


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

На правах рукописи



АДИЛОВА Асель Булатовна

**ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В КАНАЛЕ СВЯЗИ НА
СИНХРОНИЗАЦИЮ СВЯЗАННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ
С ПРЕДЕЛЬНЫМ ЦИКЛОМ**

01.04.03 — «Радиофизика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Рыскин Н.М.

Саратов – 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Исследование взаимной синхронизации в системе двух автоколебательных осцилляторов, связанных с задержкой	13
1.1. Модель двух генераторов, связанных с задержкой.....	14
1.1.1. Основные уравнения.....	14
1.1.2. Приближение малого времени задержки. Классификация неподвижных точек.....	17
1.2. Анализ синхронизации в фазовом приближении. Обобщенное уравнение Адлера.....	20
1.3. Анализ синхронизации в амплитудно-фазовом приближении. Изохронные осцилляторы	27
1.4. Синхронизация связанных неизохронных осцилляторов.....	39
1.5. Синхронизация в случае конечного времени задержки	48
1.6. Выводы.....	51
2. Исследование синхронизации двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой	54
2.1. Модель двух связанных генераторов с жестким возбуждением	54
2.1.1. Основные уравнения.....	54
2.1.2. Классификация неподвижных точек при слабой связи	55
2.2. Анализ синхронизации в фазовом приближении	57
2.2.1. Седлоузловые бифуркации симметричных решений	58
2.2.2. Седлоузловые бифуркации несимметричных решений	62
2.3. Исследование синхронизации в амплитудно-фазовом приближении. Бифуркационный анализ и численное моделирование .	67
2.3.1. Случай малых расстроек	68
2.3.2. Случай больших расстроек	75
2.3.3. Влияние неизохронности	78

2.4. Выводы.....	80
3. Исследование взаимной синхронизации в системе двух гиротронов, связанных с задержкой	83
3.1. Модифицированная квазилинейная модель гиротрона	84
3.2. Сравнение с нестационарной теорией гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля	91
3.3. Бифуркационный анализ в случае малого времени запаздывания .	97
3.4. Переключение между различными режимами синхронизации	104
3.5. Влияние конкуренции мод на процессы синхронизации	111
3.6. Выводы.....	115
Заключение	117
Список литературы	122

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Изучение взаимной синхронизации в ансамблях связанных осцилляторов является фундаментальной проблемой радиофизики и имеет большое значение для многих приложений в области электроники, лазерной физики, биофизики и т.д. [1-7]. Одной из основных тенденций развития современной сверхвысокочастотной электроники является получение сверхвысоких уровней мощности путем сложения сигналов нескольких мощных генераторов (см., например, обзор [8] и цитированную в нем литературу). Среди различных подходов привлекает интерес использование взаимной синхронизации связанных генераторов [9]. Наиболее широко исследовалась синхронизация в системах связанных магнетронов [10-15] и виркаторов [16-18]. В частности, экспериментально наблюдалась взаимная синхронизация в ансамблях из нескольких релятивистских магнетронов с различной топологией [12,19] (см. также обзор [20]), где была достигнута мощность 2.0 ГВт в случае четырех и 2.9 ГВт в случае семи связанных магнетронов.

В последнее время также привлекла внимание задача о взаимной синхронизации мощных гиротронов [21], поскольку комплексы, состоящие из нескольких гиротронов, используются для нагрева плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза [22-24]. Для международного проекта ITER планируется использование 26 гиротронов диапазона 170 ГГц с мощностью 1 МВт при длительности импульса порядка 500 с [25]. Для проекта демонстрационной термоядерной электростанции DEMO подразумевается использование гиротронов, работающих на частотах 230-250 ГГц в непрерывном режиме генерации с выходной мощностью порядка 2 МВт [26,27]. С 2000-х годов обсуждается возможность использования комплексов из большого числа (порядка 100) гиротронов для запуска космических аппаратов [20]; впрочем, на сегодняшний день в литературе приведены лишь отдельные результаты демонстрационных экспериментов [28]. Следует отметить, что

для перечисленных выше приложений важно обеспечить когерентность излучения гиротронов.

На сверхвысоких частотах расстояние между связанными генераторами может существенно превышать длину волны, поэтому необходимо учитывать запаздывание сигнала, распространяющегося между ними. Не вызывает сомнений, что картина синхронизации в системах с запаздыванием имеет ряд специфических особенностей по сравнению с системами с малым числом степеней свободы. В частности, учет запаздывания превращает систему из конечномерной в распределенную, т.е. обладающую бесконечным числом степеней свободы. Для подобных систем с ростом времени задержки число стационарных состояний, как правило, увеличивается, т.е. возникает мультистабильность (см., например, [30-32]). В частности, в работе [32] рассматривалась простая модель двух автоколебательных систем с предельным циклом, связанных с задержкой. Было показано, что в зависимости от набега фазы сигнала в канале связи доминирует либо диссипативная связь, либо инерционная. Поскольку набег фазы определяется временем распространения сигнала между генераторами, характер связи и, соответственно, устройство языков синхронизации сильно меняется при смещении генераторов на расстояние порядка длины волны. Однако анализ, проведенный в [32], в основном ограничивался фазовым приближением, которое справедливо в случае слабой связи и при малой расстройке собственных частот генераторов и, соответственно, не описывает многие важные особенности процессов синхронизации. Также не учитывался ряд важных факторов, в частности, неизосинхронность колебаний генераторов.

Значительный интерес также представляет исследование особенностей синхронизации генераторов, работающих в режиме жесткого возбуждения [33]. Отметим, что в мощных гиротронах максимальный КПД достигается именно в режиме жесткого возбуждения. В работе [34] была развита теория синхронизации генератора с жестким возбуждением внешним гармоническим сигналом и был обнаружен ряд важных отличий от хорошо известной

картины синхронизации генератора с мягким самовозбуждением. Эти отличия в основном обусловлены бистабильным характером автоколебательной системы с жестким возбуждением [1,2,5]. Не вызывает сомнений, что интересные особенности должны быть характерны и для случая взаимной синхронизации двух генераторов, тем более при наличии запаздывания.

Таким образом, задача изучения особенностей синхронизации в системах генераторов, связанных с задержкой, представляется актуальной.

Цель работы состоит в выявлении основных механизмов и закономерностей процессов синхронизации в системах двух автогенераторов, связанных с задержкой.

Для достижения поставленных целей в работе решаются следующие **основные задачи:**

1. Бифуркационный анализ взаимной синхронизации двух автоколебательных осцилляторов с кубичной нелинейностью, связанных с задержкой, в изохронном и неизохронном случаях.

2. Анализ особенностей режимов синхронизации двух связанных с задержкой генераторов в режиме жесткого возбуждения.

3. Разработка модифицированной квазилинейной модели системы двух связанных гиротронов, ее бифуркационный анализ, сопоставление с результатами, полученными при анализе упрощенных модельных систем.

4. Численное моделирование режимов синхронизации системы двух связанных гиротронов на основе нестационарной теории с фиксированной структурой высокочастотного поля. Сопоставление с результатами, полученными для модифицированной квазилинейной модели.

Объектом исследования являются модели связанных с задержкой автоколебательных систем, описываемые дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом для медленно меняющихся комплексных амплитуд, а также модели связанных гиротронов на основе нестационарной теории с фиксированной структурой высокочастотного поля.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием широко апробированных и хорошо зарекомендовавших себя аналитических и численных методов, соответствием результатов бифуркационного анализа и численного моделирования, качественным соответствием результатов, полученных для различных моделей связанных систем, воспроизведением в качестве тестовых расчетов достоверных общепризнанных результатов, известных из литературы, а также широкой апробацией результатов работы, обсуждением результатов работы на многочисленных международных и всероссийских конференциях.

Научная новизна. Все результаты, включенные в диссертацию, являются новыми и получены впервые, в частности:

1. Построена детальная картина синхронизации в системе двух автоколебательных осцилляторов с кубичной нелинейностью, связанных с задержкой. Подробно исследовано влияние таких параметров как частотная расстройка, набег фазы в канале связи, параметр неизохронности.

2. Проведен бифуркационный анализ режимов синхронизации в системе двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Исследованы механизмы формирования и исчезновения мультистабильности синхронных режимов.

3. Предложена модифицированная квазилинейная модель системы гиروتронов, связанных с задержкой, в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Результаты моделирования, полученные на ее основе, количественно хорошо согласуются с расчетами по теории гиروتрона с фиксированной структурой высокочастотного поля. Проведен бифуркационный анализ режимов синхронизации, результаты которого качественно согласуются с результатами, полученными для упрощенных моделей связанных автоколебательных систем с полиномиальными нелинейностями.

4. Предложен физически обоснованный способ управляемых переключений между синфазной и противофазной модами в системе двух связанных

гиротронов, который основан на кратковременном уменьшении мощности генерации одного из гиротронов.

Научная и практическая значимость исследования. Результаты диссертации развивают теорию взаимной синхронизации двух автоколебательных систем, связанных с задержкой. В результате проведенного подробного бифуркационного анализа установлены принципиальные отличия от известной картины взаимной синхронизации двух связанных автогенераторов с одной степенью свободы, обусловленные влиянием запаздывания сигнала в канале связи. Они выражаются в наличии мультистабильности синхронных режимов и в особенностях устройства областей синхронизации на плоскости параметров «частотная расстройка – коэффициент связи».

Практическое значение результатов диссертации связано с тем, что на их основе могут быть предложены способы обеспечения когерентных режимов работы в ансамблях мощных генераторов (гиротронов, магнетронов и т.д.), которые находят применение для получения микроволнового излучения высокой мощности. Исследованные режимы быстрого переключения мод также могут найти применение для ряда приложений, например, для подавления плазменных неустойчивостей в процессе СВЧ-нагрева.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты, включенные в диссертацию, получены лично соискателем. Соискателем выполнен бифуркационный анализ режимов синхронизации в рассматриваемых системах, разработаны используемые программы компьютерного моделирования, проведены численные эксперименты. Постановка задачи, обсуждение и интерпретация результатов осуществлялись совместно с научным руководителем, а также с соавторами опубликованных работ.

Основные положения, выносимые на защиту

1. В системе двух автоколебательных осцилляторов с кубической нелинейностью, связанных с задержкой, в зависимости от набега фазы сигнала, распространяющегося в канале связи, доминирует либо диссипативная связь, либо инерционная. На плоскости параметров «частотная расстройка – связь»

реализуется картина, характерная для соответствующего типа связи. Фазовый набег определяется частотой генерации, временем задержки, а также параметром неизохронности. Мультистабильность синхронных режимов возникает при таких значениях фазового набега, когда преобладает инерционная связь.

2. В системе двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой, наряду с режимами взаимной синхронизации, для которых амплитуды колебаний генераторов близки, существуют режимы с сильно различающимися амплитудами, т.е. режимы подавления колебаний одного генератора другим. В области малых частотных расстройк при увеличении параметра связи эти режимы исчезают в результате седлоузловых бифуркаций. В области достаточно больших расстройк с увеличением связи один из таких режимов теряет устойчивость в результате обратной бифуркации Андронова–Хопфа, а другой постепенно трансформируется в режим синфазной синхронизации, поскольку амплитуды колебаний выравниваются, а разность фаз стремится к нулю.

3. Предложенная модифицированная квазилинейная модель связанных гиротронов позволяет провести детальный бифуркационный анализ режимов синхронизации, а также позволяет рассчитать основные количественные характеристики (мощность, КПД, собственная частота) режимов синхронизации, которые хорошо согласуются с результатами моделирования на основе теории гиротрона с фиксированной структурой высокочастотного поля. Модель адекватно описывает структуру областей синхронизации на плоскости параметров «расстройка–коэффициент связи», а также сложный характер амплитудной и частотной модуляции в режиме биений.

4. При наличии мультистабильности синхронных режимов в системе двух связанных гиротронов возможно переключение между этими режимами путем кратковременного уменьшения мощности генерации одного из гиротронов. При этом происходит переключение к тому из синхронных режимов, частота которого ближе к парциальной частоте генерации второго гиротрона.

Апробация и публикации. Результаты, представленные в диссертации, докладывались на следующих школах, семинарах и конференциях:

- The 20th International Vacuum Electronics Conference (IVEC 2019), Busan, Korea, 2019;
- 44th International Conference on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz 2019), Paris, France, 2019;
- 3rd International Conference Terahertz and Microwave Radiation: Generation, Detection and Applications (TERA-2018), Нижний Новгород, 2018;
- 10th International Workshop “Strong Microwaves and Terahertz Waves: Sources and Applications”, Нижний Новгород – Москва, 2017;
- Международный симпозиум “Saratov Fall Meeting”, Саратов, 2016, 2017 гг.;
- Международные научно-технические конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (АПЭП). Саратов, 2016, 2018, 2020 гг.;
- XVII Зимняя школа-семинар по СВЧ электронике и радиофизике, Саратов, 2018;
- Международные школы–конференции «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС). Саратов, 2016, 2019 гг.;
- VI Всероссийская научно-техническая конференция «Электроника и микроэлектроника СВЧ», Санкт-Петербург, 2017;
- III Всероссийская научно-техническая конференция «Проблемы СВЧ электроники им. В.А. Солнцева 2017», Москва, 2017;
- Всероссийские научные школы «Нелинейные волны». Нижний Новгород, ИПФ РАН, 2018, 2020 гг.;
- Всероссийские конференции молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», Саратов, 2016-2020.

