$

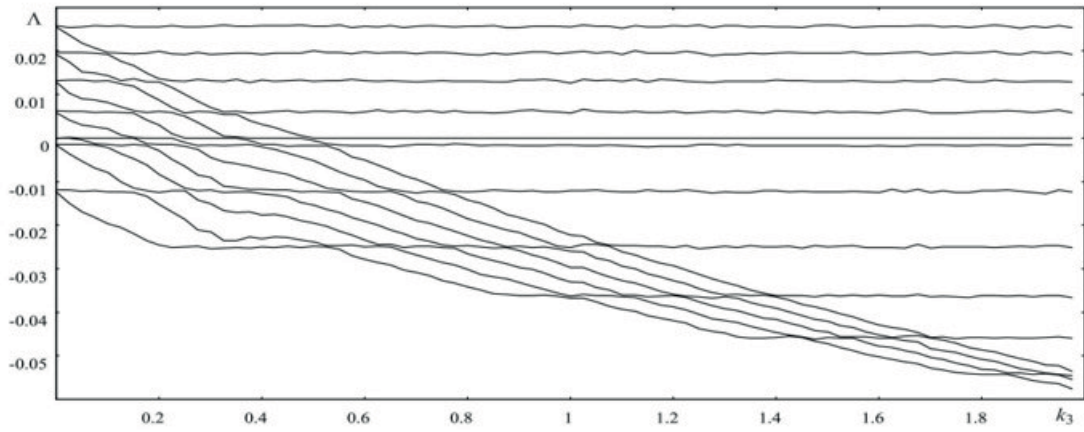
где $f(x(t - \tau)) = ax(t - \tau)/(1 + (x(t - \tau))^b)$, $a = 2$, $b = 10$, $\tau = 10$. В настоящее время известны работы, посвященные изучению режимов полной и обобщенной синхронизации в данной системе при изменении времени запаздывания (см., например, [125, 126]). В работе [127] изучался вопрос о зависимости порога обобщенной синхронизации от соотношения времен запаздывания (τ_1 и τ_2). Было установлено, что при рациональном соотношении τ_1 и τ_2 , например $\tau_1 = 100$ и $\tau_2 = 50$ или $\tau_1 = 100$ и $\tau_2 = 200$, режим обобщенной синхронизации возникает раньше по сравнению с другими комбинациями исследуемых величин.

В рамках настоящей диссертационной работы времена запаздывания для ведущей и ведомой систем были выбраны одинаковыми и неизменными, а управляющие параметры k_1 и k_2 менялись, определяя режимы взаимодействующих систем в автономном случае. Следует отметить,

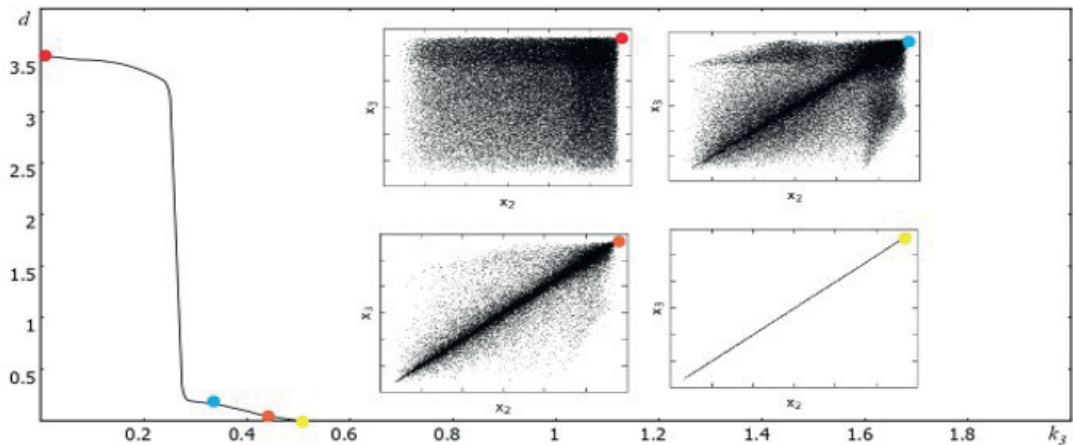
что при равных временах запаздывания (в данном случае $\tau = 10$), система Маккея-Гласса способна достигать большего количества положительных показателей Ляпунова по сравнению с моделью генераторов с запаздыванием. Таким образом, существует возможность исследования особенностей режима обобщенной синхронизации в системах, характеризующихся более высокой степенью хаотичности.

В первую очередь, рассмотрим случай, когда ведущая и ведомая системы в отсутствие связи характеризуются одинаковым числом положительных показателей Ляпунова, равным 4. Такая ситуация имеет место в системе (2.8) при $k_1 = 1.345$, $k_2 = 1.345$. На рисунке 2.5 (а) представлен спектр показателей Ляпунова в данной системе при изменении параметра связи k_3 . Из рисунка четко виден последовательный переход четырех условных показателей Ляпунова в область отрицательных значений с последующим установлением режима обобщенной синхронизации при значении параметра связи $k_3 = 0.49$. При том же значении параметра связи режим обобщенной синхронизации диагностируется и при помощи метода вспомогательной системы, что наглядно иллюстрирует рисунок 2.5 (б), где представлена зависимость степени близости состояний ведомой и вспомогательной систем от параметра связи, обращаясь в ноль при $k_3 > 0.49$, и плоскости состояний этих систем, иллюстрирующие постепенный переход к режиму обобщенной синхронизации (точки на этой плоскости по мере увеличения параметра связи постепенно выстраиваются вдоль главной диагонали) через перемежаемость.

Изменим значение управляющего параметра k_1 таким образом, чтобы в ведущей системе увеличилось на единицу число положительных показателей Ляпунова (например, выберем $k_1 = 1.27$). В таком случае ведущая система с пятью положительными показателями Ляпунова будет воздействовать на ведомую систему с четырьмя положительными ляпуновскими показателями, а режим обобщенной синхронизации будет диагностироваться по-прежнему по моменту перехода старшего условного показателя Ляпунова в область отрицательных значений, то есть



a

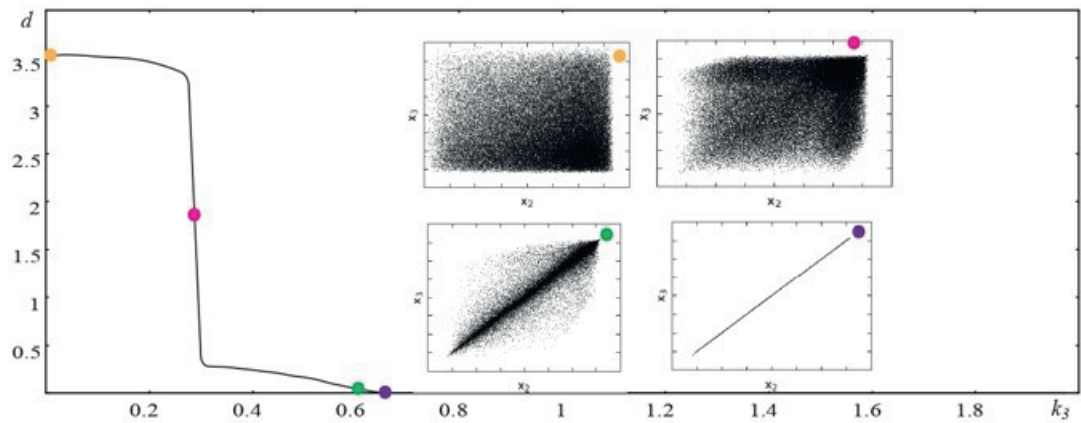
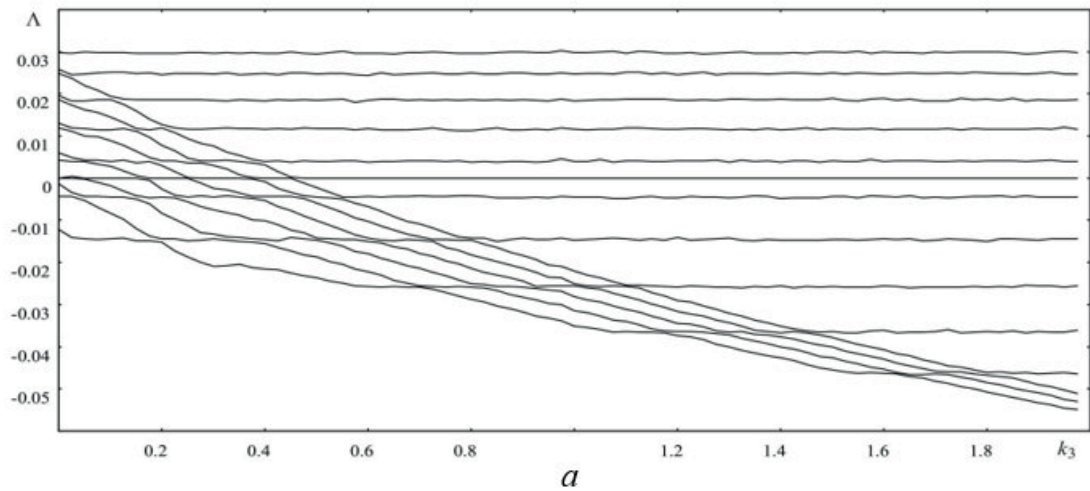


б

Рисунок 2.5 — Зависимости 14 старших показателей Ляпунова от параметра связи k_3 , рассчитанные для однонаправленно связанных уравнений Маккея-Гласса (2.8) при $k_1 = 1.345$, $k_2 = 1.345$ (*a*), и зависимость среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной систем d от параметра связи k_3 (*б*). На врезках к рисунку (*б*) приведены плоскости $(x_2; x_3)$ при различных значениях параметра k_3 , отмеченных точками на зависимости $d(k_3)$

когда все четыре показателя Ляпунова ведомой системы станут отрицательными. Эта ситуация проиллюстрирована на рисунке 2.6 (*a*), из которого видно, что в данном случае изучаемый режим диагностируется чуть раньше ($k_3 = 0.46$), чем в случае взаимодействия двух систем с четырьмя положительными показателями Ляпунова (ср. рисунки 2.5 (*a*) и 2.6 (*a*)). Поведение ведомой и вспомогательной систем при изменении параметра связи в данном случае оказывается аналогичным рассмотренному выше примеру (рисунки 2.5 (*б*) и 2.6 (*б*)).

На рисунках 2.7–2.8 приведены результаты исследований для однонаправленно связанных уравнений Маккея-Гласса при еще двух ком-

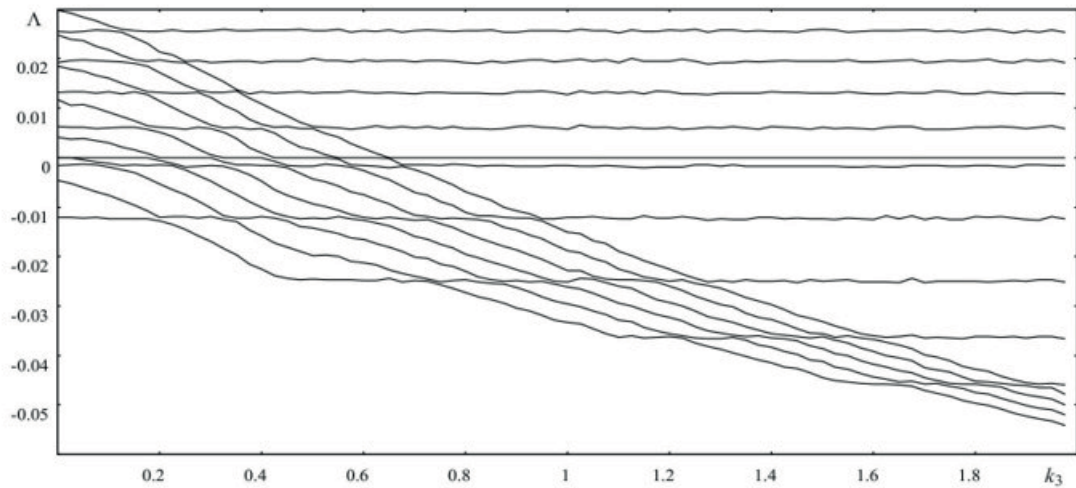


б

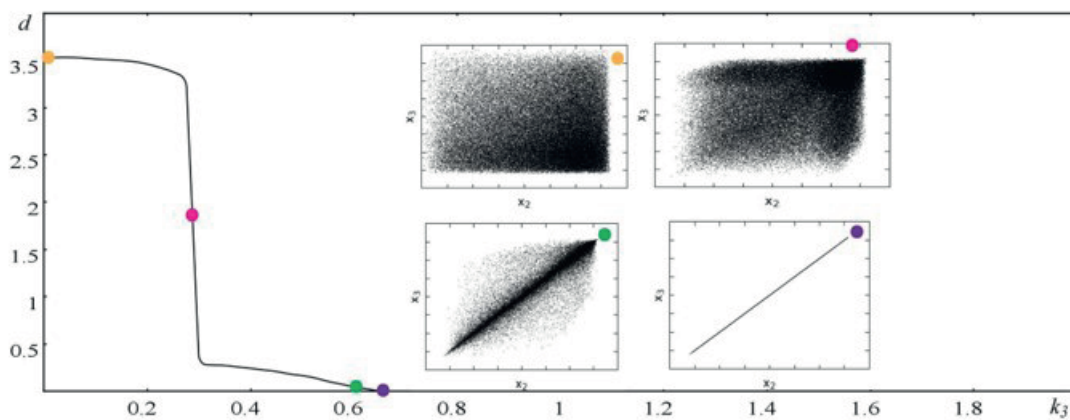
Рисунок 2.6 — Зависимости 14 старших показателей Ляпунова от параметра связи k_3 , рассчитанные для однонаправленно связанных уравнений Маккея-Гласса (2.8) при $k_1 = 1.27$, $k_2 = 1.345$ (а), и зависимость среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной систем d от параметра связи k_3 (б). На врезках к рисунку (б) приведены плоскости $(x_2; x_3)$ при различных значениях параметра k_3 , отмеченных точками на зависимости $d(k_3)$

бинациях значений управляющих параметров k_1 и k_2 : рисунок 2.7 — $k_1 = 1.345$, $k_2 = 1.27$, ведущая система с четырьмя положительными показателями Ляпунова воздействует на ведомую систему с пятью положительными показателями Ляпунова; рисунок 2.8 — $k_1 = 1.27$, $k_2 = 1.27$, и ведущая, и ведомая системы характеризуются пятью положительными показателями Ляпунова. Видно, что эти рисунки качественно аналогичны рисункам 2.5–2.6.

По аналогии с генераторами с запаздыванием в таблице 2.2 систематизированы результаты проведенных исследований системы (2.8) при изменении управляющих параметров. Из таблицы видно, что режим обоб-



a



б

Рисунок 2.7 — Зависимости 14 старших показателей Ляпунова от параметра связи k_3 , рассчитанные для однонаправленно связанных уравнений Маккея-Гласса (2.8) при $k_1 = 1.345$, $k_2 = 1.27$ (а), и зависимость среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной систем d от параметра связи k_3 (б). На врезках к рисунку (б) приведены плоскости $(x_2; x_3)$ при различных значениях параметра k_3 , отмеченных точками на зависимости $d(k_3)$

щенной синхронизации наблюдается при всех рассмотренных значениях управляющих параметров, при этом пороговое значение установления синхронного режима существенным образом зависит от значений управляющих параметров взаимодействующих систем. Особенности, связанных с установлением и разрушением синхронного режима, аналогичных рассмотренным в разделе 2.2 для генераторов с запаздыванием, в данном случае не наблюдается.

