

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи



БУХ Андрей Владимирович

**АВТОВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ, ВКЛЮЧАЯ
ХИМЕРНЫЕ, В ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ
СИСТЕМАХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ.
СИНХРОНИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ**

1.3.4. – Радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

доктор физико-математических наук,

профессор АНИЩЕНКО В.С.

доктор физико-математических наук,

доцент СТРЕЛКОВА Г.И.

Саратов – 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. Пространственно-временные структуры в одномерных ансамблях с нелокальной связью	22
1.1 Введение	22
1.2 Модель кольца связанных осцилляторов в общем виде	25
1.3 Химерные структуры в кольце генераторов Анищенко-Астахова	27
1.3.1 Карты режимов на плоскости параметров связи	30
1.3.2 Характеристики хаотических химерных состояний	33
1.3.3 Механизм формирования химерных состояний различного типа и влияние начальных условий	37
1.4 Влияние топологии связей на динамику ансамблей нелинейных осцилляторов	40
1.4.1 Кольцо связанных логистических отображений	41
1.4.2 Кольцо связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо	44
1.4.3 Кольцо связанных отображений Курбажа-Некоркина	48
1.5 Влияние шума на химерные состояния разных типов	50
1.5.1 Модели и методы анализа устойчивости	51
1.5.2 Устойчивость химерных состояний разного типа	52
1.5.3 Индуцированный шумом переход от фазовой к амплитудной химере	54
1.5.4 Индуцирование амплитудной химеры шумом	56
1.5.5 Индуцированный переход от амплитудной к фазовой химере	58
1.6 Синхронизация химерных состояний в двух связанных кольцах	59
1.7 Выводы по первой главе	68

Глава 2. Спиральные и концентрические волны в двумерных ансамблях	71
2.1 Введение	71
2.2 Модель решетки связанных осцилляторов	72
2.3 Двумерные структуры в случае локальной связи	78
2.3.1 Волновые структуры в решетке генераторов ван дер Поля .	79
2.3.2 Волновые режимы в решетке осцилляторов ФитцХью-Нагумо	85
2.3.3 Волновые структуры в решетке отображений Курбажа-Некоркина	87
2.4 Двумерные структуры в случае нелокальной связи	89
2.4.1 Рождение химер в решетке генераторов ван дер Поля с нелокальной связью	89
2.4.2 Роль уединенных состояний в формировании пространственно-временных структур в решетке генераторов ван дер Поля	100
2.4.3 Влияние нелокальности на режимы в решетке осцилляторов ФитцХью-Нагумо	111
2.4.4 Эффект нелокальности связи в решетках отображений Курбажа-Некоркина	113
2.4.5 Эффект нелокальности связи в решетке отображений Рупкова	115
2.5 Выводы по второй главе	116
Глава 3. Синхронизация автоволновых структур в связанных двумерных ансамблях	120
3.1 Введение	120
3.2 Модель связанных решеток нелинейных осцилляторов	121
3.2.1 Две связанные решетки генераторов ван дер Поля	124

3.2.2	Двухслойная сеть решеток связанных отображений Курбажа-Некоркина	125
3.3	Вынужденная синхронизация структур в двух связанных решетках	126
3.3.1	Синхронизация структур разного типа в связанных решетках генераторов ван дер Поля	126
3.3.2	Синхронизация концентрических структур в связанных решетках генераторов ван дер Поля	134
3.3.3	Механизм вынужденной синхронизации волновых структур в связанных решетках генераторов ван дер Поля	137
3.3.4	Синхронизация спиральных волн в связанных решетках отображений Курбажа-Некоркина	139
3.4	Взаимная синхронизация волновых режимов в двух связанных решетках	143
3.4.1	Взаимодействие концентрических волновых структур в связанных решетках генераторов ван дер Поля	143
3.4.2	Взаимодействие спиральных волн в связанных решетках отображений Курбажа-Некоркина	154
3.5	Противофазная удаленная синхронизация волновых структур в трехслойной неоднородной сети нелинейных осцилляторов	159
3.6	Выводы по третьей главе	173
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	177
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	183

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследуемой проблемы

Автоволновые процессы, которые могут возникать в непрерывных активных средах или в ансамблях связанных динамических систем, на протяжении уже нескольких десятков лет представляют собой фундаментально-научную проблему в теории колебаний и волн [1–8]. Термин «автоволны» для активных сред был введен по аналогии с термином «автоколебания» для автогенераторов. Одно из первых определений автоволны звучит следующим образом: «Под автоволнами принято сейчас понимать самоподдерживающийся волновой процесс в неравновесной среде, остающийся неизменным при достаточно малых изменениях как начальных, так и граничных условий». Примерами могут служить волны горения, распространения туннельных переходов в полупроводниках и нервные импульсы, которые участвуют в управлении и передаче информации в биологических системах [2]. К автоволновым процессам относятся колебательные химические реакции в активных средах (реакция Белоусова-Жаботинского), распространение импульса возбуждения по нервному волокну, волны химической сигнализации в колониях некоторых микроорганизмов, популяционные автоволны, распространение эпидемий и генов и многие другие явления [1, 9].

Математическими моделями для описания автоволн чаще всего служат уравнения диффузионного типа с активной нелинейностью [2]. Анализ динамики моделей часто проводится методом компьютерного моделирования, который предоставляет уникальные возможности для исследования автоволновых процессов. Наиболее распространенными являются модели ван дер Поля (предложенная ван дер Полем в 1920-х гг.), Рёсслера [10], ФитцХью-

Нагумо (простейшая модель активной среды и различные её варианты) [11, 12], Ходжкина-Хаксли (нервного импульса) [13], Хиндмарш-Розе [14]. Также существует множество моделей миокарда: Биллера-Рейтера [15], Нобла [16], Фентона-Кармы [17] и другие [18]. Перечисленные осцилляторы задаются системами дифференциальных уравнений и большинство из них имеют высокую размерность фазового пространства, что может привести к затруднениям при исследовании их в достаточно больших связанных ансамблях. В этом случае использование моделей с дискретным временем заметно упрощает анализ сложных систем. Простейшей дискретной моделью, демонстрирующей хаотическую динамику, является логистическое отображение [19], которое моделирует широкий класс систем, характеризующийся переходом к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [20]. Известны также простые дискретные модели, описывающие нейронную активность и широко используемые в исследованиях: дискретная модель нейрона Н. Рутьковым [21, 22], система Е. Ижикевича [23] и предложенная относительно недавно дискретная модель нейрона Курбажа-Некоркина [18, 24].

Применительно к автоволновым процессам исследуются такие фундаментальные физические явления как синхронизация [25–39], управление и грубость [40–52], бифуркации и устойчивость, мультистабильность и гистерезис [53–56]. Мультистабильность в отдельных осцилляторах характеризуется возможностью наблюдения различных колебательных режимов в зависимости от выбора начальных условий при одних и тех значениях управляющих параметров [57–60], а в случае ансамблей связанных осцилляторов под мультистабильностью понимается возможность реализации различных пространственно-временных режимов при вариации начальных условий [53–55]. Если взаимная синхронизация автоколебаний двух автогенераторов определяется как эффект подстройки характеристик их колебаний (амплитуды, частоты и фазы), то взаимная синхронизация автоволновых процессов подразумевает такую подстройку одновременно для некоторого конечного числа связанных автогенераторов

(кластеров), включенных во взаимосвязанные ансамбли. По такой же аналогии внешняя синхронизация автоволновой структуры означает подстройку колебательных характеристик генераторов управляемого (slave) ансамбля под соответствующие характеристики колебаний генераторов управляющего ансамбля (master) [38]. Управление типом структур в ансамблях может производиться как с помощью другого ансамбля [38], так и с помощью различного рода внешних воздействий на элементы ансамбля. Внешнее воздействие может иметь различный характер в зависимости от целей эксперимента и особенностей исследуемой системы. Воздействие может подаваться или на отдельные осцилляторы, или одновременно на группы осцилляторов. Эксперименты по влиянию внешнего воздействия на автоволновые структуры в ансамбле или в среде позволяют также исследовать грубость наблюдаемых пространственно-временных структур [40–52]. В дополнение к вышеописанному, к автоволновым структурам, также как и к автоколебаниям, применимы методы теории бифуркаций, теории устойчивости, исследуется возможная мультистабильность и гистерезис. Но при исследовании автоволн существуют особенности, связанные с очень большой размерностью фазового пространства динамической системы. Если бифуркационный переход для отдельного автогенератора часто возможно исследовать аналитически, то для ансамблей из многих связанных осцилляторов выводы о наличии бифуркационного перехода делается на основе либо статистического анализа пространственно-временного поведения автоволновых структур [38], либо аналитически с помощью упрощений динамической системы. В случае аналитического анализа упрощенной системы, возможно рассмотрение устойчивости решений на основе мультипликаторов [53]. Кроме того, теория устойчивости на основе ляпуновских характеристических показателей применима для многомерных ансамблей также как и для отдельных осцилляторов [61]. Автоволновым структурам также как и автоколебаниям свойственны мультистабильность и гистерезис, как это показано на примере возникновения

либо спиральных, либо концентрических волн при одних и тех же параметрах и различных начальных условий в системе Гинзбурга-Ландау [55].

Прикладное значение исследования автоволновых процессов подтверждается наличием ряда научных работ в астрономии [62, 63], химии [64–68] и биологии [8, 69–72]. Так, например, одним из основных типов галактики является спиральная галактика и исследование моделей, реализующих спиральные автоволны имеет принципиально важное значение в астрономии [62, 63]. Моделирование спиральных и концентрических автоволн в биологических системах позволяет исследовать особенности работы сердечной мышцы [8, 72]. Например, установлено, что водитель ритма в сердце является источником возбуждения концентрических волн большой длины волны (много больше размеров сердца). При этом сердце функционирует в нормальном режиме. При патологии возникает разрыв фронта концентрической волны, и рождаются спиральные волны малой длины волны (0.1–1.0 см). Они и являются одной из причин возникновения фибрилляций сердечной мышцы и тахикардии [8].

В начале 21-го века вновь активизировался интерес ученых к проблеме автоволновых структур, что связано с открытием химерных состояний [73–79]. Химерным состоянием называют динамический режим ансамбля, при котором сосуществуют кластеры с регулярным или синхронным поведением и кластеры с нерегулярным или несинхронным поведением [74]. Обычно химерные состояния возникают при переходе от режима десинхронизации к полной синхронизации в некотором «среднем» диапазоне значений силы связей в ансамбле [80–84]. Существование химерных состояний подтверждается не только с помощью численных [73, 74] или аналитических [75] методов, но и в эксперименте [76–78]. Поскольку химерные состояния являются разновидностью пространственно-временных динамических структур, для них в упрощенной модели возможно провести анализ устойчивости и бифуркационный анализ [75]. В свою очередь для неупрощенных ансамблей связанных динамических систем возможно построение диаграмм режимов на плоскости выбранных параметров [82, 83, 85, 86].

Проведенные к настоящему моменту исследования одномерных и двумерных ансамблей с различными парциальными элементами привело к обнаружению большого разнообразия химерных структур [73, 82, 86–106]. В перечисленных работах исследуется случай нелокальной связи между элементами. Однако на динамику ансамблей также может оказывать влияние топология связей [107–111], приводящая к усложнению пространственно-временных структур ансамблей. В ряде работ [35, 112–127] было показано, что в двумерных ансамблях динамических систем возможно возникновение отличных от одномерного случая химерных автоволн на основе спиральных волн. Кластеры некогерентности спирально-волновых химер представляют собой группу осцилляторов в виде круглого ядра, окружающую осциллятор, который является источником возбуждения спиральной волны. Возможны химерные структуры, включающие как один некогерентный кластер (одноядерные химеры), так и несколько (многоядерные химеры). Важно отметить, что все известные работы по спирально-волновым химерам рассматривали динамику двумерных ансамблей, состоящих из нелокально связанных нелинейных осцилляторов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. *Несмотря на большое количество работ, посвященных химерным состояниям, далеко не в полном объеме проведены исследования механизмов возникновения, свойств и характеристик химерных волновых структур в одномерных и двумерных ансамблях с непрерывным и дискретным временем.*

Режимы химерных состояний в ансамблях нелокально связанных хаотических элементов были также исследованы на предмет их реакции на внешние шумовые возмущения [56, 97, 99, 104, 128–131, 131, 132], которые часто приводят к индуцированным переходам между режимами с появлением или исчезновением химерных состояний. *Таким образом, при обнаружении новых или уже известных структур в новых системах остается немаловажным вопрос об исследовании и анализе эффекта внешних воздействий на пространственно-временные структуры.*

В связи с обнаружением различных химерных структур особое внимание исследователей привлечено к исследованиям динамики многослойных сетей [79, 133–142], которые представляют собой системы взаимодействующих ансамблей, реализующих различные пространственно-временные структуры, и для которых понятие синхронизации обобщается [143–145]. Были установлены и исследованы различные эффекты синхронизации сложных пространственно-временных структур, включая химерные, в многослойных сетях: кластерная синхронизация [37, 146–148], обобщенная синхронизация [140, 149], фазовая синхронизация [150], межслойная синхронизация [151, 152], синхронизация сетей с запаздывающими и адаптивными связями [153–155], удаленная (relay) синхронизация [152, 156–161], взрывная синхронизация [162–170], «клонирование» химерных структур [171]. *Однако, исследование эффектов вынужденной и взаимной синхронизации остается актуальным, поскольку практически не изучен вопрос о синхронизации автоволновых структур, включая химерные, в сетях связанных двумерных ансамблей.*

Приведенные данные о направлениях работ и уже имеющихся результатах убедительно свидетельствуют о том, что анализ химерных автоволновых структур и их синхронизация в ансамблях связанных осцилляторов различной природы и степени сложности являются современными и актуальными научными проблемами нелинейной теории колебаний и волн, традиционно относящимися к задачам радиофизики.

Цель диссертационной работы

Целью работы являются выявление условий возникновения полученных ранее и новых автоволновых химерных структур в сетях связанных осцилляторов с различной периодической и хаотической динамикой, формирующихся на основе стоячих и бегущих волн в одномерных ансамблях и на основе спиральных и концентрических волн в двумерных решетках, изучение влияния начальных и граничных условий, шумового воздействия и топологии связей на

реализацию этих структур и исследование эффектов вынужденной, взаимной и удаленной синхронизации химерных волновых структур в многослойных сетях нелинейных осцилляторов.

Для достижения поставленной цели определены и сформулированы **основные задачи** диссертационного исследования:

1. выявление механизма формирования различных типов химерных состояний в кольце нелокально связанных хаотических генераторов Анищенко-Астахова;
2. анализ динамических свойств и статистических характеристик автоволновых пространственно-временных структур спирального и концентрического типа в двумерных ансамблях связанных осцилляторов при введении нелокальной связи на примере двумерных решеток связанных осцилляторов различного типа, демонстрирующих периодические колебания;
3. анализ влияния топологии связей и внешнего шумового воздействия в одномерных ансамблях связанных нелинейных осцилляторов различного типа, начальных и граничных условий в двумерных решетках дискретных отображений;
4. выявление особенностей вынужденной и взаимной синхронизации химерных структур в связанных одномерных ансамблях и двумерных волновых химерных структур в связанных решетках нелокально взаимодействующих нелинейных осцилляторов;
5. установление возможности реализации эффекта противофазной удаленной синхронизации спиральных и концентрических волновых структур и химерных структур на их основе в трехслойной гетерогенной сети нелокально связанных нелинейных осцилляторов.

Научная новизна

Диссертационная работа содержит решение принципиально новых радиофизических задач анализа автоволновых химерных состояний в ансамблях взаимодействующих нелинейных осцилляторов с периодической и хаотической динамикой. Постановка задач по изучению свойств автоволновых структур спирального и концентрического типа в двумерных ансамблях нелокально связанных осцилляторов и выявление особенностей эффектов синхронизации химерных автоволновых структур в многослойных ансамблях является приоритетной. Результаты диссертации находятся в соответствии с уже установившимися представлениями в этой области знаний, гармонично расширяя и дополняя их. Несомненная новизна основных результатов работы подтверждается их публикацией в целом ряде научных статей в высокорейтинговых отечественных и зарубежных физических журналах с высоким импакт-фактором, входящих в международные и российские системы цитирования Web of Science, Scopus, РИНЦ. Содержание диссертационной работы соответствует паспорту специальности «1.3.4. – Радиофизика».

В работе впервые получены следующие научные результаты:

1. В кольце связанных генераторов Анищенко-Астахова наряду с классическими химерными состояниями на основе стоячей волны впервые обнаружены химерные состояния амплитудного типа на основе бегущей волны, некогерентный кластер которой остается неподвижным, несмотря на вращение основной волны вдоль кольца. Продемонстрировано явление мультистабильности и показаны особенности поведения осцилляторов некогерентных кластеров фазовых и амплитудных химерных состояний.
2. Установлено, что поведение одномерных ансамблей связанных осцилляторов различной природы может существенно зависеть от типа топологии связи между элементами, изменение которой приводит к изменению длины

волны в пространстве ансамбля, увеличивает или уменьшает количество кластеров некогерентности и влияет на характер перехода от когерентности к некогерентности.

3. Проанализировано влияние шума на амплитудные и фазовые химерные состояния на примере хаотических отображений. Показано, что оно приводит как к разрушению реализующихся структур при достаточно большой интенсивности, так и к индуцированным переходам между химерными структурами различного типа и возникновению новых кластеров некогерентности.
4. На примере двух связанных колец хаотических отображений показано, что в случае диссипативного характера связи между ансамблями имеет место полная вынужденная и взаимная синхронизация структур для идентичных ансамблей и эффективная (с заданной точностью) синхронизация для случая неидентичных ансамблей. При инерционном типе связи как между идентичными, так и неидентичными ансамблями синхронизация невозможна.
5. Проведен анализ динамики решетки локально связанных генераторов ван дер Поля и обнаружены режимы спиральных и концентрических волн. Показано, что на длины волн реализуемых структур оказывают влияние как управляющий параметр возбуждения, так и сила локальной связи. Обнаружено явление мультистабильности, когда при одних и тех же значениях управляющих параметров генераторов и параметров связи возможна реализация как спиральных, так и концентрических волн в зависимости от выбора начальных условий.
6. Впервые обнаружен и описан новый тип химерной структуры – концентрическая волновая химера, возникающая в двумерной решетке генераторов ван дер Поля на основе концентрической волны при увеличе-

нии нелокальности связи. Показано, что увеличение степени нелокальности связи ансамбля в режимах спиральных и концентрических волн приводит к увеличению кластера некогерентности, который характеризуется хаотизацией колебаний осцилляторов в центре спирально-волновых химер и уединенными состояниями с регулярными колебаниями в центре концентрических волновых химерных состояний.

7. Впервые установлены и исследованы эффекты вынужденной и взаимной синхронизации спиральных и концентрических волновых структур, включая химерные на их основе, в двух связанных решетках нелинейных осцилляторов различной природы и при различном характере межслойной связи. Установлено, что в случае спиральных волн и спирально-волновых химерных структур имеет место частичная синхронизация, тогда как для режимов концентрических волн и химерных структур на их основе характерна полная синхронизация. Впервые показано, что в первом случае ведущими в процессе синхронизации являются области с когерентной динамикой, а во втором случае лидирующая роль в синхронизации принадлежит осцилляторам некогерентных кластеров.
8. Впервые обнаружено и изучено явление противофазной удаленной синхронизации в трехслойной гетерогенной сети нелинейных осцилляторов. Данный эффект был установлен с помощью расчета коэффициента взаимной корреляции между соответствующими парами осцилляторов в случае концентрических химерных структур в удаленных слоях и спиральных волн в связующем их слое.

Достоверность полученных результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается: а) применением обоснованных методов теоретического и численного анализа нелинейных процессов в радиофизических системах, демонстрирующих сложное поведение;

б) использованием специальных программных комплексов, разработанных и протестированных на широком классе задач нелинейной динамики; в) согласованностью с данными, полученными другими авторами.

Основные положения, выносимые на защиту

1. При переходе от пространственно-когерентного режима к некогерентному с уменьшением силы нелокальной связи от максимального значения до 0 в одномерных ансамблях нелокально связанных осцилляторов, демонстрирующих бифуркационный сценарий Фейгенбаума, возникают амплитудные химерные структуры на основе стоячих и бегущих волн. Некогерентный кластер химерной структуры на основе бегущей волны локализован в пространстве ансамбля и остается неподвижным несмотря на вращение когерентной бегущей волны вдоль кольца.
2. При введении нелокальной связи в двумерных ансамблях связанных нелинейных осцилляторов на основе спиральных и концентрических волн возникают химерные волновые структуры, характеризующиеся сосуществованием в пространстве ансамбля области когерентной динамики и некогерентного ядра в центре волны. В случае спирально-волновой химеры колебания когерентных осцилляторов являются периодическими, тогда как осцилляторы в некогерентном ядре демонстрируют хаотическую динамику. В режиме концентрической волновой химеры динамика всех осцилляторов является квазипериодической с различающимися аттракторами для элементов когерентной и некогерентной областей, что соответствует режиму химеры уединенных состояний.
3. В связанных двумерных ансамблях нелинейных осцилляторов реализуются эффекты частичной синхронизации спирально-волновых химерных структур и полной синхронизации концентрических волновых химер. Несинхронными всегда остаются некогерентные ядра спирально-волновых

химер, в то время как некогерентные области концентрических химерных состояний являются ведущими в процессе синхронизации.

4. В неоднородной трехслойной сети связанных двумерных ансамблей нелинейных осцилляторов, в которой внешние слои не связаны между собой напрямую, а взаимодействуют через средний слой, наблюдается эффект противофазной удаленной синхронизации концентрических химерных структур, при котором колебания осцилляторов удаленных ансамблей синхронизируются противофазно, оставаясь асинхронными с колебаниями осцилляторов промежуточного (передающего) слоя.

Научная и практическая значимость

Результаты исследований механизмов формирования и свойств автоволновых структур в одномерных и двумерных ансамблях связанных нелинейных осцилляторов различной природы, а также эффектов синхронизации сложных пространственно-временных структур в многослойных ансамблях и сетях дополняют и расширяют имеющиеся представления современной теории нелинейных колебаний и волн, радиофизики и нелинейной динамики. Выявлены отличительные особенности спирально-волновых и концентрических волновых химерных структур и показаны принципиальные различия в процессах их синхронизации. Установлен эффект противофазной удаленной синхронизации концентрических волновых химер во внешних двумерных решетках неоднородной трехслойной сети, связанных через средний (передающий) слой, находящийся в режиме спиральной волны.

Прикладное значение результатов исследования формирования сложных структур и эффектов их синхронизации определяется важностью их использования при моделировании и анализе процессов передачи информации в инфокоммуникационных системах и системах радиосвязи. Большой интерес полученные результаты могут также представлять для нейродинамики и медицины (при мо-

делировании передачи электрических сигналов в мозге и динамики сердечной мышцы).

Апробация результатов и публикации

Результаты, представленные в диссертационной работы, неоднократно докладывались на всероссийских и международных конференциях, школах и семинарах:

1. Международная конференция «Chimera states», Саратов, Россия, 14–16 сентября, 2016.
2. Международная конференция «Saratov Fall Meeting», Саратов, Россия, 26–30 сентября, 2016, 26–30 сентября, 2017, 25–29 сентября, 2018, 23–27 сентября, 2019, 29 сентября – 2 октября, 2020.
3. Международная конференция «Control of Self-Organizing Nonlinear Systems», Виттенберг, Германия, 29-31 августа, 2017, Варнемюнде, Германия, 9–13 сентября, 2018.
4. Всероссийская конференция «Нелинейные волны», Нижний Новгород, Россия, 26 февраля – 4 марта, 2018, 29 февраля – 6 марта, 2020.
5. Международная конференция «Analysis and Modeling of Complex Oscillatory Systems», Барселона, Испания, 19-23 марта, 2018.
6. Международная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии», Саратов, Россия, 2–3 июля, 2018.
7. Международная конференция «DPG Spring Meeting», Регенсбург, Германия, 31 марта – 5 апреля, 2019.
8. Международная конференция «Patterns of Synchrony: Chimera states and beyond», Триест, Италия, 8–15 мая, 2019.

9. Международная конференция «Хаос: хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, 1–6 октября, 2019.
10. Международная конференция «Shilnikov WorkShop», Нижний Новгород, Россия, 17–18 декабря, 2020.
11. Международная конференция «NODYCON: Nonlinear Dynamics Conference», Рим, Италия, 16–19 февраля, 2021.
12. Международная конференция «CHAOS», Афины, Греция, 8–11 июня, 2021.

Результаты работы также неоднократно обсуждались на научных семинарах кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ и Института теоретической физики Технического университета г. Берлина (Германия) по приглашению проф. E. Schöll и проф. А. Захаровой.

Гранты. Результаты диссертации получены в рамках выполнения грантов РФФИ (проекты № 20-52-12004 и № 19-32-90005 – исследование поведения решеток в случае нелокальной связи), РНФ (проекты № 20-12-00119 и № 16-12-10175 – синхронизация двухслойных и трехслойных сетей и обнаружение противофазной удаленной синхронизации), Минобрнауки РФ в рамках базовой части Государственного задания (проект № 3.8616.2017 – исследование динамики двумерных решеток и обнаружение концентрических химер) и Немецкого Физического Общества (DFG) в рамках проекта SFB 910.

Публикации. По результатам диссертационной работы опубликованы 23 статьи в центральных реферируемых научных журналах, входящих в системы цитирования Web of Science, Scopus, РИНЦ, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, среди которых Nonlinear Dynamics [56, 94, 172], CHAOS: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science [35, 98, 173], Письма в журнал технической физики [174], Chaos, Solitons & Fractals [126, 142, 175–177], Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation [102, 178], Regular

and Chaotic Dynamics [104, 179], Russian Journal of Nonlinear Dynamics [38, 180], Physics Letters A [96] Известия высших учебных заведений. ПНД [106], Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика [39, 111, 181]. Всего по теме диссертации опубликовано 23 статьи в журналах, индексируемых в базе данных Web of Science и Scopus и получено 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [182–184].

Личный вклад соискателя

Защищаемые результаты диссертационной работы получены соискателем лично. Автором разработаны оригинальные программные комплексы и программы, с помощью которых проводились все численные расчеты и обработка экспериментальных данных. Планирование и постановка задач, интерпретация и обсуждение результатов, написание научных статей осуществлялись совместно с научным руководителем и соавторами.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Диссертационная работа содержит 211 страниц текста, включая 93 иллюстраций. Список литературы включает 225 наименований.

Во **Введении** обоснована актуальность выбранной темы диссертационной работы, сформулированы цель работы и задачи исследований, описаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Введение содержит основные результаты и положения, выносимые на защиту, сведения о достоверности и апробации результатов.

В **первой главе** диссертации приведены результаты численного анализа динамики кольца нелокально связанных генераторов с инерционной нелинейностью Анищенко-Астахова [20, 185]. Обнаружены режимы стоячих и бегущих волн и впервые описаны механизмы формирования химер на основе волновых структур. Генератор Анищенко-Астахова является реальной радиотехнической

моделью и представляет большой практический интерес для радиофизики. В данной главе также исследуется влияние топологии связей и типа парциального элемента на динамику одномерных ансамблей с парциальными элементами в виде логистических отображений, отображений Курбажа-Некоркина и осцилляторов ФитцХью-Нагумо. Приводятся результаты анализа влияния внешнего шумового воздействия на фазовые и амплитудные химерные состояния в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов. В качестве парциальных элементов выбраны логистическое отображение и модифицированное отображение Рикера в хаотическом режиме. В настоящей главе представлены результаты численного исследования особенностей эффектов вынужденной и взаимной синхронизации динамики колец нелокально связанных логистических отображений для случаев диссипативного и инерционного типа межслойной связи.

Во **второй главе** диссертационной работы приводятся результаты численного исследования динамики решеток связанных генераторов ван дер Поля, осцилляторов ФитцХью-Нагумо, дискретных моделей нейрона – отображений Курбажа-Некоркина и Рутькова. Показано, что нелокальный характер связи между элементами приводит к возникновению спирально-волновых химерных структур, которые характеризуются сосуществованием в пространстве системы когерентной области (волны) и ядра некогерентности, формирующегося в центре вращения волны. На примере решетки генераторов ван дер Поля проанализировано влияние управляющих параметров индивидуальных элементов и параметров связи на форму, размер и характеристики волновых структур. В данной главе также показано, что при довольно большом диапазоне нелокальной связи в решетке реализуются концентрические волны и концентрические волновые химеры, которые впервые обнаружены и описаны в диссертационной работе. Выявлены механизмы возникновения режимов волновых химер и проведен детальный сравнительный анализ динамики осцилляторов в ядрах некогерентности спиральной и концентрической химерных структур.

Третья глава диссертации посвящена исследованиям эффектов вынужденной и взаимной синхронизации спирально-волновых и концентрических волновых химерных структур в неоднородных двухслойных сетях связанных двумерных ансамблей нелинейных осцилляторов различной природы. Рассмотрены случаи однонаправленной и взаимной межслойной связи и выявлены механизмы синхронизации различных волновых структур при различных типах межслойной связи. Впервые установлены особенности и различия в эффектах синхронизации спиральных, концентрических волн и химерных структур на их основе. В настоящей главе впервые описан и проиллюстрирован эффект противофазной удаленной синхронизации волновых структур в неоднородной трехслойной сети связанных осцилляторов. Два внешних слоя, представляющих собой решетки нелокально связанных генераторов ван дер Поля в режиме концентрических волновых химер, не связаны между собой напрямую, а взаимодействуют через промежуточный слой, заданный двумерным ансамблем связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо в режиме спирально-волновой химеры. На основе расчетов коэффициента взаимной корреляции между симметричными элементами ансамблей показано, что при определенных значениях силы межслойной связи волновые структуры во внешних слоях сети синхронизируются в противофазе, в то время как структура в передаточном слое остается полностью отличной от них.

В **Заключении** подведены итоги диссертационной работы, сформулированы основные результаты и выводы.

Глава 1. Пространственно-временные структуры в одномерных ансамблях с нелокальной связью

1.1 Введение

Особые пространственно-временные структуры, названные химерными состояниями, были впервые обнаружены в начале 21 века при исследовании динамики замкнутого в кольцо ансамбля нелокально связанных фазовых осцилляторов [73, 74]. Уже второе десятилетие эти структуры представляют огромный интерес для специалистов в области нелинейной динамики и теории колебаний [75, 82, 83, 86–90, 95, 101, 105, 115, 129, 186–192].

В кольцах симметрично связанных осцилляторов могут наблюдаться амплитудные и фазовые химеры в зависимости от того, какая величина (амплитуда или фаза) характеризуется нерегулярным распределением значений в кластере некогерентности химерного состояния. Фазовые химеры могут наблюдаться как в ансамбле простых фазовых осцилляторов [73–75, 87, 115, 187], так и в ансамбле нелокально связанных автоколебательных систем, взятых в периодическом режиме [89, 188–190]. Химеры амплитудного типа могут возникать в таких системах при достаточно большой силе связи [90, 190]. Для ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов с переходом к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода типичными являются как фазовые, так и амплитудные химерные структуры [82, 83, 86, 95]. Однако не в полном объеме проведены исследования свойств и особенностей указанных типов химерных состояний в ансамблях нелокально связанных хаотических систем с непрерывным временем. В первой главе диссертационной работы приведены результаты численного анализа динамики кольца нелокально связанных генераторов с инер-

ционной нелинейностью Анищенко-Астахова [20, 185] и показана возможность наблюдения фазовых и амплитудных химер, возникновение которых вероятно связано с негиперболичностью хаотического аттрактора в индивидуальном элементе. В результате численного моделирования были обнаружены режимы стоячих и бегущих волн и впервые описаны механизмы формирования химер на основе волновых структур. Генератор Анищенко-Астахова является реальной радиотехнической моделью и представляет большой практический интерес для радиофизики.

При исследовании поведения ансамблей нелинейных осцилляторов (в частности, ансамблей нейронов) важную роль играет топология связей между ними [108–110]. Введение иерархической связи приводит к проявлению несвойственного случаю нелокальной связи явления: некогерентные области включают сложную вложенную структуру и перемещаются вдоль кольца. При этом статистические характеристики колебаний элементов ансамбля устойчивы во времени. Введение отражающей [108] связи и добавление к нелокальной связи диагональной [109] также показывает, что изменение топологии может приводить к заметным изменениям пространственно-временной динамики ансамбля. Такие топологии связи свойственны для биологических нейросетей и поэтому достойны пристального внимания специалистов в нелинейной динамике. С целью изучения влияния топологии межэлементной связи на динамику ансамблей связанных динамических систем, в первой главе рассматриваются случаи нелокальной, отражающей и нелокальной связи с добавлением диагональной в кольцах связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо, отображений Курбажа-Некоркина (дискретных моделей нейронов) [24] и логистических отображений.

Химерные состояния представляют собой нетривиальные режимы ансамблей динамических систем, которые довольно сложно получить аналитически даже с использованием различных приближений. Но такие режимы зачастую бывают довольно неустойчивыми и трудно воспроизводимыми, поэтому вопрос об их устойчивости к внешнему шумовому воздействию представляется очень

интересным. В ряде работ проводился анализ влияния внешних шумовых возмущений на режимы химерных состояний в ансамблях нелокально связанных хаотических элементов [56, 104, 129–132]. В частности, было показано, что внешний шум может приводить к индуцированным переходам между режимами и к формированию новых режимов в динамических системах [128]. Было установлено, что фазовая химера является довольно устойчивым к шумовым воздействиям состоянием [97], в то время как внешний шум, действующий на амплитудную химеру, может индуцировать либо ее переход в фазовое химерное состояние [97, 99, 104], либо ее полное исчезновение [131]. Тем не менее, вопрос о чувствительности химерных структур к внешним шумовым воздействиям остается актуальным для исследований. В первой главе работы приводятся результаты анализа влияния внешнего шумового воздействия на фазовые и амплитудные химерные состояния в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов. В качестве парциальных элементов выбраны логистическое отображение и модифицированное отображение Рикера в хаотическом режиме.

Синхронизация является одним из самых исследуемых эффектов в радиофизике и теории колебаний. С открытием химерных состояний актуальным и интересным становится вопрос о возможности их синхронизации. В последнее время внимание исследователей привлечено к исследованиям динамики многослойных сетей [133–136], которые представляют собой системы взаимодействующих ансамблей, реализующих различные пространственно-временные структуры. Как было указано во Введении, установлены и исследованы различные типы и формы синхронизации химерных состояний. В настоящей главе представлены результаты численного исследования особенностей эффектов вынужденной и взаимной синхронизации динамики колец нелокально связанных логистических отображений для случаев диссипативного и инерционного типа межслойной связи.

Результаты численных исследований, изложенные в первой главе, опубликованы в работах [38, 98, 104, 111, 172].

1.2 Модель кольца связанных осцилляторов в общем виде

Динамика кольца связанных осцилляторов в общем виде задается следующим уравнением:

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{u}_i) + \frac{\sigma}{B_i} \sum_j \mathbf{S}(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i) + \mathbf{E}_i, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t)$ представляют собой вектора динамических переменных состояния отдельных осцилляторов кольца с номерами $i = 1, 2, \dots, N$; N – общее количество элементов в кольце; $\hat{\mathbf{u}}_i$ – операторы эволюции этих осцилляторов, которые задаются производными ($\hat{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{u}}_i$) для осцилляторов с непрерывным временем $t \in [0 : T]$, и итерационными соотношениями ($\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}_i(n+1)$) в случае систем с дискретным временем $n = 1, 2, \dots, T$; в обоих случаях T – это время, на котором проводится наблюдение поведения системы. Все осцилляторы в кольце (1.1) идентичны, то есть задаются одним и тем же оператором \mathbf{F} , и их динамика определяется одинаковыми значениями управляющих параметров (если иное не оговорено условиями задачи) в функциях оператора \mathbf{F} . Второе слагаемое в (1.1) задает связь элементов кольца между собой. Все связи предполагаются симметричными и могут задаваться с помощью векторного оператора \mathbf{S} двумя способами: ($\mathbf{S}(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i) = \mathbf{F}(\mathbf{u}_j) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_i)$) или ($\mathbf{S}(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i$). Коэффициент σ определяет силу связи между элементами в кольце (1.1). Параметр B_i соответствует числу элементов, с которым связан i -й элемент ансамбля, он одинаков для всех элементов и равен количеству значений индекса j , соответствующих элементу с номером i .

Значения индексов j определяют связи между элементами кольца. В случае нелокальной связи

$$j \in \{i - P_n, \dots, i - 1, i + 1, \dots, i + P_n\}, \quad (1.2)$$

в случае отражающей связи

$$j \in \{N - i - P_r, \dots, N - i + P_r\}, \quad j \neq i, \quad (1.3)$$

в случае комбинации нелокальной и диагональной связей

$$j \in \{i - P_d, \dots, i - 1, i + 1, \dots, i + P_d\} \cup \{N/2 + i - P_d, \dots, N/2 + i + P_d\}. \quad (1.4)$$

Для сравнения влияния топологии связей на динамику кольца устанавливаются параметры $P = P_n = P_r = 2P_d$, тогда количество связей отдельного элемента с другими элементами ансамбля $B_i = 2P$ будет одинаковым. Графическое представление топологии связи для каждого из случаев приведено на рисунке 1.1. Граничные условия во всех рассматриваемых случаях периодические с периодом N ($\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i \pm N}$).

Слагаемое \mathbf{E}_i позволяет ввести внешнее воздействие и полагается нулевым, $\mathbf{E}_i = 0$, при отсутствии другого определения.

Для исследования явления синхронизации пространственно-временных структур используется модель двух связанных колец, которая описывается сле-

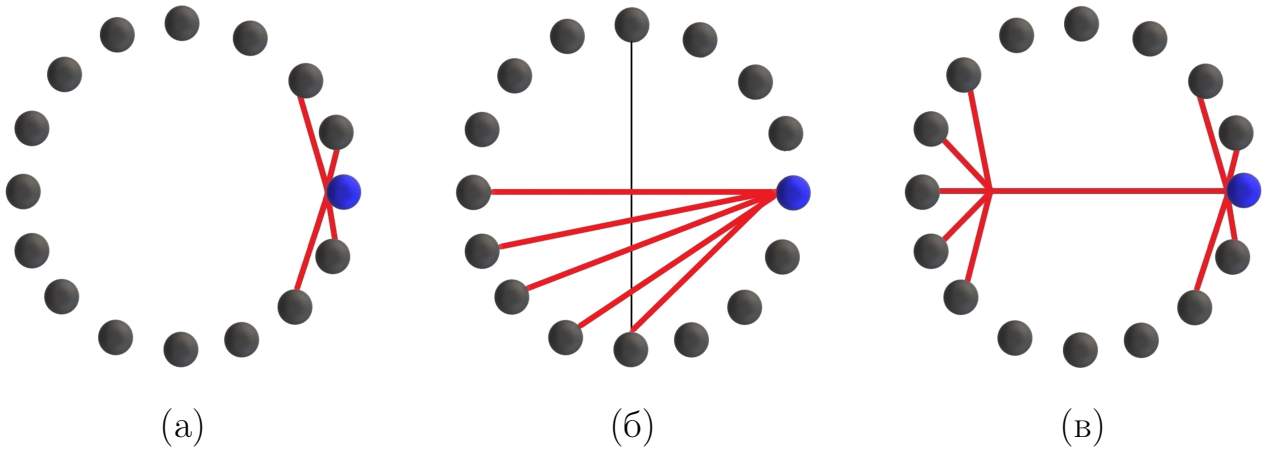


Рисунок 1.1. Способ задания связи одного из элементов кольца (отмечен синим цветом) в случае (а) нелокальной связи при $P_n = 2$, (б) отражающей связи при $P_r = 2$ и (в) комбинации нелокальной и диагональной связей при $P_d = 2$. Тонкая вертикальная серая линия на фрагменте (б) обозначает ось симметрии, которая соединяет элементы с номерами 1 и $N/2$.

дующим уравнением:

$$\hat{\mathbf{u}}_i^k = \mathbf{F}^k(\mathbf{u}_i^k) + \frac{\sigma^k}{B_i^k} \sum_{j^k} \mathbf{S}^k(\mathbf{u}_j^k, \mathbf{u}_i^k) + \gamma^{lk} \mathbf{G}(\mathbf{u}_i^l, \mathbf{u}_i^k) + \mathbf{E}_i^k, \quad (1.5)$$

где индексы $k, l = 1, 2$ отвечают номеру слоя в связанной сети, $l = 2$ в случае $k = 1$ и $l = 1$ в случае $k = 2$. Функция \mathbf{G} задает диссипативную ($\mathbf{G}(\mathbf{u}_i^l, \mathbf{u}_i^k) = \mathbf{F}(\mathbf{u}_i^l) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_i^k)$) или инерционную ($\mathbf{G}(\mathbf{u}_i^l, \mathbf{u}_i^k) = \mathbf{u}_i^l - \mathbf{u}_i^k$) связь между кольцами с коэффициентами межслойной связи γ^{12} и γ^{21} . Параметр γ^{12} определяет силу воздействия первого кольца на второе, а γ^{21} – в противоположном направлении.

1.3 Химерные структуры в кольце генераторов

Анищенко-Астахова

Свойства структур, возникающих в ансамблях хаотических осцилляторов или отображений, демонстрирующих переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [82, 83, 86, 95], могут принципиально отличаться от свойств структур, наблюдаемых в ансамблях фазовых или периодических осцилляторов [73–75, 87, 89, 115, 187–190]. Генератор с инерционной нелинейностью Анищенко-Астахова, рассматриваемый в данном разделе, характеризуется тем, что в его фазовом пространстве реализуется негиперболический хаотический аттрактор. Система с непрерывным временем такого типа в кольце нелокально связанных элементов рассматривается впервые, поэтому кроме обычных амплитудных и фазовых химер возможно наблюдение химер нового типа. В соответствии с уравнением (1.1) для исследуемого ансамбля имеют место следующие соотношения:

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} mx_i + y_i - x_i z_i \\ -x_i \\ -gz_i + \frac{g}{2} x_i (x_i + |x_i|) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Здесь $x_i = x_i(t)$, $y_i = y_i(t)$ и $z_i = z_i(t)$ – безразмерные динамические переменные, задающие состояние парциального генератора с номером i ; m и g – управляющие параметры отдельного элемента. Связь между элементами вводится в первое и второе уравнения системы в соответствии с соотношением (1.2) и характеризуется силой связи σ . Связь выбрана в соответствии с возможностью реализации в радиофизическом эксперименте. Для исследуемой системы не было обнаружено качественных различий в поведении при введении связи в одно, два или три уравнения генераторов. Для рассматриваемой модели (1.6) количество элементов фиксировано $N = 100$. Остальные обозначения для системы (1.6) даны в разделе 1.2 в описании к уравнению (1.1).

Парциальные осцилляторы ансамбля (1.6) представляют собой автоколебательные системы, описанные в работах [20, 185]. В зависимости от значений параметров m и g они могут реализовывать периодические или хаотические колебания. Генераторы Анищенко-Астахова демонстрируют переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума, то есть через каскад бифуркаций удвоения периода. Атрактор, полученный в результате такого перехода, является, как правило, негиперболическим, то есть состоит из множества пересекающихся устойчивых и неустойчивых многообразий. В настоящем исследовании выбраны значения управляющих параметров $m = 1.49$ и $g = 0.2$, соответствующие хаотическому аттрактору спирального типа в индивидуальном генераторе Анищенко-Астахова [20], то есть в отсутствие связей в ансамбле (при $\sigma = 0$).

Система (1.6) интегрируется методом Рунге-Кутты 4-го порядка в течение 50000 единиц безразмерного времени с шагом интегрирования не больше 0.001. Начальные условия выбираются в виде периодического профиля и затем система интегрируется при плавном изменении параметра силы связи. При этом получившееся в конце предыдущих расчетов состояние системы выбирается в качестве начального для новых расчетов с новым значением параметра. Результаты расчетов представляются в виде пространственно-временных диаграмм, мгновенных пространственных профилей амплитуд, временных ре-

ализаций, фазовых проекций для выбранных осцилляторов, мгновенных пространственных профилей сдвигов фаз и средних значений частот выбранных осцилляторов.

Мгновенные значения выбранной динамической переменной (например, переменной x) для всех элементов ансамбля в зависимости от времени представляются на пространственно-временной диаграмме с использованием цветной карты. Такие изображения отражают общую картину пространственно-временной динамики системы, позволяют визуально различить регулярное и нерегулярное поведение во времени и пространстве, а также отделить друг от друга бегущие и стоячие волны. Характер пространственного распределения лучше виден на мгновенных профилях амплитуд осцилляторов (например, на сечении пространственно-временной диаграммы), поэтому для представления результатов используются профили амплитуд $A_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ в выбранные моменты времени. По таким пространственным распределениям достаточно просто определяются длины волн для периодических в пространстве структур. Несмотря на то, что бегущие и стоячие волны хорошо различимы на пространственно-временных диаграммах, их удобнее представлять с помощью мгновенных профилей фазовых сдвигов $\varphi_i(t) = \Phi_0(t) - \Phi_i(t)$, где фазы осцилляторов в момент времени t определяются соотношением:

$$\Phi_i(t) = -\arctan \frac{y_i(t)}{x_i(t)} + \pi\psi(t), \quad (1.7)$$

где $\psi \in \mathbb{Z}$ (\mathbb{Z} – множество целых чисел) выбирается так, что фаза $\Phi_i(t)$ соответствует полному углу вращения радиус-вектора на плоскости (x_i, y_i) для увеличивающихся i . Обычно значения ψ определяются так, чтобы мгновенный профиль сдвигов фаз был непрерывным с учетом периодичности исследуемой системы. Однако в данном случае условие непрерывности является справедливым только для регулярных кластеров, а для нерегулярных кластеров и для переходов от кластера с одним поведением к кластеру с другим поведением оно может не выполняться. Средние значения частот хаотических автоколебатель-

ных осцилляторов вводятся с использованием мгновенной фазы следующим образом:

$$\bar{\omega}_i = \int_0^t \dot{\Phi}_i(t) dt = \frac{1}{t}(\dot{\Phi}_i(t) - \dot{\Phi}_i(0)). \quad (1.8)$$

1.3.1 Карты режимов на плоскости параметров связи

В системе хаотических автоколебательных осцилляторов может наблюдаться пространственно-временная динамика разного типа при изменении параметров связи (силы σ и нелокальности P). Характерным для больших значений силы связи является режим полной хаотической синхронизации, когда все осцилляторы демонстрируют одинаковый режим с нулевым сдвигом фазы их колебаний друг относительно друга. При очень малых значениях силы связи какая-либо регулярность в пространстве и времени отсутствует. При этом существует некоторый диапазон значений силы связи σ , при котором могут сосуществовать режимы стоячих или бегущих волн и химерные состояния. В этой области значений параметров поведение отдельных осцилляторов во времени может быть как хаотическим, так и периодическим, когда хаос подавляется в результате взаимодействия элементов ансамбля.

Области существования наблюдаемых в ансамбле (1.6) динамических режимов изображены в виде карт режимов на плоскости параметров (P, σ) на рисунке 1.2. Единственным режимом, реализуемым в области I (серая область на рисунке 1.2,а), является режим полной хаотической синхронизации. Следует отметить, что это решение, когда все осцилляторы идентичны, существует для любых значений параметров связи, но является единственным устойчивым режимом только в области I. В области II (светло-красная область на рисунке 1.2,а) режим хаотической синхронизации сосуществует с режимом бегущей волны с различным волновым числом. В области III (синяя область на ри-

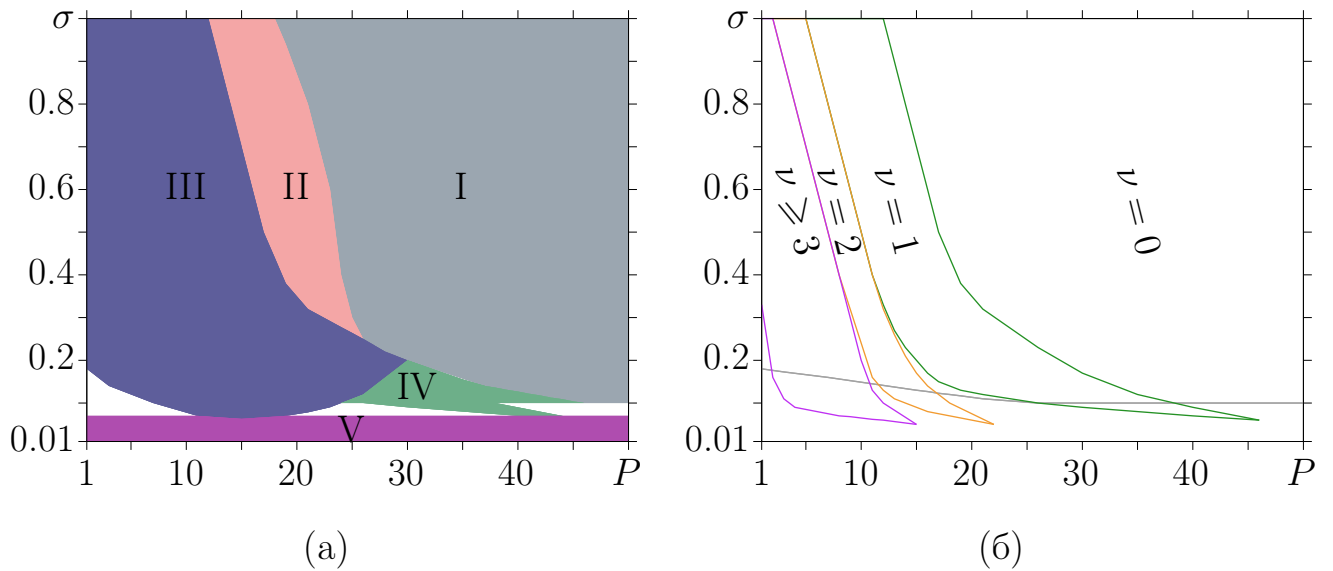


Рисунок 1.2. Карты режимов, реализующихся в ансамбле нелокально связанных осцилляторов (1.6), на плоскости параметров (P, σ) . Полная карта режимов (а) и карта режимов стоячих волн (б). Области существования различных структур обозначены римскими цифрами и описаны в тексте; ν обозначает волновое число.

сунке 1.2,а) перечисленные выше режимы сосуществуют с режимом стоячих волн с различным волновым числом. Более детальная диаграмма для режимов стоячих волн приведена на рисунке 1.2,б. В области IV (зеленая область на рисунке 1.2,а) наблюдаются только стоячие волны или режим полной хаотической синхронизации. Бегущие и стоячие волны в областях II–IV являются периодическими в пространстве с пространственным периодом $n \leq N$ и могут быть периодическими во времени. Химерные состояния сосуществуют с режимом полной хаотической синхронизации в области V при достаточно малых значениях силы связи σ и для любых значений радиуса связи P . Они могут возникать как на основе стоячих, так и бегущих волн при плавном уменьшении силы связи σ . Области переходных режимов, которые не удалось отнести ни к одному из случаев, перечисленных выше, отмечены на карте режимов на рисунке 1.2,а белым цветом. В этих областях отсутствуют стационарные структуры в пространстве, а колебания отдельных элементов хаотичны во времени.

Диаграмма на рисунке 1.2,б представляет собой карту режимов стоячих волн с разными длинами волн, которые отмечены буквой ν . Значение $\nu = 0$ соответствует режиму полной хаотической синхронизации (отсутствию стоячей волны). Важно отметить, что каждая область существования режимов стоячей волны с одной и той же длиной волны может быть разделена на области с разным поведением во времени, поскольку отдельные осцилляторы демонстрируют переход к хаосу через каскад удвоения периода при уменьшении параметра силы связи [95].

Диаграммы на рисунке 1.2 аналогичны соответствующим диаграммам для ансамбля осцилляторов Рёсслера и ансамбля логистических отображений [82, 83, 86], что связано с универсальностью многих свойств систем со сценарием Фейгенбаума, включая наличие мультистабильности [20]. Однако система (1.6), в отличие от рассмотренных ранее моделей, демонстрирует возникновение химерных состояний на основе бегущих волн. Одной из причин появления таких структур может являться то, что бегущие волны являются типичным для данной модели режимом и наблюдаются в достаточно большой области значений параметров связи. Бегущие волны и химеры на их основе для других ансамблей нелокально связанных хаотических систем обнаружены не были.

Режимы стоячих и бегущих волн с волновым числом $\nu = 1$ (только одна волна уместается в кольце) проиллюстрированы на рисунке 1.3. Как видно из рисунка 1.3,а,в, в обоих случаях профиль волны представляет собой гладкую кривую. Зависимость фазового сдвига от номера осциллятора для стоячей волны (рисунок 1.3,б) не является монотонной, значение этой величины для первого и последнего элементов одинаково. Для бегущей волны мгновенный профиль ϕ_i (рисунок 1.3,г) представляет собой монотонно возрастающую функцию, значение фазового сдвига для "последнего" элемента равно 2π .

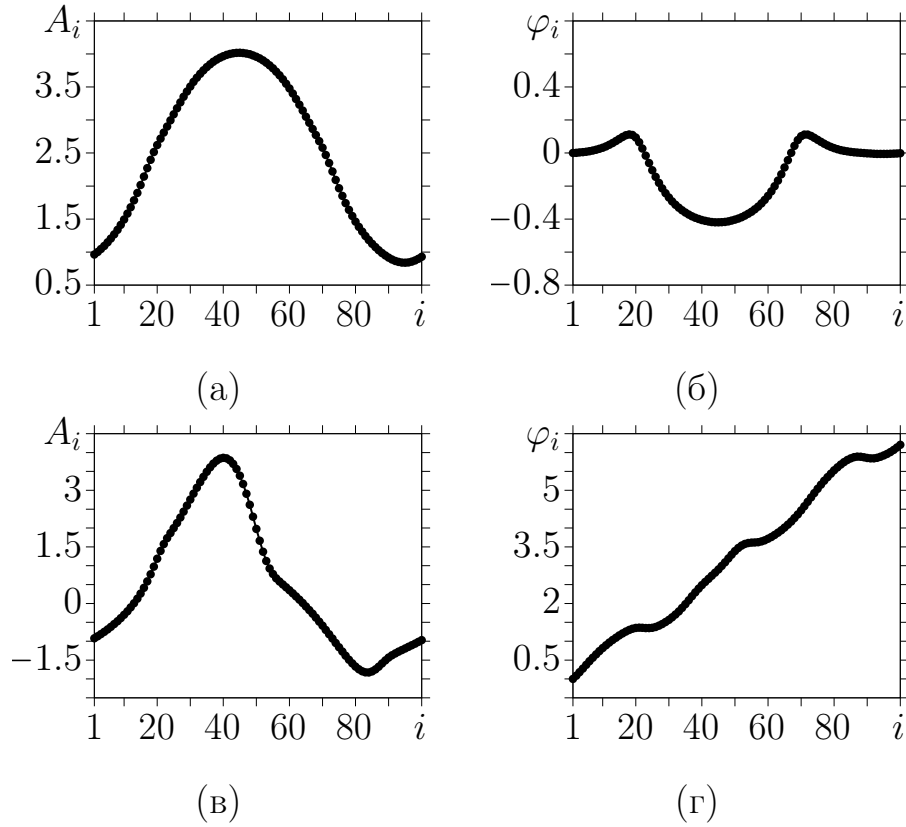


Рисунок 1.3. Мгновенные профили амплитуд A_i (а,в) и мгновенные сдвиги фаз φ_i (б,г) для режимов стоячих при $P = 25, \sigma = 0.2$ (а,б) и бегущих при $P = 20, \sigma = 0.2$ (в,г) волн с волновым числом $n = 1$ в ансамбле (1.6)

1.3.2 Характеристики хаотических химерных состояний

С уменьшением силы связи в модели (1.6) имеет место переход от пространственно-когерентного хаотического режима к некогерентному. Этот переход сопровождается формированием химерных структур, которые могут возникать как из стоячих (рисунок 1.3,а,б), так и из бегущих волн (рисунок 1.3,в,г). Переход от режима стоячих волн к химерным структурам хорошо изучен на примере других моделей в работах [82, 83, 95]. Исследования показали, что бегущие волны при уменьшении силы связи в системе (1.6) эволюционируют аналогичным образом. Сначала, при уменьшении силы связи, гладкий профиль разрывается и появляются точки разрыва на гладком профиле (рису-

нок 1.4,а). Затем, при дальнейшем уменьшении силы связи появляются области некогерентности (рисунок 1.4,б).

Стационарные химерные состояния, возникающие на основе стоячих волн с волновым числом $\nu = 1$, представлены на рисунке 1.5 для случая $P = 25$, $\sigma = 0.04$. Пространственно-временная диаграмма (рисунок 1.5,а) демонстрирует существование стационарной во времени структуры, соответствующей стоячей волне. Здесь также можно выделить область с нерегулярным (некогерентным) поведением осцилляторов в пространстве, которая более детально видна на профиле мгновенных амплитуд колебаний A_i (рисунок 1.5,б). На рисунке 1.5,в представлена типичное для этого типа химер распределение значений сдвига мгновенной фазы ϕ_i в пространствен ансамбля. В областях когерентности профили являются кусочно-гладкими, а в некогерентной области представляют собой нерегулярное распределение значений между осцилляторами i . Когерентные области характеризуются наличием в них разрывов, что яв-

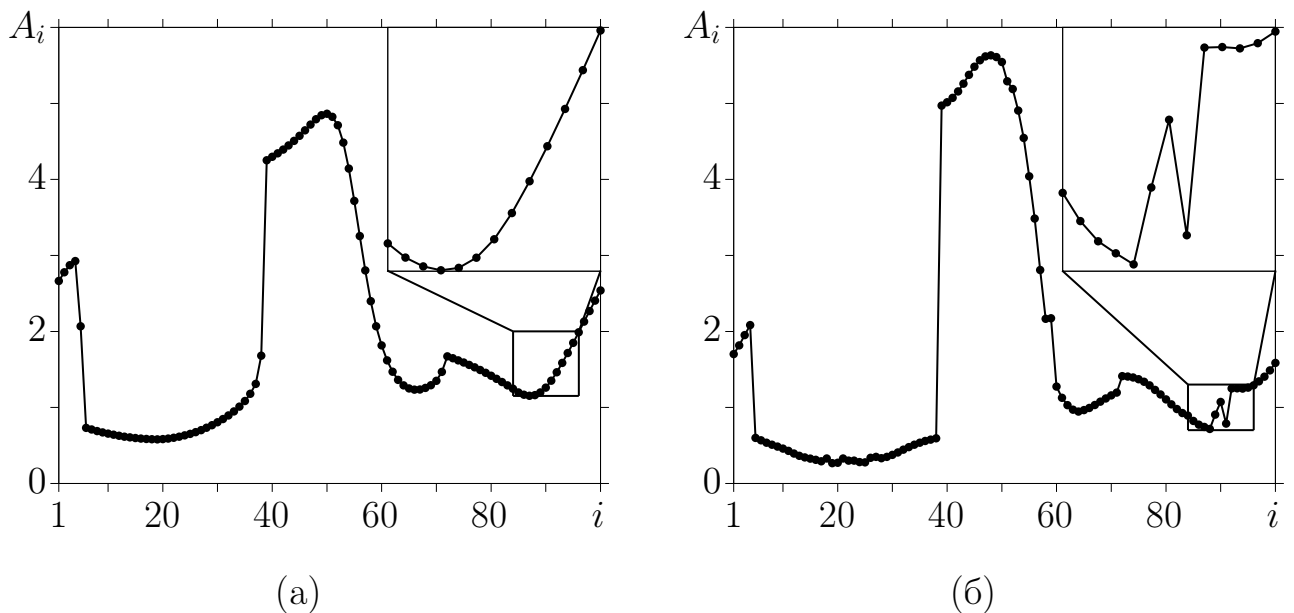


Рисунок 1.4. Эволюция пространственного профиля мгновенных амплитуд A_i при уменьшении силы связи для бегущих волн при $P = 20$ для $\sigma = 0.12$ (а) и $\sigma = 0.05$ (б). Увеличенные фрагменты демонстрируют появление кластера некогерентности.

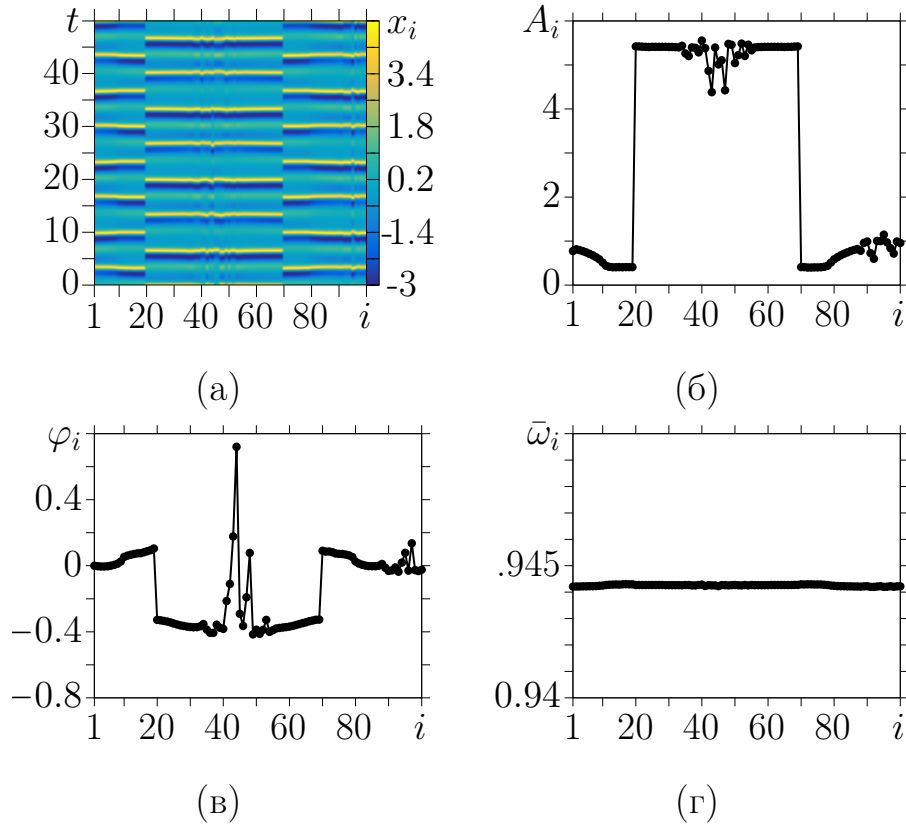


Рисунок 1.5. Химерная структура при $P = 25$, $\sigma = 0.04$, возникающая на основе стоячей волны с волновым числом $n = 1$. Пространственно-временная диаграмма амплитуд осцилляторов x_i (а); пространственный профиль мгновенных амплитуд колебаний A_i (б); пространственный профиль мгновенных значений сдвигов фаз φ_i (в); средние значения частот хаотических колебаний элементов $\bar{\omega}_i$ (г).

ляется типичным при формировании химерных структур на основе стоячих волн [82, 83, 95]. При этом области некогерентности формируются не вблизи возникающих разрывов, а в середине когерентных кластеров, также как и для ансамбля осцилляторов Рёсслера [83]. Нерегулярность пространственного (при изменении номера i) распределения A_i и φ_i в некогерентных кластерах не нарушает условие частотной синхронизации всех элементов ансамбля, что показывают почти одинаковые значения средних частот $\bar{\omega}_i$ (рисунок 1.5,г). Отличия в четвертом знаке не превышают точности численных расчетов. Описанный тип динамики можно отнести к химерам амплитудного типа в соответствии с

введенной ранее терминологией [90, 95, 190]. Подобные химерные состояния были обнаружены ранее в кольцах логистических отображений [95], отображений Эно [86] и осцилляторов Ресслера [82].

Проведенные исследования показали, что в ансамбле генераторов Анищенко-Астахова может реализовываться новый тип химер – амплитудные химеры на основе бегущих волн, существование которых установлено впервые. Характеристики для этого типа химер приведены на рисунке 1.6, которые иллюстрируют возникновение кластера некогерентности как на мгновенном профиле амплитуд (рисунок 1.6,б), так и сдвигов фаз (рисунок 1.6,в). Отличитель-

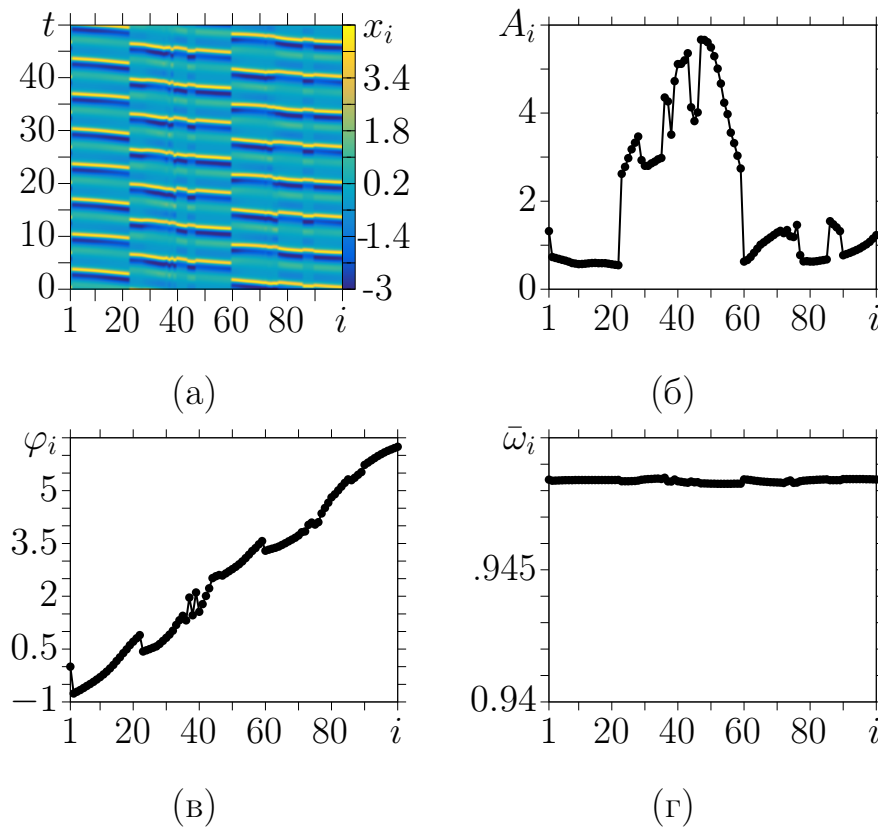


Рисунок 1.6. Химерная структура при $P = 20$, $\sigma = 0.04$, возникающая на основе бегущей волны с волновым числом $n = 1$. Пространственно-временная диаграмма амплитуд осцилляторов x_i (а); пространственный профиль мгновенных амплитуд колебаний A_i (б); пространственный профиль мгновенных значений сдвигов фаз φ_i (в); средние значения частот хаотических колебаний элементов $\bar{\omega}_i$ (г).