Результаты также докладывались на научных семинарах факультета нелинейных процессов СГУ, отдела электронных приборов ИПФ РАН и на заседаниях Саратовского отделения IEEE.

На Международной конференции АПЭП–2018 доклад «Влияние конкуренции мод на процессы синхронизации в гиротроне» был удостоен Диплома I степени в конкурсе на лучший студенческий доклад.

Результаты диссертации использованы при выполнении НИР поддержанных грантами РФФИ № 15-02-02893, 16-32-00124 и 18-02-00839.

По результатам диссертации опубликовано 25 работ, из них 4 статьи в реферируемых научных журналах, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук и индексируемых в международных реферативных базах данных и системах цитирования Web of Science и/или Scopus [75-78], 9 работ в трудах конференций, индексируемых в базах данных и системах цитирования Web of Science и/или Scopus [79-87], а также 12 работ в сборниках трудов всероссийских конференций [88-99].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из Введения, трех глав и Заключения, содержит 132 страницы текста, включая иллюстрации и таблицы. Список литературы включает 99 наименований.

Во **Введении** обоснована актуальность темы диссертации, указаны её цели и задачи, сформулированы основные научные положения, вывозимые на защиту.

В первой главе рассматривается задача о взаимной синхронизации двух автоколебательных осцилляторов с кубичной нелинейностью, связанных с задержкой. Сформулирована модель в виде связанных уравнений Ландау–Стюарта с запаздыванием. Проводится бифуркационный анализ режимов синхронизации в различных приближениях. Обсуждается влияние неизохронности и времени задержки на картину синхронизации.

Во второй главе проводится исследование режимов синхронизации системы двух связанных генераторов с жестким возбуждением. Анализ синхронизации проводится в фазовом и амплитудно–фазовом приближениях. Обсуждаются механизмы формирования и исчезновения мультистабильности режимов синхронизации.

Третья глава посвящена изучению взаимной синхронизации системы двух связанных гиротронов. Развита модифицированная квазилинейная модель гиротрона, которая строится путем аналитической аппроксимации функции электронной восприимчивости, рассчитанной на основе теории гиротрона с фиксированной структурой высокочастотного поля. Проводится бифуркационный анализ режимов синхронизации на основе развитой модели. Обсуждается возможность управляемого переключения между различными синхронными режимами. Рассмотрена синхронизация двух связанных гиротронов, в которых учитывается конкуренция двух собственных мод.

В **Заключении** приведены основные результаты, полученные в диссертации.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ ДВУХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДЕРЖКОЙ

Как известно, картина синхронизации в системах с запаздыванием имеет много специфических особенностей по сравнению с системами с малым числом степеней свободы (см., например, [32,35]). В частности, в работе [32] исследовалась синхронизация простой модели двух осцилляторов с предельным циклом, связанных с задержкой. В теории синхронизации связанных автогенераторов выделяют два основных типа связи: диссипативную (диффузионную) и инерционную (реактивную) [7,36,37]. Эти случаи отличаются устройством языков синхронизации, причем при инерционной связи режим синхронизации становится бистабильным: возможна синхронизация как синфазной, так и на противофазной моде. В [32] было обнаружено, что в зависимости от набега фазы сигнала в канале связи доминирует либо диссипативная связь, либо инерционная. Поскольку набег фазы определяется временем распространения сигнала между генераторами, характер связи и, соответственно, устройство языков синхронизации может сильно меняться при смещении генераторов на расстояние порядка длины волны.

Однако анализ, проведенный в [32], в основном ограничивался фазовым приближением, которое справедливо в случае слабой связи и при слабой расстройке собственных частот генераторов. В этом случае имеет синхронизация наступает в результате седлоузловой бифуркации (такой механизм обычно называют частотным или фазовым захватом [1-6]). В то же время, приведенные в [32] результаты численного моделирования показали, что при увеличении расстройки синхронизация наступает в результате другого механизма, известного как подавление собственных колебаний одного из генераторов [1-6]. При этом имеет место бифуркация Андронова–Хопфа. Этот режим уже не описывается фазовым приближением. В данной главе синхронизация системы связанных с задержкой генераторов исследуется в более об-

щей постановке, в том числе, с учетом неизохронности, а также в рамках амплитудно-фазового приближения, когда связь и расстройка частот уже не являются малыми.

1.1. Модель двух генераторов, связанных с задержкой

1.1.1. Основные уравнения

Сформулируем достаточно простую модель системы двух связанных резонансных электронных генераторов. Рассмотрим вначале одиночный генератор, в котором может возбуждаться лишь один (рабочий) тип колебаний. Считая резонатор высокодобротным, представим генерируемый сигнал в виде квазигармонического колебания $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [A(t) \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \exp(i\omega_0 t)]$, где ω_0 — несущая частота, близкая к собственной частоте резонатора, $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ — функция, описывающая распределение электрического поля в резонаторе, а $A(t)$ — медленно меняющаяся безразмерная амплитуда поля, которая подчиняется уравнению возбуждения [38,39]

$$\frac{dA}{dt} + i(\omega_0 - \omega_s)A = -\frac{1}{2N_s} \int_V \mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_s dV. \quad (1.1)$$

Здесь $\omega_s = \omega'_s + i\omega''_s = \omega'_s (1 + i/2Q)$ — комплексная собственная частота рабочего типа колебаний, Q — добротность, N_s — норма колебания, \mathbf{j}_ω — фурье-амплитуда гармоники высокочастотного тока. Перейдя в (1.1) к безразмерному времени $t' = \omega_0 t / (2Q)$, получим¹

$$\dot{A} + (1 + i\Delta)A = \Phi \cdot A, \quad (1.2)$$

где $\Delta = 2Q(\omega_0 - \omega'_s) / \omega_0$ — расстройка,

$$\Phi = \Phi' + i\Phi'' = -\frac{\omega_0}{4QN_s A} \int_V \mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_s dV. \quad (1.3)$$

¹ Здесь и далее точка над переменной означает производную по безразмерному времени. Штрих у безразмерного времени будем в дальнейшем опускать.

В теории гиротронов [33] эту величину называют комплексной функцией электронной восприимчивости. Она характеризует мощность взаимодействия пучка с полем, $P = \Phi |A|^2$.

Существует хорошо известный подход, позволяющий провести приближенное аналитическое исследование автоколебаний. Он основан на так называемой квазилинейной теории, в рамках которой уравнения движения электронов решаются приближенно методом разложения по малому параметру, в роли которого выступает амплитуда поля (см., например, [40-43]). В результате, функцию восприимчивости можно выразить явным образом через амплитуду колебаний $\Phi = \Phi(A)$.

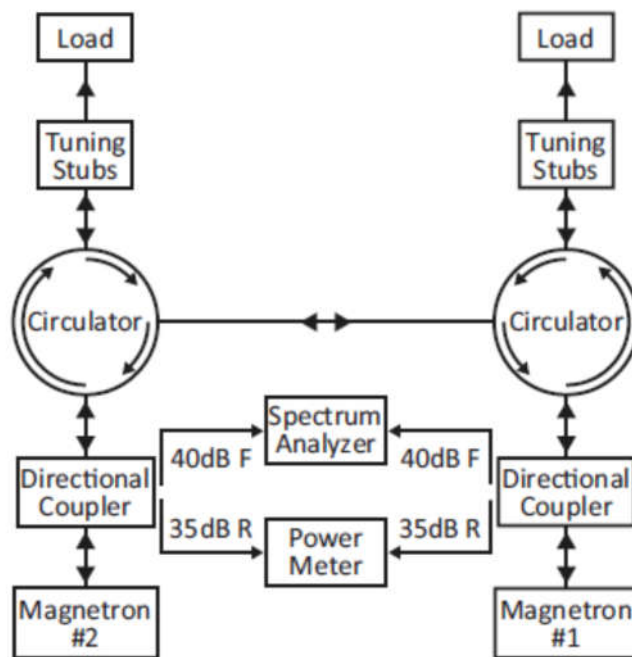


Рис. 1.1. Схема экспериментальной установки по изучению взаимной синхронизации двух магнетронов [14].

Рассмотрим теперь систему двух связанных генераторов. Будем считать, что все параметры генераторов идентичны, за исключением собственных частот ω_1 и ω_2 , которые не равны, но достаточно близки друг к другу, так что выполняется условие $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_0$, где $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ — средняя частота.

Хотя связь между генераторами может быть организована различным образом, достаточно типичным является случай, когда выходной сигнал одного из генераторов частично отражается от нагрузки и поступает в электродинамическую систему другого генератора (такую связь иногда называют радиационной). Эту ситуацию иллюстрирует рис. 1.1, на котором приведена схема экспериментальной установки по исследованию взаимной синхронизации магнетронов [14].

Для такой системы по аналогии с (1.2) можно записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 + \frac{i\Delta}{2} A_1 + A_1 &= \Phi(A_1) A_1 + \rho_{12} e^{-i\psi} A_2(t - \tau), \\ \dot{A}_2 - \frac{i\Delta}{2} A_2 + A_2 &= \Phi(A_1) A_2 + \rho_{21} e^{-i\psi} A_1(t - \tau). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\Delta = 2Q(\omega_1 - \omega_2)/\omega_0$ — расстройка, $\rho_{ij} = \sqrt{P_{in}/P_{out}}$ — коэффициенты связи, которые определяются отношением входной и выходной мощностей [10,14-16], $\tau = \omega_0 t_d / (2Q)$ — нормированное время задержки t_d , $\psi = \omega_0 t_d$ — набег фазы сигнала за время прохождения по цепи связи. Будем считать, что время задержки $t_d \approx l/c$, где l — расстояние между генераторами. В дальнейшем будем полагать коэффициенты связи одинаковыми. т.е. $\rho_{12} = \rho_{21} = \rho$.

Рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда порог самовозбуждения в каждом из генераторов превышен незначительно, так что нелинейность является слабой. В этом случае восприимчивость можно представить в виде разложения в ряд по степеням амплитуды $\Phi \approx \alpha - \beta |A|^2$, где комплексные коэффициенты $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ и $\beta = \beta' + i\beta''$ характеризуют линейное усиление и нелинейное насыщение соответственно [40-43]. В результате система (1.4) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 + \frac{i\Delta}{2} A_1 + A_1 &= (\alpha - \beta |A_1|^2) A_1 + \rho e^{-i\psi} A_2(t - \tau), \\ \dot{A}_2 - \frac{i\Delta}{2} A_2 + A_2 &= (\alpha - \beta |A_2|^2) A_2 + \rho e^{-i\psi} A_1(t - \tau). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Нетрудно убедиться, что в отсутствие связи ($\rho = 0$) самовозбуждение автоколебаний происходит при выполнении условия $\alpha' > 1$. В таком случае решение уравнений (1.5) имеет вид

$$A_{1,2} = \sqrt{\sigma} e^{i(\alpha' \mp \Delta/2)t},$$

где введено обозначение $\sigma = (\alpha' - 1)/\beta'$, т.е. каждая из подсистем генерирует гармоническое колебание на соответствующей «горячей» собственной частоте. Величину σ обычно называют параметром возбуждения.

Выполнив замену переменных

$$A_{1,2} \rightarrow \sqrt{\sigma} A_{1,2} \exp(i\alpha''t), \quad \rho \rightarrow \sigma\rho, \quad \Delta \rightarrow \sigma\Delta, \quad t \rightarrow t/\sigma. \quad (1.6)$$

приведем уравнения (1.5) к виду

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 + \frac{i\Delta}{2} A_1 &= \left(1 - (1 + ib)|A_1|^2\right) A_1 + \rho e^{-i\nu} A_2(t - \tau), \\ \dot{A}_2 - \frac{i\Delta}{2} A_2 &= \left(1 - (1 + ib)|A_2|^2\right) A_2 + \rho e^{-i\nu} A_1(t - \tau). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $b = \beta''/\beta'$ — параметр неизохронности.

1.1.2. Приближение малого времени задержки. Классификация неподвижных точек

Систему (1.7) можно существенно упростить, если рассмотреть случай, когда время задержки мало по сравнению с характерным временем установления колебаний. При этом в правой части (1.7) можно положить $A_{1,2}(t - \tau) \approx A_{1,2}(t)$, после чего приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 + \frac{i\Delta}{2} A_1 &= \left(1 - (1 + ib)|A_1|^2\right) A_1 + \rho e^{-i\nu} A_2, \\ \dot{A}_2 - \frac{i\Delta}{2} A_2 &= \left(1 - (1 + ib)|A_2|^2\right) A_2 + \rho e^{-i\nu} A_1. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Разделив систему (1.8) на уравнения для вещественных амплитуд и фаз, полагая $A_j = R_j \exp(i\varphi_j)$, можно в итоге прийти к системе уравнений третьего порядка [32,44,45]

$$\begin{aligned}\dot{R}_1 &= (1 - R_1^2)R_1 + \rho R_2 \cos(\psi + \varphi), \\ \dot{R}_2 &= (1 - R_2^2)R_2 + \rho R_1 \cos(\psi - \varphi),\end{aligned}\tag{1.9}$$

$$\dot{\varphi} + \Delta = b(R_2^2 - R_1^2) + \rho \left[\frac{R_1}{R_2} \sin(\psi - \varphi) - \frac{R_2}{R_1} \sin(\psi + \varphi) \right],$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность фаз. Несмотря на то, что (1.9) представляет собой систему ОДУ, в ней опосредованно учитываются эффекты запаздывания, поскольку набег фазы ψ определяется временем задержки. Условия применимости данного приближения более подробно обсуждаются в [46].