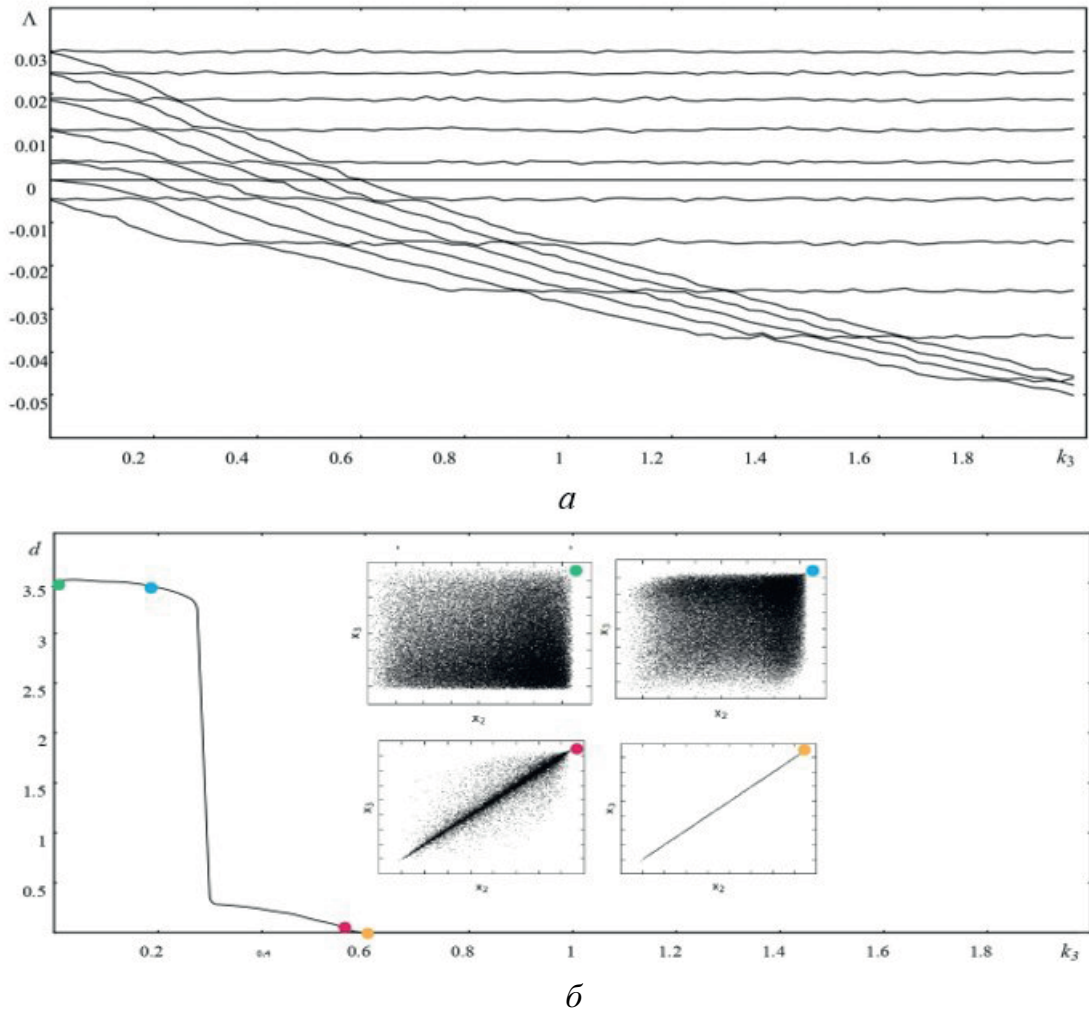


Рисунок 2.8 — Зависимости 14 старших показателей Ляпунова от параметра связи k_3 , рассчитанные для однонаправленно связанных уравнений Маккея-Гласса (2.8) при $k_1 = 1.27$, $k_2 = 1.27$ (а), и зависимость среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной систем d от параметра связи k_3 (б). На врезках к рисунку (б) приведены плоскости $(x_2; x_3)$ при различных значениях параметра k_3 , отмеченных точками на зависимости $d(k_3)$

2.4 Обобщенная синхронизация в связанных уравнениях Маккея-Гласса. Взаимный тип связи

Как отмечалось в разделе 2.1, к настоящему времени существуют работы, в которых представлены результаты исследований систем с взаимным типом связи, в которых возможна реализация обобщенной синхронизации [59, 128]. В рамках настоящей диссертационной работы предпринята попытка выявления общих закономерностей установления

Таблица 2.2 — Значения порога режима обобщенной синхронизации для различных значений управляющих параметров k_1 и k_2 в однонаправленно связанных уравнениях Маккея-Гласса (2.8)

Рисунок	k_1 , ведущая система	k_2 , ведомая система	k_3^{cr} , порог обобщенной синхронизации
Рисунок 2.5	1.345 ($4 \Lambda > 0$ в автономном режиме, гиперхаос)	1.345 ($4 \Lambda > 0$ в автономном режиме, гиперхаос))	0.49
Рисунок 2.6	1.27 ($5 \Lambda > 0$ в автономном режиме, гиперхаос)	1.345 ($4 \Lambda > 0$ в автономном режиме, гиперхаос)	0.46
Рисунок 2.7	1.345 ($4 \Lambda > 0$ в автономном режиме, гиперхаос)	1.27 ($5 \Lambda > 0$ в автономном режиме, гиперхаос)	0.63
Рисунок 2.8	1.27 ($5 \Lambda > 0$ в автономном режиме, гиперхаос)	1.27 ($5 \Lambda > 0$ в автономном режиме, гиперхаос)	0.6

обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием при различных типах связи. В контексте данного вопроса рассмотрены два взаимно связанных уравнения с запаздывающим аргументом на основе модели уравнений Маккея-Гласса:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f(x_1(t - \tau)) - k_1 x_1(t) + k_3(x_2(t) - x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= f(x_2(t - \tau)) - k_2 x_2(t) + k_3(x_1(t) - x_2(t)), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где входящие в состав уравнений параметры имеют те же значения, что и в предыдущем разделе для однонаправленного типа связи. Значения параметров $k_1 = 1.27$ и $k_2 = 1.345$ выбраны таким образом, чтобы в первой системе наблюдался хаотический режим с пятью положительными показателями Ляпунова, а во второй системе в автономном режиме присутствовало четыре положительных ляпуновских показателя.

Для детектирования обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах по-прежнему можно использовать алгоритм расчета спектра показателей Ляпунова, предложенный в главе 1 настоящей диссертационной работы. На рисунке 2.9 представлен спектр показателей Ляпунова взаимно связанных уравнений Маккея-Гласса (2.9). Хорошо

видно, что, как и в случае однонаправленной связи, четыре изначально положительных показателя Ляпунова последовательно переходят в область отрицательных значений, тогда как остальные пять остаются практически постоянными при увеличении значения параметра связи. Режим обобщенной синхронизации в этом случае можно детектировать по смене знака шестого положительного показателя Ляпунова.

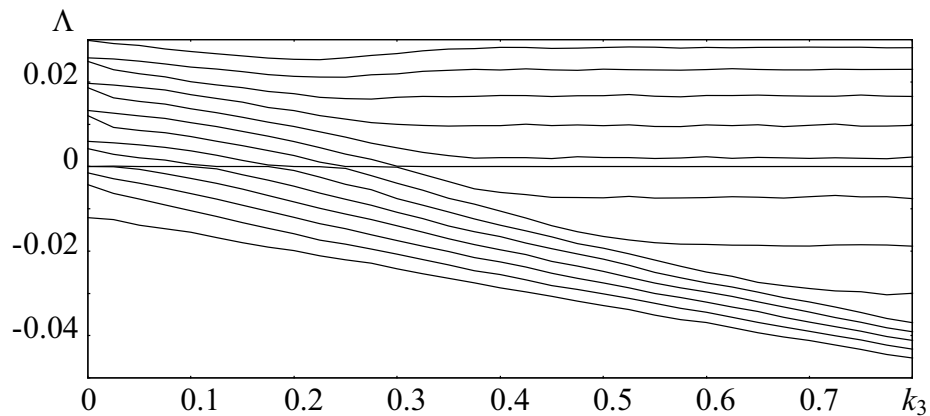


Рисунок 2.9 — Зависимости 14 старших показателей Ляпунова от параметра связи k_3 в двух взаимно связанных уравнениях Маккея-Гласса (2.9) при $k_1 = 1.27$, $k_2 = 1.345$

Таким образом, как видно из приведенного рассмотрения, при установлении режима обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием, связанных однонаправленно и взаимно, наблюдается качественно схожее поведение. Также стоит отметить, что по сравнению со случаем однонаправленной связи, при взаимном типе связи установление режима обобщенной синхронизации происходит значительно раньше.

2.5 Влияние времени запаздывания на порог установления режима обобщенной синхронизации

Интересным представляется вопрос о влиянии величины времени запаздывания на порог режима обобщенной синхронизации. Интуитивно кажется очевидным, что при росте τ и критическое значение параметра связи должно смещаться в сторону больших значений. Однако, данное утверждение не является верным. Так, в работе [125] подобное исследо-

вание проводилось для режима полной синхронизации, а в качестве исследуемой модели выступали связанные идентичные уравнения Маккея-Гласса. Результаты, полученные в [125], свидетельствуют о том, что при увеличении времени запаздывания порог полной синхронизации сначала монотонно растет, а потом выходит на уровень насыщения. Иными словами, при относительно больших величинах времени запаздывания пороговое значение установления полной синхронизации практически не зависит от величины τ . Так как режим полной синхронизации является частным случаем обобщенной синхронизации, можно ожидать, что аналогичные закономерности будут наблюдаться и для этого синхронного режима.

Для проверки сделанного предположения, проведены исследования влияния времени запаздывания на установление режима обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных радиотехнических генераторах с запаздыванием и уравнениях Маккея-Гласса, рассмотренных в разделах 2.2–2.4, при различных значениях управляющих параметров k_1 и k_2 , определяющих количество положительных показателей Ляпунова в исследуемых системах в отсутствие связи.

На рисунках 2.10 и 2.11 представлены зависимости $k_3(\tau)$ в двух однонаправленно и взаимно связанных уравнениях Маккея-Гласса для нескольких различных комбинаций управляющих параметров. Для однонаправленного типа связи значения управляющих параметров выбраны следующим образом: кривая 1 — $k_1=1.27$, $k_2=1.23$ (обе системы характеризуются пятью положительными показателями Ляпунова); кривая 2 — $k_1=1.345$, $k_2=1.34$ (обе системы обладают только четырьмя положительными показателями Ляпунова); 3 — $k_1=1.27$, $k_2=1.345$ (ведущая система с пятью положительными показателями Ляпунова воздействует на ведомую систему с четырьмя положительными ляпуновскими показателями). Для взаимного типа связи рассмотрены следующие комбинации: кривая 1 — $k_1 = 1.27$, $k_2 = 1.27$ (взаимодействующие системы идентичны и характеризуются пятью положительными показателями Ляпунова); кривая 2 — $k_1 = 1.3$, $k_2 = 1.27$ (взаимодействующие системы неидентич-

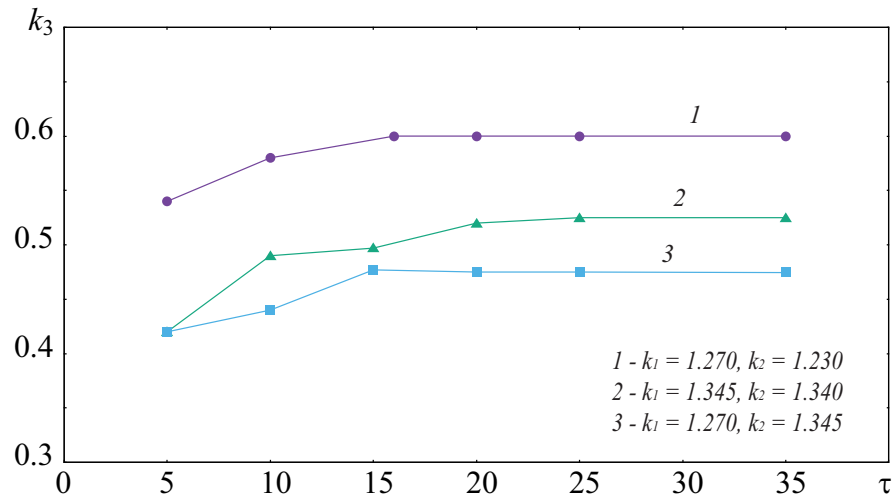


Рисунок 2.10 — Зависимости порогового значения параметра связи k_3 , соответствующего установлению режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных уравнениях Маккея-Гласса (2.8), от времени запаздывания τ . Кривая 1 — $k_1=1.27$, $k_2=1.23$ (обе системы характеризуются пятью положительными показателями Ляпунова); кривая 2 — $k_1=1.345$, $k_2=1.34$ (обе системы обладают только четырьмя положительными показателями Ляпунова); 3 — $k_1=1.27$, $k_2=1.345$ (ведущая система с пятью положительными показателями Ляпунова воздействует на ведомую систему с четырьмя положительными ляпуновскими показателями)

ны, но число положительных показателей Ляпунова в них одинаково и равно пяти); кривая 3 — $k_1 = 1.27$, $k_2 = 1.345$ (в одной системе присутствует пять положительных показателей Ляпунова, а в другой — четыре). Из сопоставления рисунков видно, что независимо от типа связи между системами пороговое значение параметра k_3 вначале увеличивается с ростом времени запаздывания, а затем достигает насыщения. При этом, уровень насыщения отличается по значению как для каждой комбинации параметров k_1 и k_2 , так и для типа связи между системами.

Важно отметить роль выбора значений параметров k_1 и k_2 , а, соответственно, и “задаваемое” количество положительных показателей Ляпунова во взаимодействующих системах. При рассмотрении однонаправленно связанных уравнений Маккея-Гласса стоит говорить о тенденции более раннего установления режима обобщенной синхронизации при таких значениях управляющих параметров, при которых в спектре автономной ведущей системы существует большее количество положительных показателей Ляпунова, чем в спектре ведомой. При взаимном типе связи из-за невозможности применения понятий “ведущей” и “ведо-

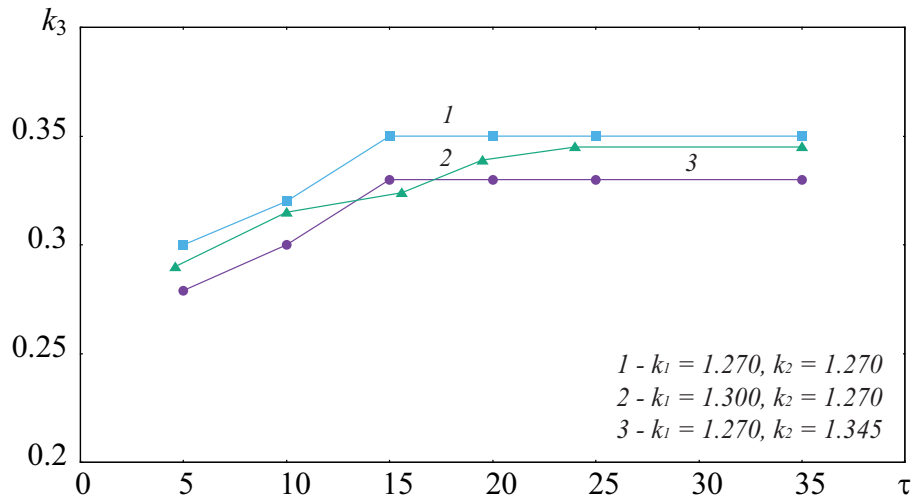


Рисунок 2.11 — Зависимости порогового значения параметра связи k_3 , соответствующего установлению режима обобщенной синхронизации во взаимно связанных уравнениях Маккея-Гласса (2.9), от времени запаздывания τ . Кривая 1 — $k_1 = 1.27$, $k_2 = 1.27$ (взаимодействующие системы идентичны и характеризуются пятью положительными показателями Ляпунова); кривая 2 — $k_1 = 1.3$, $k_2 = 1.27$ (взаимодействующие системы неидентичны, но число положительных показателей Ляпунова в них одинаково и равно пяти); кривая 3 — $k_1 = 1.27$, $k_2 = 1.345$ (в одной системе присутствует пять положительных показателей Ляпунова, а в другой — четыре)

мой” систем можно сформулировать следующее заключение: чем меньше расстройка управляющих параметров между системами, тем при меньшем значении параметра связи возможно детектирование обобщенной синхронизации.

Аналогичные результаты получены для однонаправленно связанных генераторов с запаздыванием при различных значениях параметров k_1 и k_2 . Они представлены на рисунке 2.12: кривая 1 — для $k_1 = 1.015$, $k_2 = 1.018$ (по два положительных показателя Ляпунова во взаимодействующих системах); кривая 2 — для $k_1 = 1.013$, $k_2 = 1.005$ (у ведущей системы два, у ведомой — один положительный показатель Ляпунова); кривая 3 — $k_1 = 0.996$, $k_2 = 0.988$ (по одному положительному показателю Ляпунова у обеих взаимодействующих систем). Из сравнения рисунков 2.10 и 2.12 видно, что полученные зависимости схожи с предыдущим случаем, разница состоит лишь в меньших значениях параметра связи, соответствующего насыщению, что обусловлено как свойствами самих систем, так и меньшим числом положительных показателей Ляпунова в автономном случае.

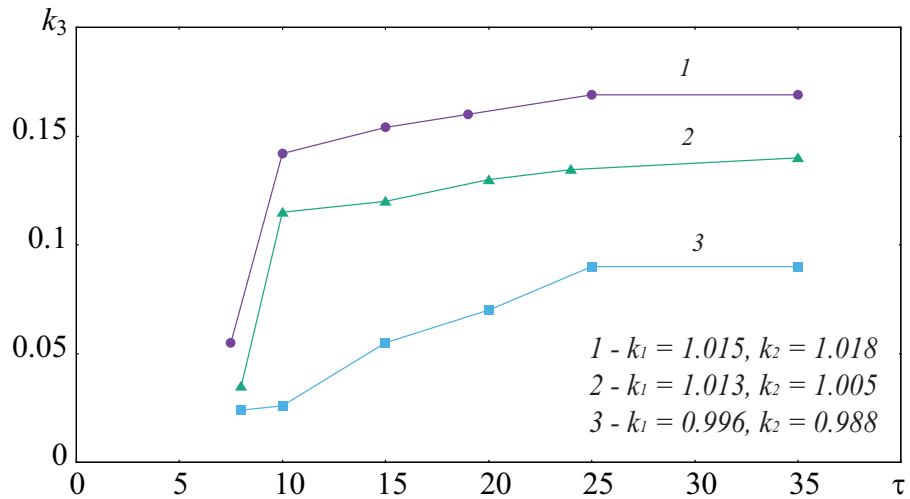


Рисунок 2.12 — Зависимости порогового значения параметра связи k_3 , соответствующего установлению режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных генераторах с запаздыванием (2.6), от времени запаздывания τ . Кривая 1 — для $k_1 = 1.015$, $k_2 = 1.018$ (по два положительных показателя Ляпунова во взаимодействующих системах); кривая 2 — для $k_1 = 1.013$, $k_2 = 1.005$ (у ведущей системы два, у ведомой — один положительный показатель Ляпунова); кривая 3 — $k_1 = 0.996$, $k_2 = 0.988$ (по одному положительному показателю Ляпунова у обеих взаимодействующих систем)

Таким образом, несмотря на сложность взаимодействия между системами и степень хаотичности, режим обобщенной синхронизации демонстрирует качественно схожие черты для различных взаимодействующих систем при различных типах связи. Также стоит отметить, что полученные результаты имеют схожий характер с исследованиями, проведенными в работе [125], а, следовательно, возможно предположить определенного рода универсальность полученной зависимости для систем с запаздыванием в режимах полной и обобщенной синхронизации.