ная черта наблюдаемой пространственно-временной структуры состоит в том, что её некогерентный кластер локализован и не перемещается вдоль кольца, несмотря на вращение когерентной бегущей волны вдоль него. Бегущая волна, не разрушаясь, проходит через кластер некогерентности. При этом, границы между когерентными и некогерентным кластерами в кольце неподвижны, и, следовательно, структура на рисунке 1.6 является химерной по определению [74]. Из-за того, что частоты колебаний всех осцилляторов почти одинаковы (рисунок 1.6,г), а некогерентный кластер характеризуется нерегулярным распределением фаз и амплитуд, данный вид структуры можно отнести к химерам амплитудного типа.

1.3.3 Механизм формирования химерных состояний различного типа и влияние начальных условий

В результате исследований формирования химерных структур в ансамблях хаотических систем с бифуркацией удвоения периода [82, 83, 95] было обнаружено два типа некогерентных кластеров: кластеры, возникающие вблизи точки разрыва волнового профиля и отвечающие фазовому химерному состоянию, и кластеры, не связанные с разрывом профиля волны и соответствующие амплитудному химерному состоянию.

Рассмотрим, как группируются мгновенные состояния осцилляторов, принадлежащих различным кластерам амплитудной химеры. На рисунке 1.7,а представлен профиль мгновенных амплитуд, на котором один из некогерентных кластеров отмечен красными точками в квадратах. На рисунке 1.7,б те же мгновенные амплитуды отмечены на фоне фазовых проекций хаотического аттрактора других осцилляторов (серые линии). Хотя траектории различных элементов ансамбля слегка отличаются друг от друга (некоторые близки к пери-

одическим, а некоторые демонстрируют развитую хаотическую динамику), все они располагаются на одной двухобходной ленте при совмещении всех проекций (x_i, y_i) . При этом все состояния осцилляторов одного кластера располагаются на одном и том же обороте этой ленты. Это справедливо как для когерентных, так и для некогерентных кластеров. Различие состоит в том, как эти мгновенные состояния располагаются друг по отношению ко другу на совмещенном фазовом портрете проекций (x_i, y_i) . В когерентном кластере они лежат друг за другом в определенном направлении вдоль аттрактора, тогда как в некогерентном кластере имеет место случайное распределение этих состояний.

Для получения фазовой химеры необходимо использовать специальные начальные условия [83]. Поэтому к установленным состояниям добавляется равномерное случайное возмущение в диапазоне $[-0.5; 0.5]$, в результате че-

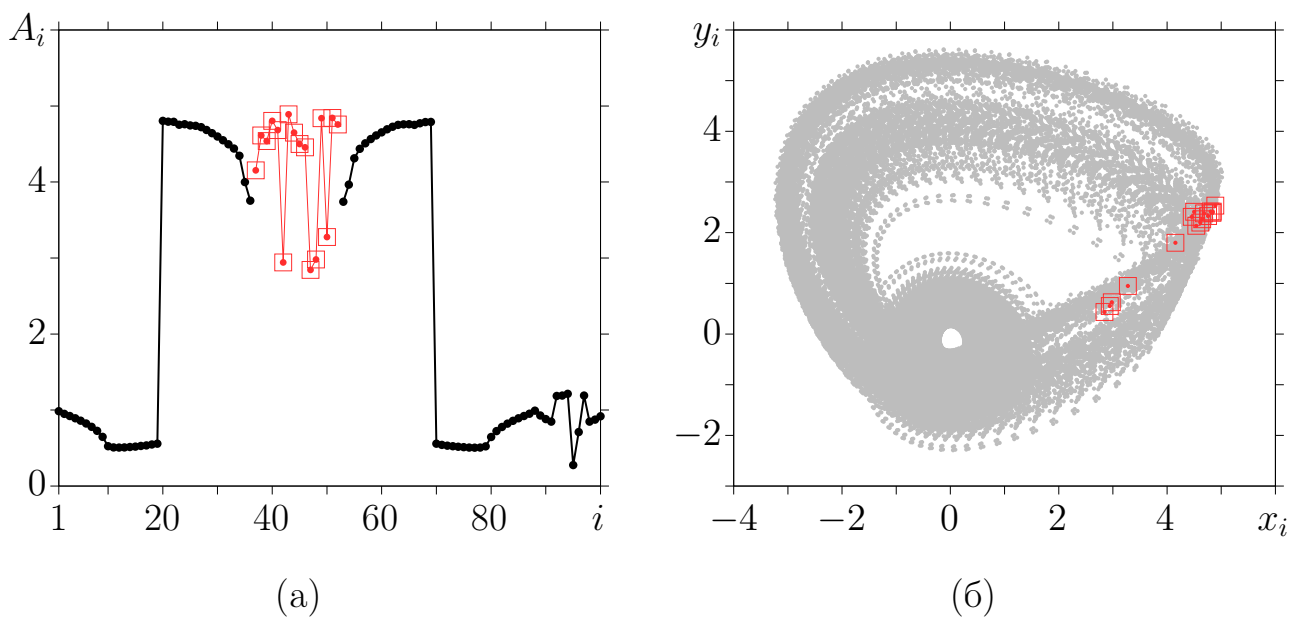


Рисунок 1.7. Иллюстрация кластеров амплитудной химеры, полученной из стоячей волны при $P = 25$ и $\sigma = 0.04$. Пространственный профиль мгновенных амплитуд с двумя когерентными и двумя некогерентными кластерами (а) и мгновенные состояния осцилляторов одного из некогерентных кластеров (красные точки в квадратах) на фоне проекций на плоскость (x_i, y_i) хаотических траекторий осцилляторов (б).

го часть осцилляторов вблизи разрыва волны распределяется случайным образом между верхним и нижним уровнями на профиле мгновенных амплитуд (рисунок 1.8). На профиле амплитуд на рисунке 1.8,а различимы четыре некогерентных кластера: два из них соответствуют амплитудной химере, а другие два – фазовой (в окрестности разрывов волны). Осцилляторы одного из кластеров фазовой химеры показаны на профиле красными точками в квадратах. Эти состояния, отмеченные на совмещенном фазовом портрете на рисунке 1.8,б, расположены на различных витках двухобходной ленты, что отличает химеру фазового типа от амплитудной.

Известно, что химерные структуры очень чувствительны к выбору начальных условий [82, 83]. В случае фазовых химерных состояний существует возможность получить разнообразные варианты распределения вблизи разры-

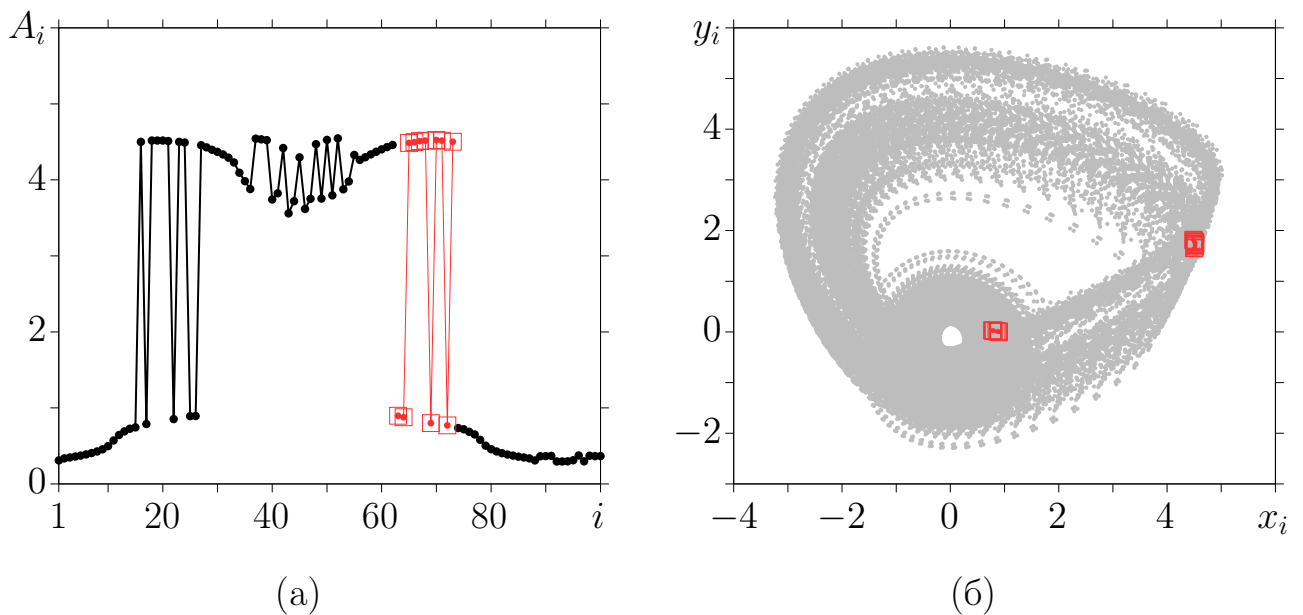


Рисунок 1.8. Иллюстрация кластеров фазовой химеры, полученной с помощью специально подготовленных начальных условий при $P = 25$ и $\sigma = 0.04$.

Пространственный профиль мгновенных амплитуд (а), и мгновенные состояния осцилляторов одного из некогерентных кластеров (красные точки в квадратах) на фоне проекций на плоскость (x_i, y_i) хаотических траекторий осцилляторов (б).

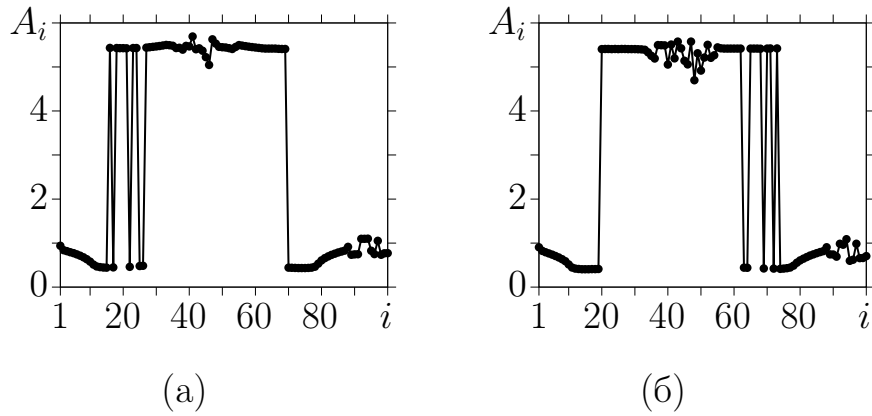


Рисунок 1.9. Иллюстрация влияния начальных условий на возникновение фазовой химеры при $P = 25$ и $\sigma = 0.04$. Пространственный профиль мгновенных амплитуд с некогерентным кластером в окрестности разрыва слева (а) и справа (б).

вов волны. Так, при одних и тех же значениях параметров системы (1.6) $P = 25$ и $\sigma = 0.04$ возможна реализация химеры амплитудного типа (рисунок 1.7,а), химер фазового типа с двумя кластерами некогерентности (рисунок 1.8,а) и с одним кластером (рисунок 1.9).

1.4 Влияние топологии связей на динамику ансамблей нелинейных осцилляторов

Как было отмечено в разделе 1.1, различная топология связей между элементами может оказывать существенное влияние на пространственно-временную динамику ансамблей. В данном разделе приводятся результаты исследований для трех типов межэлементных связей: нелокальной, отражающей и нелокальной связи с добавлением диагональной, – на примерах колец связанных логистических отображений, осцилляторов ФитцХью-Нагумо (ФХН) и отображений (моделей нейрона) Курбажа-Некоркина.

1.4.1 Кольцо связанных логистических отображений

В случае кольца связанных логистических отображений в уравнении (1.1) $\hat{\mathbf{u}}_i = x_i(n+1)$, $n = 1, 2, \dots, T$, $\mathbf{F}(\mathbf{u}_i) = f(x_i(n)) = \alpha x_i(n)(1 - x_i(n))$, $\mathbf{S} = x_j(n) - x_i(n)$. Параметр α является бифуркационным и задает динамику отдельного элемента. В проведенных расчетах его значение фиксируется, $\alpha = 3.0$, что соответствует периодическому режиму (циклу периода 1) отдельного элемента в отсутствие связи. Выбор именно этого режима позволяет избежать бифуркационных переходов при изменении величины силы связи, которая смещает эффективное значение параметра α в сторону меньших значений. Рассматривались режимы, реализующиеся со случайных равномерно распределенных начальных условий $x_i(n=0) \in [0.1; 0.9]$ после времени установления $T_{\text{пер}} = 10^6$ итераций. Количество элементов в кольце было выбрано $N = 300$.

При малых значениях силы связи $\sigma < 0.1$ для различных значений параметра P в случаях нелокальной (1.2), отражающей (1.3) и комбинации нелокальной с диагональной связями (1.4) все осцилляторы демонстрируют одинаковый периодический режим. Однако при увеличении силы связи, при некотором значении σ , зависящем от P , для всех топологий связи возможно наблюдение химерных состояний. Количество областей некогерентности химерных состояний зависит от топологии связи: одна область некогерентности наблюдается в случае отражающей связи (рисунок 1.10,б), две – в случае нелокальной (рисунок 1.10,а) и четыре – в случае комбинации нелокальной и диагональной связей (рисунок 1.10,в). Стоит отметить, что общее количество несинхронизованных осцилляторов при этом примерно одинаково для любой топологии при одном и том же диапазоне связи P . Дальнейшее увеличение силы связи, $\sigma > 0.65$, приводит к уходу фазовых траекторий отображений на бесконечность вне зависимости от выбора топологии связи. Если выбрать структуры на рисунке 1.10 в качестве начальных и плавно уменьшать значение силы связи σ , количество

некогерентных осцилляторов постепенно уменьшается, пока кольцо полностью не перейдет в когерентный режим при $\sigma \sim 0.2$. Пространственный период полученной структуры в таком случае соответствует пространственному периоду химерной структуры при больших значениях σ . Существует гистерезис при плавном уменьшении и увеличении параметра связи. Так, при $\sigma = 0.3$ можно наблюдать когерентные периодические в пространстве структуры, если увеличивать параметр силы связи до этого значения (рисунки 1.11,а–в), и уединенные состояния на периодической в пространстве структуре при уменьшении силы связи до значения $\sigma = 0.3$ (рисунки 1.11,г–е).

Описанное выше различие динамики в зависимости от топологии связи состоит только в распределении некогерентных осцилляторов в кольце, что, как можно предположить, связано с различием в типе симметрии. Во всех рассмотренных случаях количество связей у каждого осциллятора равно 120, что соответствует связи с 80% осцилляторов и близко к глобальной связи. При уменьшении же диапазона связи P различия в поведении становятся более значительными для различных топологий связи. Переход к некогерентности при плавном уменьшении параметра P происходит одинаково для нелокальной и

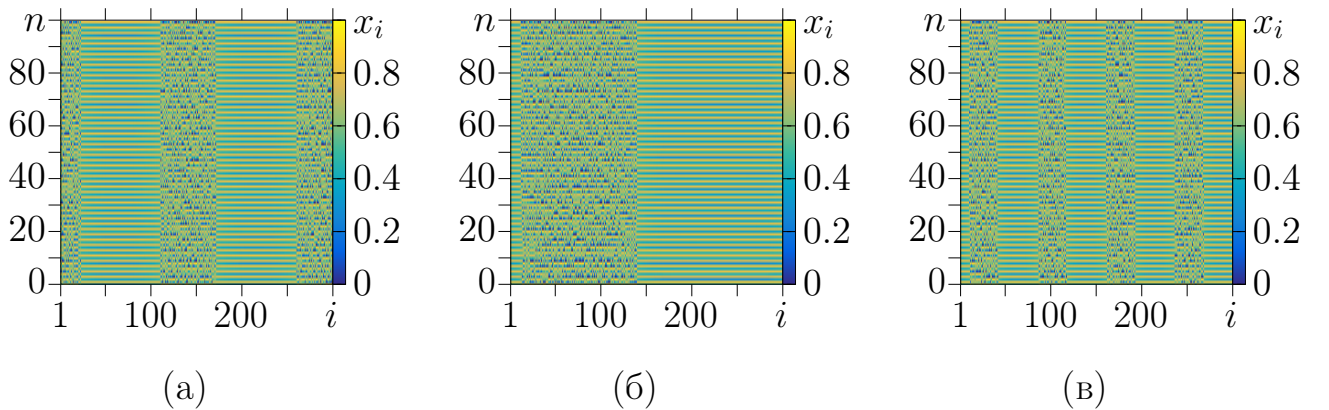


Рисунок 1.10. Пространственно-временные диаграммы динамики ансамбля логистических отображений для нелокальной связи (1.2) (а), отражающей связи (1.3) (б) и комбинации нелокальной и диагональной связей (1.4) (в) при

$$\sigma = 0.63, P = 120.$$

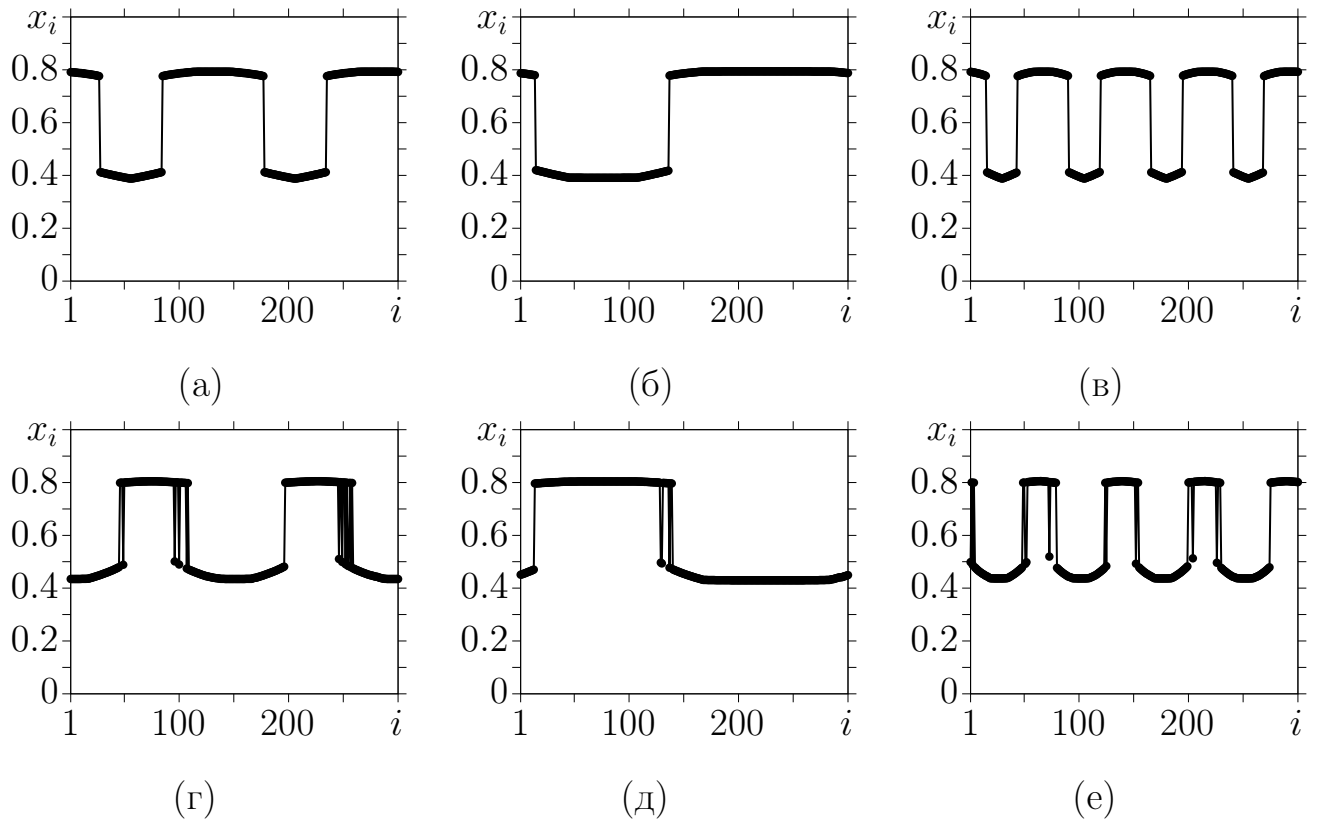


Рисунок 1.11. Иллюстрация явления мультистабильности при плавном изменении параметра силы связи: мгновенные пространственные профили амплитуд в случаях плавного уменьшения силы связи (а-в) и его плавного увеличения (г-е) для нелокальной связи (1.2) (а,г); отражающей связи (1.3) (б,д); и комбинации нелокальной и диагональной связей (1.4) (в,е) при

$$\sigma = 0.3, P = 120.$$

комбинации нелокальной с диагональной связей, в отличие от случая отражающей связи. В случае нелокальной связи и при добавлении диагональной связи к нелокальной сначала наблюдается уменьшение пространственного периода структуры при постепенном уменьшении радиуса связи. Затем, при дальнейшем уменьшении P , появляются уединенные некогерентные осцилляторы, их количество растет, и цепочка переходит в однородное некогерентное состояние. В случае отражающей связи при плавном уменьшении P в некогерентных кластерах появляются разрывы, их количество увеличивается, затем кроме разрывов появляются уединенные состояния и их количество также увеличивается

до тех пор, пока при $P = 2$ система не переходит в некогерентный режим. Что примечательно, пространственный период сохраняется для всех наблюдаемых структур в случае отражающей связи. Даже в некогерентном случае при $P = 2$ наблюдаются два отличных друг от друга некогерентных кластера. Такое поведение, предположительно, связано с особым типом симметрии этой топологии.

1.4.2 Кольцо связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо

В данном разделе в качестве парциального элемента кольца выбран осциллятор ФитцХью-Нагумо, находящийся в режиме бистабильности. Выбор данного режима обусловлен возможностью реализации структур с сосуществованием колебательного режима в некоторых кластерах и отсутствия колебаний в остальных осцилляторах. В общем уравнении (1.1) для кольца связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо имеем

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{pmatrix}; t \in [0; T]; \mathbf{F} = \begin{pmatrix} (x_i - x_i^3/3 - y_i)/\varepsilon \\ \gamma x_i - y_i - \beta \end{pmatrix}; \mathbf{S} = \begin{pmatrix} x_j - x_i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Здесь $x_i = x_i(t)$ и $y_i = y_i(t)$ – безразмерные динамические переменные, задающие состояние отдельного осциллятора ФитцХью-Нагумо с номером i ; x_i – это активатор (потенциал мембраны), а y_i – ингибитор (переменная, отвечающая всему току через мембрану); ε , γ и β – управляющие параметры, определяющие динамику отдельного элемента: параметр ε задает временной масштаб первой переменной относительно второй; β является параметром асимметричности, значение которого влияет также и на динамику; для случая $\beta > 0$ при $\gamma < 0.72$ фазовый портрет отдельного осциллятора характеризуется двумя устойчивыми фокусами и седловым состоянием равновесия между ними, при $\gamma \approx 0.72$ соответствует бифуркации Андронова-Хопфа, после которой при $\gamma > 0.72$ в фазовом портрете системы возникает устойчивый предельный цикл. В этой главе

эти параметры одинаково зафиксированы для всех элементов сети так, чтобы в отдельном осцилляторе, при отсутствии связей с другими элементами, реализовывался бистабильный режим ($\varepsilon = 0.2, \gamma = 0.7$ и $\beta = 0.0001$). В режиме бистабильности отдельный осциллятор, в зависимости от начальных условий, попадает в одно из двух устойчивых состояний равновесия [12, 193, 194]. Связь вводится в первое уравнение системы с силой связи σ . Остальные обозначения для системы (1.9) даны в разделе 1.2 в описании к уравнению (1.1). Начальные условия выбирались случайными в диапазонах $x_i(0) \in [-1; 1]$, $y_i(0) \in [-1; 1]$. Время установления было выбрано равным 1000 единицам времени, после этого пространственно-временные диаграммы рассчитывались на 40 единицах времени, то есть $T = 1040$. Интегрирование системы (1.9) выполнялось методом Гюна – методом второго порядка с шагом 0.001. Количество осцилляторов в кольце (1.1) было выбрано $N = 300$.

Проведенные численные исследования для разных типов топологии связи (карты режимов для различных случаев топологии связей приведены на рисунке 1.12) показали, что, также как и для модели связанных логистических отображений, добавление диагональной связи в кольцо связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо качественно не влияет на его свойства (рисунок 1.12,а,в). Однако введение отражающей связи заметно изменяет карту режимов на плоскости (P, σ) (рисунок 1.12,б). С одной стороны, на плоскости параметров (P, σ) уменьшается область II, в которой могут наблюдаться стоячие волны. В случае отражающей связи они имеют место только при достаточно малых значениях параметра нелокальности связи P . С другой стороны, в ансамбле не возникают бегущие волны (рисунок 1.12,б), которые реализуются в случаях нелокальной и нелокальной с диагональной связи (область III на рисунке 1.12,а,в).

При малых значениях силы связи вне зависимости от её топологии наблюдаются замороженные пространственно-временные структуры. Эти режимы характеризуются нерегулярным распределением осцилляторов между двумя положениями равновесия, обусловленным случайным распределением на-

чальных состояний $x_i(t = 0)$, $y_i(t = 0)$. При увеличении параметра σ в случае любой топологии при достаточно малых значениях параметра нелокальности P в кольце осцилляторов ФитцХью-Нагумо наблюдаются стоячие волны. Режим характеризуется наличием периодических колебаний в некоторых неподвижных кластерах при отсутствии колебаний в остальных осцилляторах. Отметим, что сами парциальные элементы были выбраны в режиме бистабильности, то есть в отсутствие колебаний, и наблюдаемые колебания возникают именно в результате связи между элементами кольца. Режимы на рисунке 1.13 качественно схожи, но длина волны в пространстве зависит от топологии связей. При дальнейшем увеличении силы связи, вне зависимости от её топологии, все осцилляторы демонстрируют одинаковый режим равновесия. Этот режим отличается от режима в области I тем, что все осцилляторы находятся в одном из двух возможных состояний равновесия. Под действием связи все осцилляторы оказываются в одном из состояний равновесия, несмотря на то, что начальное

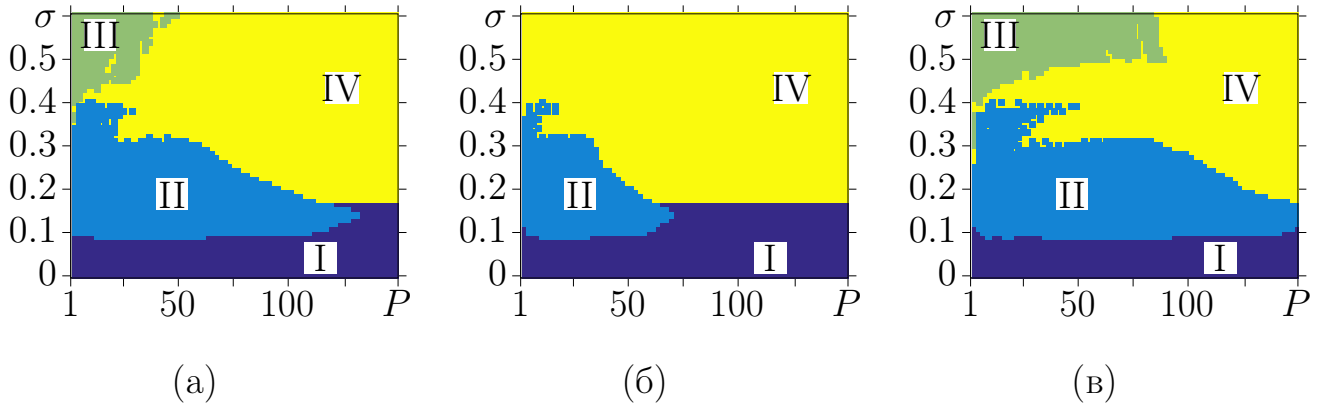


Рисунок 1.12. Карты режимов для кольца связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо в случае нелокальной связи (1.2) (а), отражающей связи (1.3) (б) и комбинации нелокальной с диагональной связей (1.4) (в) на плоскости параметров (P, σ) . В области I наблюдаются замороженные структуры с нерегулярным распределением между двумя положениями равновесия, в области IV наблюдаются замороженные когерентные структуры, II и III – области существования стоячих и бегущих волн, соответственно.

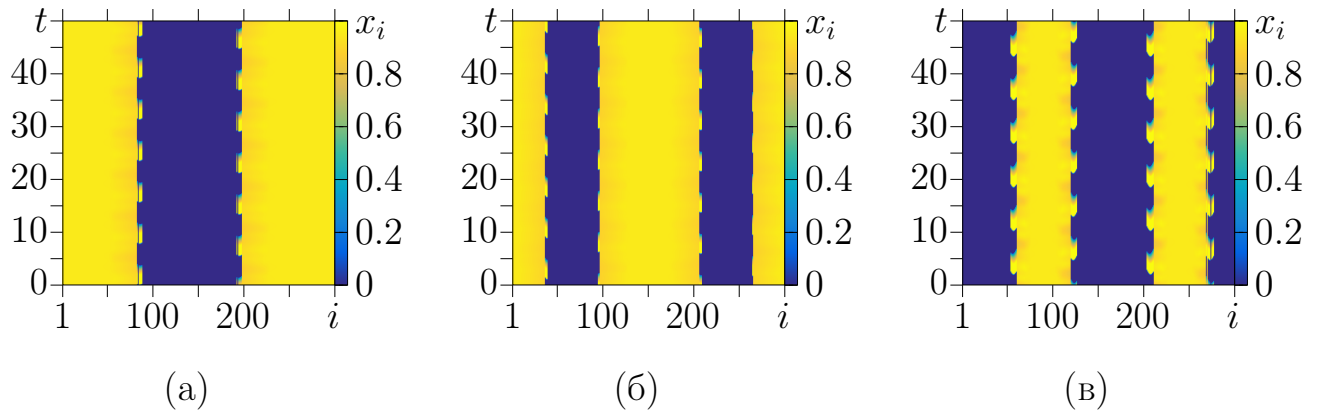


Рисунок 1.13. Пространственно-временные диаграммы амплитуд $x_i(t)$ осцилляторов ФитцХью-Нагумо в случае нелокальной связи (1.2) (а), отражающей связи (1.3) (б) и комбинации нелокальной с диагональной связей (1.4) (в) для режима стоячей волны при $\sigma = 0.2$, $P = 30$.

распределение их состояний подразумевало их принадлежность разным состояниям равновесия. Наконец, при достаточно больших значениях силы связи σ , кольцо связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо может демонстрировать режим бегущих волн в случаях нелокальной связи и нелокальной с диагональной связи. Этот режим отличается от режима, наблюдаемого в области II, только

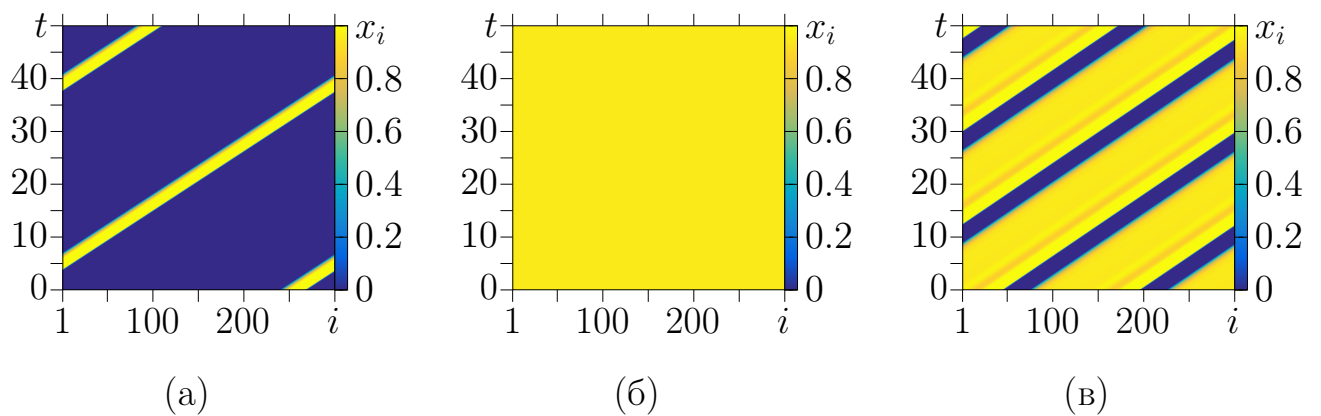


Рисунок 1.14. Пространственно-временные диаграммы амплитуд $x_i(t)$ осцилляторов ФитцХью-Нагумо в случае нелокальной связи (1.2) (а), отражающей связи (1.3) (б) и комбинации нелокальной с диагональной связей (1.4) (в) для режима бегущей волны (а,в) и для когерентного режима (б) при $\sigma = 0.6$, $P = 30$.

тем, что структуры движутся вдоль кольца с некоторой скоростью. В случае же отражающей связи режим бегущих волн не наблюдается (рисунок 1.14, режимы на рисунках 1.14,а,в соответствуют области III на рисунках 1.12,а,в). Это, скорее всего, обусловлено тем, что осевая симметрия отражающей связи не допускает существования бегущих волн. Таким образом, добавление диагональной связи в кольцо осцилляторов ФитцХью-Нагумо качественно не изменяет поведение ансамбля, также как и в случае кольца логистических отображений. Введение же отражающей связи приводит к исчезновению бегущих волн и уменьшению области существования стоячих волн (рисунок 1.12).

1.4.3 Кольцо связанных отображений Курбажа-Некоркина

Модель Курбажа-Некоркина, выбранная в качестве индивидуального элемента одномерного ансамбля, представляет собой двумерное дискретное отображение ($n = 0, 1, \dots, T$ в системе (1.1)) и моделирует основные свойства нейронов. В случае кольца связанных отображений Курбажа-Некоркина обозначения в уравнении (1.1) имеют следующий вид:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x_i(n) + x_i(n)(x_i(n) - \alpha)(1 - x_i(n)) - y_i(n) - \beta H(x_i(n) - d) \\ y_i(n) + \varepsilon(x_i(n) - J) \end{pmatrix}; \quad (1.10)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \begin{pmatrix} x_i(n+1) \\ y_i(n+1) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} x_j(n) - x_i(n) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Динамические переменные $x_i(n)$ являются быстрыми, а $y_i(n)$ – медленными. Медленное изменение переменной $y_i(n)$ задается малым значением параметра $\varepsilon \in [0.001, 0.005]$. Слагаемое J управляет уровнем деполяризации мембраны ($J < d$). Параметры $\beta > 0$ и $d > 0$ определяют порог возбуждения взрывных колебаний. Параметры индивидуального отображения фиксированы: $\alpha = 0.27$, $\beta = 0.04$, $J = 0.15$, $d = 0.5$, $\varepsilon = 0.003$. Радиус связи $P = 200$ во всех рассмат-

риваемых случаях. В отсутствие связи, в отдельном элементе в выбранном режиме наблюдаются спайковые колебания, а взрывные колебания отсутствуют. Данный режим выбран ввиду его простоты по сравнению с переключающимися и взрывными колебаниями. Последние также могут представлять интерес, но не рассматривались в рамках проведенных исследований. Начальные условия выбирались случайными, равномерно распределенными в соответствующих интервалах: $x_i(n=0) \in [-0.2, 0.4]$, $y_i(n=0) \in [-0.02, 0.04]$. Наблюдаемый режим считался установившимся после 10^6 итераций. Общее время расчета составляло $T = 10^6 + 500$ итераций. Общее число элементов в кольце отображений Курбажа-Некоркина было выбрано равным $N = 1000$.

При очень слабой силе связи между элементами кольцо демонстрирует нерегулярное поведение для любого из трех рассматриваемых типов топологии связей. При увеличении до значения $\sigma = 0.01$ в системе для любой топологии наблюдается множество уединенных состояний, равномерно распределенных по всему кольцу. Наконец, при достаточно больших значениях силы связи ($\sigma \geq 0.025$ в случаях нелокальной и отражающей связей, $\sigma \geq 0.04$ в случае комбинации нелокальной с диагональной связей) кольцо демонстрирует режим полной синхронизации. Все перечисленные режимы наблюдаются в исследуемой системе вне зависимости от топологии связей, но переход от некогерентности к химерной структуре при этом осуществляется по-разному. В случаях нелокальной и отражающей типов связей с увеличением силы связи увеличивается количество когерентных осцилляторов за счет расширения области когерентности (на рисунке 1.15,а-в приведен результат только для случая отражающей связи), а в случае комбинации нелокальной с диагональной связей происходит резкий скачок от некогерентности к химерной структуре, сосуществующей с уединенными состояниями (рисунок 1.15,г-е).

Таким образом, в рассмотренных в данном разделе ансамблях связанных нелинейных осцилляторов изменение топологии межэлементной связи оказывает заметное влияние на пространственно-временную динамику систем. Кроме

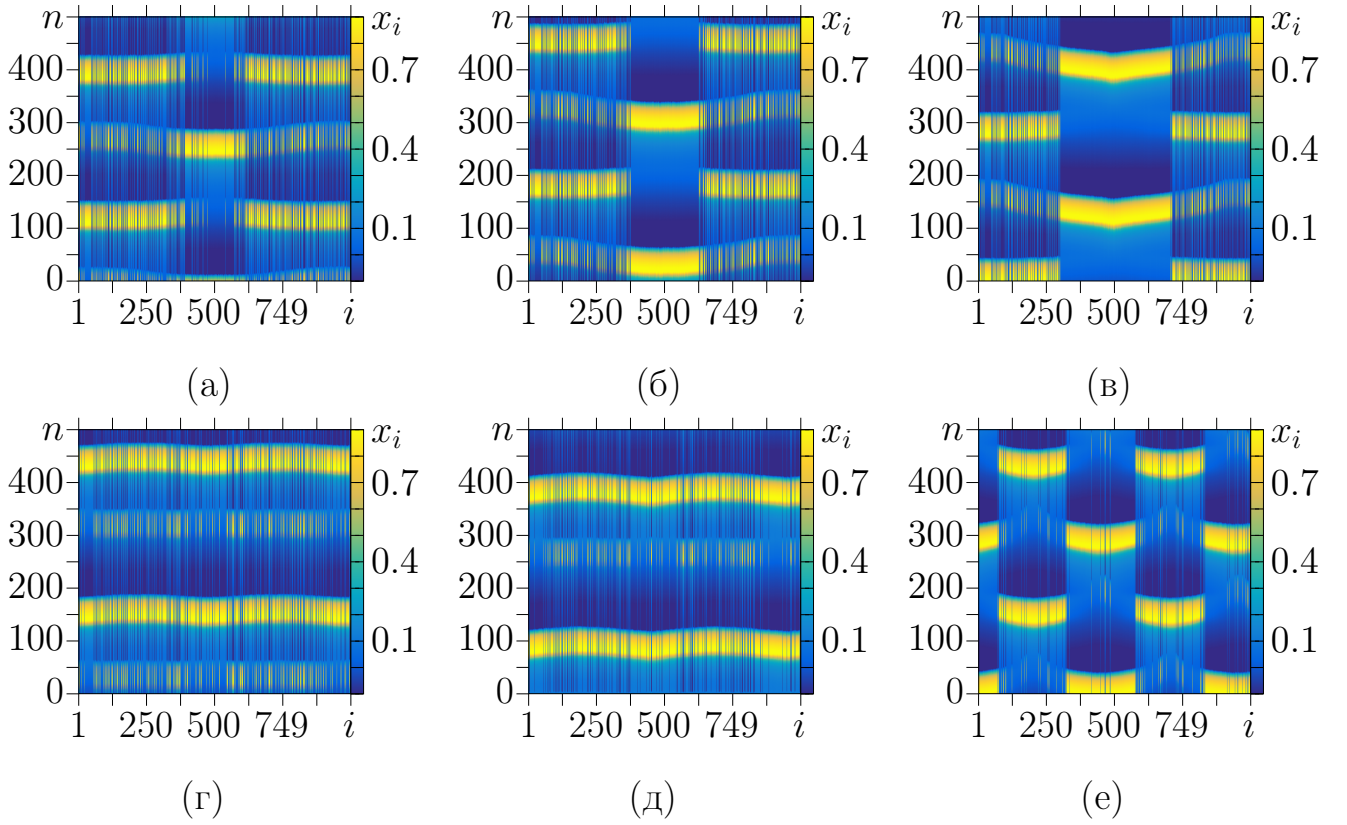


Рисунок 1.15. Пространственно-временные диаграммы амплитуд $x_i(n)$ связанных отображений Курбажа-Некоркина при переходе от некогерентности к когерентности в случае отражающей связи (1.3) при $P = 200$ и $\sigma = 0.0145$ (а), $\sigma = 0.015$ (б), $\sigma = 0.02$ (в) и в случае комбинации нелокальной и диагональной связей (1.4) при $P = 200$ и $\sigma = 0.03$ (г), $\sigma = 0.035$ (д), $\sigma = 0.0382$ (е).

того, как показали исследования, реализация сложных структур и режимов зависит как от вида топологии связи, так и от типа парциального элемента ансамбля.

1.5 Влияние шума на химерные состояния разных типов

В данном разделе представлены результаты численного анализа влияния шума различной интенсивности на пространственно-временные режимы в коль-

це (1.1) в случае логистических отображений и модифицированных отображений Рикера в качестве парциальных элементов. Оба отображения демонстрируют сценарий Фейгенбаума перехода к хаосу при увеличении управляющего параметра. Показаны различия между амплитудными и фазовыми химерами в кольцах хаотических отображений при наличии шума и описаны особенности динамики рассматриваемых ансамблей при увеличении интенсивности шума.

1.5.1 Модели и методы анализа устойчивости

В соответствии с уравнением (1.1) для кольца связанных логистических отображений $\mathbf{F}(\mathbf{u}_i) = f_l(x_i(n)) = \alpha x_i(n)(1 - x_i(n))$, для ансамбля связанных отображений Рикера $\mathbf{F}(\mathbf{u}_i) = f_r(x_i(n)) = \alpha |x_i(n)| \cdot \exp(-x_i(n))$. В обоих случаях $\hat{\mathbf{u}}_i = x_i(n + 1)$; $n = 0, 1, 2, \dots, T$, межэлементная связь вводится через функции $\mathbf{S} = f(x_j(n)) - f(x_i(n))$ и является нелокальной (1.2). Управляющий параметр α задает локальную динамику индивидуального элемента и полагается равным $\alpha = 3.8$ для логистических отображений и $\alpha = 18.3$ для отображений Рикера.

Внешнее шумовое воздействие в уравнении (1.1) задается слагаемым $\mathbf{E} = \sqrt{2D}\xi_i(n)$, где $\xi_i(n)$ – независимый источник шума с гауссовым распределением со следующими параметрами: $\langle \xi_i(n) \rangle \equiv 0$, $\langle \xi_i(n)\xi_j(k) \rangle = \delta_{i,j}\delta(n, k)$, где скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают среднестатистическое значение, $\delta_{i,j}$ и $\delta(n, k)$ – дельта-символы Кронекера. Интенсивность D всех источников шума $\xi_i(n)$ выбирается одинаковой. Количество элементов в ансамблях $N = 1000$. Для всех проведенных численных экспериментов использовалась одна реализация случайно распределенных начальных условий. Этот набор был получен с использованием генератора случайных чисел с равномерным распределением в интервале $[0, 1]$ для кольца логистических отображений и в интервале $[-1, 1]$ для кольца отображений Рикера. Поскольку все режимы, представляющие интерес в на-

стоящей работе, наблюдаются в обеих системах при $P = 345$, этот параметр остается фиксированным для всех численных экспериментов.

Для определения типа динамики кольца в целом рассчитывается старший показатель Ляпунова вдоль фазовой траектории исследуемой системы с шумом по алгоритму Бенеттина [195, 196].

В качестве статистической характеристики взаимного поведения соседних осцилляторов используется распределение значений среднеквадратичного отклонения, которое вычисляется следующим образом:

$$\delta_i = \left\langle (2x_i(n) - x_{i-1}(n) - x_{i+1}(n))^2 \right\rangle, \quad (1.11)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени. Распределение δ_i позволяет более точно идентифицировать наличие химерных структур и их типы. Для более удобного сравнения распределений для различных режимов, значения δ_i могут быть нормированы на максимальное значение δ_m .

1.5.2 Устойчивость химерных состояний разного типа

Рассмотрим устойчивость фазового химерного состояния в кольце нелокально связанных логистических отображений (рисунок 1.16,а) при фиксированном значении параметра силы связи $\sigma = 0.242$ и при увеличении интенсивности шума D . При росте интенсивности шума до $D = 0.00007$ значение старшего показателя Ляпунова плавно увеличивается, затем несколько уменьшается для $D \in (0.00007, 0.0002)$ и нерегулярно переключается между отрицательными и положительными значениями при $D > 0.0002$. При положительных значениях показателя Ляпунова фазовая траектория системы становится экспоненциально неустойчивой, и осцилляторы кольца демонстрируют индуцированный режим динамического хаоса.

В результате исследований установлено, что режим фазовой химеры является довольно устойчивым к внешнему шумовому воздействию: вид мгновенного профиля амплитуд качественно сохраняется (на нем различимы когерентные и некогерентные кластеры) вплоть до $D \sim 0.0001$ (рисунки 1.16,а,б), после чего при $D > 0.0001$ разрушается, и кольцо демонстрирует нерегулярное поведение в пространстве (рисунок 1.16,в). На рисунке 1.16,б флуктуации в середине когерентного профиля очень похожи на флуктуации в некогерентном кластере амплитудной химеры, но говорить о наличии амплитудной химеры сложно, так как довольно сильные флуктуации наблюдаются во всех узлах кольца, и отрицательное значение старшего показателя Ляпунова свидетельствует об отсутствии в кольце режима динамического хаоса.

Рассмотрим теперь влияние внешнего шумового воздействия на химеры амплитудного типа на примере структуры при $\sigma = 0.286$ (рисунки 1.17,а,г). Расчеты показали, что в этом случае старший показатель Ляпунова является положительным при любых значениях интенсивности шума. Амплитудная химера при $\sigma = 0.286$ в отсутствие шума стационарна, как минимум, в течение 10^5 итераций. При введении шума стационарность химеры сохраняется при $D \in [0, 10^{-5}]$ (рисунки 1.17,б,д), после чего начальная структура разрушается

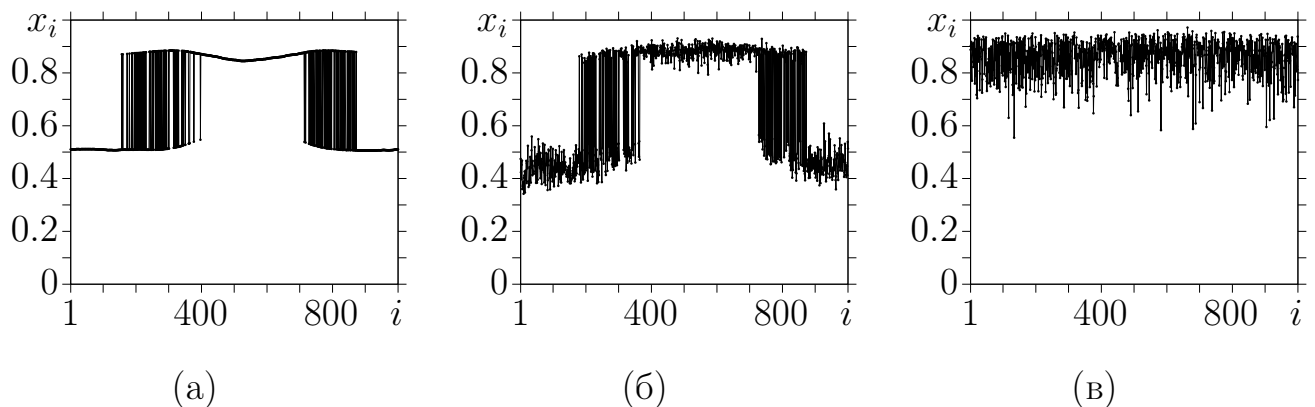


Рисунок 1.16. Мгновенные пространственные профили амплитуд x_i при $D = 0$ (а), $D = 0.0001$ (б), $D = 0.00028$ (в) для режима фазовой химеры в кольце связанных логистических отображений при $\sigma = 0.242$ и $P = 345$.

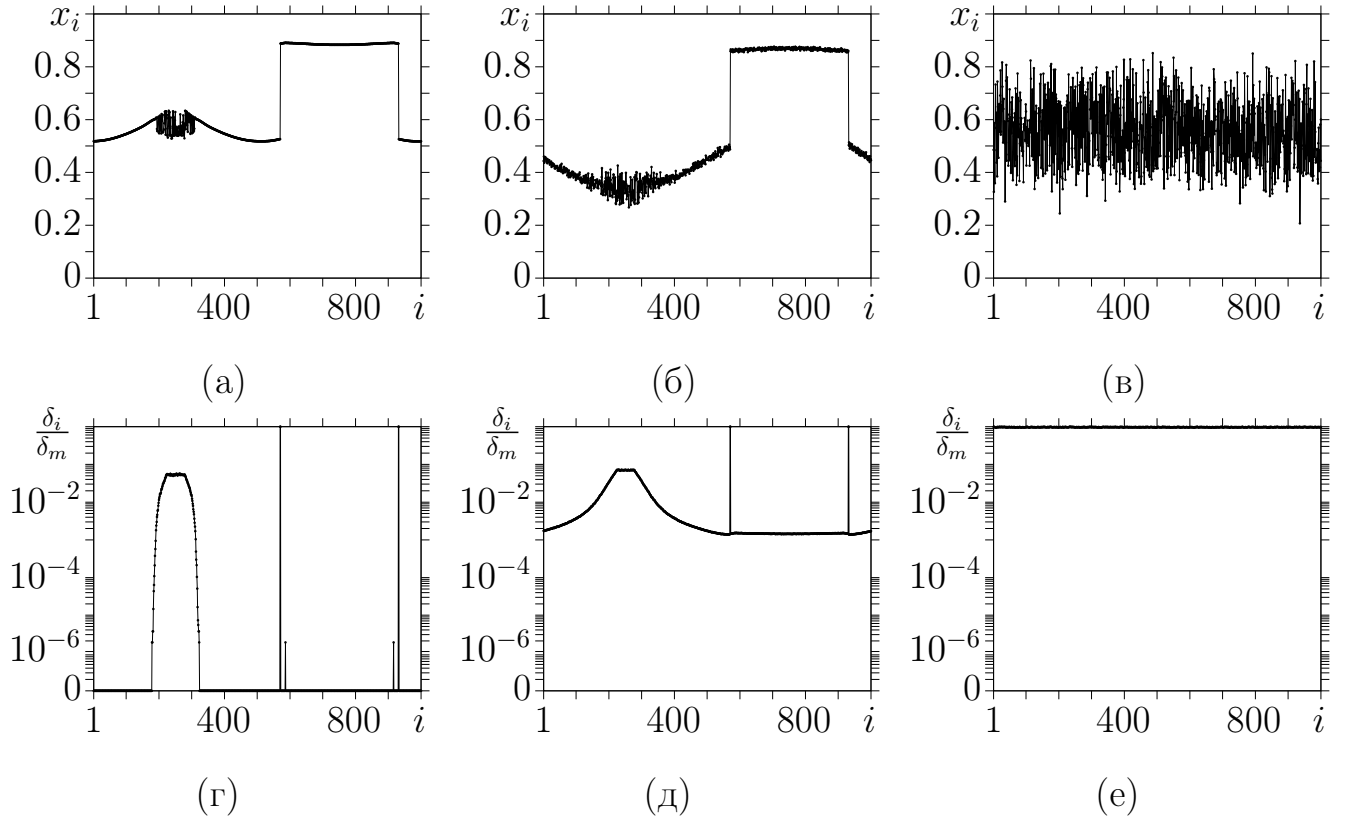


Рисунок 1.17. Мгновенные пространственные профили амплитуд x_i (а-в) и распределения нормированных значений δ_i/δ_m (г-е) при $D = 0$ (а,г), $D = 0.00001$ (б,д), $D = 0.0004$ (в,е) для режима амплитудной химеры в кольце связанных логистических отображений при $\sigma = 0.286$ и $P = 345$.

и при $D > 10^{-4}$ в системе наблюдается пространственно-некогерентный режим (рисунки 1.17,в,е).

1.5.3 Индуцированный шумом переход от фазовой к амплитудной химере

Переход от фазовой химеры к амплитудной возможно наблюдать как в кольце логистических отображений, так и в кольце отображений Рикера. В кольце логистических отображений режим фазовой химеры реализуется в отсутствие шума при $\sigma = 0.258$ и $P = 0.345$ (рисунки 1.18,а,г). Структура, по-

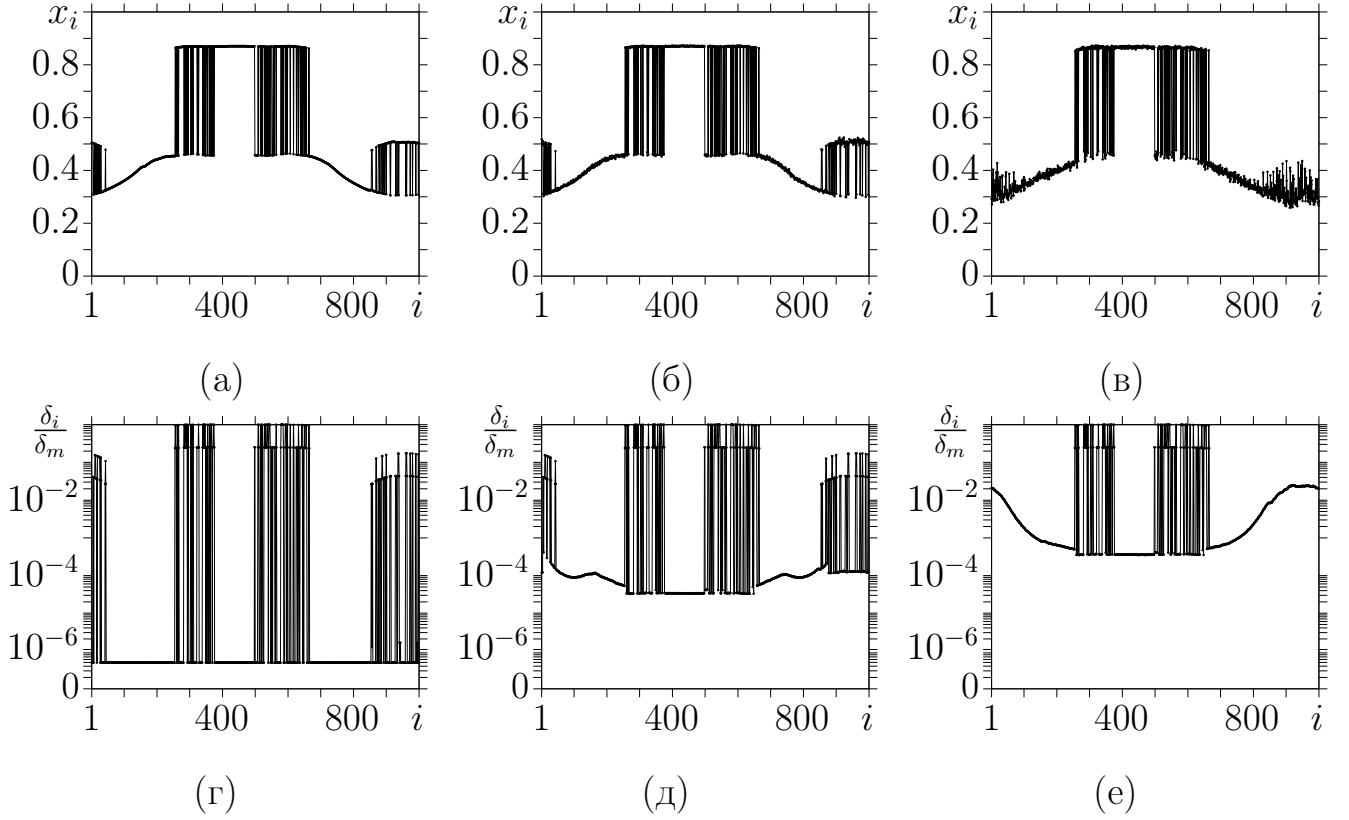


Рисунок 1.18. Мгновенные пространственные профили амплитуд x_i (а-в) и распределения нормированных значений δ_i/δ_m (г-е) при $D = 0$ (а,г), $D = 10^{-6}$ (б,д), $D = 10^{-5}$ (в,е) для режима фазовой химеры в кольце связанных логистических отображений при $\sigma = 0.258$ и $P = 345$.

казанная на рисунке 1.18,а, включает два типа некогерентных кластеров. Два из них (осцилляторы с номерами $i \in (250, 350) \cup (500, 680)$) характеризуются тем, что отдельные их элементы демонстрируют 2-цикл, тогда как третий (осцилляторы с номерами $i \in (1, 50) \cup (850, 1000)$) – цикл периода 4. Рассмотрим эволюцию последнего некогерентного кластера при введении шума с увеличивающейся интенсивностью.

Как видно из мгновенных профилей (рисунки 1.18,а,б) и соответствующих распределений δ_i/δ_m (рисунки 1.18,г,д), количество некогерентных областей сохраняется и общий вид структуры устойчив к шуму. Такое поведение наблюдается вплоть до $D \approx 1,4 \cdot 10^{-6}$. При этом отрицательные значения старшего показателя Ляпунова свидетельствует о сохранении периодической

динамики отдельных элементов. Далее, при $D > 1,4 \cdot 10^{-6}$ некогерентная область второго типа трансформируется в некогерентный кластер, характерный для амплитудной химеры (рисунки 1.18,в,е). Наличие нерегулярности колебаний во времени подтверждается положительным значением старшего показателя Ляпунова. При переходе от фазовой химеры к амплитудной зависимость среднеквадратичного отклонения качественно изменяется: на месте нерегулярных пиков возникает гладкая кривая с максимумом в середине некогерентной области амплитудной химеры (рисунки 1.18,д,е).

Описанные выше структуры с двумя типами фазовых химерных состояний также наблюдаются в ансамбле отображений Рикера. Аналогично описанному выше сценарию, химеры фазового типа качественно сохраняются до некоторого значения интенсивности $D < 10^{-5}$, но при $D > 10^{-4}$ заменяются химерами амплитудного типа, когда старший показатель Ляпунова становится положительным. Однако при промежуточных значениях $D \in (10^{-5}, 10^{-4})$ возможно наблюдение как зашумленных фазовых химер, так и нерегулярных в пространстве и времени структур. При дальнейшем увеличении интенсивности шума пространственно-временная структура становится полностью нерегулярной.

1.5.4 Индуцирование амплитудной химеры шумом

В ансамбле нелокально связанных отображений Рикера в отсутствие шума при значении силы связи $\sigma = 0.274$ возможно наблюдение фазовой химеры при задании случайных начальных условий (рисунки 1.19,б,д). Рассмотрим эволюцию этой структуры при введении шума различной интенсивности. Как видно на приведенных на рисунке 1.19,б,д мгновенном профиле амплитуд и распределения значений δ_i/δ_m , в середине когерентного кластера фазовой химеры возникает нерегулярный кластер, похожий по статистической характеристике

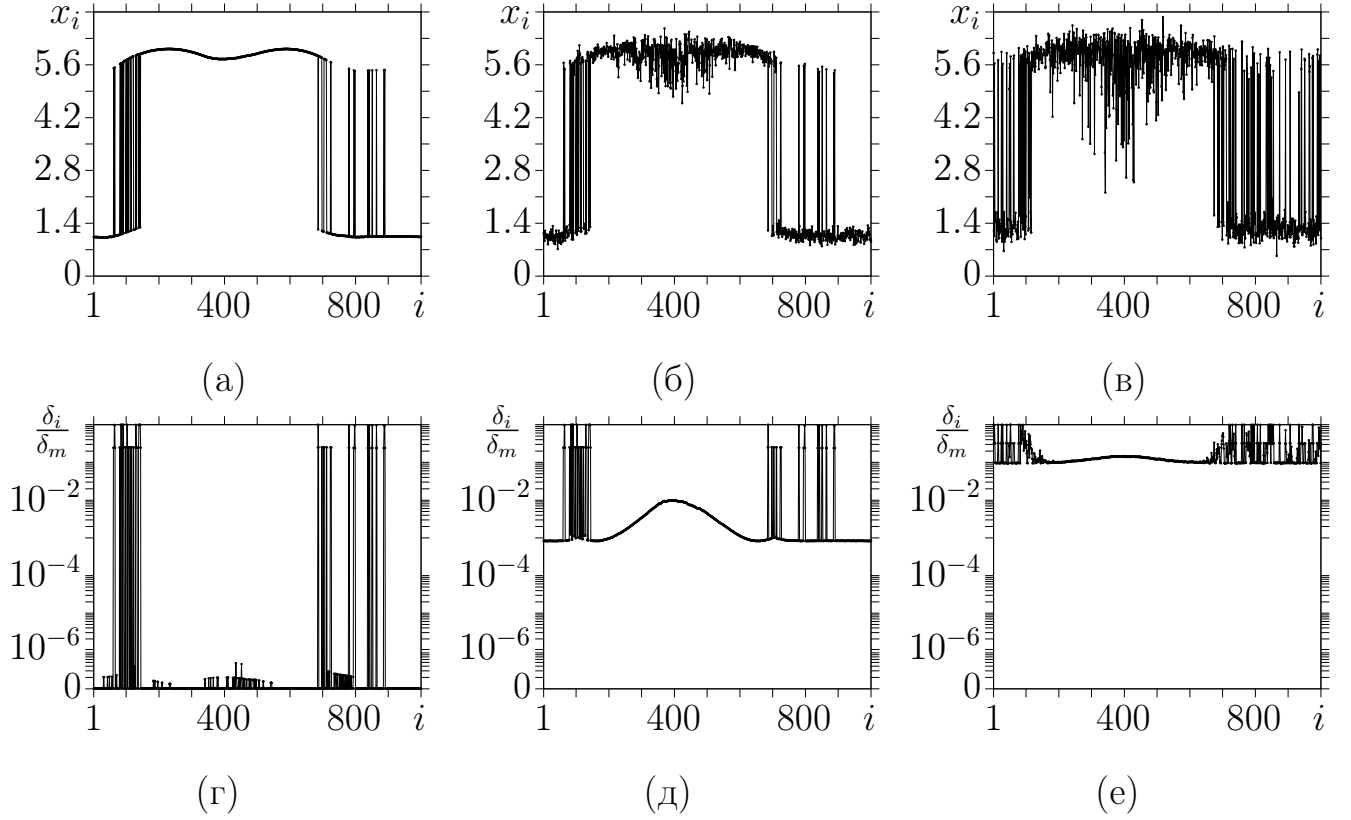


Рисунок 1.19. Мгновенные пространственные профили амплитуд x_i (а-в) и распределения нормированных значений δ_i/δ_m (г-е) при $D = 0$ (б,д), $D = 10^{-2}$ (в,е), $D = 0.04$ (г,ж) для случая индуцированной амплитудной химеры в кольце связанных отображений Рикера при $\sigma = 0.274$ и $P = 345$.

на нерегулярный кластер амплитудной химеры. Однако наблюдаемая амплитудная химера отличается от обычных тем, что показатель Ляпунова остается отрицательным: $\Lambda \approx -0.12$ при $D = 0.02$. При дальнейшем увеличении интенсивности шума показатель Ляпунова становится положительным, но первоначальная структура в целом размывается (рисунок 1.19,в), что подтверждается расчетом соответствующей статистической характеристики (рисунок 1.19,е).