Если рассмотреть несвязанные генераторы, положив $\rho = 0$, очевидно, что уравнения (1.9) имеют стационарные решение $R_{1,2} = 1$, а также неустойчивые нулевые решения, $R_{1,2} = 0$. Теперь обсудим, какие неподвижные точки может иметь система (1.9), если параметр связи не равен нулю, но достаточно мал, $\rho \ll 1$. Очевидно, они будут незначительно (на величину порядка ρ) отличаться от соответствующих решений для несвязанных генераторов.

Во-первых, существуют решения, для которых $R_{1,2} = 1 + O(\rho)$. Они соответствуют режимам синхронизации. Основываясь на известных представлениях о синхронизации связанных систем, можно заключить, что подобных решений будет два — синфазное и противофазное. В дальнейшем будем обозначать их символами I (in-phase) и A (anti-phase), соответственно. Действительно, рассмотрим для наглядности неподвижные точки системы (1.9) в случае нулевой частотной расстройки. Такая ситуация подробно анализировалась в работе [44]. При $\Delta = 0$ неподвижные точки определяются из уравнений

$$\begin{aligned}(1 - R_1^2)R_1 + \rho R_2 \cos(\psi + \varphi) &= 0, \\ (1 - R_2^2)R_2 + \rho R_1 \cos(\psi - \varphi) &= 0, \\ b(R_2^2 - R_1^2) + \rho \left[\frac{R_1}{R_2} \sin(\psi - \varphi) - \frac{R_2}{R_1} \sin(\psi + \varphi) \right] &= 0.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Уравнения (1.10) имеют два очевидных решения:

$$R_1 = R_2 = R, \quad \varphi = 0 \quad (1.11)$$

в случае синфазной моды и

$$R_1 = R_2 = R, \quad \varphi = \pi \quad (1.12)$$

в случае противофазной. Для них из уравнений (1.10) получаем, соответственно,

$$(1 - R^2)R \pm \rho R \cos \psi = 0, \quad (1.13)$$

где синфазной моде соответствует знак «+», а противофазной — знак «-».

Отсюда находим амплитуду колебаний:

$$R^2 = 1 \pm \rho \cos \psi. \quad (1.14)$$

Кроме того, уравнения (1.10) имеют несимметричные решения, для которых $R_1 \neq R_2$. Как показано в [44], такие неподвижные точки симметричны друг другу относительно замены

$$(R_1, R_2, \varphi) \rightarrow (R_2, R_1, -\varphi). \quad (1.15)$$

В случае слабой связи для этих решений либо $R_1 = 1 + O(\rho)$, $R_2 \sim O(\rho)$, либо наоборот, т.е. один из осцилляторов движется вблизи невозмущенной орбиты, а второй — вблизи неустойчивой точки в начале координат. При этом очевидно, что поскольку точка в начале координат неустойчива, несимметричные решения будут также неустойчивыми (седловыми). Будем далее обозначать эти точки как $U_{1,2}$.

Наконец, уравнения (1.9) имеют нулевое решение $R_1 = R_2 = 0$, которое будем обозначать O . Оно, очевидно, также является неустойчивым.

Сказанное резюмирует Таблица 1.1. В ней в первой строке приведены значения амплитуды первого генератора в отсутствие связи, а в первом столбце — значения амплитуды второго. Соответственно, в остальных ячейках таблицы показаны обозначения для неподвижных точек, которые возникают при ненулевой связи.

Таблица 1.1. Классификация неподвижных точек системы (1.9).

	$R_1 = 0$	$R_1 = 1$
$R_2 = 0$	O	U_1
$R_2 = 1$	U_2	I, A

1.2. Анализ синхронизации в фазовом приближении. Обобщенное уравнение Адлера

Как известно, если параметры связи и расстройки достаточно малы, переход к синхронному режиму осуществляется в результате взаимного захвата частот [1-6]. Такой механизм соответствует седлоузловой бифуркации. В то же время, с практической точки зрения эта ситуация представляет наибольший интерес. Полезно проанализировать ее, используя фазовое приближение, когда считается, что амплитуды колебаний практически не меняются, и рассматривается исключительно динамика разности фаз. Отметим, что в случае, когда генераторы связаны с задержкой, анализ синхронизации в фазовом приближении имеет ряд нетривиальных особенностей. В работе [32] была решена такая задача для случая связанных изохронных генераторов. Однако, как известно, в реальных радиофизических генераторах неизохронность (реактивная фазовая нелинейность) может быть довольно существенной. В связи с этим, в данном разделе проведем анализ синхронизации в фазовом приближении для неизохронного случая ($b \neq 0$).

Как уже отмечалось, режимам синхронизации отвечают стационарные решения системы (1.9), которые удовлетворяют уравнениям (1.10). Следуя [32], будем считать в этих уравнениях связь малой, $\rho \ll 1$, и найдем приближенно амплитуды колебаний с точностью до членов $\sim \rho$. В нулевом приближении, устремляя ρ к нулю, имеем $R_{1,2} = 1$. Будем искать решения в виде $R_{1,2} = 1 + r_{1,2}$, где $r_{1,2} \sim \rho$ — малые добавки. Линеаризуя первые два уравнения системы (1.10), получим

$$r_1 = \frac{\rho}{2} \cos(\psi + \varphi),$$

$$r_2 = \frac{\rho}{2} \cos(\psi - \varphi).$$

Теперь можно найти отношение амплитуд первого и второго осциллятора

$$\frac{R_1}{R_2} \approx \frac{1+r_1}{1+r_2} \approx \frac{1+\frac{\rho}{2}\cos(\psi+\varphi)}{1+\frac{\rho}{2}\cos(\psi-\varphi)} \approx 1 - \rho \sin \psi \sin \varphi. \quad (1.16)$$

Аналогично, находим, что

$$\frac{R_2}{R_1} \approx 1 + \rho \sin \psi \sin \varphi. \quad (1.17)$$

Подставив (1.16) и (1.17) в третье уравнение системы (1.9), получим обобщенное уравнение Адлера

$$\dot{\varphi} + \Delta = -2\rho \sin \varphi (\cos \psi - b \sin \psi) - \rho^2 \sin 2\varphi \left(\sin^2 \psi - \frac{b}{4} \sin 2\psi \right). \quad (1.18)$$

В случае $b=0$ оно переходит в соответствующее уравнение работы [32]. Слагаемые порядка ρ в правой части (1.18) отвечают за диссипативную связь, а слагаемые порядка ρ^2 — за инерционную. В наиболее общем виде, с учетом неизохронности и неидентичности осцилляторов, оно было получено в работах [7,37,47], причем в [47] оно использовалось для решения задачи о синхронизации двух неидентичных контактов Джозефсона, включенных в общую цепь.

Уравнение (1.18) позволяет достаточно просто найти границы языка синхронизации на плоскости параметров Δ, ρ . Действительно, в режиме синхронизации уравнение (1.18) переписется в виде

$$\Delta = -2\rho \sin \varphi (\cos \psi - b \sin \psi) - \rho^2 \sin 2\varphi \left(\sin^2 \psi - \frac{b}{4} \sin 2\psi \right). \quad (1.19)$$

Нетрудно показать, что граница устойчивости (т.е. условие седлоузловой бифуркации) определяется из следующего соотношения

$$\frac{d\Delta}{d\varphi} = -2\rho \cos\varphi(\cos\psi - b \sin\psi) - 2\rho^2 \cos 2\varphi \left(\sin^2\psi - \frac{b}{4} \sin 2\psi \right) = 0, \quad (1.20)$$

которое представляет собой условие слияния двух корней уравнения (1.19).

Таким образом, из (1.20) находим

$$\rho = -\frac{4 \cos\varphi(\cos\psi - b \sin\psi)}{\cos 2\varphi(4 \sin^2\psi - b \sin 2\psi)}. \quad (1.21)$$

Соотношения (1.19) и (1.21) задают в параметрическом виде границы языка синхронизации на плоскости Δ, ρ .

Из (1.19) видим, что первое слагаемое в правой части обращается в нуль, когда $\operatorname{ctg}\psi = b$. При этом связь будет чисто инерционной. Чисто диссипативная связь имеет место, когда $\operatorname{tg}\psi = b/2$.

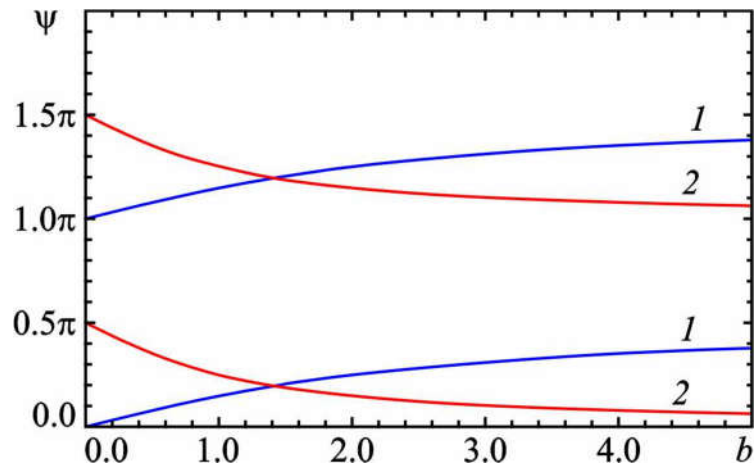


Рис. 1.2. Зависимости значений набега фазы ψ , при которых связь является чисто диссипативной (кривые 1) и чисто инерционной (кривые 2), от параметра неизохронности b .

На рис. 1.2 построены соответствующие зависимости $\psi = \psi(b)$. Заметим, что в изохронном случае, который рассматривался в [32], связь является чисто диссипативной, когда $\psi = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а чисто инерционной — когда $\psi = \pi n + \pi/2$, $n \in \mathbb{Z}$. С увеличением b значение набега фазы, при котором доминирует диссипативная связь, увеличивается, в то время как значение ψ ,

при котором связь инерционная, уменьшается. В точке $\psi_c = 0.196\pi$, $b_c = 1.17$ графики функций $\operatorname{ctg}\psi = b$ и $\operatorname{tg}\psi = b/2$ пересекаются. В этом случае оба слагаемых в правой части (1.19) обращаются в нуль, т.е. ситуация становится вырожденной. Для корректного описания процесса синхронизации необходимо искать решения для $r_{1,2}$ с точностью до членов порядка ρ^2 , а в уравнении (1.18) появятся слагаемые $\sim \rho^3$.

На рис. 1.3 построены линии седлоузловых бифуркаций, ограничивающие области синфазной и противофазной синхронизации, в изохронном случае ($b = 0$). Синфазной мы называем ту моду, для которой при $\Delta = 0$ разность фаз $\varphi = 0$, а противофазной — ту, для которой $\varphi = \pi$. При $\psi = 0$ связь чисто диссипативная и возможна только синфазная синхронизация (см. рис. 1.3(а)). Далее с увеличением ψ начинает сказываться инерционная связь и появляется область противофазной синхронизации (рис. 1.3(б,в)). Внутри этой области наблюдается мультистабильность синхронных режимов (иногда используют термин «фазовая мультистабильность»).

При $\psi = \pi/2$ связь становится чисто инерционной (рис. 1.3(г)) и границы синфазной и противофазной синхронизации совпадают, т.е. фазовая бистабильность наблюдается во всей области синхронизации. С дальнейшим увеличением набег фазы границы синхронизации на синфазной и противофазной моде меняются местами. Из рис. 1.3(д) видно, что теперь при слабой связи синхронизация возможна только на противофазной моде. При $\psi = \pi$ связь снова становится чисто диссипативной, однако генераторы синхронизируются в противофазе (см.рис. 1.3(е)). Понятно, что принципиальной разницы между рис. 1.3(а) и 1.3(е) нет: во втором случае за время прохождения по каналу связи сигнал приобретает дополнительный фазовый сдвиг $\psi = \pi$ и поступает в колебательную систему другого генератора точно в фазе с его собственными колебаниями.