2.6 Выводы по главе 2

Во второй главе диссертационной работы выявлены особенности обобщенной синхронизации, присущие системам с запаздыванием при однонаправленном и взаимном типах связи. В качестве моделей выбраны однонаправленно и взаимно связанные генераторы с запаздыванием и уравнения Маккея-Гласса. Рассмотрены случаи с различными комбинациями управляющих параметров, отвечающих за разное количество

положительных показателей Ляпунова в исследуемых системах в отсутствие связи. Предложенный в главе 1 настоящей диссертационной работы метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием применен для диагностирования режима обобщенной синхронизации в исследуемых однонаправленно и взаимно связанных системах. Также для определения порога обобщенной синхронизации в системах с однонаправленным типом связи использован метод вспомогательной системы. Показано, что результаты обоих методов находятся в хорошем соответствии друг с другом.

Для модели кроветворения Маккея-Гласса проведен сравнительный анализ спектров показателей Ляпунова в случае с однонаправленным и взаимным типами связи. Показано, что в случае взаимной связи реализуется последовательный переход положительных показателей в область отрицательных значений с последующим установлением режима обобщенной синхронизации, точно также как при однонаправленной связи.

Исследована зависимость порогового значения параметра связи, соответствующего установлению режима обобщенной синхронизации, от величины времени запаздывания. Установлено, что при различных значениях управляющих параметров в обеих системах порог обобщенной синхронизации выходит на уровень насыщения, величина которого существенным образом зависит от числа положительных показателей Ляпунова, реализуемых во взаимодействующих системах в отсутствие связи между ними, за что в свою очередь отвечают управляющие параметры k_1 и k_2 . Важно отметить, что данная закономерность была выявлена для обоих типов связи.

Таким образом, режим обобщенной синхронизации проявил себя схожим образом в системах с разной степенью хаотичности, а также для различных типов связи. Качественно схожие черты проявляются как в методах обнаружения, основанных на вычислении показателей Ляпунова, так и в зависимостях граничных значений наступления синхронного режима от времени задержки между системами.

Глава 3

Фазовая и перемежающаяся фазовая синхронизация в модельных и реальных нейрофизиологических системах

[79–81, 86, 90, 93, 96]

3.1 Основные понятия и вероятностные характеристики

Еще одним типом поведения, рассмотрению которого посвящена настоящая диссертационная работа, является режим фазовой хаотической синхронизации. Этот режим означает захват фаз при слабой корреляции амплитуд хаотических сигналов между собой. Существует большое количество работ по исследованию данного явления. Например, в работе [7] приводятся доказательства взаимосвязи понятия хаотической фазовой синхронизации с понятием “захвата частоты”, применяемым в нелинейных периодических системах. В работе [8] на примере связанных осцилляторов Ресслера (в том числе связанных хаотической и гиперхаотической систем) представлены результаты исследования фазовой синхронизации, способы введения фазы хаотического сигнала, интерпретация режима с помощью нулевого показателя Ляпунова. Помимо работ, посвященных исследованию фазовой синхронизации в осцилляторах Ресслера (см., например, [129, 130]), режим хорошо изучен и в системах на основе математической модели Лоренца [131, 132]. Рассматриваемое явление активно используется в нейробиологических исследованиях [133–135], при изучении лазеров [136] и радиотехнических

генераторов [122], а также было выявлено в области экологии [137] и т.д. (дополнительно можно посмотреть монографии и обзоры, такие как [2, 138, 139]).

Как нетрудно заметить, одной из характерных моделей для изучения фазовой синхронизации является осциллятор Ресслера [140] (либо находящийся под внешним периодическим воздействием, либо связанный однонаправленно или взаимно с другим таким же осциллятором). Связано это, в первую очередь, с тем, что в достаточно широком диапазоне значений управляющих параметров эта система характеризуется так называемым фазово-когерентным аттрактором, для которого не составляет труда ввести в рассмотрение мгновенную фазу хаотического сигнала [5, 141]:

$$\tan \varphi = y/x, \quad (3.1)$$

а в дальнейшем и разность фаз $\Delta\varphi$ между взаимодействующими системами. Стоит отметить, что введение мгновенной фазы возможно еще несколькими способами, например, с помощью рассмотрения аналитического сигнала с функцией Гильберта [8, 142], используя сечение Пуанкаре [8] или при помощи непрерывного вейвлетного преобразования [9].

Известно, что фазовой синхронизации предшествует перемежающееся поведение [35, 37, 136]. Это означает, что зависимость разности фаз $\Delta\varphi(t)$ от времени характеризуется переменными участками синхронного поведения (ламинарные фазы) с резкими скачками на величину 2π (турбулентные фазы). В зависимости от величины расстройки управляющих параметров возможно наблюдать два различных сценария возникновения/разрушения фазовой синхронизации [143, 144], механизмы возникновения/разрушения и статистические характеристики длительностей ламинарных фаз которых также значительно отличаются друг от друга. В первом случае как выше, так и ниже границы фазовой синхронизации аттракторы взаимодействующих систем остаются фазово-когерентными, а во втором случае – по крайней мере один из аттракторов теряет фазовую когерентность [144]. Два различных сценария возникновения/разрушения синхронного режима приводят к двум различ-

ным типам перемежаемости, реализующимся вблизи границы возникновения режима фазовой синхронизации в случае относительно большой и относительно слабой расстройки между взаимодействующими системами. В случае малой расстройки по мере приближения к границе фазовой синхронизации поочередно наблюдается перемежаемость типа I [36, 145], а затем, непосредственно у самой границы – перемежаемость “игольного ушка” [35]. При сильной расстройке управляющих параметров на границе фазовой синхронизации реализуется перемежаемость “кольца” [37].

Чтобы определить, какой тип перемежаемости реализуется в системе, необходимо проанализировать статистические характеристики длительностей ламинарных фаз. Рассмотрим их на примере взаимодействующих однонаправленно связанных слабо неидентичных систем Ресслера:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_d^i &= -w_d y_d^i - z_d^i, \\
 \dot{y}_d^i &= w_d x_d^i + a y_d^i, \\
 \dot{z}_d^i &= p + z_d^i (x_d^i - c), \\
 \dot{x}_r^i &= -w_r y_r^i - z_r^i + \varepsilon (x_d^i - x_r^i), \\
 \dot{y}_r^i &= w_r x_r^i + a y_r^i, \\
 \dot{z}_r^i &= p + z_r^i (x_r^i - c),
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10$, $w_d = 0.93$, $w_r = 0.95$ выступают в роли управляющих параметров систем, ε – параметр связи. Индексы d и r относятся к ведущим и ведомым системам, соответственно, индекс $i = 1 \dots N$ соответствует рассматриваемой паре осцилляторов. Значения параметров были выбраны по аналогии с предыдущими исследованиями [61, 146]. В каждой паре взаимодействующих систем начальные условия ведущей системы были выбраны одинаковыми, а для ведомой системы – различными, равномерно распределенными по аттрактору этой системы. При указанных значениях управляющих параметров в рассматриваемой системе реализуется режим фазовой синхронизации с фазово-когерентными аттракторами при $\varepsilon \geq 0.041$ (рисунок 3.1).

Для диагностики фазовой синхронизации и определения характеристик перемежающегося поведения, имеющего место вблизи ее границы,

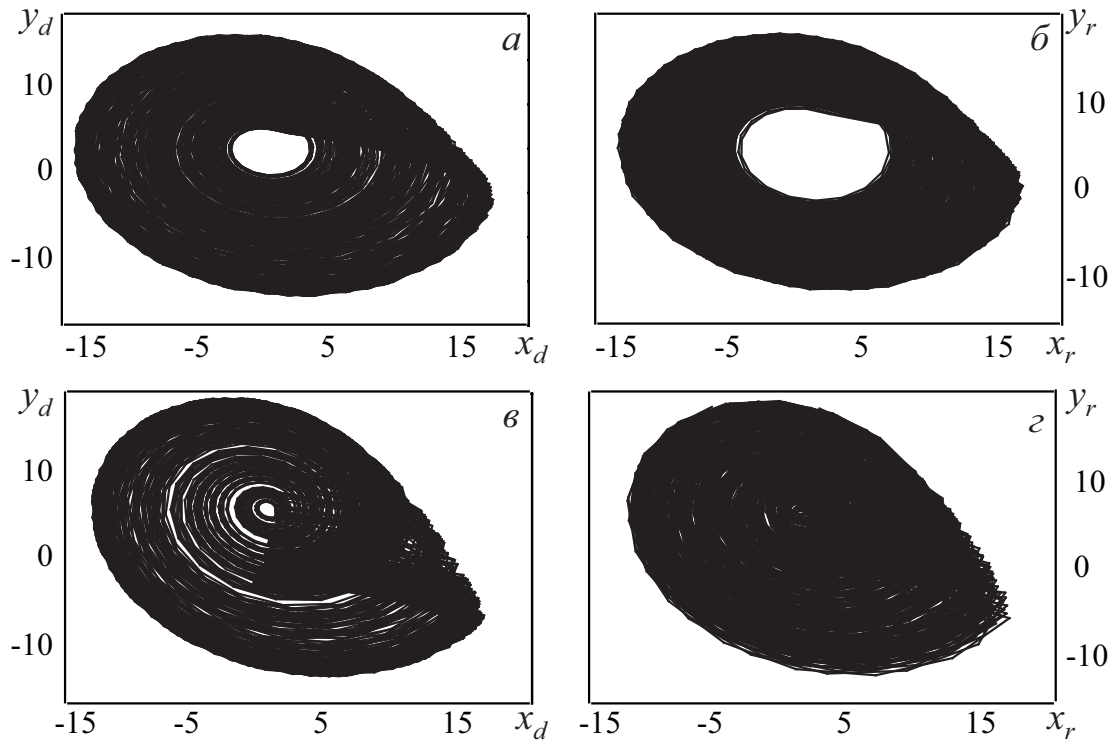


Рисунок 3.1 — Фазовые портреты ведущего (x_d, y_d) и ведомого (x_r, y_r) осцилляторов Ресслера (3.2), $i = 1$: (а) и (б) представляют случай фазово-когерентных аттракторов; (в) и (г) – фазово-некогерентных

необходимо ввести в рассмотрение фазы хаотических сигналов и найти разность между каждой парой взаимодействующих систем. Так как рассматриваемые системы характеризуется фазово-когерентными аттракторами, их фазы, как отмечалось выше, можно ввести в рассмотрение как углы в полярной системе координат на плоскости (x_i, y_i) [5]:

$$\varphi_{d,r}^i = \arctan(y_{d,r}^i/x_{d,r}^i), \quad (3.3)$$

тогда разность фаз между каждой парой систем будет определяться выражением

$$\Delta\varphi^i = \varphi_d^i - \varphi_r^i, \quad (3.4)$$

причем, полученная таким образом разность фаз должна быть сведена к диапазону шириной 2π , аналогично тому, как это делалось в работе [147]. Критерием наличия фазовой синхронизации в системе является ограниченность разности фаз

$$|\Delta\varphi^i| < const, \quad (3.5)$$

где величина константы определяется эмпирически. В режиме фазовой синхронизации разность фаз будет ограничена всегда, в то время как вблизи ее границы участки фазового захвата (ламинарные фазы) будут сменяться турбулентными всплесками, где условие (3.5) выполняться не будет.

Если параметры взаимодействующих хаотических систем расстроены достаточно слабо, то при фиксированном значении расстройки с увеличением параметра связи наблюдается перемежаемость I типа. В данном случае среднее значение длительности ламинарных фаз T будет подчиняться закону [148]:

$$T \sim (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2}, \quad (3.6)$$

где ε_c характеризует предельное значение параметра связи, при котором наблюдается перемежаемость типа I, а также соответствует седло-узловой бифуркации, если рассматривать хаотическую динамику подобно шуму, который можно “выключить” [62, 149].

Выражение для распределения длительностей ламинарных фаз в данном случае определяется следующим образом:

$$\rho(\tau) = \frac{A}{(D\tau)^{3/2}} \exp\left(\frac{-(z - \tau)^2}{D\tau}\right), \quad (3.7)$$

(рисунок 3.2 (a)), где A – коэффициент пропорциональности, получаемый из условия нормировки, D – интенсивность эффективного шума, z – граница ламинарной фазы (более подробно см. [150] и список литературы к ней).

При значениях параметра связи $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_{synch}$, где ε_{synch} определяет границу фазовой синхронизации, в системе реализуется режим со сверхдлинным ламинарным поведением или перемежаемость “игольного ушка”. Степенной закон для средней длительности ламинарных фаз преобразуется в:

$$T \sim \exp(k(|\varepsilon_{synch} - \varepsilon|)^{-1/2}), \quad (3.8)$$

где $k = const$ [35, 36].

Несмотря на отличающиеся характеристики перемежаемости “игольного ушка” от перемежаемости типа I, в работах [44, 151] показана

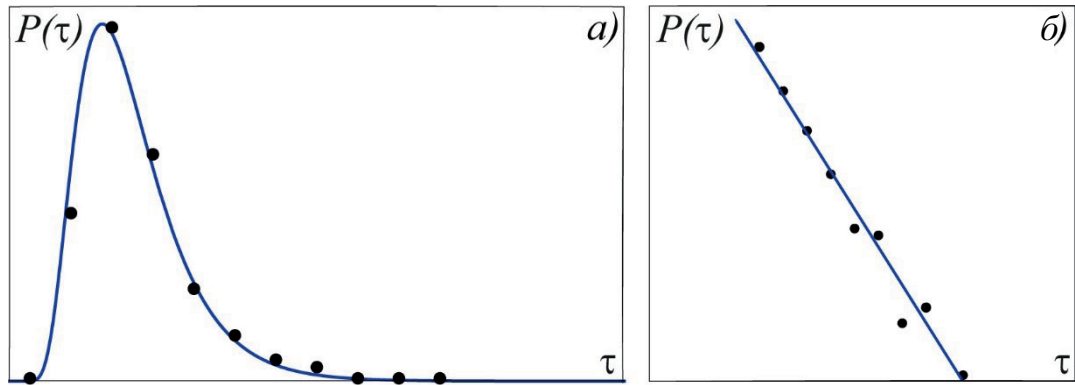


Рисунок 3.2 — Качественные распределения длительностей ламинарных фаз $\rho(\tau)$ в режимах перемежаемости типа I (а) и “игольного ушка” (б) (точки) и их аппроксимации закономерностями (3.7) и (3.9), соответственно (сплошные линии). Для графика (б) ось ординат представлена в логарифмическом масштабе

возможность рассматривать данный тип динамики как “перемежаемость типа I в присутствии шума” в закритической области значений управляющих параметров. Для последнего режима, а, следовательно, и для перемежаемости “игольного ушка” распределение длительностей ламинарных фаз описывается следующей закономерностью:

$$\rho(\tau) = T^{-1} \exp(-\tau/T) \quad (3.9)$$

(рисунок 3.2 (б)), где T – средняя длительность ламинарных фаз [149, 152].

Переход от одного типа перемежаемости к другому происходит в момент изменения знака нулевого условного показателя Ляпунова на отрицательный [8, 58]. Исследованию данного вопроса будет посвящен следующий раздел диссертационной работы.

Теперь обратимся к другой статистической характеристике, а именно, к вероятности наблюдения ламинарной фазы по времени и по ансамблю осцилляторов. Для расчета вероятности по времени использовалась формула, аналогичная предложенной в работе [37]:

$$p = \frac{kT}{M}, \quad (3.10)$$

где M – длина временного ряда, k – количество ламинарных фаз на данной длине наблюдения, T – их средняя длительность. Следует отметить, что данное выражение эквивалентно полученной в работе [37]

формуле для расчета вероятности охвата фазовой траекторией начала координат для перемежаемости кольца, при этом величина T существенным образом отличается от последней. При таком допущении выражение (3.10) может использоваться и в рамках исследования перемежаемости “игольного ушка”. В данном случае вероятность детектирования ламинарной фазы представляет собой отношение суммарной длительности всех ламинарных фаз к общей длине временного ряда.

Расчет вероятности по ансамблю осцилляторов осуществлялся посредством вычисления средней вероятности наблюдения ламинарной фазы в ансамбле осцилляторов на временном интервале T после завершения переходного процесса длительности T_0 :

$$P = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T p(t) dt, \quad (3.11)$$

где $p(t)$ — вероятность обнаружения ламинарной фазы в момент времени t .