1.5.5 Индуцированный переход от амплитудной к фазовой химере

Исследования показали, что в ансамбле отображений Рикера возможен переход от амплитудной к фазовой химере при увеличении интенсивности шума. Несмотря на то, что внешнее воздействие нерегулярно, система переходит от более хаотической структуры (амплитудная химера) к менее хаотической (фазовая химера). На рисунке 1.20 продемонстрирован такой переход для случая $\sigma = 0.193$. Распределения нормированных значений отклонения (рисунки 1.20,г-е) показывают изменение характера поведения ансамбля в некогерент-

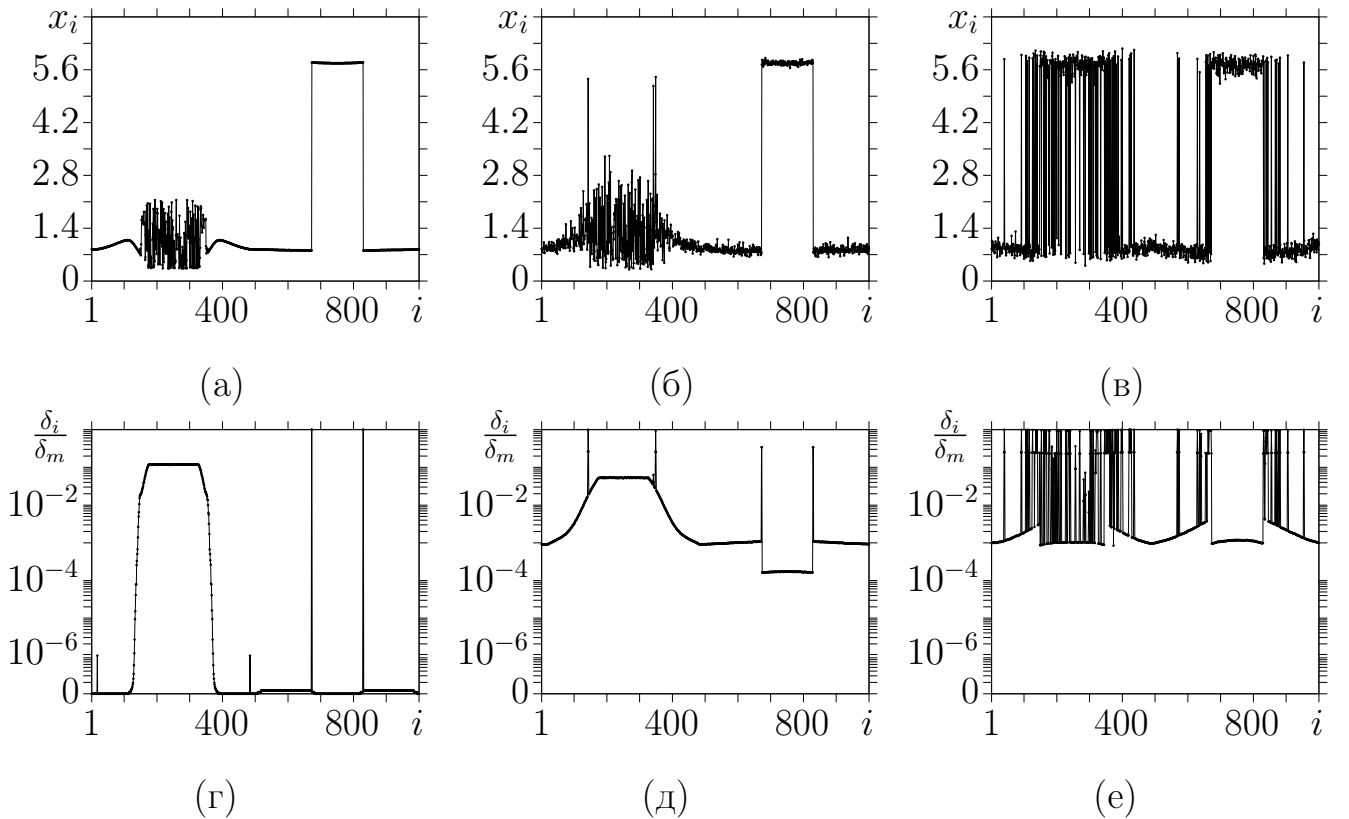


Рисунок 1.20. Мгновенные пространственные профили амплитуд x_i (а-в) и распределения нормированных значений δ_i/δ_m (г-е) при $D = 0$ (а,г), $D = 0.001$ (б,д), $D = 0.01$ (в,е) для перехода от амплитудной химеры к химере фазового типа в кольце связанных отображений Рикера при $\sigma = 0.193$ и $P = 345$.

ном кластере: на месте гладкого распределения (рисунки 1.20,а,г) возникают нерегулярные выбросы, характеризующие некогерентную область фазовой химеры (рисунок 1.20,е), которая отчетливо видна на слегка зашумленном профиле мгновенных амплитуд (рисунок 1.20,в).

Таким образом, рассмотренные химерные состояния продемонстрировали устойчивость к достаточно большому по интенсивности внешнему шумовому некоррелированному в пространстве возмущению. В большинстве случаев воздействие шума приводит к увеличению нерегулярности в ансамбле: либо к появлению амплитудной химеры вместо фазовой, либо к появлению амплитудной химеры на месте гладкого профиля, либо к возникновению полностью некогерентных структур. Эти факты подтверждаются расчетом старшего показателя Ляпунова. Но, как было показано в последнем случае, возможен также переход от более хаотичной во времени амплитудной химеры к более периодической во времени фазовой химере при увеличении интенсивности шума. Все наблюдаемые в разделе структуры оставались стационарными на всем времени наблюдения в численном эксперименте, но могут быть метастабильными и измениться спустя довольно большое время (что удовлетворяет определению химерных состояний).

1.6 Синхронизация химерных состояний в двух связанных кольцах

В настоящем разделе представлены результаты исследования и сравнительного анализа эффектов вынужденной и взаимной синхронизации в системе двух связанных колец логистических отображений в случаях диссипативной и инерционной связи между ансамблями. Исследуемая система связанных ансамблей задается общим соотношением (1.5), в котором используются сле-

дующие соотношения: $\hat{\mathbf{u}}_i^k = x_i^k(n+1)$, $n = 1, 2, \dots, T$; $\mathbf{F}(\mathbf{u}_i^k) = f(x_i^k(n)) = \alpha^k x_i^k(n)(1 - x_i^k(n))$; $\mathbf{S}^k = \mathbf{F}(x_j^k(n)) - \mathbf{F}(x_i^k(n))$, где $k = 1, 2$ – номер слоя. Количество элементов в каждом кольце фиксировано и равно $N = 1000$. Параметры α^k задают динамику отдельных элементов в каждом слое. Связь между одномерными ансамблями является локальной (i -й элемент первого ансамбля ($x_i^1(n)$) связан с i -м элементом второго ($x_i^2(n)$)) и может быть либо однонаправленной при $\gamma^{12} = \gamma$, а $\gamma^{21} = 0$ (для исследования эффекта вынужденной синхронизации), либо симметричной при $\gamma^{12} = \gamma^{21} = \gamma$ (для исследования эффекта взаимной синхронизации). Система уравнений (1.5) решается численно для случая периодических граничных условий и начальных условий $x_i^{1,2}(0)$, случайно распределенных в интервале $[0, 1]$. Вначале, в отсутствие связи между ансамблями, проводится расчет установившихся структур в течение $T_{\text{пер}} = 3.5 \times 10^5$ итераций. При введении связи между кольцами время расчета составляет $T = 10^6$ итераций.

Реализуемые пространственно-временные структуры иллюстрируются графически с помощью пространственно-временных профилей для переменных x_i^1 и x_i^2 системы (1.5). В этом случае для каждого элемента ансамблей $i = 1, 2, \dots, N$ на график выводятся первые 15 итераций после периода установления $T_{\text{пер}}$.

Для характеристики степени синхронизации рассчитывалось среднеквадратичное усредненное по времени отклонение (девиация) между симметричными элементами связанных ансамблей x_i^1 и x_i^2 :

$$\delta_i = \sqrt{\langle (x_i^2(n) - x_i^1(n))^2 \rangle}. \quad (1.12)$$

и среднеквадратичное отклонение, усредненное по времени и всем элементам i ансамбля,

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{N(T+1)} \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^T (x_i^2(n) - x_i^1(n))^2} \quad (1.13)$$

В выражениях (1.12) и (1.13) $n = 1, 2, \dots, T$ – время усреднения ($T = 10^6$ итераций) и N – количество элементов в каждом ансамбле.

При полной синхронности пространственно-временных структур во времени значение δ_i обращается в ноль для всех $i = 1, 2, \dots, N$. Случай, когда $\delta_i = 0$ для конечной группы осцилляторов взаимодействующих ансамблей, отвечает кластерной синхронизации структуры. Данная характеристика также показывает, какие кластеры элементов в пространстве ансамблей быстрее и эффективнее синхронизируются при изменении коэффициента межслойной связи. Расчет величины Δ (1.13) позволяет в целом оценить степень синхронной динамики взаимодействующих ансамблей.

Синхронизация идентичных ансамблей. Во-первых, интересен случай, когда связанные ансамбли идентичны и отличаются только начальными состояниями. Параметры несвязанных колец выбраны следующим образом: $\alpha^1 = \alpha^2 = 3.8$, $\sigma^1 = \sigma^2 = 0.32$, $P^1 = P^2 = 320$. В отсутствие межслойной связи после периода установления $T_{\text{пер}}$ в первом кольце (x_i^1) сосуществуют некогерентные кластеры амплитудной (осцилляторы $450 \leq i \leq 550$) и фазовой (осцилляторы $0 \leq i \leq 10$, $780 \leq i \leq 800$ и $980 \leq i \leq 1000$) химер (рисунок 1.21,а). Во втором кольце (x_i^2) реализуется режим фазовой химеры (кластеры осцилляторов $360 \leq i \leq 380$ и $800 \leq i \leq 830$) (рисунок 1.21,б).

Как показывают расчеты, в случае вынужденной синхронизации (однаправленная связь, первое кольцо (x_i^1) является управляющим, а второе кольцо (x_i^2) – управляемым, $\gamma^{21} = 0$, $\gamma^{12} = \gamma$) при увеличении силы однонаправленной диссипативной связи первое кольцо начинает влиять на второе. В результате пространственно-временная структура во втором кольце меняется и при $\gamma > 0.2$ становится идентичной химерной структуре в первом кольце (рисунки 1.22,а,б). Таким образом, имеет место вынужденная синхронизация химерной структуры в рассматриваемой системе связанных колец. Реализация данного эффекта подтверждается расчетом зависимости среднеквадратичного отклонения (1.13)

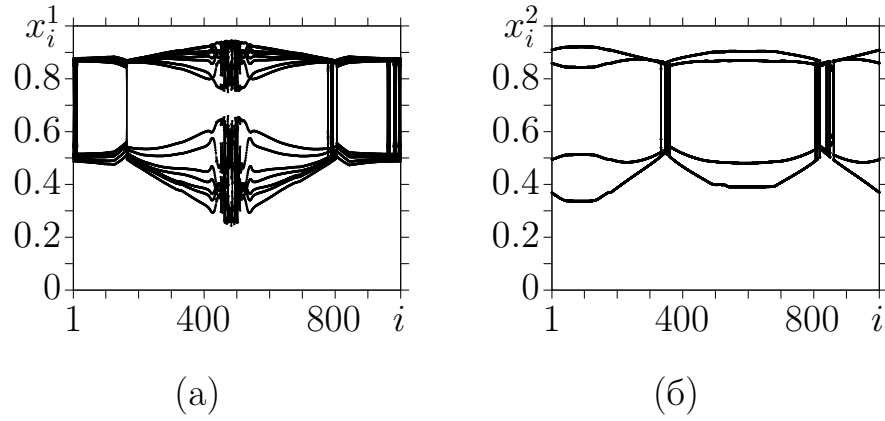


Рисунок 1.21. Пространственно-временные профили амплитуд для первого (x_i^1) (а) и второго (x_i^2) (б) колец системы (1.5) в отсутствие межслойной связи для различных реализаций случайных начальных условий. Параметры:

$$\alpha^1 = \alpha^2 = 3.8, \sigma^1 = \sigma^2 = 0.32, P^1 = P^2 = 320.$$

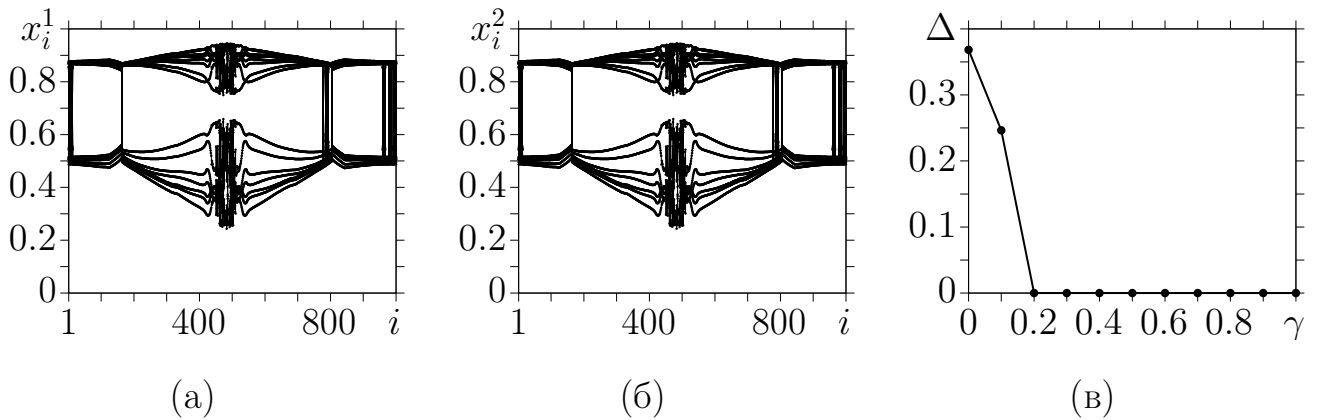


Рисунок 1.22. Пространственно-временные профили амплитуд для первого (а) и второго (б) колец системы (1.5) в случае однонаправленной диссипативной связи $\gamma = 0.2$, (в) зависимость среднеквадратичного отклонения (1.13) от γ .

$$\text{Параметры: } \alpha^1 = \alpha^2 = 3.8, \sigma^1 = \sigma^2 = 0.32, P^1 = P^2 = 320.$$

от силы межслойной связи γ (рисунок 1.22,в). Из графика видно, что значения Δ точно обращаются в ноль при $\gamma > 0.2$, что свидетельствует о полной синхронности наблюдаемых структур в связанных ансамблях.

Случай однонаправленной инерционной межслойной связи характеризуется отсутствием синхронизации и заметным усложнением структуры во вто-

ром кольце. При этом значения среднеквадратичного отклонения $\Delta > 0.22$ при изменении силы связи $\gamma \in [0, 1]$.

При введении симметричной диссипативной связи относительно малой интенсивности в ансамблях наблюдается эффект взаимной синхронизации пространственно-временных структур. При этом установившийся в результате взаимодействия синхронный режим может существенно отличаться от структур, реализующихся в ансамблях в отсутствие межслойной связи (сравни рисунки 1.21,а,б и рисунки 1.23,а,б). Взаимосвязанные системы подстраиваются друг под друга и демонстрируют некий промежуточный режим. В качестве примера на рисунках 1.23,а,б, приведены пространственно-временные профили синхронных структур в первом ансамбле (x_i^1) для двух различных значений силы связи (во втором ансамбле (x_i^2) структуры визуально идентичны). Стоит отметить, что с изменением коэффициента связи γ вид синхронных структур в кольцах меняется. Однако при этом среднеквадратичное отклонение значений переменных взаимодействующих колец всегда строго равно нулю. Данный факт иллюстрирует график зависимости $\Delta(\gamma)$, приведенный на рисунке 1.23,в, из которого видно, что существует конечная область значений $\gamma \in [0.1, 0.6]$, в

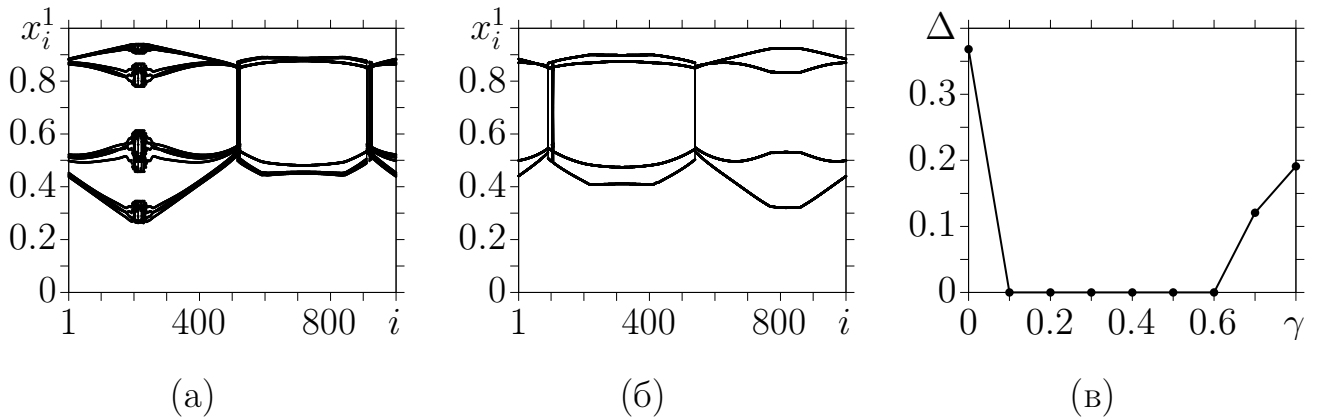


Рисунок 1.23. Пространственно-временные профили амплитуд для первого кольца в случае взаимной диссипативной связи $\gamma = 0.3$ (а) и $\gamma = 0.4$ (б) между слоями, (в) зависимость отклонения Δ (1.13) от силы межслойной связи γ (в). Параметры: $\alpha^1 = \alpha^2 = 3.8$, $\sigma^1 = \sigma^2 = 0.32$, $P^1 = P^2 = 320$.

которой $\Delta = 0$ и, следовательно, имеет место взаимная синхронизация химерных структур.

Также как и в случае однонаправленной связи, в случае взаимной инерционной связи ансамбли не могут подстроиться друг к другу вне зависимости от величины межслойной связи γ . Установившиеся пространственно-временные режимы в связанных кольцах отличаются от начальных структур и не совпадают друг с другом ($\Delta > 0.14$ для всех $\gamma \in [0, 1]$).

Синхронизация неидентичных ансамблей. При введении расстройки по управляющим параметрам и силе нелокальной связи во взаимодействующих ансамблях (1.5) ($\alpha^1 = 3.7, \alpha^2 = 3.85$ и $\sigma^1 = 0.23, \sigma^2 = 0.15$) в отсутствие межслойной связи в первом кольце реализуется пространственно-временной режим, включающий некогерентные кластеры амплитудной и фазовой химер (рисунок 1.24,а), а во втором – пространственно-временной хаос (рисунок 1.24,б).

При увеличении силы однонаправленной диссипативной межслойной связи $\gamma > 0.3$, при воздействии со стороны первого (управляющего) кольца на второе (управляемое) кольцо, пространственно-временные структуры в обоих кольцах становятся практически идентичными (сравни рисунок 1.24,а и рисунок 1.25,а). Из рисунка 1.25 видно, что реализуется эффект вынужденной син-

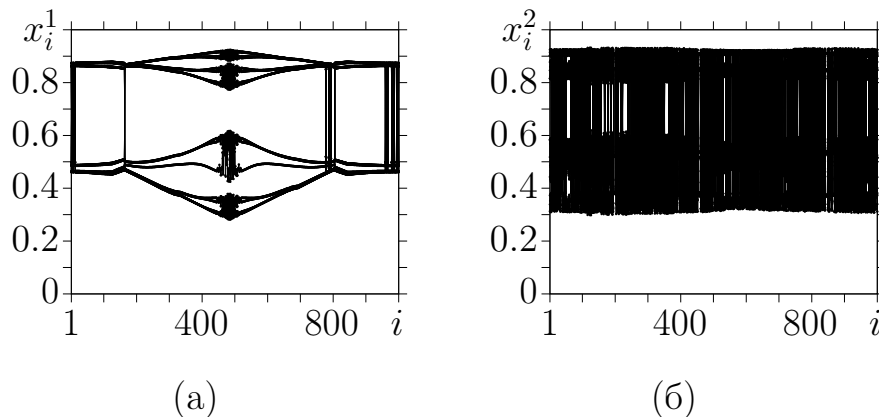


Рисунок 1.24. Пространственно-временные профили амплитуд для первого (а) и второго (б) колец системы (1.5) в отсутствие межслойной связи. Параметры:

$$\alpha^1 = 3.7 \text{ (а) и второго при } \alpha^2 = 3.85, \sigma^1 = 0.23, \sigma^2 = 0.15, P^1 = P^2 = 320.$$

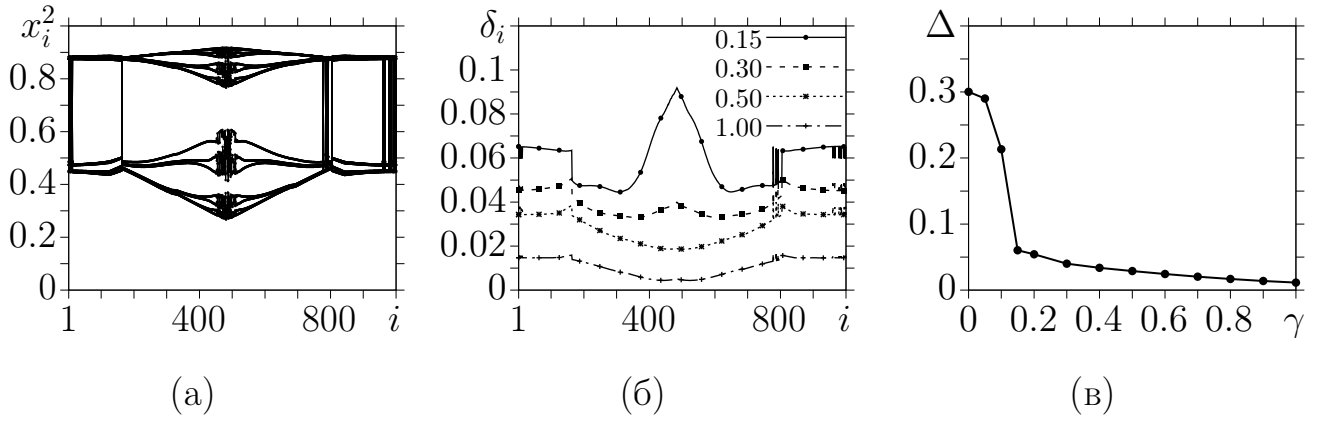


Рисунок 1.25. Пространственно-временной профиль амплитуд для второго кольца при $\gamma = 0.2$ (а), распределение значений δ_i (1.12) для нескольких значений γ (б), зависимость $\Delta(\gamma)$ (в) для системы (1.5) в случае однонаправленной диссипативной связи. Параметры: $\alpha^1 = 3.7$, $\alpha^2 = 3.85$, $\sigma^1 = 0.23$, $\sigma^2 = 0.15$, $P^1 = P^2 = 320$.

хронизации химерной структуры. Из распределений значений среднеквадратичного по времени отклонения δ_i , приведенных на рисунке 1.25,б следует, что некогерентные кластеры химерной структуры по-разному реагируют на увеличение силы межслойной связи. Так, например, при $\gamma = 0.15$ элементы, принадлежащие кластеру некогерентности амплитудной химеры ($i \in [420 : 500]$) и находящиеся в близкой окрестности к нему, слабее поддаются синхронизации, для них значения $\delta_i > 0.06$. Практически одинаковую степень синхронности и малые значения δ_i при увеличении силы связи демонстрируют элементы некогерентных кластеров фазовой химеры и осцилляторы в когерентной области. Однако стоит заметить, что, начиная с $\gamma \geq 0.3$, элементам некогерентного кластера амплитудной химеры и ее окрестности соответствуют существенно меньшие значения δ_i по сравнению с другими элементами системы.

Для количественного обоснования эффекта вынужденной синхронизации на рисунке 1.25,в приведен график зависимости $\Delta(\gamma)$. Из рисунка видно, что данная величина не обращается строго в ноль ни для одного значения γ . Для $\gamma > 0.2$, значения Δ уменьшаются плавно и незначительно, достигая своего ми-

нимума $\Delta = 0.0098$ при $\gamma = 1$. Следовательно, в случае сильно неидентичных ансамблей имеет место так называемая эффективная вынужденная синхронизация пространственно-временных структур.

Динамика исследуемой системы в случае однонаправленной инерционной связи между ансамблями отличается от рассмотренного случая диссипативной связи. С усилением межслойной связи структура второго ансамбля хотя и упорядочивается по сравнению с начальным распределением (сравни рисунок 1.24,б и рисунок 1.26,а), но существенно отличается от структуры в первом кольце (сравни рисунок 1.24,а и рисунок 1.26,а). Как видно из рисунка 1.26,б, значения δ_i для всех элементов ансамбля принимают довольно большие значения, что свидетельствует об отсутствии даже кластерной синхронизации. Расчеты зависимости $\Delta(\gamma)$ (рисунок 1.26,в), также отражают факт невозможности реализовать эффект вынужденной синхронизации химерной структуры в случае инерционного типа связи между ансамблями.

При наличии взаимной диссипативной связи пространственно-временные структуры во взаимодействующих неидентичных ансамблях видоизменяются, и при $\gamma = 0.1$ происходит синхронизация химерных структур. В качестве иллю-

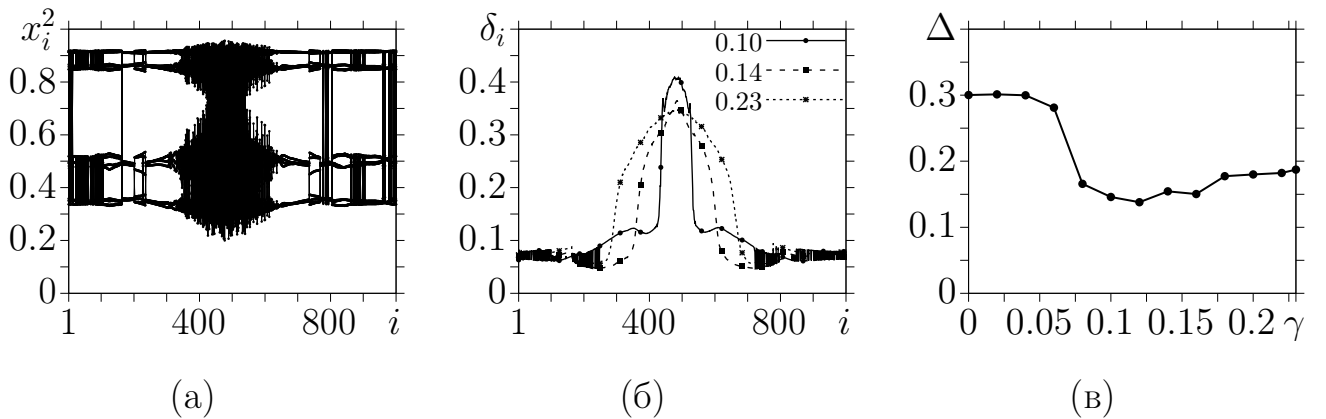


Рисунок 1.26. Пространственно-временной профиль амплитуд x_i^2 при $\gamma = 0.12$ (а), распределения значений δ_i для нескольких значений γ (б), зависимость $\Delta(\gamma)$ (в) для системы (1.5) в случае однонаправленной инерционной связи.

Параметры: $\alpha^1 = 3.7, \alpha^2 = 3.85, \sigma^1 = 0.23, \sigma^2 = 0.15, P^1 = P^2 = 320$.

страции на рисунке 1.27 показаны пространственно-временные профили первого кольца (для второго они аналогичны и значение Δ , близкое к 0, свидетельствует о наличии взаимной синхронизации) для двух значений силы межслойной связи. Профили реализуемых во взаимосвязанных ансамблях структур существенно изменяются при увеличении силы связи, но остаются синхронными. В силу неидентичности взаимодействующих ансамблей величина Δ не может быть строго равной нулю, но, если в качестве критерия взаимной синхронизации принять выполнение условия $\Delta < 0.02$, то можно выделить конечную область значений параметра связи $\gamma \in [0.1, 0.6]$, отвечающую конечной области эффективной взаимной синхронизации. Проведенные расчеты показали, что в случае взаимной инерционной связи между неидентичными ансамблями достичь взаимной синхронизации не удастся, как и во всех рассмотренных в данном разделе случаях с инерционной связью. Пространственно-временные профили первого и второго колец сильно отличаются друг от друга для любых значений межслойной связи γ .

Таким образом, эффекты вынужденной и взаимной синхронизации пространственно-временных структур, включая химерные, в двух связанных ансамблях хаотических отображений довольно легко реализуются при дисси-

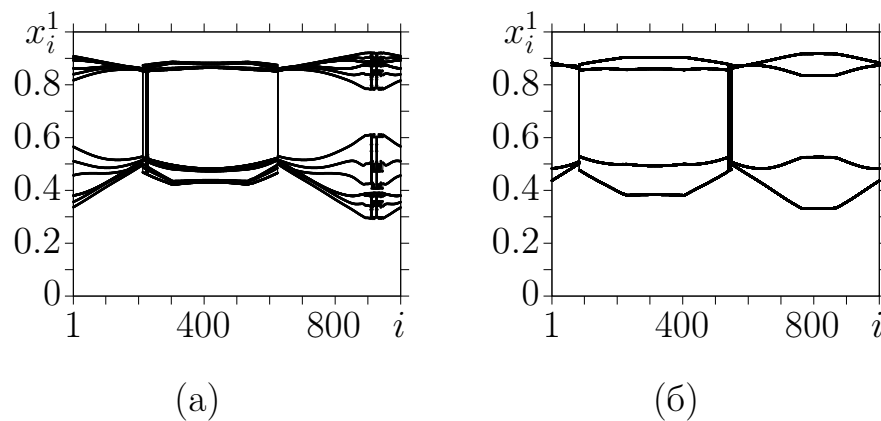


Рисунок 1.27. Пространственно-временные профили амплитуд для $\gamma = 0.2$ (а); $\gamma = 0.5$ (б) для системы (1.5) в случае взаимной диссипативной связи. Другие параметры: $\alpha^1 = 3.7, \alpha^2 = 3.85, \sigma^1 = 0.23, \sigma^2 = 0.15, P^1 = P^2 = 320$.

пативной межслойной связи. При этом в случае идентичных ансамблей наблюдается явление полной синхронизации (значения среднеквадратичного отклонения по времени и элементам ансамбля близки к нулю). В случае неидентичных ансамблей имеет место эффективная синхронизация с заданной точностью (значения статистических характеристик не равны нулю, что объясняется наличием расстройки по параметрам взаимодействующих ансамблей). При наличии инерционной межслойной связи как между идентичными, так и неидентичными ансамблями эффектов вынужденной и взаимной синхронизации достичь практически не удается.

1.7 Выводы по первой главе

В данной главе представлены результаты численного моделирования динамики колец нелокально связанных осцилляторов различного типа (1.1). В качестве парциальных элементов были рассмотрены генератор с инерционной нелинейностью Анищенко-Астахова, логистическое отображение и отображение Рикера, осциллятор ФитцХью-Нагумо, отображение Курбажа-Некоркина. На основании проведенных исследований можно сформулировать следующие основные выводы:

1. Обнаружены химерные состояния как на основе стоячей волны, так и новые амплитудные химерные состояния на основе бегущей волны в кольце нелокально связанных генераторов с инерционной нелинейностью Анищенко-Астахова. Несмотря на движение бегущей волны вдоль кольца некогерентный кластер химерной структуры остается неподвижным.
2. Показано, что в кольце осцилляторов Анищенко-Астахова с нелокальной связью имеет место сосуществование амплитудных и фазовых химерных состояний, реализация которых зависит от выбора начальных условий.

Проведено сравнение поведения осцилляторов некогерентного кластера в обоих случаях на проекциях фазовых портретов хаотических аттракторов. Показано, что в случае амплитудной химеры осцилляторы когерентных и некогерентных кластеров располагаются на одном и том же обороте двухленточного хаотического аттрактора, различие состоит только в расположении мгновенных состояний друг относительно друга. Осцилляторы некогерентного кластера фазовой химеры распределены случайным образом на различных витках двухобходной ленты аттрактора.

3. Впервые установлено, что при нелокальной и комбинации нелокальной с диагональной связях и при вариации параметра нелокальности в кольце связанных логистических отображений изменяется число областей некогерентности. В частности, при добавлении диагональной связи к нелокальной количество некогерентных кластеров удваивается. В случае отражающей связи длина волны структуры в пространстве неизменна ввиду особого типа симметрии кольца.
4. В кольце связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо от топологии связей зависит длина волны наблюдаемого в пространстве волнового процесса в случае нелокальной и в случае диагональной и нелокальной связей. В случае отражающей связи, кроме тривиальных случаев, наблюдаются только стоячие волны, тогда как в остальных случаях возможно наблюдение бегущих волн.
5. В кольце отображений Курбажа-Некоркина тип топологии связей влияет на характер перехода от некогерентности к когерентности. Установлено, что в случае нелокальной и отражающей типов связи на пространственно-волновой структуре постепенно уменьшается количество уединенных состояний, тогда как в случае комбинации нелокальной и диагональной свя-

зи происходит резкое уменьшение количества уединенных состояний при образовании волны в пространстве.

6. Показано, что амплитудные и фазовые структуры в кольцах логистических отображений и отображений Рикера устойчивы к шуму достаточно большой интенсивности и стационарны на достаточно большом времени в численном эксперименте. Шум большей интенсивности может приводить к переходам между фазовыми и амплитудными химерами и к возникновению новых нерегулярных кластеров.
7. Установлено, что в случае диссипативного характера связи между двумя связанными ансамблями хаотических осцилляторов имеет место полная вынужденная и взаимная синхронизация пространственно-временных структур, включая химерные, для идентичных ансамблей и эффективная (с заданной точностью) синхронизация для случая неидентичных ансамблей. Введение инерционной связи как между идентичными, так и неидентичными ансамблями препятствует достижению синхронной динамики во взаимодействующих системах.

Глава 2. Спиральные и концентрические волны в двумерных ансамблях

2.1 Введение

Исследования двумерных автоволновых структур в математических моделях, которым посвящена вторая глава диссертационной работы, являются одним из самых актуальных направлений в нелинейной динамике уже более 50 лет [4–6, 53, 66, 69, 197–211], но при этом остаются востребованными по настоящее время [51, 112–114, 212–218]. Автоволновые процессы представляют собой самоподдерживающиеся волны, конфигурация которых не изменяется при небольшом изменении начальных и граничных условий. В последние годы интерес к автоволновым структурам резко возрос в связи с открытием химерных состояний на основе спиральных волн [112, 116, 117, 119–121, 123, 124, 126, 213, 214, 219–223]. Однако остаются не до конца исследованными механизм возникновения спирально-волновых химерных структур и возможность реализации другого типа автоволн – концентрических волн и химерных состояний на их основе в двумерных моделях (решетках) нелинейных осцилляторов.

Во второй главе диссертационной работы приводятся результаты численного исследования динамики решеток генераторов ван дер Поля, осцилляторов ФитцХью-Нагумо, дискретных моделей нейрона – отображений Курбажа-Некоркина и Рутькова. Показано, что нелокальный характер связи между элементами приводит к возникновению спирально-волновых химерных структур, которые характеризуются сосуществованием в пространстве системы когерентной области (волны) и ядра некогерентности, формирующегося в центре вращения волны. На примере решетки генераторов ван дер Поля проанализировано

влияние управляющих параметров индивидуальных элементов и параметров связи на форму, размер и характеристики волновых структур. Показано, что при довольно большом диапазоне нелокальной связи в решетке реализуются концентрические волны и концентрические волновые химеры, которые впервые обнаружены и описаны в данной диссертационной работе. Выявлены механизмы возникновения режимов волновых химер и проведен детальный сравнительный анализ динамики осцилляторов в ядрах некогерентности спиральной и концентрической химерных структур.

Результаты численных исследований, представленные во второй главе, опубликованы в работах [126, 173–176, 179].

2.2 Модель решетки связанных осцилляторов

Динамика решетки $N \times N$ связанных осцилляторов в общем виде задается следующим уравнением:

$$\hat{\mathbf{u}}_{i,j} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i,j}) + \frac{\sigma}{B_{i,j}} \sum_{m,g} \mathbf{S}(\mathbf{u}_{m,g}, \mathbf{u}_{i,j}) + \mathbf{E}_{i,j}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u}_{i,j}$ представляют собой вектора динамических переменных состояния отдельных осцилляторов решетки с номерами $i = 1, 2, \dots, N$ и $j = 1, 2, \dots, N$; $N \times N$ – общее количество элементов в ансамбле. $\hat{\mathbf{u}}_{i,j}$ – операторы эволюции этих осцилляторов, которые задаются производными ($\hat{\mathbf{u}}_{i,j} = \dot{\mathbf{u}}_{i,j}$) для динамических систем с непрерывным временем $t \in [0 : T]$, и итерационными соотношениями ($\hat{\mathbf{u}}_{i,j} = \mathbf{u}_{i,j}(n + 1)$) в случае систем с дискретным временем $n = 1, 2, \dots, T$, в обоих случаях T – это время, на котором проводится наблюдение поведения системы. Все осцилляторы в сети идентичны (задаются одним и тем же оператором \mathbf{F}), их динамика определяется одинаковыми значениями управляющих параметров в функциях оператора \mathbf{F} . Во второй главе в качестве парциальных осцилляторов выбираются генераторы ван дер Поля, осцилляторы ФитцХью-

Нагумо, модели Курбажа-Некоркина, отображения Рулькова. В случае связанных отображений для связи может использоваться значение переменной на следующем шаге, тогда $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_v$ (v – количество независимых переменных в отдельном осцилляторе) отвечают соответствующим функциям векторного оператора \mathbf{F} .

Второе слагаемое в (2.1) задает связь элементов в кольце между собой. Все связи предполагаются симметричными и определяются с помощью векторного оператора \mathbf{S} . Параметр $B_{i,j}$ равен количеству ненулевых связей, соответствующих элементу с номером (i, j) .

Индексы (m, g) определяют связи между элементами решетки, которые в случае нелокальной связи принимают следующие значения:

$$\begin{cases} \max(1, i - P) \leq m \leq \min(N, i + P) \\ \max(1, j - P) \leq g \leq \min(N, j + P), \\ m \neq i, \text{ если } g = i, \end{cases} \quad (2.2)$$

где P – параметр, определяющий степень нелокальности связей в ансамбле. Соотношения (2.2) задают открытые (no-flux) граничные условия. Пример связей для одного из элементов из середины решетки при $P = 2$ приведен на рисунке 2.1.

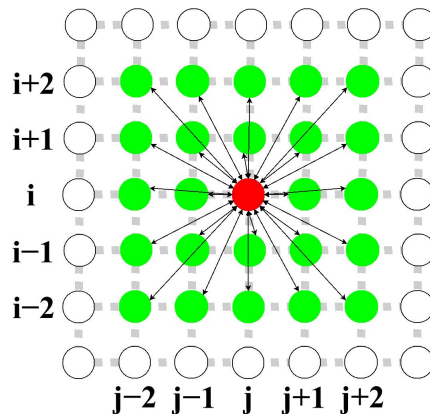


Рисунок 2.1. Способ задания связи одного из элементов решетки (i, j) (красный круг) в случае нелокальной связи при $P = 2$. Зеленым цветом отмечены элементы, с которыми связан выбранный осциллятор.

Внешнее воздействие $\mathbf{E}_{i,j}$ полагается равным нулю, если не введено другого определения.

Решетка связанных генераторов ван дер Поля. В случае решетки связанных генераторов ван дер Поля в уравнении (2.1)

$$\hat{\mathbf{u}}_{i,j} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{i,j} \\ \dot{y}_{i,j} \end{pmatrix}; \mathbf{F} = \begin{pmatrix} y_{i,j} \\ \varepsilon(1 - x_{i,j}^2)y_{i,j} - \omega^2 x_{i,j} \end{pmatrix}; \mathbf{S} = \begin{pmatrix} x_{m,g} - x_{i,j} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (2.3)$$

Здесь $x_{i,j} = x_{i,j}(t)$ и $y_{i,j} = y_{i,j}(t)$ – безразмерные динамические переменные, задающие состояние отдельного генератора ван дер Поля с индексами (i, j) , ε и ω – параметры возбуждения и собственной частоты, соответственно. При $\varepsilon = 0$ генератор ван дер Поля вырождается в линейный осциллятор без затухания. При увеличении $\varepsilon > 0$ колебания отдельного генератора ван дер Поля становятся все меньше похожими на гармонические. Так при $\varepsilon \sim 1$ они еще достаточно близки к гармоническим, а при $\varepsilon > 2$ являются сильно релаксационными. Связь между генераторами вводится в первое уравнение системы с силой связи σ . Время $t \in [0, T]$ является непрерывным.

Решетка связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо. Модель нейрона ФитцХью-Нагумо, также как и генератор ван дер Поля, способна демонстрировать релаксационные колебания и, следовательно, в решетке таких осцилляторов могут возникать спиральные волны. Двумерная решетка нейронов ФитцХью-Нагумо задается следующими соотношениями в (2.1):

$$\hat{\mathbf{u}}_{i,j} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{i,j} \\ \dot{y}_{i,j} \end{pmatrix}; \mathbf{F} = \begin{pmatrix} (x_{i,j} - \alpha x_{i,j}^3 - y)/\varepsilon \\ \gamma x_{i,j} - y + \beta \end{pmatrix}; \mathbf{S} = \begin{pmatrix} x_{m,g} - x_{i,j} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (2.4)$$

Здесь $x_{i,j} = x_{i,j}(t)$ и $y_{i,j} = y_{i,j}(t)$ – безразмерные динамические переменные, определяющие, соответственно, быструю функцию активации и медленную функцию ингибитора в отдельном нейроне ФитцХью-Нагумо с индексами (i, j) , время $t \in [0; T]$ является непрерывным, ε , γ и β – параметры индивидуального осциллятора ФитцХью-Нагумо, подробное описание которых приведено в разделе 1.4.2). Связь вводится в первое уравнение системы с силой связи σ .

Решетка связанных отображений Курбажа-Некоркина. Модель нейрона Курбажа-Некоркина рассматривается в настоящей работе наряду с генератором ван дер Поля и осциллятором ФитцХью-Нагумо для демонстрации общности полученных результатов. Двумерная решетка отображений Курбажа-Некоркина задается следующими соотношениями в (2.1):

$$\hat{\mathbf{u}}_{i,j} = \begin{pmatrix} x_{i,j}(n+1) \\ y_{i,j}(n+1) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1(x_{m,g}(n), y_{m,g}(n)) - \mathbf{F}_1(x_{i,j}(n), y_{i,j}(n)) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (2.5)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x_{i,j}(n) + f(x_{i,j}(n)) - y_{i,j}(n) - \beta H(x_{i,j}(n) - d) \\ y_{i,j}(n) + \varepsilon(x_{i,j}(n) - J) \end{pmatrix}.$$

Здесь $x_{i,j}(n)$ является переменной, описывающей потенциал мембраны нейрона, а $y_{i,j}(n)$ относится к коммулятивному току через эту мембрану, время $n = 1, 2, \dots, T$ является дискретным. Функции $f(x_{i,j}(n))$ и $H(x_{i,j}(n) - d)$ определяются следующим образом:

$$f(x_{i,j}(n)) = x_{i,j}(n)(x_{i,j}(n) - a)(1 - x_{i,j}(n)), \quad 0 < a < 1,$$

$$H(x_{i,j}(n)) = \begin{cases} 1, & \text{при } x_{i,j}(n) > 0, \\ 0, & \text{при } x_{i,j}(n) \leq 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Параметр $\varepsilon > 0$ определяет характерный временной масштаб колебаний переменной $y(n)$, параметр J управляет уровнем деполяризации мембраны ($J < d$), параметры $\beta > 0$ и $d > 0$ определяют порог возбуждения взрывных колебаний. Параметры отдельных отображений подробно описаны в разделе 1.4.3.

Решетка связанных отображений Рутькова. В работе рассматривается еще одна модель решетки, состоящая из нелокально связанных отображений Рутькова. Данная система является первой дискретной моделью нейрона [22]. Согласно системе (2.1) решетка моделей Рутькова задается следующими соот-

ношениями:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_{i,j} &= \begin{pmatrix} x_{i,j}(n+1) \\ y_{i,j}(n+1) \end{pmatrix}; \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f(x_{i,j}(n), y_{i,j}(n)) \\ y_{i,j}(n) - \mu(x_{i,j}(n) + 1) + \mu\gamma \end{pmatrix}; \\ \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_2(x_{m,g}(n), y_{m,g}(n)) - \mathbf{F}_2(x_{i,j}(n), y_{i,j}(n)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $x_{i,j}(n)$ и $y_{i,j}(n)$ – независимые переменные, время $n = 1, 2, \dots, T$ является дискретным. Функция $f(x_{i,j}(n), y_{i,j}(n))$ определяется следующим образом:

$$f(x_{i,j}(n), y_{i,j}(n)) = \begin{cases} \alpha/(1 - x_{i,j}(n)) + y_{i,j}(n), & \text{при } x_{i,j}(n) \leq 0, \\ \alpha + y_{i,j}(n), & \text{при } 0 < x_{i,j}(n) < \alpha + y_{i,j}(n), \\ -1, & \text{при } x_{i,j}(n) \geq \alpha + y_{i,j}(n). \end{cases} \quad (2.8)$$

Параметр $\mu = 0.001$ определяет медленное изменение переменной $y_{i,j}(n)$ и фиксирован для всех расчетов. Параметры γ и α управляют частотой генерации спайков в отдельном отображении Рутькова. При $\alpha \lesssim -4\gamma + 4$ генерации спайков не наблюдается, что соответствует режиму «молчания» нейрона. При $\alpha > 4$ и $|\gamma| \lesssim 0.25\alpha - 1$ отдельное отображение моделирует взрывные колебания, а при достаточно больших значениях γ реализует релаксационные колебания с равномерной частотой генерации спайков. При этом, увеличение γ приводит к росту частоты колебаний.

Локальный показатель чувствительности. Для исследования локальной динамики осцилляторов в кластерах с различающимся поведением используются значения проекций вектора линейного возмущения. Система (2.1) состоит из N^2 элементов с v переменными в каждом осцилляторе. Таким образом, общее фазовое пространство ансамбля состоит из vN^2 независимых динамических переменных. Вектор линейного возмущения $\boldsymbol{\xi}(t)$, используемый для вычисления старшего показателя Ляпунова, также содержит vN^2 переменных возмущения и может быть представлен в виде проекций $\boldsymbol{\xi}(t) = (\boldsymbol{\xi}_{1,1}(t), \dots, \boldsymbol{\xi}_{N,N}(t))$, где каждая проекция $\boldsymbol{\xi}_{i,j}(t) \in \mathbb{R}^2$, $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ – проекции вектора возму-

щений на подпространства соответствующих осцилляторов с индексами (i, j) . В начальный момент времени возмущение $\boldsymbol{\xi}(t_0) = (\boldsymbol{\xi}_{1,1}(t_0), \dots, \boldsymbol{\xi}_{N,N}(t_0))$ полагается однородным по осцилляторам. Тогда проекции вектора возмущения Ляпунова на отдельный осциллятор на конечном времени τ определяются следующим образом:

$$\Lambda_{i,j}(t_0, \tau) := \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|\boldsymbol{\xi}_{i,j}(t_0 + \tau)\|}{\|\boldsymbol{\xi}_{i,j}(t_0)\|} = \frac{1}{\tau} \ln \sqrt{N} \frac{\|\boldsymbol{\xi}_{i,j}(t_0 + \tau)\|}{\|\boldsymbol{\xi}(t_0)\|}, \quad (2.9)$$

где последнее равенство следует из того, что возмущение однородно ($\boldsymbol{\xi}_{i,j}(t_0) = \boldsymbol{\xi}_{1,1}(t_0)$) и, следовательно, $\|\boldsymbol{\xi}(t_0)\| = \sqrt{N} \|\boldsymbol{\xi}_{1,1}(t_0)\|$. Индекс локальной чувствительности (2.9) позволяет количественно сравнить чувствительности осцилляторов из различных кластеров к внешнему возмущению. Подробное описание методы расчета индекса приведено в работе [56]. В пределе $T \rightarrow \infty$ индекс локальной чувствительности $\Lambda_{i,j}$ сходится к значению старшего показателя Ляпунова:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \Lambda_{i,j}(t_0, T) = \lambda_1. \quad (2.10)$$

Однако он может сходиться с максимальному показателю Ляпунова очень медленно в ансамблях, в которых наблюдаются кластеры с различающейся динамикой. С помощью описанной характеристики возможно выделить области с наибольшей чувствительностью в ансамбле, что может быть полезным при управлении пространственно-временной динамикой. Важно отметить, что положительные значения $\Lambda_{i,j}$ не говорят обязательно о хаотической динамике в осцилляторе с индексами (i, j) , также как и отрицательные значения не соответствуют ее отсутствию, в отличие от показателей Ляпунова. По этой причине индекс локальной чувствительности подходит только для сравнения динамики разных осцилляторов в одной пространственно-временной структуре между собой, а не для сравнения динамики отдельных осцилляторов в различных режимах.

Характеристики взаимного поведения элементов решетки. Для количественной оценки когерентности соседних элементов ансамбля вычисляется

корень среднеквадратичной девиации по формуле:

$$d_{i,j} = \sqrt{\langle (x_{i,j} - x_{i+1,j+1})^2 \rangle}, \quad (2.11)$$

где $d_{i,j} = 0$, если поведение осцилляторов $x_{i,j}$ и $x_{i+1,j+1}$ идентично, а бóльшие значения $d_{i,j}$ отвечают бóльшим отличиям в поведении этих осцилляторов. Так как для химерных структур в когерентной области полная синхронизация колебаний недостижима, выбирается некоторое небольшое пороговое значение $d_{i,j}^{\text{п}}$, определяющее наличие эффективной синхронизации соседних элементов при $d_{i,j} < d_{i,j}^{\text{п}}$.

Для демонстрации когерентных и некогерентных областей в одномерных сечениях двумерных пространственно-временных структур используется распределение коэффициентов корреляций R_{i,j_0} [92, 93], определяемое следующим соотношением:

$$R_{i,j_0} = \frac{\langle \tilde{x}_{i,j_0} \tilde{x}_{0,j_0} \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{x}_{i,j_0}^2 \rangle \langle \tilde{x}_{0,j_0}^2 \rangle}}, \quad \tilde{x}_{i,j} = x_{i,j} - \langle x_{i,j} \rangle, \quad (2.12)$$

где j_0 для распределения фиксировано и определяет сечение двумерной решетки. Распределение (2.12) вычисляется относительно колебаний элемента с индексами ($i = 0, j = j_0$) и медленно спадает с удалением от этого элемента в когерентной области. В некогерентной области распределение (2.12) является наиболее близким к нулю для некоторых осцилляторов и характеризуется нерегулярностью.

2.3 Двумерные структуры в случае локальной связи

В случае локальной связи в двумерных решетках динамических систем возможна реализация спиральных и концентрических волновых структур. При этом возможно наблюдение эффекта мультистабильности, когда в зависимо-

сти от начальных условий, при одних и тех же значениях параметров системы возникают различные типы волновых структур.

2.3.1 Волновые структуры в решетке генераторов ван дер Поля

В случае локальной связи ($P = 1$) при $\sigma = 0.7$ в системе (2.3) с использованием случайных начальных условий, равномерно распределенных в интервале ($x_{i,j}^0, y_{i,j}^0 \in [-0.9, 0.9]$), возможно получение как спиральных, так и концентрических волновых структур. На рисунке 2.2 приведена диаграмма режимов в решетке (2.3), построенная на плоскости управляющих параметров (ω, ε) . На диаграмме хорошо различимы области, соответствующие 4-м режимам совместного поведения элементов решетки. Наибольшие области соответствуют режимам спиральных волн (III) и некогерентности (I). Спиральные волны реализуются преимущественно при меньших значениях параметра ε , при больших значениях этого параметра возможно наблюдение только некогерентных режи-

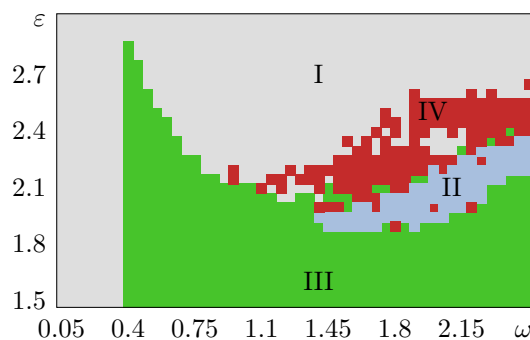


Рисунок 2.2. Диаграмма режимов в решетке локально связанных генераторов ван дер Поля (2.3) на плоскости параметров (ω, ε) . Область III (зеленый цвет) соответствует спиральным волнам, область IV (красный цвет) – концентрическим волнам; синхронный режим реализуется в области II (голубой цвет) и режим некогерентности – в области I (серый цвет).

мов. Концентрические волны (IV) возникают только для достаточно больших значений параметров ω и ε (красная область на рисунке 2.2). Синхронная динамика всех элементов сети наблюдается в достаточно узкой области (голубая область на рисунке 2.2) для средних значений ε и достаточно больших значений ω . Также для некоторых отдельных значений параметров ω и ε были обнаружены режимы сосуществования спиральных и концентрических волн.

Для наблюдения за влиянием параметра ε на спирально-волновой режим значение параметра $\omega = 0.9$ фиксируется. На рисунке 2.3 приведены мгновенные пространственные профили амплитуд переменной $x_{i,j}$ для трех увеличивающихся значений $\varepsilon = 0.5, 1.5, 2.15$. Как следует из рисунка, параметр ε управляет длиной волны спиральной структуры: с увеличением его значения длина волны уменьшается. Дальнейшее увеличение параметра $\varepsilon \geq 2.2$ ведет к разрушению спиральной волны и к переходу ансамбля в режим некогерентных в пространстве колебаний.

В режимах спиральных волн волновой фронт вращается вокруг некоторого центра в пространстве решетки. Представляется интересной динамика отдельных элементов в центре спиральной волны. В качестве примера проведено исследование спирально-волнового режима при $\sigma = 0.9, \omega = 2.5, \varepsilon = 2.1$. В слу-

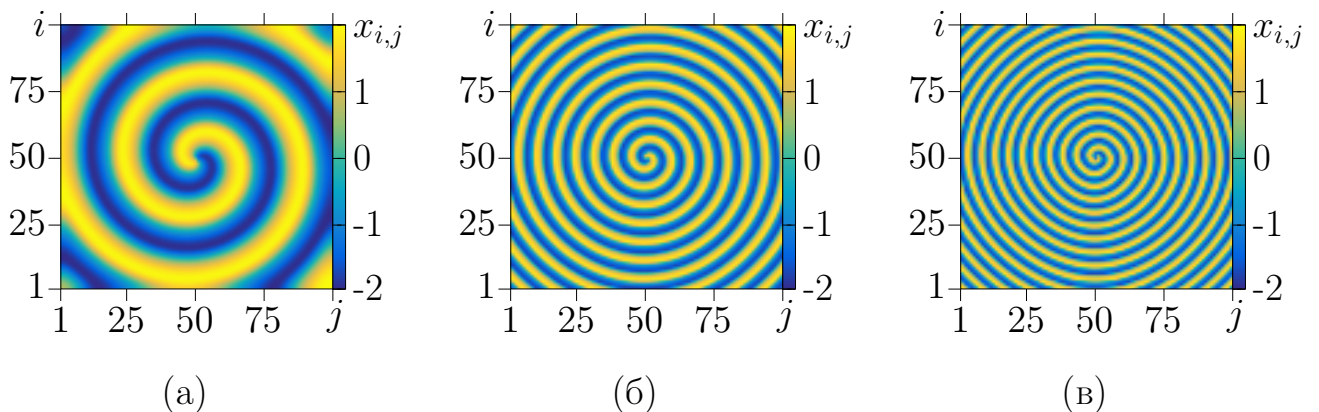


Рисунок 2.3. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}$ для режимов спиральных волн при $\varepsilon = 0.5$ (а), $\varepsilon = 1.5$ (б), $\varepsilon = 2.15$ (в) для системы (2.3) в случае локальной связи ($P = 1$) при $\sigma = 0.7, \omega = 0.9$.

чае локальной связи (рисунок 2.4,а) в решетке осцилляторов ван дер Поля (2.3) поведение элемента в центре спиральной волны отличается от поведения остальных, о чем свидетельствуют проекции фазовых портретов соответствующих осцилляторов, приведенные на рисунке 2.4,б. Этот факт также подтверждается тем, что значение частоты Райса

$$f_{i,j}^R \approx \langle f \rangle = \frac{M_{i,j}}{T}, \quad (2.13)$$

используемой для вычисления частоты регулярных и нерегулярных колебаний, несколько выше для центрального элемента (рисунок 2.4,в). Величина $M_{i,j}$ в (2.13) обозначает число пересечений траекторией выбранного уровня за вре-

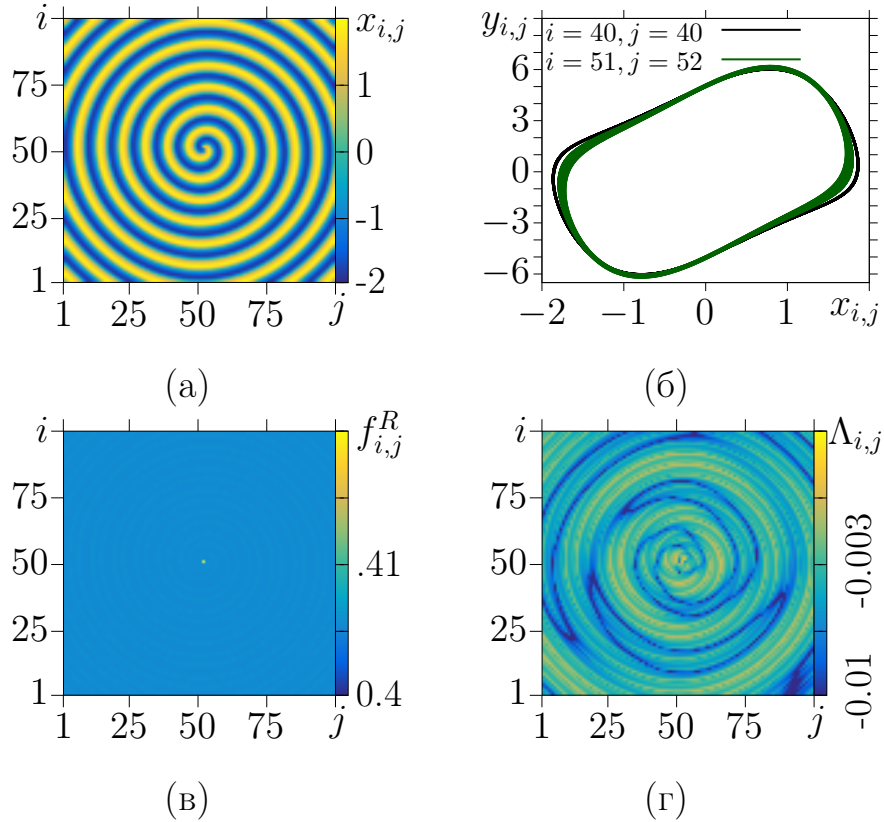


Рисунок 2.4. Мгновенный пространственный профиль амплитуд $x_{i,j}$ (а); фазовые портреты для осцилляторов из когерентной области ($i = 40, j = 40$, черная линия) и из центра волны ($i = 51, j = 52$, зелёная линия) (б); распределение частот осцилляторов (в) и индексов локальной чувствительности (2.9) (г) для системы (2.3) в случае локальной связи ($P = 1$) при $\sigma = 0.9, \omega = 2.5, \varepsilon = 2.1$.

мя T . При этом поведение всей решетки в целом является периодическим или квазипериодическим (старший показатель Ляпунова $\lambda_1 = 0.000 \pm 0.0005$). Для управления поведением сложного ансамбля важно выделить наиболее чувствительные части решетки для выбора области приложения внешнего воздействия. Распределение значений индекса локальной чувствительности на рисунке 2.4,г показывает, что чувствительность осциллятора в центре спиральной волны является наибольшей по сравнению с осцилляторами в остальной части решетки.

Изменение параметра ε оказывает аналогичное влияние и на концентрические волны в ансамбле (2.3). Как показано на рисунке 2.5, при плавном увеличении параметра ε и при фиксированных $\sigma = 0.7$, $\omega = 0.9$ и $P = 1$, длина волны уменьшается, как и в случае спиральных режимов (рисунок 2.3). При дальнейшем увеличении параметра $\varepsilon \geq 2.4$ концентрическая волна разрушается.

Численные исследования показывают, что в системе (2.3) реализуется эффект мультистабильности. Например, спиральная структура (рисунок 2.3,в) и концентрическая (рисунок 2.5,в) получены для одних и тех же значений параметров $\varepsilon = 2.15$, $\sigma = 0.7$, $\omega = 0.9$, $P = 1$. Этот эффект можно наблюдать, если выбрать полученные при различных значениях параметров со слу-

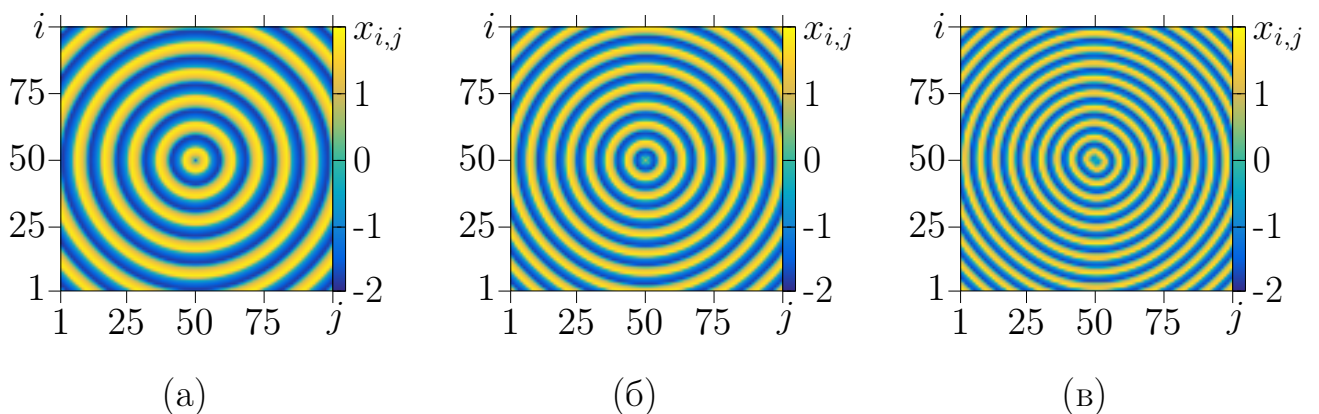


Рисунок 2.5. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}$ для концентрических волн при $\varepsilon = 1.65$ (а), $\varepsilon = 2$ (б), $\varepsilon = 2.15$ (в) для системы (2.3) в случае локальной связи ($P = 1$) при $\sigma = 0.7$, $\omega = 0.9$.

чайных начальных условий спиральную и концентрическую волновую структуры и плавно изменять параметры до заранее выбранных значений. При $\sigma = 0.7, \omega = 0.9, P = 1$ существует конечная область значений $\varepsilon \in [1.65, 2.2]$, в которой такой эффект мультистабильности наблюдается.

Кроме параметра ε на волновые структуры в системе (2.3) оказывает влияние сила локальной связи. Например, для полученной при $\sigma = 0.7$ структуры, при плавном увеличении (уменьшении) параметра σ длина как спиральной, так и концентрической волны увеличивается (уменьшается). Кроме того, каждая из волновых структур имеет свой диапазон существования по параметру силы локальной связи σ : $\sigma \in [0.65; 1]$ для спиральных волн и $\sigma \in [0.59; 0.83]$ для концентрических.

Влияние шума на волновые структуры. В рамках настоящей работы внешнее шумовое воздействие для системы (2.3) вводится в уравнение (2.1) с помощью слагаемого $\mathbf{E}_{i,j} = \sqrt{2D}\xi_{i,j}(t)$, где $\xi_{i,j}(t)$ – это независимый источник шума с гауссовским распределением. Интенсивность D всех источников выбирается одинаковой. Вначале интенсивность шума устанавливается равной некоторому значению ($D = D_0$), система (2.1) интегрируется 10^4 шагов, затем шум отключается ($D = 0$), и система интегрируется ещё 10^4 шагов. В качестве результата приводится мгновенный пространственный профиль амплитуд элементов решетки после $2 \cdot 10^4$ итераций.

На рисунках 2.6 и 2.7 показаны результаты влияния шума различной интенсивности D_0 на спиральную и концентрическую волны, соответственно. Видно, что оба типа волновой структуры устойчивы к шуму небольшой интенсивности $D_0 \sim 0.001$ (рисунки 2.6,а и 2.7,а). При увеличении шума спиральная волна разрушается и вместо неё возникает несколько спиральных волн с различными центрами (рисунки 2.6,б,в). Исследования показывают, что под действием шума исчезает концентрическая волна, на ее месте реализуются спиральные волны с различными центрами (рисунки 2.7,б,в). Таким образом, наблюдается

индуцированный шумом переход от концентрической структуры к спиральной. Из представленных результатов можно сделать вывод, что бассейн притяжения для спиральных волн больше, чем для концентрических.

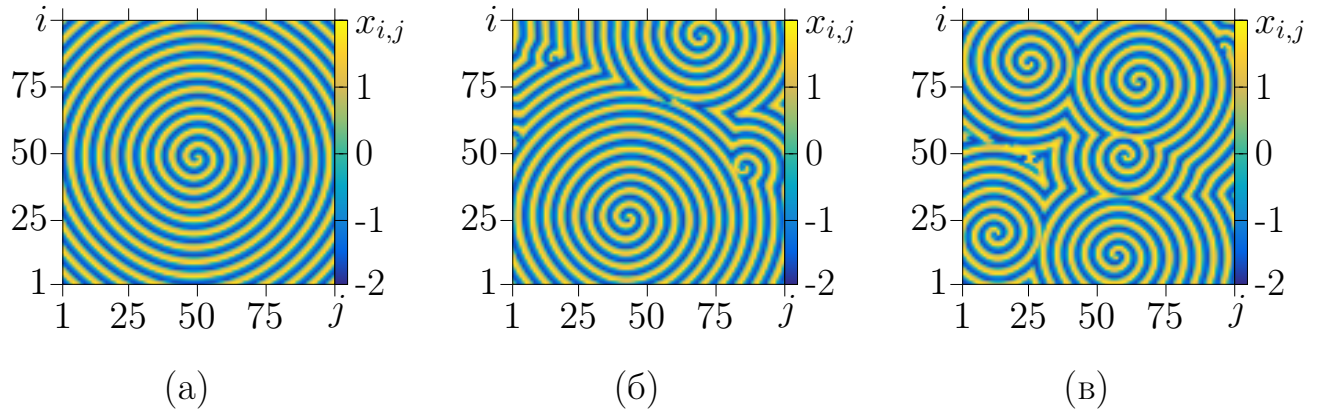


Рисунок 2.6. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}$ для случая влияния шума на спиральную волну при $D_0 = 0.001$ (а), $D_0 = 0.01$ (б), $D_0 = 0.1$ (в) в системе (2.3) при $P = 1$, $\sigma = 0.7$, $\varepsilon = 2$, $\omega = 0.9$.