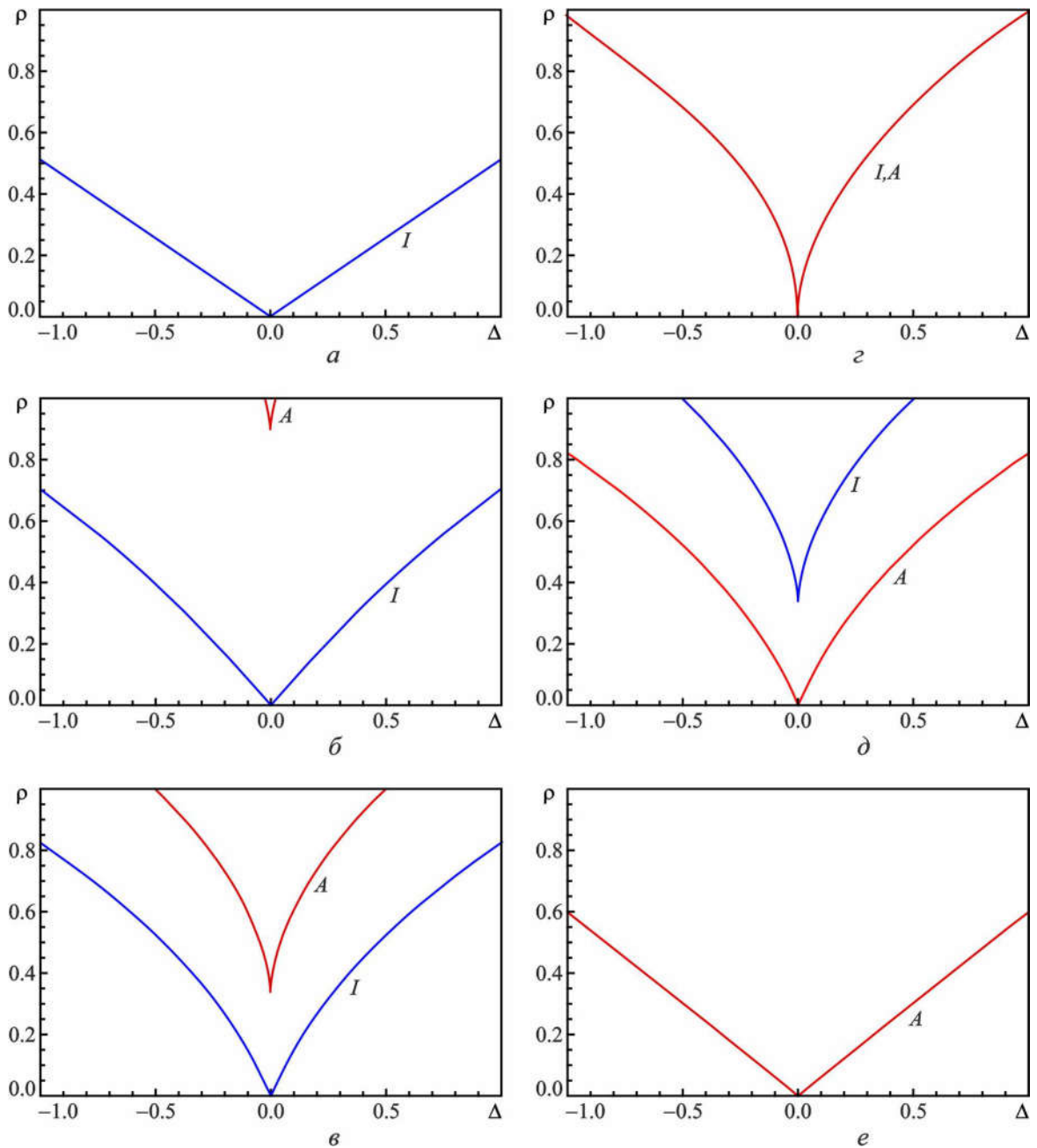


Рис. 1.3. Области синфазной (I) и противофазной (A) синхронизации на плоскости параметров Δ, ρ при $b = 0$ и для различных значений набега фазы: $\psi = 0.0\pi$ (а), 0.3π (б), 0.4π (в), 0.5π (г), 0.6π (д), 1.0π (е).

Рассмотрим, как трансформируется эта картина под влиянием неизохронности. На рис. 1.4 построены границы синфазной и противофазной синхронизации при $b = 1.0$. В данном случае связь является чисто диссипативной при $\psi = \text{arctg}(1/2) \approx 0.14\pi$ (см. рис.1.4(а)). С увеличением параметра ψ происходят трансформации картины синхронизации, аналогичные тем, что наблюдались в изохронном случае. Однако можно заметить, что инерционная

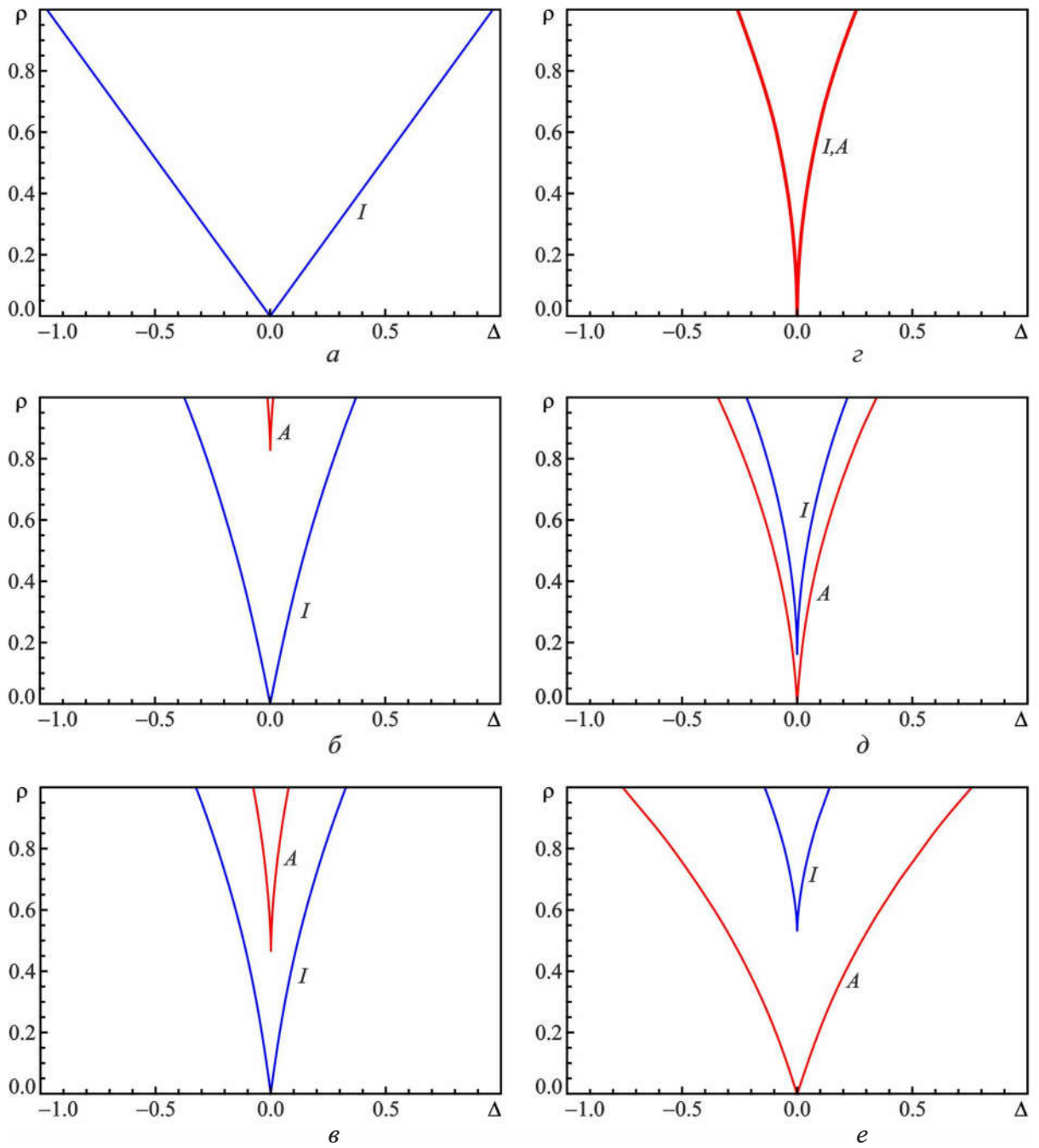


Рис. 1.4. Области синфазной (I) и противофазной (A) синхронизации на плоскости параметров Δ, ρ при $b = 1.0$ и для различных значений набега фазы: $\psi = 0.14\pi$ (а), 0.22π (б), 0.23π (в), 0.25π (г), 0.26 (д), 0.35 (е).

связь начинает сказываться при меньших значениях набега фазы (ср. рис. 1.3(б) и рис. 1.4(б)), а полоса синхронизации становится заметно уже (см.рис. 1.4(в-д)). Случай чисто инерционной связи реализуется при $\psi = \pi/4$ (см.рис.1.4(г)).

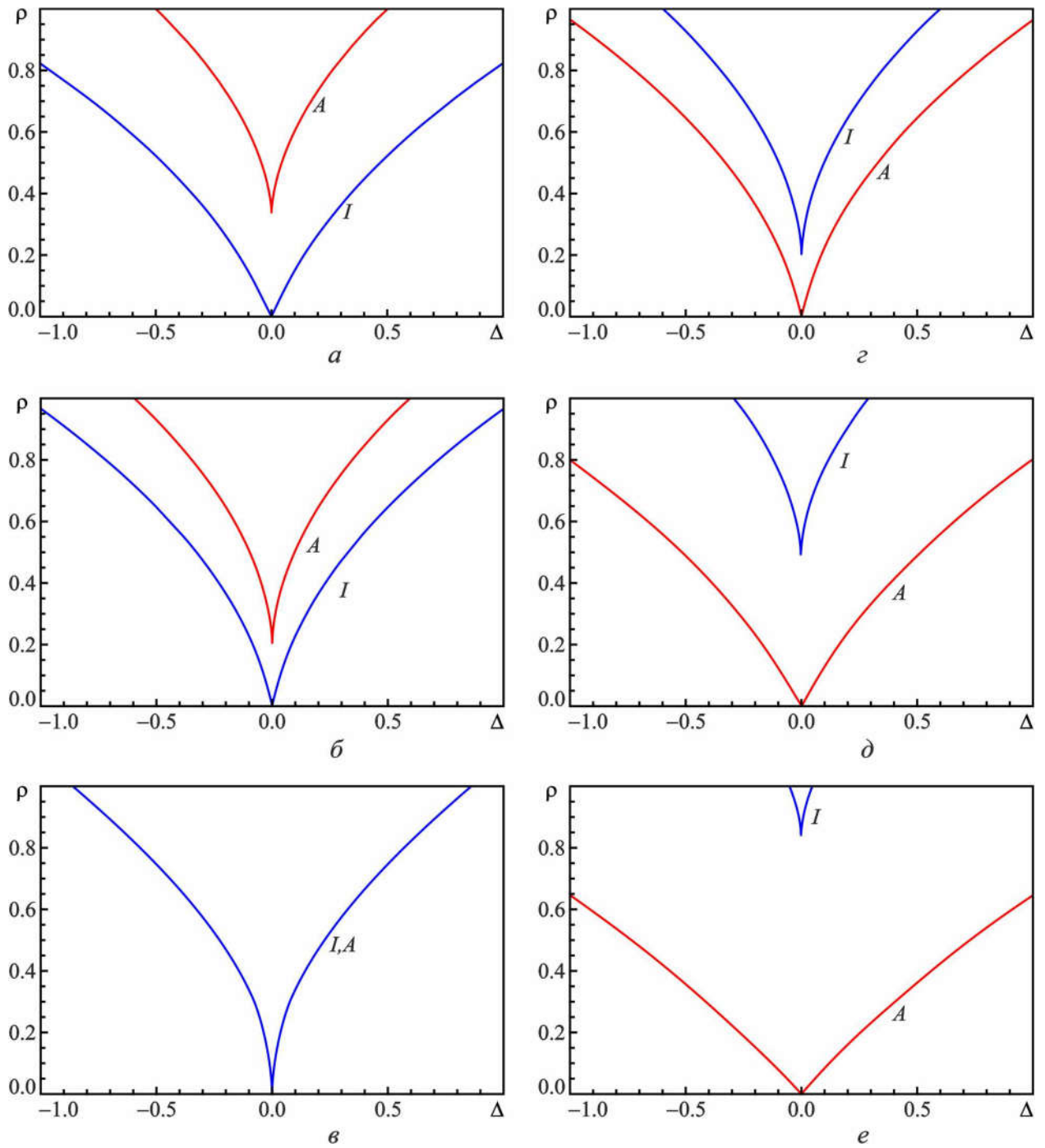


Рис. 1.5. Области синфазной (I) и противофазной (A) синхронизации на плоскости параметров Δ , ρ при $\psi = 0.4\pi$ и для различных значений параметра неизохронности: $b = 0$ (а), 0.25 (б), 0.32 (в), 0.5 (г), 0.75 (д), 1.0 (е).

Теперь выберем значение набега фазы равным $\psi = 0.4\pi$ и пронаблюдаем трансформацию областей синхронизации при увеличении неизохронности. В изохронном случае при таком значении набега фазы доминирует инерционная связь. Соответственно, на рис. 1.5(а) видны области синхронизации как на синфазной, так и на противофазной моде. С увеличением неизо-

хронности область противофазной синхронизации растет в размерах, а область синфазной синхронизации, наоборот, уменьшается (рис. 1.5(б)). При $b = \operatorname{ctg}(0.4\pi) \approx 0.32$ границы совпадают друг с другом, поскольку в этом случае связь становится чисто инерционной (рис. 1.5(в)). При дальнейшем увеличении параметра неизохронности b происходят трансформации, аналогичные тем, что происходили при изменении ψ : границы областей синхронизации на синфазной и противофазной моде меняются местами (рис. 1.5(в-е)). Теперь при слабой связи возможна синхронизация только на противофазной моде.

1.3. Анализ синхронизации в амплитудно-фазовом приближении.

Изохронные осцилляторы

Поскольку фазовое приближение дает лишь упрощенное описание процессов синхронизации в области малых расстройек и, соответственно, слабой связи, перейдем к построению более полной картины синхронизации в рамках системы амплитудно-фазовых уравнений (1.9). Исследование будем проводить с помощью известного программного пакета ХРРАУТ [48], который предназначен для бифуркационного анализа динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Вначале для простоты будем рассматривать случай, когда связанные осцилляторы являются изохронными ($b = 0$), а обсуждение синхронизации неизохронных осцилляторов отложим до раздела 1.4.

Прежде всего, построим языки синхронизации, т.е. области устойчивости синхронных режимов на плоскости параметров частотная расстройка Δ — коэффициент связи ρ , при различных значениях набега фазы ψ (рис. 1.6). Границы областей устойчивости образованы линиями седлоузловой бифуркации $SN_{1,2}$ и бифуркации Андронова–Хопфа $AH_{1,2}$. Здесь индекс 1 соответствует синфазной моде колебаний, индекс 2 — противофазной.