Понятно, что в обоих случаях значение вероятности будет зависеть от параметра связи, то есть от режима, реализующегося в системе. Если в связанных хаотических осцилляторах наблюдается режим фазовой синхронизации, то значение вероятности детектирования ламинарной фазы будет равно 1. Чем больше будет отклонение управляющего параметра от границы синхронизации в сторону меньших значений, тем меньше вероятность наблюдения захвата фаз.

Чтобы определить “эффективный” временной промежуток T , величины которого достаточно для нахождения точного значения вероятности P , для ансамбля из 50 пар осцилляторов Ресслера были построены зависимости этой вероятности от параметра связи на временных отрезках $T = 1000$, $T = 100000$, $T = 1000000$ (см. рисунок 3.3). Оценка показала, что значения в 1000 единиц безразмерного времени оказываются недостаточно для исследований, так как соответствующие значения на графике $P(\varepsilon)$ сильно флуктуируют, в то время как аналогичные зависимости для $T = 100000$ и $T = 1000000$ оказываются гладкими и практически не от-

личаются друг от друга. Для дальнейших вычислений была выбрана минимальная из вышеназванных величин $T = 100000$.

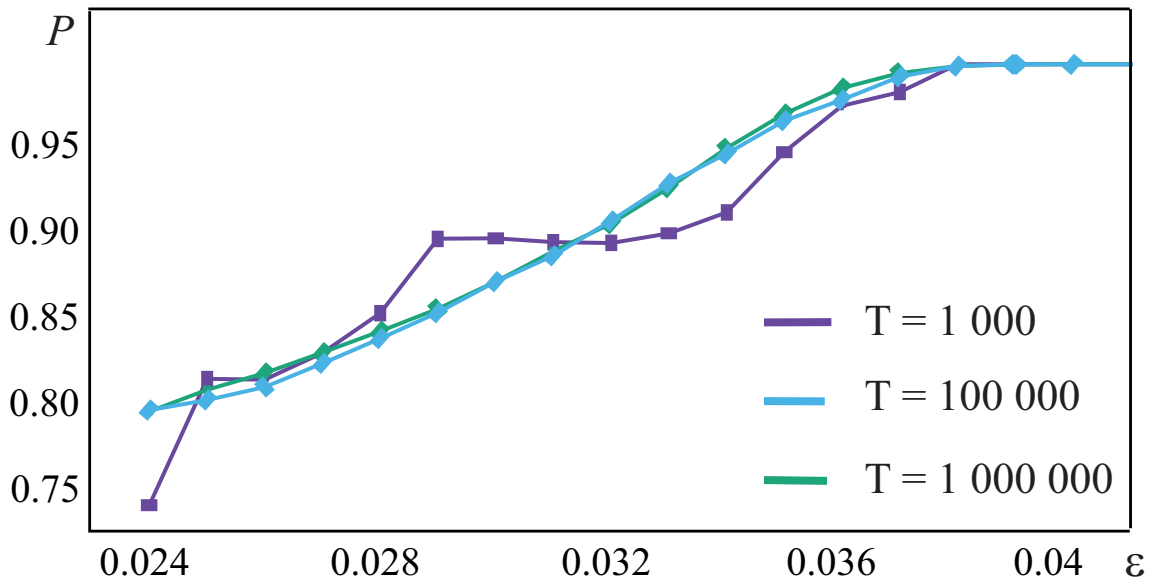


Рисунок 3.3 — Зависимости вероятности детектирования ламинарной фазы в ансамбле из 50 пар осцилляторов Ресслера от параметра связи при трех различных значениях временного интервала T : $T = 1000$, $T = 100000$ и $T = 1000000$

На рисунке 3.4 представлены результаты расчета зависимости вероятности детектирования ламинарной фазы от величины параметра связи в случае ее вычисления по времени и по ансамблю осцилляторов (в рассматриваемом случае количество пар составляло 500). Как видно из графиков, вероятности, рассчитанные двумя различными способами, оказываются практически идентичными друг другу, что свидетельствует об эргодичности рассматриваемого процесса и возможности использования обоих вышеупомянутых способов при проведении исследований.

Рисунок 3.5 иллюстрирует зависимости вероятности детектирования ламинарной фазы от числа элементов в ансамбле для трех различных значений параметра связи, отвечающих за реализацию режимов перемежаемости типа I, перемежаемости “игольного ушка” и фазовой синхронизации. Из рисунков видно, что в режиме перемежаемости при увеличении количества пар осцилляторов имеет место резкое изменение значения вероятности детектирования ламинарной фазы с дальнейшим его насыщением (рисунки 3.5 (а) и (б)). В режиме фазовой синхронизации рассматриваемая величина оказывается всегда постоянной (рисунок

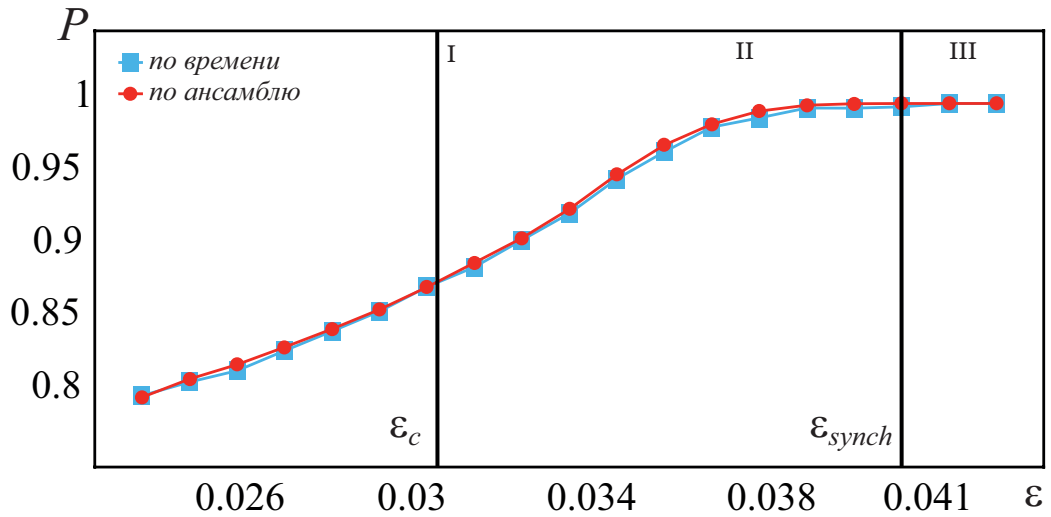


Рисунок 3.4 — Зависимости вероятности детектирования ламинарной фазы от величины параметра связи между системами в случае ее расчета по времени и по ансамблю осцилляторов. Границы указывают на изменение режима: I – режим перемежаемости типа I; II – перемежаемость “игольного ушка”, $\varepsilon_c = 0.031$; III – фазовая синхронизация, $\varepsilon_{synch} = 0.041$

3.5(в)), что свидетельствует об отсутствии мультистабильности при переходе к режиму фазовой синхронизации в однонаправленно связанных системах.

Наконец, обратимся к зависимости вероятности обнаружения ламинарной фазы от времени в ансамбле из 500 пар осцилляторов. Понятно, что, когда в исходной системе диагностируется режим фазовой синхронизации, в любой момент времени вероятность $p(t) = 1$, а следовательно, будет равна 1 и средняя вероятность детектирования ламинарной фазы. В режиме перемежающейся фазовой синхронизации средняя вероятность P будет чуть меньше 1, а зависимость $p(t)$ будет содержать участки синхронной и асинхронной динамики, чередующиеся друг с другом. На рисунке 3.6 приведена такая зависимость для системы (3.2) при $N = 500$. Из рисунка видно, что по характеру такой зависимости ламинарные и турбулентные фазы достаточно легко отличить друг от друга: во время ламинарных фаз поведения вероятность практически в точности равна 1, в то время как во время турбулентных фаз она меняется в достаточно широком диапазоне, причем минимальное значение вероятности приходится примерно на середину турбулентной фазы, а по

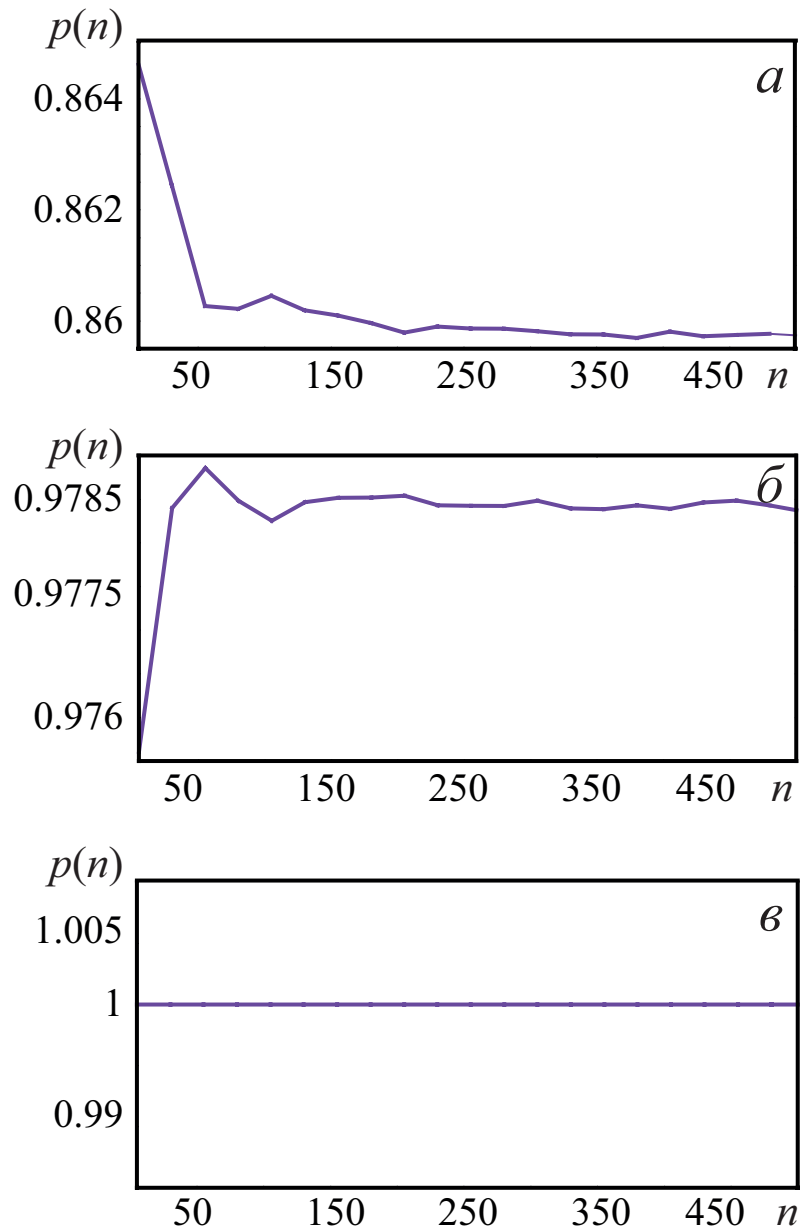


Рисунок 3.5 — Зависимости вероятности детектирования ламинарной фазы от количества пар осцилляторов в ансамбле систем Ресслера в режиме (а) перемежаемости типа I, $\varepsilon = 0.032$; (б) перемежаемости “игольного ушка”, $\varepsilon = 0.037$; (в) фазовой синхронизации, $\varepsilon = 0.042$

мере удаления/приближения от/к ламинарной фазе значение вероятности начинает монотонно уменьшаться/расти.

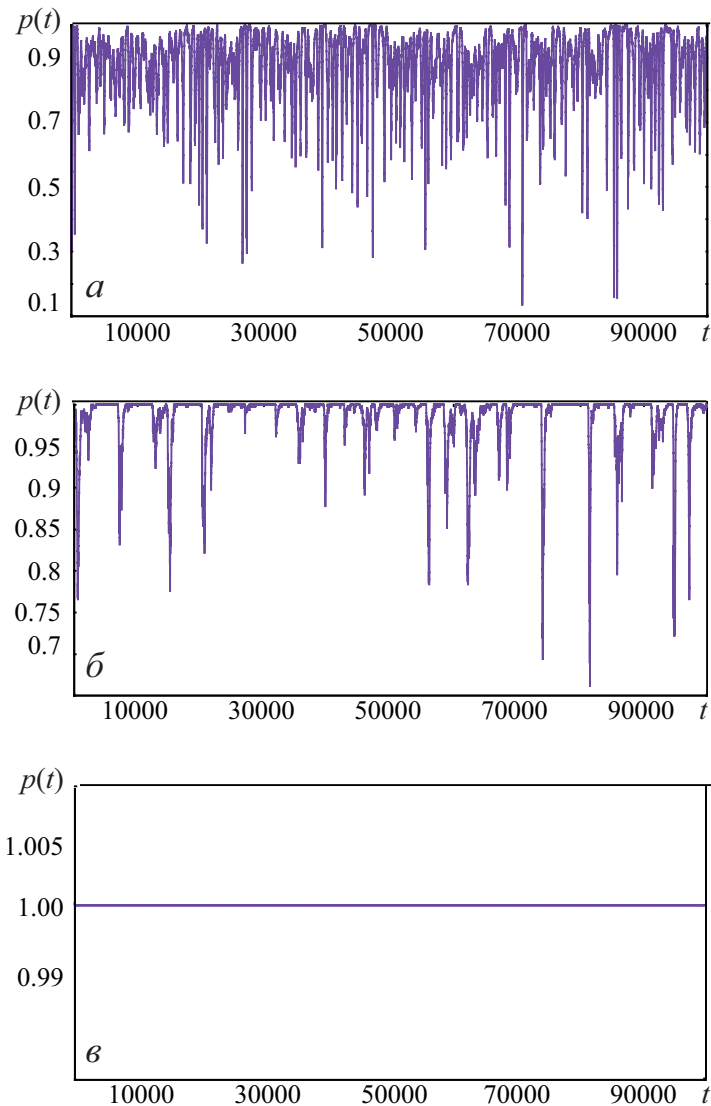


Рисунок 3.6 — Зависимость вероятности детектирования ламинарной фазы от времени в ансамбле из 500 пар Ресслера в режиме (а) перемежаемости типа I, $\varepsilon = 0.032$; (б) перемежаемости “игольного ушка”, $\varepsilon = 0.037$; (в) фазовой синхронизации, $\varepsilon = 0.042$

Подводя итог анализу статистических характеристик, можно выделить следующее:

- для вероятности наблюдения ламинарной фазы, рассчитанной по времени и по ансамблю, обнаружено идентичное поведение с увеличением параметра связи и приближении к границе фазовой синхронизации;

- экспериментальным путем возможно выявить “эффективный” временной промежуток T , величины которого достаточно для нахождения точного значения вероятности P по ансамблю;
- установлено, что в режиме фазовой синхронизации количество осцилляторов не влияет на результаты диагностики, а в режиме перемежающейся фазовой синхронизации вероятность выходит на уровень насыщения при достаточно большом количестве осцилляторов;
- ламинарные и турбулентные фазы на временных зависимостях вероятности детектирования ламинарной фазы в ансамбле осцилляторов в различных режимах динамики систем достаточно легко отличить друг от друга.

Таким образом из всего вышесказанного следует, что изучение статистических характеристик системы, находящейся на границе фазовой синхронизации, способствует уточнению результатов, а также обладает большой информативностью и иллюстративностью.

3.2 Оценка степени синхронизма, основанная на расчете показателей Ляпунова

Для изучения синхронизации периодических и хаотических колебаний важную роль играет нулевой условный показатель Ляпунова [55, 56, 58, 62]. Как указывалось во введении, для неавтономных систем в присутствии шума и связанных хаотических систем, смена знака на отрицательный у данного показателя происходит незадолго до наступления режима фазовой синхронизации. При этом, значение параметра связи в момент перехода этого показателя Ляпунова в отрицательную область не соответствует критическому значению того же параметра связи при наступлении фазовой синхронизации. Разница между ними может быть достаточно велика [58, 63, 153]. Именно поэтому нулевой показатель Ляпунова можно принять за меру синхронизма перемежаю-

щейся фазовой синхронизации, имеющей место на границе синхронного режима.

Режим фазовой синхронизации получил широкое распространение в сфере медицинских и нейрофизиологических исследований [45, 46, 153]. Однако, в данной области нередко единственно доступным ресурсом являются записанные в реальном времени сигналы, что делает расчет спектра показателей Ляпунова более затруднительным, но все еще возможным.

Рассмотрим два традиционных метода для оценки показателей Ляпунова по временным рядам. Суть первого подхода [74, 154] заключается в отслеживании двух близких траекторий в фазовом пространстве с течением времени. Расчет старшего показателя Ляпунова по реализации происходит в данном случае аналогично тому, как и при известном операторе эволюции. Описанная идея довольно проста в численной реализации, однако, недостатком этого метода является его неработоспособность при оценке показателя Ляпунова по коротким временным рядам. С помощью второго подхода [155–157] для оценки показателей Ляпунова предлагается использовать якобиан, поскольку известно, что ляпуновские показатели можно определить как собственные числа матрицы Якоби для системы, которая сгенерировала рассматриваемую реализацию. Преимуществом второго метода является его работоспособность на достаточно коротких временных промежутках, однако, он очень чувствителен к шумам и ошибкам, что является существенным недостатком.