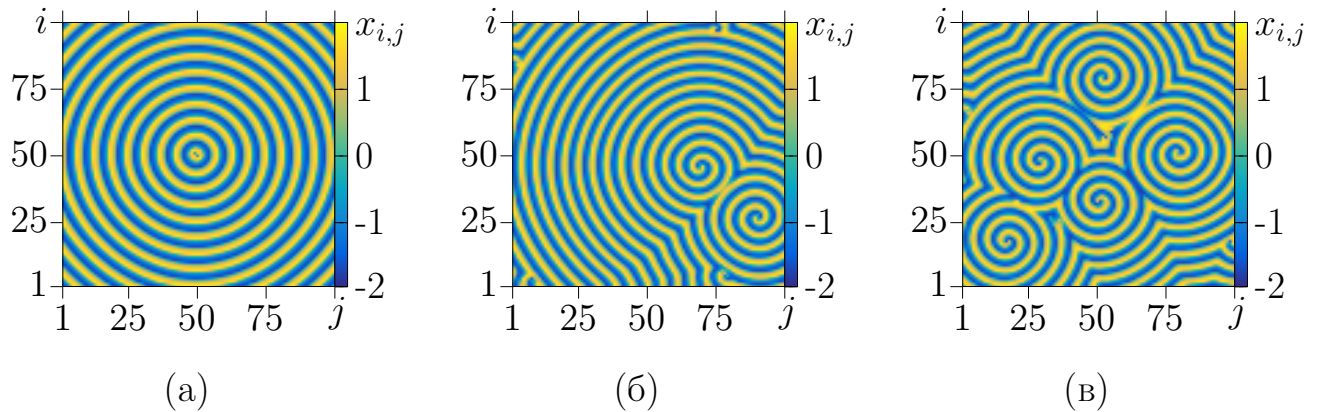


Рисунок 2.7. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}$ для случая влияния шума на концентрическую волну при $D_0 = 0.001$ (а), $D_0 = 0.01$ (б), $D_0 = 0.1$ (в) в системе (2.3) при $P = 1$, $\sigma = 0.7$, $\varepsilon = 2$, $\omega = 0.9$.

2.3.2 Волновые режимы в решетке осцилляторов

ФитцХью-Нагумо

Как было отмечено во Введении, эволюция спиральных волн в решетке осцилляторов ФитцХью-Нагумо (2.4) не была детально исследована. В данном разделе диссертации приведены результаты численных исследований реализации спирально-волновых структур в системе (2.4) при $N = 100$. Кроме того, отдельные осцилляторы взяты в бистабильном режиме ($\varepsilon = 0.2$, $\beta = 0.001$, $\gamma = 0.8$), для которого поведение решетки несколько изменяется и спиральные волны ранее для такого случая не были обнаружены.

Численные исследования показали, что спирально-волновые режимы реализуются в решетке осцилляторов ФитцХью-Нагумо при достаточно малых значениях силы связи $\sigma \approx 0.08$. В качестве иллюстрации на рисунке 2.8 приведены мгновенные пространственные профили значений переменной $x_{i,j}$ системы (2.4) в случае локальной связи и для различных значений σ . При очень малых значениях силы связи ($\sigma = 0.0001$ на рисунках 2.8,а,г) решетка демонстрирует нерегулярное поведение даже в случае специальных начальных условий (рисунок 2.8,г). При увеличении силы связи возможно появление как многоядерных спиральных волн, так и одноядерных (рисунок 2.8). Если в качестве начальных условий использовать одноядерную структуру, полученную при $\sigma = 1$, при варьировании σ она будет существовать в диапазоне $\sigma \in [0.001 : 1]$. При этом, для одноядерных структур с ростом силы связи незначительно увеличивается длина волны.

Таким образом, система (2.4), также как и (2.3), характеризуется высокой степенью мультистабильности. В зависимости от выбора начальных условий при локальной связи ($P = 1$) могут реализовываться спиральные волны с разным количеством центров (см. рисунок 2.8).

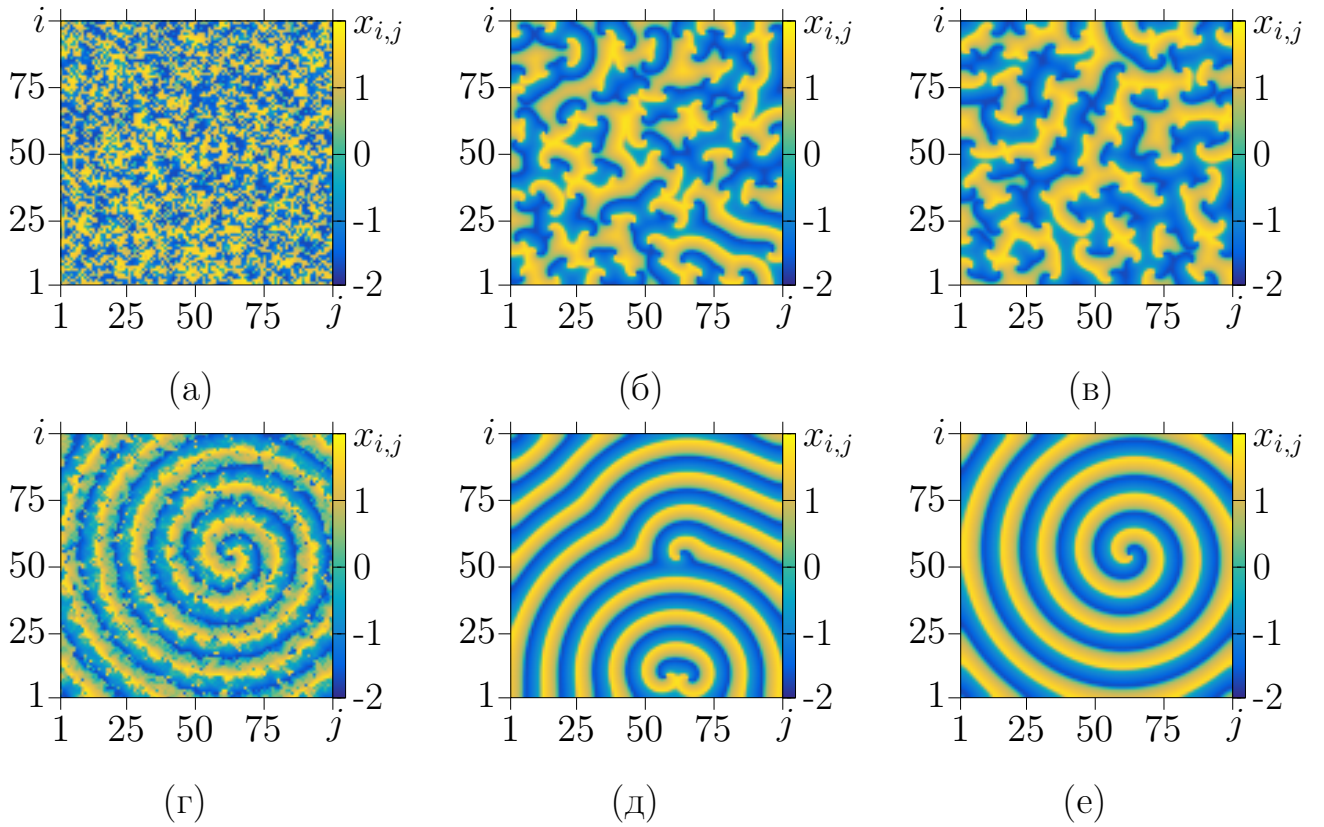


Рисунок 2.8. Мгновенные пространственные профили для переменной $x_{i,j}$ в случае случайных распределений начальных условий $x_{i,j}(t = 0)$ (а-в) и в случае начальных условий в виде сильно зашумленной ядроядерной спиральной волны при $\sigma = 0.0001$ (а,г) $\sigma = 0.0001$ (а,г) $\sigma = 0.0001$ (а,г) для системы (2.4) в случае локальной связи при $P = 1$, $\varepsilon = 0.2$, $\gamma = 0.8$, $\beta = 0.001$.

Была исследована одноядерная структура, динамика и свойства которой оказались аналогичными полученным для решетки генераторов ван дер Поля. Все осцилляторы ведут себя регулярно (фазовые портреты представляют собой замкнутые кривые и $\lambda_1 = 0.000 \pm 0.0005$). Отличие в их динамике от элементов ансамбля (2.3) состоит в том, что, как показывает сильное увеличение фазовых траекторий, они являются многообходными. Но, как и в решетке (2.3), колебания элементов в центре волны и в остальной её части отличаются по форме друг от друга. Также осциллятор в центре спиральной волны является наиболее чувствительным согласно определению (2.9) и значение его частоты Райса несколько выше, чем остальных элементов.

2.3.3 Волновые структуры в решетке отображений Курбажа-Некоркина

Как уже отмечалось в первой главе, индивидуальное отображение Курбажа-Некоркина способно демонстрировать различные динамические режимы, свойственные нейронам. При $a = 0.25$, $\beta = 0.018$, $J = 0.15$, $d = 0.26$, $\varepsilon = 0.005$ нейрон нерегулярно переключается между режимами подпороговых и спайковых колебаний, как видно из рисунка 2.9,а. Колебания соответствуют хаотической динамике, фазовый портрет представляет собой двухобходную ленту. Автокорреляционная функция, рассчитанная для этого режима, медленно убывает, пока не становится ничтожно малой, сигнатура спектра показателей Ляпунова (+, -) также свидетельствует о хаотичности колебаний. При $a = 0.1$, $\beta = 0.3$, $J = 0.1$, $d = 0.45$, $\varepsilon = 0.001$ (рисунок 2.9,б) в отдельном нейроне наблюдаются взрывные колебания. Автокорреляционная функция для этого режима очень резко падает до нуля, и сигнатура спектра показателей Ляпунова (+, -) соответствует хаотическим колебаниям.

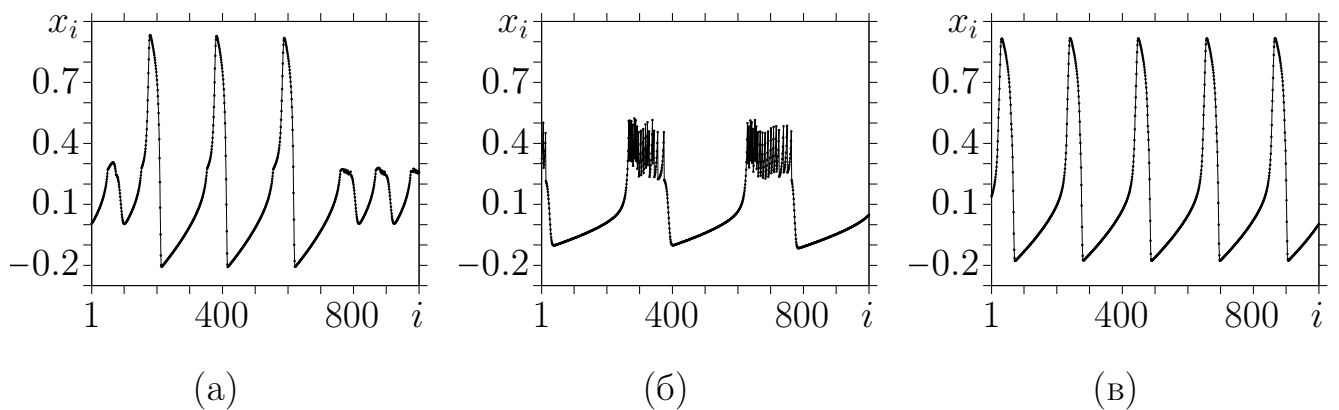


Рисунок 2.9. Характерные временные реализации для изолированного отображения Курбажа-Некоркина (2.5) при $a = 0.25$, $\beta = 0.018$, $J = 0.15$, $d = 0.26$, $\varepsilon = 0.005$ (а); $a = 0.1$, $\beta = 0.3$, $J = 0.1$, $d = 0.45$, $\varepsilon = 0.001$ (б); $a = 0.25$, $\beta = 0.04$, $J = 0.15$, $d = 0.5$, $\varepsilon = 0.004$ (в).

В рамках диссертационного исследования наибольший интерес представлял режим спайковых колебаний, который, например, можно получить при $a = 0.25$, $\beta = 0.04$, $J = 0.15$, $d = 0.5$, $\varepsilon = 0.004$ (рисунок 2.9,в). Фазовый портрет динамики отображения представляет собой инвариантную кривую, а старший показатель Ляпунова является нулевым. Автокорреляционная функция спадает незначительно на очень большом времени наблюдения.

Для выбранного режима спайковых колебаний в отдельном нейроне были обнаружены спиральные волны. На рисунке 2.10 приведены мгновенные пространственные профили амплитуд, отражающие поведение решетки при изменении силы локальной связи. Начальные условия представляют собой случайное равномерное распределение в интервалах, $x_{i,j}(0) \in [-0.2, 0.6]$, $y_{i,j}(0) \in [-0.02, 0.06]$. При очень малых значениях силы связи ($\sigma = 0.0001$) отдельные элементы решетки ведут себя как несвязанные. При увеличении силы связи, но при достаточно малых её значениях (например, при $\sigma = 0.003$, рисунок 2.10,а) в решетке в разных местах появляются когерентные кластеры, но в целом динамика нерегулярна. При достаточно больших значениях силы связи (например, при $\sigma = 0.027$, рисунок 2.10,в) динамика всего ансамбля характеризуется гладким профилем. Спиральные волны обнаруживаются при средних значени-

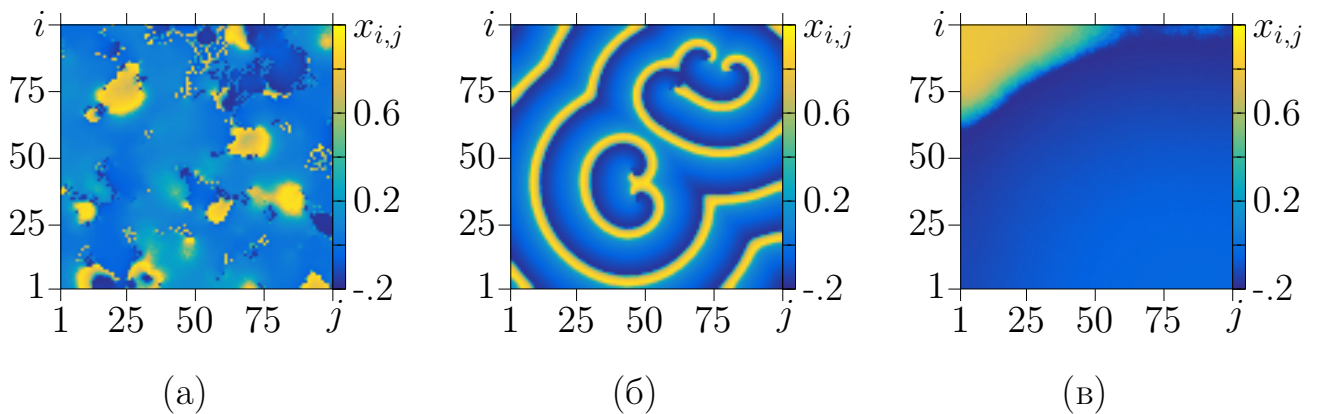


Рисунок 2.10. Характерные пространственно-временные режимы для ансамбля (2.5) в случае локальной связи ($P = 1$) для $\sigma = 0.003$ (а), $\sigma = 0.018$ (б), $\sigma = 0.027$ (в) при $a = 0.25$, $\beta = 0.04$, $J = 0.15$, $d = 0.5$, $\varepsilon = 0.004$.

ях силы связи, например при $\sigma \simeq 0.018$ (рисунок 2.10,б). В зависимости от начальных условий спиральные волны могут иметь различную конфигурацию, разное количество центров и их расположение.

На примере решетки отображений Курбажа-Некоркина было исследовано влияние граничных условий на реализацию спирально-волновых структур. Результаты численного моделирования показали, что качественно режимы не отличаются по крайней мере для двух видов граничных условий: открытых и периодических. При этом спиральные волны возникают при тех же значениях силы связи σ в случае периодических граничных условий, что и в представленном на рисунке 2.10 случае открытых границ.

2.4 Двумерные структуры в случае нелокальной связи

Как показывают результаты моделирования динамики двумерных решеток с различными парциальными элементами, также как и в случае одномерных ансамблей, введение нелокальности в связь приводит к возникновению новых режимов с сосуществованием когерентной и некогерентной динамики. В случае двумерных ансамблей возникают химерные структуры на основе спиральных и концентрических волн: спиральные химерные структуры и концентрические химерные структуры, соответственно.

2.4.1 Рождение химер в решетке генераторов ван дер Поля с нелокальной связью

Рассмотрим динамику решетки генераторов ван дер Поля (2.3) в условиях нелокального характера связи между элементами решетками ($P > 1$). На ри-

сунке 2.11 приведена диаграмма режимов на плоскости параметров (P, ε) для фиксированных значений $\omega = 0.9$ и $\sigma = 0.7$. Как видно из диаграммы, при больших значениях параметра ε при увеличении параметра нелокальной связи P в модели (2.3) возникают химерные спиральные и концентрические волны.

На диаграмме (рисунок 2.11) показано, что концентрические волны без некогерентного ядра наблюдаются только при локальной или близкой к нелокальной связи (область IV), тогда как спиральные волны без некогерентного ядра существуют в наибольшей области III на плоскости параметров (P, ε) . Режим синхронизации решетки (область II) наблюдается как при достаточно больших значениях ε при различных P , так и при достаточно больших значениях P при $\varepsilon < 1.1$. При введении нелокальности в системе могут возникать химерные структуры на основе как спиральных, так и концентрических волн. Спирально-волновые химерные состояния наблюдаются при $\varepsilon \in [0.6 : 1.2] \cup [1.6 : 1.8]$ и при $P \geq 5$ (область V на рисунке 2.11). Впервые обнаруженные концентрические химерные состояния на базе концентрических волн возникают при достаточно

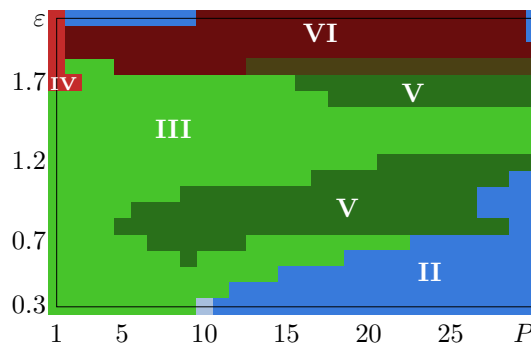


Рисунок 2.11. Диаграмма режимов для модели (2.3) в случае нелокальной связи на плоскости параметров (P, ε) при $\omega = 0.9, \sigma = 0.7$. На диаграмме отмечены области существования спиральных волн (зеленая область, III) и спиральных химерных состояний (темно-зеленая область, V), концентрических волн (красная область, IV) и соответствующих химерных состояний (темно-красная область, VI), и синхронного режима (голубая область, II).

больших значениях параметра ε практически при любых значениях P (область VI на рисунке 2.11).

Эволюция спиральной волны при увеличении нелокальности связи.

На рисунке 2.12 проиллюстрировано влияние увеличения степени нелокальности связи P на режим спиральной волны в решетке (2.3). Сначала увеличивается длина волны (рисунки 2.12,а,б), а затем, при $P \approx 16$ возникает ядро некогерентности на месте центра спиральной волны, которое говорит о рождении химерного состояния на основе спиральной волны (рисунок 2.12,в). Аналогичный переход наблюдается и для многоядерных спиральных волн (рисунок 2.13). Как показали исследования, в этом случае при увеличении радиуса нелокальной связи уже при $P = 10$ возникает многоядерная спирально-волновая химера (рисунок 2.13,в), тогда как в случае одноядерной спиральной волны область некогерентности возникает только при б'ольшем значении $P \approx 16$ (рисунок 2.12,в).

Поскольку механизм возникновения спирально-волновых химерных структур и их эволюция и свойства подробно не были изучены ранее, на рисунке 2.14 приведены детальные характеристики когерентной и некогерентной областей для химерной структуры при $P = 16$. На пространственном профи-

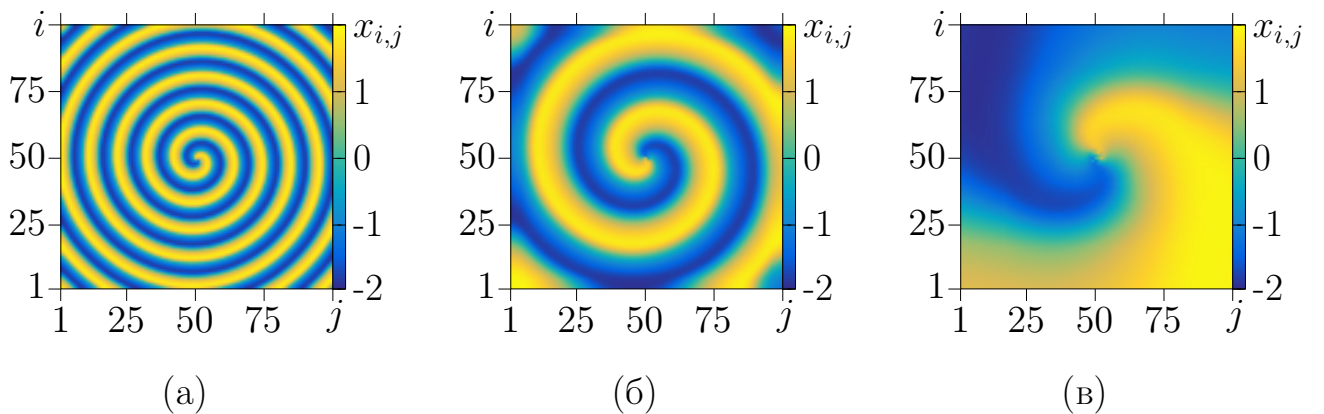


Рисунок 2.12. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}$, иллюстрирующие переход от спиральной волны к спирально-волновой химере при $P = 1$ (а), $P = 4$ (б), $P = 16$ (в) для системы (2.3) при $\sigma = 0.7$, $\varepsilon = 1$,

$$\omega = 0.9.$$

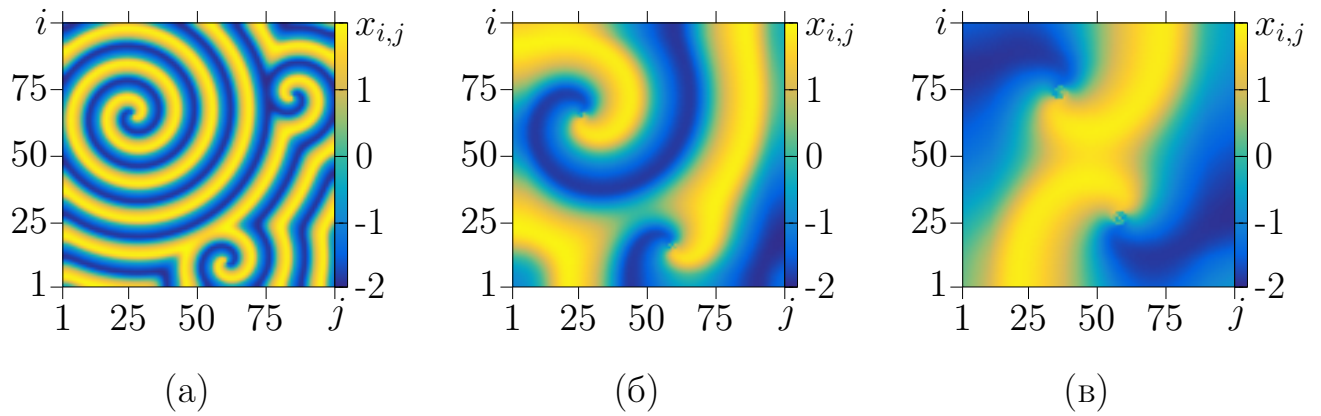


Рисунок 2.13. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}$, иллюстрирующие переход от многоядерной спиральной волны к многоядерной спирально-волновой химере в модели (2.3) при $P = 1$ (а), $P = 5$ (б), $P = 10$ (в) и $\sigma = 0.7$, $\varepsilon = 0.8$, $\omega = 0.9$.

ле (рисунок 2.14,а) вертикальной линией отмечено сечение $j_0 = 51$, для которого были рассчитаны и построены остальные характеристики, приведенные на рисунке 2.14,б-з. На одномерной картине сечения профиля амплитуд и на пространственно-временной диаграмме для этого же сечения (рисунки 2.14,б,в) визуально можно выделить большие области когерентной динамики и меньшую область некогерентной динамики в середине. Более отчетливо эта область различима на распределении значений коэффициентов корреляции (2.12) для сечения $j_0 = 51$, приведенном на рисунке 2.14,е. Как видно, значения R_{i,j_0} распределены нерегулярно для осцилляторов в кластере $49 \leq i \leq 54$. Фазовые портреты и временные реализации для двух соседних осцилляторов в когерентной области (рисунки 2.14,г,ж) показывают, что поведение осцилляторов практически идентично. Аналогичные графики для соседних осцилляторов в некогерентной области (рисунки 2.14,д,з) демонстрируют заметное различие в их динамике. Важно отметить, что поведение осцилляторов в середине ядра некогерентности перестает быть периодическим (рисунок 2.14,д).

Как было показано в разделе 2.3.1, поведение центрального элемента спиральной волны даже в случае локальной связи отличается от поведения всех

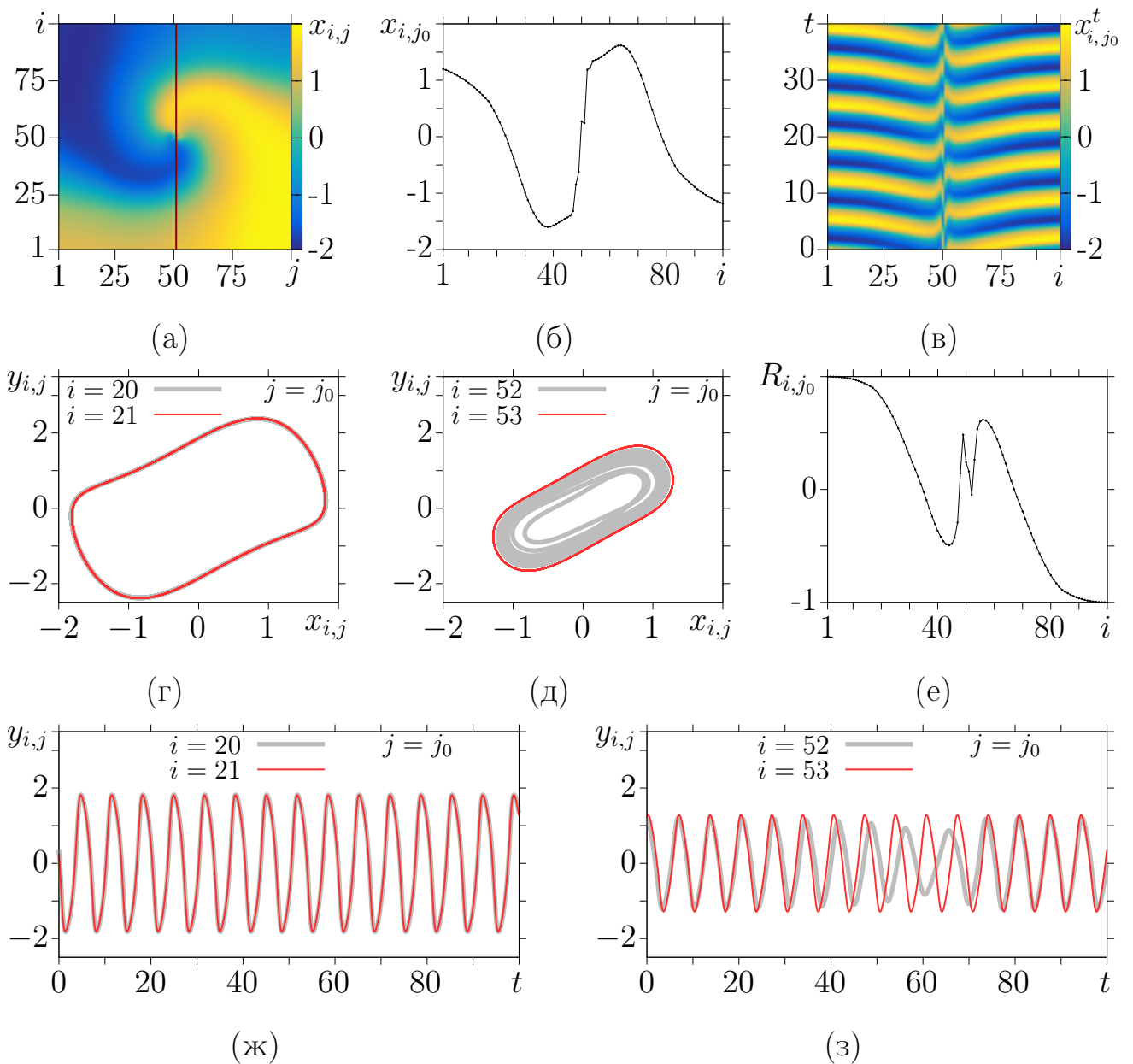


Рисунок 2.14. Особенности режима спирально-волновой химеры в модели (2.3)

при $P = 16$. Мгновенный пространственный профиль для $x_{i,j}$ (а), его одномерное сечение при $j_0 = 51$ (б) (отмечено на фрагменте (а) вертикальной красной линией), пространственно-временная диаграмма (в), фазовые портреты для осцилляторов из когерентной (г) и некогерентной (д) областей, распределение (2.12) для $j_0 = 51$ (е), временные реализации для осцилляторов из когерентной (ж) и некогерентной (з) областей при $\sigma = 0.7$, $\varepsilon = 1$, $\omega = 0.9$.

остальных осцилляторов и его колебания наиболее чувствительны к внешнему возмущению (рисунок 2.4,а). Это может служить причиной возникновения

кластера некогерентности в центре спиральной волны и перехода к химерной структуре при увеличении нелокальности связи. Теперь имеет смысл подробно исследовать динамику структур в случае увеличения значения параметра P . При небольшой степени нелокальности, $P = 4$ (рисунок 2.15,а), длина волны спиральной структуры увеличивается по сравнению со случаем локальной связи (рисунок 2.12) и в центре спиральной волны уже несколько осцилляторов демонстрируют неперiodические колебания (рисунки 2.15,б,в). Кроме того, старший показатель Ляпунова становится положительным ($\lambda_1 = 0.0232 \pm 0.0005$), что свидетельствует о возникновении хаотической динамики в ансамбле. По-

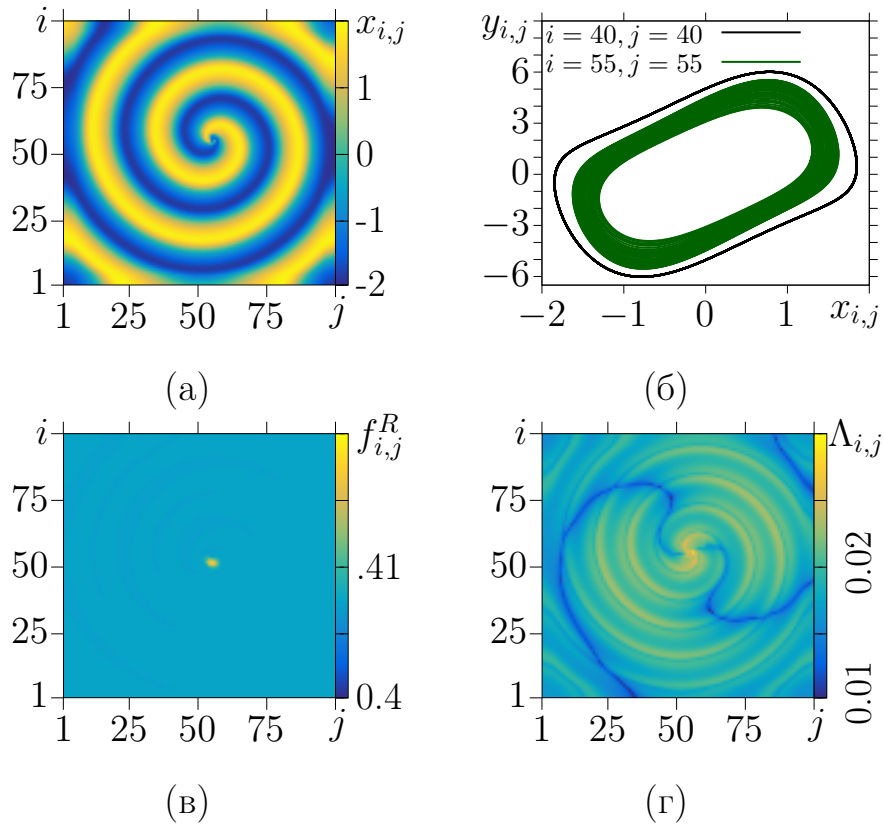


Рисунок 2.15. Мгновенный пространственный профиль значений $x_{i,j}$ (а), фазовые портреты осцилляторов из когерентной ($i = 40, j = 40$, черная линия) области и в центре ($i = 55, j = 55$, зелёная линия) (б), распределение частот осцилляторов (в), распределение индексов локальной чувствительности (2.9) (г) для модели (2.3) в случае нелокальной связи при

$$P = 4, \sigma = 0.9, \omega = 2.5, \varepsilon = 2.1.$$

сколькx колебания осцилляторов вне центра спиральной волны остаются периодическими, хаотическими являются именно колебания элементов в центре волны (рисунок 2.15,б). Распределение частот Райса (2.13) в центре наблюдаемой структуры является колоколообразным, а сами значения возрастают от краев к центру (рисунок 2.15,в).

Пространственное распределение $\Lambda_{i,j}$ (рисунок 2.15,г) показывает, что степень чувствительности элементов в центре решетки более заметно отличается от чувствительности остальных. То есть, в векторе пространства возмущения появляются сильно выраженные направления наибольшего роста, главным образом определяющие величину старшего показателя Ляпунова, который является положительным. Другими словами, центр является ведущим в появлении некогерентности (нерегулярности в пространстве).

Значение старшего показателя Ляпунова является максимальным в случае $P = 4$, в то же время происходит качественное изменение динамики системы (2.3), сопровождающееся рождением спирально-волновой химеры. При $P > 4$ значение старшего показателя Ляпунова уменьшается и в ансамбле можно выделить области с когерентным и некогерентным поведением (рисунок 2.16). Характерные колебания генераторов решетки (ср. рисунки 2.15,б и 2.16,б) и распределение частот Райса (ср. рисунки 2.15,в и 2.16,в) качественно не изменяются. Осцилляторы в некогерентном кластере также демонстрируют хаотическую динамику (значение старшего показателя $\lambda_1 = 0.021 \pm 0.0005$), тогда как колебания в когерентном кластере регулярны (рисунок 2.16,б). Поведение спирально-волновой химеры подобно поведению химеры Курамото в том, что частоты распределены в ядре в форме колокола [123, 124] (рисунок 2.16,в). Это распределение радиально гладко уменьшается при движении от центра к краям. Индекс локальной чувствительности (рисунок 2.16,г) для ядра химеры обладает следующей особенностью: внутри области некогерентности находятся элементы с заметно различающейся по величине чувствительностью, но, в среднем, она выше, чем в области некогерентности. Таким образом, при увеличении

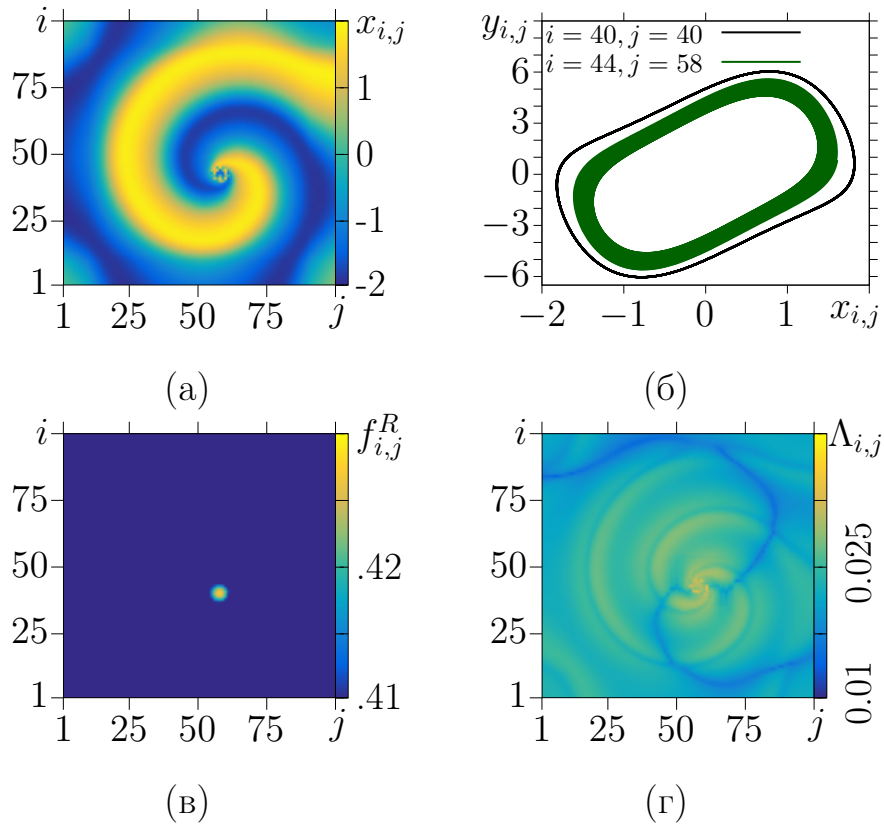


Рисунок 2.16. Мгновенный пространственный профиль значений $x_{i,j}$ (а), фазовые портреты осцилляторов из когерентной ($i = 40, j = 40$, черная линия) области и из центра ($i = 44, j = 58$, зелёная линия) (б), распределение частот осцилляторов (в), распределение индексов локальной чувствительности (2.9) (г) для модели (2.3) в случае нелокальной связи при $P = 9, \sigma = 0.9, \omega = 2.5, \varepsilon = 2.1$.

радиуса нелокальной связи кластер некогерентности расширяется и элементы в середине кластера становятся все менее "связанными" с когерентной волной.

Дальнейшее увеличение диапазона связи ($P > 31$) в ансамбле (2.3) ведёт к переключению решетки в режим полной синхронизации с периодическими колебаниями осцилляторов в узлах решетки. Частота колебаний всех генераторов тоже становится одинаковой, а значение старшего показателя Ляпунова нулевым ($\lambda_1 = 0.000 \pm 0.0005$ для $P = 32$).

Эволюция концентрической волны при увеличении нелокальности связи. В результате проведенных численных исследований в решетке генера-

торов ван дер Поля впервые была обнаружена новая химерная структура – концентрическая волновая химера, которая возникает при увеличении диапазона нелокальности связи. В качестве примера на рисунке 2.17 проиллюстрирована эволюция концентрической волны в модели (2.3) при увеличении параметра P при $\varepsilon = 2$. Как видно из рисунка, уже при $P = 4$ в центре структуры возникает область некогерентности (рисунок 2.17,б), соответствующая ядру нового химерного состояния – концентрической волновой химере. Далее, при $P = 4, 5, \dots, 8$ увеличивается длина волны когерентной части волны (рисунок 2.17,в), а при $P > 8$ концентрическая структура разрушается.

Таким образом, как и в случае спиральной волны, в случае концентрической волны нелокальность приводит к возникновению некогерентности в центре волны. Однако более детальные исследования показывают (рисунок 2.18), что свойства новой химерной структуры отличны от характеристик спирально-волновой химеры. На пространственном профиле (рисунок 2.18,а) вертикальной линией отмечено сечение $j_0 = 51$, для которого был рассчитан ряд характеристик, приведенных на рисунке 2.18,б–з. На одномерном сечении мгновенного профиля и на пространственно-временной диаграмме для этого же сечения (ри-

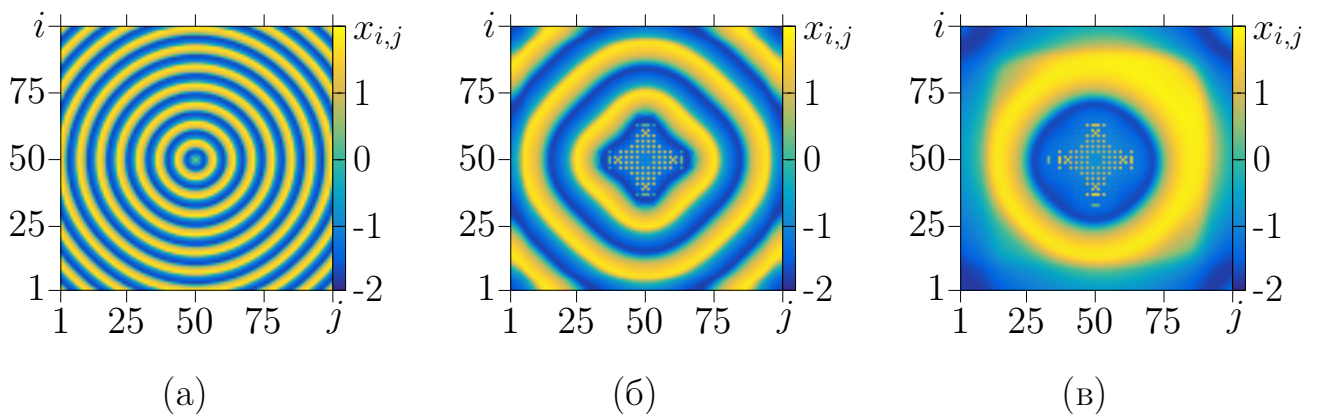


Рисунок 2.17. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}$, иллюстрирующие переход от концентрической волны к концентрической волновой химере в модели (2.3) при $P = 1$ (а), $P = 4$ (б), $P = 8$ (в) и $\sigma = 0.7$, $\varepsilon = 2$, $\omega = 0.9$.

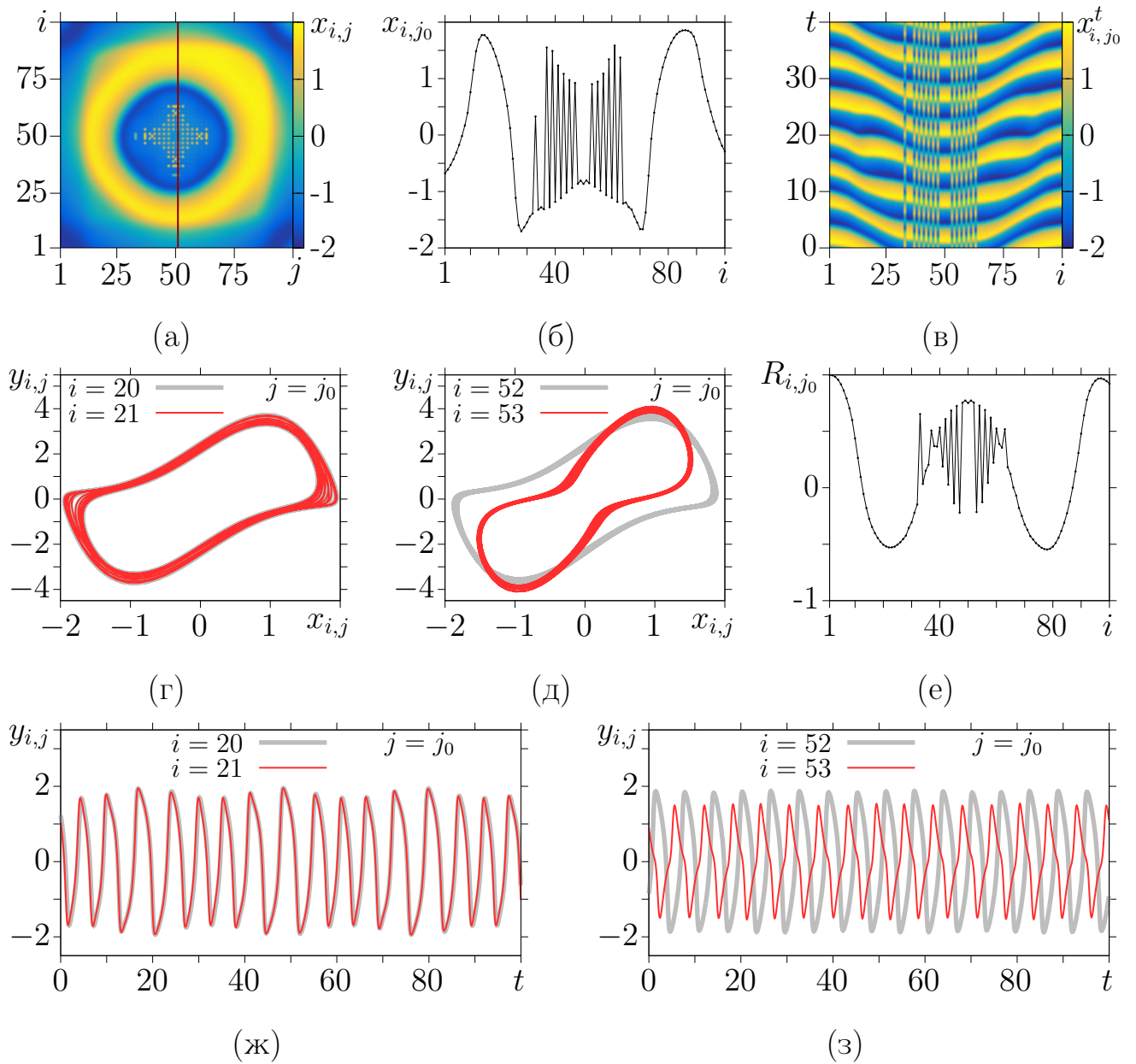


Рисунок 2.18. Особенности режима концентрической волновой химеры в (2.3) при $P = 8$. Мгновенный пространственный профиль значений $x_{i,j}$ (а), его одномерное сечение при $j_0 = 51$ (б) (отмечено на фрагменте (а) вертикальной красной линией), пространственно-временная диаграмма (в), фазовые портреты для осцилляторов из когерентной (г) и некогерентной (д) областей, распределение (2.12) для $j_0 = 51$ (е), временные реализации для осцилляторов из когерентной (ж) и некогерентной (з) областей при $\sigma = 0.7$, $\varepsilon = 2$, $\omega = 0.9$.

сункки 2.18,б,в) отчетливо видны две области когерентной динамики и довольно большая область некогерентности, в которой амплитуды соседних осциллято-

ров очень сильно отличаются. Распределение значений коэффициента корреляции R_{i,j_0} является гладким в когерентных областях ($i = 1, \dots, 32, 63, \dots, 100$) и переключается между положительными и отрицательными значениями в ядре химерной структуры ($i = 33, \dots, 62$, рисунок 2.18,е). Фазовые портреты и временные реализации для двух соседних осцилляторов в когерентной области показывают (рисунки 2.18,г,ж), что поведение осцилляторов практически идентично, но отличается от динамики аналогичных осцилляторов в случае спирально-волновой химеры (рисунки 2.14,г,ж). Режим поведения отдельных осцилляторов в когерентной области становится квазипериодическим. Фазовые портреты для соседних осцилляторов в некогерентной области (рисунок 2.18,д) показывают, что поведение некоторых осцилляторов похоже на поведение осцилляторов в когерентной области (серая линия), тогда как поведение других заметно изменяется и сильно отличается от фазового портрета осциллятора ван дер Поля (красная линия). Такое поведение является особенностью химеры уединенных состояний, впервые обнаруженной в работе [100]. Временные реализации для соседних осцилляторов в некогерентной области (рисунок 2.18,з) сдвинуты друг относительно друга на примерно половину периода, то есть находятся в противофазе.

Переход от спиральной волны к концентрической волновой химере.

В разделе 2.3.1 было показано, что в модели связанных генераторов ван дер Поля под действием внешнего шума возможен переход от концентрической волны к спиральной. В данном разделе представлены результаты исследования влияния степени нелокальности связи на спиральную структуру в модели (2.3) при достаточно больших значениях параметра ε (рисунок 2.19). Мгновенные пространственные профили, приведенные на рисунке 2.19, показывают, что при $P = 2$ спирально-волновой режим в решетке разрушается и возникает режим, включающий концентрическую волну и области с некогерентной динамикой (рисунок 2.19,б). При дальнейшем увеличении радиуса нелокальности P кон-

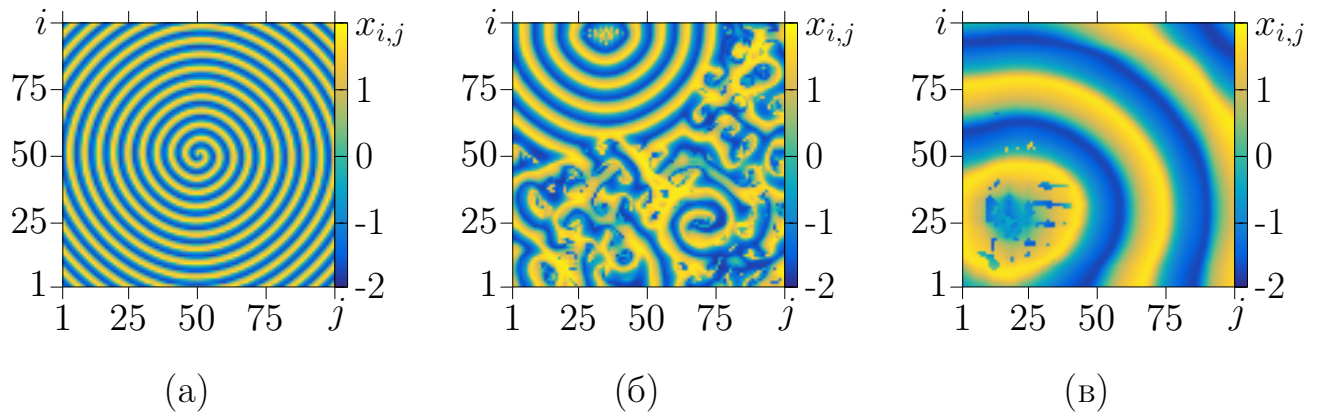


Рисунок 2.19. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}$, иллюстрирующие переход от спиральной волны к концентрической волновой химере в решетке (2.3) при $P = 1$ (а), $P = 2$ (б), $P = 8$ (в) при $\sigma = 0.7$, $\varepsilon = 2$, $\omega = 0.9$.

концентрическая структура занимает всю решетку и включает в себя ядро некогерентности химерного состояния (рисунок 2.19,в). Отметим, что длина волны концентрической волновой химеры в когерентной области намного больше, чем длина волны исходной спиральной волны (рисунок 2.19,а). Кроме того, центр некогерентного ядра значительно смещен по сравнению с центром спиральной волны.

2.4.2 Роль уединенных состояний в формировании пространственно-временных структур в решетке генераторов ван дер Поля

В данном разделе более подробно рассматривается поведение решетки идентичных осцилляторов ван дер Поля и показывается, что в формировании некогерентного кластера концентрической химеры важную роль играют уединенные состояния. Это указывает на то, что концентрические волновые химеры похожи на химеры уединенных состояний. Более того, при увеличении

нелокальности концентрические волновые химеры могут переходить в химеры уединенных состояний.

Диаграмма режимов для решетки осцилляторов ван дер Поля. На рисунке 2.20 приведены диаграмма характерных пространственно-временных режимов на плоскости параметров (P, σ) , которые наблюдаются в решетке генераторов ван дер Поля при $\varepsilon = 2.1$, $\omega = 2.5$, и типичные мгновенные пространственные профили, иллюстрирующие данные структуры. Для получения всех режимов выбиралась реализация случайных начальных условий, распределенная в конечных интервалах: $x_{i,j}(0) \in [-1, 1]$ и $y_{i,j}(0) \in [-1, 1]$. Для количественной оценки когерентности элементов ансамбля использовалась статистическая характеристика в виде корня из среднеквадратичного отклонения между соседними элементами (2.11).

Режим пространственно-временной некогерентности (область I на рисунке 2.20,а) реализуется при очень малых значениях параметров нелокальной связи P и σ . При небольшом увеличении силы и диапазона связи ансамбль может демонстрировать структуры, напоминающие химерные состояния (область VII на рисунке 2.20,а,в). Режим характеризуется сосуществованием когерентных и некогерентных групп осцилляторов, но границы этих групп различить не удастся. Распределение $d_{i,j}$ (2.11) принимает максимальные значения в некогерентных областях структуры, а минимальные – в когерентных, но меняется гладко и не позволяет провести границу между соответствующими кластерами. Самая большая область на диаграмме режимов соответствует режимам полной и частичной синхронизации (область II на рисунке 2.20,а), которые возникают при $P > 1$ и $\sigma \in [0, 0.6) \cup (0.75, 1]$. Типичный мгновенный пространственный профиль режима показан на рисунке 2.20,б. В области II все отображения ансамбля демонстрируют периодические колебания. В случае полной синхронизации все амплитуды в выбранный момент времени одинаковы между собой, а в случае

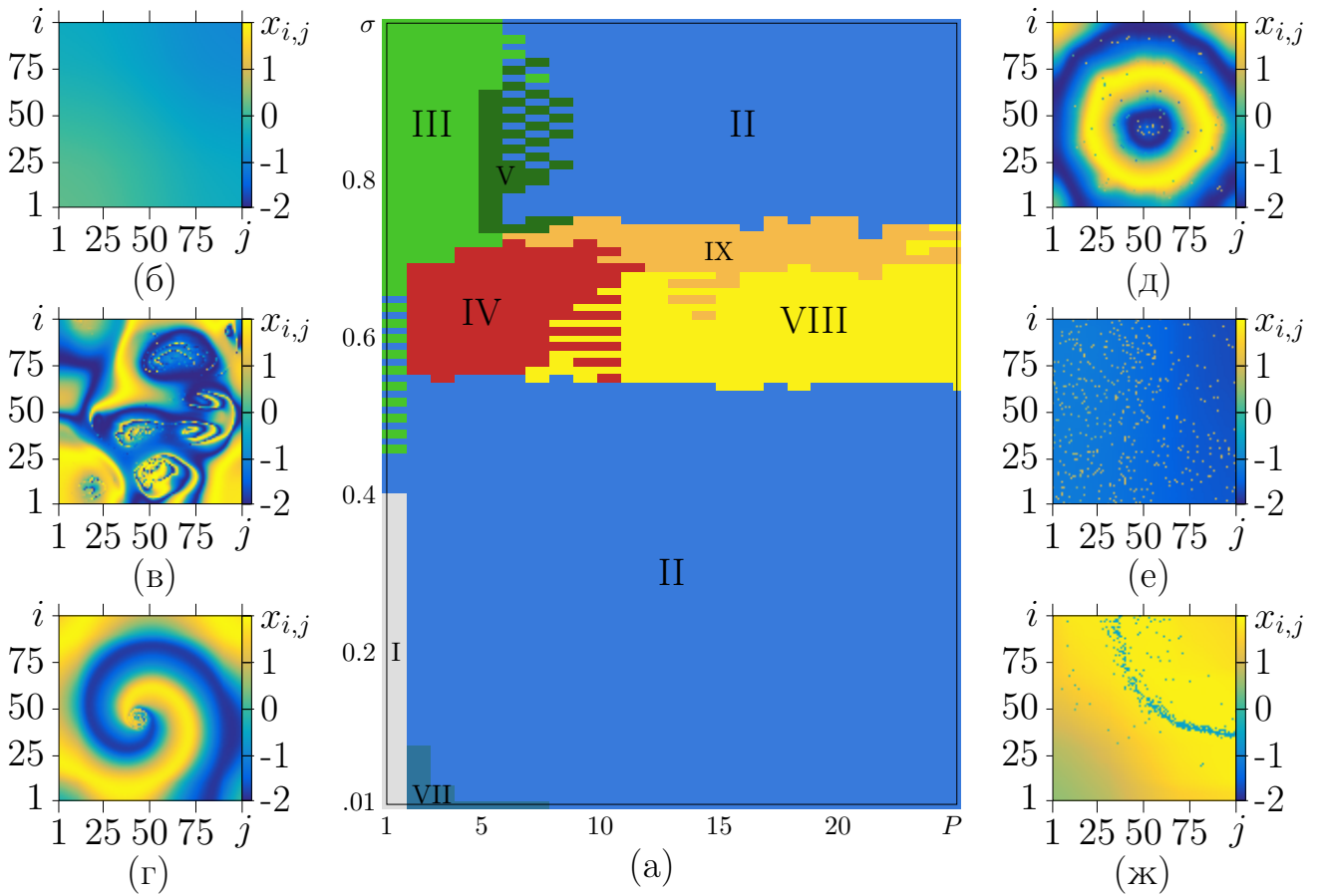


Рисунок 2.20. Диаграмма режимов для решетки (2.3) на плоскости параметров (P, σ) при $\varepsilon = 2.1$ и $\omega = 2.5$ (а). На диаграмме отмечены область некогерентных колебаний (I); полной или частичной синхронизации (II); структур химерного типа (VII); спиральных волн (III) и спиральных химер (V); концентрических волн и химер (IV); уединенных состояний (VIII) и химер уединенных состояний (IX). По краям приведены мгновенные профили при $P = 4, \sigma = 0.22$ (б), $P = 5, \sigma = 0.01$ (в), $P = 8, \sigma = 0.08$ (г), $P = 4, \sigma = 0.65$ (д), $P = 30, \sigma = 0.57$ (е) и $P = 30, \sigma = 0.6$ (ж).

частичной синхронизации – амплитуды соседних элементов отличаются незначительно.

Спиральные волны и химеры на их основе (области III и V на рисунке 2.20, а, г) наблюдаются при $P < 12$ и $\sigma > 0.7$. Однако спиральные волны могут также возникать при меньших значениях σ при локальной и близкой к локальной связи ($P = 1, 2, 3$). Спиральные волны подробно описаны выше, а здесь

рассматриваются главным образом концентрические структуры и уединенные состояния. Режим уединенных состояний может наблюдаться в ансамблях с различной топологией и является типичным для подобных систем [84, 224, 225]. Причиной возникновения уединенных состояний может быть мультистабильность, возникающая в результате влияния нелокальной связи на отдельные элементы, как показано в работе [103]. Кроме того, в статье [100] показано, что уединенные состояния могут группироваться, образуя некогерентный кластер химеры уединенных состояний.

С ростом диапазона связи $P > 1$ длина волны концентрической структуры увеличивается в интервале $0.55 < \sigma < 0.7$. Новый интересный режим появляется при достаточно больших значениях параметров связи. При $P < 12$ и $0.55 < \sigma < 0.7$ в решетке рождаются разнообразные концентрические структуры (IV на рисунке 2.20,а), которые могут быть концентрическими химерными состояниями или концентрическими волнами с разбросанными по всей решетке уединенными состояниями, которые характеризуются особым, отличающимся от других, поведением отдельных элементов. Пример такой структуры приведен на рисунке 2.20,д. При $P > 12$ концентрические волны либо трансформируются в режим уединенных состояний (при $\sigma < 0.7$, область VIII на рисунке 2.20,а,е), либо в режим химеры уединенных состояний (при $\sigma > 0.7$, область IX на рисунке 2.20,а,ж). При плавном увеличении параметра σ при движении из области VIII в область IX уединенные состояния постепенно локализуются в одной области (рисунки 2.20,е,ж).

Концентрические структуры и уединенные состояния. В области IV (рисунок 2.20,а,д) реализуются разнообразные структуры концентрического типа. На рисунке 2.21,а приведен пример типичной для этой области структуры. Видно, что волновой фронт представляет собой окружность и в центре существует область некогерентности. При этом система демонстрирует высокую степень мультистабильности, и при тех же параметрах, но при немного дру-

гих начальных условиях уединенные состояния распределяются иным образом (рисунки 2.21,а,г). При этом, после времени установления положение уединенных состояний на решетке не изменяется. На рисунках 2.21,в,е приведены распределения характеристики $d_{i,j}$ (2.11) для соответствующих режимов. Точки с максимальным значением $d_{i,j}$ отвечают элементам в режиме уединенного состояния. Все осцилляторы в приведенных режимах характеризуются одинаковыми средними частотами. Колебания осцилляторов решетки являются регулярными

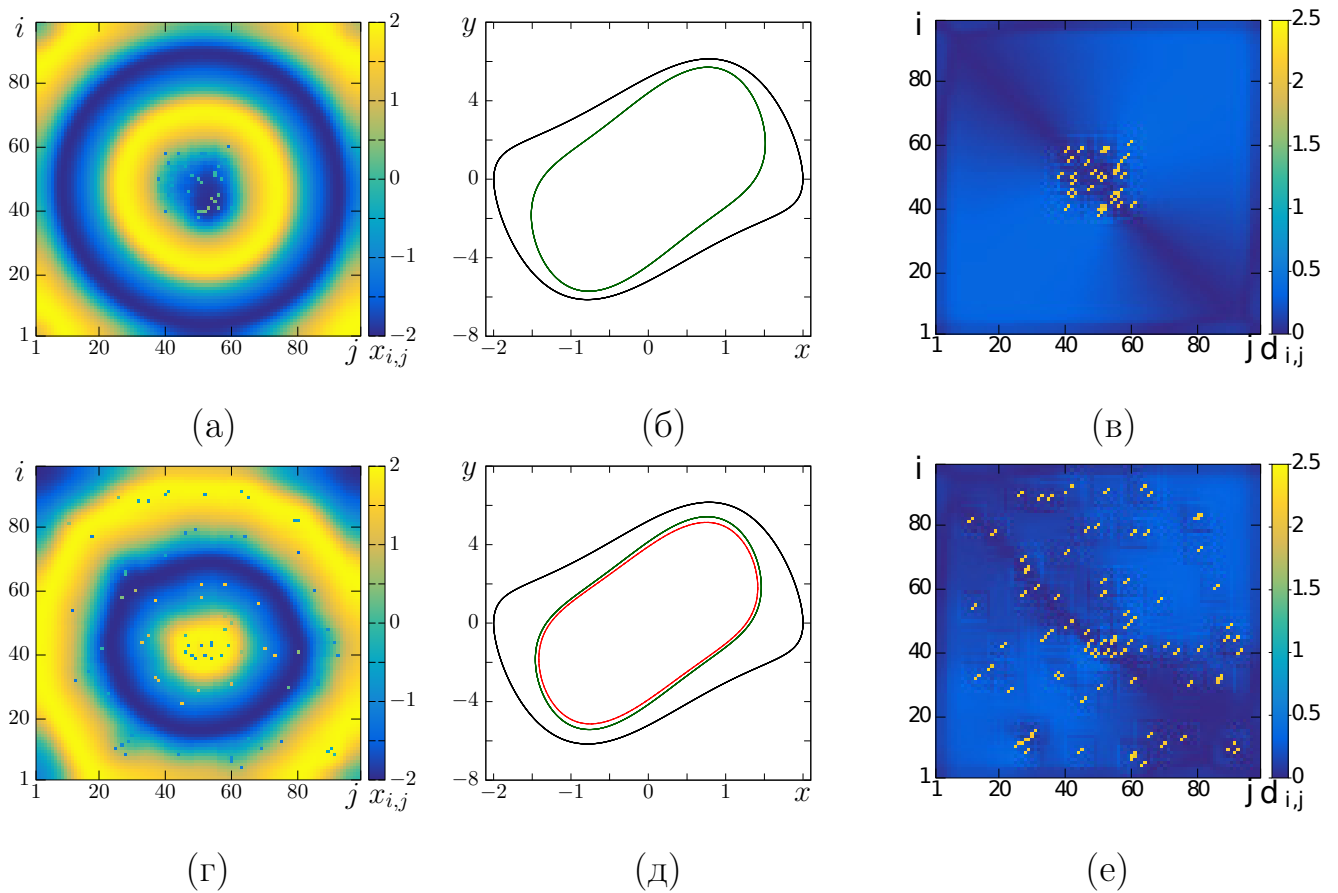


Рисунок 2.21. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}$ (а,г); фазовые портреты элементов когерентного кластера (черные кривые), уединенных состояний из центра структуры (зеленые кривые) и уединенных состояний вне центра (красная кривая) (б,д); распределения значений $d_{i,j}$ (2.11) (в,е) для концентрической волновой химеры (а-в) и для концентрической волновой структуры с уединенными состояниями (г-е) в решетке (2.3) при $P = 4$, $\sigma = 0.65$, $\varepsilon = 2$, $\omega = 2.5$, $N = 100$.

ными, что подтверждается нулевым значением старшего показателя Ляпунова λ_{max} . Несмотря на это, поведение осцилляторов, соответствующих уединенным состояниям, отличается от поведения остальных элементов. Этот факт отражают фазовые портреты, приведенные на рисунках 2.21,б,д. Как видно из рисунков, колебания осцилляторов в когерентной области, которым на рисунках соответствуют предельные циклы черного цвета, совпадают по форме с колебаниями отдельного генератора ван дер Поля, тогда как колебаниям генераторов в уединенном состоянии, фазовые портреты которых показаны цветными линиями на рисунках, отвечают отличные по виду предельные циклы. При этом, как показано на рисунке 2.21,д, уединенные осцилляторы в разных частях решетки (в центре и на краю волны) ведут себя немного по-разному. Тем не менее, они очень похожи, то есть природа колебаний элементов в режиме уединенного состояния и некогерентных осцилляторов в ядре концентрической волновой химеры схожа (рисунки 2.21,б,д). Кроме того, если уединенные состояния распределяются по всей решетке, то в центре их оказывается меньше, чем в случае, когда все уединенные состояния сконцентрированы в центре (рисунки 2.21,а,г).

Режим уединенных состояний. При больших значениях параметра нелокальности P в области VIII (рисунок 2.20,а) в решетке (2.3) наблюдаются только уединенные состояния. Особенность этого режима состоит в том, что колебания когерентных осцилляторов почти идентичны, распределение $d_{i,j}$ для них очень близко к нулю (рисунок 2.22,в). Однако осцилляторы в когерентной области демонстрируют немного отличную друг от друга динамику. Колебания некогерентных осцилляторов в этом режиме отличаются от колебаний уединенных осцилляторов в концентрической волне. Фазовый портрет осциллятора, соответствующего уединенному состоянию (зеленая линия на рисунке 2.22,б), представляет собой проекцию квазипериодических колебаний, что подтверждается нулевым значением старшего показателя Ляпунова.