Отметим, что результаты, полученные с помощью программного пакета ХРРАУТ, полностью согласуются с результатами непосредственного численного интегрирования уравнений (1.9), см. рис. 1.6(в), где численные результаты показаны кружками. Численное моделирование проводилось с использованием стандартного метода Рунге–Кутты 4-го порядка (см., например, [49]).

Полученные результаты обнаруживают ряд отличий по сравнению с фазовым приближением (см. раздел 1.2 и [32]). Прежде всего отметим, что область, соответствующая синхронизации на противофазной моде, появляется только при $\pi/4 < \psi < 3\pi/4$. В рамках фазового приближения она существует при любых ψ , однако при малых ψ лежит в области больших ρ , где фазовое приближение уже несправедливо. Еще одно отличие от фазового приближения состоит в том, что граница устойчивости для противофазной моды является замкнутой в области больших ρ (рис. 1.6(б,в)).

Тем не менее, подтверждается сам факт наличия бистабильности, т.е. сосуществования режимов как синфазной, так и противофазной синхронизации. При увеличении значения ψ область синхронизации на противофазной моде увеличивается в размерах, опускаясь вниз. При $\psi = \pi/2$ (рис. 1.6(г)) границы языков для противофазной и синфазной мод сливаются, т.е. фазовая бистабильность существует во всей области синхронизации. В области малых расстройек язык имеет характерную корневую особенность (т.е. $\rho \sim \sqrt{\Delta}$), что также согласуется с результатами анализа в фазовом приближении.

Тот факт, что фазовая бистабильность существует при $\pi/4 < \psi < 3\pi/4$ можно показать аналитически. Как видно из рис. 1.6, минимальное значение ρ , при котором возникает противофазная мода, имеет место при $\Delta = 0$. Проведем анализ решений (1.13) на устойчивость, следуя [44]. После стандартной процедуры линеаризации относительно малых возмущений придем к характеристическому уравнению, которое для противофазной моды имеет вид

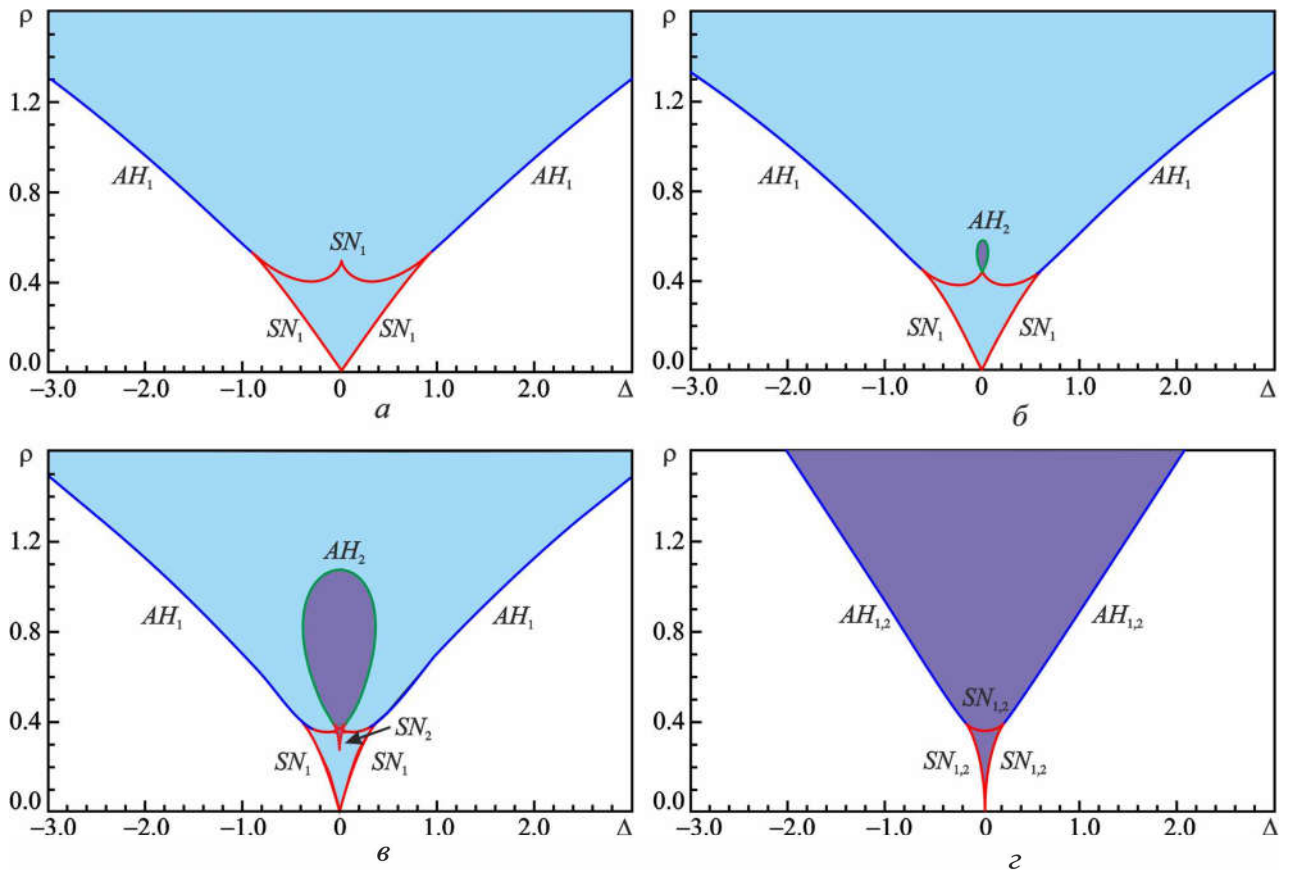


Рис. 1.6. Границы седлоузловых бифуркаций ($SN_{1,2}$) и бифуркаций Андронова — Хопфа ($AH_{1,2}$) на плоскости параметров Δ, ρ при $\psi = 0.2\pi$ (а), 0.3π (б), 0.4π (в) и 0.5π (г). Области устойчивости синхронных режимов закрашены.

$$\begin{aligned}
 & p^3 + 4p^2(1 - 2\rho \cos \psi) + 4p(1 - 5\rho \cos \psi + 4\rho^2 \cos^2 \psi) + \\
 & + 8\rho(\rho - (1 + \rho^2) \cos \psi + 2\rho \cos^2 \psi - \rho^2 \cos^3 \psi) = 0.
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Из уравнения (1.22) можно найти условия возникновения седлоузловой бифуркации и бифуркации Андронова–Хопфа. Для седлоузловой бифуркации корень характеристического уравнения равен нулю. Тогда из уравнения (1.22) получаем

$$\rho = \frac{\cos \psi}{1 + \cos^2 \psi}. \tag{1.23}$$

В случае бифуркации Андронова–Хопфа имеется два чисто мнимых корня характеристического уравнения, $p = \pm i\omega$. Подставив в (1.22) и разделив в нем действительную и мнимую части, получим

$$(4 - \rho \cos \psi) \omega^2 + 8\rho \cos \psi - 8\rho^2(1 + 2\cos^2 \psi) + 8\rho^3 \cos \psi(1 + \cos^2 \psi) = 0, \quad (1.24)$$

$$\omega^3 - 4\omega + 20\omega\rho \cos \psi - 4\omega\rho^2(1 + 4\cos^2 \psi) = 0.$$

Исключая из этих соотношений ω , получим кубическое уравнение относительно ρ , один из корней которого задает порог бифуркации Андронова–Хопфа (см. [44]):

$$\rho = \frac{1}{3 \cos \psi}. \quad (1.25)$$

Значения ρ , определенные по формулам (1.23) и (1.25), соответствуют нижней и верхней границам области противофазной синхронизации при $\Delta = 0$ на рис. 1.6. На рис. 1.7 приведены зависимости $\rho(\psi)$, построенные в соответствии с (1.23), (1.25). Поскольку точка седлоузловой бифуркации лежит ниже точки бифуркации Андронова–Хопфа только при $\psi > \pi/4$, область противофазной синхронизации появляется только при выполнении этого условия. Результаты численного моделирования, показанные на рис. 1.7 кружками, полностью согласуются с теоретическими формулами. При $\psi = \pi/2$ порог бифуркации Андронова–Хопфа (1.25) стремится к бесконечности (рис. 1.7), что также хорошо согласуется с результатами, полученными при анализе плоскости параметров Δ, ρ (рис. 1.6(г)). При $\psi > \pi/2$ в формулах (1.23), (1.25) следует изменить знак, так как появление фазовой бистабильности обусловлено возбуждением не противофазной, а синфазной моды.

Структуру языков синхронизации помогают прояснить бифуркационные диаграммы, построенные при помощи пакета XPPAUT (см. рис. 1.8). Рассмотрим вначале случай $\psi = 0.2\pi$ (рис. 1.8), когда доминирует диссипативная связь. На рис. 1.8(а) сплошными линиями показаны устойчивые положения равновесия, штриховыми — неустойчивые. На бифуркационной диаграмме отложены только значения R_1 . Приводить значения для амплитуды колебаний второго осциллятора нет необходимости, поскольку, как уже отмечалось ранее, для синфазной и противофазной мод $R_2 = R_1$, а

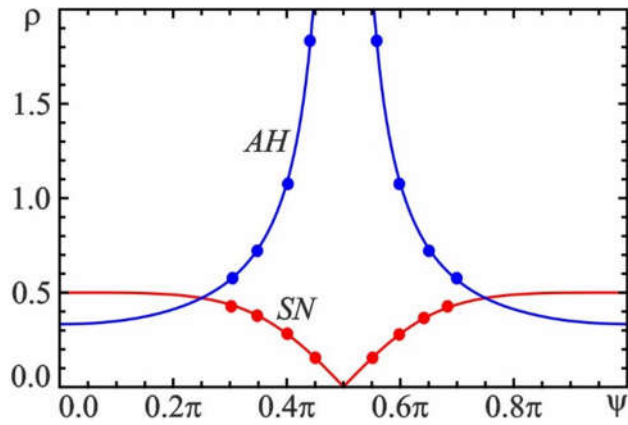


Рис. 1.7. Границы седлоузловой бифуркации (*SN*) и бифуркации Андронова–Хопфа (*AH*) при $\Delta = 0$, построенные по формулам (1.23) и (1.25) соответственно. Кружками отмечены точки, полученные в результате численного моделирования.

несимметричные решения попарно симметричны друг другу. В случае в случае ненулевой расстройки это вырождение снимается (ср. рис. 1.8(б,в), где приведены бифуркационные диаграммы как для первого, так и для второго осциллятора при расстройке $\Delta = 0.1$).

Как видно из рис. 1.8(а), при малых значениях коэффициента связи ρ существует устойчивая неподвижная точка, соответствующая синфазной моде (*I*), и три неустойчивых точки, соответствующие противофазной моде (*A*) и двум несимметричным решениям ($U_{1,2}$). Более наглядно поведение системы в этом случае иллюстрирует фазовый портрет, построенный на рис. 1.9. Фазовые траектории построены с помощью численного интегрирования уравнений (1.9). Можно видеть, что седловая точка *A* имеет двумерное устойчивое и одномерное неустойчивое многообразия, а несимметричные точки $U_{1,2}$, напротив, имеют одномерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразия. Отметим, что две устойчивые точки *I* на рис. 1.9 фактически соответствуют одному и тому же синфазному решению, поскольку по координате φ фазовые траектории периодичны с периодом 2π ($\varphi = 0$ или 2π). Для неустойчивой точки *A* разность фаз $\varphi = \pi$, то есть это противофазная мода колебаний.

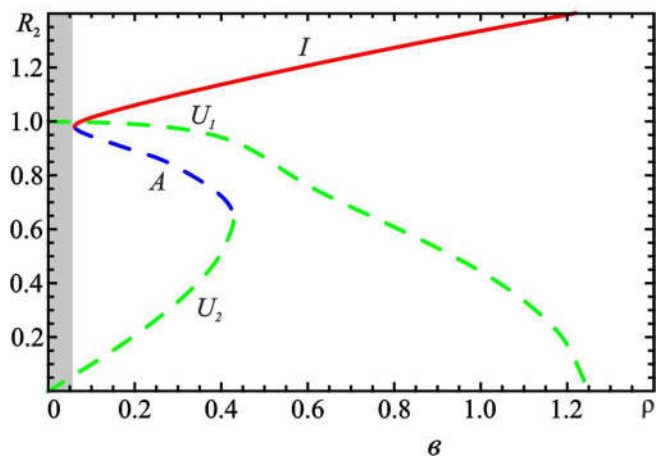
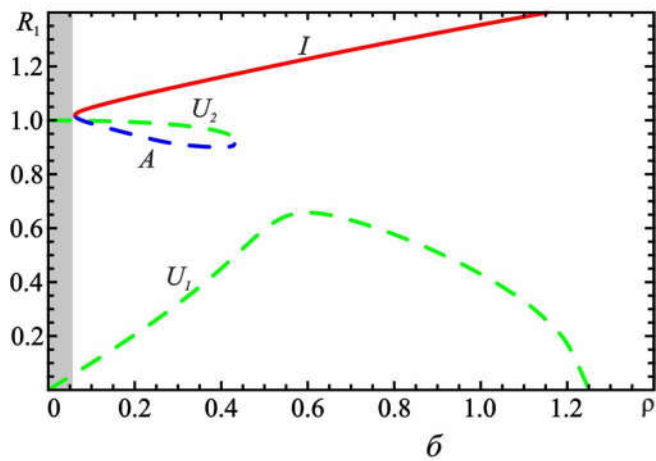
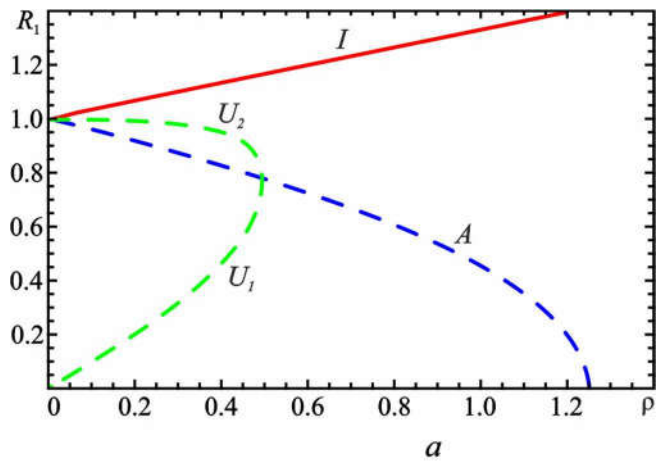


Рис. 1.8. Бифуркационные диаграммы для состояний равновесия при $\psi = 0.2\pi$, $\Delta = 0$ (а) и $\Delta = 0.1$ (б,в). Сплошными линиями показаны устойчивые точки, пунктирными — неустойчивые. Области существования устойчивого предельного цикла показаны серым цветом.