В данной главе настоящей диссертационной работы рассмотрен метод оценки показателя Ляпунова по временному ряду, основанный на модификации работ [63, 77, 78]. Основная идея метода базируется на рассмотрении квадратичного отображения в присутствии шума, которое получается при линеаризации отображения окружности – базовой модели нелинейной динамики, достаточно часто применяемой для изучения таких нелинейных явлений как синхронизация [58, 158] и захват фаз [159, 160], – около устойчивой неподвижной точки и описывает ди-

намику системы у точки бифуркации:

$$x_{n+1} = x_n + \Omega x_n^2 - \varepsilon + \xi_n, \quad (3.12)$$

где ε, Ω – управляющие параметры, ξ_n – гауссовский шум с математическим ожиданием $\langle \xi_n \rangle = 0$, $\langle \xi_n, \xi_m \rangle = D\delta(n-m)$. Известно, что показатель Ляпунова для одномерных отображений $x_{n+1} = f(x_n)$ (n – дискретное время) вычисляется по формуле [74]:

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \|f'(x_i)\|. \quad (3.13)$$

Принимая во внимание эргодичность рассматриваемого процесса, можно записать

$$\Lambda_0(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) \ln |f'(x)| dx, \quad (3.14)$$

где $\rho(x)$ – плотность распределения для значений x . В закритической области значений управляющего параметра ε , соответствующей режиму синхронизации в потоковой системе, она описывается соотношением [149]:

$$\rho(x) = A \exp\left(-\frac{2}{D}\left(\varepsilon x - \frac{\Omega x^3}{3}\right)\right), \quad (3.15)$$

где A – коэффициент нормировки, определяемый из условия,

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx = 1, \quad (3.16)$$

D – интенсивность шума, ε, Ω – управляющие параметры. Соотношение (3.15) описывает плотность вероятности при значениях $x \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{\Omega}}$ и достигает максимума в точке

$$x_{max} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\Omega}}. \quad (3.17)$$

Захват фаз происходит тогда, когда все значения x_n находятся вокруг неподвижной точки x_{max} . Принимая во внимание вышеизложенные аргументы, формулу (3.14) можно переписать в виде

$$\Lambda_0(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \ln |1 + 2\Omega x| dx, \quad (3.18)$$

где значения $x_{1,2}$ определяются эмпирически.

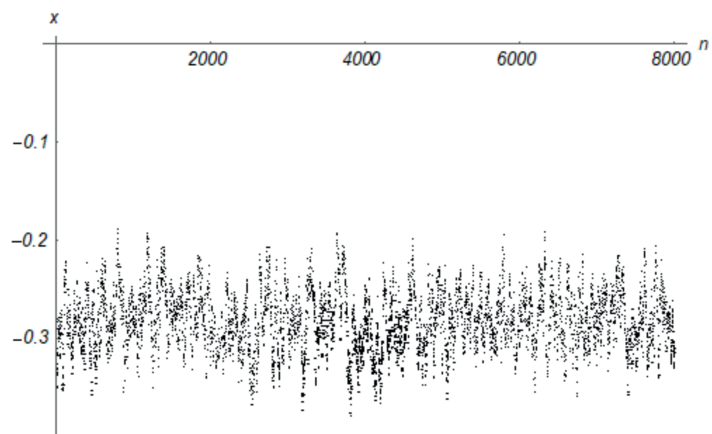
Как видно из приведенных выкладок, для вычисления искомого нулевого условного показателя Ляпунова требуются лишь параметры ε , Ω , D , A и плотность распределения $\rho(x)$. Вычисление ляпуновского показателя в данном случае осуществляется в несколько этапов:

1. Вычисление величины разности фаз $\Delta\varphi_n$ между взаимодействующими системами в различные дискретные моменты времени n (см. раздел 3.1). В случае рассмотрения дискретных отображений, аналогичных (3.12), указанные значения получаются путем итерирования отображения $\Delta\varphi_{n+1} = f(\Delta\varphi_n)$.
2. Построение полученных значений на плоскости $(\Delta\varphi_{n+1}, \Delta\varphi_n)$ и их аппроксимация полиномом $a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2$ (a_0 – отрицательное, $a_1 \approx 1$) при помощи линейной трансформации данных в виде $x_n = \Delta\varphi_n - \psi$ (на графике получим прямую).
3. Вычисление плотности вероятности $\rho(x)$ по полученным значениям x .
4. Нахождение параметров ε , Ω , D и коэффициента A с учетом условия нормировки (3.16).
5. Определение показателя Ляпунова с помощью формулы (3.18).

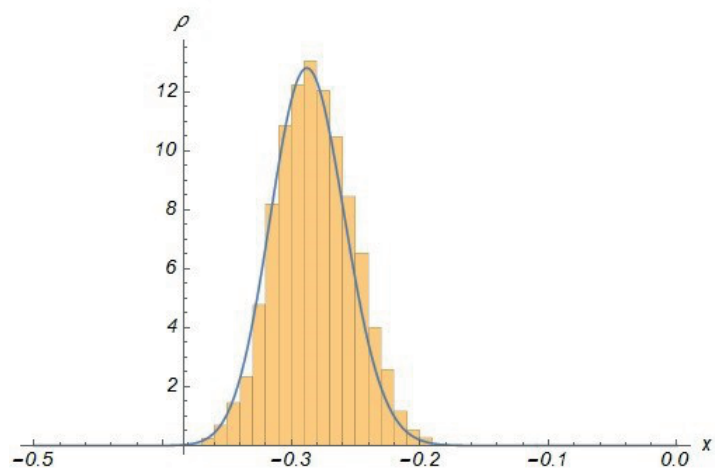
Временная реализация отображения (3.12) при значениях управляющих параметров $\Omega = 0.1$, $\varepsilon = 0.008$, $D = 0.01$ приведена на рисунке 3.7,а. По полученному временному ряду построено распределение плотности вероятности $\rho(x)$ и проведена его аппроксимация закономерностью (3.15) (рисунок 3.7,б). Используя метод наименьших квадратов показано, что численно рассчитанные данные находятся в хорошем соответствии с аналитической закономерностью при $\Omega \approx 0.1043$ (рисунок 3.7,б), а, соответственно, коэффициент нормировки и управляющий параметр оказываются следующими: $A \approx 4.7333 \times 10^{-14}$, $\varepsilon \approx 0.008654$.

В соответствии с выражением (3.18) показатель Ляпунова в данном случае определяется как

$$\Lambda_0(\varepsilon) = \int_{-0.5}^0 A\rho(x) \ln |1 + 2\Omega x| dx = -0.0572. \quad (3.19)$$



a



б

Рисунок 3.7 — Временная реализация квадратичного отображения (3.12) (*a*) и полученное для него распределение плотности вероятности $\rho(x)$ (гистограмма) и его аппроксимация закономерностью (3.15) (*б*)

Проанализировав данные, нетрудно заметить, что найденные параметры близки к изначально заданным ($\Omega \approx 0.1043$ и $\Omega = 0.1$, $\varepsilon \approx 0.008654$ и $\varepsilon = 0.008$, соответственно), а показатель Ляпунова Λ_0 , рассчитанный при помощи рассматриваемого метода, оказывается близким к аналогичному показателю, полученному при помощи формулы (3.13): $\Lambda = -0.057707$. Таким образом, можно утверждать, что рассматриваемый метод обладает высокой степенью эффективности, что делает возможным его применение к реальным сигналам, в которых прямой расчет спектра показателей Ляпунова оказывается затруднительным.

3.3 Применение метода расчета показателей Ляпунова для оценки степени синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации в реальных нейрофизиологических системах

Воспользуемся описанным в разделе 3.2 методом для расчета нулевого условного показателя Ляпунова по реальным нейрофизиологическим данным. В случае анализа таких систем не представляется возможным произвести корректную оценку параметра D , что требует адаптации метода применительно к рассматриваемым данным. Для этого необходимо принять во внимание ряд допущений. Если обратить внимание на рисунок 3.7,б, можно найти визуальное сходство $\rho(x)$ с гауссовским распределением плотности вероятности, которое в упрощенном виде определяется как

$$\rho_G(x) = A_G \exp(-2B(x - K)^2), \quad (3.20)$$

где K и B – аналоги математического ожидания и дисперсии, A_G – нормировочный множитель. Учитывая, что параметр K соответствует максимуму распределения (3.20), взаимосвязь с параметрами ε и Ω распределения (3.15) определяется следующим образом:

$$K = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\Omega}}. \quad (3.21)$$

Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора правых частей уравнений (3.20) и (3.15) в точке (3.21) до второго порядка малости, а затем сравнив коэффициенты при соответствующих степенях, получим соотношение между параметрами B и D :

$$D = \sqrt{\frac{\varepsilon\Omega}{B}}. \quad (3.22)$$

Параметры аппроксимации (3.20) определяются аналогичным способом, как и для распределения (3.15). Параметры A_G и K находятся из сопоставления максимумов численно полученного распределения вероятности и его аппроксимации закономерностью (3.20). Параметр B находится при помощи метода наименьших квадратов. Наконец, связь между параметрами D , ε и Ω определяется соотношением (3.22). Все остальные шаги метода, описанные в разделе 3.2, остаются неизменными.

Применение такого подхода возможно к любой системе, где наблюдается фазовая или перемежающееся фазовая синхронизация. В рамках данной главы диссертационной работы изучены реальные экспериментальные данные нейрофизиологической природы – сигналы электроэнцефалограмм, полученные с различных областей головного мозга крысы линии WAG/Rij и человека, страдающего эпилепсией. Экспериментальные данные были получены специалистами-нейрофизиологами в Радбаут университете Наймегена (Нидерланды) в лаборатории профессора Ж. ван Люжетаалар и в Институте высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН под руководством д.б.н. Е.Ю. Ситниковой, а также в НИИ кардиологии Саратовского государственного медицинского университета.

Головной мозг представляет собой сеть со сложной топологией, состоящую из большого количества нейронов, которые, в свою очередь, демонстрируют сложную колебательную динамику. В современной медицине для исследования процессов в головном мозге используются как раз электроэнцефалограммы, которые регистрируют электрические импульсы, исходящие от его отдельных зон и областей. С помощью данной процедуры возможно выявление эпилепсии и других патологий головного мозга [33]. Создание и введение новейших методов для анализа

различных типов динамики головного мозга являются одной из наиболее востребованных и активно развивающихся сфер в нейрофизиологии. Следовательно, представленный метод для оценки перемежающегося поведения может найти непосредственное применение в медицине для диагностики и выявления заболеваний, связанных с патологической активностью головного мозга.

Эпилептические ЭЭГ представляют собой перемежающиеся временные реализации, содержащие в себе пик-волновые разряды (ламинарные участки) и чередующиеся с ними области фоновой активности головного мозга (турбулентные участки). Известно, что пик-волновые разряды характеризуются высокой степенью синхронизма [161]. В то же самое время, как показали проведенные исследования, на участках фоновой активности также возможно существование фаз синхронного поведения. Таким образом, возможно провести оценку перемежающейся фазовой синхронизации для обоих типов динамики головного мозга и сравнить полученные результаты между собой.

Переход от дискретного набора значений сигнала электрической активности головного мозга к фазам, необходимым для расчета условного нулевого показателя Ляпунова, осуществлялся при помощи непрерывного вейвлетного преобразования [9]:

$$W(s, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - t_0}{s} \right) dt, \quad (3.23)$$

с материнским вейвлетом Морле ($\Omega_0 = 2\pi$)

$$\psi^*(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\Omega_0\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right). \quad (3.24)$$

Фаза вводилась в рассмотрение как аргумент вейвлетной функции

$$\varphi(s, t) = \arg W(s, t), \quad (3.25)$$

а разность фаз определялась выражением

$$\Delta\varphi(s, t) = \varphi_1(s_{max}, t) - \varphi_2(s_{max}, t), \quad (3.26)$$

где s_{max} – временной масштаб, соответствующий максимуму мгновенного распределения энергии вейвлетного спектра $|W(s, t)|^2$, $\varphi_{1,2}$ – фазы,

относящиеся к различным областям головного мозга, с которых снимались сигналы ЭЭГ.

3.4 Анализ данных электроэнцефалограмм крыс линии WAG/Rij

Применим предложенный метод для оценки нулевого условного показателя Ляпунова к данным электроэнцефалограмм крыс линии WAG/Rij. Крысы линии WAG/Rij являются генетической моделью абсансной эпилепсии. Электроэнцефалографические и клинические признаки абсанс-эпилепсии наблюдаются у 90 процентов крыс этой линии [162], а болезнь прогрессирует с течением жизни животных.

В работе изучены данные ЭЭГ крысы линии WAG/Rij в двух ее состояниях: в свободном состоянии и под влиянием лекарственного препарата клонидин (который способствует усилению эпилептических приступов в течение первых 6-12 часов действия препарата, но не оказывает влияния на продолжительность пик-волновых разрядов). В качестве анализируемых сигналов рассматривались разности фаз сигналов, полученных с двух разных областей головного мозга крысы: фронтальной коры и ядра таламуса. Фрагменты таких сигналов приведены на рисунке 3.8. Введение фаз сигналов, как отмечалось выше, осуществлялось при помощи непрерывного вейвлетного преобразования. Расчет условного нулевого показателя Ляпунова производился в течение пик-волновых разрядов, то есть во время эпилептических приступов (показаны серыми прямоугольниками на рисунке 3.8).

На рисунке 3.9 приведены зависимости разности фаз сигналов, полученных с двух вышеназванных областей головного мозга крыс линии WAG/Rij во время пик-волновых разрядов как в свободном состоянии, так и под действием лекарственных препаратов, распределения их плотности вероятности и их аппроксимации закономерностью (3.15). Видно, что во всех рассмотренных случаях исследуемые значения хорошо согла-

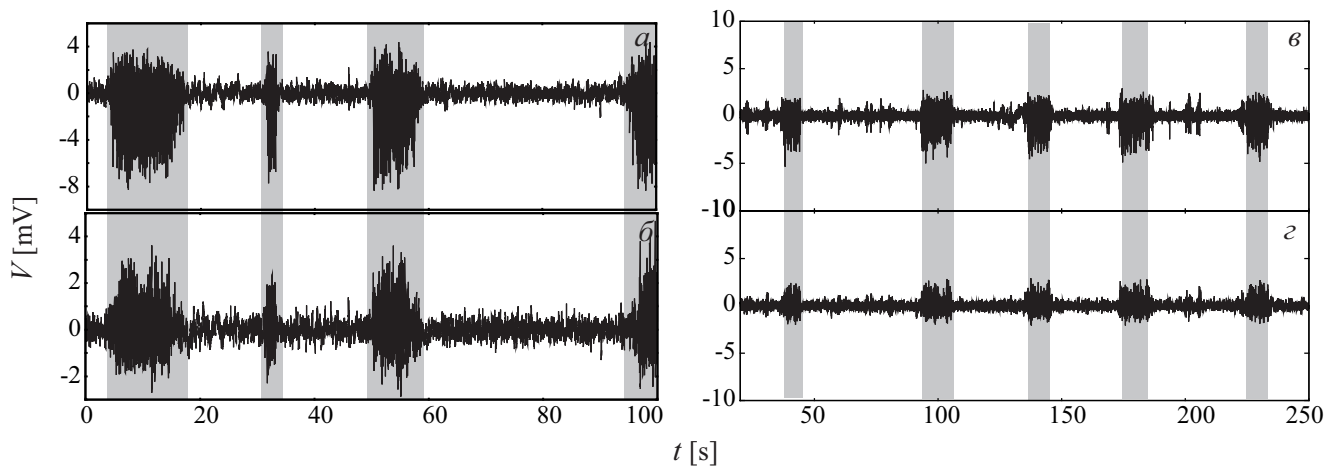


Рисунок 3.8 — Фрагменты записей ЭЭГ, зарегистрированных с различных областей головного мозга крыс линии WAG/Rij, находящихся в свободном состоянии (*а,б*) и под действием лекарственного препарата клонидин (*в,з*): (*а,в*) фронтальная кора, (*б,з*) ядро таламуса R. Участки, соответствующие пик-волновым разрядам, показаны серыми прямоугольниками

суются с теоретической закономерностью (3.15), что делает возможным применение метода, предложенного в разделах 3.2–3.3 к анализируемым данным.

Применение такого подхода показало, что степень синхронизма пик-волновых разрядов оказывается более высокой у лабораторных крыс, находящихся под действием лекарства. Показатели Ляпунова, полученные для крыс в свободном состоянии и под действием лекарственных препаратов, оказываются отрицательными в обоих случаях, а их отношение оказывается равным $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = 0.64495$, где Λ_1 – нулевой условный показатель Ляпунова, рассчитанный для крысы, находящейся в свободном состоянии, Λ_2 – аналогичный показатель Ляпунова для крысы, находящейся под действием лекарственного препарата клонидин.