В ходе численных исследований особый интерес вызвал процесс установления режима уединенных состояний во времени. Численные результаты приведены на рисунке 2.23 для нескольких хронологических моментов времени. При $t = 20$ (рисунок 2.23,а) мгновенный пространственный профиль отра-

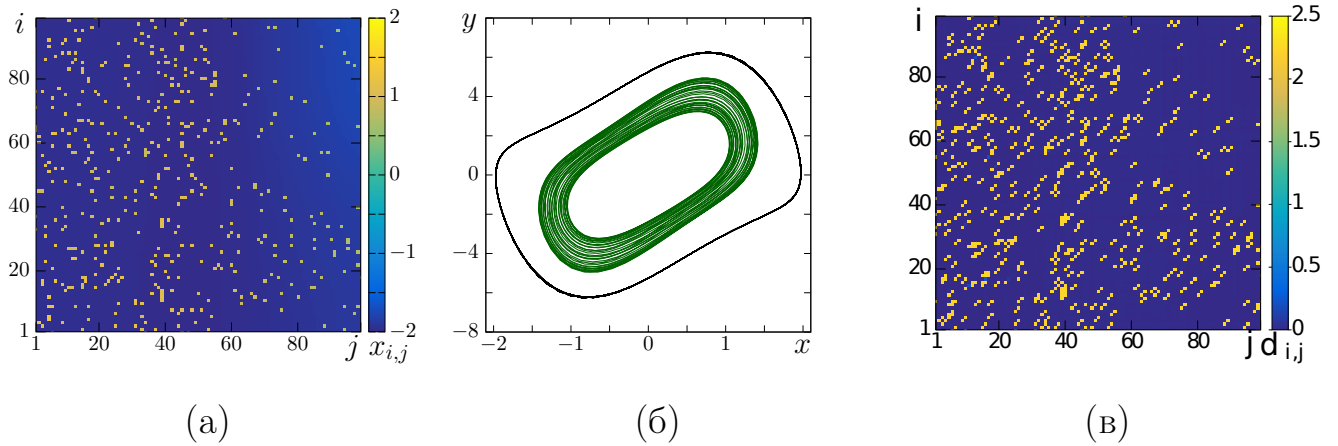


Рисунок 2.22. Мгновенный пространственный профиль амплитуд $x_{i,j}$ (а), фазовые портреты для уединенного состояния (зеленая кривая) и осциллятора из когерентной области (черная кривая) (б) и распределение значений $d_{i,j}$ (2.11) (в) для режима уединенных состояний в решетке (2.3) при $P = 30$, $\sigma = 0.57$, $\varepsilon = 2$, $\omega = 2.5$, $N = 100$.

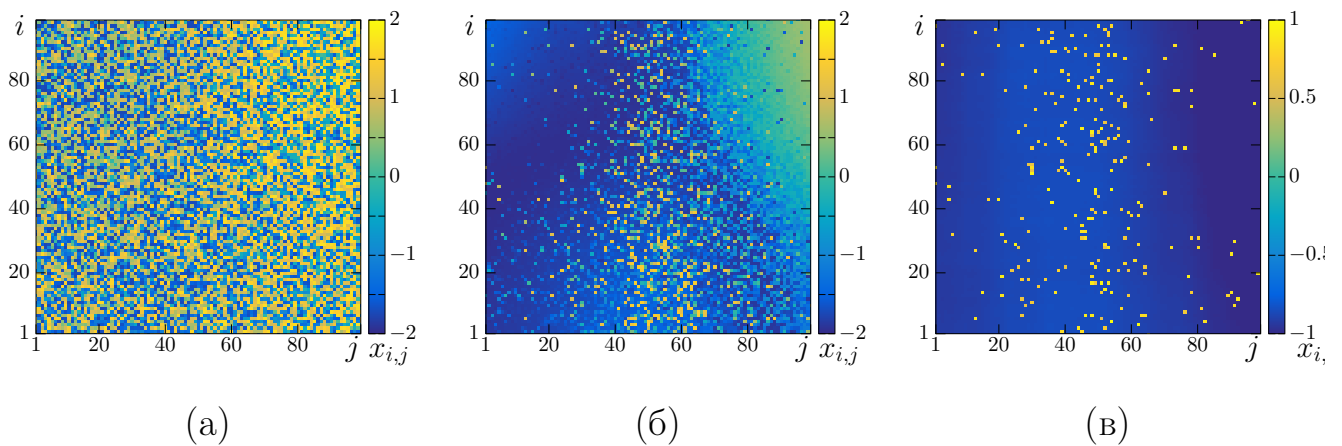


Рисунок 2.23. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}$ при установлении режима уединенных состояний в решетке (2.3) для моментов времени $t = 20$ (а), $t = 40$ (б) и $t = 100$ (в) при $P = 30$, $\sigma = 0.57$, $\varepsilon = 2$, $\omega = 2.5$, $N = 100$.

жает нерегулярное распределение амплитуд осцилляторов ансамбля. Через 20 единиц безразмерного времени (рисунок 2.23,б) появляются когерентные области, но большая часть профиля является некогерентной в пространстве. В этот момент времени уже можно различить некоторые осцилляторы, которые при $t = 100$ (рисунок 2.23,в) переходят в режим уединенного состояния и больше не изменяют своего положения.

Химера уединенных состояний. При увеличении силы связи, при движении из области VIII в область IX на рисунке 2.20,а уединенные состояния, которые в области VIII распределены равномерно по всему ансамблю (рисунок 2.24,а), группируются в одной области, формируя некогерентный кластер химеры уединенных состояний (рисунки 2.24,б,в). Из данных рисунков видно, что при увеличении σ в области IX область некогерентности уменьшается. Дальнейшее увеличение σ приводит к переходу решетки в режим полной синхронизации всех осцилляторов. Для сравнения динамики уединенных состояний с динамикой осцилляторов из когерентной области на рисунках 2.24,г-е приведены фазовые портреты отдельных осцилляторов, соответственно структурам на рисунках 2.24,а-в. В случае обычного режима уединенных состояний (рисунки 2.24,а,г) колебания осциллятора в уединенном состоянии отличаются по амплитуде от колебаний остальных элементов решетки и соответствующий предельный цикл (зеленая кривая на рисунке 2.24,г) по форме намного меньше предельных циклов для когерентных элементов (черная кривая). При переходе к режиму химеры уединенных состояний, при увеличении силы связи предельные циклы для некогерентных осцилляторов расширяются и приближаются по форме к циклам для когерентных генераторов (рисунки 2.24,д,е). При последующем увеличении силы связи динамика решетки в целом становится когерентной и, соответственно, все фазовые портреты колебаний осцилляторов становятся идентичными фазовому портрету для отдельного генератора ван дер Поля.

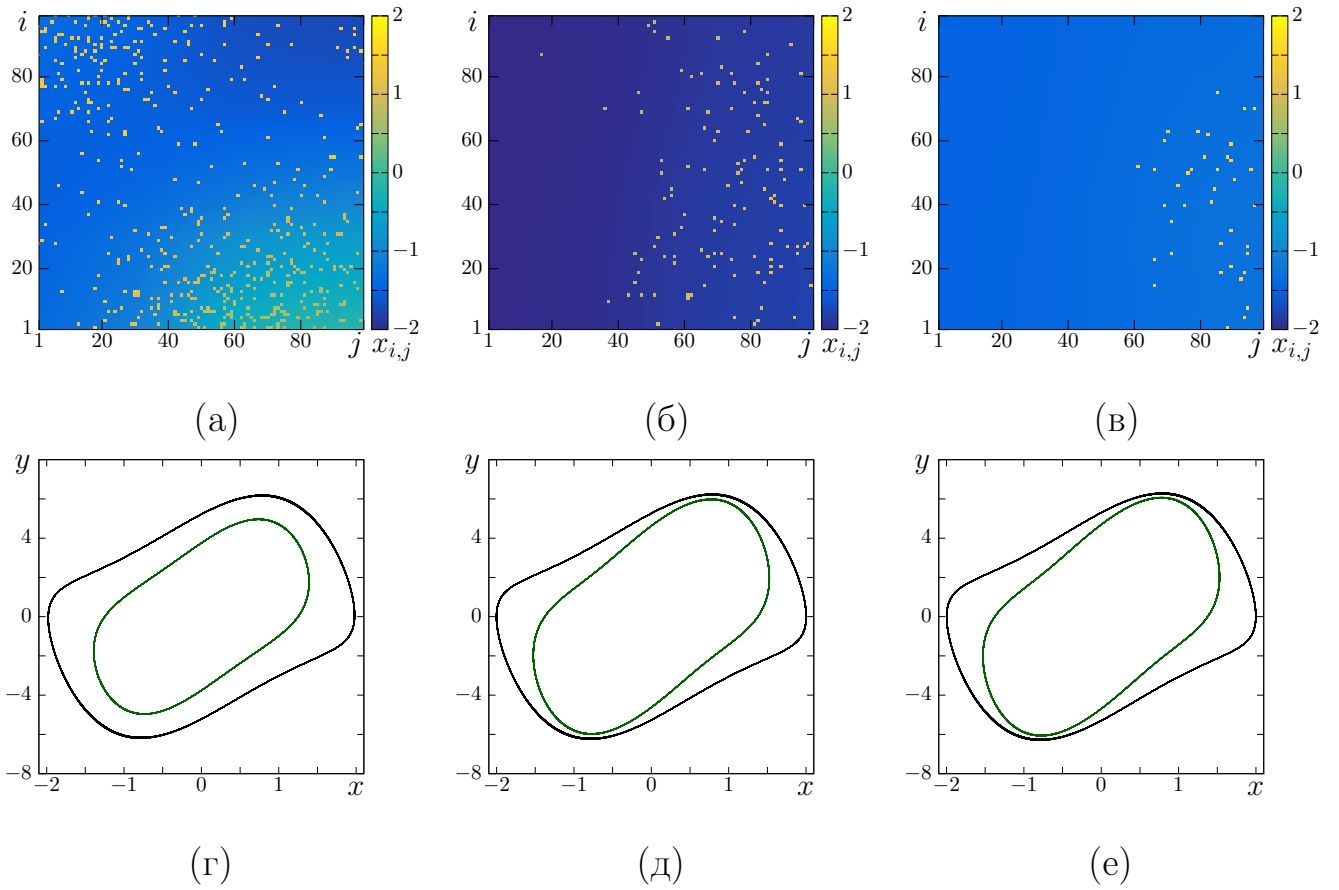


Рисунок 2.24. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}$ (а-г) и фазовые портреты (г-е) колебаний осцилляторов в режиме уединенного состояния (зеленая кривая) и из когерентной области (черная кривая), иллюстрирующие переход от режима уединенных состояний к режиму химеры уединенных состояний в решетке (2.3) при $\sigma = 0.612$ (а), $\sigma = 0.696$ (б), $\sigma = 0.726$ (в) и $P = 30$, $\varepsilon = 2$, $\omega = 2.5$, $N = 100$.

Поскольку решетка связанных генераторов ван дер Поля обладает свойством мультистабильности, при одних и тех же значениях параметров, но разных реализациях распределения начальных условий есть возможность получить как режим равномерно распределенных уединенных состояний (рисунок 2.22), так и режим химеры уединенных состояний со сгруппированными в одном кластере уединенными состояниями (рисунок 2.25). Структура, мгновенный профиль для которой приведен на рисунке 2.25,а, может быть разделена на три области. В двух из них все соседние осцилляторы синхронны и

синфазны между собой, а в третьей большая часть осцилляторов демонстрирует когерентную динамику, тогда как некоторая часть представляет собой уединенные состояния. Изменения проекций фазовых портретов колебаний осцилляторов из некогерентной области, представленные на рисунке 2.24,г-е, не характеризуют именно возникновение химерной структуры, так как проекции фазовых портретов (рисунок 2.25,б) для осцилляторов в химерном состоянии (рисунок 2.25,а) отражают типичное для режима уединенных состояний поведение (рисунки 2.24,а,б). Регулярность динамики осцилляторов решетки в целом подтверждается нулевым значением старшего показателя Ляпунова и видом проекций фазовых портретов для отдельных элементов. В то же время, распределение значений среднеквадратичного отклонения (2.11) (рисунок 2.25,в) свидетельствует о том, что в исследуемой системе (2.3) режим химерного состояния и режим уединенных состояний обладают практически одинаковыми особенностями.

На рисунке 2.26 показано, как происходит формирование химеры уединенных состояний в решетке (2.3) во времени при использовании случайно рас-

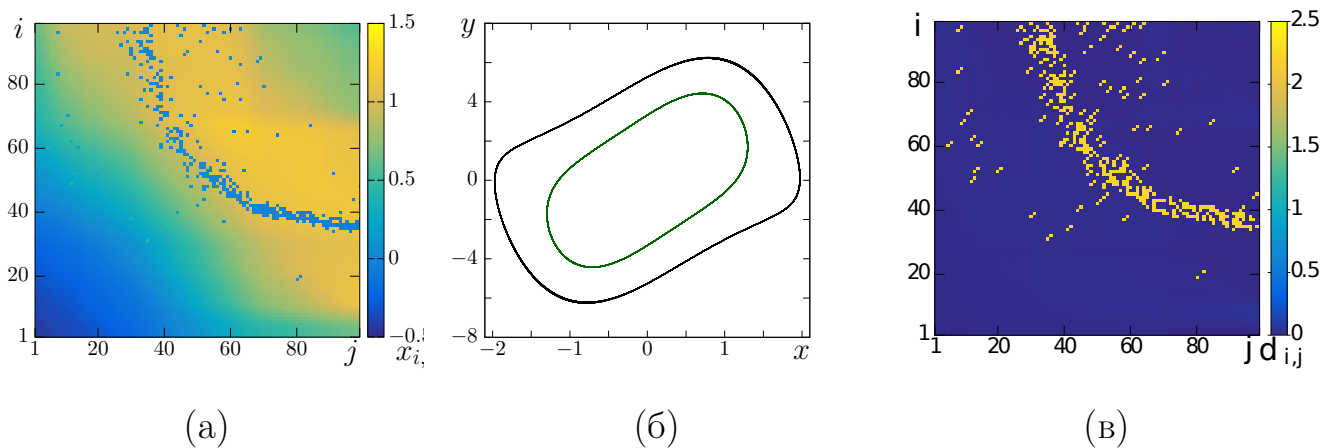


Рисунок 2.25. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}$ (а), фазовые портреты (б) колебаний осцилляторов в режиме уединенного состояния (зеленая кривая) и из когерентной области (черная кривая) и распределение значений $d_{i,j}$ (2.11) (в) для режима химеры уединенных состояний в решетке (2.3) при $P = 30$, $\sigma = 0.57$, $\varepsilon = 2$, $\omega = 2.5$, $N = 100$.

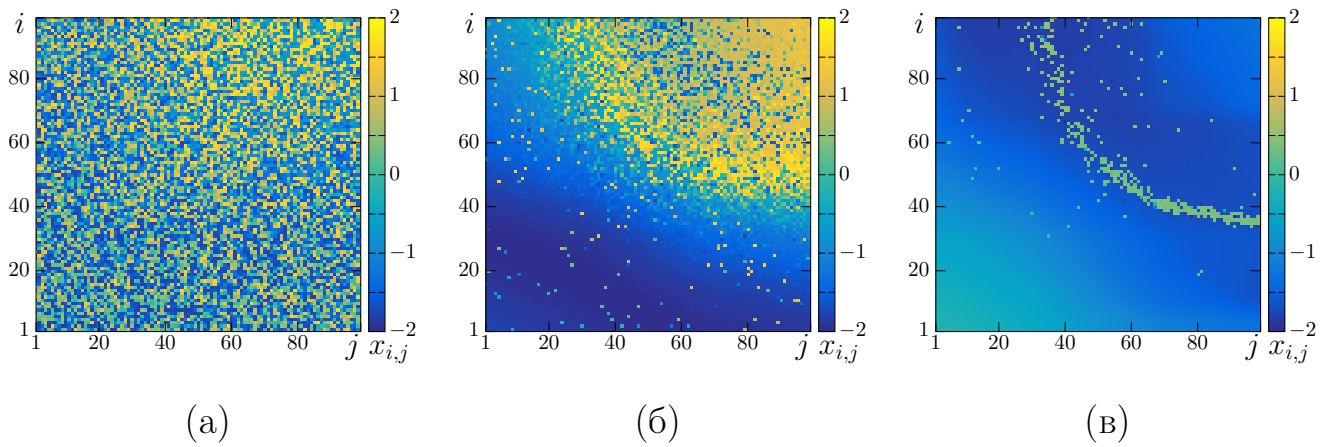


Рисунок 2.26. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}$ при установлении режима химеры уединенных состояний в решетке (2.3) для моментов времени $t = 20$ (а), $t = 40$ (б) и $t = 100$ (в) при $P = 30$, $\sigma = 0.57$, $\varepsilon = 2$, $\omega = 2.5$, $N = 100$.

предельных начальных условий. Через 20 единиц безразмерного времени в пространстве решетки можно выделить две области, в которых средние значения амплитуд осцилляторов сильно различаются (рисунок 2.26,а). Из рисунка можно определить, как ориентируется пространственный профиль возникающей волны. Далее, при $t = 40$ можно сказать, что форма когерентного профиля окончательно сформировалась (рисунок 2.26,б), однако динамика не всех осцилляторов является установившейся. Наконец, при $t = 100$ (довольно малый промежуток времени для решетки с 10000 элементами) формируется режим, который в дальнейшем (насколько можно судить по результатам численного моделирования) не изменяется (рисунок 2.26,в).

Таким образом, одной из фундаментальных причин возникновения химеры уединенных состояний, так же как и режима уединенных состояний, является наличие мультистабильности в динамике элементов решетки (2.3). Задание случайных начальных условий приводит к возникновению различных аттракторов в проекциях фазового пространства системы на плоскости переменных отдельных осцилляторов и к различным распределениям элементов решетки между этими аттракторами. При этом проекции аттракторов большинства эле-

ментов совпадают по форме с аттрактором изолированного генератора ван дер Поля, а отличаются только для некоторых элементов. В случае химерных режимов на возможность элемента остаться на отличающемся от остальных аттракторе влияет наличие некогерентных осцилляторов по соседству. В когерентной области с небольшим количеством уединенных состояний последние быстро исчезают, тогда как в некогерентной (где уединенных состояний много) они остаются.

2.4.3 Влияние нелокальности на режимы в решетке осцилляторов ФитцХью-Нагумо

Как показали проведенные исследования, в решетке осцилляторов ФитцХью-Нагумо (2.4) при $N = 100$ и фиксированных значениях параметров $\varepsilon = 0.2$, $\beta = 0.001$, $\gamma = 0.8$, также как и в (2.3), при увеличении нелокальности связи наблюдается переход от спиральной волны к спирально-волновой химере, сопровождающийся ростом длины волны спирали. Аналогичным образом изменяется значение показателя Ляпунова при увеличении нелокальности связи. При $P = 4$ колебания всех осцилляторов, кроме элементов в центре, остаются периодическими, тогда как динамика центральных осцилляторов становится слабо хаотической. В этом случае значение старшего показателя Ляпунова максимально, $\lambda_1 = 0.004 \pm 0.0005$. При $P > 4$ появляется ядро некогерентности в центре волновой структуры, что соответствует возникновению спирально-волновой химеры, а величина λ_1 начинает уменьшаться. Проведенные расчеты индекса локальной чувствительности показали, что элементы в центре волны более чувствительны к линейному возмущению, чем остальные.

Дальнейшее увеличение параметра нелокальности ведёт к возникновению спирально-волновой химеры. При $P = 10$ наблюдается химера с ядром некоге-

рентности в центре спиральной структуры (рисунок 2.27,а). Колебания осцилляторов в ядре некогерентности остаются слабо хаотическими, так что фазовые портреты отдельных осцилляторов напоминают предельные циклы, если не рассматривать тонкую структуру фазовых траекторий. Однако значение старшего показателя Ляпунова – небольшое положительное число ($\lambda_1 = 0.003 \pm 0.0005$). Рисунок 2.27,б показывает, что распределение средних частот (2.13) имеет колоколообразную форму, как и в случае нелокально связанных генераторов ван дер Поля. Распределение значений индекса локальной чувствительности, приведенное на рисунке 2.27,в, иллюстрирует высокую чувствительность осцилляторов в ядре некогерентности к внешним возмущениям.

При дальнейшем увеличении параметра нелокальности связи ядро некогерентности становится больше, а также увеличивается длина волны спирали. При этом значение старшего показателя Ляпунова уменьшается и при $P = 28$ становится очень близким к нулю.

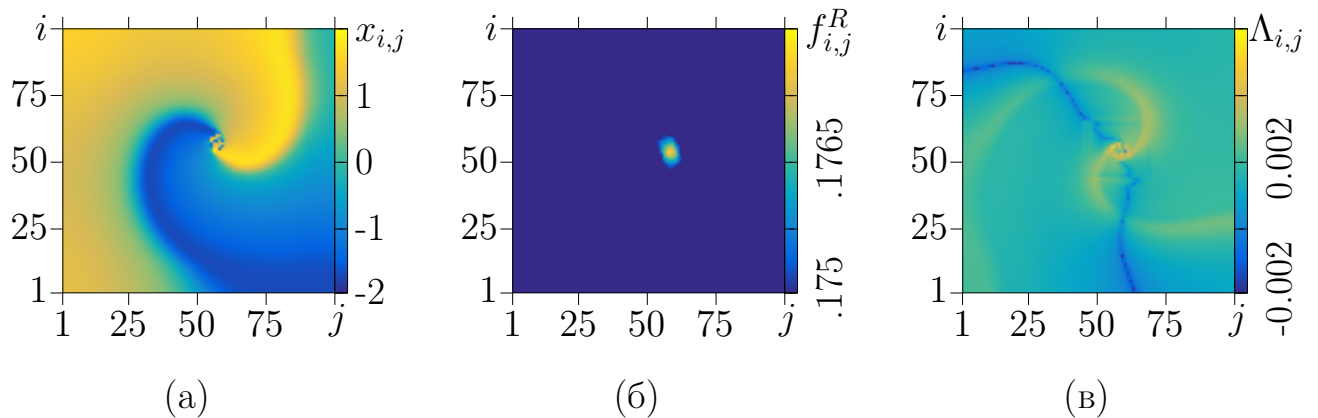


Рисунок 2.27. Мгновенный пространственный профиль для переменной $x_{i,j}$ (а); распределение средних частот осцилляторов (в); распределение значений индексов локальной чувствительности (2.9) (г) для системы (2.4) в случае нелокальной связи при $P = 10$, $\sigma = 0.08$, $\varepsilon = 0.2$, $\gamma = 0.8$, $\beta = 0.001$.

2.4.4 Эффект нелокальности связи в решетках отображений Курбажа-Некоркина

Численные исследования показали, что в решетке связанных отображений Курбажа-Некоркина (2.5) также возможно наблюдать разнообразные режимы динамики для различных комбинаций значений параметров силы и нелокальности связи. Также, как и для двух приведенных выше моделей, увеличение нелокальности связи ведет к увеличению длины волны. Результаты расчетов мгновенных пространственных профилей для нескольких значений параметра нелокальности приведены на рисунке 2.28. Как видно из рисунка 2.28,б, при небольшом значении параметра нелокальности, $P = 6$, уже хорошо различим кластер с некогерентным поведением соседних отображений. Дальнейшее увеличение диапазона связи P ведет к увеличению размера некогерентного ядра (рисунок 2.28,в).

Полученные результаты продемонстрировали, что в ансамбле (2.5) могут возникать многоядерные спирально-волновые химеры, причём они наблюдаются как в случае исследуемой решетки с открытыми граничными условиями

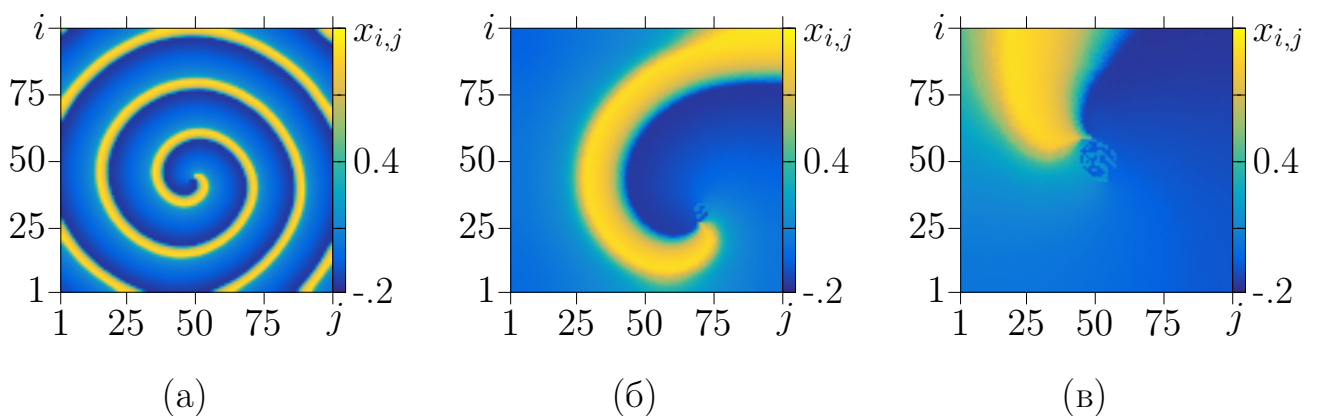


Рисунок 2.28. Характерные пространственно-временные режимы ансамбля (2.5) в случае нелокальной связи для $P = 1$ (а), $P = 6$ (б), $P = 14$ (в) при $\sigma = 0.05$, $a = 0.25$, $\beta = 0.04$, $J = 0.15$, $d = 0.5$, $\varepsilon = 0.004$.

(пример на рисунке 2.29), так и в случае решетки с периодическими границами, которые здесь не представлены. Центр спиральной волны является некогерентным даже при локальной связи, что отличает эту модель от предыдущих. Из-за очень высокой неустойчивости центра, при небольшом увеличении нелокальности очень заметно увеличивается область некогерентности и происходит переход к химерной структуре. Поведение показателей Ляпунова для ансамбля отображений Курбажа-Некоркина проще, чем их поведение для систем (2.3) и (2.4). Решетка всегда находится в гиперхаотическом режиме (по крайней мере три показателя Ляпунова всегда положительны). Однако, когда параметр нелокальности достигает значения $P = 23$, система (2.5) переключается в режим полной синхронизации, тогда все показатели Ляпунова резко уменьшаются, но остаются, при этом, положительными. Результаты более детального исследования модели (2.5) опубликованы в научных статьях [126,179].

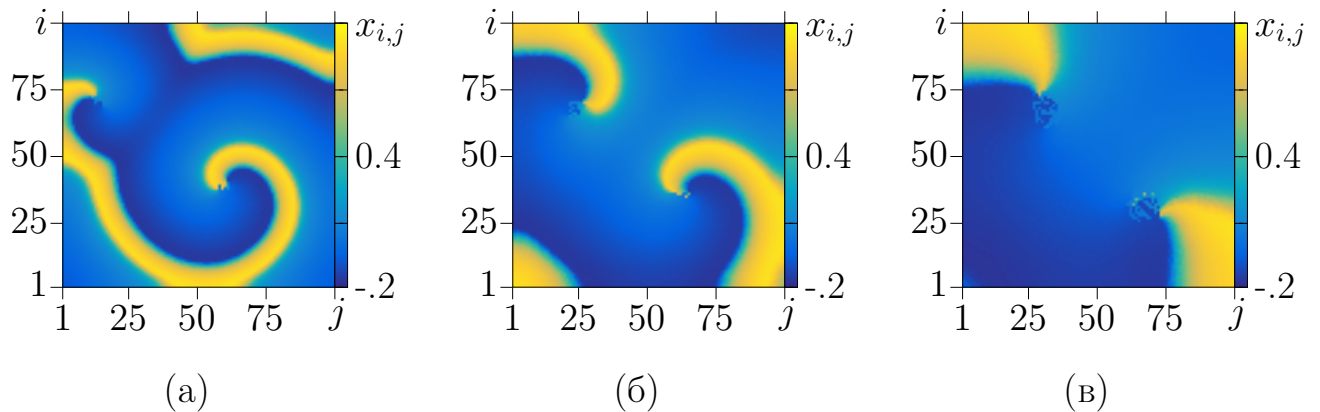


Рисунок 2.29. Многоядерные спирально-волновые химерные структуры в модели (2.5) в случае нелокальной связи для $P = 3$ (а), $P = 5$ (б), $P = 11$ (в) при $\sigma = 0.05$, $a = 0.25$, $\beta = 0.04$, $J = 0.15$, $d = 0.5$, $\varepsilon = 0.004$.

2.4.5 Эффект нелокальности связи в решетке отображений

Рулькова

Для иллюстрации особенностей спирально-волновых режимов были проведены численные исследования динамики модели связанных отображений Рулькова (2.7). Полученные данные показали, что при вариации силы связи между осцилляторами и радиуса нелокальной связи, в данной решетке также можно наблюдать автоволновые структуры в виде спиральных волн и спирально-волновых химер с различным числом ядер некогерентности (рисунки 2.30,а-в). В случае спирально-волновой химеры возможна необычная форма ядра некогерентности в виде кольца (рисунок 2.30,г). Кроме того, была показана возможность существования в ансамбле режима концентрических волн (рисунок 2.30,д) и реализован режим химерной структуры, возникающей на основе концентрических волн (рисунок 2.30,е). Этот результат обосновывает то, что указанная химерная структура, впервые обнаруженная в ансамбле генераторов Ван дер Поля, может быть реализована и в других системах и является типичной для ансамблей, демонстрирующих возникновение режима концентрических волн. Наконец, для решетки отображений Рулькова установлена возможность индуцированного шумовым воздействием подавления спиральных волн с переходом в режим концентрических волн. Этот результат может иметь практическое применение в кардиологии как один из способов управления режимом функционирования сердечной мышцы. Более подробно результаты исследований динамики решетки отображений Рулькова изложены в работе [173].

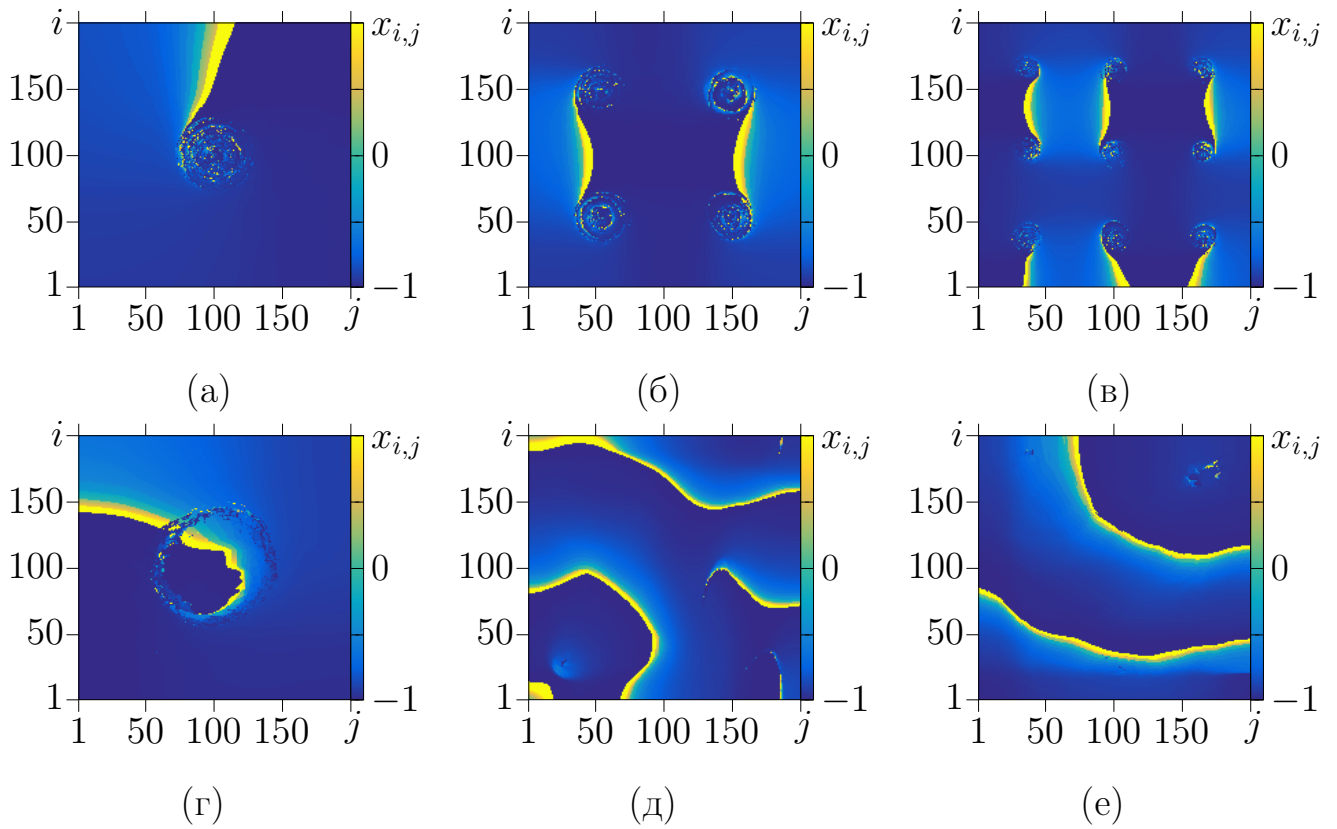


Рисунок 2.30. Мгновенные профили амплитуд $x_{i,j}$ для одноядерной спиральной волны в решетке (2.7) при $\sigma = 0.65$, $P = 53$ (а), с 4-мя ядрами при $\sigma = 0.7$, $P = 23$ (б), с 9-ю ядрами при $\sigma = 0.65$, $P = 19$ (в), для структуры с ядром некогерентности в виде кольца при $\sigma = 0.85$, $P = 33$ (г), для концентрической волны при $\sigma = 0.65$, $P = 11$ (д), для концентрической химеры при $\sigma = 0.45$, $P = 15$ (е). Для всех случаев $\varepsilon = 0.2$, $\alpha = 4$, $\gamma = 0.001$.

2.5 Выводы по второй главе

Во второй главе представлены результаты численного моделирования динамики двумерных ансамблей (решеток) связанных осцилляторов с локальной и нелокальной связью. Парциальные элементы рассмотренных систем описывались моделями генератора ван дер Поля, осциллятора ФитцХью-Нагумо, отображениями Курбажа-Некоркина и отображениями Рулькова. Полученные результаты позволяют сделать следующие основные выводы:

1. Проведен детальный анализ динамики решетки локально связанных генераторов ван дер Поля при изменении значений управляющих параметров индивидуальных элементов. Показано, что существуют конечные области значений управляющих параметров, в которых в решетке возникают спиральные и концентрические волновые структуры. Установлено, что увеличение параметра возбуждения ε приводит к уменьшению длины волны наблюдаемых волновых структур, а увеличение силы локальной связи вызывает увеличение длины волны.
2. Проиллюстрировано явление мультистабильности в решетке генераторов ван дер Поля с локальной связью: в зависимости от начальных условий при фиксированных значениях управляющих параметров в системе могут наблюдаться как спиральные, так и концентрические волны. Показано, что под действием внешнего шума реализуется индуцированный шумом переход от концентрической волны к спиральным волнам с различными центрами.
3. Проведено численное исследование динамики двумерного ансамбля нелокально связанных генераторов ван дер Поля. Показано, что при введении нелокальности связи в решетке происходит переход от спиральной волны к химерной структуре на её основе. Спирально-волновая химера характеризуется сосуществованием области когерентной динамики и некогерентного ядра, формирующегося в центре волны (спирали). Область некогерентности расширяется при увеличении диапазона нелокальности связи. Колебания осцилляторов из когерентной области являются периодическими, тогда как осцилляторы в некогерентном ядре демонстрируют хаотическую динамику, что подтверждается положительным значением старшего показателя Ляпунова. На основе расчетов индекса локальной чувствительности установлено, что осцилляторы в некогерентном ядре спирально-волновой

химеры проявляют наибольшую чувствительность к внешним воздействиям по сравнению с остальными элементами решетки.

4. Показано, что режимы спиральных волн и спирально-волновых химер могут быть также реализованы в двумерных ансамблях осцилляторов ФитцХью-Нагумо, отображений Курбажа-Некоркина и отображений Рутькова при локальном и нелокальном характере связи, соответственно. Кроме того, на примере решетки отображений Курбажа-Некоркина показано, что выбор граничных условий незначительно влияет на характер пространственно-временного поведения системы.
5. При исследовании динамики решетки нелокально связанных генераторов ван дер Поля впервые обнаружена и описана новая химерная структура, возникающая на основе концентрической волны, – концентрическая волновая химера. Осцилляторы из когерентной области и некогерентного ядра демонстрируют квазипериодическую динамику, однако форма колебаний осцилляторов из некогерентной области заметно отличается от колебаний остальных элементов. На основе детального анализа установлено, что концентрическая волновая химера по своим свойствам подобна химере уединенных состояний. Осцилляторы в некогерентном ядре находятся в режиме уединенного состояния.
6. Показано, что в решетке связанных генераторов ван дер Поля при больших значениях параметра возбуждения индивидуального генератора и при увеличении диапазона нелокальной связи может наблюдаться переход от спиральной волны к концентрической химерной структуре.
7. Установлено, что при довольно больших значениях параметра нелокальности в решетке генераторов ван дер Поля возникают режимы уединенных состояний и химеры уединенных состояний. Выявлены и описаны механизмы возникновения данных режимов. Показано, что индивидуальные

осцилляторы в режиме уединенного состояния и из когерентной области характеризуются различными проекциями аттрактора фазового пространства системы.

8. На основе результатов численных расчетов количественных характеристик динамики решеток связанных генераторов ван дер Поля, осцилляторов ФитцХью-Нагумо и отображений Курбажа-Некоркина установлено, что индекс локальной чувствительности элементов ансамбля позволяет выявить механизм возникновения спирально-волновых химер, ядро некогерентности которых возникает в центре спиральной волны после увеличения степени неустойчивости соответствующих осцилляторов к линейному возмущению.

Глава 3. Синхронизация автоволновых структур в связанных двумерных ансамблях

3.1 Введение

Явление синхронизации, представляющее собой фундаментальное свойство самоорганизации и самосогласованной динамики взаимодействующих систем, по-прежнему остается одним из актуальных направлений исследований в радиофизике, теории колебаний, нелинейной динамике и смежных науках. В последние годы внимание исследователей главным образом направлено на изучение эффектов синхронизации в связанных между собой сложных ансамблях и сетях, которые реализуют различные пространственно-временные структуры.

В рамках указанной проблемы в третьей главе диссертационной работы исследуются эффекты синхронизации спиральных и концентрических волн, а также химерно-волновых структур на их основе, в двухслойных и трехслойных сетях двумерных ансамблей связанных нелинейных осцилляторов. Приводятся результаты численного исследования эффектов вынужденной и взаимной синхронизации волновых структур в системах однонаправленно и симметрично связанных неоднородных решеток нелинейных осцилляторов и анализируется возможность управления поведением двумерного ансамбля в зависимости от типа межслойной связи. Установлен и описан механизм вынужденной синхронизации различных волновых структур в однонаправленно связанных решетках генераторов ван дер Поля при различных типах межслойной связи. Особенности вынужденной и взаимной синхронизации спирально-волновых химерных структур продемонстрированы на примере двухслойной сети связанных решеток дискретных моделей нейрона Курбажа-Некоркина.

В настоящей главе впервые описан и проиллюстрирован эффект удаленной синхронизации волновых структур в неоднородной трехслойной сети связанных осцилляторов. Два внешних слоя, представляющих собой решетки нелокально связанных генераторов ван дер Поля в режиме концентрических волновых химер, не связаны между собой напрямую, а взаимодействуют через промежуточный слой, заданный двумерным ансамблем связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо в режиме спирально-волновой химеры. Показано, что при определенных значениях силы межслойной связи волновые структуры во внешних слоях сети синхронизируются, в то время как структура в передаточном слое остается полностью отличной от них. Для количественной оценки степени идентичности структур в режиме синхронизации и построения областей синхронизации на плоскости управляющих параметров системы использовался коэффициент взаимной корреляции между значениями переменных симметричных осцилляторов взаимодействующих ансамблей. С помощью данной характеристики впервые был установлен эффект противофазной удаленной синхронизации волновых структур в трехслойной сети нелинейных систем.

Материалы третьей главы основываются на результатах численных исследований, опубликованных в работах [35, 142, 177, 178, 180].

3.2 Модель связанных решеток нелинейных осцилляторов

Исследуемая модель представляет собой многослойную мультиплексную сеть, состоящую из k слоев. Каждый слой задается в виде двумерной решетки $N \times N$ связанных осцилляторов. В общем виде изучаемая модель описывается следующим уравнением:

$$\hat{\mathbf{u}}_{i,j}^l = \mathbf{F}^l(\mathbf{u}_{i,j}) + \frac{\sigma^l}{B_{i,j}^l} \sum_{m^l, g^l} \mathbf{S}^l(\mathbf{u}_{m,g}^l, \mathbf{u}_{i,j}^l) + \sum_{p=1}^k \gamma^{pl} \Gamma^{pl}(\mathbf{u}_{i,j}^p, \mathbf{u}_{i,j}^l), \quad (3.1)$$

где $\mathbf{u}_{i,j}^l = \mathbf{u}_{i,j}^l(t)$ представляют собой вектора динамических переменных состояний отдельных осцилляторов решетки с номерами $i = 1, 2, \dots, N$ и $j = 1, 2, \dots, N$ для решеток с номерами $l, p = 1, 2, \dots, k$, где k определяет количество решеток (слоев) в сети. $N \times N$ – общее количество элементов в каждом двумерном ансамбле, $\hat{\mathbf{u}}_{i,j}^l$ – операторы эволюции осцилляторов, которые задаются производными ($\hat{\mathbf{u}}_{i,j}^l = \dot{\mathbf{u}}_{i,j}^l$) для систем с непрерывным временем $t \in [0, T]$ и итерационными соотношениями ($\hat{\mathbf{u}}_{i,j}^l = \mathbf{u}_{i,j}^l(n+1)$) в случае систем с дискретным временем $n = 1, 2, \dots, T$. В обоих случаях T – это время, на котором проводится наблюдение поведения системы. Все осцилляторы в каждом отдельном ансамбле идентичны (задаются одним и тем же оператором \mathbf{F}^l), их динамика определяется одинаковыми значениями управляющих параметров в функциях оператора \mathbf{F}^l . В третьей главе индивидуальные элементы решеток описываются генераторами ван дер Поля, отображениями Курбажа-Некоркина и моделями нейрона ФитцХью-Нагумо. В случае отображений для связи может использоваться значение переменной на следующем шаге, тогда $\mathbf{F}_1^l, \mathbf{F}_2^l$ и т.д. соответствуют функциям векторного оператора \mathbf{F}^l .

Связь между элементами в решетке определяется вторым слагаемым в системе (3.1). Все внутрислойные связи предполагаются симметричными и задаются с помощью векторного оператора \mathbf{S} . Коэффициент σ^l определяет силу связи между элементами внутри решетки с номером l или внутрислойную силу связи. Параметр $B_{i,j}^l$ равен количеству ненулевых связей, соответствующих элементу с номером (i, j) в ансамбле с номером l .

Индексы (m^l, g^l) определяют связи между элементами решетки с номером l и для нелокальной связи принимают следующие значения:

$$\begin{cases} \max(1, i - P^l) \leq m^l \leq \min(N, i + P^l), \\ \max(1, j - P^l) \leq g^l \leq \min(N, j + P^l), \\ m^l \neq i, \text{ если } g^l = i, \end{cases} \quad (3.2)$$

где P^l – параметр, определяющий степень нелокальности связей в ансамбле с номером l . Соотношения (3.2) задают открытые (no-flux) граничные условия. Способ задания связей внутри решетки показан на рисунке 2.1.

Характер межслойных связей определяется последним слагаемым в уравнении (3.1), в котором оператор $\mathbf{\Gamma}^{pl}$ задаёт связь между решетками. Матрица γ^{pl} определяет наличие связей между решетками и соответствующие силы или коэффициенты межслойной связи. Связи между решетками могут отсутствовать, быть однонаправленными или взаимными (симметричными). Схема модели мультиплексной сети, состоящей из трех решеток связанных осцилляторов, приведена на рисунке 3.1.

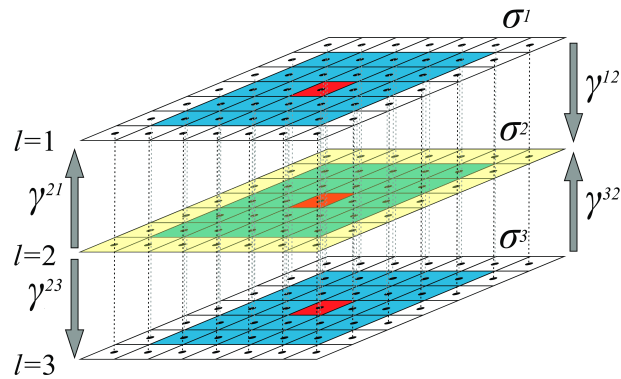


Рисунок 3.1. Схема модели мультиплексной сети, состоящей из трех решеток связанных элементов. $l = 1, 2, 3$ – номер решетки, параметры $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ – силы внутрислойных связей, параметры $\gamma^{21}, \gamma^{12}, \gamma^{23}, \gamma^{32}$ – силы внутрислойных связей, направления влияния которых указаны стрелками. Красным цветом в каждой решетке отмечены элементы, для которых синим цветом (для решеток 1,3) или зеленым (для средней решетки) показаны их внутрислойные связи в случае $P^l = 2$.

3.2.1 Две связанные решетки генераторов ван дер Поля

Модель для исследования взаимодействия двух решеток ($k = 2$) нелокально связанных генераторов ван дер Поля задается следующими соотношениями в уравнении (3.1):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_{i,j}^l &= \begin{pmatrix} \dot{x}_{i,j}^l \\ \dot{y}_{i,j}^l \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}^l = \begin{pmatrix} y_{i,j}^l \\ \varepsilon^l(1 - (x_{i,j}^l)^2)y_{i,j}^l - (\omega^l)^2 x_{i,j}^l \end{pmatrix}; \\ \mathbf{S}^l &= \begin{pmatrix} x_{m,g}^l - x_{i,j}^l \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^{pl} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{12} \\ \gamma^{21} & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $l, p = 1, 2$ – номер решетки (слоя). Переменные и параметры для индивидуального генератора ван дер Поля приведены в описании к уравнению (2.3). Внутрислойная связь в каждой решетке вводится в первое уравнение системы с силой связи σ^l . Межслойная связь может быть взаимной ($\gamma^{12} = \gamma^{21} = \gamma$) или однонаправленной. В последнем случае возможны варианты, когда либо первая решетка воздействует на вторую ($\gamma^{12} = \gamma, \gamma^{21} = 0$), либо вторая – на первую ($\gamma^{12} = 0, \gamma^{21} = \gamma$). Межслойная связь вводится во второе уравнение системы (2.3) и может задаваться либо по первой переменной:

$$\Gamma^{pl} = \Gamma_1^{pl} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{i,j}^p - x_{i,j}^l \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

либо по второй переменной:

$$\Gamma^{pl} = \Gamma_2^{pl} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{i,j}^p - y_{i,j}^l \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

3.2.2 Двухслойная сеть решеток связанных отображений Курбажа-Некоркина

Для модели двух связанных решеток отображений Курбажа-Некоркина в уравнении (3.1) используются следующие соотношения:

$$\hat{\mathbf{u}}_{i,j}^l = \begin{pmatrix} x_{i,j}^l(n+1) \\ y_{i,j}^l(n+1) \end{pmatrix}; \mathbf{F}^l = \begin{pmatrix} x_{i,j}^l(n) + f(x_{i,j}^l(n)) - y_{i,j}^l(n) - \beta H(x_{i,j}^l(n) - d) \\ y_{i,j}^l(n) + \varepsilon(x_{i,j}^l(n) - J) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{S}^l = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1(x_{m,g}^l(n), y_{m,g}^l(n)) - \mathbf{F}_1(x_{i,j}^l(n), y_{i,j}^l(n)) \\ 0 \end{pmatrix}; \gamma^{pl} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{12} \\ \gamma^{21} & 0 \end{pmatrix};$$
(3.6)

Переменные, параметры и функции $f(x)$, $H(x)$ для отдельных отображений приведены в описании к уравнению (2.5). Связь между элементами в каждой решетке вводится в первое уравнение системы с силой связи σ^l через функции правых частей первых уравнений отображений. Как и в предыдущем случае, межслойная связь может быть однонаправленной или взаимной и задается в первом уравнении через переменные:

$$\mathbf{\Gamma}^{pl} = \begin{pmatrix} x_{i,j}^p(n) - x_{i,j}^l(n) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

или через функции:

$$\mathbf{\Gamma}^{pl} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1(x_{i,j}^p(n), y_{i,j}^p(n)) - \mathbf{F}_1(x_{i,j}^l(n), y_{i,j}^l(n)) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

3.3 Вынужденная синхронизация структур в двух связанных решетках

Поскольку тип связи между ансамблями может оказывать значительное влияние на эффект синхронизации, необходимо провести детальное исследование динамики связанных двумерных ансамблей для различных случаев межслойной связи. В данном разделе представлены результаты численных исследований эффекта вынужденной синхронизации пространственно-временных структур в двухслойной сети однонаправленно связанных решеток нелинейных осцилляторов.

3.3.1 Синхронизация структур разного типа в связанных решетках генераторов ван дер Поля

Для рассмотрения влияния разнотипных пространственно-временных структур друг на друга используется система (3.3). Начальные условия выбирались равномерно и случайно распределенными на интервалах $x_{i,j}^l(0) \in [-1, 1]$, $y_{i,j}^l(0) \in [-1, 1]$, $l = 1, 2$. Уравнения (3.3) интегрируются методом Гюна (второго порядка) с шагом 0.001 и анализируются результаты после периода установления в течение 10000 единиц безразмерного времени. Каждая решетка имеет размер $N \times N = 80 \times 80$. В ходе численного моделирования варьируются параметры внутрислойных связей (σ^l, P^l) , межслойных связей (γ^{pl}) и значения управляющих параметров элементов решеток ε^l, ω^l . В начале каждого численного эксперимента в каждой из решеток в отсутствие межслойной связи ($\gamma^{pl} = 0$) устанавливается определенный пространственно-временной режим. Затем один из коэффициентов матрицы γ^{pl} (γ^{12} или γ^{21}) увеличивается, система интегри-

руется заново до установления нового состояния в решетке, оказывающейся под воздействием, и полученный режим анализируется с помощью расчетов коэффициентов взаимной корреляции между значениями переменных симметричных осцилляторов взаимодействующих ансамблей:

$$R_{i,j}^{l,p} = \frac{\langle \tilde{x}_{i,j}^l \tilde{x}_{i,j}^p \rangle}{\sqrt{\langle (\tilde{x}_{i,j}^l)^2 \rangle \langle (\tilde{x}_{i,j}^p)^2 \rangle}}, \quad (3.9)$$

$$\tilde{x}_{i,j} = x_{i,j} - \langle x_{i,j} \rangle.$$

Если пара связанных осцилляторов с индексами (i, j) из разных решеток синхронизована, то $|R_{i,j}^{l,p}| \approx 1$, в то время как полностью несинхронное поведение характеризуется стремящимся к нулю коэффициентом корреляции. Для оценки числа синхронных пар осцилляторов вычисляется число N_s , удовлетворяющее следующему условию:

$$R_{i,j}^{l,p} \geq R_{\text{п}}, \quad (3.10)$$

где $R_{\text{п}} = 0.95$ – пороговое, достаточно близкое к единице значение корреляции, определяющее наличие ($R_{i,j}^{l,p} \geq R_{\text{п}}$) или отсутствие ($R_{i,j}^{l,p} < R_{\text{п}}$) эффективной синхронизации связанных элементов решеток.

Синхронизация спиральной и концентрической химерных структур.

Для проведения исследований параметры системы (3.3) выбраны следующим образом: $\varepsilon^1 = 2.1, \omega^1 = 2, P^1 = 4, \sigma^1 = 0.7$ в первом слое и $\varepsilon^2 = 2, \omega^2 = 2.5, P^2 = 10, \sigma^2 = 0.7$ во втором. На рисунке 3.2 приведены мгновенные пространственные профили волновых структур, которые реализуются в каждой решетке в отсутствие межслойной связи ($\gamma^{12} = \gamma^{21} = 0$) при плавном увеличении параметра нелокальности связи для структур, полученных при локальной внутрислойной связи со случайных начальных условий. Как видно из рисунка, в первой решетке (слое) имеет место концентрическая волновая химера (рисунок 3.2,а), а во второй – спирально-волновая химера (рисунок 3.2,б). Таким образом, рассматривается однонаправленное воздействие режима концентрической химерной структуры на спирально-волновую химеру и наоборот.

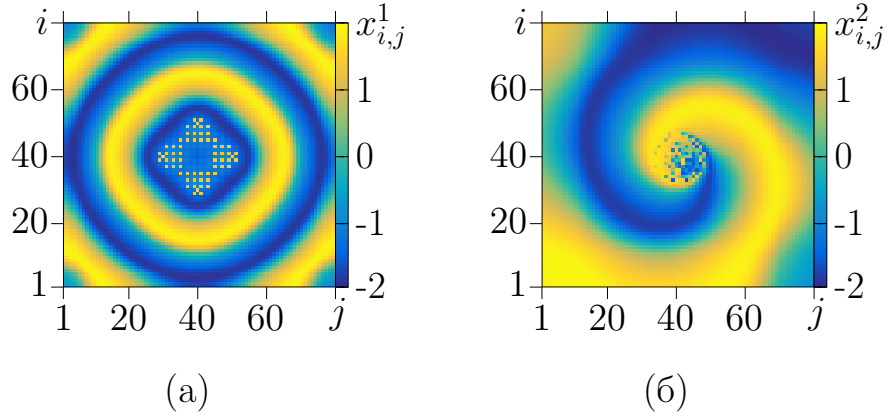


Рисунок 3.2. Мгновенные пространственные профили динамики первой $x_{i,j}^1$ (а) и второй $x_{i,j}^2$ (б) решеток системы (3.3) в отсутствие межслойной связи

$$(\gamma^{12} = \gamma^{21} = 0) \text{ при } P^1 = 4, P^2 = 10, \sigma^{1,2} = 0.7, \varepsilon^1 = 2.1, \varepsilon^2 = 2,$$

$$\omega^1 = 2, \omega^2 = 2.5, N = 80.$$

Расчеты показывают, что в случае связи через вторые переменные во втором уравнении (3.5) даже при достаточно больших значениях силы межслойной связи γ синхронизация полностью отсутствует, ни одна пара связанных элементов не синхронизируется. Более того, синхронизация невозможна вне зависимости от направления действия межслойной связи. Все значения коэффициентов корреляции $R_{i,j}^{l,p} = R_{i,j}$ не превышают по модулю значение 0.15 даже при $\gamma = 0.4$, при больших γ результаты расчетов не представляют интереса, так как первоначальные структуры в решетках, оказывающихся под воздействием, полностью разрушаются.

Для связи по первой переменной (3.4) рост числа синхронизованных осцилляторов с увеличением силы связи γ наблюдается как в случае воздействия слоя с концентрической волновой химерой на слой со спирально-волновой химерной структурой (зеленая линия на рисунке 3.3), так и в обратном (синяя линия на рисунке 3.3). При некотором значении параметра $\gamma \approx 0.4$ число синхронизованных пар осцилляторов в обоих случаях возрастает, при этом синхронизация структур происходит довольно резко при плавном увеличении γ .

В случае воздействия первой решетки на вторую (зеленая линия на рисунке 3.3) при $\gamma > 0.6$ концентрическая химера почти полностью передается во вторую решетку, подавляя спирально-волновую химеру. При дальнейшем увеличении силы связи до $\gamma \sim 0.8$ вторая решетка воспроизводит динамику первой решетки, а при $0.8 < \gamma < 0.95$ синхронизация нарушается. На рисунке 3.4 приведены мгновенный пространственный профиль волнового режима во второй решетке и распределение значений коэффициента взаимной корреляции (3.9) для случая $\gamma = 0.9$ в окне десинхронизации ($0.8 < \gamma < 0.95$).

В другом случае, при воздействии второй решетки на первую (синяя линия на рисунке 3.3), при $\gamma > 0.4$ когерентный кластер спирально-волновой химеры передается в первый ансамбль. Пример поведения первой решетки для $\gamma = 0.5$ приведен на рисунке 3.5,а. При этом некогерентное ядро спирально-волновой химеры остается некоррелированным с центром первой решетки (рисунок 3.5,б), в то время как ядро концентрической химеры передавалось во вторую решетку вместе с некогерентной областью. Это различие может быть связано с разницей в характере некогерентности. Колебания в ядре концентрической химеры являются почти регулярными, тогда как в спиральной ха-

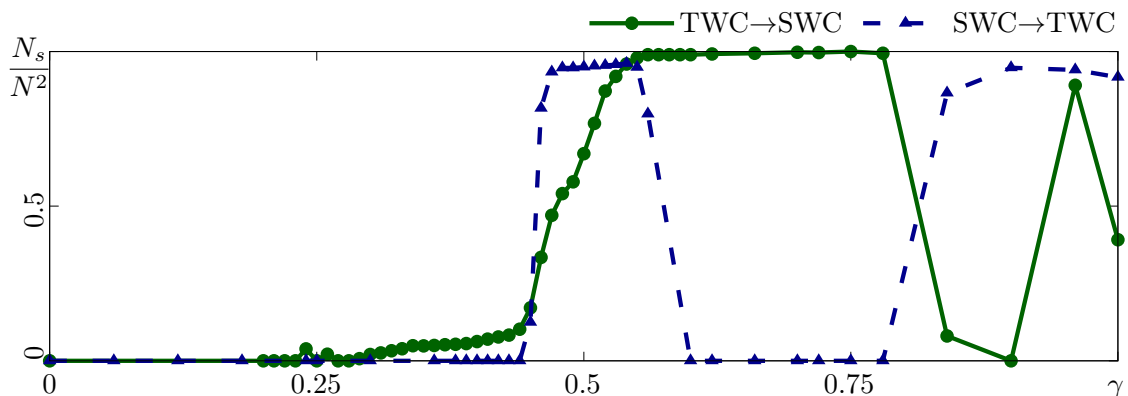


Рисунок 3.3. Зависимости нормированного количества синхронных осцилляторов N_s/N^2 от силы межслойной связи γ при однонаправленном воздействии слоя с концентрической химерой на слой со спиральной химерой (зеленая линия) и наоборот (синяя линия) в сети (3.3).

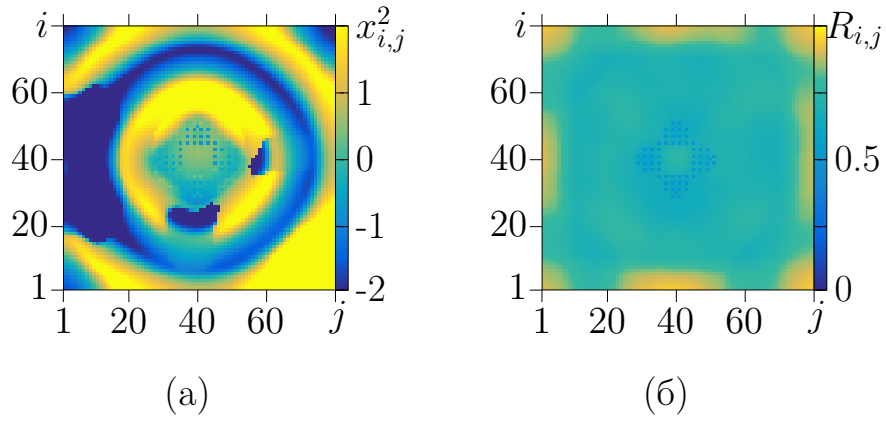


Рисунок 3.4. Мгновенный пространственный профиль значений $x_{i,j}^2$ второй решетки в случае воздействия на неё первой с силой связи $\gamma = 0.9$ (а) и распределение значений коэффициента взаимной корреляции (б) при $P^1 = 4, P^2 = 10, \sigma^{1,2} = 0.7, \varepsilon^1 = 2.1, \varepsilon^2 = 2, \omega^1 = 2, \omega^2 = 2.5, N = 80$.

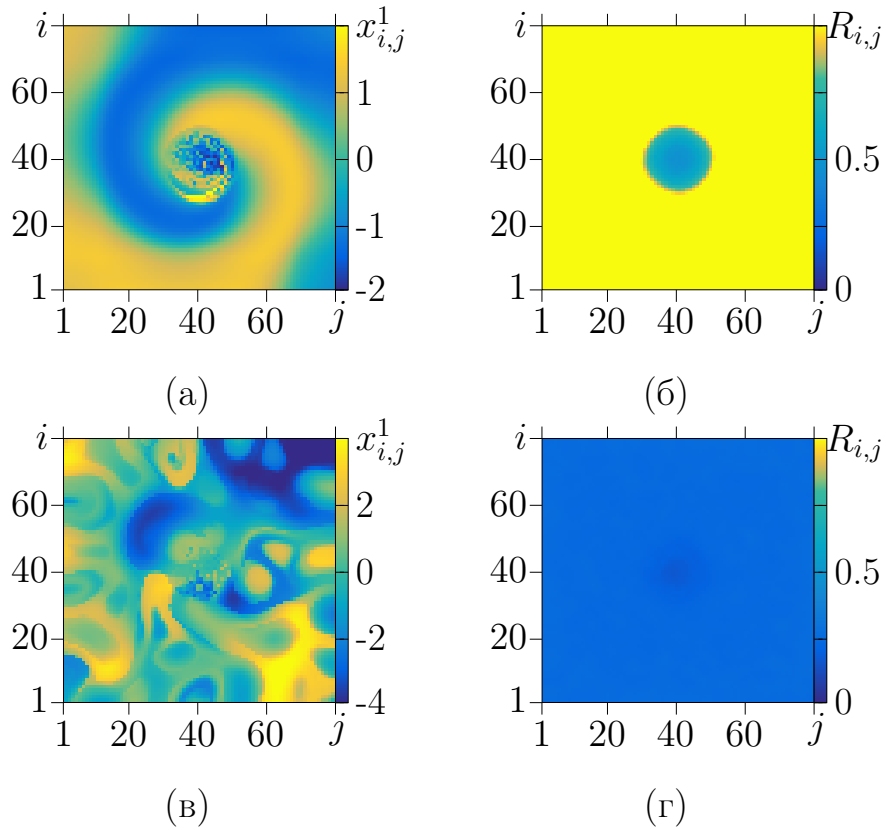


Рисунок 3.5. Мгновенные пространственные профили значений переменной $x_{i,j}^1$ первой решетки в случае воздействия на неё второй (а,в) и распределение значений величины $R_{i,j}$ (б,г) для $\gamma = 0.5$ (а,б) и $\gamma = 0.7$ (в,г) при $P^1 = 4, P^2 = 10, \sigma^{1,2} = 0.7, \varepsilon^1 = 2.1, \varepsilon^2 = 2, \omega^1 = 2, \omega^2 = 2.5, N = 80$.

рактируются хаотической динамикой. Частичная синхронизация решеток при воздействии второй решетки на первую наблюдается при $0.4 < \gamma < 0.62$ или $\gamma > 0.85$ (синяя линия на рисунке 3.3). Значениям $0.62 < \gamma < 0.85$ соответствует окно десинхронизации, которое наблюдается и для случая воздействия в обратном направлении, но в несколько другом диапазоне значений. На рисунке 3.5, в приведен мгновенный профиль пространственно-временного режима в первой решетке при $\gamma = 0.7$. Соответствующее распределение значений коэффициента корреляции (рисунок 3.5, г) указывает на отсутствие согласованной динамики между слоями.

Синхронизация концентрической химеры и пространственно-однородного режима. Для более детального рассмотрения синхронизации концентрической химеры установим её в первой решетке при $\varepsilon^1 = 2.1, \omega^1 = 2.0, P^1 = 4, \sigma^1 = 0.7$ (рисунок 3.6, а), а во второй решетке выберем однородную в пространстве структуру при $\varepsilon^2 = 2.1, \omega^2 = 2.0, P^2 = 10, \sigma^2 = 0.5$ (рисунок 3.6, б). Как и при воздействии ансамбля с концентрической химерой на решетку со спиральной химерой, при её воздействии на пространственно-однородный режим в случае межслойной связи (3.5) эффекта полной или ча-

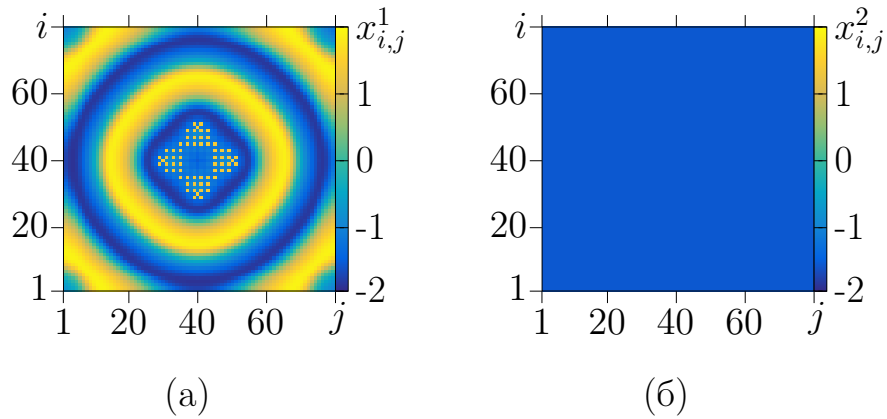


Рисунок 3.6. Мгновенные пространственные профили значений переменных первой $x_{i,j}^1$ (а) и второй $x_{i,j}^2$ (б) решеток системы (3.3) в отсутствие межслойной связи ($\gamma^{pl} = 0$) при $P^1 = 4, P^2 = 10, \sigma^1 = 0.7, \sigma^2 = 0.5, \varepsilon^{1,2} = 2.1, \omega^{1,2} = 2, N = 80$.