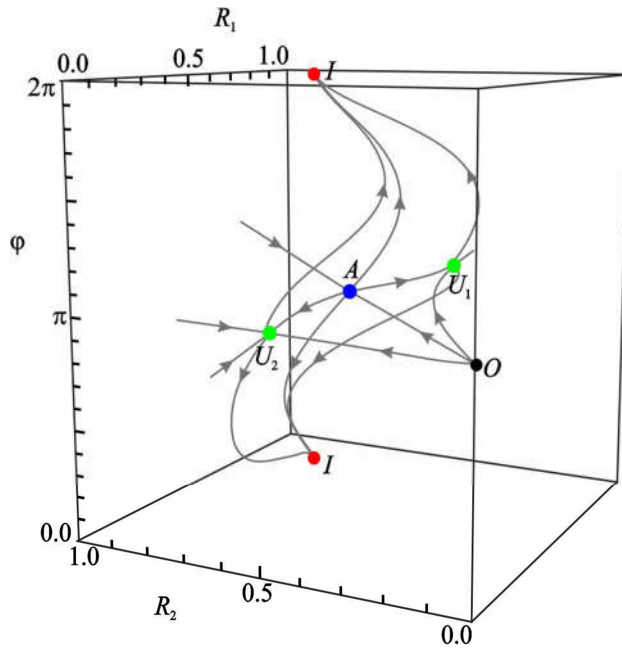


Рис. 1.9. Фазовый портрет для системы (1.9) при $\psi = 0.2\pi$, $\Delta = 0$ и $\rho = 0.2$.

При $\rho \approx 0.51$ точки $U_{1,2}$ сливаются с A и исчезают. Кроме того, при $\rho = 1/\cos\psi \approx 1.24$ (см. (1.14)) происходит еще одна седлоузловая бифуркация, в результате которой седловая точка A сливается с неустойчивой точкой O . Однако, эта бифуркация всегда происходит при достаточно большой связи $\rho > 1$.

Как уже отмечалось, в случае ненулевой расстройки $\Delta \neq 0$ симметрия (1.15) нарушается. На рис. 1.8(б,в) построены бифуркационные диаграммы для амплитуд обоих осцилляторов (R_1 и R_2). Поскольку $\Delta \neq 0$, при слабой связи наблюдается режим биений, которому в фазовом пространстве соответствует устойчивый предельный цикл (на рис. 1.8(б,в) область существования устойчивого предельного цикла показана серым). При малых Δ увеличение ρ приводит к седлоузловой бифуркации и появлению точек I и A . С дальнейшим увеличением параметра связи, происходит еще одна седлоузловая бифуркация, в результате которой A сливается с U_2 (или с U_1 если $\Delta < 0$).

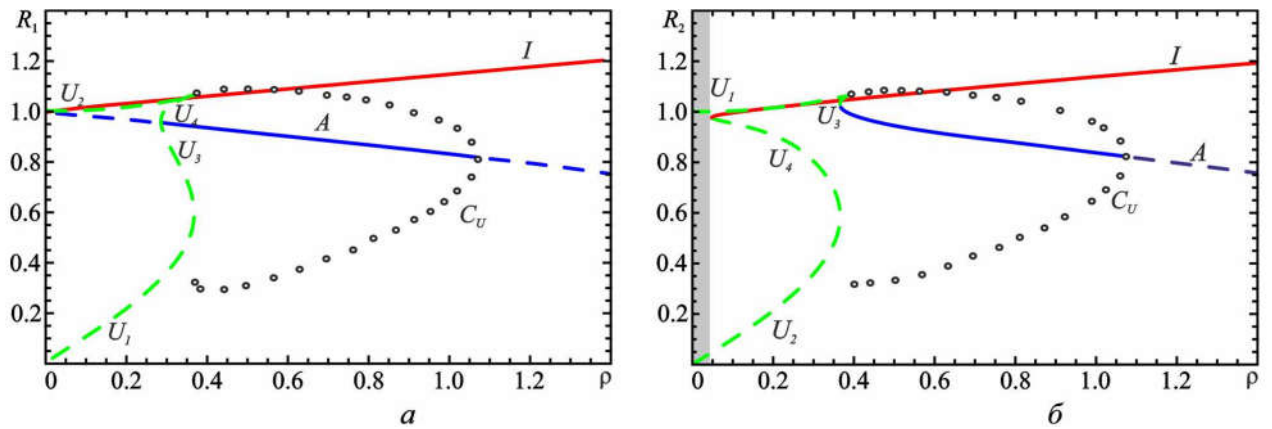


Рис. 1.10. Бифуркационные диаграммы для состояний равновесия и предельных циклов при $\psi = 0.4\pi$, $\Delta = 0$ (а) и $\Delta = 0.03$ (б). Сплошными линиями показаны устойчивые точки, пунктирными – неустойчивые, кружками – неустойчивый предельный цикл. Области существования устойчивого предельного цикла показаны серым цветом.

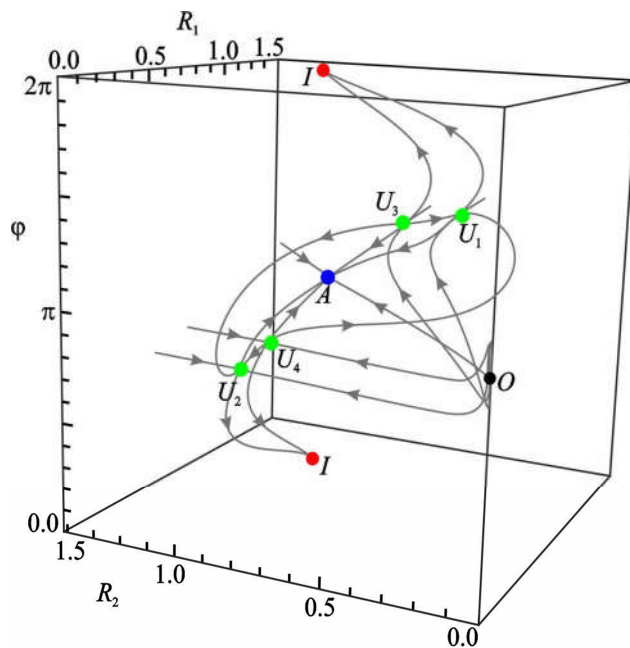


Рис. 1.11. Фазовый портрет для системы (1.9) при $\psi = 0.4\pi$, $\Delta = 0$, $\rho = 0.36$.

Более сложная ситуация имеет место в случае, когда доминирует инерционная связь (рис. 1.10). В случае нулевой расстройки условие седлоузловой бифуркации (1.23) теперь выполняется при $\rho \approx 0.28$. Отметим, что в рассматриваемом случае, наряду с пятью неподвижными точками, перечисленными в Таблице 1.1, возникают еще два несимметричных решения, которые обозначим $U_{3,4}$ (ср. [44]). На рис. 1.10(а) они ответвляются от точки A в ре-

зультате бифуркации вил, а сама точка A при этом становится устойчивой. Таким образом, возникает мультистабильность синхронных режимов.

На рис. 1.11 построен фазовый портрет, который помогает объяснить устройство бассейнов притяжения двух сосуществующих устойчивых состояний I и A . Видно, что устойчивые и неустойчивые многообразия седловых точек U_{1-4} образуют гетероклинический контур, который лежит на поверхности, разграничивающей эти бассейны притяжения. Рассмотрим, например, самовозбуждение от малых начальных флуктуаций ($R_{1,2}(0) \ll 1$), что является наиболее логичным с физической точки зрения. Видно, что противофазная мода установится, если начальные возмущения будут достаточно близки к противофазным, т.е. $\varphi(0) \approx \pi$. В противном случае будут устанавливаться синфазные колебания.

С дальнейшим увеличением связи точки $U_{1,3}$ и $U_{2,4}$ попарно приближаются друг к другу и в результате двойной седлоузловой бифуркации сливаются и исчезают. Это происходит при $\rho = 1/\sqrt{8(1 - \cos^2 \psi)} \approx 0.372$ (ср. также [44]). В результате происходит образование неустойчивого предельного цикла C_U , который показан на рис. 1.10(а) кружками.² При увеличении ρ цикл C_U уменьшается в размерах и при $\rho \approx 1.076$ происходит обратная бифуркация Андронова–Хопфа. Неустойчивый цикл сливается с устойчивой точкой A , в результате чего она теряет устойчивость. Таким образом, мультистабильность исчезает.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\Delta \neq 0$. На рис. 1.10б приведена соответствующая бифуркационная диаграмма, построенная для амплитуды второго осциллятора, так как она иллюстрирует бифуркационные механизмы более наглядно. При малых ρ существуют два несимметричных решения $U_{1,2}$ и устойчивый предельный цикл. С увеличением параметра связи происходят

² Программный пакет ХРРАУТ позволяет построить максимальные и минимальные значения переменных, отвечающие предельному циклу. В силу того, что мы в качестве одной из переменных рассматриваем разность фаз φ , на бифуркационных диаграммах можно нанести только стягиваемые циклы, т.е. такие, для которых φ изменяется в конечных пределах.

две седлоузловые бифуркации. При $\rho \approx 0.048$ рождаются устойчивая точка I и седловая точка U_4 , в результате устанавливается режим синфазной синхронизации. При $\rho \approx 0.365$ рождаются неустойчивая точка A , соответствующая противофазной синхронизации и седло U_3 . Таким образом, появляется бистабильность синхронных режимов. С дальнейшим увеличением ρ , точки $U_{2,4}$ и $U_{1,3}$ попарно сближаются и исчезают при $\rho \approx 0.366$ и $\rho \approx 0.380$, соответственно. В результате данных бифуркаций внутри гетероклинического контура рождается неустойчивый предельный цикл C_U . Как и в случае $\Delta = 0$, при $\rho \approx 1.076$ происходит обратная бифуркация Андронова-Хопфа и бистабильность исчезает.

Следует отметить, что амплитуда противофазной моды уменьшается с увеличением параметра связи ρ (рис. 1.10). Таким образом, при достаточно больших ρ эффективная амплитуда сигнала $\rho R_{1,2}$, поступающего из канала связи в колебательные системы генераторов, начинает уменьшаться. Соответственно, начинает уменьшаться ширина полосы синхронизации на противофазной моде. Этим объясняется тот факт, что область синхронизации на противофазной моде на плоскости Δ, ρ является замкнутой (см. рис. 1.6(б)). Для синфазной моды амплитуда, наоборот, увеличивается, с ростом связи, поэтому увеличивается и ширина полосы синхронизации.

Далее остановимся на анализе поведения при изменении частотной расстройки. На рис. 1.12 и 1.13 показаны бифуркационные диаграммы при значениях набега фазы $\psi = 0.2\pi$ и 0.4π соответственно, построенные в координатах R_1, Δ при различных значениях коэффициента связи. Эти кривые фактически представляют собой зависимости амплитуды колебаний от частотной расстройки, т.е. амплитудно-частотные характеристики или резонансные кривые.

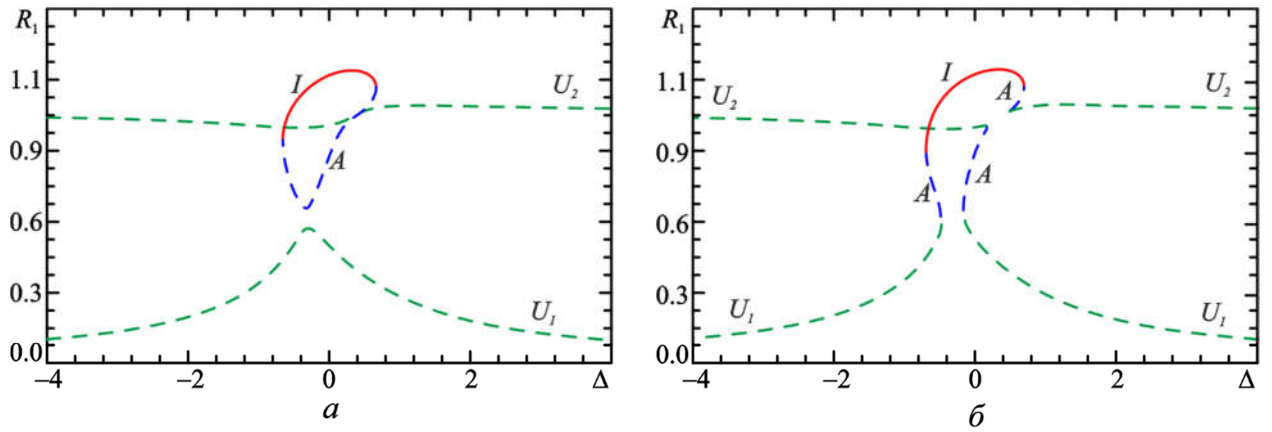


Рис. 1.12. Зависимость амплитуды первого осциллятора для $\psi = 0.2\pi$ при различных значениях параметра связи: $\rho = 0.197$ (а) и 0.204 (б). Сплошными линиями показаны устойчивые точки, пунктирными – неустойчивые.