На рисунке 3.10 представлены зависимости нулевого условного показателя Ляпунова от номера пик-волнового разряда для обоих рассмотренных случаев. Из рисунка видно, что для крысы в свободном состоянии искомая величина Λ_1 остается практически постоянной независимо от номера N пик-волнового разряда. В случае же крысы, находящейся под действием клонидина, абсолютная величина рассматриваемого показателя Ляпунова Λ_2 достаточно сильно растет с увеличением номера пик-волнового разряда в течение первых 12 часов действия препара-

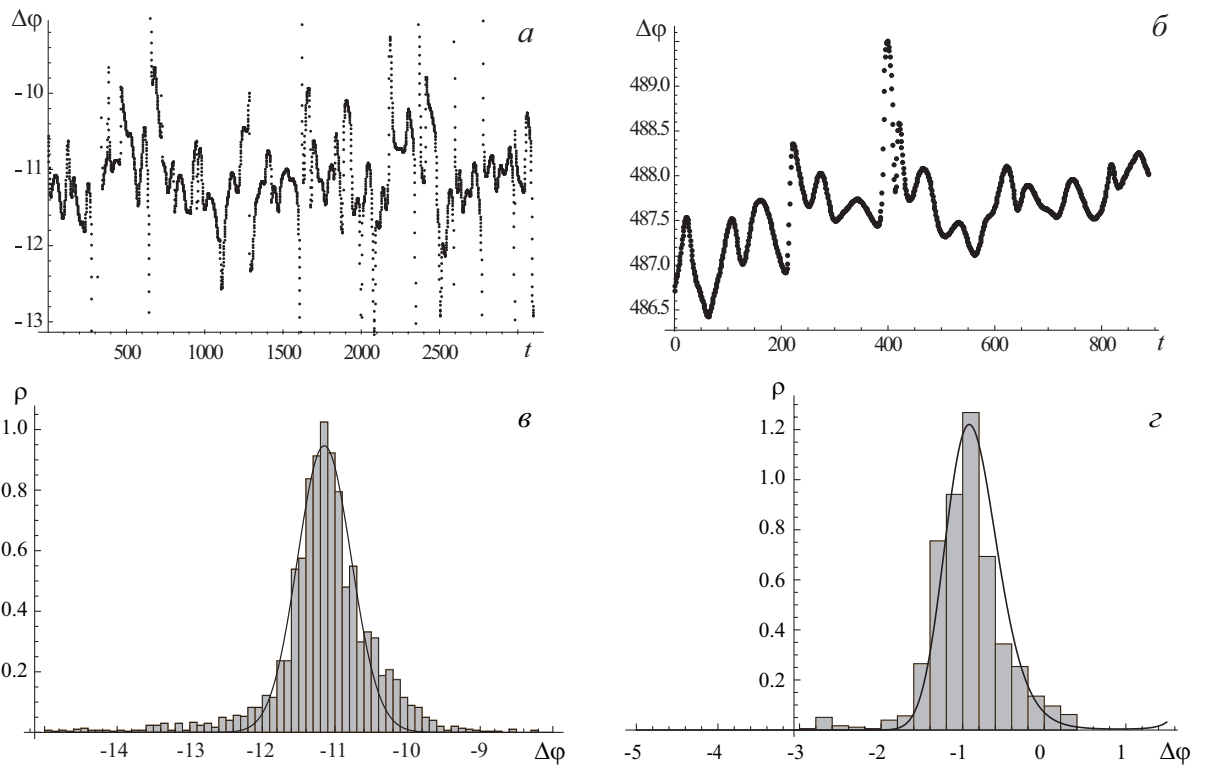


Рисунок 3.9 — Временные зависимости разности фаз между сигналами ЭЭГ, полученными с фронтальной коры и ядра таламуса R головного мозга крысы линии WAG/Rij, находящихся в свободном состоянии (а) и под действием лекарственного препарата клонидин (б), в течение пик-волновых разрядов, полученные для них распределения плотности вероятности $\rho(x)$ (в,г) и их аппроксимации закономерностью (3.15)

та. Затем она начинает уменьшаться, достигая постоянных значений, сравнимых по своей величине со значением Λ_1 для крысы в свободном состоянии, когда препарат еще не начал действовать.

Таким образом, введение лекарственного препарата клонидин увеличивает абсолютную величину условного нулевого показателя Ляпунова, а следовательно, и степень синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации в течение первых 6-12 часов действия препарата, в то время как дальнейшее действие препарата приводит к возвращению абсолютной величины рассматриваемого показателя Ляпунова к исходному значению. Схожее поведение наблюдается в случае анализа фазовой синхронизации между другими областями головного мозга крысы линии WAG/Rij.

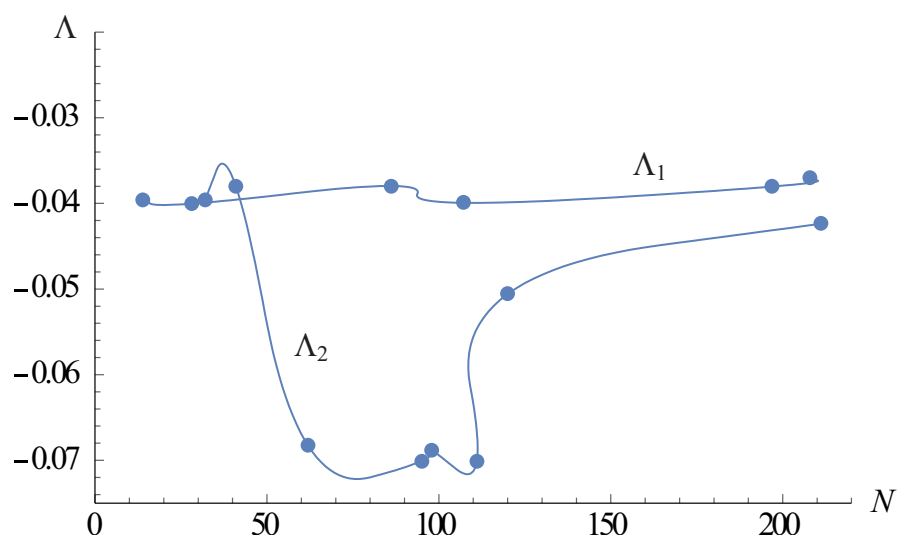


Рисунок 3.10 — Зависимости нулевого условного показателя Ляпунова от номера пик-волнового разряда на ЭЭГ крысы линии WAG/Rij в случае воздействия лекарственных препаратов (Λ_2) и в их отсутствии (Λ_1)

3.5 Анализ данных электроэнцефалограмм человека с диагностированной эпилепсией

Перейдем к изложению результатов анализа данных электроэнцефалограмм человека, страдающего эпилепсией. На рисунке 3.11 приведены (а) расположение электродов на голове пациента (рисунок взят из работы [106]) и (б, в) фрагменты двух сигналов ЭЭГ, полученных с каналов С3 и Сz головного мозга человека, страдающего эпилепсией. Видно, что, как и в случае данных ЭЭГ крысы линии WAG/Rij, анализируемые сигналы представляют собой чередование участков фоновой активности головного мозга и пик-волновых разрядов. Однако, количество пик-волновых разрядов в данном случае оказывается значительно меньше, чем при анализе данных лабораторных животных. Понятно, что, как и в случае крысы, пик-волновые разряды характеризуются высокой степенью синхронизма. В то же самое время, как показали проведенные исследования, на участках фоновой активности также возможно существование фаз синхронного поведения. Поэтому пик-волновые разряды и синхронные участки фоновой активности головного мозга человека рассматривались отдельно.

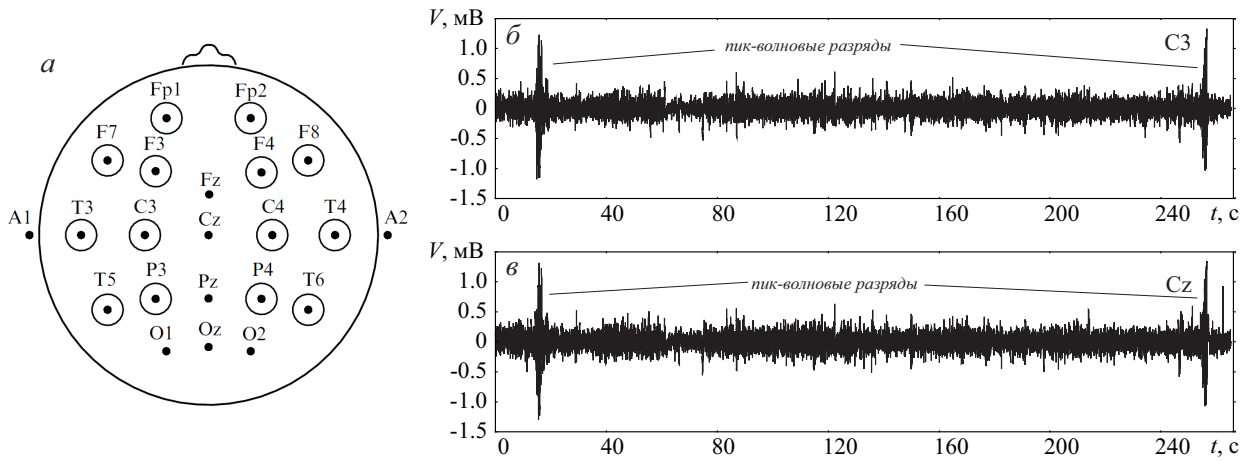


Рисунок 3.11 — Расположение электродов на голове пациента по стандартной системе размещения электродов (а). Сигналы ЭЭГ, полученные с каналов C3 (б) и Cz (в) головного мозга человека. Рисунок 3.11,а взят из работы [106] (рисунок 24)

Для синхронных участков каждого вида динамики применен предложенный метод оценки величины условного нулевого показателя Ляпунова. Рисунок 3.12 иллюстрирует зависимости разности фаз сигналов, приведенных на рисунке 3.11. На рисунках показаны только фазы синхронного поведения. Рисунок 3.12,а соответствует пик-волновым разрядам, рисунок 3.12,б – синхронным участкам фоновой активности головного мозга.

Метод применен как к пик-волновым разрядам, так и участкам фоновой активности головного мозга человека. Полученные распределения плотности вероятности разности фаз и их аппроксимация закономерностью (3.15) приведены на рисунке 3.13,а (пик-волновые разряды) и 3.13,б (синхронные участки фоновой активности), соответственно. Для пик-волновых разрядов были получены параметры аппроксимации $B \approx 56.6959$, $D \approx 0.1823$, $\varepsilon \approx 0.4683$, $A \approx 1.9171 \cdot 10^{-38}$, $\Omega \approx 0.4$; для участков фоновой активности – $B \approx 2.3026$, $D \approx 0.1823$, $\varepsilon \approx 0.4409$, $A \approx 0.0384$, $\Omega \approx 0.4$. Показатели Ляпунова для обоих типов динамики оказались отрицательными, а их отношение друг к другу вышло равным $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \approx 1.11854$, что говорит о более высокой степени синхронизма пик-волновых разрядов по сравнению с участками фоновой активности головного мозга человека.

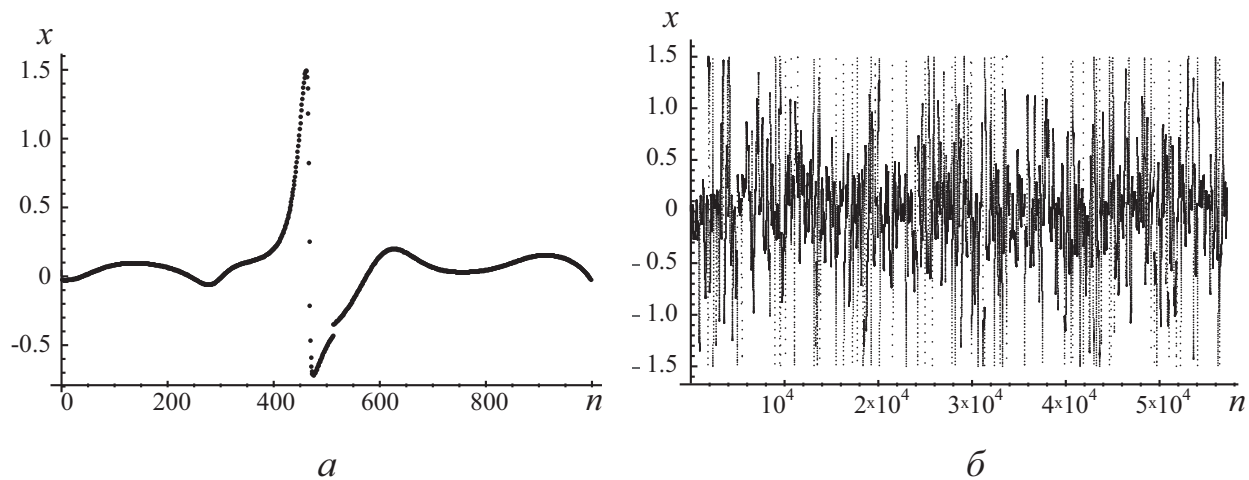


Рисунок 3.12 — Временные зависимости разности фаз между сигналами, снятыми с каналов СЗ и Cz головного мозга человека, в течение пик-волновых разрядов (а) и синхронных участков фоновой активности головного мозга человека (б)

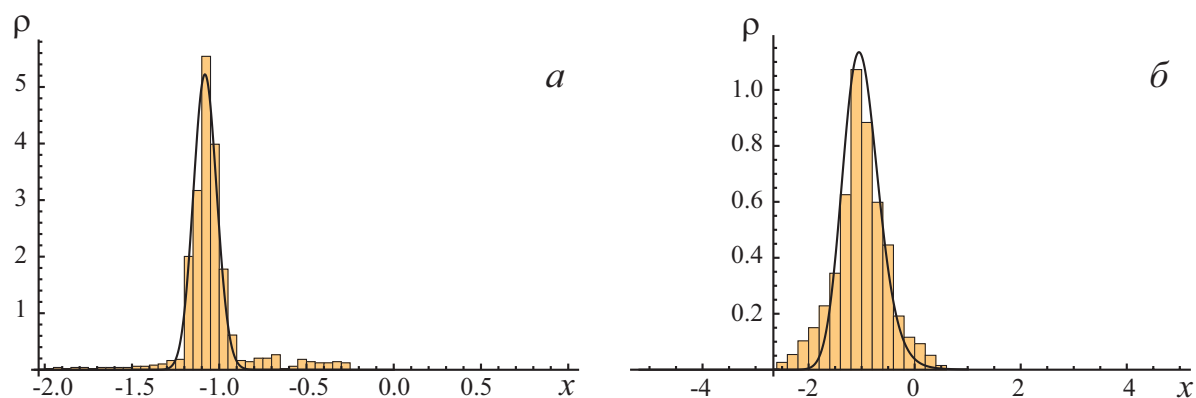


Рисунок 3.13 — Распределения плотности вероятности $\rho(x)$, полученные для пик-волновых разрядов (а) и участков фоновой активности головного мозга человека (б) (гистограммы), и их аппроксимации закономерностью (3.15)

3.6 Выводы по главе 3

В рамках третьей главы настоящей диссертационной работы изучено поведение реальных и модельных систем, находящихся в режимах фазовой или перемежающейся фазовой синхронизации. Исследованы основные статистические характеристики, присущие данному типу синхронного поведения. В качестве модели выбраны однонаправленно связанные неидентичные осцилляторы Ресслера со слабой расстройкой собственных частот. Проведено исследование поведения вероятности детектирования ламинарной фазы в одной паре и в ансамбле осцилляторов. В качестве сравнительной характеристики выступала вероятность, рассчитанная с помощью определения средней длительности ламинарных фаз в одной паре осцилляторов на всем временном ряду, а также вероятность, рассчитанная в каждой паре из ансамбля осцилляторов Ресслера на каждом шаге по времени. Два способа определения вероятности детектирования ламинарной фазы показали идентичные результаты, графики зависимостей рассматриваемых величин от параметра связи практически идентичны друг другу. Установлено, что в режиме фазовой синхронизации количество пар осцилляторов не влияет на факт существования ламинарной фазы, а в режиме перемежающейся фазовой синхронизации при достаточно большом количестве пар вероятность выходит на уровень насыщения.

Также в этой главе рассмотрен метод и представлена его модификация для оценки степени синхронизма режимов фазовой синхронизации и перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду, основанный на вычислении условного нулевого показателя Ляпунова. Установлено, что представленный способ расчета показателя Ляпунова возможен в любой системе, где наблюдается перемежаемость на границе фазовой синхронизации (перемежаемость типа I в присутствии шума или типа “игольного ушка”). Предложенный метод изучен на модельной системе (квадратичное отображение в присутствии шума). Численное значение показателя Ляпунова при расчете с помощью известного алго-

ритма и рассматриваемого метода совпало с хорошей степенью точности, что позволило применить этот метод для оценки степени синхронизма в реальных системах.

В качестве исследуемых объектов выбраны экспериментальные данные нейрофизиологической природы – сигналы электроэнцефалограмм, полученные с различных отделов головного мозга крысы линии WAG/Rij и человека, страдающего эпилепсией. Выявлена степень синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации крысы линии WAG/Rij без лекарств и под действием лекарственного препарата клонидин. Продемонстрированы законы изменения показателя Ляпунова в обоих рассматриваемых случаях. Обнаружено, что пик-волновые разряды лучше синхронизированы под действием лекарства. Проанализированы аналогичные результаты для ЭЭГ головного мозга человека, страдающего эпилепсией. Установлено, что пик-волновые разряды обладают более высокой степенью синхронизма, чем участки фоновой активности головного мозга.