стичной синхронизации не наблюдается даже при достаточно больших значениях силы межслойной связи (рисунок 3.7). При этом во второй решетке индуцируется концентрическая волновая структура (рисунок 3.8,а), однако только очень небольшое количество пар осцилляторов синхронизуется (зеленая линия

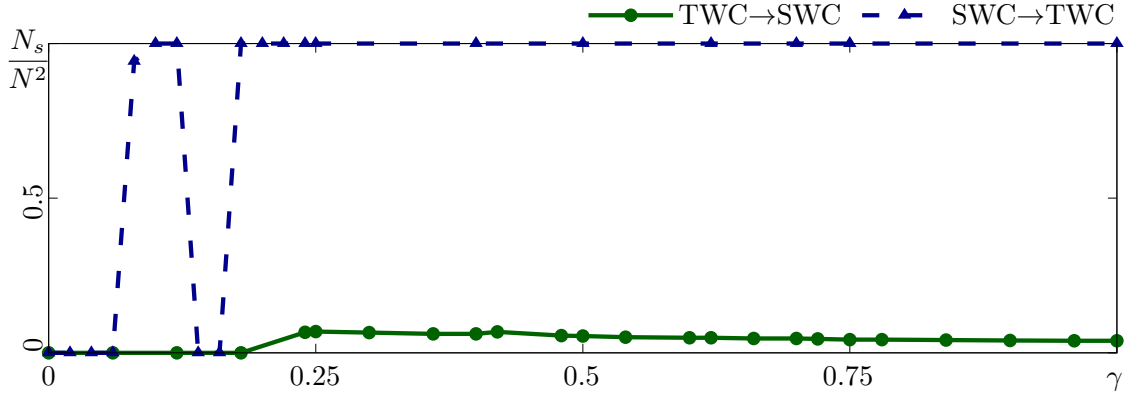


Рисунок 3.7. Зависимости нормированного количества синхронных осцилляторов N_s/N^2 от силы межслойной связи γ при однонаправленном воздействии слоя с концентрической химерой на слой с однородным режимом (зеленая линия) и наоборот (синяя линия) в модели (3.3) для межслойной связи (3.5).

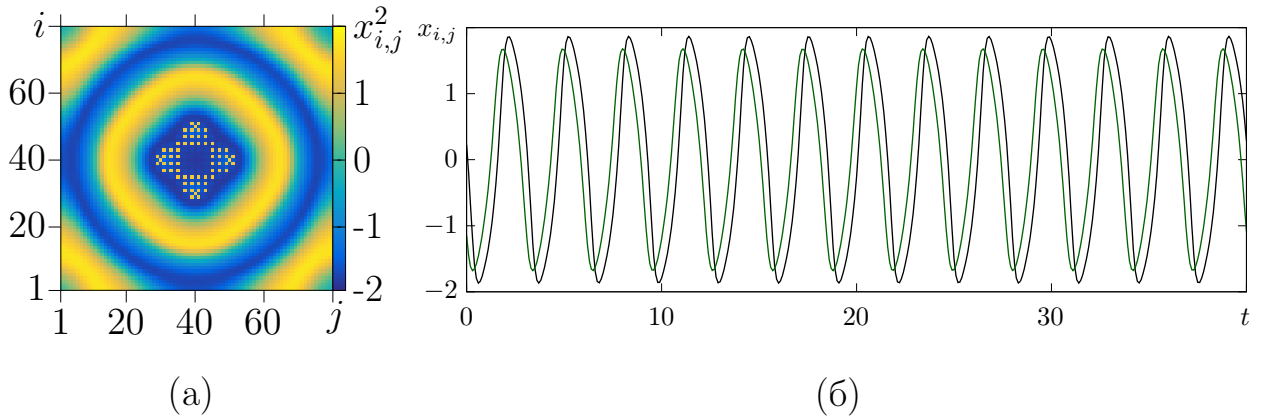


Рисунок 3.8. Мгновенный пространственный профиль амплитуд второй решетки (а) и временные реализации для пары осцилляторов с индексами $i = 38, j = 38$ для первой (действующей) решетки (черная линия) и для второй (зеленая линия) в системе (3.3) при $\gamma = 0.5, \varepsilon^{1,2} = 2.1, \omega^{1,2} = 2.0,$

$$P^1 = 4, \sigma^1 = 0.7, P^2 = 10, \sigma^2 = 0.5.$$

на рисунке 3.7). На рисунке 3.8,б приведены временные реализации пары связанных осцилляторов из разных решеток. Видно, что колебания действующего генератора несколько больше по амплитуде и смещены по фазе относительно колебаний генератора во второй решетке при совпадающей частоте. В другом случае, при воздействии второй решетки с однородной структурой на первую при $\gamma \in [0.1, 0.12] \cup [0.18, 1]$ происходит полная синхронизация всей сети (синяя линия на рисунке 3.7).

Зависимости количества синхронных пар осцилляторов от силы межслойной связи для двух случаев действия однонаправленной связи (3.4) приведены на рисунке 3.9. В обоих рассмотренных случаях при $\gamma \sim 0.14$ некоторые пары связанных элементов в разных решетках синхронизируются. Затем, при воздействии первой решетки на вторую количество синхронных пар увеличивается постепенно с ростом параметра γ , а при обратном воздействии синхронизация происходит резко. При дальнейшем увеличении силы межслойной связи при $\gamma \sim 0.65$ резко нарушается условие синхронизации для большинства пар осцилляторов для обоих направлений воздействия. Десинхронизация в обоих

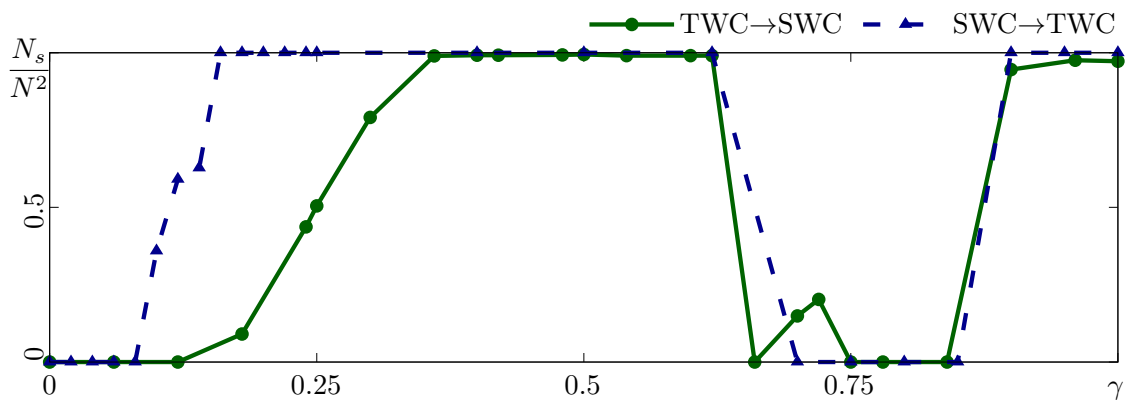


Рисунок 3.9. Зависимости нормированного количества синхронных осцилляторов N_s/N^2 от силы межслойной связи γ при однонаправленном воздействии слоя с концентрической химерой на слой с однородным режимом (зеленая линия) и наоборот (синяя линия) в сети (3.3) для межслойной связи (3.4).

случаях наблюдается в окне $\gamma \in (0.65, 0.85)$. Далее, при $\gamma > 0.85$ вновь происходит синхронизация большинства пар генераторов связанных ансамблей (3.3).

3.3.2 Синхронизация концентрических структур в связанных решетках генераторов ван дер Поля

Синхронизация концентрических структур между собой представляет наибольший интерес ввиду открытия новой химерной структуры на их основе. В этом разделе, в сравнении с результатами, представленными в разделе 3.3.1, анализируется случай вынужденной синхронизации концентрической волны при локальной связи с концентрической химерой. На рисунке 3.10 показаны мгновенные пространственные профили волновых структур, которые устанавливаются в решетках (3.3) в отсутствие межслойной связи и при задании различных реализаций начальных условий. Приведенные режимы реализуются в изолированных решетках при различных значениях параметра нелокальности: $P^1 = 4$ в случае концентрической химеры и $P^2 = 1$ в случае концен-

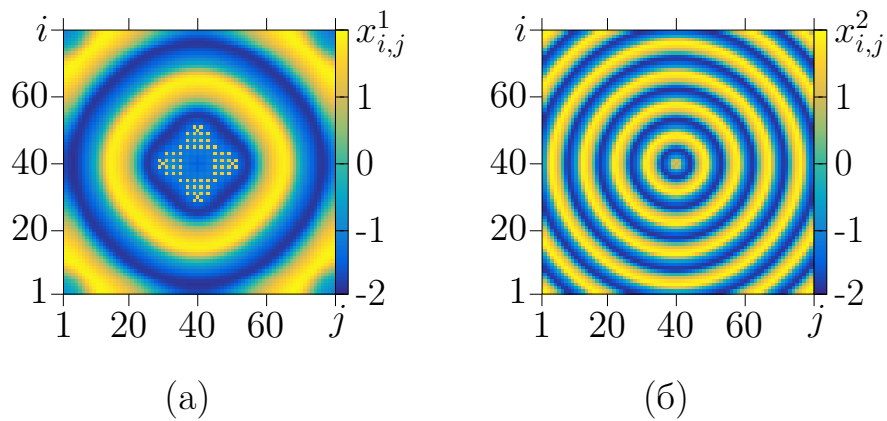


Рисунок 3.10. Мгновенные пространственные профили значений переменных первой $x_{i,j}^1$ (а) и второй $x_{i,j}^2$ (б) решеток системы (3.3) в отсутствие межслойной связи ($\gamma^{pl} = 0$) при $P^1 = 4, P^2 = 1, \sigma^{1,2} = 0.7, \varepsilon^{1,2} = 2.1, \omega^{1,2} = 2, N = 80$.

трической волны. Остальные параметры модели (3.3) выбраны одинаковыми: $\varepsilon^{1,2} = 2.1$, $\omega^{1,2} = 2.0$, $\sigma^{1,2} = 0.7$.

В случае межслойной связи (3.5) зависимости числа синхронных пар осцилляторов в обоих направлениях показывают, что синхронизация не наблюдается в очень большом диапазоне по силе межслойной связи (рисунок 3.11). Однако при $\gamma \sim 0.8$ начинается рост числа синхронных пар связанных элементов для обоих случаев направления связи. При воздействии решетки с нелокальной внутрислойной связью (первая) на решетку с локальной связью (вторая) наблюдается синхронизация большинства пар генераторов при $\gamma > 0.85$, но в случае воздействия слоя с классической концентрической волной на слой с химерной структурой синхронизируется максимум около половины осцилляторов даже при $\gamma = 1$, хотя визуально связанные решетки демонстрируют похожее поведение. В этом случае, также как и в случае, для которого приведены результаты на рисунке 3.8, мгновенные фазы связанных пар генераторов отличаются друг от друга на некоторую постоянную величину.

Межслойная связь (3.4) приводит к синхронизации при заметно меньших значениях параметра межслойной связи, что демонстрируют зависимости нор-

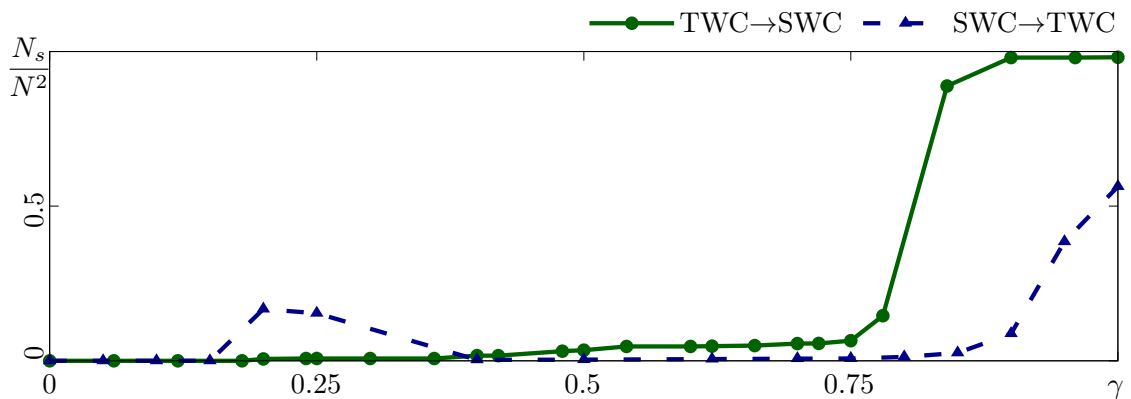


Рисунок 3.11. Зависимости нормированного количества синхронных осцилляторов N_s/N^2 от силы межслойной связи γ при воздействии слоя с концентрической химерой на слой с концентрической волной (зеленая линия) и наоборот (синяя линия) в сети (3.3) для межслойной связи (3.5).

мированного количества синхронных осцилляторов от силы связи γ , приведенные на рисунке 3.12. При воздействии первого слоя с химерной структурой на второй слой с локальной связью (зеленая линия на рисунке 3.12), также как и в других случаях со связью (3.4), при увеличении силы связи при некотором значении $\gamma = 0.25$ число синхронных пар элементов начинает резко увеличиваться. Затем, при $\gamma \in (0.28, 0.65)$ концентрическая структура почти полностью передается в слой с локальной связью. Далее, в диапазоне $\gamma \in (0.65, 0.86)$ условие синхронизации для большинства пар генераторов нарушается и наблюдается десинхронизация, и, наконец, при $\gamma > 0.86$ эффект синхронизации наблюдается вновь. Однако в случае воздействия концентрической волны на химеру при нелокальной связи вид зависимости $N_s/N^2(\gamma)$ отличается от всех рассмотренных случаев со связью (3.4), как видно на рисунке 3.12 (синяя линия). Это изменение состоит в том, что исчезает окно десинхронизации и синхронизация происходит только при достаточно больших значениях силы межслойной связи. Таким образом, химерная структура легче передается в решетку с локальной связью, чем классическая концентрическая волна в решетку с нелокальной связью.

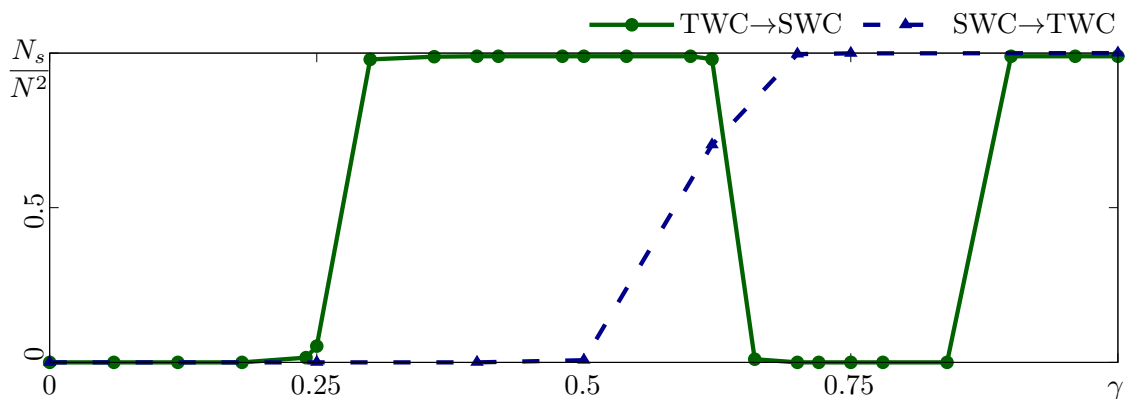


Рисунок 3.12. Зависимости нормированного количества синхронных осцилляторов N_s/N^2 от силы межслойной связи γ при воздействии слоя с концентрической химерой на слой с концентрической волной (зеленая линия) и наоборот (синяя линия) в сети (3.3) для межслойной связи (3.4).

3.3.3 Механизм вынужденной синхронизации волновых структур в связанных решетках генераторов ван дер Поля

Как показывают результаты численных расчетов, приведенные в разделе 3.3.2, в зависимости от способа введения связи явление синхронизации может возникать при разных значениях силы связи и иметь разные характерные особенности. В случае, если связь задается соотношением (3.5), вторые уравнения генераторов в модели (3.3) при отсутствии межслойной связи можно переписать следующим образом:

$$\dot{y}_{i,j}^l = [\varepsilon^l - \gamma^{pl} - \varepsilon^l (x_{i,j}^l)^2] y_{i,j}^l - (\omega^l)^2 x_{i,j}^l + \gamma^{pl} y_{i,j}^p. \quad (3.11)$$

Из уравнения (3.11) видно, что положительная сила связи уменьшает уровень нелинейности и вводит дополнительную диссипацию в отдельном генераторе ван дер Поля. В случае связи по первой переменной во втором уравнении (3.4) вторые уравнения генераторов ван дер Поля при отсутствии межслойной связи записываются в виде:

$$\dot{y}_{i,j}^l = \varepsilon^l [1 - (x_{i,j}^l)^2] y_{i,j}^l - [(\omega^l)^2 + \gamma^{pl}] x_{i,j}^l + \gamma^{pl} y_{i,j}^p. \quad (3.12)$$

В последнем случае положительная связь не влияет на диссипацию индивидуального элемента, но увеличивает эффективное значение частоты собственных колебаний.

Из двух последних уравнений очевидно, что при однонаправленном взаимодействии особенности индивидуальной динамики заметно изменяются в обоих случаях. Но из-за того, что параметры связи в этих двух случаях изменяют эффективные значения разных параметров генератора ван дер Поля, и эффект синхронизации для них может происходить совсем по-разному. Для примера более детально рассмотрим случай, представленный в последнем параграфе

предыдущего раздела, когда в первой решетке изначально установлена концентрическая химера, а во второй – классическая концентрическая волна (рисунок 3.10). В этом случае решетки отличаются друг от друга только параметром нелокальности. В остальных случаях особенности синхронизации аналогичны.

Как было отмечено выше, для связи (3.4) синхронизация большей части пар осцилляторов наблюдается только при достаточно больших значениях силы связи $\gamma > 0.85$ (рисунок 3.11). В то же время, значения средних частот $\langle f_{i,j} \rangle = 0.325$ для всех осцилляторов в обеих решетках и остаются неизменными при увеличении γ , что также подтверждается уравнением (3.11). Однако идентичности частот колебаний осцилляторов оказывается недостаточно для синхронизации даже при достаточно больших значениях силы связи, так как параметр γ влияет на диссипацию в одной из решеток и сильно изменяет характер динамики генераторов в ней.

В случае, когда межслойные связи определяются функцией (3.4), и первая решетка воздействует на вторую, коэффициент связи изменяет эффективное значение частоты колебаний генераторов (3.12). Поскольку форма нелинейности и величина диссипации во всех элементах решетки остаются одинаковыми и с ростом расстройки по собственной частоте увеличивается и сила связи, синхронизация большинства связанных пар осцилляторов происходит при средних значениях γ скорее через захват частоты. Затем, в окне десинхронизации их частоты оказываются настолько различающимися, что синхронизация становится невозможной. На рисунке 3.13 приведены типичные зависимости средней частоты осцилляторов управляемой решетки при увеличении γ . На рисунке видно, что в решетке могут быть осцилляторы, которые остаются несинхронными при всех значениях γ (красная линия). При $\gamma \sim 0.63$ частота одного из синхронных осцилляторов резко уменьшается (синяя линия), он перестает быть синхронным с симметричным ему осциллятором из управляющего слоя. Затем, при $\gamma \sim 0.69$ частота ещё одного осциллятора уменьшается. То есть, синхронизация нарушается не сразу для всех пар элементов, а постепенно. Затем,

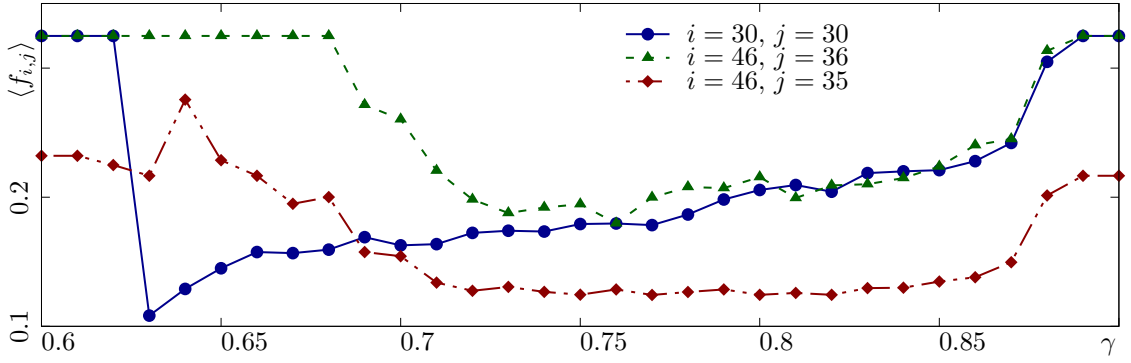


Рисунок 3.13. Изменение средней частоты осцилляторов с номерами $i = 30, j = 30$, $i = 46, j = 36$ и $i = 46, j = 35$ во второй решетке для случая передачи концентрической химеры во вторую решетку для межслойной связи (3.4) при $\varepsilon^{1,2} = 2.1$, $\omega^{1,2} = 2.0$, $\sigma^{1,2} = 0.7$, $P^1 = 4$, $P^2 = 1$.

при дальнейшем увеличении силы связи частоты осцилляторов, для которых синхронизация была нарушена, медленно увеличиваются и при $\gamma \sim 0.89$ резко выходят на прежний уровень (зеленая и синяя линии на рисунке 3.13). Данный сценарий синхронизации похож на подавление частоты внешним воздействием.

3.3.4 Синхронизация спиральных волн в связанных решетках отображений Курбажа-Некоркина

В настоящем разделе рассматривается эффект вынужденной синхронизации спиральных волн и спирально-волновых химер в двухслойной сети связанных решеток отображений Курбажа-Некоркина (3.6). В данном случае элементы второй решетки однонаправленно воздействуют на соответствующие элементы первой ($\gamma^{12} = 0, \gamma^{21} = \gamma$). Тип межслойной связи определяется соотношением (3.4). Характеристикой степени синхронности пространственно-временных структур служит число N_s синхронных пар, удовлетворяющее условию $R_{i,j}^{1,2} \geq 0.95$, где $R_{i,j}^{1,2}$ – коэффициенты взаимной корреляции (3.9). Параметры индивидуальных отображений фиксируются: $a = 0.25$, $\beta = 0.04$, $J = 0.15$,

$d = 0.5$, $\varepsilon = 0.005$, а силы внутрислойных связей устанавливаются одинаковыми для обеих решеток $\sigma^{1,2} = 0.6$.

В отсутствие межслойной связи в первой решетке отображений Курбажа-Некоркина реализуется режим классической спиральной волны (рисунок 3.14,а), а во второй – режим спирально-волновой химеры (рисунок 3.14,б). Результаты численного моделирования системы (3.6) демонстрируют передачу спирально-волновой химеры из второй решетки (рисунок 3.14,б) в первую (рисунок 3.14,в) при $\gamma = 0.05$. Как видно из зависимости, представленной на

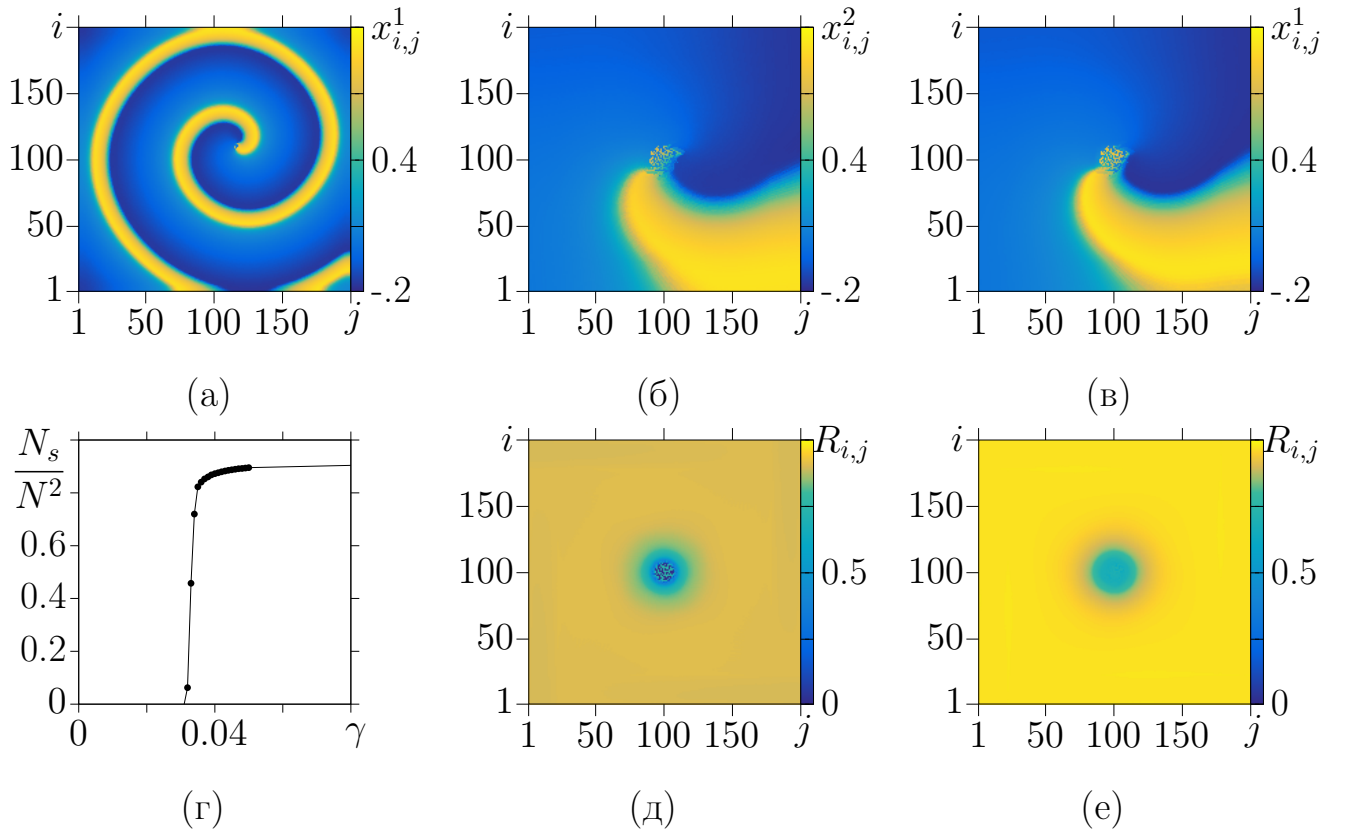


Рисунок 3.14. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}^1$ (а,в) и $x_{i,j}^2$ (б), нормированное число синхронных осцилляторов N_s/N^2 в зависимости

от силы межслойной связи γ (г) и распределения значений $R_{i,j}$ между симметричными элементами решеток (д,е) в сети (3.6) для режима одноядерной спирально-волновой химеры во второй решетке при $\gamma = 0$ (а,б), $\gamma = 0.02$ (д) и $\gamma = 0.05$ (в,е) для $P^1 = 4$, $P^2 = 22$, $\sigma^{1,2} = 0.6$, $a = 0.25$, $\beta = 0.04$,

$$J = 0.15, d = 0.5, \varepsilon = 0.005.$$

рисунке 3.14,г, при $\gamma \sim 0.05$ происходит сравнительно резкая частичная синхронизация связанных ансамблей. При этом по рисунку 3.14,д видно, что при $\gamma = 0.02$ корреляция большого количества пар элементов довольно высока, но осцилляторы по краям решетки, в некогерентном центре и вблизи него некоррелированы с соответствующими им элементами. Наконец, при $\gamma = 0.05$ большие части решеток синхронизируются (рисунок 3.14,е), кроме некогерентных центров и их окрестностей. При этом качественно структуры становятся похожими (рисунки 3.14,б,в).

На рисунке 3.15 приведены аналогичные результаты, полученные для случая, когда параметр нелокальности во второй решетке $P^2 = 14$, при котором реализуется режим 5-ядерной спирально-волновой химеры (рисунок 3.15,б). Механизм синхронизации качественно не отличается от представленного выше. При $\gamma \sim 0.05$ когерентная часть второй решетки синхронизируется с первой (рисунки 3.15,а,в,е). Переход к синхронному режиму характеризуется постепенным ростом значений коэффициента корреляции для элементов из когерентной области (рисунок 3.15,д). Как показывает сравнение рисунков 3.14,г и 3.15,г, в случае многоядерной химеры число некоррелированных пар элементов в режиме частичной синхронизации увеличивается примерно пропорционально числу некогерентных ядер:

$$N_{5 \text{ ядер}}^d \approx 5N_{1 \text{ ядро}}^d,$$

где $N_d = N^2 - N_s$ означает число несинхронизированных пар осцилляторов: $N_d = N_{5 \text{ ядер}}^d$ для химеры с пятью ядрами (рисунок 3.15,г,е) и $N_d = N_{1 \text{ core}}^d$ для одноядерной химеры (рисунок 3.14,г,е). Более детальное изучение некогерентного ядра спиральных структур рисунка 3.14 с помощью преобразования Фурье показывает, что спектры колебаний двух осцилляторов из когерентных областей связанных решеток в режиме синхронизации совпадают. Однако спектры колебаний элементов некогерентного ядра управляющей и управляемой ре-

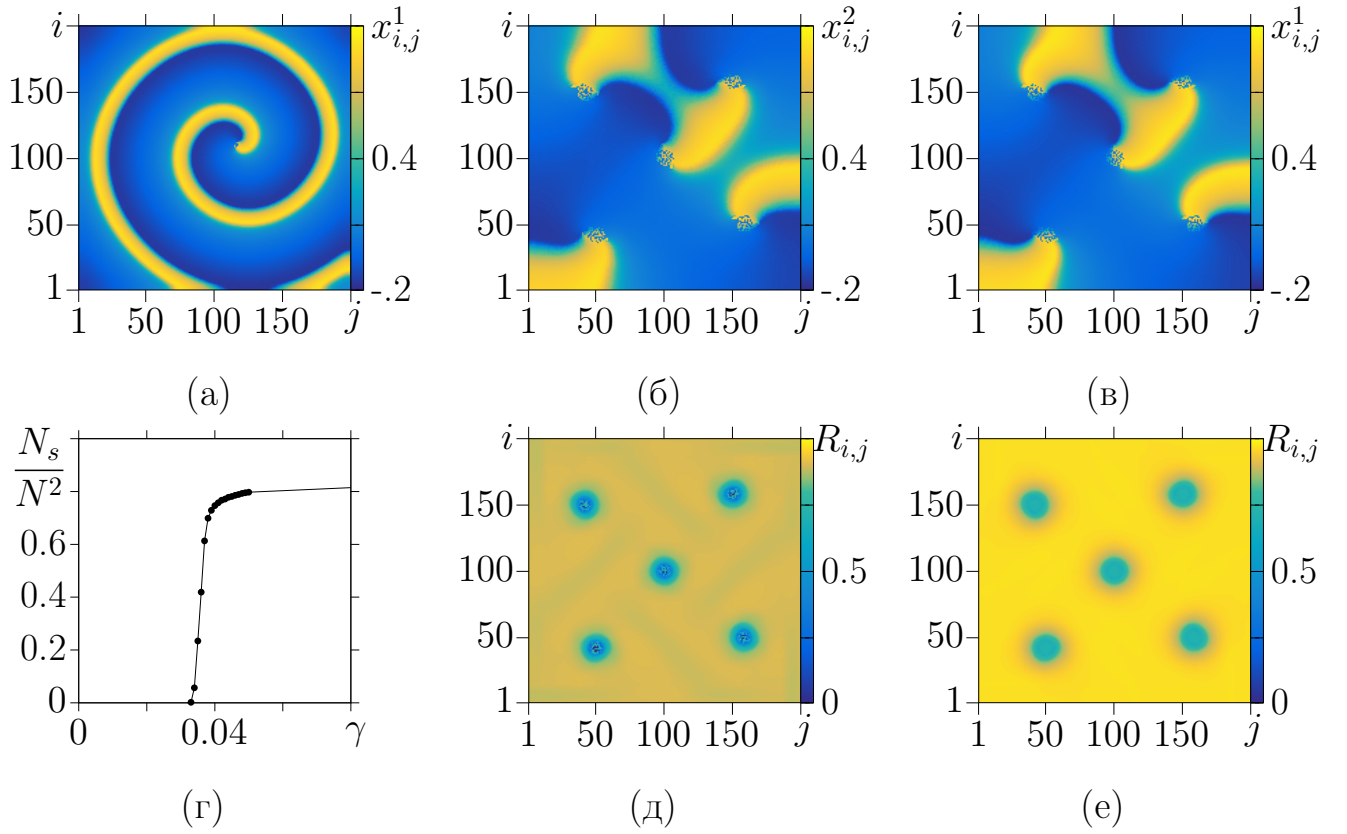


Рисунок 3.15. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}^1$ (а,в) и $x_{i,j}^2$ (б), нормированное число синхронных осцилляторов N_s/N^2 в зависимости от силы межслойной связи γ (г) и распределения значений $R_{i,j}$ между симметричными элементами решеток (д,е) в сети (3.6) для режима многоядерной спирально-волновой химеры во второй решетке при $\gamma = 0$ (а,б), $\gamma = 0.02$ (д) и $\gamma = 0.05$ (в,е) для $P^1 = 4$, $P^2 = 14$, $\sigma^{1,2} = 0.6$, $a = 0.25$, $\beta = 0.04$, $J = 0.15$, $d = 0.5$, $\varepsilon = 0.005$.

шетонок имеют отличающиеся друг от друга распределения амплитуд основных гармоник при одинаковых значениях частот основных гармоник.

Таким образом, полная синхронизация спирально-волновых структур, реализующихся при различных значениях параметра нелокальности, недостижима даже при достаточно больших значениях силы межслойной связи γ . Несинхронными всегда остаются ведущие центры или некогерентные ядра спирально-волновых структур, в отличие от концентрических волновых структур, для которых некогерентное ядро является ведущим в эффекте синхронизации. В рам-

ках диссертационного исследования также рассматривался случай межслойной связи, заданной соотношением (3.5). Полученные результаты качественно не отличаются от представленного выше случая. Единственным отличием является незначительное увеличение порогового значения силы связи, при котором колебания элементов взаимодействующих ансамблей синхронизируются.

3.4 Взаимная синхронизация волновых режимов в двух связанных решетках

В этом разделе приведены результаты численных исследований динамики двух симметрично (взаимно) связанных двумерных ансамблей нелинейных осцилляторов в режимах спиральных и концентрических волн. Анализируется влияние расстройки параметра нелокальности на эффект взаимной синхронизации в системе двух связанных решеток генераторов ван дер Поля, реализующих концентрические структуры разных типов. При этом рассматриваются два типа межслойной связи соответствующих элементов связанных ансамблей.

3.4.1 Взаимодействие концентрических волновых структур в связанных решетках генераторов ван дер Поля

Для рассмотрения симметричного взаимодействия концентрических структур в решетках $N \times N = 80 \times 80$ в системе (3.3) параметры межслойной связи устанавливаются одинаковыми ($\gamma^{12} = \gamma^{21} = \gamma$). Численное моделирование динамики взаимосвязанных ансамблей (3.3) проводилось аналогично исследованиям эффекта вынужденной синхронизации в этой системе (раздел 3.3.1). Результаты численного моделирования показали, что коэффициенты взаимной

корреляции (3.9) для взаимодействующих концентрических химерных структур могут давать очень большие ошибки, поэтому в данном случае в качестве меры синхронизации пар осцилляторов используется корень среднеквадратичного отклонения:

$$\theta_{i,j} = \sqrt{\langle (x_{i,j}^2 - x_{i,j}^1)^2 \rangle_t}, \quad (3.13)$$

который принимает значения меньше 0.3 для почти идентичных колебаний.

Для подробного изучения влияния расстройки по параметру нелокальности P^1 и P^2 на эффект взаимной синхронизации рассматриваются комбинации начальных условий в виде двух структур из представленных на рисунке 3.16. Структура в первой решетке при $P^1 = 1$ (рисунок 3.16,а) была получена с

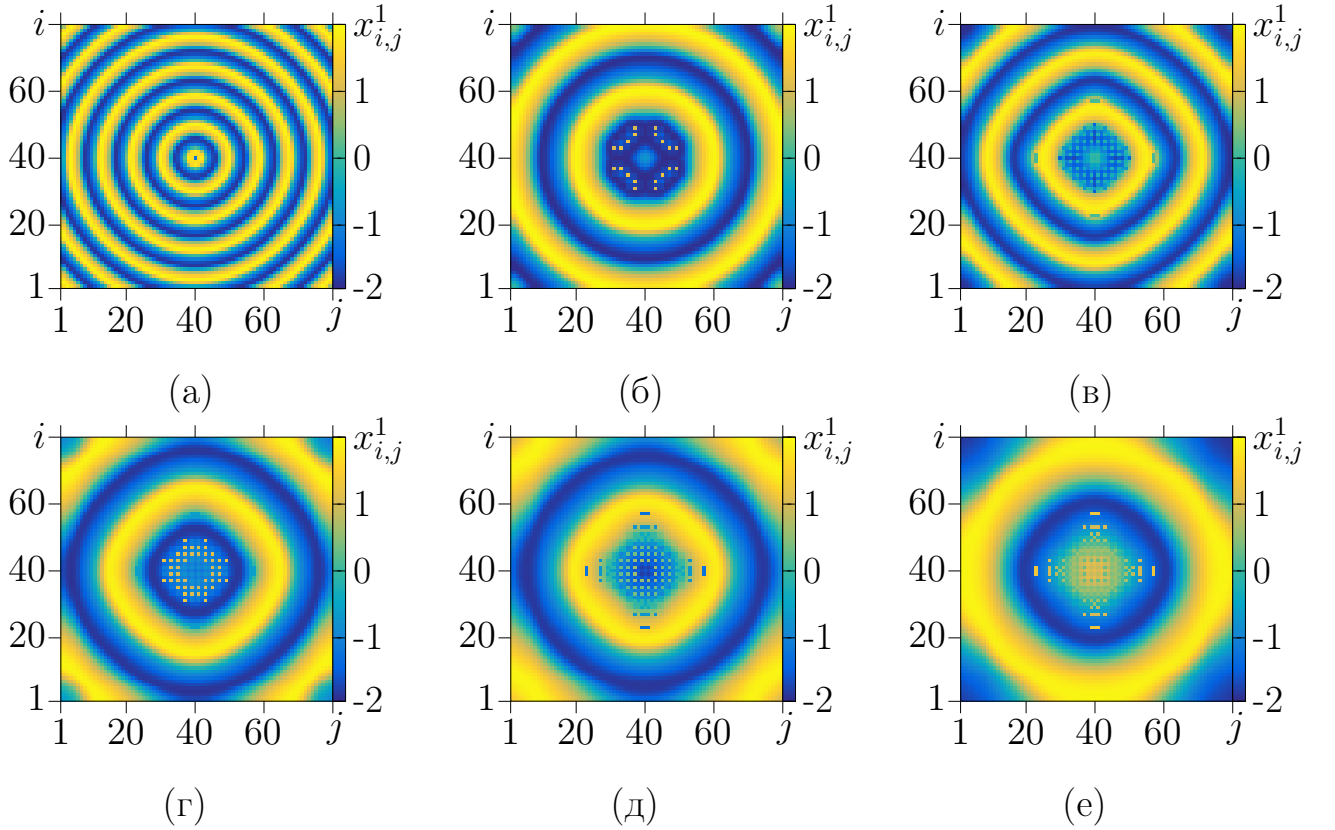


Рисунок 3.16. Мгновенные пространственные профили значений переменной $x_{i,j}^1$ первой решетки сети (3.3) в отсутствие межслойной связи для режимов одноядерных концентрических волн при $P^1 = 1$ (а), $P^1 = 2$ (б), $P^1 = 3$ (в), $P^1 = 4$ (г), $P^1 = 6$ (д) и $P^1 = 7$ (е). Параметры: $\sigma^1 = 0.65$, $\varepsilon^1 = 2.1$, $\omega^1 = 2$,

$$\gamma^{21} = 0.$$

использованием случайных начальных условий, затем величина параметра P^1 изменялась с выбором начальных условий в виде последнего полученного состояния ансамбля. Структуры на рисунке 3.16 получены в отсутствие воздействия со стороны второй решетки ($\gamma^{21} = 0$). Далее две различающиеся структуры из представленных на рисунке 3.16 устанавливаются в двух решетках и вводится межслойная взаимная симметричная связь ($\gamma^{21} = \gamma^{12} = \gamma$), сила которой увеличивается плавно с целью наилучшего сохранения типа пространственно-временной динамики. Для количественной оценки синхронности динамики в связанных ансамблях используются графики, на которых по вертикальной оси показано распределение значений $\theta_{i,j}$ для всех пар генераторов, а по горизонтальной отложено соответствующее значение силы связи.

Синхронизация концентрической волны и химеры при минимальной расстройке по параметру нелокальности. На рисунке 3.17 приведены расчеты распределения значений среднеквадратичного отклонения (3.13) в зависимости от величины межслойной связи для случая синхронизации концентрической волны ($P^1 = 1$) с концентрической волновой химерой при минимальном значении параметра нелокальности ($P^2 = 2$). Полученные результаты

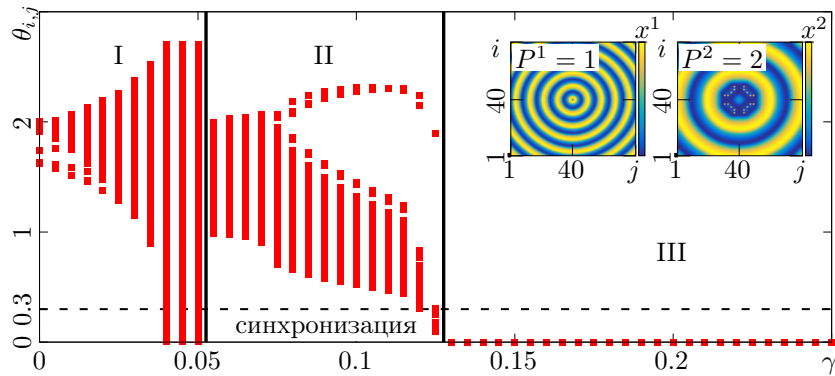


Рисунок 3.17. Распределение значений $\theta_{i,j}$ в зависимости от силы межслойной связи γ (3.5) при $P^1 = 1, P^2 = 2, \sigma^{1,2} = 0.65, \varepsilon^{1,2} = 2.1, \omega^{1,2} = 2$. В области I волны в решетках сильно отличаются друг от друга, в области II происходит их взаимная подстройка (синхронизация отсутствует), в области III наблюдаются синхронные структуры.

показывают, что при $\gamma < 0.13$ структуры в разных решетках несинхронны. При этом в области I ансамбли демонстрируют сильно отличающуюся друг от друга динамику (рисунок 3.18,а,г), а в области II структуры становятся похожими друг на друга, хотя и не синхронизируются полностью, что отражено как на распределении значений $\theta_{i,j}$ (рисунок 3.17), так и на мгновенных профилях (рисунки 3.18,б,д). В первой решетке область некогерентности не появляется, хотя во второй сохраняется. Когерентные части решетки синхронизируются. Важно отметить, что из-за взаимодействия решеток длина волны обеих структур увеличилась, а не установилась некая промежуточная структура, как можно было ожидать. В области III значения $\theta_{i,j} = 0$, как видно на рисунке 3.17, что свидетельствует о полной синхронизации. Однако, как показывают рисунки 3.18,в,е,

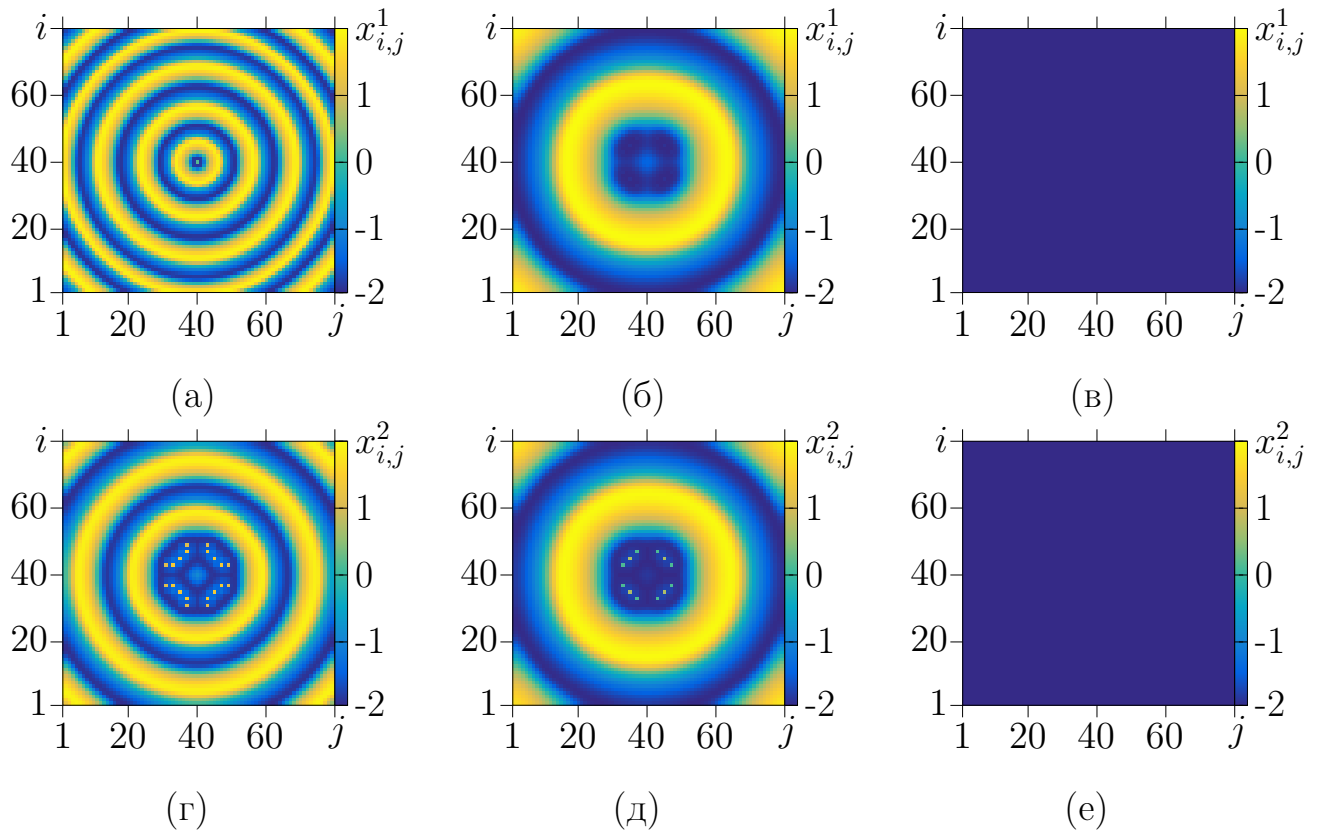


Рисунок 3.18. Мгновенные пространственные профили динамики первой (а-в) и второй (г-е) решеток сети (3.3) для режима одноядерных концентрических волн с межслойной связью (3.5) при $\gamma = 0.045$ (а,г), $\gamma = 0.12$ (б,д) и $\gamma = 0.2$ (в,е). Параметры: $P^1 = 1$, $P^2 = 2$, $\sigma^{1,2} = 0.65$, $\varepsilon^{1,2} = 2.1$, $\omega^{1,2} = 2$.

в области III синхронизируются не концентрические структуры, а однородный в пространстве режим. То есть, начальные структуры разрушились при введении межслойной связи (3.5) достаточно большой силы. Исчезновение концентрической структуры в области III можно объяснить ростом длины волны в обоих ансамблях с увеличением силы связи: при определенном её значении длина волны оказывается больше линейных размеров решетки. Кроме того, длины волн структур при $P^1 = 1$ и при $P^2 = 2$ сильно отличаются друг от друга, что может препятствовать взаимной синхронизации исходных структур.

Для изучения влияния типа межслойной связи на явление синхронизации теперь рассматривается связь по первой переменной во втором уравнении (3.4). Как и в предыдущем случае, при $\gamma < 0.035$ (область I на рисунке 3.19) структуры несинхронны и заметно отличаются друг от друга (рисунки 3.20,а,г). При увеличении силы связи в области IV концентрические структуры в обоих слоях разрушаются, а возникают спиральные волны с множеством центров (рисунки 3.20,б,д). Затем, при $\gamma \in [0.055, 0.1]$ (область II на рисунке 3.19) концентрические волны возникают вновь с гораздо большей длиной волны (рисун-

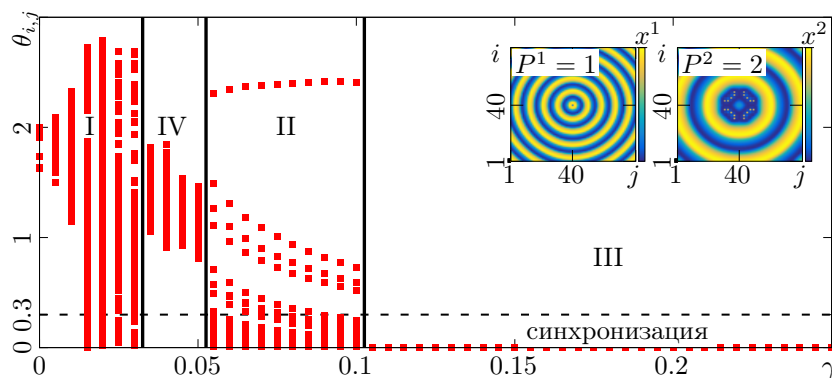


Рисунок 3.19. Распределение значений $\theta_{i,j}$ в зависимости от силы межслойной связи γ (3.4) при $P^1 = 1, P^2 = 2, \sigma^{1,2} = 0.65, \varepsilon^{1,2} = 2.1, \omega^{1,2} = 2$. В области I волны в разных решетках сильно отличаются друг от друга, в области IV наблюдаются несинхронные спиральные структуры, в области II они подстраиваются друг под друга, но не синхронизируются, в области III становятся синхронными.

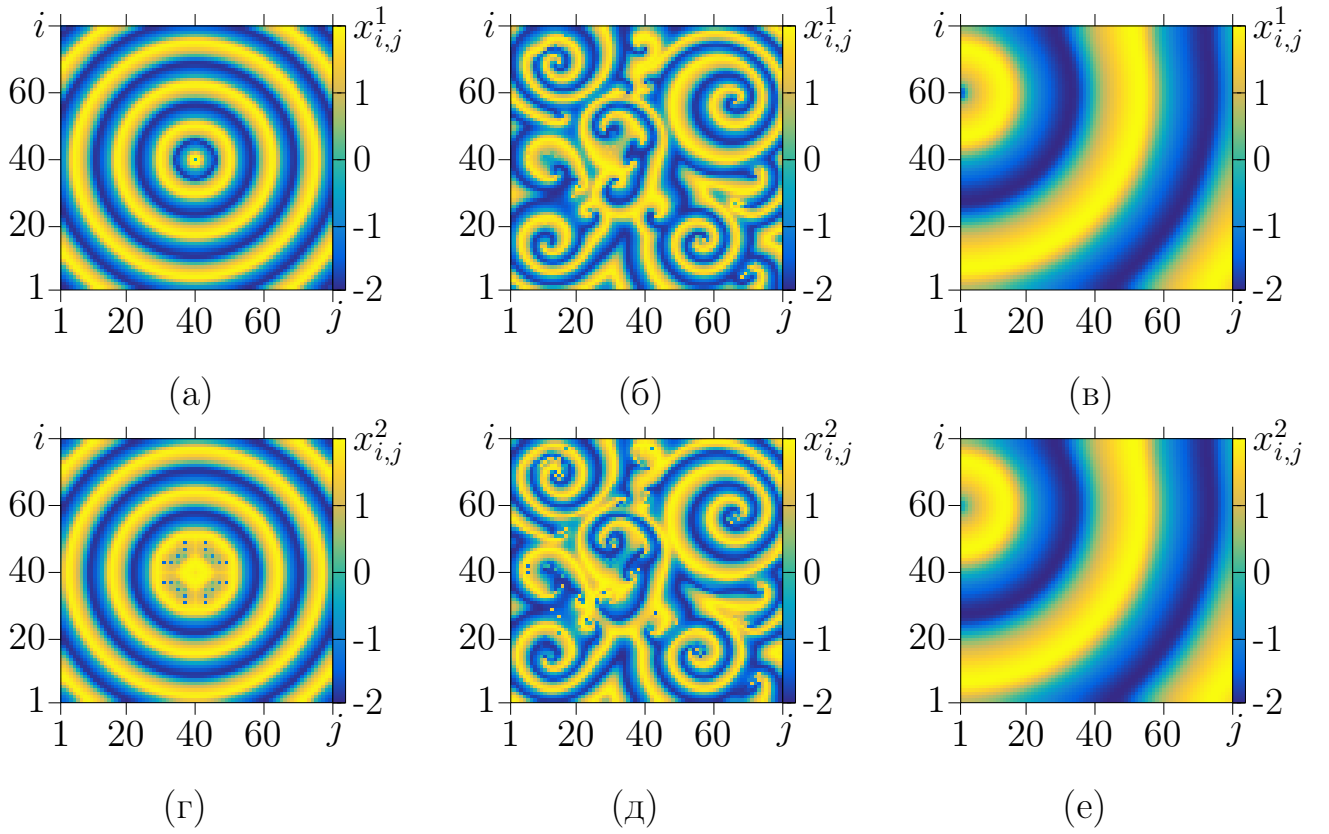
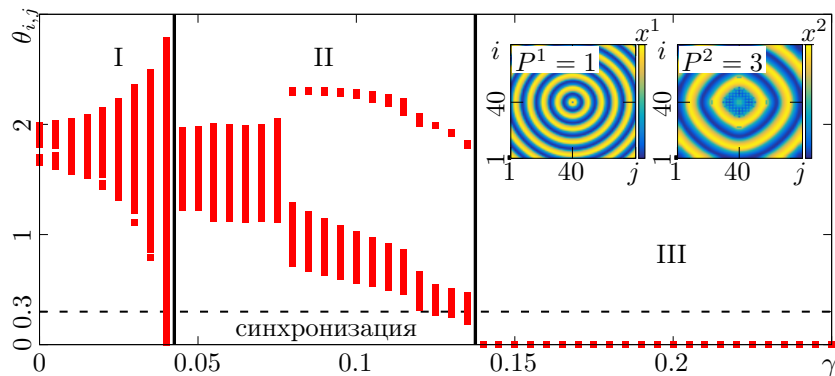


Рисунок 3.20. Мгновенные пространственные профили динамики первой (а-в) и второй (г-е) решеток сети (3.3) для режимов одноядерных концентрических волн с межслойной связью (3.4) при $\gamma = 0.03$ (а,г), $\gamma = 0.05$ (б,д) и $\gamma = 0.1$ (в,е). Параметры: $P^1 = 1, P^2 = 2, \sigma^{1,2} = 0.65, \varepsilon^{1,2} = 2.1, \omega^{1,2} = 2$.

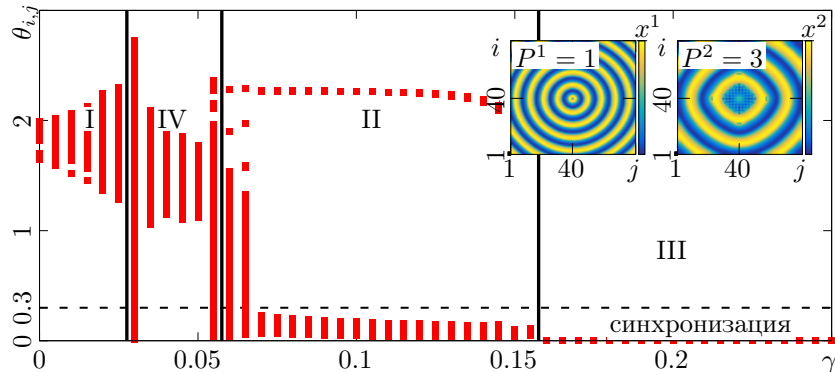
ки 3.20,в,е), и большое количество связанных пар осцилляторов синхронизируется. Наконец, при $\gamma > 0.1$ (область III на рисунке 3.19), концентрические структуры в обеих решетках вновь разрушаются, все осцилляторы обеих решеток синхронизируются, как и в предыдущем случае.

Синхронизация концентрической волны и химеры при увеличении параметра нелокальности во втором слое. Результаты численного моделирования показывают, что увеличение разности диапазонов связи $\Delta P = P^2 - P^1$ не приводит к качественному изменению во взаимном поведении решеток. Этот факт отражают зависимости $\theta_{i,j}(\gamma)$, показанные на рисунках 3.21,а,б для двух типов межслойной связи. В первом случае, когда связь вводится по второй переменной во втором уравнении (3.5), структуры заметно отличаются

друг от друга в области I при $\gamma < 0.045$ (рисунок 3.21,а). С ростом силы связи длины волн в обеих решетках увеличиваются и в интервале $\gamma \in [0.05; 0.135]$ они подстраиваются друг под друга. В области III, при $\gamma > 0.135$, концентрические структуры в обоих ансамблях разрушаются и все элементы системы демонстрируют одинаковые периодические колебания. Описанные результаты аналогичны случаю с меньшей расстройкой ΔP , который представлен выше. В случае связи по первой переменной во втором уравнении (3.4) при $\gamma < 0.03$ в области



(а)



(б)

Рисунок 3.21. Распределения значений $\theta_{i,j}$ в зависимости от силы межслойной

связи в случае связи по вторым переменным (3.5) (а) и по первым переменным (3.4) (б) при $P^1 = 1, P^2 = 3, \sigma^{1,2} = 0.65, \varepsilon^{1,2} = 2.1, \omega^{1,2} = 2$. В области I волны в разных решетках сильно отличаются друг от друга, в области IV наблюдаются различные несинхронные структуры, в области II они подстраиваются друг под друга, но не синхронизируются, в области III становятся синхронными.

I структуры оказывают слабое влияние друг на друга (рисунок 3.21,б). В области IV при $\gamma \in [0.03 : 0.055]$ обе решетки переходят в нерегулярные режимы с сосуществующими различными типами волн. В области II при $\gamma \in [0.06, 0.155]$ концентрические волны наблюдаются вновь, но синхронных пар генераторов оказывается гораздо меньше, чем в случае меньшей расстройки по параметру нелокальности. Наконец, в области III при $\gamma > 0.155$ концентрические структуры разрушаются и сменяются пространственно-однородным режимом, соответствующим режиму полной синхронизации всех генераторов исследуемой сети.

Синхронизация концентрических химерных структур при минимальной расстройке параметров нелокальности.

В предыдущих параграфах было рассмотрено симметричное взаимодействие концентрической волны при локальной связи и концентрических химерных волн. Было показано для двух типов межслойной связи, что полной синхронизации между такими структурами нет, хотя большие части решетки могут синхронизоваться. Численные исследования для межслойной связи (3.4) для случаев $P^1 = 3, P^2 = 4$; $P^1 = 3, P^2 = 6$; $P^1 = 4, P^2 = 7$ показали аналогичные описанным выше результаты. Поэтому, здесь приводятся результаты для межслойной связи по второй переменной во втором уравнении (3.5). Зависимость распределения значений

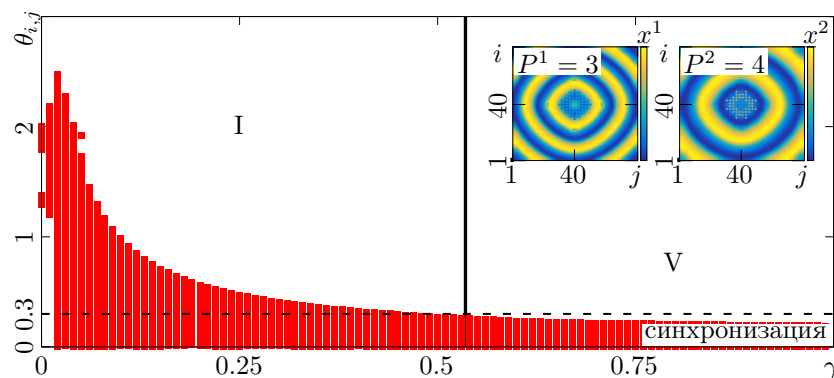


Рисунок 3.22. Распределение значений $\theta_{i,j}$ в зависимости от силы межслойной связи γ (3.5) при $P^1 = 3, P^2 = 4, \sigma^{1,2} = 0.65, \varepsilon^{1,2} = 2.1, \omega^{1,2} = 2$. В области I волны в разных решетках сильно отличаются друг от друга, в области V наблюдается эффективная синхронизация концентрических структур.

среднеквадратичного отклонения от силы связи для случая, когда расстройка параметра нелокальности минимальна ($\Delta P = P^2 - P^1 = 4 - 3 = 1$), приведена на рисунке 3.22. Распределение изменяется плавно и принципиально отличается от всех рассмотренных выше случаев. В области V при $\gamma > 0.53$ происходит полная эффективная синхронизация концентрических структур. Установленные в отсутствие связи концентрические химеры в обеих решетках изменяются плавно, вследствие чего сохраняются даже при достаточно больших значениях γ . Поэтому, синхронизация концентрических химер в случае связи (3.5) представляется наиболее интересной.

На рисунке 3.23 приведены мгновенные пространственные профили структур для двух ансамблей и распределения $\theta_{i,j}$ для соответствующих пространственно-временных режимов при нескольких увеличивающихся значениях силы межслойной связи. При $\gamma = 0.01$ (рисунки 3.23,а,г) структуры почти не отличаются от начальных, взятых при $\gamma = 0$. При этом распределение значений $\theta_{i,j}$ принимает довольно большие значения $\theta_{i,j} \in (1.2, 2.2)$ для всех пар генераторов, что свидетельствует об отсутствии взаимной синхронизации (рисунок 3.23,ж). При $\gamma > 0.03$ решетки демонстрируют почти идентичное поведение: длина волны и положение некогерентных осцилляторов в ядре одинаковы для обеих структур, однако видно, что края решеток немного отличаются в один и тот же момент времени (рисунки 3.23,б,д). То, что осцилляторы по краям решеток не синхронизируются друг с другом, подтверждается распределением значений $\theta_{i,j}$, приведенном на рисунке 3.23,з. Пары осцилляторов с наименьшими среднеквадратичными отклонениями соответствуют тем, которые отличаются на половину периода колебаний от осцилляторов в своей окрестности внутри решетки. То есть, в первую очередь при увеличении силы межслойной связи синхронизируются генераторы, характеризующие некогерентность в химерном состоянии. В случае достаточно больших значений силы связи, при $\gamma > 0.25$, колебания связанных элементов в разных слоях становятся почти идентичными и значения среднеквадратичных отклонений для них достаточно малы, чтобы

считать их колебания синхронными. При этом среднеквадратичные отклонения колебаний некогерентных генераторов химерных структур $\theta_{i,j} \rightarrow 0$. Это означает, что некогерентные элементы в структуре решетки в случае концентрических химер являются ведущими в эффекте взаимной синхронизации. Таким образом,

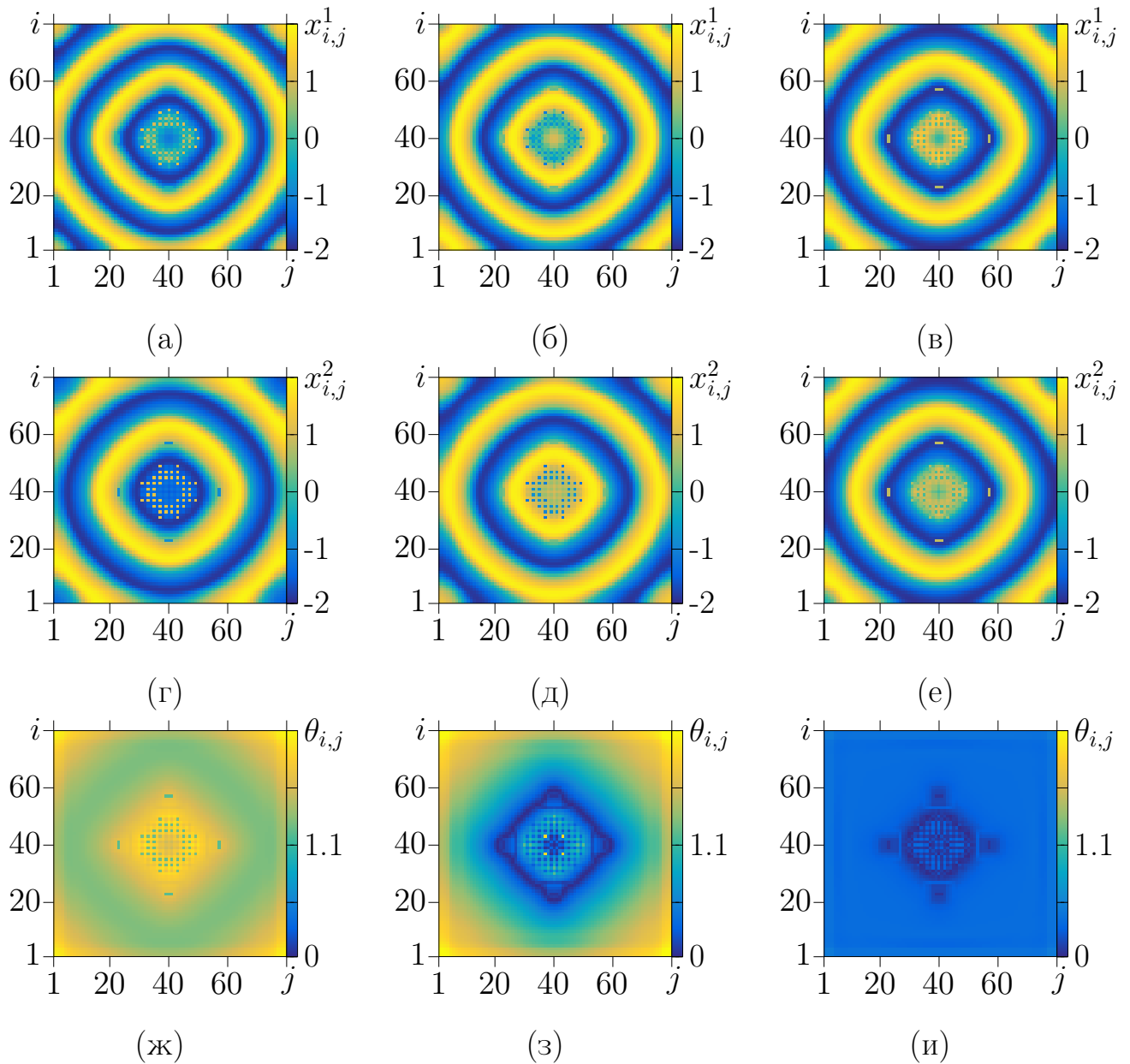
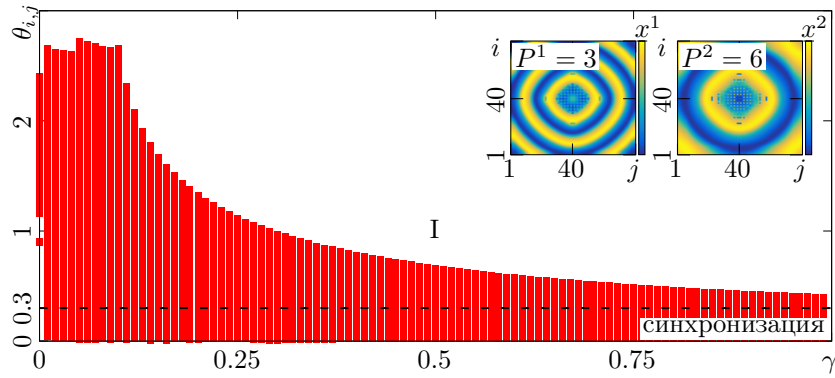


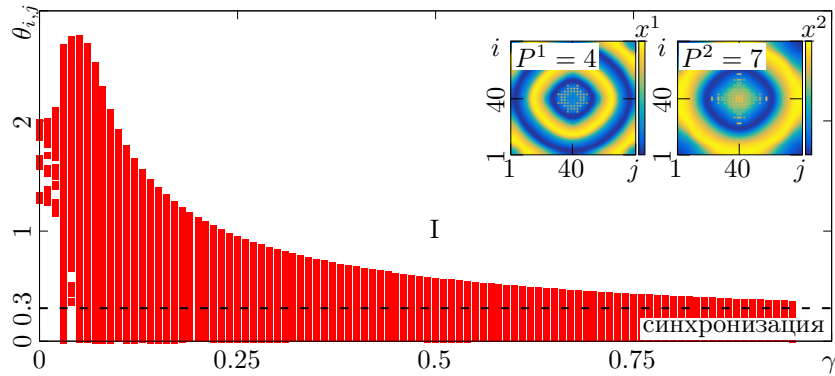
Рисунок 3.23. Мгновенные пространственные профили динамики первой (а-в) и второй (г-е) решеток сети (3.3), распределение значений $\theta_{i,j}$ (ж-и) в случае межслойной связи (3.5) для режима концентрических волновых химер при $\gamma = 0.01$ (а,г,ж), $\gamma = 0.03$ (б,д,з) и $\gamma = 0.25$ (в,е,и). Параметры: $P^1 = 3$, $P^2 = 4$, $\sigma^{1,2} = 0.65$, $\varepsilon^{1,2} = 2.1$, $\omega^{1,2} = 2$.