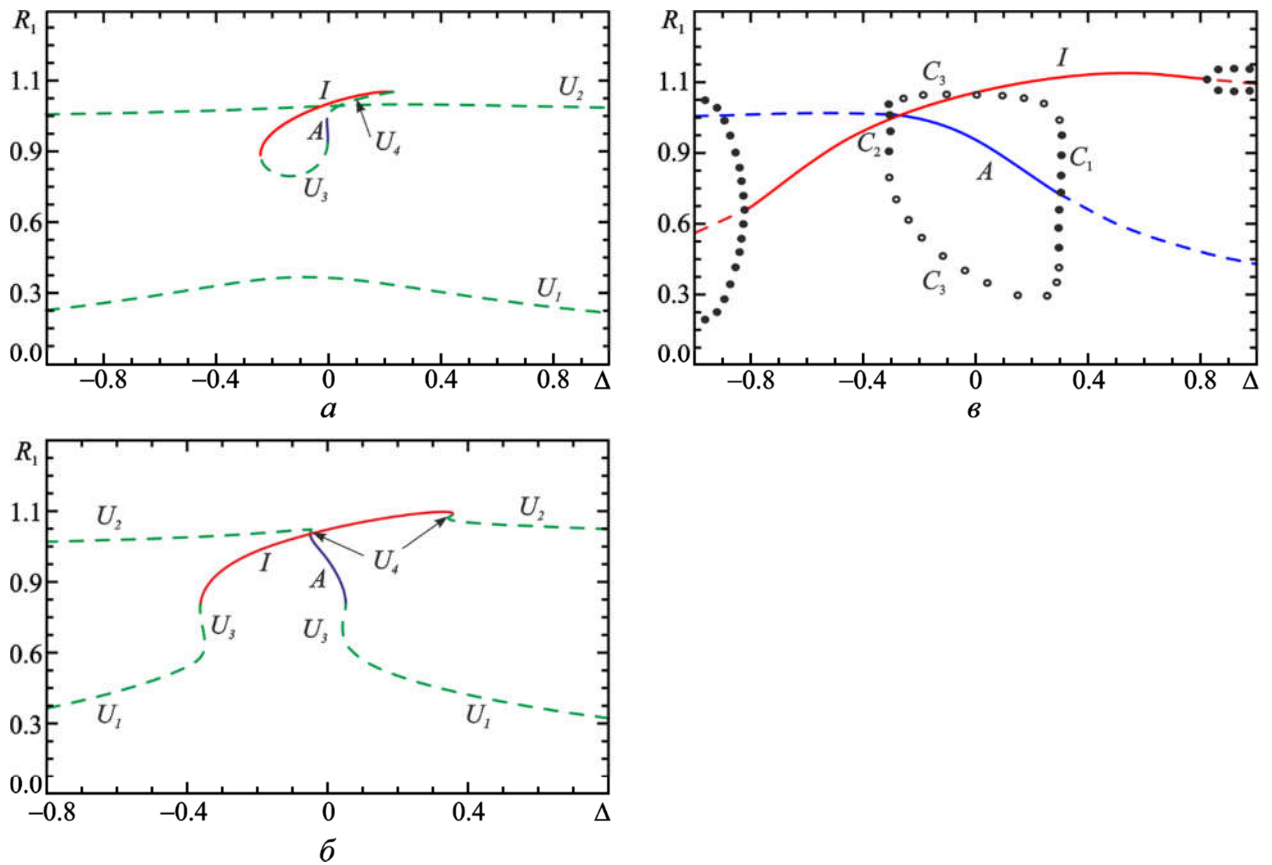


Рис. 1.13. Зависимость амплитуды первого осциллятора для $\psi = 0.4\pi$ при различных значениях параметра связи $\rho = 0.3$ (а), 0.388 (б) и 0.6 (в). Сплошными линиями показаны устойчивые точки, пунктирными — неустойчивые, темными кружками — устойчивые циклы, светлыми — неустойчивые.

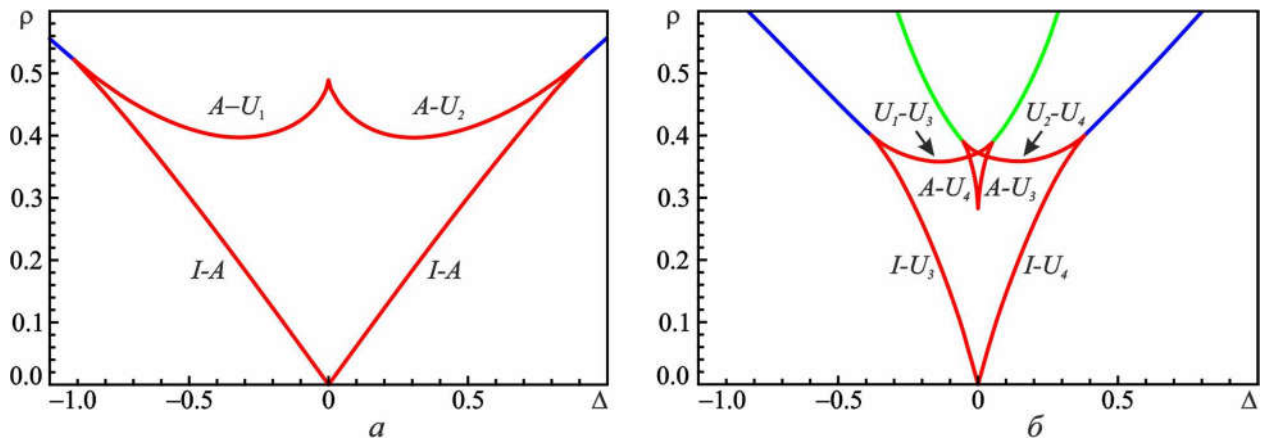


Рис. 1.14. Границы седлоузловых бифуркаций на плоскости параметров Δ, ρ при $\psi = 0.2\pi$ (а) и 0.4π (б).

В случае, когда преобладает диссипативная связь (рис. 1.12), устойчивой является только синфазная мода (I). Также присутствуют решения, соответствующие противофазной моде (A) и двум несимметричным модам ($U_{1,2}$), которые неустойчивы. Видно, что при увеличении расстройки происходит седлоузловая бифуркация, в результате которой точки I и A сливаются и исчезают. Помимо этого, также происходят бифуркации, связанные со слиянием точек A и $U_{1,2}$, см. рис. 1.12(б). Они приводят к перезамыканию резонансных кривых.

На рис. 1.14(а) приведены границы седлоузловой бифуркации на плоскости параметров Δ, ρ (это по сути увеличенный фрагмент рис. 1.6(а)) и отмечено, слияние каких точек происходит на той или иной границе. На боковых границах, т.е. при выходе за пределы языка синхронизации, сливаются точки I и A . Верхняя граница состоит из двух участков, которые соответствуют слиянию точки A с точкой U_1 или U_2 .

В случае, когда доминирует инерционная связь, устойчивыми могут быть колебания как на синфазной, так и противофазной моде. При малом значении параметра связи (рис. 1.13(а)) помимо устойчивых точек I и A существуют также четыре несимметричных неустойчивых точки. При изменении расстройки имеют место седлоузловые бифуркации, связанные со слиянием точек I, A с точками $U_{3,4}$. При увеличении ρ также происходят бифур-

кации, связанные со слиянием точек U_1-U_3 и U_2-U_4 . При этом происходит пере замыкание резонансных кривых (см. рис. 1.13(б)).

На рис. 1.14б приведены границы седлоузловой бифуркации на плоскости Δ, ρ для этого случая (ср. рис. 1.6(в)). Видно, что наличие разнообразных седлоузловых бифуркаций обуславливает сложную структуру бифуркационных линий. Ранее подобная структура была продемонстрирована в работе [50], где рассматривалась синхронизация двух инерционно связанных осцилляторов Ван дер Поля.

На рис. 1.13(в) приведена бифуркационная диаграмма, построенная при достаточно большом значении параметра связи, когда синхронные режимы теряют устойчивость в результате бифуркации Андронова–Хопфа, что соответствует механизму синхронизации подавлением (ср. рис. 1.6(в)). Видно, что при этом происходит рождение устойчивых предельных циклов. Однако циклы $C_{1,2}$, образовавшиеся на основе противофазной моды, существуют только в очень узком интервале параметра Δ . При дальнейшем увеличении расстройки они сливаются с неустойчивым циклом C_3 . Этот цикл лежит на поверхности, которая разграничивает бассейны притяжения двух аттракторов. После этого мультистабильность в системе исчезает и остается единственный аттрактор (точка L). Отметим, что похожее поведение было ранее описано в [50].

1.4. Синхронизация связанных неизохронных осцилляторов

Как уже отмечалось, неизохронность может оказывать существенное влияние на условия возникновения синхронизации. В частности, изменяются условия, при которых доминирует диссипативная либо инерционная связь. Рассмотрим вначале набег фазы $\psi = 0.2\pi$. Как было показано выше (см. рис. 1.6(а)), в изохронном случае при таком значении ψ связь носит диссипативный характер и возможна синхронизация только на синфазной моде. Однако с увеличением параметра неизохронности появляется дополнительный фазовый набег, зависящий от амплитуды. В результате картина областей

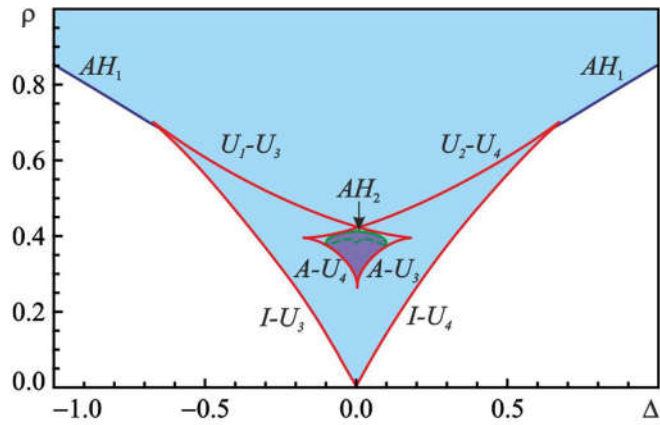


Рис. 1.15. Бифуркационные линии на плоскости параметров Δ, ρ при $\psi = 0.2\pi$, $b = 0.8$. Красные линии – седлоузловые бифуркации, синие – бифуркация Андронова–Хопфа для синфазной моды, зеленые – для противофазной.

синхронизации претерпевает изменения, аналогичные описанным в п. 1.3, которые происходят по мере увеличения параметра ψ . Как показывает бифуркационный анализ, начиная с $b > b_c \approx 0.45$ возникает область синхронизации на противофазной моде, т.е. появляется мультистабильность режимов синхронизации. Рис. 1.15 демонстрирует устройство областей синхронизации для такой ситуации ($b = 0.8$). Видно, что существует небольшая область бистабильности, ограниченная сверху линией обратной бифуркации Андронова–Хопфа (AH_2). На рисунке также обозначено, на какой линии происходит рождение и исчезновение тех или иных неподвижных точек.

На рис. 1.16 приведены соответствующие бифуркационные диаграммы. Рассмотрим сначала для простоты случай $\Delta = 0$ (рис. 1.16(a)). При малых значениях коэффициента связи ρ существуют четыре решения I, A и $U_{1,2}$. Среди них только точка I , соответствующая синфазной моде колебаний, является устойчивой. Данная ситуация аналогична случаю изохронных осцилляторов (рис. 1.6(a)). Однако, при $\rho \approx 0.25$ происходит бифуркация «вил», в результате которой от неустойчивой точки A , соответствующей противофазной моде колебаний, ответвляются еще две седловые точки $U_{3,4}$, после чего

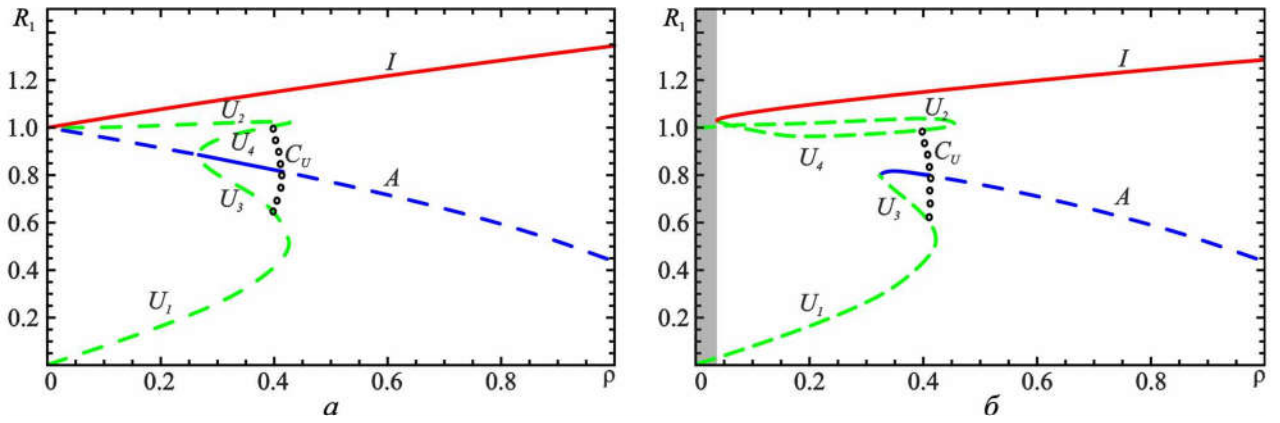


Рис. 1.16. Бифуркационные диаграммы при $\psi = 0.2\pi$, $b = 0.8$, $\Delta = 0$ (а), $\Delta = 0.025$ (б). Сплошными линиями показаны устойчивые точки, пунктирными – неустойчивые, кружками – неустойчивый предельный цикл.