Результаты выполнения данной работы подтверждают эффективность метода, который может оказать существенное влияние на дальнейшее развитие научного направления, связанного с разработкой методов анализа синхронного поведения взаимодействующих систем по временным рядам, и их применением к реальным системам радиофизической и физиологической природы. Внедрение новых методов исследования различных типов динамики головного мозга имеет важное фундаментальное и прикладное значение. В области нейрофизиологической медицины рассматриваемый метод может найти применение для диагностики различных заболеваний нервной системы.

Заключение

Таким образом, в рамках настоящей диссертационной работы решена научная задача, имеющая существенное значение для радиофизики, связанная с применением показателей Ляпунова для изучения динамики сложных связанных систем, демонстрирующих синхронное поведение. В качестве основных моделей были выбраны связанные генераторы с запаздыванием радиофизического и биологического характера, а также реальные нейрофизиологические данные. Результаты, полученные в диссертационной работе, можно разделить на два блока, каждый из которых соответствует изучению определенного синхронного режима.

Первая часть результатов относится к изучению режима обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием. В качестве основных выводов можно выделить следующие:

1. Разработан и апробирован метод для расчета спектра показателей Ляпунова в системах с запаздыванием. Объектами исследования выбраны генератор с запаздыванием и уравнение Маккея-Гласса. Выбор данных моделей объясняется тем фактом, что в этих системах при варьировании управляющих параметров число положительных показателей Ляпунова меняется в достаточно широком диапазоне, что необходимо для решения последующих задач. Для проверки достоверности результатов были также построены бифуркационные диаграммы при изменении того же управляющего параметра, что и при построении спектра показателей Ляпунова. Установлено, что изменение значений показателей Ляпунова полностью соответствует динамике изучаемой системы и смене режимов в ней, что доказывает корректную работу предложенного метода.

2. На основании разработанного метода по расчету спектра показателей Ляпунова и выбранных ранее моделей проведено исследование закономерностей установления обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с запаздыванием. Для различных комбинаций управляющих параметров, отвечающих за разное количество положительных показателей Ляпунова в исследуемых системах в отсутствие связи, построен спектр показателей Ляпунова связанных систем. Для однонаправленного типа связи установлен последовательный переход условных показателей Ляпунова в область отрицательных значений, что соответствует установлению режима обобщенной синхронизации. Пороги установления режима обобщенной синхронизации, полученные путем расчета спектра показателей Ляпунова и при помощи метода вспомогательной системы, в точности совпадают друг с другом. Аналогичная закономерность в поведении спектра показателей Ляпунова наблюдалась и для взаимного типа связи.
3. Показано, что режим обобщенной синхронизации наступает раньше в более “простых” системах, характеризующихся меньшим количеством положительных показателей Ляпунова при нулевом значении параметра связи. При соответствующем изменении управляющих параметров и увеличении изначального числа положительных показателей Ляпунова у связанных систем порог наступления обобщенной синхронизации смещается в сторону больших значений. Однако, при исследовании однонаправленно связанных систем, обнаружено, что наибольшее значение силы связи требуется в случае, когда ведущий осциллятор с меньшим количеством положительных показателей воздействует на ведомую систему с большим числом положительных показателей Ляпунова.
4. Выявлена характерная зависимость порогового значения параметра связи от величины времени запаздывания в виде увеличения его значения с последующим насыщением. Данная величина существенным образом зависит от количества положительных показате-

лей Ляпунова, реализуемых в системе, за что, в свою очередь, отвечают соответствующие управляющие параметры. Важно отметить, что данная закономерность обнаружена для обоих типов связи, и она имеет схожий характер с поведением границы полной синхронизации связанных систем с запаздыванием.

Вторая часть работы была посвящена изучению режима перемежающейся фазовой в сложных нейрофизиологических системах. В рамках этой части диссертации также было уделено внимание теоретическому исследованию вероятностных характеристик при реализации режима перемежающейся фазовой синхронизации. Получены следующие результаты:

5. Изучено поведение вероятности обнаружения ламинарной фазы в однонаправленно связанных неидентичных осцилляторах Ресслера и их ансамбле. Сравнительной характеристикой была выбрана вероятность, рассчитанная путем определения средней продолжительности ламинарных фаз в одной паре осцилляторов по всему временному ряду, а также вероятность, рассчитанная в каждой паре из ансамбля осцилляторов Ресслера на определенном временном шаге. Два метода определения вероятности обнаружения ламинарной фазы продемонстрировали одинаковые результаты: графики зависимостей рассматриваемых величин от параметра связи оказались практически идентичными друг другу. Установлено, что в режиме фазовой синхронизации количество пар осцилляторов не влияет на существование ламинарной фазы, а в режиме перемежающейся фазовой синхронизации при достаточно большом количестве пар вероятность достигает уровня насыщения.
6. Предложена модификация метода оценки степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду, основанная на вычислении условного нулевого показателя Ляпунова. Апробация проводилась с использованием квадратичного отображения и сопоставления результатов метода с работой извест-

ных алгоритмов. Продемонстрирована высокая степень работоспособности метода.

7. Предложенный метод применен для исследования перемежающегося поведения в реальных системах: к сигналам электроэнцефалограмм человека, страдающего эпилепсией, а также к ЭЭГ крыс линии WAG/Rij в случае влияния на них лекарственных препаратов и в их отсутствии.
8. Для крыс линии WAG/Rij в обоих случаях произведена оценка степени синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации. Продемонстрированы законы изменения показателя Ляпунова крысы под действием лекарства и в его отсутствии. Обнаружено, что пиковые разряды лучше синхронизированы под действием лекарства.
9. Проанализированы аналогичные результаты для ЭЭГ головного мозга человека, страдающего эпилепсией. Установлено, что пиковые разряды обладают более высокой степенью синхронизма, чем участки фоновой активности головного мозга.

В завершение работы хочу выразить искреннюю благодарность и признательность своему научному руководителю и наставнику, профессору, доктору физико-математических наук Москаленко Ольге Игоревне за многолетнюю и продуктивную совместную работу, поддержку на протяжении всего процесса обучения, а также за всестороннюю и неоценимую помощь при подготовке настоящей диссертации. Отдельную благодарность также выражаю профессору, доктору физико-математических наук Короновскому Алексею Александровичу, профессору, доктору физико-математических наук Павлову Алексею Николаевичу и профессору, доктору физико-математических наук Стрелковой Галине Ивановне за интерес, проявленный к данной работе, и уделенное ей время, за конструктивные замечания и обсуждения. Особую признательность хочу выразить коллегам, результаты которых послужили фундаментом к настоящей диссертации: профессору, доктору

физико-математических наук Храмову Александру Евгеньевичу; доценту, кандидату-физико-математических наук Куровской Марии Константиновне; доценту, кандидату-физико-математических наук Журавлеву Максиму Олеговичу; кандидату физико-математических наук Павлову Александру Сергеевичу и др. Наконец, выражаю глубокую благодарность профессорско-преподавательскому составу факультета нелинейных процессов СГУ (ныне института физики) за полученные знания и дружественную атмосферу.

Список литературы

- [1] А. С. Пиковский, М. Г. Розенблюм, Ю. Куртс, Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление, М.: Техносфера, 2003.
- [2] S. Boccaletti, J. Kurths, G. V. Osipov, D. L. Valladares, C. S. Zhou, The synchronization of chaotic systems, *Physics Reports* 366 (2002) 1–101.
- [3] В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, Г. И. Стрелкова, Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний, М.-Ижевск: Научно-издательский центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008.
- [4] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.* 64 (8) (1990) 821–824.
- [5] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* 78 (22) (1997) 4193–4196.
- [6] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, H. D. I. Abarbanel, Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems, *Phys. Rev. E* 51 (2) (1995) 980–994.
- [7] В. С. Анищенко, Д. Э. Постнов, Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов, *Письма в ЖТФ* 14 (6) (1988) 569–573.
- [8] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, Phase synchronization of chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* 76 (11) (1996) 1804–1807.

- [9] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, An approach to chaotic synchronization, *Chaos* 14 (3) (2004) 603–610.
- [10] A. Kittel, P. J., P. K., Generalized synchronization of chaos in electronic circuit experiments, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 112 (3) (1998) 459–471.
- [11] А. В. Стародубов, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Ю. Д. Жарков, Б. С. Дмитриев, Исследование обобщенной синхронизации в системе двух связанных клистронных автогенераторов хаоса, *Письма в ЖТФ* 33 (14) (2007) 58–65.
- [12] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, P. V. Popov, I. S. Rempen, Chaotic synchronization of coupled electron-wave systems with backward waves, *Chaos* 15 (1) (2005) 013705.
- [13] Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов, О синхронизации хаотических автоколебаний в распределенной системе “винтовой электронный поток — встречная электромагнитная волна”, *Радиотехника и электроника* 48 (1) (2003) 116–124.
- [14] J. Y. Chen, K. W. Wong, L. M. Cheng, J. W. Shuai, A secure communication scheme based on the phase synchronization of chaotic systems, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 13 (2) (2003) 508–514.
- [15] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации, *Успехи физических наук* 179 (12) (2009) 1281–1310.
- [16] J. Terry, G. VanWiggeren, Chaotic communication using generalized synchronization, *Chaos, Solitons and Fractals* 12 (2001) 145–152.
- [17] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, П. В. Попов, А. Е. Храмов, Способ скрытой передачи информации, основанный на явлении обобщенной синхронизации, *Известия РАН. Серия физическая* 72 (1) (2008) 143–147.

- [18] В. И. Пономаренко, А. С. Караваев, Е. Е. Глуховская, М. Д. Прохоров, Система скрытой передачи информации на основе системы с запаздыванием с переключаемым временем задержки, Письма в ЖТФ 38 (1) (2012) 103–110.
- [19] R. Roy, K. S. Thornburg, Experimental synchronization of chaotic lasers, Phys. Rev. Lett. 72 (1994) 2009–2012.
- [20] S. Schulz, I. Grguras, C. e. a. Behrens, Femtosecond all-optical synchronization of an X-ray free-electron laser, Nature Communications 6 (5938).
- [21] D. Y. Tang, Generalized synchronization of chaos in a laser, AIP Conference Proceedings 622 (1) (2002) 407–426.
- [22] A. Uchida, K. Higa, T. Shiba, S. Yoshimori, F. Kuwashima, H. Iwasawa, Generalized synchronization of chaos in He-Ne lasers, Phys. Rev. E 68 (1) (2003) 016215.
- [23] I. Reidler, M. Nixon, Y. Aviad, S. Guberman, A. Friesem, M. Rosenbluh, N. Davidson, I. Kanter, Coupled lasers: Phase versus chaos synchronization, Optics letters 38 (2013) 4174–7.
- [24] J. M. Weiner, K. C. Cox, J. G. Bohnet, J. K. Thompson, Phase synchronization inside a superradiant laser, Phys. Rev. A 95 (2017) 033808.
- [25] М. Д. Прохоров, В. И. Пonomarenko, В. И. Gridnev, М. В. Bodrov, А. В. Bespyatov, Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system, Phys. Rev. E 68 (2003) 041913.
- [26] N. F. Rulkov, Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map, Phys. Rev. E 65 (2002) 041922.
- [27] О. В. Sosnovtseva, А. Н. Pavlov, Е. Mosekilde, N. Н. Holstein-Rathlou, Synchronization phenomena in multimode dynamics of coupled nephrons, Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика 11 (3) (2003) 133–147.

- [28] P. A. Tass, et al., Detection of $n:m$ phase locking from noisy data: Application to magnetoencephalography, *Phys. Rev. Lett.* 81 (15) (1998) 3291–3294.
- [29] V. S. Anishchenko, A. G. Balanov, N. B. Janson, N. B. Igosheva, G. V. Bordyugov, Entrainment between heart rate and weak nonlinear forcing, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 10 (10) (2000) 2339–2348.
- [30] D. Sato, L.-H. Xie, A. A. Sovari, D. X. Tran, N. Morita, F. Xie, H. Karagueuzian, A. Garfinkel, J. N. Weiss, , Z. Qu, Synchronization of chaotic early afterdepolarizations in the genesis of cardiac arrhythmias, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 106 (9) (2009) 2983–2988.
- [31] F. Mormann, R. G. Andrzejak, T. Kreuz, C. Rieke, P. David, C. E. Elger, K. Lehnertz, Automated detection of a preseizure state based on a decrease in synchronization in intracranial electroencephalogram recordings from epilepsy patients, *Phys. Rev. E* 67 (2003) 021912.
- [32] О. В. Масленников, В. И. Некоркин, Адаптивные динамические сети, *Усп. физ. наук* 187 (7) (2017) 745–756.
- [33] А. Е. Храмов, Н. С. Фролов, В. А. Максименко, С. А. Куркин, В. Б. Казанцев, А. Н. Писарчик, Функциональные сети головного мозга: от восстановления связей до динамической интеграции, *Усп. физ. наук* 191 (6) (2021) 614–650.
- [34] В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, и др., Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах, М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [35] A. S. Pikovsky, G. V. Osipov, M. G. Rosenblum, M. Zaks, J. Kurths, Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization, *Phys. Rev. Lett.* 79 (1) (1997) 47–50.

- [36] K. J. Lee, Y. Kwak, T. K. Lim, Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* 81 (2) (1998) 321–324.
- [37] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, S. Boccaletti, Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization, *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006) 114101.
- [38] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators, *Europhysics Lett.* 70 (2) (2005) 169–175.
- [39] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. A. Pivovarov, V. A. Khanadeev, A. E. Hramov, A. N. Pisarchik, Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization, *Physical Review E* 102 (1) (2020) 012205.
- [40] S. Boccaletti, D. L. Valladares, Characterization of intermittent lag synchronization, *Phys. Rev. E* 62 (5) (2000) 7497–7500.
- [41] M. O. Zhuravlev, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. A. Ovchinnikov, A. E. Hramov, Ring intermittency near the boundary of the synchronous time scales of chaotic oscillators, *Phys. Rev. E* 83 (2011) 027201.
- [42] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Перемежающееся поведение на границе синхронизации временных масштабов, *ЖТФ* 81 (7) (2011) 7–12.
- [43] W. H. Kye, C. M. Kim, Characteristic relations of type-I intermittency in the presence of noise, *Phys. Rev. E* 62 (5) (2000) 6304–6307.
- [44] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, O. I. Moskalenko, Type-I intermittency with noise versus eyelet intermittency, *Phys. Lett. A* 375 (2011) 1646–1652.

- [45] P. Bob, M. Palus, M. Susta, K. Glaslova, EEG phase synchronization in patients with paranoid schizophrenia, *Neuroscience Letters* 447 (2008) 73–77.
- [46] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, I. S. Midzyanovskaya, E. Sitnikova, C. M. Rijn, On-off intermittency in time series of spontaneous paroxysmal activity in rats with genetic absence epilepsy, *Chaos* 16 (2006) 043111.
- [47] W. M. Macek, S. Redaelli, Estimation of the entropy of the solar wind flow, *Phys. Rev. E* 62 (5) (2000) 6496–6504.
- [48] R. Porcher, G. Thomas, Estimating Lyapunov exponents in biomedical time series, *Phys. Rev. E* 64 (1) (2001) 010902(R).
- [49] K. Thamilmaran, D. V. Senthilkumar, A. Venkatesan, M. Lakshmanan, Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced electronic circuit, *Phys. Rev. E* 74 (2006) 036205.
- [50] T. E. Karakasidis, A. Fragkou, A. Liakopoulos, System dynamics revealed by recurrence quantification analysis: Application to molecular dynamics simulations, *Phys. Rev. E* 76 (2) (2007) 021120.
- [51] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, V. A. Maximenko, O. I. Moskalenko, Computation of the spectrum of spatial Lyapunov exponents for the spatially extended beam-plasma systems and electron-wave devices, *Physics of Plasmas* 19 (8) (2012) 082302.
- [52] S. P. Kuznetsov, D. I. Trubetskov, Chaos and hyperchaos in a backward-wave oscillator, *Radiophysics and Quantum Electronics* 47 (5,6) (2004) 341–355.
- [53] S. P. Kuznetsov, Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 144101.

- [54] K. Pyragas, Weak and strong synchronization of chaos, *Phys. Rev. E* 54 (5) (1996) R4508–R4511.
- [55] D. S. Goldobin, A. S. Pikovsky, Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise, *Phys. Rev. E* 71 (4) (2005) 045201(R).
- [56] D. S. Goldobin, A. S. Pikovsky, Synchronization of self-sustained oscillators by common white noise, *Physica A* 351 (2005) 126–132.
- [57] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators?, *Phys. Lett. A* 354 (5–6) (2006) 423–427.
- [58] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, Zero Lyapunov exponent in the vicinity of the saddle-node bifurcation point in the presence of noise, *Phys. Rev. E* 78 (2008) 036212.
- [59] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, S. Boccaletti, Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks, *Phys. Rev. E* 86 (2012) 036216.
- [60] K. Pyragas, Conditional Lyapunov exponents from time series, *Phys. Rev. E* 56 (5) (1997) 5183–5188.
- [61] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, Generalized synchronization: a modified system approach, *Phys. Rev. E* 71 (6) (2005) 067201.
- [62] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, O. I. Moskalenko, Analytical expression for zero Lyapunov exponent of chaotic noised oscillators, *Chaos, Solitons & Fractals* 78 (2015) 118–123.
- [63] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Lyapunov exponent corresponding to enslaved phase dynamics: Estimation from time series, *Phys. Rev. E* 92 (2015) 012913.