можно утверждать, что взаимная синхронизация концентрических химерных состояний происходит через синхронизацию её некогерентных осцилляторов. В этом эффект синхронизации концентрических волновых химер противоположен эффекту синхронизации спиральных волн и химер. Стоит отметить, что эти некогерентные осцилляторы синхронизируются при достаточно малых значениях силы межслойной связи при $\gamma = 0.07$, в то время как внутрислойная связь $\sigma^{1,2} = 0.65$ гораздо больше. При $\gamma \sim 0.53 < \sigma^{1,2}$ уже все связанные пары генераторов синхронизируются, если считать синхронной пару (m, g) с $\theta_{m,g} < 0.3$.

Синхронизация концентрических химерных структур при увеличении расстройки параметров нелокальности. Выше описан механизм взаимной синхронизации для случая $\Delta P = 1$, здесь рассматривается влияние увеличения ΔP и увеличения меньшего значения параметра нелокальности P^1 . Результаты для случаев $\Delta P = P^2 - P^1 = 6 - 3 = 3$ и $\Delta P = P^2 - P^1 = 7 - 4 = 3$ приведены на рисунках 3.24,а и 3.24,б, соответственно. Форма зависимости на рисунках 3.24,а,б очень похожа на приведенный график в предыдущем параграфе (рисунок 3.22), но отличается скоростью уменьшения максимального значения $\theta_{i,j}$ при увеличении силы связи. В результате, даже при $\gamma = 1$ полная синхронизация не достигается (условие $\theta_{i,j} < 0.3$ выполняется не для всех пар осцилляторов). Стоит отметить, что в случае, когда в обеих решетках параметр нелокальности больше при одном и том же значении ΔP , значения $\theta_{i,j}$ уменьшаются и условие синхронизации выполняется для большинства пар осцилляторов, как следует из сравнения рисунков 3.24,а и 3.24,б.



(a)



(б)

Рисунок 3.24. Распределения значений $\theta_{i,j}$ в зависимости от силы межслойной связи γ в случае связи по вторым переменным (3.5) при $P^1 = 3, P^2 = 6$ (a) и $P^1 = 4, P^2 = 7$ (б). Остальные параметры фиксированы: $\sigma^{1,2} = 0.65, \varepsilon^{1,2} = 2.1, \omega^{1,2} = 2$. В области I волны в разных решетках отличаются друг от друга.

3.4.2 Взаимодействие спиральных волн в связанных решетках отображений Курбажа-Некоркина

Взаимная синхронизация спиральных волн и спирально-волновых химерных состояний, также как и вынужденная, рассматривается в системе двух взаимно связанных решетках отображений Курбажа-Некоркина (3.6) ($\gamma^{12} = \gamma^{21} = \gamma$). Были исследованы два случая межслойной связи, результаты для которых качественно одинаковы. В случае связи через функции (3.5) пороговое значение γ , при котором колебания элементов решеток синхронизируются, больше,

чем для случая связи через переменные (3.4). В этом разделе рассматривается только случай связи через переменные (3.4). Степень синхронности элементов решеток в режиме спиральных структур оценивается числом N_s синхронных пар, удовлетворяющих условию $R_{i,j}^{1,2} \geq 0.95$, где $R_{i,j}^{1,2}$ – коэффициенты корреляции временных реализаций соответствующих отображений (3.9). Параметры индивидуальных отображений фиксируются $a = 0.25$, $\beta = 0.04$, $J = 0.15$, $d = 0.5$, $\varepsilon = 0.005$, силы внутрислойных связей устанавливаются одинаковыми для обеих решеток $\sigma^{1,2} = 0.6$. При изучении взаимной синхронизации исследуемые структуры получались следующим образом. Начальные условия случайно равномерно распределены в соответствующих интервалах $x_{i,j}^{1,2}(0) \in [-0.2, 0.6]$, $y_{i,j}^{1,2}(0) \in [-0.02, 0.06]$ при $P^{1,2} = 1$. Затем параметры внутрислойной связи плавно изменяются с сохранением начальных условий.

На рисунке 3.25 приведены результаты для взаимной синхронизации двух спиральных волн. В отсутствие межслойной связи выбраны спиральные волны при $P^1 = 1$ в первой решетке (рисунок 3.25,а) и при $P^2 = 3$ во второй (рисунок 3.25,б). При введении межслойной связи $\gamma \sim 0.02$ появляется несколько пар синхронных осцилляторов (рисунки 3.25,г,д). При этом корреляция колебаний почти всех связанных генераторов становится достаточно высокой (рисунок 3.25,д). Далее, при $\gamma > 0.03$ колебания большинства пар связанных нейронов синхронизируются, как показывает зависимость на рисунке 3.25,г,е. Важно отметить, что в случае взаимной синхронизации результирующая синхронная структура (рисунок 3.25,в) отличается от обеих начальных структур длиной волны, которая представляет собой некоторое среднее значение длин волн структур в отдельных решетках в отсутствие межслойной связи. Таким образом, можно утверждать, что в этом случае имеет место частичная синхронизация, при которой колебания осцилляторов, соответствующих центрам спиральных волн, остаются некоррелированными даже при достаточно большом увеличении силы связи γ .

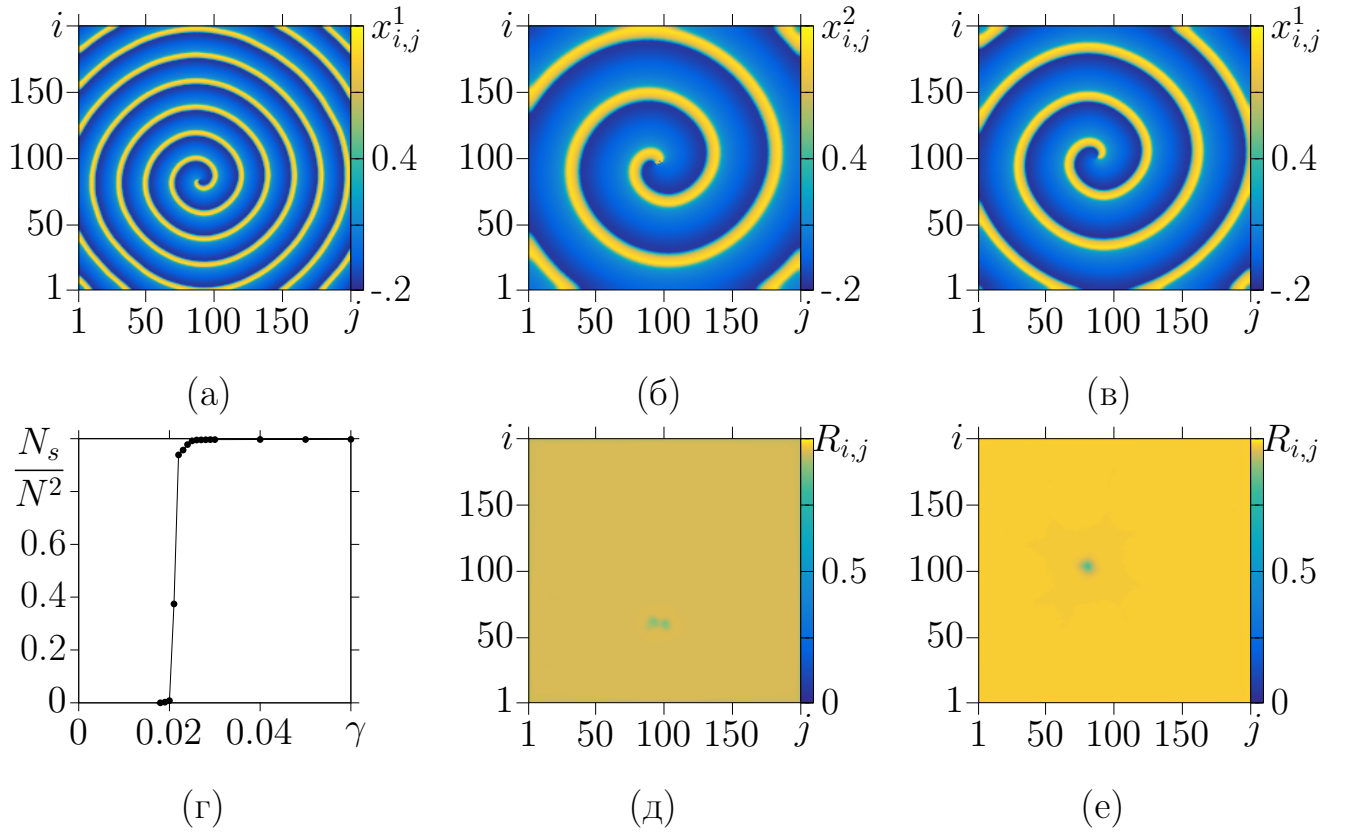


Рисунок 3.25. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}^1$ (а,в) и $x_{i,j}^2$ (б), нормированное число синхронных осцилляторов N_s/N^2 в зависимости от силы межслойной связи γ (г) и распределения значений $R_{i,j}$ (д,е) в системе (3.6) для одноядерных спиральных структур при $\gamma = 0$ (а,б), $\gamma = 0.02$ (д) и $\gamma = 0.04$ (в,е). Параметры: $P^1 = 1$, $P^2 = 3$, $\sigma^{1,2} = 0.6$, $a = 0.25$, $\beta = 0.04$, $J = 0.15$, $d = 0.5$, $\varepsilon = 0.005$.

Результаты численного моделирования показывают, что усложнение одной из начальных структур в отдельном ансамбле приводит к увеличению порога синхронизации. Результаты расчетов, представленные на рисунке 3.26, демонстрируют особенности взаимной синхронизации спиральной волны при $P^1 = 4$ и спирально-волновой химеры при $P^2 = 22$. Структура, получающаяся в результате взаимной синхронизации, представляет собой спиральную волну с почти отсутствующим некогерентным ядром, как видно на мгновенном пространственном профиле (рисунок 3.26,в). При этом, взаимная частичная синхронизация пространственно-временных структур происходит при $\gamma \sim 0.04$,

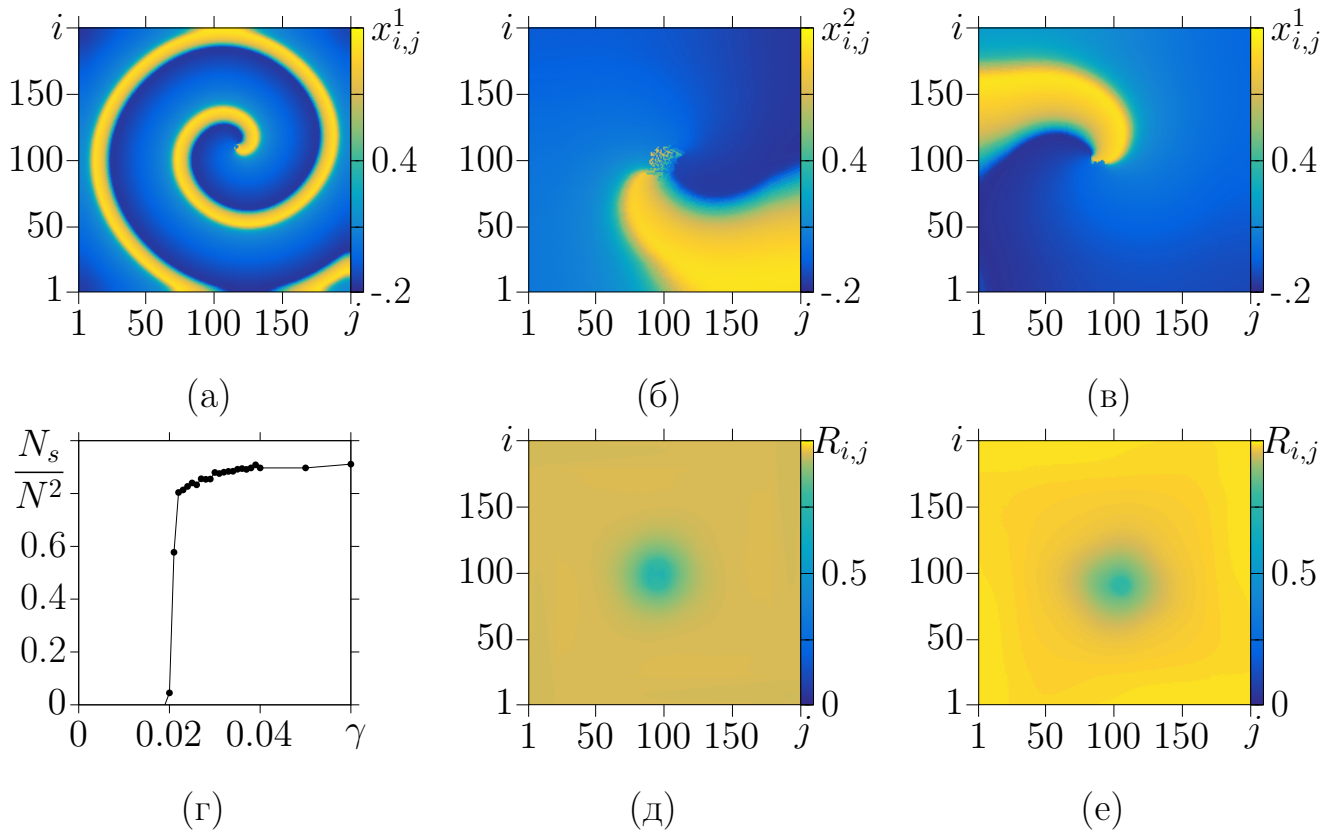


Рисунок 3.26. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}^1$ (а,в) и $x_{i,j}^2$ (б), нормированное число синхронных осцилляторов N_s/N^2 в зависимости от силы межслойной связи γ (г) и распределения корреляций связанных элементов решеток (д,е) в системе (3.6) для одноядерных спирально-волновых химерных структур при $\gamma = 0$ (а,б), $\gamma = 0.02$ (д) и $\gamma = 0.06$ (в,е). Параметры: $P^1 = 4$, $P^2 = 22$, $\sigma^{1,2} = 0.6$, $a = 0.25$, $\beta = 0.04$, $J = 0.15$, $d = 0.5$, $\varepsilon = 0.005$.

что несколько выше соответствующего значения в предыдущем рассмотренном случае. Кроме того, по сравнению с предыдущим случаем, увеличивается число несинхронных пар элементов в режиме синхронизации. Таким образом, усложнение динамики одной из решеток приводит к уменьшению числа синхронных пар осцилляторов и увеличению порогового значения γ , при котором синхронизация наступает.

Для дальнейшего усложнения взаимодействующих структур выберем в качестве начальных химерные состояния с разным количеством некогерентных кластеров в обеих решетках. Полученная в результате взаимной синхронизации

ции 12-ядерной спиральной химеры при $P^1 = 6$ и 5-ядерной при $P^2 = 14$ (рисунок 3.27) структура в обоих ансамблях упрощается в сравнении с соответствующими начальными состояниями. В режиме синхронизации наблюдается 3-ядерная спиральная волна, мгновенный пространственный профиль которой приведен на рисунке 3.27,в. Важно отметить, что усложнение структур привело к тому, что пороговое значение параметра $\gamma \sim 0.05$ увеличилось, несмотря на то, что расстройка по параметру нелокальности заметно уменьшена по сравнению с предыдущим рассмотренным случаем. Зависимость $N_s/N^2(\gamma)$ плавно

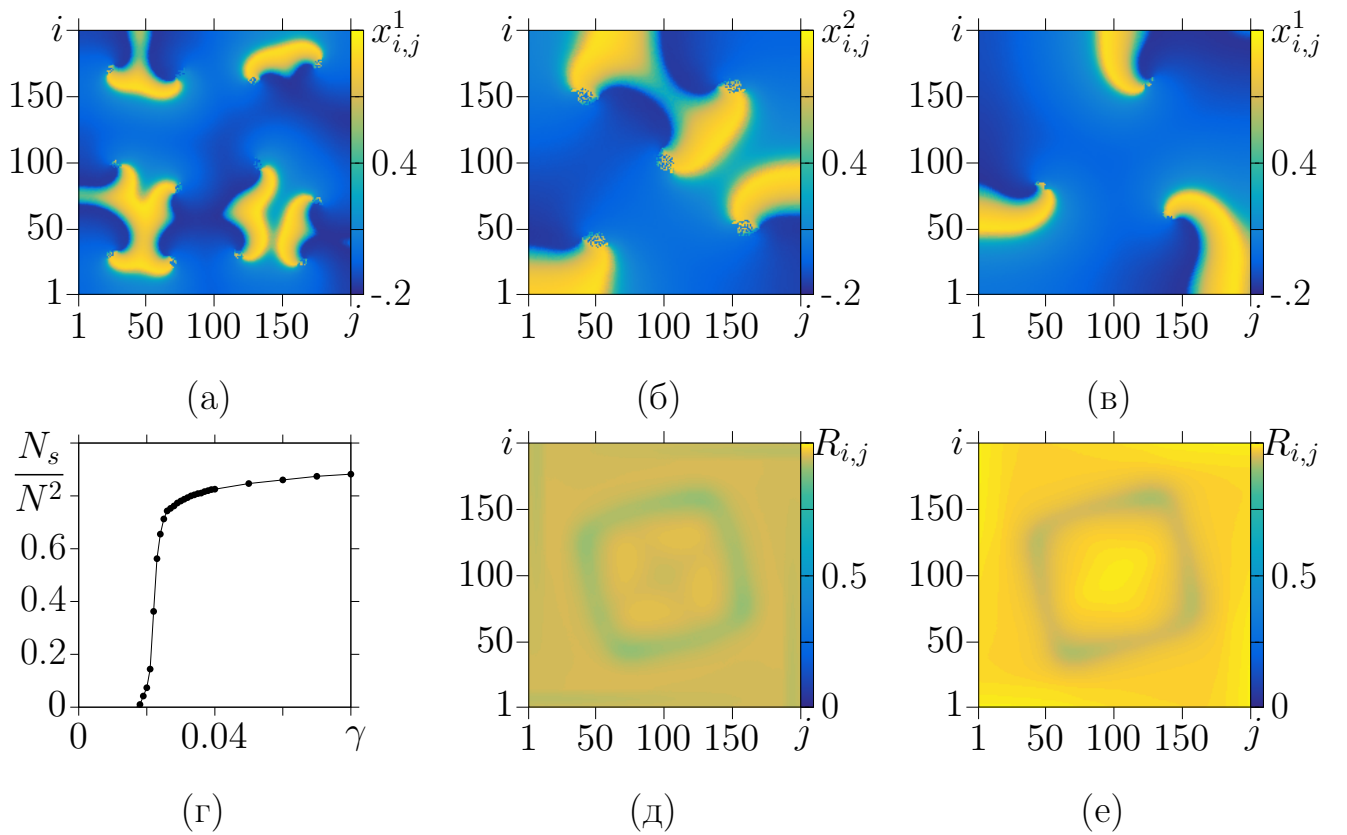


Рисунок 3.27. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}^1$ (а,в) и $x_{i,j}^2$ (б), нормированное число синхронных осцилляторов N_s/N^2 в зависимости

от силы межслойной связи γ (г) и распределения корреляций связанных элементов решеток (д,е) в системе (3.6) для многоядерных

спирально-волновых химерных структур при $\gamma = 0$ (а,б), $\gamma = 0.02$ (д) и $\gamma = 0.08$ (в,е). Параметры: $P^1 = 6$, $P^2 = 14$, $\sigma^{1,2} = 0.6$, $a = 0.25$, $\beta = 0.04$,

$$J = 0.15, d = 0.5, \varepsilon = 0.005.$$

увеличивается при $\gamma > 0.04$, но количество пар осцилляторов, колебания которых остаются несинхронизированными, является наибольшим для всех случаев, рассмотренных в этом подразделе. Первыми при $\gamma = 0.02$ (рисунок 3.27,д) синхронизируются колебания осцилляторов в четырех группах вблизи центра решетки, а при достаточном увеличении силы межслойной связи, при $\gamma = 0.08$, несинхронными остаются колебания в кластере, объединяющем все три кластера некогерентности (рисунки 3.27,в,е).

3.5 Противофазная удаленная синхронизация волновых структур в трехслойной неоднородной сети нелинейных осцилляторов

В данном разделе приведены результаты численного исследования динамики системы трех связанных двумерных ансамблей нелинейных осцилляторов. Впервые установлено и описано явление противофазной удаленной синхронизации автоволновых структур в неоднородной трехслойной сети. Удаленные слои, которые не связаны друг с другом напрямую, представляют собой решетки связанных генераторов ван дер Поля, в то время как средний двумерный ансамбль состоит из связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо. Средний слой связан с каждым из удаленных симметрично. Исследуемая модель задается следующими соотношениями в уравнении (3.1):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_{i,j}^l &= \begin{pmatrix} \dot{x}_{i,j}^l \\ \dot{y}_{i,j}^l \end{pmatrix}; \mathbf{S}^l = \begin{pmatrix} x_{m,g}^l - x_{i,j}^l \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{\Gamma}^{pl} = \begin{pmatrix} x_{i,j}^p - x_{i,j}^l \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{F}^{1,3} &= \begin{pmatrix} y_{i,j}^{1,3} \\ \varepsilon^{1,3}(1 - (x_{i,j}^{1,3})^2)y_{i,j}^{1,3} - \omega^2 x_{i,j}^{1,3} \end{pmatrix}; \mathbf{F}^2 = \begin{pmatrix} (x_{i,j}^2 - y_{i,j}^2) / \varepsilon^2 \\ \alpha x_{i,j}^2 - y_{i,j}^2 - \beta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $p, l = 1, 2, 3$. Каждый слой имеет размер $N \times N = 50 \times 50$. Силы межслойной связи определяются коэффициентами в матрице:

$$\gamma^{pl} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{12} & 0 \\ \gamma^{21} & 0 & \gamma^{23} \\ 0 & \gamma^{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Переменные и параметры для отдельных элементов описаны в уравнениях (2.3) и (2.4). Значения параметров фиксируются следующим образом: для удаленных слоев (первого и третьего) $\varepsilon^{1,3} = 2.1$ и $\omega = 2.0$, а для среднего (второго) слоя $\varepsilon^2 = 0.2$, $\alpha = 0.8$, и $\beta = 0.001$. Связь в каждой решетке вводится в первое уравнение системы с силой связи σ^l , $l = 1, 2, 3$. Межслойная связь Γ^{pl} является взаимной, симметричной и одинаковой для соседних решеток: $\gamma^{12} = \gamma^{21} = \gamma^{32} = \gamma^{23} = \gamma$. Фазовые портреты и временные реализации колебаний отдельных элементов, приведенные на рисунке 3.28, показывают, что колебания в гетерогенной сети отличаются друг от друга как по форме, так и по частоте. Начальные условия для всех динамических переменных случайно и равномерно распределены в интервале $[-1, 1]$. Значения сил внутрислойных связей фиксируются одинаковыми для удаленных слоев $\sigma^1 = \sigma^3 = 0.65$, для среднего слоя – $\sigma^2 = 0.08$. Параметры нелокальности P^l ($l = 1, 2, 3$) и силы межслойных связей γ варьируются. Модель (3.14) интегрируется методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом $dt = 0.005$ во времени. Время, после которого структуры считаются установившимися, составляет $T_{\text{пер}} = 10000$ безразмерных единиц времени.

В отсутствие межслойной связи в удаленных решетках выбираются режимы концентрических волн, примеры которых приведены на рисунках 3.29,а-в, а для средней решетки – один из режимов спиральных волн, показанных на рисунках 3.29,г-е. Формирование различных режимов и особенности их динамики в отдельных решетках подробно исследованы во второй главе. Значение силы внутрислойной связи второй решетки $\sigma^2 = 0.08$ гораздо меньше значений

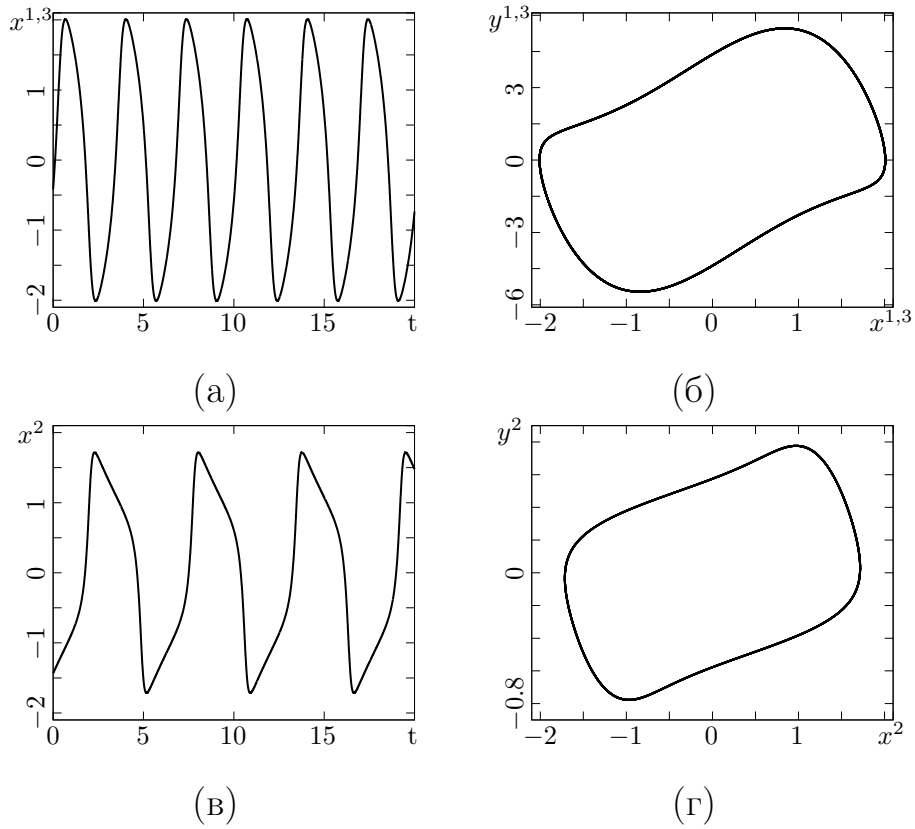


Рисунок 3.28. Временные реализации (а,в) и фазовые портреты (б,г) для отдельного генератора ван дер Поля при $\varepsilon^{1,3} = 2.1$ и $\omega = 2.0$ (а,б) и осциллятора ФитцХью-Нагумо при $\varepsilon^2 = 0.2$, $\alpha = 0.8$, и $\beta = 0.001$ (в,г).

сил связей внутри удаленных ансамблей, что может способствовать успешной передаче динамических структур между удаленными слоями.

Для обнаружения и количественной оценки эффекта синхронизации между слоями сети (3.14) вычисляются значения коэффициента взаимной корреляции для связанных ансамблей по формуле (3.9). С помощью рассчитанных распределений значений $R_{i,j}^{l,p}$ ($l, p = 1, 2, 3$) возможно определить наличие удаленной синхронизации при $R_{i,j}^{1,3} \rightarrow 1$, $R_{i,j}^{1,2} \ll 1$, $R_{i,j}^{2,3} \ll 1$, и синхронизации всех слоев при $R_{i,j}^{1,2} \rightarrow 1$, $R_{i,j}^{2,3} \rightarrow 1$, $R_{i,j}^{1,3} \rightarrow 1$. Кроме того, распределения коэффициентов корреляции позволяют диагностировать синфазную и противофазную синхронизации волновых структур в случае периодических колебаний элементов ансамблей. В случае синфазной синхронизации $R_{i,j}^{l,p} \rightarrow +1$, а в случае противофазной $R_{i,j}^{l,p} \rightarrow -1$. Важно отметить, что наблюдаемая в этой системе синхро-

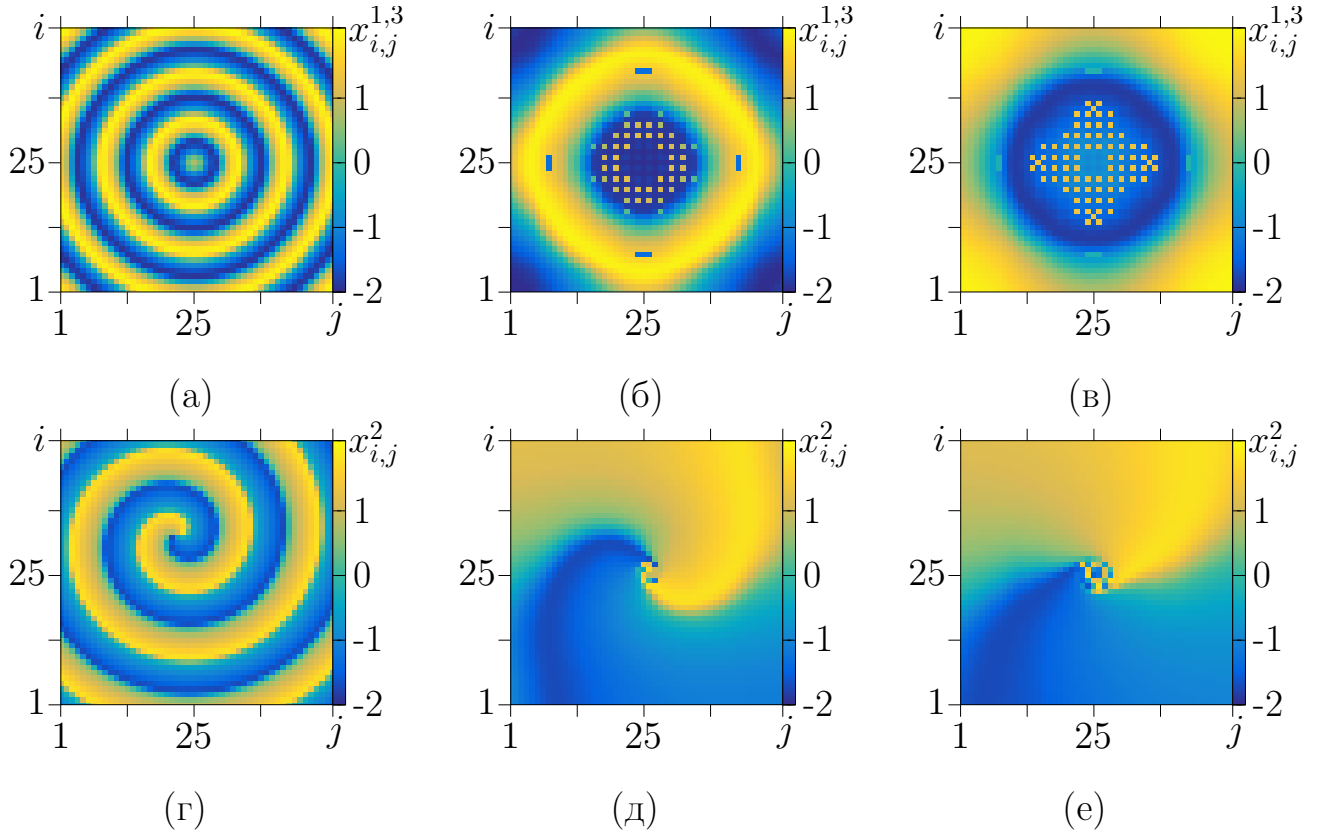


Рисунок 3.29. Мгновенные пространственные профили амплитуд $x_{i,j}^{1,3}$ (а-в) и $x_{i,j}^2$ (г-е) для $P^{1,3} = 1$ (а) $P^{1,3} = 4$ (б) $P^{1,3} = 7$ (в), $P^2 = 1$ (г), $P^2 = 6$ (д), $P^2 = 12$ (е) при $\gamma = 0$, $\sigma^{1,3} = 0.65$, $\sigma^2 = 0.08$, $\varepsilon^{1,3} = 2.1$, $\omega = 2$, $\varepsilon^2 = 0.2$, $\alpha = 0.8$, и $\beta = 0.001$.

низация является эффективной и коэффициенты корреляции не могут строго принимать наибольшие по модулю значения, поскольку удаленные и средний ансамбли отличаются друг от друга, составляя гетерогенную сеть. Поэтому для синфазной и противофазной синхронизации устанавливаются пороговые значения $R_{i,j}^{l,p} \geq R_{\Pi}^{\text{син}} = 0.95$ и $R_{i,j}^{l,p} \leq R_{\Pi}^{\text{пр}} = -0.95$, соответственно.

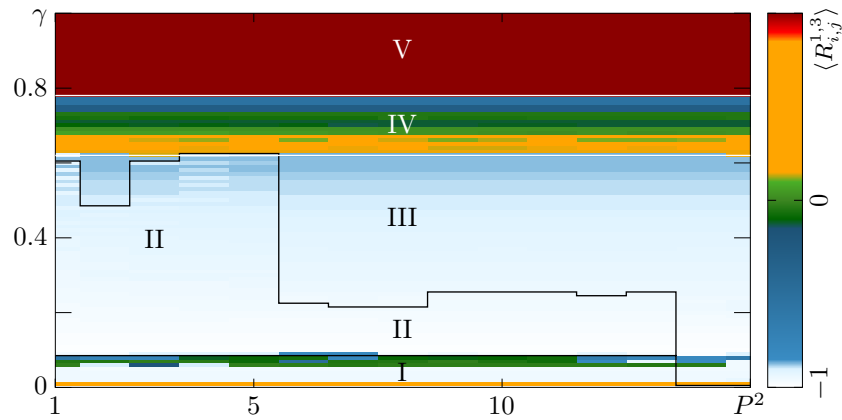
Влияние степени нелокальности связи в среднем слое на эффект синхронизации. Для исследования эффекта межслойной синхронизации после выбора начальных структур из приведенных на рисунке 3.29 в систему (3.14) вводится положительная межслойная связь γ . Расчеты для случая концентрических волновых химер при $P^1 = 4$, $P^3 = 7$ (рисунок 3.29,б,в) показали возможность их удаленной синхронизации через ансамбль осцилляторов ФитцХью-

Нагумо, в котором реализуются спиральные волны и спирально-волновые химеры при изменении $P^2 \in [1, 15]$. Явление синхронизации исследовалось при вариации силы межслойной связи в интервале $\gamma \in [0, 1]$ с шагом по параметру $\Delta\gamma = 0.01$ с помощью усредненных по пространству (i, j) значений $R_{i,j}^{1,3}$, $R_{i,j}^{2,3}$, $R_{i,j}^{1,2}$.

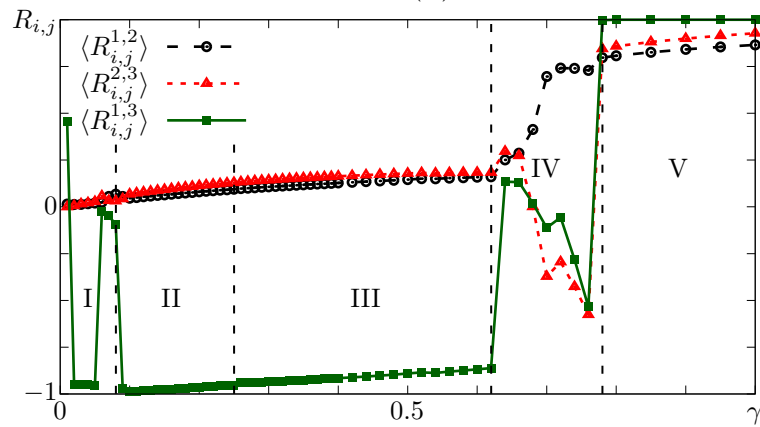
На рисунке 3.30,а приведена двумерная диаграмма средних по пространству i, j значений корреляций в зависимости от величины параметра диапазона связи во второй решетке и от силы межслойной связи. Для более детального рассмотрения взаимного поведения всех решеток на рисунке 3.30,б приводятся зависимости средних значений корреляций от величины γ для связанных ($\langle R_{i,j}^{2,3} \rangle$ и $\langle R_{i,j}^{1,2} \rangle$) и для удаленных ($\langle R_{i,j}^{1,3} \rangle$) решеток. На рисунке 3.31 представлены графики зависимости значений $\langle R_{26,26}^{1,3} \rangle$ для выбранных осцилляторов от времени усреднения показывает для трех различных значений γ . Как следует из рисунка, при $T_{\text{уср}} \sim 800$ значения коэффициента корреляции можно считать установившимися, то есть после установления структур не требуется очень большое время интегрирования для вычисления статистических характеристик.

При достаточно слабой межслойной связи $\gamma \leq 0.01$ все слои практически не взаимодействуют друг с другом и не изменяют своей динамики, все средние значения корреляций по модулю заметно меньше единицы. Когда значение γ слегка увеличивается, удаленные решетки резко синхронизируются при любых рассматриваемых значениях P^2 (рисунок 3.30,а). При этом, как можно судить по близким к минус единице значениям коэффициента корреляции на зависимости на рисунке 3.30,б, наблюдается эффект противофазной удаленной синхронизации, обнаруженный для автоволновых структур впервые. Противофазная удаленная синхронизация наблюдается при дальнейшем увеличении силы связи до $\gamma \approx 0.05$ (область I на рисунке 3.30). В области I каждый слой демонстрирует изначально заданное поведение: в удаленных слоях синхронизируются концентрические химерные состояния, тогда как в среднем слое продолжает существовать

спирально-волновая химера. Отсутствие синхронизации между соседними слоями подтверждается близкими к нулю значениями $\langle R_{i,j}^{2,3} \rangle$ и $\langle R_{i,j}^{1,2} \rangle$.



(a)



(б)

Рисунок 3.30. Диаграмма режимов на плоскости параметров (P^2, γ) (а) и зависимости средних по пространству (i, j) значений $\langle R_{i,j}^{l,p} \rangle$ от γ при $P^2 = 10$ для $R_{i,j}^{1,2}$ (черная кривая), $R_{i,j}^{2,3}$ (красная кривая) и $R_{i,j}^{1,3}$ (зеленая кривая) (б). В

области I наблюдается удаленная синхронизация с сохранением начальных

типов волн, в области II концентрические волны в удаленных слоях

разрушаются, в области III наблюдается удаленная синхронизация новых

структур, область IV соответствует второму окну десинхронизации, а в

области V наблюдается эффективная синхронизация всех слоев сети.

Параметры: $P^1 = P^3 = 6$, $\sigma^{1,3} = 0.65$, $\sigma^2 = 0.08$, $\varepsilon^{1,3} = 2.1$, $\omega = 2$, $\alpha = 0.8$,

$$\beta = 0.001, \varepsilon^2 = 0.2.$$

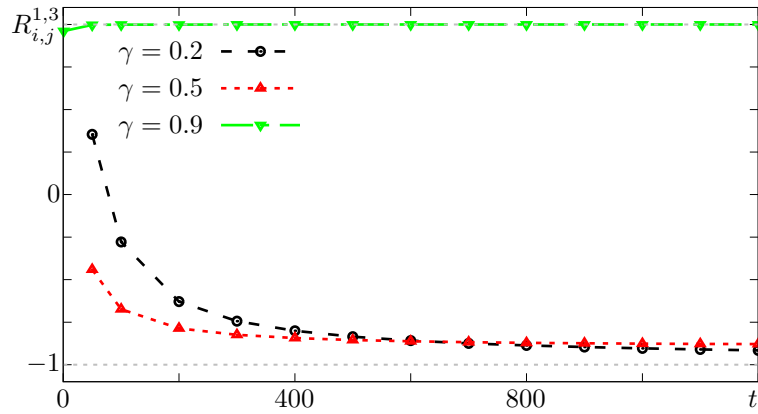


Рисунок 3.31. Зависимости величины $R_{26,26}^{1,3}$ от времени усреднения $T_{\text{уср}}$ для режимов в области II при $\gamma = 0.2$ (черная кривая), в области III при $\gamma = 0.5$ (красная кривая) и в области V при $\gamma = 0.9$ (зеленая кривая). Названия областей и значения параметров системы соответствуют рисунку 3.30.

Дальнейшее увеличение межслойной связи ($0.05 < \gamma < 0.08$) ведет к качественным изменениям в поведении ансамблей, некогерентные кластеры концентрических структур изменяют свою форму и положение. Поведение удаленных слоев отражается на амплитудах осцилляторов в среднем слое, но все средние значения корреляций близки к нулю. Такое окно десинхронизации существует для всех рассматриваемых значений P^2 (рисунок 3.30).

Далее, при $\gamma \geq 0.08$ (область II на рисунке 3.30) осцилляторы в удаленных ансамблях синхронизируются в противофазе снова ($\langle R_{i,j}^{1,3} \rangle \rightarrow -1$), но начальные структуры в этих слоях разрушаются. При этом, спиральные волны в средней решетке сохраняются. Переход от области II к области III при $\gamma = 0.25$ (рисунок 3.30,б) сопровождается разрушением начальных структур во всех трех слоях, но эффект противофазной удаленной синхронизации сохраняется. В интервале $\gamma \in [0.62; 0.78]$ (область IV на рисунке 3.30,б), межслойная синхронизация отсутствует. В этом окне десинхронизации во всех ансамблях наблюдается сложная пространственно-временная динамика, заметно отличающаяся от заданной при $\gamma = 0$. С ростом силы связи в области IV при $\gamma > 0.62$ средние значения корреляций постепенно увеличиваются, пока при достаточно больших

значениях $\gamma > 0.78$ (область V на рисунке 3.30,б) не наступает эффективная синхронизация всех элементов трехслойной сети.

Отличительные особенности поведения трехслойной сети в режиме противофазной удаленной синхронизации. Поведение трехслойной сети в случае противофазной удаленной синхронизации при $P^2 = 10$ и $\gamma = 0.03$ иллюстрируется на рисунке 3.32. Мгновенные пространственные профили амплитуд (рисунки 3.32,а-в) демонстрируют, что все начальные структуры в решетках качественно сохранились, в то время как соответствующие осцилля-

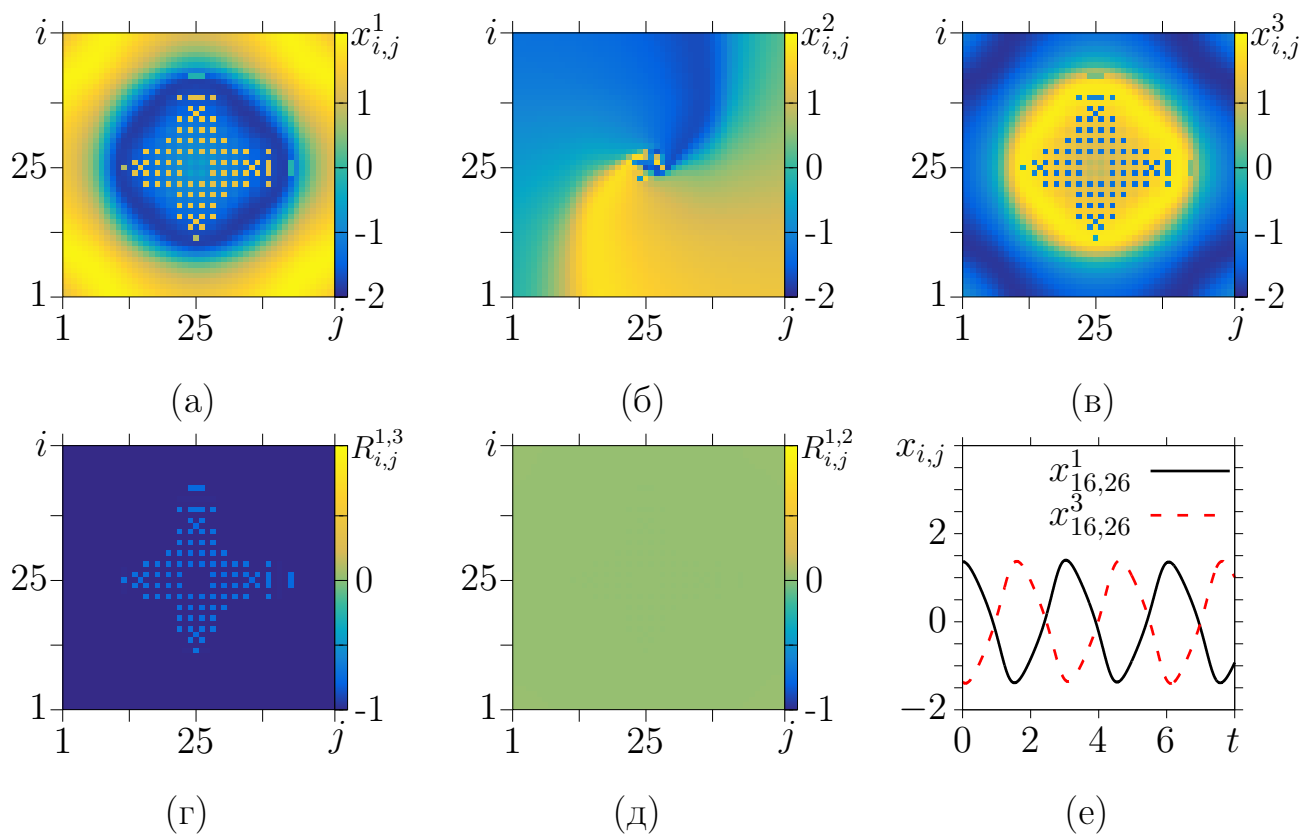


Рисунок 3.32. Поведение трехслойной сети (3.14) в области I (рисунок 3.30) при $P^2 = 10$ и $\gamma = 0.03$. Мгновенные пространственные профили для переменных $x_{i,j}^1$ (а), $x_{i,j}^2$ (б) и $x_{i,j}^3$ (в); распределения значений $R_{i,j}^{1,3}$ (г) и $R_{i,j}^{1,2}$ (д), и временные реализации (е) колебаний осцилляторов с номерами $i = 16$ и $j = 26$ в первой (черная сплошная линия) и третьей (красная пунктирная линия) решетках. Остальные значения параметров системы соответствуют рисунку 3.30.

торы характеризуются противоположными по знаку амплитудами колебаний (рисунки 3.32,а,в). Колебания осцилляторов первой со второй решеток, также как и второй с третьей не синхронизируются и распределения значений коэффициента корреляции для них близко к нулю (пример для $R_{i,j}^{1,2}$ приведен на рисунке 3.32,д). При этом, как следует из распределения значений $R_{i,j}^{1,3}$ (рисунок 3.32,г), колебания осцилляторов основных (когерентных) областей волнового режима удаленных слоев характеризуются значениями $R_{i,j}^{1,3} \sim -1$, которые соответствуют противофазной синхронизации. Временные реализации колебаний осцилляторов из когерентных кластеров удаленных слоев, приведенные на рисунке 3.32,е, также демонстрируют, что колебания соответствующих осцилляторов противофазны. Однако значения коэффициента корреляции $R_{i,j}^{1,3} > -1$ для колебаний осцилляторов, составляющих ядро некогерентности в связанных решетках. Скорее всего, это связано с сильным различием в динамике отдельных некогерентных элементов концентрической химеры. Тем не менее, частичная противофазная удаленная синхронизация подтверждается средним значением $\langle R_{i,j}^{1,3} \rangle \approx -0.95 < 0.9$.

При увеличении силы связи, в области II на рисунке 3.30 концентрические химерные состояния в удаленных слоях претерпевают значительные изменения. Как видно из мгновенных пространственных профилей амплитуд $x_{i,j}^1$ и $x_{i,j}^3$ (рисунки 3.33,а,б) удаленных слоев, волновой профиль практически исчезает, и остается только несколько уединенных состояний в обеих решетках. Колебания осцилляторов в режиме уединенного состояния противофазны колебаниям осцилляторов из когерентной области. Кроме того, количество уединенных состояний для первого и третьего ансамблей различается.

Пространственное распределение значений $R_{i,j}^{1,3}$, приведенное на рисунке 3.33,в, отражает наличие противофазной синхронизации для всех колебаний осцилляторов в когерентных областях первой и третьей решеток. В то же время для уединенных состояний первой и третьей решеток $R_{i,j}^{1,3} \approx -0.7$, что означает отсутствие синхронизации между ними. Особое поведение замечено у уединен-

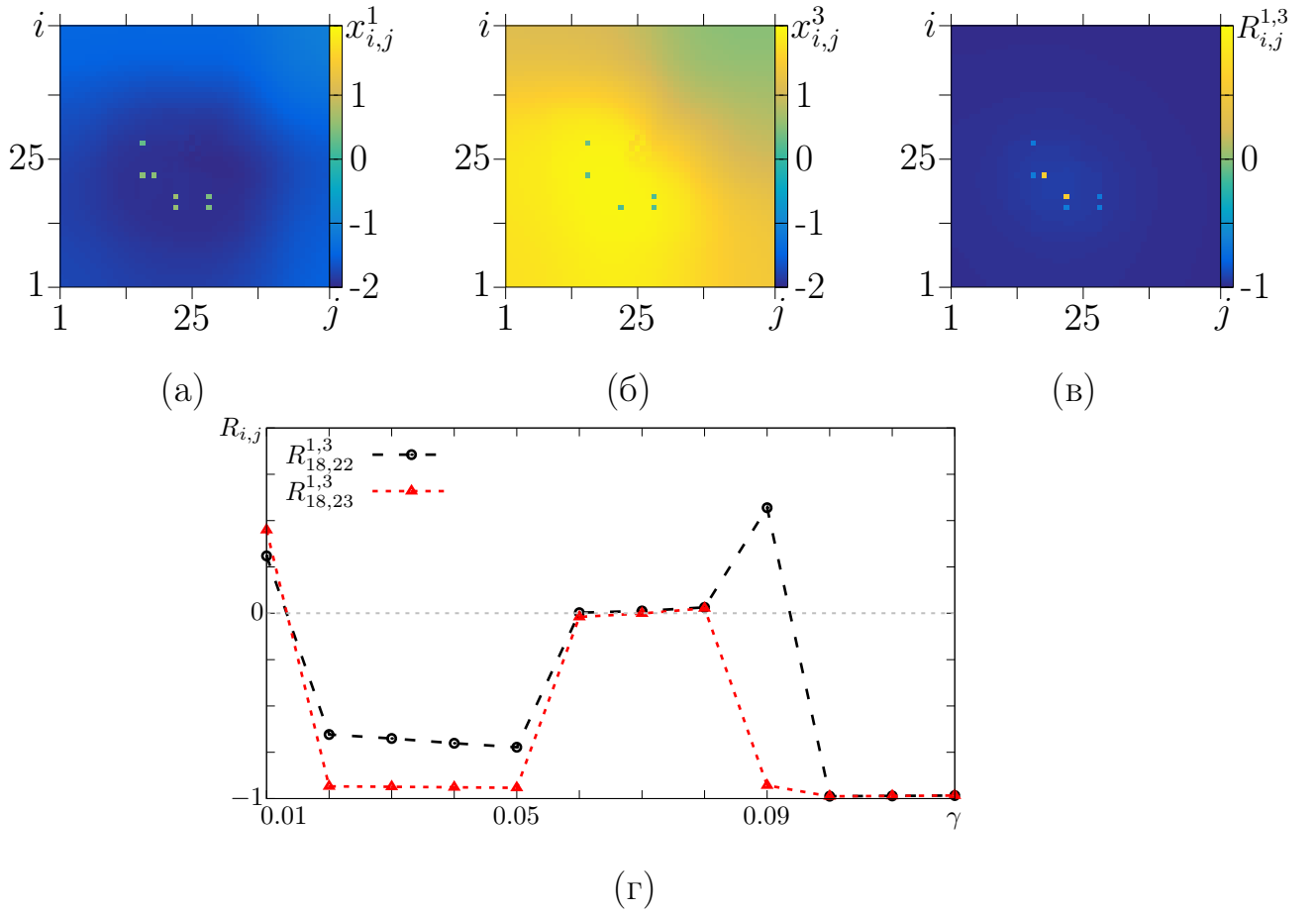


Рисунок 3.33. Поведение трехслойной сети (3.14) в области II (рисунок 3.30) при $P^2 = 10$ и $\gamma = 0.09$. Мгновенные пространственные профили для переменных $x_{i,j}^1$ (а) и $x_{i,j}^3$ (б), распределения значений $R_{i,j}^{1,3}$ (в) и зависимости $R_{i,j}^{1,3}$ от силы связи γ (г) для осцилляторов с номерами $i = 18, j = 22$ (черная пунктирная линия) и с номерами $i = 18, j = 23$ (красная пунктирная линия).

Остальные значения параметров соответствуют рисунку 3.30.

ных осцилляторов первой решетки, для которых нет соответствующих уединенных состояний в третьем ансамбле. Их мгновенные фазы близки к мгновенным фазам соответствующих осцилляторов в третьей решетке и для них $R_{i,j}^{1,3} \approx 0.8$ (рисунок 3.33,в). Этот эффект иллюстрируется зависимостями $R_{i,j}^{1,3}(\gamma)$ для такого уединенного состояния ($i = 18, j = 22$) и для соседнего ему когерентного осциллятора ($i = 18, j = 23$) на рисунке 3.33,г. При $\gamma = 0.09$ корреляция для элемента, соответствующего уединенному состоянию, с соответствующими колебаниями в третьей решетке довольно высока, но при дальнейшем увеличении

силы межслойной связи резко уменьшается и равенство $R_{i,j}^{1,3} = -1$ выполняется для всех пар осцилляторов.

При дальнейшем увеличении γ в области II при $\gamma \approx 0.2$ (рисунок 3.30) концентрические структуры во внешних слоях полностью разрушаются (рисунки 3.34,а,в), в то время как спирально-волновая химера все еще существует в среднем слое (рисунок 3.34,б). Более того, по мгновенным профилям видно, что пространственно-временная структура среднего слоя отражается в крайние решетки. Несмотря на это, поведение удаленных ансамблей отлично от среднего слоя, и наблюдается эффект удаленной синхронизации, поскольку мера $\langle R_{i,j}^{1,3} \rangle \approx -0.95$.

В области III (рисунок 3.30) все начальные структуры полностью разрушаются, и эффективная противофазная синхронизация наблюдается для различных сложных пространственно-временных структур. В области V (рисунок 3.30) при достаточно больших значениях $\gamma > 0.78$ реализуется полная эффективная синхронизация всех ансамблей исследуемой трехслойной сети. При этом, все осцилляторы внутри всех трех решеток тоже синхронизируются друг с другом.

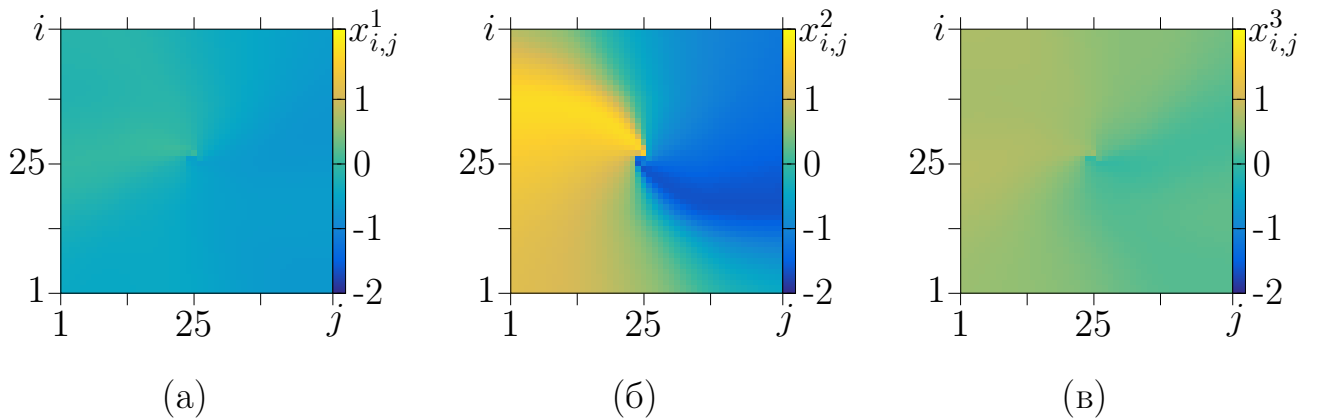


Рисунок 3.34. Мгновенные пространственные профили для переменных $x_{i,j}^1$ (а), $x_{i,j}^2$ (б) и $x_{i,j}^3$ (в) для случая $P^2 = 10$ и $\gamma = 0.2$, соответствующего области

II на рисунке 3.30. Остальные значения параметров соответствуют

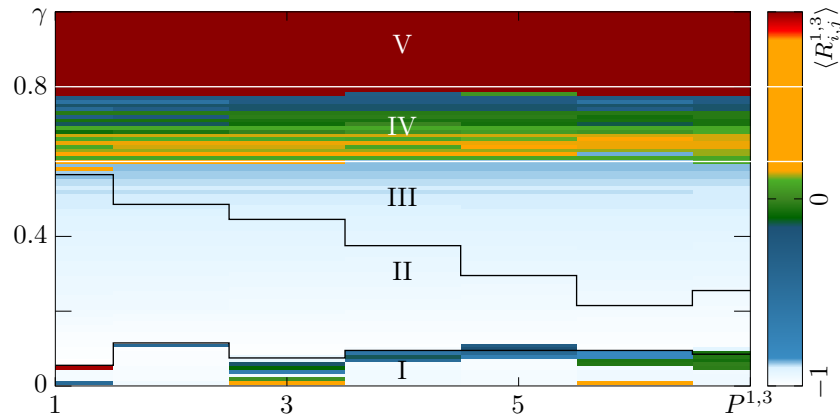
рисунку 3.30.

Влияние нелокальности связи в удаленных слоях на эффект синхронизации. Рассмотрим влияние параметров нелокальности связей во внешних ансамблях на достижение синхронизации между слоями. Параметр нелокальности в среднем слое фиксируется так, что в нем устанавливается спирально-волновая химера при $P^2 = 7$, а параметры нелокальности для внешних слоев полагаются одинаковыми ($P^1 = P^3$) и изменяются в диапазоне от 1 до 7, в котором наблюдаются концентрические структуры для отдельной решетки генераторов ван дер Поля.

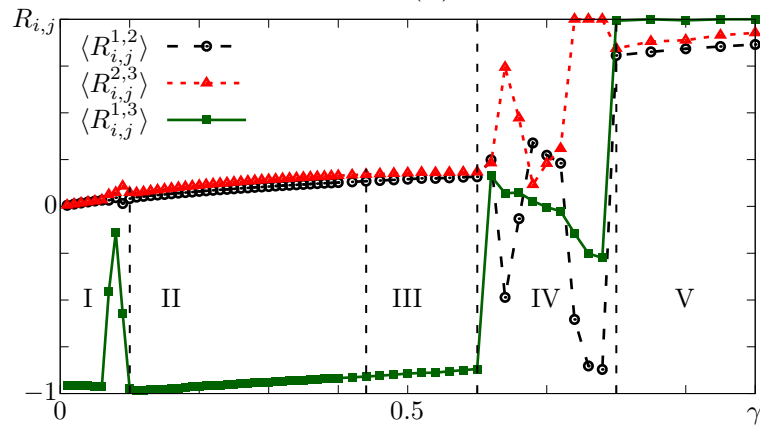
Двумерная диаграмма режимов синхронизации и десинхронизации в удаленных слоях изображена на рисунке 3.35,а на плоскости параметров $(P^{1,3}, \gamma)$ при $P^2 = 7$. На рисунке 3.35,б случай $P^{1,3} = 4$ рассматривается более детально с помощью распределений $R_{i,j}^{1,2}$, $R_{i,j}^{2,3}$ и $R_{i,j}^{1,3}$. Анализ значений коэффициентов корреляций $\langle R_{i,j}^{l,p} \rangle$ и мгновенных пространственных профилей позволяет выделить на диаграмме области, отвечающие разным типам совместного поведения связанных ансамблей. Удаленная противафазная синхронизация между первым и третьим слоем реализуется, начиная с очень малых значений $\gamma \geq 0.01$ (область I на рисунке 3.35). Однако, этот тип синхронизации наблюдается не для всех рассматриваемых значений параметров нелокальности $P^{1,3}$. Первое окно десинхронизации наблюдается для всех $P^{1,3} \in [4, 7]$ примерно при тех же значениях параметра γ , как и в предыдущем случае (рисунки 3.30 и 3.35). Остальные эффекты синхронизации и наблюдаемые режимы также во многом аналогичны случаю, описанному выше (рисунок 3.30), поэтому здесь рассматриваются только отличающиеся от предыдущего случая особенности.

Область II на диаграмме на рисунке 3.35 является наиболее широкой по параметру γ в случае локальной внутрислойной связи во внешних решетках ($P^{1,3} = 1$) и постепенно уменьшается с увеличением значений $P^{1,3}$. Область III, которая характеризуется возникновением новых пространственно-временных структур во всех ансамблях, почти отсутствует в случае локальной связи и увеличивается с ростом параметра нелокальности в удаленных слоях. Окно де-

синхронизации на диаграмме на рисунке 3.35 не изменяется по сравнению с предыдущим случаем. При этом область десинхронизации характеризуется разнообразными режимами, отличными от начальных состояний ансамблей: воз-



(a)



(б)

Рисунок 3.35. Диаграмма режимов на плоскости параметров $(P^{1,3}, \gamma)$ при $P^2 = 7$ (а) и зависимости средних по пространству (i, j) значений $\langle R_{i,j}^p \rangle$ от γ при $P^{1,3} = 4$ для $\langle R_{i,j}^{1,2} \rangle$ (черная кривая), $\langle R_{i,j}^{2,3} \rangle$ (красная кривая) и $\langle R_{i,j}^{1,3} \rangle$ (зеленая кривая) (б). В области I наблюдается удаленная синхронизация с сохранением начальных типов волн, в области II концентрические волны в удаленных слоях разрушаются, в области III наблюдается удаленная синхронизация новых структур, область IV соответствует второму окну десинхронизации, а в области V наблюдается эффективная синхронизация всех слоев сети. Параметры: $\sigma^{1,3} = 0.65$, $\sigma^2 = 0.08$, $\varepsilon^{1,3} = 2.1$, $\omega = 2$, $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.001$, $\varepsilon^2 = 0.2$.

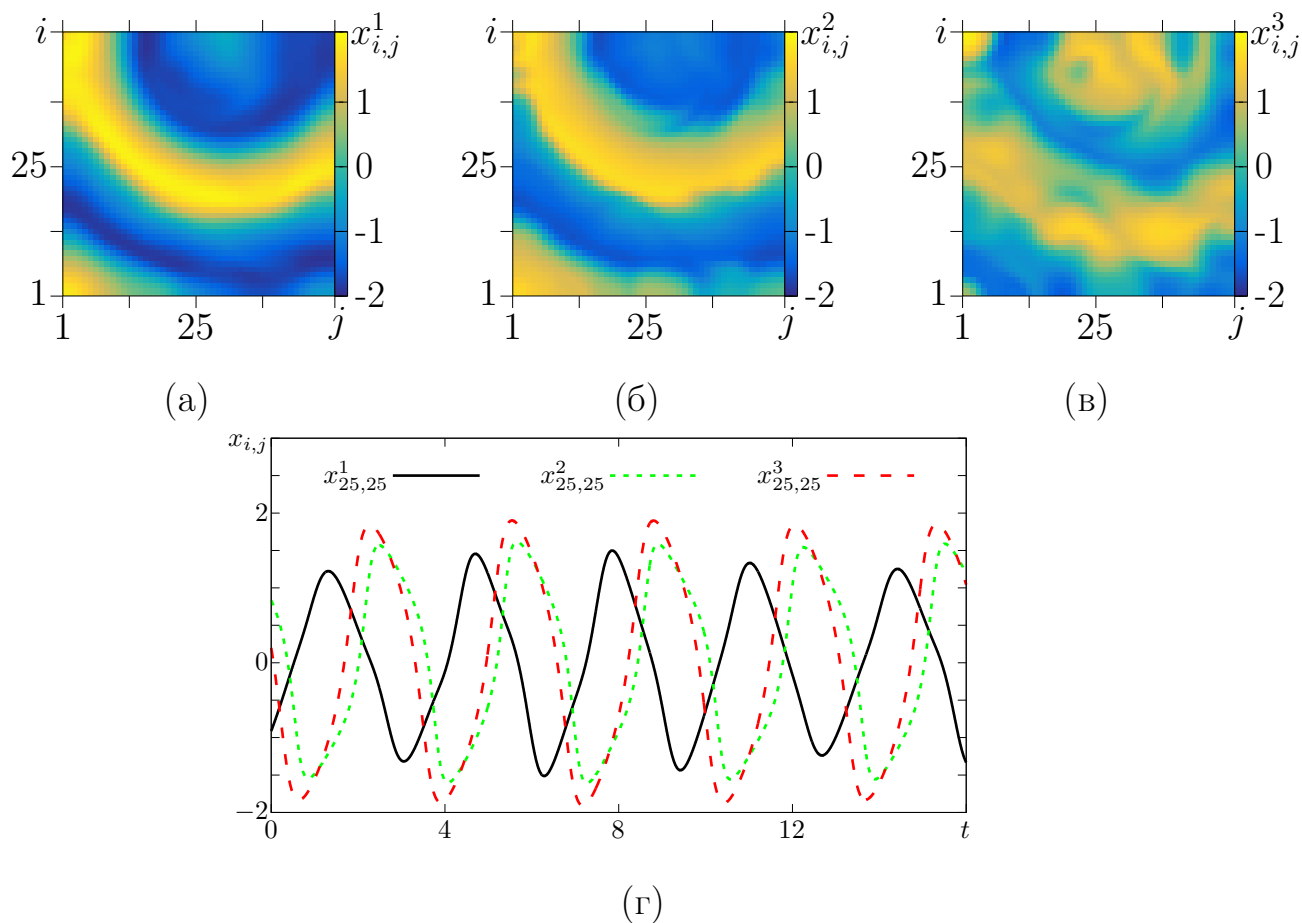


Рисунок 3.36. Поведение трехслойной сети (3.14) в области IV (рисунок 3.35) при $P^{1,3} = 2$, $P^2 = 7$ и $\gamma = 0.68$. Мгновенные пространственные профили для переменных $x_{i,j}^1$ (а), $x_{i,j}^2$ (б) и $x_{i,j}^3$ (в) и временные реализации для осцилляторов с номерами $i = 25$, $j = 25$ (г) в первой (черная сплошная линия), второй (зеленая пунктирная линия) и третьей (красная пунктирная линия) решетках. Остальные значения параметров соответствуют рисунку 3.35.

можны, например, режимы частичной синхронизации, рождение стоячих и бегущих волн, появление химероподобных состояний. На рисунке 3.36 приведены характеристики одного из режимов в области D при $\gamma = 0.68$, при котором во всех трех слоях наблюдаются концентрические волны, хотя отдельные элементы разных решеток не синхронизируются. Это демонстрируют временные реализации, приведенные на рисунке 3.36,г для выбранных осцилляторов с номерами $i = 25$, $j = 25$, которые сдвинуты друг относительно друга (различаются по фазе) и имеют разную форму колебаний. При $0.73 < \gamma < 0.8$ в области IV

(рисунок 3.35,б) может наблюдаться полная синхронизация между вторым и третьим ансамблями и эффективная синхронизация первого со вторым, при отсутствии удаленной синхронизации. Поведение трехслойной сети (3.14) в области V при $\gamma > 0.8$ аналогично поведению в описанном выше случае.

Кроме того, были проведены численные исследования для случая, когда параметр внутрислойной связи изменяется только в третьей решетке и зафиксирован в первых двух. Поведение трехслойной сети в целом аналогично двум изученным выше случаям, но явления противофазной синхронизации при небольших значениях силы межслойной связи (область I) для различающихся параметров P^1 и P^3 обнаружено не было.

3.6 Выводы по третьей главе

В третьей главе диссертации представлены результаты численного исследования и анализа пространственно-временной динамики мультиплексно связанных двумерных ансамблей нелокально связанных осцилляторов различного типа (3.1). На основе полученных результатов были сделаны следующие основные выводы.

1. Проведен детальный численный анализ явления вынужденной синхронизации для двух связанных решеток генераторов ван дер Поля при двух различных типах межслойной связи и проведено сравнение полученных результатов. Установлено, что в случае связи по второй переменной во втором уравнении осцилляторов явление межслойной синхронизации наблюдается только при достаточно больших значениях силы связи. Исключением является тривиальный режим когерентной в пространстве структуры, который захватывает другую решетку при очень малых значениях силы связи. Показано, что в случае связи по первой переменной во втором уравнении

элементов решеток почти во всех случаях синхронизация наблюдается при некоторых небольших значениях силы связи, но при её дальнейшем увеличении в некотором диапазоне синхронизация нарушается. Исключением является концентрическая волна при локальной связи, которая передается в другую решетку только при достаточно большой силе связи. Окно десинхронизации, при этом, для неё отсутствует.

2. Подробно изучен механизм вынужденной синхронизации связанных решеток генераторов ван дер Поля для двух типов межслойной связи. Проанализировано влияние силы связи на эффективные значения параметров отдельных элементов и объяснены особенности возникновения синхронизации и окна десинхронизации в случае связи по первым переменным во втором уравнении генераторов.
3. Изучено явление взаимной синхронизации различных концентрических структур в двух связанных решетках генераторов ван дер Поля. Показана невозможность синхронизации концентрической волны при локальной связи с концентрическими химерными состояниями, которые заметно отличаются друг от друга длиной волны. Выявлено, что концентрические химерные состояния с разной длиной волны полностью или частично синхронизируются друг с другом даже при достаточно большой расстройке по параметру нелокальности взаимодействующих решеток генераторов ван дер Поля. При этом некогерентные элементы концентрических химер являются ведущими в эффекте взаимной синхронизации. Таким образом, можно утверждать, что взаимная синхронизация концентрических химерных состояний происходит через синхронизацию её некогерентных осцилляторов.
4. Проведено численное исследование явления вынужденной синхронизации спиральных волн и химерных состояний в двухслойной мультиплексной се-

ти связанных отображений Курбажа-Некоркина. Показано, что при некотором небольшом значении силы межслойной связи, по сравнению со значением силы внутрислойной связи, происходит частичная синхронизация колебаний элементов решеток. Установлено, что полная синхронизация спирально-волновых структур, реализующихся при различных значениях параметра нелокальности, недостижима даже при достаточно больших значениях силы межслойной связи. Несинхронными всегда остаются ведущие центры или некогерентные ядра спирально-волновых структур, при этом ведущими в процессе синхронизации являются осцилляторы, принадлежащие когерентным кластерам волновой структуры.

5. Обнаружено и исследовано явление частичной взаимной синхронизации разнообразных спиральных структур в модели двух связанных двумерных ансамблей отображений Курбажа-Некоркина, при котором синхронизованные структуры отличаются от начальных структур в обеих решетках. Показано, что усложнение структур приводит к уменьшению числа пар осцилляторов, колебания которых синхронизируются, и к увеличению порогового значения синхронизации по силе межслойной связи.
6. Проведено численное моделирование динамики неоднородной трехслойной сети, в которой внешние слои представляют собой решетки нелокально связанных генераторов ван дер Поля в режиме концентрических волновых химер, а промежуточный слой задан в виде двумерного ансамбля осцилляторов ФитцХью-Нагумо в режиме спирально-волновой химеры. При этом внешние слои не связаны между собой напрямую, а взаимодействуют через средний слой, с которым каждый из удаленных слоев связан симметрично. Установлен эффект удаленной синхронизации волновых химерных структур в решетках связанных генераторов ван дер Поля через ансамбль осцилляторов ФитцХью-Нагумо.

7. В качестве статистической характеристики для обнаружения и количественной оценки эффекта удаленной синхронизации впервые использовался коэффициент взаимной корреляции соответствующих осцилляторов трехслойной сети.
8. Впервые обнаружен и описан эффект противофазной удаленной синхронизации для концентрических волновых структур, при котором в среднем слое существует спирально-волновая химера. При этом колебания осцилляторов удаленных ансамблей синхронизируются в противофазе, оставаясь асинхронными с колебаниями осцилляторов промежуточного слоя. В этом случае значения коэффициента взаимной корреляции между колебаниями осцилляторов внешних слоев практически равны -1 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей диссертационной работе решена важная научная задача в области радиофизики и нелинейной динамики, связанная с исследованием механизмов образования, эволюции и свойств волновых режимов и химерных структур на их основе в двумерных ансамблях (решетках) связанных нелинейных осцилляторов. Принципиально новыми являются результаты исследований эффектов синхронизации волновых структур в многослойных сетях связанных двумерных ансамблей.

В результате проведенных исследований были получены следующие основные результаты:

1. При исследовании перехода от когерентного режима к некогерентному в одномерном ансамбле нелокально связанных генераторов с инерционной нелинейностью при уменьшении силы нелокальной связи обнаружены новые химерные структуры на основе стоячей и бегущей волн, соответствующие по своим свойствам амплитудным химерам. Во время движения бегущей волны вдоль кольца кластер некогерентности амплитудной химеры остается стационарным.
2. Выявлены особенности динамики осцилляторов в режимах химерных состояний различного типа, реализующихся в кольце нелокально связанных генераторов Анищенко-Астахова. Показано, что мгновенные состояния осцилляторов когерентных и некогерентных кластеров в случае амплитудной химеры располагаются на одном и том же обороте двухленточного хаотического совмещенного аттрактора и различаются расположением друг относительно друга, а состояния осцилляторов некогерентного кластера

фазовой химеры распределены случайным образом на различных витках этого аттрактора.

3. Проведены детальные исследования динамики одномерных колец связанных осцилляторов различной природы при различных типах топологии связи между ними: нелокальной, отражающей и комбинации нелокальной с диагональной связью. Установлено, что топология связей может оказывать разностороннее влияние на поведение ансамблей, в частности, приводить к изменению длины волны в пространстве ансамбля, увеличивать или уменьшать количество кластеров некогерентности, влиять на характер перехода от когерентности к некогерентности.
4. Показано, что в кольцах нелокально связанных хаотических отображений амплитудные и фазовые химеры являются устойчивыми структурами по отношению к воздействию внешнего шума достаточно большой интенсивности. Дальнейшее увеличение интенсивности шума может приводить к индуцированным шумом переходам от фазовой химеры к амплитудной и обратно, а также к возникновению новых кластеров некогерентности химерных структур.
5. Проведены исследования эффектов синхронизации химерных структур в системе двух связанных колец логистических отображений с нелокальной внутрислойной связью в случае их идентичности и неоднородности по параметрам. Установлено, что в случае диссипативного характера межслойной связи имеет место полная вынужденная и взаимная синхронизация структур для идентичных ансамблей и эффективная (с заданной точностью) синхронизация для случая неидентичных ансамблей. Инерционный тип связи как между идентичными, так и неидентичными ансамблями препятствует достижению синхронной динамики взаимодействующих систем.

6. Проведен детальный анализ динамики решетки локально связанных генераторов ван дер Поля при изменении значений управляющих параметров индивидуальных элементов. Показано, что существуют конечные области значений управляющих параметров, в которых в решетке реализуются спиральные и концентрические волновые структуры. Установлено, что увеличение параметра возбуждения ε приводит к уменьшению длины волны наблюдаемых волновых структур, а увеличение силы нелокальной связи вызывает увеличение длины волны. Установлен эффект мультистабильности в решетке генераторов ван дер Поля, когда в зависимости от начальных условий при фиксированных значениях управляющих параметров в системе могут наблюдаться как спиральные, так и концентрические волны. Показано, что под действием внешнего шума реализуется индуцированный шумом переход от концентрической волны к спиральным волнам с различными центрами.
7. Проведено численное исследование динамики двумерного ансамбля нелокально связанных генераторов ван дер Поля. Показано, что при введении нелокальности связи в решетке происходит переход от спиральной волны к химерной структуре на её основе. Спирально-волновая химера характеризуется сосуществованием области когерентной динамики и некогерентного ядра, формирующегося в центре волны (спирали). Область некогерентности расширяется при увеличении диапазона нелокальности связи. Колебания осцилляторов из когерентной области являются периодическими, тогда как осцилляторы в некогерентном ядре демонстрируют хаотическую динамику. Показано, что режимы спиральных волн и спирально-волновых химер могут быть также реализованы в двумерных ансамблях осцилляторов различной природы при локальном и нелокальном характере связи, соответственно.

8. Обнаружена новая химерная структура на основе концентрической волны – концентрическая волновая химера – в решетке осцилляторов ван дер Поля, которая возникает при увеличении степени нелокальности связи. Все осцилляторы ансамбля демонстрируют квазипериодическую динамику, однако форма колебаний осцилляторов из некогерентной области заметно отличается от колебаний остальных элементов. На основе детального анализа установлено, что концентрическая волновая химера по своим свойствам подобна химере уединенных состояний. Осцилляторы в некогерентном ядре находятся в режиме уединенного состояния.
9. Установлено, что использование индекса локальной чувствительности элементов ансамблей нелинейных осцилляторов позволяет выявить механизм возникновения спирально-волновых химер, ядро некогерентности которых возникает в центре спиральной волны после увеличения степени неустойчивости соответствующих осцилляторов к линейному возмущению. Показано, что осцилляторы в некогерентном ядре спирально-волновой химеры проявляют наибольшую чувствительность к внешним воздействиям по сравнению с остальными элементами решетки.
10. Проведен численный и аналитический анализ явления вынужденной синхронизации двух связанных решеток генераторов ван дер Поля для различных типов межслойной связи и различных вариантов начальных волновых структур в управляющем и управляемом слоях. На основании аналитических выводов установлено, что сила межслойной связи оказывает влияние на различные характеристики колебаний отдельных элементов, что объясняет принципиальные отличия в способах достижения эффекта синхронизации. В случае связи по вторым переменным возможно только подавление колебаний, тогда как в случае связи по первым переменным возможны как захват, так и подавление частоты, поскольку связь оказывает влияние на частоту колебаний в управляемом слое.

11. Впервые установлен и исследован эффект взаимной синхронизации концентрических структур в двух связанных решетках генераторов ван дер Поля. Показано, что концентрические химерные состояния с разной длиной волны полностью или частично синхронизируются друг с другом даже при достаточно большой расстройке по параметру нелокальности взаимодействующих решеток генераторов ван дер Поля. При этом некогерентные элементы в структуре решетки в случае концентрических химер являются ведущими в эффекте взаимной синхронизации. На основании этого можно утверждать, что взаимная синхронизация концентрических химерных состояний происходит через синхронизацию её некогерентных осцилляторов. В этом эффект синхронизации концентрических волновых химер противоположен эффекту синхронизации спиральных волн и спирально-волновых химер.
12. Проведено численное исследование эффектов вынужденной и взаимной синхронизации спиральных волн и спирально-волновых химерных состояний в модели двух связанных двумерных ансамблей нелинейных осцилляторов. Установлено, что для данных типов волн характерна только частичная синхронизация структур. Полная синхронизация спирально-волновых структур, реализующихся при различных значениях параметра нелокальности, недостижима даже при достаточно больших значениях силы межслойной связи. Показано, что усложнение структур приводит к уменьшению числа пар осцилляторов, колебания которых синхронизируются, и к увеличению порогового значения синхронизации по силе межслойной связи. Несинхронными всегда остаются центры волн и некогерентные ядра спирально-волновых структур, при этом ведущими в процессе синхронизации являются осцилляторы, принадлежащие когерентным кластерам волновой структуры.

13. В результате численного моделирования динамики неоднородной трехслойной сети, в которой внешние слои не связаны между собой напрямую, а взаимодействуют через средний слой, с которым каждый из удаленных слоев связан симметрично, впервые обнаружен и описан эффект противофазной удаленной синхронизации для концентрических волновых структур, при котором в среднем слое существует спирально-волновая химера. При этом колебания осцилляторов удаленных ансамблей синхронизируются в противофазе, оставаясь асинхронными с колебаниями осцилляторов промежуточного слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белоусов, Б.П.* Периодически действующая реакция и её механизм / Б.П. Белоусов // *ИПФ АН СССР, Горький*. — 1981. — Рр. 176–186.
2. *Кринский, В.И.* Автоволновые процессы в системах с диффузией / В.И. Кринский, А.М. Жаботинский // *ИПФ АН СССР, Горький*. — 1981. — Рр. 6–32.
3. *Krinsky, V.I.* Self-Organization: Autowaves and Structures Far from Equilibrium / V.I. Krinsky. — Springer Science & Business Media, Berlin, 2012.
4. *Кринский, В.И.* Автоволны / В.И. Кринский, А.С. Михайлов. — Знание, Москва, 1984.
5. *Васильев, В.А.* Автоволновые процессы / В.А. Васильев, Ю.М. Романовский, В.Г. Яхно. — Наука, Москва, 1987.
6. *Лоскутов, А.Ю.* Введение в синергетику / А.Ю. Лоскутов, В.С. Михайлов. — Наука, Москва, 1990.
7. *Mikhailov, A.S.* Distributed Active Systems / A.S. Mikhailov. — Springer, Cham, 1990.
8. *Елькин, Ю.Е.* Автоволновые процессы / Ю.Е. Елькин // *Математическая биология и биоинформатика*. — 2006. — Vol. 1, no. 1. — Рр. 27–40.
9. *Филд, Р.* Колебания и бегущие волны в химических системах / Р. Филд, М. Бургер. — Мир, Москва, 1988.

10. *Rössler, O.E.* Chaotic Behavior in Simple Reaction Systems / O.E. Rössler // *Zeitschrift für Naturforschung A*. — 1976. — Vol. 31, no. 3-4. — Pp. 259–264.
11. *FitzHugh, R.* Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane. / R. FitzHugh // *Bulletin of Mathematical Biophysics*. — 1955. — Vol. 17. — P. 257–278.
12. *Nagumo, J.* An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon / J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // *Proceedings of the IRE*. — 1962. — Vol. 50, no. 10. — Pp. 2061–2070.
13. *Hodgkin, A.L.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve / A.L. Hodgkin, A.F. Huxley // *The Journal of Physiology*. — 1952. — Vol. 117, no. 4. — Pp. 500–544.
14. *Hindmarsh, J.L.* A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations / J.L. Hindmarsh, R.M. Rose // *Proceedings of the Royal Society of London. Series B*. — 1984. — Vol. 221, no. 1222.
15. *Beeler, G.W.* Reconstruction of the action potential of ventricular myocardial fibres / G.W. Beeler, H. Reuter // *The Journal of Physiology*. — 1977. — Vol. 268, no. 1. — Pp. 177–210.
16. The ionic currents underlying pacemaker activity in rabbit sino-atrial node: experimental results and computer simulations / H.F. Brown, J. Kimura, D. Noble, S.J. Noble, A. Taupignon // *Proceedings of the Royal Society of London. Series B*. — 1984. — Vol. 222, no. 1228. — Pp. 20–47.
17. *Fenton, Flavio.* Vortex dynamics in three-dimensional continuous myocardium with fiber rotation: Filament instability and fibrillation / Flavio Fenton, Alain Karma // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 1998. — Vol. 8, no. 1. — Pp. 20–47.

18. Нелинейные динамические модели нейронов: обзор / А.С. Дмитричев, Д.В. Касаткин, В.В. Клинышов, С.Ю. Кириллов, О.В. Масленников, Д.С. Щапин, Некоркин В.И. // *Известия вузов. ПНД*. — 2018. — Vol. 26, no. 4. — Pp. 5–58.
19. *May, R.M.* Chaos and the dynamics of biological populations / R.M. May // *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*. — 1987. — Vol. 2. — Pp. 225–245.
20. Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems: tutorial and modern developments / V.S. Anishchenko, V. Astakhov, A. Neiman, T. Vadivasova, L. Schimansky-Geier. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2007.
21. *Rulkov, Nikolai F.* Regularization of Synchronized Chaotic Bursts / Nikolai F. Rulkov // *Physical Review Letters*. — 2001. — Vol. 86, no. 1. — Pp. 183–186.
22. *Rulkov, Nikolai F.* Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map / Nikolai F. Rulkov // *Physical Review E*. — 2002. — Vol. 65, no. 4. — P. 041922.
23. *Izhikevich, E.M.* Neural excitability, spiking and bursting / E.M. Izhikevich // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2000. — Vol. 10, no. 6. — Pp. 1171–1266.
24. *Courbage, M.* Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity / M. Courbage, V.I. Nekorkin, L.V. Vdovin // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2007. — Vol. 17, no. 4. — P. 043109.
25. Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks / V.S. Afraimovich, V.I. Nekorkin, G.V. Osipov, V.D. Shalfeev. — World Scientific, Singapore, 1995.

26. *Nekorkin, V.I.* Spatial Chaos in a Chain of Coupled Bistable Oscillators / V.I. Nekorkin, V.A. Makarov // *Physical Review Letters*. — 1995. — Vol. 74, no. 24. — Pp. 4819–4822.
27. *Nekorkin, V.I.* Mutual synchronization of two lattices of bistable elements / V.I. Nekorkin, V.B. Kazantsev, M.G. Velarde // *Physics Letters A*. — 1997. — Vol. 236, no. 5. — Pp. 505–512.
28. *Nekorkin, V.* Clusters in an assembly of globally coupled bistable oscillators / V. Nekorkin, M. Voronin, M. Velarde // *Eur. Phys. J. B*. — 1999. — Vol. 9, no. 3. — P. 533–543.
29. *Belykh, V.N.* Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems / V.N. Belykh, I.V. Belykh, M. Hasler // *Phys Rev E*. — 2000. — Vol. 62, no. 5. — P. 6332.
30. *Pikovsky, A.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences / A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. — Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
31. *Belykh, V.N.* Cluster synchronization modes in an ensemble of coupled chaotic oscillators / V.N. Belykh, I.V. Belykh, E. Mosekilde // *Phys Rev E*. — 2001. — Vol. 63, no. 3. — P. 036216.
32. *Nekorkin, Vladimir.* Synergetic Phenomena in Active Lattices: Patterns, Waves, Solitons, Chaos / Vladimir Nekorkin, M. G. Velarde. — Springer, Berlin, 2002.
33. Frequency synchronization of clusters in coupled extended systems / A. Akopov, V. Astakhov, T. Vadivasova, A. Shabunin, T. Kapitaniak // *Physics Letters A*. — 2005. — Vol. 334, no. 2-3. — Pp. 169–172.

34. Phase synchronization of a pair of spiral waves / Meng Zhan, Xingang Wang, Xiaofeng Gong, C.-H. Lai // *Physical Review E*. — 2005. — Vol. 71, no. 3. — P. 036212.
35. *Bukh, A.V.* Synchronization of spiral wave patterns in two-layer 2D lattices of nonlocally coupled discrete oscillators / A.V. Bukh, E. Schöll, V.S. Anishchenko // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, no. 5. — P. 053105.
36. *Osipov, G.V.* Synchronization in Oscillatory Networks / G.V. Osipov, J. Kurths, C. Zhou. — Springer, Berlin, 2007.
37. Cluster synchronization and isolated desynchronization in complex networks with symmetries / L.M. Pecora, F. Sorrentino, A.M. Hagerstrom, T.E. Murphy, R. Roy // *Nature Communications*. — 2014. — Vol. 5. — P. 4079.
38. *Bukh, A.V.* Synchronization of Chimera States in Coupled Networks of Nonlinear Chaotic Oscillators / A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. — 2018. — Vol. 14, no. 4. — Pp. 419–433.
39. *Bukh, A.V.* Spiral Wave Patterns in Two-Layer 2D Lattices of Nonlocally Coupled Discrete Oscillators. Synchronization of Spiral Wave Chimeras / A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика*. — 2019. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 166–177.
40. *Steinbock, O.* Electric-field-induced drift and deformation of spiral waves in an excitable medium / O. Steinbock, J. Schütze, S.C. Müller // *Physical Review Letters*. — 1992. — Vol. 68, no. 2. — Pp. 248–251.

41. *Mikhailov, A.S.* Complex dynamics of spiral waves and motion of curves / A.S. Mikhailov, V.A. Davydov, V.S. Zykov // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1994. — Vol. 70, no. 1. — Pp. 1–39.
42. *Aranson, Igor.* Controlling spatiotemporal chaos / Igor Aranson, Herbert Levine, Lev Tsimring // *Physical Review Letters*. — 1994. — Vol. 72, no. 16. — Pp. 2561–2564.
43. Controlling Spiral Waves in a Model of Two-Dimensional Arrays of Chua's Circuits / Gang Hu, Jinghua Xiao, Leon O. Chua, Ladislav Pivka // *Physical Review Letters*. — 1998. — Vol. 80, no. 9. — Pp. 1884–1887.
44. Controlling Turbulence in the Complex Ginzburg-Landau Equation / Jinghua Xiao, Gang Hu, Junzhong Yang, Jihua Gao // *Physical Review Letters*. — 1998. — Vol. 81, no. 25. — Pp. 5552–5555.
45. Stabilization, Selection, and Tracking of Unstable Patterns by Weak Spatial Perturbations / Peng-Ye Wang, Ping Xie, Jian-Hua Dai, Hong-Jun Zhang // *Physical Review Letters*. — 1998. — Vol. 80, no. 21. — Pp. 4669–4672.
46. *Osipov, Grigory V.* Using weak impulses to suppress traveling waves in excitable media / Grigory V. Osipov, James J. Collins // *Physical Review E*. — 1999. — Vol. 60, no. 1. — Pp. 54–57.
47. *Rappel, Wouter-Jan.* Spatiotemporal Control of Wave Instabilities in Cardiac Tissue / Wouter-Jan Rappel, Flavio Fenton, Alain Karma // *Physical Review Letters*. — 1999. — Vol. 83, no. 2. — Pp. 456–459.
48. *Parmananda, P.* Controlling spatiotemporal chemical chaos using delayed feedback / P. Parmananda, J. L. Hudson // *Physical Review E*. — 2001. — Vol. 64, no. 3. — P. 037201.

49. *Sinha, Sitabhra*. Defibrillation via the Elimination of Spiral Turbulence in a Model for Ventricular Fibrillation / Sitabhra Sinha, Ashwin Pande, Rahul Pandit // *Physical Review Letters*. — 2001. — Vol. 86, no. 16. — Pp. 3678–3681.
50. Controlling Chemical Turbulence by Global Delayed Feedback: Pattern Formation in Catalytic CO Oxidation on Pt(110) / M. Kim, M. Bertram, M. Pollmann, A. von Oertzen, A. S. Mikhailov, H.H. Rotermund, G. Ertl // *Science*. — 2001. — Vol. 292, no. 5520. — Pp. 1357–1360.
51. *Zhang, H*. Suppression of spiral waves and spatiotemporal chaos by generating target waves in excitable media / H. Zhang, B Hu, G. Hu // *Physical Review E*. — 2003. — Vol. 68, no. 3. — P. 026134.
52. Structure and control of self-sustained target waves in excitable small-world networks / Yu Qian, Xiaodong Huang, Gang Hu, Xuhong Liao // *Physical Review E*. — 2010. — Vol. 81, no. 3. — P. 036101.
53. *Hagan, P.S*. Spiral Waves in Reaction-Diffusion Equations / P.S. Hagan // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1982. — Vol. 42, no. 4. — Pp. 762–786.
54. *Barkley, Dwight*. Euclidean symmetry and the dynamics of rotating spiral waves / Dwight Barkley // *Physical Review Letters*. — 1994. — Vol. 72, no. 1. — Pp. 164–167.
55. Target waves in the complex Ginzburg-Landau equation / Matthew Hendrey, Keeyeol Nam, Parvez Guzdar, Edward Ott // *Physical Review E*. — 2000. — Vol. 62, no. 6. — Pp. 7627–7631.
56. Local sensitivity of spatiotemporal structures / I.A. Shepelev, A.V. Bukh, S. Ruschel, S. Yanchuk, T.E. Vadivasova // *Nonlinear Dynamics*. — 2018. — Vol. 94, no. 2. — Pp. 1019–1027.

57. *Feudel, U.* Complex dynamics in multistable systems / U. Feudel // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2008. — Vol. 18, no. 6. — Pp. 1607–1626.
58. *Pisarchik, A.N.* Control of multistability / A.N. Pisarchik, U. Feudel // *Physics Reports*. — 2014. — Vol. 540, no. 4. — Pp. 167–218.
59. *Stankevich, N.* Multistability in a three-dimensional oscillator: tori, resonant cycles and chaos / N. Stankevich, E. Volkov // *Nonlinear Dynamics*. — 2018. — Vol. 94. — Pp. 2455–2467.
60. *Stankevich, N.* Self-Organized Quasiperiodicity and Multistability in Dynamical Systems of different Nature / N. Stankevich, E. Hellen, E. Volkov // 2019 3rd School on Dynamics of Complex Networks and their Application in Intellectual Robotics (DCNAIR). — 2019. — Pp. 169–171.
61. *Pikovsky, Arkady.* Lyapunov Exponents: A Tool to Explore Complex Dynamics / Arkady Pikovsky, Antonio Politi. — Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
62. *Toomre, Alar.* Group Velocity of Spiral Waves in Galactic Disks / Alar Toomre // *The Astrophysical Journal*. — 1969. — Vol. 158. — P. 899.
63. *Nozakura, Toshiya.* Spiral Patterns on a Differentially Rotating Galactic Disk: Self-organized Structures in Galaxies / Toshiya Nozakura, Satoru Ikeuchi // *The Astrophysical Journal*. — 1988. — Vol. 333. — P. 68.
64. Колебательные процессы в биологических и химических системах / Г.М. Франк, А.М. Жаботинский, А.М. Молчанов, Д.С. Чернавский, С.Э. Шноль. — Наука, Москва, 1967.
65. *Winfree, A.T.* Spiral Waves of Chemical Activity / A.T. Winfree // *Science*. — 1972. — Vol. 175, no. 4022. — Pp. 634–636.

66. *Keener, J.P.* Spiral waves in the Belousov-Zhabotinskii reaction / J.P. Keener, J.J. Tyson // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1986. — Vol. 21, no. 2. — Pp. 307–324.
67. *Vanag, Vladimir K.* Inwardly Rotating Spiral Waves in a Reaction-Diffusion System / Vladimir K. Vanag, Irving R. Epstein // *Science*. — 2001. — Vol. 294, no. 5543. — Pp. 835–837.
68. *Kapral, R.* Chemical Waves and Patterns / R. Kapral, K. Showalter. — Springer, Dordrecht, 1995.
69. Stationary and drifting spiral waves of excitation in isolated cardiac muscle / J.M. Davidenko, A.V. Pertsov, R. Salomonsz, W. Baxter, J. Jalife // *Nature*. — 1992. — Vol. 355. — P. 349–351.
70. Spiral waves of excitation underlie reentrant activity in isolated cardiac muscle / A.M. Pertsov, J.M. Davidenko, R. Salomonsz, W.T. Baxter, J. Jalife // *Circulation Research*. — 1993. — Vol. 72, no. 3. — Pp. 631–650.
71. Spiral Waves in Disinhibited Mammalian Neocortex / X. Huang, W.C. Troy, Q. Yang, H. Ma, C.R. Laing, S.J. Schiff, J.-Y. Wu // *Journal of Neuroscience*. — 2004. — Vol. 24, no. 44. — Pp. 9897–9902.
72. *Павлов, Е.А.* Синхронизация и хаос в сетях связанных отображений в приложении к моделированию сердечной динамики / Е.А. Павлов, Г.В. Осипов // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2011. — Vol. 3, no. 4. — Pp. 439–453.
73. *Kuramoto, Y.* Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators / Y. Kuramoto, D. Battogtokh // *Nonlinear phenomena in complex systems*. — 2002. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 380–385.

74. *Abrams, D.M.* Chimera States for Coupled Oscillators / D.M. Abrams, S.H. Strogatz // *Physical Review Letters*. — 2004. — Vol. 93, no. 17. — P. 174102.
75. Solvable Model for Chimera States of Coupled Oscillators / D.M. Abrams, R. Mirollo, S.H. Strogatz, D.A. Wiley // *Physical Review Letters*. — 2008. — Vol. 101, no. 8. — P. 084103.
76. *Tinsley, M.* Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators / M. Tinsley, S. Nkomo, K. Showalter // *Nature Physics*. — 2012. — Vol. 8. — Pp. 662–665.
77. Chimera states in mechanical oscillator networks / E.A. Martens, S. Thutupalli, A. Fourrière, O. Hallatschek // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 2013. — Vol. 110, no. 26. — Pp. 10563–10567.
78. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices / A.M. Hagerstrom, T.E. Murphy, R. Roy, P. Hövel, I. Omelchenko, E. Schöll // *Nature Physics*. — 2012. — Vol. 8, no. 9. — Pp. 658–661.
79. *Bogatenko, T.R.* Peculiarities of Synchronization in a Two-Layer Network of Chaotic Maps with Inhomogeneous Interlayer Coupling / T.R. Bogatenko, A.V. Bukh, G.I. Strelkova // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. — 2021. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 103–117.
80. *Waller, Irene.* Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators / Irene Waller, Raymond Kapral // *Phys. Rev. A*. — 1984. — Vol. 30, no. 4. — Pp. 2047–2055.
81. *Kaneko, Kunihiko.* Pattern dynamics in spatiotemporal chaos: Pattern selection, diffusion of defect and pattern competition intermittency / Kunihiko Kaneko // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1989. — Vol. 34, no. 1. — Pp. 1–41.

82. Loss of Coherence in Dynamical Networks: Spatial Chaos and Chimera States / I. Omelchenko, Y. Maistrenko, P. Hövel, E. Schöll // *Physical Review Letters*. — 2011. — Vol. 106, no. 23. — P. 234102.
83. Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems / I. Omelchenko, B. Riemenschneider, P. Hövel, Y. Maistrenko, E. Schöll // *Physical Review E*. — 2012. — Vol. 85. — P. 026212.
84. *Maistrenko, Yuri*. Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions / Yuri Maistrenko, Bogdan Penkovsky, Michael Rosenblum // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 89, no. 6. — P. 060901.
85. *Гулай, А.П.* Исследование мультистабильности и вынужденной синхронизации в неавтономной системе двух осцилляторов ван дер Поля с отталкивающим взаимодействием / А.П. Гулай, А.В. Бух // *Известия Вузов. ПНД*. — 2014. — Vol. 22, no. 6. — Pp. 94–103.
86. Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of non-locally coupled chaotic oscillators? / N. Semenova, A. Zakharova, E. Schöll, V. Anishchenko // *Europhysics Letters*. — 2015. — Vol. 112, no. 4. — P. 40002.
87. *Abrams, D.M.* Chimera states in a ring of nonlocally coupled oscillators / D.M. Abrams, S.H. Strogatz // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2006. — Vol. 16, no. 1. — Pp. 21–37.
88. *Omel'chenko, O.E.* Coherence–incoherence patterns in a ring of non-locally coupled phase oscillators / O.E. Omel'chenko // *Nonlinearity*. — 2013. — Vol. 26, no. 9. — Pp. 2469–2498.
89. When Nonlocal Coupling between Oscillators Becomes Stronger: Patched Synchrony or Multichimera States / I. Omelchenko, O.E. Omel'chenko, P. Hövel, E. Schöll // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 110, no. 22. — P. 224101.

90. *Zakharova, A.* Chimera Death: Symmetry Breaking in Dynamical Networks / A. Zakharova, M. Kapeller, E. Schöll // *Physical Review Letters*. — 2014. — Vol. 112, no. 15. — P. 154101.
91. *Panaggio, M.J.* Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators / M.J. Panaggio, D.M. Abrams // *Nonlinearity*. — 2015. — Vol. 28, no. 3. — Pp. R67–R87.
92. Correlation analysis of the coherence-incoherence transition in a ring of non-locally coupled logistic maps / Tatiana E. Vadivasova, Galina I. Strelkova, Sergey A. Bogomolov, Vadim S. Anishchenko // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2016. — Vol. 26, no. 9. — P. 093108.
93. A classification scheme for chimera states / Felix P. Kemeth, Sindre W. Haugland, Lennart Schmidt, Ioannis G. Kevrekidis, Katharina Krischer // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2016. — Vol. 26, no. 9. — P. 094815.
94. Chimera states in ensembles of bistable elements with regular and chaotic dynamics / I.A. Shepelev, A.V. Bukh, G.I. Strelkova, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko // *Nonlinear Dynamics*. — 2017. — Vol. 90, no. 4. — Pp. 2317–2330.
95. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems / S.A. Bogomolov, A.V. Slepnev, G.I. Strelkova, E. Schöll, V.S. Anishchenko // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2017. — Vol. 43. — Pp. 25–36.
96. New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction / I.A. Shepelev, T.E. Vadivasova, A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Physics Letters A*. — 2017. — Vol. 16, no. 16. — Pp. 1398–1404.

97. Temporal intermittency and the lifetime of chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators / N.I. Semenova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, A. Zakharova // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 6. — P. 061102.
98. New type of chimera and mutual synchronization of spatiotemporal structures in two coupled ensembles of nonlocally interacting chaotic maps / A.V. Bukh, E.V. Rybalova, N.I. Semenova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 11. — P. 111102.
99. Effect of switchings and the lifetime of chimeras in an ensemble of nonlocally coupled chaotic maps / G. Strelkova, E. Rybalova, V. Anishchenko, A. Zakharova // *AIP Conference Proceedings*. — 2018. — Vol. 1978, no. 1. — P. 470014.
100. *Rybalova, E.V.* Mechanism of realizing a solitary state chimera in a ring of nonlocally coupled chaotic maps / E.V. Rybalova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2018. — Vol. 115. — Pp. 300–305.
101. Imperfect chimeras in a ring of four-dimensional simplified Lorenz systems / F. Parastesh, S. Jafari, H. Azarnoush, B. Hatef, A. Bountis // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2018. — Vol. 110. — Pp. 203–208.
102. Double-well chimeras in 2D lattice of chaotic bistable elements / I.A. Shepelev, A.V. Bukh, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko, A. Zakharova // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2018. — Vol. 54. — Pp. 50–61.
103. *Semenova, N.* Mechanism of solitary state appearance in an ensemble of nonlocally coupled Lozi maps / N. Semenova, T. Vadivasova, V. Anishchenko // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* — 2018. — Vol. 227. — P. 1173–1183.

104. Stability and Noise-induced Transitions in an Ensemble of Nonlocally Coupled Chaotic Maps / A.V. Bukh, A.V. Slepnev, V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2018. — Vol. 23. — Pp. 325–338.
105. Weak multiplexing in neural networks: Switching between chimera and solitary states / M. Mikhaylenko, L. Ramlow, S. Jalan, A. Zakharova // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, no. 2. — P. 023122.
106. Бух, А.В. Автоволновые структуры в двумерных решетках нелокально связанных осцилляторов / А.В. Бух, Е.В. Рыбалова, В.С. Анищенко // *Известия вузов. ПНД*. — 2020. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 299–323.
107. Chimera states: Effects of different coupling topologies / B.K. Bera, S. Majhi, D. Ghosh, M. Perc // *Europhysics Letters*. — 2017. — Vol. 118, no. 1. — P. 10001.
108. Chimeras in leaky integrate-and-fire neural networks: effects of reflecting connectivities / N.D. Tsigkri-DeSmedt, J. Hizanidis, E. Schöll, P. Hövel, A. Provata // *The European Physical Journal B*. — 2017. — Vol. 90, no. 7. — P. 139.
109. Synchronization patterns in LIF neuron networks: merging nonlocal and diagonal connectivity / N.D. Tsigkri-DeSmedt, I. Koulterakis, G. Karakos, A. Provata // *The European Physical Journal B*. — 2018. — Vol. 91, no. 12. — P. 305.
110. Chimera-like States in Modular Neural Networks / J. Hizanidis, N.E. Kouvaris, G. Zamora-López, A. Dóaz-Guilera, C.G. Antonopoulos // *Scientific Reports*. — 2016. — Vol. 6, no. 1. — P. 19845.
111. Бух, А.В. Отражающая, нелокальная и диагональная связи в сетях связанных динамических элементов различной природы / А.В. Бух, А.С. Косенкова, В.С. Анищенко // *Известия Саратовского*

- университета. Новая серия. Серия Физика. — 2020. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 16–28.
112. *Shima, S.* Rotating spiral waves with phase-randomized core in nonlocally coupled oscillators / S. Shima, Y. Kuramoto // *Physical Review E*. — 2004. — Vol. 69. — P. 036213.
113. *Laing, C.R.* The dynamics of chimera states in heterogeneous Kuramoto networks / C.R. Laing // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2009. — Vol. 238, no. 16. — Pp. 1569–1588.
114. *Martens, E.A.* Solvable Model of Spiral Wave Chimeras / E.A. Martens, C.R. Laing, S.H. Strogatz // *Physical Review Letters*. — 2010. — Vol. 104, no. 4. — P. 044101.
115. Stationary patterns of coherence and incoherence in two-dimensional arrays of non-locally-coupled phase oscillators / O.E. Omel'chenko, M. Wolfrum, S. Yanchuk, Y.L. Maistrenko, O. Sudakov // *Physical Review E*. — 2012. — Vol. 85, no. 3. — P. 036210.
116. *Panaggio, M.J.* Chimera States on a Flat Torus / M.J. Panaggio, D.M Abrams // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 110. — P. 094102.
117. *Gu, C.* Spiral Wave Chimeras in Complex Oscillatory and Chaotic Systems / C. Gu, G. St-Yves, J. Davidsen // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 111, no. 13. — P. 134101.
118. Dynamical robustness of coupled heterogeneous oscillators / Gouhei Tanaka, Kai Morino, Hiroaki Daido, Kazuyuki Aihara // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 89, no. 5. — P. 052906.

119. *Xie, J.* Twisted chimera states and multicore spiral chimera states on a two-dimensional torus / J. Xie, E. Knobloch, H. Kao // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 92, no. 4. — P. 042921.
120. *Li, B.* Spiral wave chimeras in locally coupled oscillator systems / B. Li, H. Dierckx // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 93, no. 2. — P. 020202.
121. Chimera patterns in two-dimensional networks of coupled neurons / A. Schmidt, T. Kasimatis, J. Hizanidis, A. Provata, Hövel P. // *Physical Review E*. — 2017. — Vol. 95, no. 3. — P. 032224.
122. Diversity of chimera-like patterns from a model of 2D arrays of neurons with nonlocal coupling / C.-H. Tian, X.-Y. Zhang, Z.-H. Wang, Z.-H. Liu // *Frontiers in Physics*. — 2017. — Vol. 12. — P. 128904.
123. Spiral wave chimera states in large populations of coupled chemical oscillators / J.F. Tetz, J. Rode, M.R. Tinsley, K. Showalter, H. Engel // *Nature Physics*. — 2018. — Vol. 14. — P. 282–285.
124. Spiral wave chimera in two-dimensional nonlocally coupled Fitzhugh–Nagumo systems / S. Guo, Q. Dai, H. Cheng, H. Li, F. Xie, J. Yang // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2018. — Vol. 114. — Pp. 394–399.
125. *Omel’chenko, O.E.* Stability of Spiral Chimera States on a Torus / O.E. Omel’chenko, M. Wolfrum, E. Knobloch // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. — 2018. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 97–127.
126. *Bukh, A.V.* Spiral wave patterns in a two-dimensional lattice of nonlocally coupled maps modeling neural activity / A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2019. — Vol. 120. — Pp. 75–82.
127. *Shepelev, I.A.* Variety of spatio-temporal regimes in a 2D lattice of coupled bistable FitzHugh–Nagumo oscillators. Formation mechanisms of spiral and

- double-well chimeras / I.A. Shepelev, T.E. Vadivasova // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2019. — Vol. 79. — P. 104925.
128. *Slepnev, A.V.* Noise-induced effects in an active medium with periodic boundary conditions / A.V. Slepnev, I.A. Shepelev, T.E. Vadivasova // *Technical Physics Letters*. — 2014. — Vol. 40. — Pp. 62–64.
129. *Schöll, E.* Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics / E. Schöll // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2016. — Vol. 225. — P. 891–919.
130. Controlling Chimera Patterns in Networks: Interplay of Structure, Noise, and Delay. Control of Self-Organizing Nonlinear Systems. Understanding Complex Systems. / A. Zakharova, S.A.M. Loos, J. Siebert, A. Gjurchinovski, J.C. Claussen, E. Schöll. — Springer, Cham, 2016.
131. Chimera patterns under the impact of noise / S.A.M. Loos, J.C. Claussen, E. Schöll, A. Zakharova // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 93, no. 1. — P. 012209.
132. Coherence-Resonance Chimeras in a Network of Excitable Elements / N. Semenova, A. Zakharova, V. Anishchenko, E. Schöll // *Physical Review Letters*. — 2016. — Vol. 117, no. 1. — P. 014102.
133. The structure and dynamics of multilayer networks / S. Boccaletti, G. Bianconi, R. Criado, C.I. del Genio, J. Gómez-Gardeñes, M. Romance, I. Sendiña-Nadal, Z. Wang, M. Zanin // *Physics Reports*. — 2014. — Vol. 544, no. 1. — Pp. 1–122.
134. Multilayer networks / Mikko Kivelä, Alex Arenas, Marc Barthelemy, James P. Gleeson, Yamir Moreno, Mason A. Porter // *Journal of Complex Networks*. — 2014. — Vol. 2, no. 3. — Pp. 203–271.

135. *Lee, Kyu-Min*. Towards real-world complexity: an introduction to multiplex networks / Kyu-Min Lee, Byungjoon Min, Kwang-Il Goh // *The European Physical Journal B*. — 2015. — Vol. 88, no. 2. — P. 48.
136. The physics of spreading processes in multilayer networks / Manlio De Domenico, Clara Granell, Mason A. Porter, Alex Arenas // *Nature Physics*. — 2016. — Vol. 12, no. 10. — Pp. 901–906.
137. *Majhi, S*. Chimera states in uncoupled neurons induced by a multilayer structure / S. Majhi, M. Perc, D. Ghosh // *Scientific Reports*. — 2016. — Vol. 6. — P. 39033.
138. Excitation and suppression of chimera states by multiplexing / V.A. Maksimenko, V.V. Makarov, B.K. Bera, D. Ghosh, S.K. Dana, M.V. Goremyko, N.S. Frolov, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 94, no. 5. — P. 052205.
139. Birth and death of chimera: Interplay of delay and multiplexing / S. Ghosh, A. Kumar, A. Zakharova, S. Jalan // *Europhysics Letters*. — 2016. — Vol. 115, no. 6. — P. 60005.
140. *Andrzejak, R.G*. Generalized synchronization between chimera states / R.G. Andrzejak, G. Ruzzene, I. Malvestio // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 5. — P. 053114.
141. *Majhi, S*. Chimera states in a multilayer network of coupled and uncoupled neurons / S. Majhi, M. Perc, D. Ghosh // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 7. — P. 073109.
142. Anti-phase relay synchronization of wave structures in a heterogeneous multiplex network of 2D lattices / I.A. Shepelev, A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2021. — Vol. 143, no. 5. — P. 110545.

143. *Fujisaka, H.* Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems / H. Fujisaka, T. Yamada // *Progress of Theoretical Physics*. — 1983. — Vol. 69, no. 1. — P. 32–47.
144. *Pecora, L.M.* Synchronization in chaotic systems / L.M. Pecora, T.L. Carroll // *Physical Review Letters*. — 1990. — Vol. 64, no. 8. — Pp. 821–824.
145. *Rosenblum, Michael G.* Phase Synchronization of Chaotic Oscillators / Michael G. Rosenblum, Arkady S. Pikovsky, Jürgen Kurths // *Physical Review Letters*. — 1996. — Vol. 76, no. 11. — Pp. 1804–1807.
146. Cluster synchronization and spatio-temporal dynamics in networks of oscillatory and excitable Luo-Rudy cells / O.I. Kanakov, G.V. Osipov, C.-K. Chan, J. Kurths // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2007. — Vol. 17, no. 1. — P. 015111.
147. Synchronization in delayed multiplex networks / A. Singh, S. Ghosh, S. Jalan, J. Kurths // *Europhysics Letters*. — 2015. — Vol. 111, no. 3. — P. 30010.
148. *Jalan, S.* Cluster synchronization in multiplex networks / S. Jalan, A. Singh // *Europhysics Letters*. — 2016. — Vol. 113, no. 3. — P. 30002.
149. Установление обобщенной синхронизации в сети осцилляторов Ресслера / А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.А. Пивоваров, А.Е. Храмов // *Известия РАН. Серия физическая*. — 2016. — Vol. 80, no. 2. — P. 208.
150. Mean field phase synchronization between chimera states / R.G. Andrzejak, G. Ruzzene, I. Malvestio, K. Schindler, E. Schöll, A. Zakharova // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2018. — Vol. 28, no. 9. — P. 091101.
151. Inter-layer synchronization in multiplex networks of identical layers / R. Sevilla-Escoboza, I. Sendiña-Nadal, I. Leyva, R. Guti'erez, J.M. Buld'u, S. Boccalet-

- ti // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2016. — Vol. 26, no. 6. — P. 065304.
152. Inter-layer synchronization in non-identical multi-layer networks / I. Leyva, R. Sevilla-Escoboza, I. Sendiña-Nadal, R. Guti'erez, J.M. Buld'u, S. Boccaletti // *Scientific Reports*. — 2017. — Vol. 7. — P. 45475.
153. Клиньшов, В.В. Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями / В.В. Клиньшов, В.И. Некоркин // *УФН*. — 2013. — Vol. 183. — Pp. 1323–1336.
154. Масленников, О.В. Адаптивные динамические сети / О.В. Масленников, В.И. Некоркин // *УФН*. — 2017. — Vol. 187. — Pp. 745–756.
155. Kasatkin, D.V. Synchronization of chimera states in a multiplex system of phase oscillators with adaptive couplings / D.V. Kasatkin, V.I. Nekorkin // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2018. — Vol. 28, no. 9. — P. 093115.
156. Zhang, L. Incoherence-Mediated Remote Synchronization / L. Zhang, A.E. Motter, T. Nishikawa // *Physical Review Letters*. — 2017. — Vol. 118, no. 17. — P. 174102.
157. Relay synchronization in multiplex networks / I. Leyva, I. Sendiña-Nadal, R. Sevilla-Escoboza, V.P. Vera-Avila, P. Chholak, S. Boccaletti // *Scientific Reports*. — 2018. — Vol. 8. — P. 8629.
158. Synchronization scenarios of chimeras in multiplex networks / J. Sawicki, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll // *Europhysics Journal Special Topics*. — 2018. — Vol. 227. — P. 1161–1171.

159. Delay controls chimera relay synchronization in multiplex networks / J. Sawicki, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll // *Physical Review E*. — 2018. — Vol. 98, no. 6. — P. 062224.
160. Chimeras in Multiplex Networks: Interplay of Inter- and Intra-Layer Delays / J. Sawicki, S. Ghosh, S. Jalan, A. Zakharova // *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*. — 2019. — Vol. 5. — P. 19.
161. Relay synchronization in multiplex networks of discrete maps / M. Winkler, J. Sawicki, I. Omelchenko, A. Zakharova, V. Anishchenko, E. Schöll // *Europhysics Letters*. — 2019. — Vol. 126, no. 5. — P. 50004.
162. Explosive synchronization in weighted complex networks / I. Leyva, I. Sendiña-Nadal, J.A. Almendral, A. Navas, S. Olmi, S. Boccaletti // *Physical Review E*. — 2013. — Vol. 88, no. 4. — P. 042808.
163. *Skardal, P.S.* Disorder induces explosive synchronization / P.S. Skardal, A. Arenas // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 89, no. 6. — P. 062811.
164. Explosive Synchronization in Adaptive and Multilayer Networks / X. Zhang, S. Boccaletti, S. Guan, Z. Liu // *Physical Review Letters*. — 2015. — Vol. 114, no. 3. — P. 038701.
165. Explosive synchronization coexists with classical synchronization in the Kuramoto model / M.M. Danziger, O.I. Moskalenko, S.A. Kurkin, X. Zhang, S. Havlin, S. Boccaletti // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2016. — Vol. 26, no. 6. — P. 065307.
166. A small change in neuronal network topology can induce explosive synchronization transition and activity propagation in the entire network / Z. Wang, C. Tian, M. Dhamala, Z. Liu // *Scientific Reports*. — 2017. — Vol. 7. — P. 561.

167. Самоподобие процесса десинхронизации в сети обобщенных осцилляторов Курamoto / А.А. Короновский, М.К. Куровская, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов // *Письма в ЖТФ*. — 2017. — Vol. 43, no. 19. — Pp. 51–56.
168. Self-similarity in explosive synchronization of complex networks / А.А. Короновский, М.К. Куровская, О.И. Москаленко, А. Храмов, S. Boccaletti // *Physical Review E*. — 2017. — Vol. 96, no. 6. — P. 062312.
169. *Leyva, I.* Explosive synchronization in mono and multilayer networks / I. Leyva, I. Sendiña-Nadal, S. Boccaletti // *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*. — 2018. — Vol. 23, no. 5. — Pp. 1931–1944.
170. *Sharma, A.* Explosive synchronization through dynamical environment / A. Sharma // *Physics Letters A*. — 2019. — Vol. 383, no. 17. — Pp. 2051–2055.
171. *Dmitrichev, A.* Cloning of Chimera States in a Large Short-term Coupled Multiplex Network of Relaxation Oscillators / A. Dmitrichev, D. Shchapin, V. Nekorkin // *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*. — 2019. — Vol. 5. — P. 9.
172. *Slepnev, A. V.* Stationary and non-stationary chimeras in an ensemble of chaotic self-sustained oscillators with inertial nonlinearity / A.V. Slepnev, A.V. Bukh, T.E. Vadivasova // *Nonlinear Dynamics*. — 2017. — Vol. 88. — Pp. 2983–2992.
173. Spiral and target wave chimeras in a 2D lattice of map-based neuron models / E.V. Rybalova, A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, no. 10. — P. 101104.
174. *A.B., Бух.* Спиральные, концентрические и химерные волновые структуры в двумерном ансамбле нелокально связанных генераторов Ван дер Поля /

- Бух А.В., Анищенко В.С. // *Письма в журнал технической физики*. — 2019. — Vol. 45, no. 13. — Pp. 40–43.
175. *Bukh, A.V.* Spiral and target wave chimeras in a 2D network of nonlocally coupled van der Pol oscillators / A.V. Bukh, V.S. Anishchenko // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2020. — Vol. 131. — P. 109492.
176. Role of solitary states in forming spatiotemporal patterns in a 2D lattice of van der Pol oscillators / I.A. Shepelev, A.V. Bukh, S.S. Muni, V.S. Anishchenko // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2020. — Vol. 135. — P. 109725.
177. *Bukh, A.V.* Synchronization features of target wave structures with an incoherent center / A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2020. — Vol. 139. — P. 110002.
178. Synchronization effects for dissipative and inertial coupling between multiplex lattices / I.A. Shepelev, A.V. Bukh, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2021. — Vol. 93. — P. 105489.
179. Quantifying the Transition from Spiral Waves to Spiral Wave Chimeras in a Lattice of Self-sustained Oscillators / I.A. Shepelev, A.V. Bukh, S.S. Muni, V.S. Anishchenko // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2020. — Vol. 25, no. 6. — Pp. 597–615.
180. *Bukh, A.V.* Features of the Synchronization of Spiral Wave Structures in Interacting Lattices of Nonlocally Coupled Maps / A.V. Bukh, V.S. Anishchenko // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. — 2020. — Vol. 16, no. 2. — Pp. 243–257.
181. Эффекты синхронизации двухслойной сети нелокально связанных хаотических отображений с диссипативной и инерционной связью / Т.Р. Богатенко, А.В. Бух, В.С. Анищенко, Г.И. Стрелкова // *Известия*

- Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика.* — 2020. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 42–54.
182. Бух, А.В. Компьютерная программа для моделирования сетей динамических элементов, описываемых одномерными или двумерными матрицами связи / А.В. Бух, И.А. Шепелев // № 2017612340. — 2017.
183. Бух, А.В. Программа для моделирования сетей динамических элементов со сложными связями / А.В. Бух, В.С. Анищенко // № 2018618877. — 2018.
184. Стрелкова, Г.И. Исследование процессов формирования волновых структур в решетках нелокально связанных моделей нейронов / Г.И. Стрелкова, А.В. Бух, Е.В. Рыбалова // № 2021619437. — 2021.
185. Anishchenko, V.S. Dynamical Chaos – Models and Experiments / V.S. Anishchenko. — World Scientific, Singapore, 1995.
186. Martens, E.A. Bistable chimera attractors on a triangular network of oscillator populations / E.A. Martens // *Physical Review E*. — 2010. — Vol. 82, no. 1. — P. 016216.
187. Spectral properties of chimera states / M. Wolfrum, O.E. Omel'chenko, S. Yanchuk, Y.L. Maistrenko // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Non-linear Science*. — 2011. — Vol. 21, no. 1. — P. 013112.
188. Clustered chimera states in systems of type-I excitability / A. Vüllings, J. Hizanidis, I. Omelchenko, P. Hövel // *New Journal of Physics*. — 2014. — Vol. 16. — P. 123039.
189. Robustness of chimera states for coupled FitzHugh-Nagumo oscillators / I. Omelchenko, A. Provata, J. Hizanidis, E. Schöll, P. Hövel // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 91, no. 2. — P. 022917.

190. Nonlinearity of local dynamics promotes multi-chimeras / I. Omelchenko, A. Zakharova, P. Hövel, J. Siebert, E. Schöll // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2015. — Vol. 25, no. 8. — P. 083104.
191. *Wolfrum, M.* Regular and irregular patterns of self-localized excitation in arrays of coupled phase oscillators / M. Wolfrum, O.E. Omel'chenko, J. Sieber // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2015. — Vol. 25, no. 5. — P. 053113.
192. *Vadivasova, T.E.* Control of inter-layer synchronization by multiplexing noise / T.E. Vadivasova, A.V. Slepnev, A. Zakharova // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2020. — Vol. 30, no. 9. — P. 091101.
193. *FitzHugh, Richard.* Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane / Richard FitzHugh // *Biophysical Journal*. — 1961. — Vol. 1, no. 6. — Pp. 445–466.
194. *FitzHugh, Richard.* Mathematical models of excitation and propagation in nerve. / Richard FitzHugh. — Biological Engineering, McGraw Hill, New York, 1969.
195. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory. / G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn // *Meccanica*. — 1980. — Vol. 15. — Pp. 9–20.
196. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 2: Numerical application. / G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn // *Meccanica*. — 1980. — Vol. 15. — Pp. 21–30.

197. *Zaikin, A.N.* Concentration Wave Propagation in Two-dimensional Liquid-phase Self-oscillating System / A.N. Zaikin, A.M. Zhabotinsky // *Nature*. — 1990. — Vol. 225. — P. 535–537.
198. *Kopell, N.* Plane Wave Solutions to Reaction-Diffusion Equations / N. Kopell, L.N. Howard // *Studies in Applied Mathematics*. — 1973. — Vol. 52, no. 4. — Pp. 291–328.
199. *Zhabotinsky, A.M.* Autowave processes in a distributed chemical system / A.M. Zhabotinsky, A.N. Zaikin // *Journal of Theoretical Biology*. — 1973. — Vol. 49, no. 1. — Pp. 45–61.
200. *Winfree, A.T.* Rotating chemical reactions / A.T. Winfree // *Scientific American*. — 1974. — Vol. 230, no. 6. — Pp. 82–95.
201. *Howard, L.N.* Slowly Varying Waves and Shock Structures in Reaction-Diffusion Equations / L.N. Howard, N. Kopell // *Studies in Applied Mathematics*. — 1977. — Vol. 56, no. 2. — Pp. 95–145.
202. *Васильев, В.А.* Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах / В.А. Васильев, Ю.М. Романовский, В.Г. Яхно // *Успехи физических наук*. — 1979. — Vol. 128. — P. 625–666.
203. *Tyson, J.J.* Spiral waves in a model of myocardium / J.J. Tyson, J.P. Keener // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1987. — Vol. 29, no. 1. — Pp. 215–222.
204. *Biktashev, V.N.* Diffusion of autowaves: Evolution equation for slowly varying autowaves / V.N. Biktashev // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1989. — Vol. 40, no. 1. — Pp. 83–90.
205. *Barkley, D.* Spiral-wave dynamics in a simple model of excitable media: The transition from simple to compound rotation / D. Barkley, M. Kness, L.S. Tuckerman // *Phys. Rev. A*. — 1990. — Vol. 42, no. 4. — Pp. 2489–2492.

206. *Krinsky, V.I.* Autowave principles for parallel image processing / V.I. Krinsky, V.N. Biktashev, I.R. Efimov // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1991. — Vol. 49, no. 1. — Pp. 247–253.
207. *Иваницкий, Г.Р.* От динамики популяционных автоволн, формируемых живыми клетками, к нейроинформатике / Г.Р. Иваницкий, А.Б. Медвинский, М.А. Цыганов // *Успехи физических наук*. — 1994. — Vol. 164. — P. 1041–1072.
208. *Winfree, A.T.* Electrical turbulence in three-dimensional heart muscle / A.T. Winfree // *Science*. — 1994. — Vol. 266. — Pp. 1003–1006.
209. *Castelpoggi, F.* Stochastic resonant media: Effect of local and nonlocal coupling in reaction-diffusion models / F. Castelpoggi, H.S. Wio // *Physical Review E*. — 1998. — Vol. 57, no. 5. — Pp. 5112–5121.
210. *Davydov, V.A.* Ring-shaped autowaves on curved surfaces / V.A. Davydov, V.G. Morozov, N.V. Davydov // *Physics Letters A*. — 2000. — Vol. 267, no. 5. — Pp. 326–330.
211. Multiple mechanisms of spiral wave breakup in a model of cardiac electrical activity / F.H. Fenton, E.M. Cherry, H.M. Hastings, S.J. Evans // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2002. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 852–892.
212. Synchronization of spatiotemporal patterns in locally coupled excitable media / M. Hildebrand, J. Cui, E. Mihaliuk, J. Wang, K. Showalter // *Physical Review E*. — 2003. — Vol. 68, no. 2. — P. 026205.
213. *Kuramoto, Y.* Rotating Spirals without Phase Singularity in Reaction-Diffusion Systems / Y. Kuramoto, S. Shima // *Progress of Theoretical Physics Supplement*. — 2003. — Vol. 150. — P. 115–125.

214. Spiral breakup due to mechanical deformation in excitable media / H. Zhang, X. Ruan, B. Hu, Q. Ouyang // *Physical Review E*. — 2004. — Vol. 70, no. 1. — P. 016212.
215. Ermakova, E.A. Blood Coagulation and Propagation of Autowaves in Flow / E.A. Ermakova, M.A. Panteleev, E.E. Shnol // *Pathophysiology of Haemostasis and Thrombosis*. — 2005. — Vol. 34, no. 2-3. — P. 135–142.
216. Mean-Field Theory Revives in Self-Oscillatory Fields with Non-Local Coupling / Y. Kuramoto, S. Shima, D. Battogtokh, Y. Shiogai // *Progress of Theoretical Physics Supplement*. — 2006. — Vol. 161. — P. 127–143.
217. Shang, L. Binary Image Thinning Using Autowaves Generated by PCNN / L. Shang, Z. Yi, L. Ji // *Neural Process Lett.* — 2007. — Vol. 25. — P. 49–62.
218. Павлов, Е.А. Моделирование сердечной активности на основе отображений. Часть II. Ансамбль связанных элементов / Е.А. Павлов, Г.В. Осипов // *Известия вузов. ПНД*. — 2011. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 116–126.
219. Nkomo, S. Chimera States in Populations of Nonlocally Coupled Chemical Oscillators / S. Nkomo, M.R. Tinsley, K. Showalter // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 110, no. 24. — P. 244102.
220. Novel type of chimera spiral waves arising from decoupling of a diffusible component / X. Tang, T. Yang, I.R. Epstein, Y. Liu, Y. Zhao, Q. Gao // *The Journal of Chemical Physics*. — 2014. — Vol. 141, no. 2. — P. 024110.
221. Panaggio, M.J. Chimera states on the surface of a sphere / M.J. Panaggio, D.M. Abrams // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 191, no. 2. — P. 022909.

222. Weiss, S. Weakly and strongly coupled Belousov-Zhabotinsky patterns / S. Weiss, R.D. Deegan // *Physical Review E*. — 2017. — Vol. 95, no. 2. — P. 022215.
223. Diffusion induced spiral wave chimeras in ecological system / S. Kundu, S. Majhi, P. Muruganandam, D. Ghosh // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* — 2018. — Vol. 227. — P. 983–993.
224. Solitary states for coupled oscillators with inertia / Patrycja Jaros, Serhiy Brezetsky, Roman Levchenko, Dawid Dudkowski, Tomasz Kapitaniak, Yuri Maistrenko // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2018. — Vol. 28, no. 1. — P. 011103.
225. Shepelev, I. A. Solitary states in a 2D lattice of bistable elements with global and close to global interaction / I. A. Shepelev, T. E. Vadivasova // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* — 2017. — Vol. 13, no. 3. — Pp. 317–329.