- [64] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, S. A. Shurygina, A. E. Hramov, Generalized synchronization in discrete maps. New point of view on weak and strong synchronization, *Chaos, Solitons and Fractals* 46 (2013) 12–18.
- [65] H. D. I. Abarbanel, N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach, *Phys. Rev. E* 53 (5) (1996) 4528–4535.
- [66] A. A. Короновский, П. В. Попов, А. Е. Храмов, Обобщенная хаотическая синхронизация в связанных уравнениях Гинзбурга-Ландау, *ЖЭТФ* 130 (4(10)) (2006) 748–764.
- [67] O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, A. A. Ovchinnikov, Effect of noise on generalized synchronization of chaos: theory and experiment, *Europhysics Journal B* 82 (1) (2011) 69–82.
- [68] Z. Zheng, G. Hu, Generalized synchronization versus phase synchronization, *Phys. Rev. E* 62 (6) (2000) 7882–7885.
- [69] F. S. San Roman de, S. Boccaletti, D. Maza, H. Mansini, Weak synchronization of chaotic coupled map lattices, *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 3639–3642.
- [70] J. Y. Chen, K. W. Wong, Z. X. Chen, S. C. Xu, J. W. Shuai, Phase synchronization in discrete chaotic systems, *Phys. Rev. E* 61 (3) (2000) 2559–2562.
- [71] L. Chunguang, C. Guanrong, Phase synchronization in small-world networks of chaotic oscillators, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 341 (2004) 73–79.
- [72] P. S. Skardal, R. Sevilla-Escoboza, V. P. Vera-Avila, J. M. Buldu, Optimal phase synchronization in networks of phase-coherent chaotic oscillators, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 27 (1) (2017) 013111.

- [73] Г. В. Осипов, Синхронизация в неоднородных сетях осцилляторов, Нижний Новгород, 2014.
- [74] С. П. Кузнецов, Динамический хаос, серия “Современная теория колебаний и волн”, М.: Физматлит, 2001.
- [75] E. Ott, Chaos in Dynamical Systems, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [76] Г. Шустер, Детерминированный хаос, М.: Мир, 1988.
- [77] О. И. Москаленко, А. С. Павлов, Способ оценки нулевого условного показателя Ляпунова по временному ряду, Письма в ЖТФ 40 (12) (2014) 66–72.
- [78] А. С. Павлов, Границы возникновения режимов обобщенной и фазовой синхронизации и особенности поведения показателей Ляпунова вблизи этих границ в однонаправлено связанных потоковых системах, Ph.D. thesis, Physics (2014).
- [79] А. Д. Колоскова, О. И. Москаленко, Определение степени синхронности перемежающейся фазовой синхронизации по данным электроэнцефалограмм человека, Письма в ЖТФ 43 (10) (2017) 102–110.
- [80] O. I. Moskalenko, A. D. Koloskova, M. O. Zhuravlev, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Intermittent phase synchronization in human epileptic brain, Proc. SPIE 10063 (2017) 1006316–1006316.
- [81] А. Д. Колоскова, Определение степени синхронности перемежающейся фазовой синхронизации по данным ЭЭГ лабораторных животных, Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика 25 (5) (2017) 26–34.
- [82] А. Д. Колоскова, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием, Письма в ЖТФ 44 (9) (2018) 19–25.

- [83] А. Д. Плотникова, О. И. Москаленко, Особенности обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием, *Журнал технической физики* 45 (2019) 31.
- [84] А. Д. Плотникова, О. И. Москаленко, Обобщенная синхронизация в однонаправлено связанных системах с запаздыванием, *Изв. РАН. Сер. физическая* 84 (1) (2020) 87–89.
- [85] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. D. Plotnikova, Peculiarities of generalized synchronization in unidirectionally and mutually coupled time-delayed systems, *Chaos, Solitons & Fractals* 148 (2021) 111031.
- [86] А. Д. Колоскова, О. И. Москаленко, Оценка степени перемежающейся фазовой синхронизации в реальной нейрофизиологической системе, in: *Материалы 11 Международной школы-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур”*, 2016, pp. 91–92.
- [87] А. Д. Плотникова, О. И. Москаленко, Влияние времени запаздывания на установление обобщенной синхронизации в системах с отклоняющимся аргументом, in: *Материалы 12 Международной школы-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур”*, 2019, pp. 90–91.
- [88] А. Д. Колоскова, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Разработка и апробация метода расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием, in: *XIII научная школа “Нелинейные волны – 2018”*. Тезисы докладов молодых ученых, 2018, pp. 70–72.
- [89] А. Д. Колоскова, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Общие закономерности установления обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием при различных типах связи, in: *XIV научная школа “Нелинейные волны – 2020”*. Тезисы докладов молодых ученых, 2020, pp. 195–196.

- [90] А. Д. Колоскова, Оценка степени перемежающейся фазовой синхронизации по временным рядам: модельные системы и реальные нейрофизиологические данные, in: Труды Всероссийской школы-семинара “Волны-2017” им.А.П.Сухорукова. Нелинейная динамика, 2017, pp. 32–35.
- [91] А. Д. Плотникова, О. И. Москаленко, Закономерности установления режима обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием, in: Труды Всероссийской школы-семинара “Волны-2019” им.А.П.Сухорукова. Нелинейная динамика, 2017, pp. 25–26.
- [92] А. Д. Колоскова, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Применение показателей Ляпунова для диагностики сложных колебательных режимов и синхронного поведения в системах с запаздыванием, in: Сборник трудов XIII Всероссийской конференции молодых ученых “Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”, 2018, pp. 114–115.
- [93] А. Д. Колоскова, Определение степени синхронности перемежающейся фазовой синхронизации по данным электроэнцефалограмм человека, in: Научные исследования студентов Саратовского государственного университета 2017, 2017, pp. 35–36.
- [94] А. Д. Колоскова, Применение показателей Ляпунова для диагностики сложных колебательных режимов и синхронного поведения в системах с запаздыванием, in: Научные исследования студентов Саратовского государственного университета 2018, 2018, pp. 32–33.
- [95] А. Д. Плотникова, Закономерности установления режима обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием, in: Научные исследования студентов Саратовского государственного университета 2019, 2019, pp. 37–38.
- [96] А. Д. Плотникова, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Программа для расчета вероятности детектирования фазовой синхро-

- низации по ансамблю с возможностью управления количеством осцилляторов, Программа для ЭВМ, № регистрации 2020661003 (2020).
- [97] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Д. Плотникова, Программа для детектирования обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием, Программа для ЭВМ, № регистрации 2020661004 (2020).
- [98] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Д. Плотникова, Программа для расчета спектра показателей Ляпунова в системах с запаздыванием, Программа для ЭВМ, № регистрации 2020661348 (2020).
- [99] Л. Н. Белых, А. А. Л., Моделирование инфекционных заболеваний, Вычислительные процессы и системы 3 (1985) 12–79.
- [100] Р. Т. Янушевский, Управление объектами с запаздыванием, М.:Наука, 1978.
- [101] К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, М.-Л.:Гостехиздат, 1952.
- [102] Ю. Н. Работнов, Элементы наследственной механики твердых тел, М.:Наука, 1977.
- [103] У. А. Дэй, Термодинамика простых сред с памятью, М.:Мир, 1974.
- [104] Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков, Математические модели динамических систем с запаздыванием, Екатеринбург.: Издательство Уральского университета, 2012.
- [105] С. В. Божокин, И. М. Сулова, Повторное вейвлет-преобразование нестационарного сигнала с частотной модуляцией, ЖТФ 83 (12) (2013) 26–32.
- [106] А. Н. Павлов, А. Е. Храмов, А. А. Короновский, Е. Ю. Ситникова, В. А. Макаров, А. А. Овчинников, Вейвлет-анализ в нейродинамике, УФН 182 (9) (2012) 905–939.

- [107] A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, V. A. Maximenko, O. I. Moskalenko, K. N. Alekseev, M. T. Greenaway, T. M. Fromhold, A. G. Balanov, Lyapunov stability of charge transport in miniband semiconductor superlattices, *Phys. Rev. B* 88 (2013) 165304.
- [108] В. А. Максименко, Д. Е. Постнов, А. А. Короновский, В. В. Макаров, А. Е. Храмов, Эволюция пространственно-временного хаоса в дискретно-непрерывной активной среде, *Письма в ЖТФ* 43 (12) (2017) 96–103.
- [109] А. А. Балякин, Е. В. Блохина, Вычисление спектра показателей Ляпунова для распределенных систем радиофизической природы, *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика* 16 (2) (2008) 87–110.
- [110] J. Farmer, Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system, *Physica D* 4 (3) (1982) 366.
- [111] A. Cenys, A. Tamasevicius, G. Mykolaitis, S. Blumeliene, Coupled VHF delay line chaos generators, in: *Proceedings of the first international workshop on the noise radar technology: NRTW-2002, 2002*, p. 136.
- [112] А. А. Балякин, Н. М. Рыскин, Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью, *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* 15 (6) (2007) 3.
- [113] В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров, Выделение информационной компоненты хаотического сигнала системы с запаздыванием, *Письма в ЖТФ* 28 (16) (2002) 37–44.
- [114] А. С. Караваев, В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров, Восстановление моделей скалярных систем с запаздыванием по временным рядам, *Письма в ЖТФ* 27 (10) (2001) 43–51.

- [115] M. C. Mackey, L. Glass, Oscillations and chaos in physiological control systems, *Science* 197 (1977) 287.
- [116] L. Junges, J. Gallas, Intricate routes to chaos in the Mackey–Glass delayed feedback system, *Physics Letters A* 376 (30) (2012) 2109–2116.
- [117] P. Parmananda, Generalized synchronization of spatiotemporal chemical chaos, *Phys. Rev. E* 56 (1997) 1595–1598.
- [118] E. A. Rogers, R. Kalra, R. D. Schroll, A. Uchida, D. P. Lathrop, R. Roy, Generalized synchronization of spatiotemporal chaos in a liquid crystal spatial light modulator, *Phys.Rev.Lett.* 93 (2004) 084101.
- [119] B. S. Dmitriev, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, A. V. Starodubov, D. I. Trubetskov, Y. D. Zharkov, First experimental observation of generalized synchronization phenomena in microwave oscillators, *Physical Review Letters* 102 (7) (2009) 074101.
- [120] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Generalized synchronization of chaos for secure communication: Remarkable stability to noise, *Phys. Lett. A* 374 (2010) 2925–2931.
- [121] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, P. V. Popov, Generalized synchronization in coupled Ginzburg–Landau equations and mechanisms of its arising, *Phys. Rev. E* 72 (3) (2005) 037201.
- [122] U. Parlitz, L. Junge, W. Lauterborn, L. Kocarev, Experimental observation of phase synchronization, *Phys. Rev. E* 54 (2) (1996) 2115–2117.
- [123] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization, *Phys. Rev. E* 84 (3) (2011) 037201.

- [124] O. Moskalenko, A. Koronovskii, A. Hramov, Inapplicability of an auxiliary-system approach to chaotic oscillators with mutual-type coupling and complex networks, *Phys. Rev. E* 87 (2013) 064901.
- [125] P. K., Synchronization of coupled time-delay systems: Analytical estimations, *Phys Rev E* 58 (1998) 3067–3071.
- [126] L. Dong, Multiple attractors and generalized synchronization in delayed Mackey-Glass systems, *Chinese Physics B* 17 (2008) 4009–4013.
- [127] M. Zhan, X. Wang, X. Gong, G. W. Wei, C. H. Lai, Complete synchronization and generalized synchronization of one-way coupled time-delay systems, *Phys. Rev. E* 68 (3) (2003) 036208.
- [128] Z. Zheng, X. Wang, M. C. Cross, Transitions from partial to complete generalized synchronizations in bidirectionally coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 056211.
- [129] G. V. Osipov, A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, J. Kurths, Phase synchronization effect in a lattice of nonidentical Rössler oscillators, *Phys. Rev. E* 55 (3) (1997) 2353–2361.
- [130] А. И. Фомин, Т. Е. Вадивасова, О. В. Сосновцева, В. С. Анищенко, Вынужденная фазовая синхронизация цепочки хаотических осцилляторов, *Известия вузов. ПНД* 8 (2000) 103–112.
- [131] E. H. Park, M. A. Zaks, J. Kurths, Phase synchronization in the forced Lorenz system, *Phys. Rev. E* 60 (1999) 6627–6638.
- [132] A. Pujol-Pere, O. Calvo, M. A. Matias, J. Kurths, Experimental study of imperfect phase synchronization in the forced Lorenz system, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 13 (2003) 319–326.
- [133] J.-P. Lachaux, E. Rodriguez, J. Martinerie, F. J. Varela, Measuring phase synchrony in brain signals, *Human Brain Mapping* 8 (1999) 194–208.

- [134] F. Mormann, K. Lehnertz, C. E. David, P. ans Elger, Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 144 (2000) 358–369.
- [135] J. Fell, N. Axmacher, The role of phase synchronization in memory processes, *Nature Reviews Neuroscience* 12 (2011) 105–118.
- [136] S. Boccaletti, E. Allaria, R. Meucci, F. T. Arecchi, Experimental characterization of the transition to phase synchronization of chaotic CO_2 laser systems, *Phys. Rev. Lett.* 89 (19) (2002) 194101.
- [137] B. Blasius, A. Huppert, L. Stone, Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems, *Nature* 399 (1999) 354–359.
- [138] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, 2001.
- [139] V. S. Anishchenko, V. Astakhov, A. Neiman, T. E. Vadivasova, L. Schimansky-Geier, *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Developments*, Springer–Verlag, Heidelberg, 2001.
- [140] O. E. Rössler, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A* 57 (5) (1976) 397–398.
- [141] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, G. V. Osipov, J. Kurths, Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving, *Physica D* 104 (4) (1997) 219–238.
- [142] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, J. Kurths, Phase synchronization in regular and chaotic systems, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 10 (10) (2000) 2291–2305.

- [143] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, Two types of phase synchronization destruction, *Phys. Rev. E* 75 (3) (2007) 036205.
- [144] А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Два сценария разрушения режима хаотической фазовой синхронизации, *ЖТФ* 77 (1) (2007) 21–29.
- [145] A. S. Pikovsky, M. Zaks, M. G. Rosenblum, G. V. Osipov, J. Kurths, Phase synchronization of chaotic oscillators in terms of periodic orbits, *Chaos* 7 (4) (1997) 680–687.
- [146] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, Generalized synchronization onset, *Europhysics Letters* 72 (6) (2005) 901–907.
- [147] М. О. Журавлев, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, Метод выделения ламинарных и турбулентных фаз в перемежающихся временных реализациях систем, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации, *Письма в ЖТФ* 36 (10) (2010) 31–38.
- [148] P. Manneville, Y. Pomeau, Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems, *Physica D* 1 (2) (1980) 167–241.
- [149] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, A. A. Ovchinnikov, S. Boccaletti, Length distribution of laminar phases for type-I intermittency in the presence of noise, *Phys. Rev. E* 76 (2) (2007) 026206.
- [150] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Теоретическое и численное исследование “перемежаемости перемежаемостей” в связанных хаотических системах, *Письма в ЖТФ* 39 (14) (2013) 1–7.
- [151] А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Перемежаемость типа I в присутствии шума и перемежаемость игольного ушка, *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика* 18 (1) (2010) 24–36.

- [152] М. К. Куровская, Распределение длительностей ламинарных фаз при перемежаемости “игольного ушка”, Письма в ЖТФ 34 (24) (2008) 48–54.
- [153] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, М. О. Журавлев, Оценка степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду (модельные системы и нейрофизиологические данные), Письма в ЖЭТФ 103 (8) (2016) 606–610.
- [154] A. Wolf, J. Swift, H. L. Swinney, J. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D* 16 (1985) 285.
- [155] J. P. Eckmann, S. O. Kamphorst, Lyapunov exponents from time series, *Phys. Rev. A* 34 (6) (1986) 4971–4979.
- [156] R. Brown, P. Bryant, H. D. I. Abarbanel, Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series, *Phys. Rev. A* 43 (6) (1991) 2787–2806.
- [157] Ю. А. Передерий, Метод оценки спектра ляпуновских показателей по временной реализации, *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* 20 (1) (2012) 99–104.
- [158] T. Horita, T. Yamada, H. Fujisaka, Noisy sine-circle map as a model of chaotic phase synchronization, *Progress of Theoretical Physics Supplement* 161 (2006) 199–203.
- [159] M. H. Jensen, P. Bak, T. Bohr, Complete devil’s staircase, fractal dimension, and universality of mode–locking structure in the circle map, *Phys. Rev. Lett.* 50 (21) (1983) 1637–1639.
- [160] O. Afsar, U. Tirnakli, Probability densities for the sums of iterates of the sine-circle map in the vicinity of the quasiperiodic edge of chaos, *Physical Review E* 82 (4) (2010) 046210.
- [161] E. Sitnikova, A. E. Hramov, V. V. Grubov, A. A. Ovchinnikov, A. A. Koronovsky, On–off intermittency of thalamo-cortical oscillations

in the electroencephalogram of rats with genetic predisposition to absence epilepsy, *Brain Research* 1436 (2012) 147–156.

- [162] A. M. Coenen, E. L. Van Luijtelaar, The WAG/Rij rat model for absence epilepsy: age and sex factors, *Epilepsy Res.* 1 (5) (1987) 297–301.