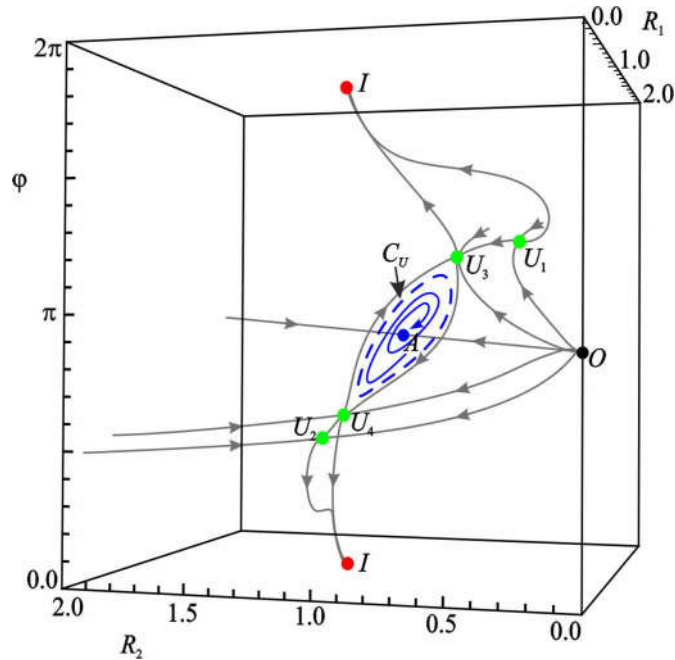


Рис. 1.17. Фазовый портрет при $\psi = 0.2\pi$, $b = 0.8$, $\Delta = 0$, $\rho = 0.4$.

она становится устойчивой. Аналогичное поведение отмечалось в п. 1.3 для изохронных осцилляторов в случае больших ψ (ср. рис. 1.10(а)).

Дальнейшее увеличение параметра ρ приводит к рождению неустойчивого предельного цикла C_U , который сливается с устойчивой точкой A в результате обратной бифуркации Андронова-Хопфа. Таким образом, механизм исчезновения бистабильности остается таким же, как и в изохронном случае. Однако в данном случае рождение цикла C_U происходит в результате

нелокальной бифуркации, в то время как седловые точки $U_{1,3}$ и $U_{2,4}$ попарно сливаются и исчезают при более сильной связи $\rho \approx 0.45$.

На рис. 1.17 построен фазовый портрет, который помогает объяснить устройство бассейнов притяжения в случае бистабильности. Как и на рис. 1.11, существует гетероклинический контур. Однако в данном случае контур образован многообразиями только двух седловых точек U_3 и U_4 . Неустойчивый предельный цикл C_U отделяется от данного контура в результате нелокальной бифуркации. Как и в изохронном случае, противофазная синхронизация может устанавливаться только если начальная фаза $\varphi(0)$ близка к π .

Обсудим теперь особенности синхронизации при ненулевой расстройке. На рис. 1.16(б) построена бифуркационная диаграмма для $\Delta = 0.025$. При слабой связи существуют только две седловые точки $U_{1,2}$ и устойчивый предельный цикл, отвечающий режиму биений. Область существования этого цикла на рис. 1.16(б) показана серым. Рождение двух устойчивых точек I и A происходит в результате двух седлоузловых бифуркаций при $\rho \approx 0.04$ и $\rho \approx 0.33$, соответственно (ср. рис. 1.10(б)).

При дальнейшем росте параметра неизохронности b структура областей синхронизации меняется нетривиальным образом. На рис. 1.18 приведены области устойчивости синхронных режимов на плоскости параметров частотная расстройка Δ — коэффициент связи ρ , при $\psi = 0.4\pi$ и различных значениях параметра b . При выбранном значении ψ трансформация областей синхронизации носит более наглядный характер, чем при $\psi = 0.2\pi$.

При $b = 0.25$ картина синхронизации качественно похожа на случай изохронных осцилляторов (см. рис. 1.6(б)). Однако с увеличением b картина синхронизации меняется. Область противофазной синхронизации увеличивается в размерах и выходит за границы области синфазной синхронизации (рис. 1.18(в-г)). Причем граница области синхронизации на синфазной моде отрывается от горизонтальной оси, то есть при слабой связи возможна син-

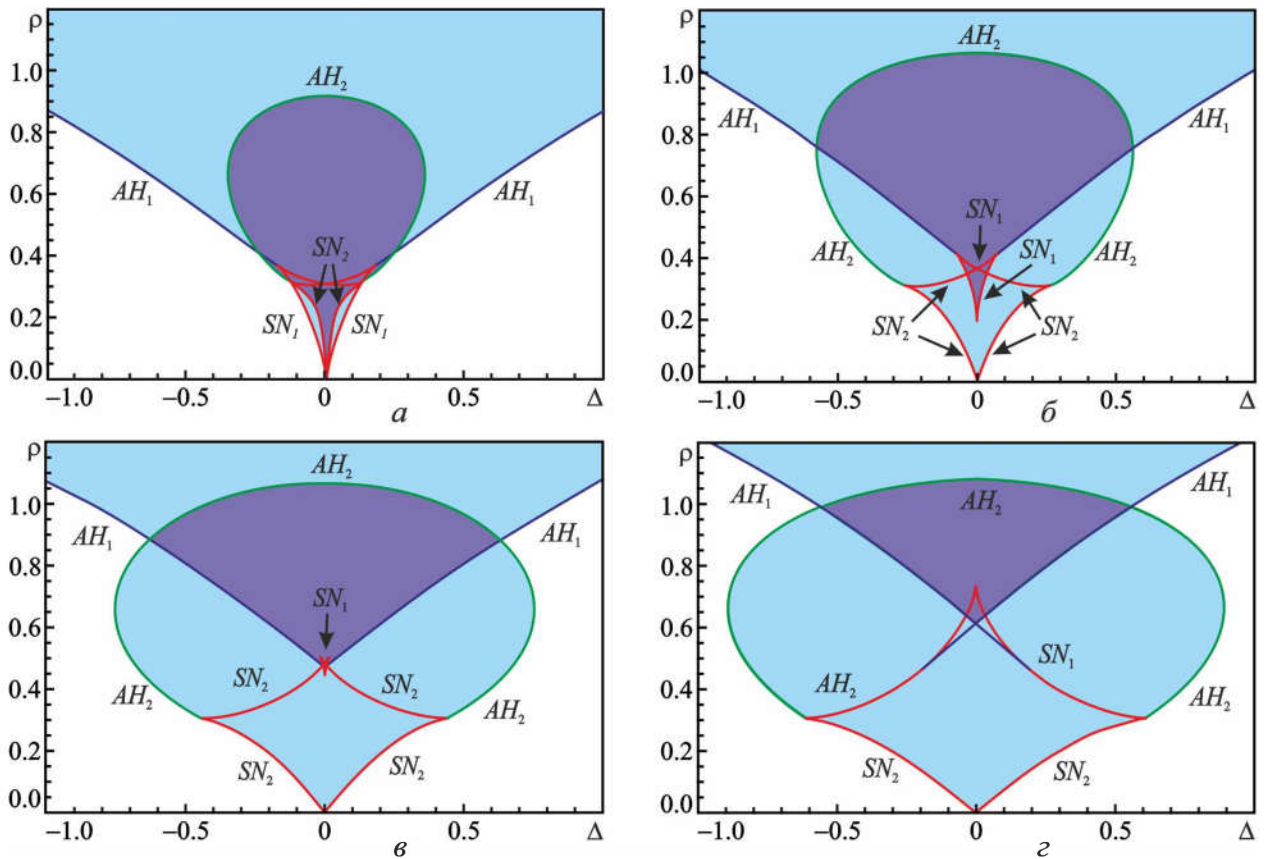


Рис. 1.18. Границы седлоузловых бифуркаций ($SN_{1,2}$) и бифуркаций Андронова — Хопфа ($AH_{1,2}$) на плоскости параметров Δ, ρ при $\psi = 0.4\pi$, $b = 0.25$ (а), 0.5 (б), 0.75 (в), 1.0 (г). Области мультистабильности синхронных режимов закрашены фиолетовым цветом.

хронизация только на противофазной моде. Такое поведение хорошо согласуется с фазовым приближением (см. п. 1.2). Отметим, что, поскольку граница области противофазной синхронизации является замкнутой, при больших значениях параметра неизохронности картина, представленная на рис. 1.18(б-г) уже не имеет вид классического языка или клюва синхронизации (ср. [1-6]).

На рис. 1.19 представлены бифуркационные диаграммы для $b = 0.5$ и различных значений расстройки Δ , которые наглядно иллюстрируют бифуркационные механизмы, в результате которых появляется бистабильность синхронных режимов. Они имеют ряд существенных отличий от аналогичных бифуркационных диаграмм для случая изохронных осцилляторов (см. рис. 1.10).

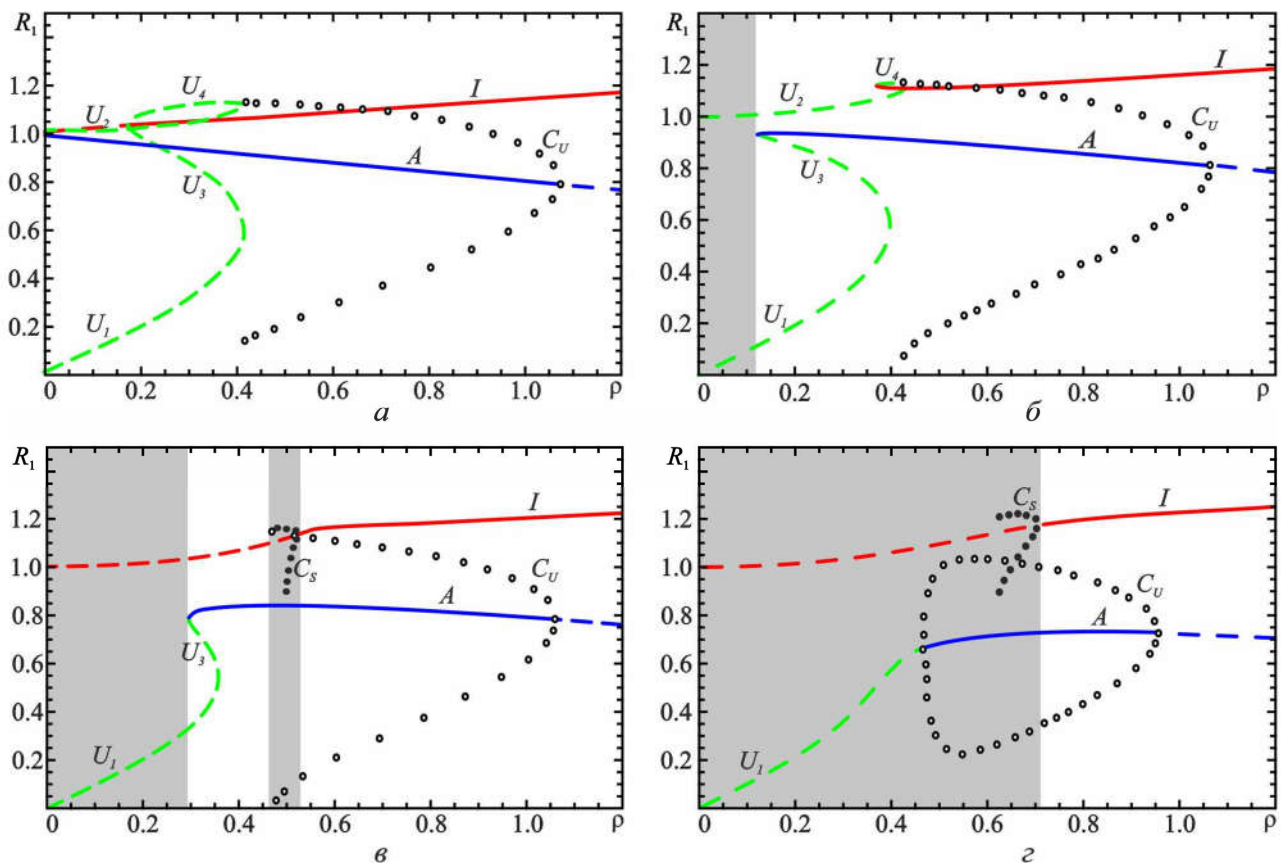


Рис. 1.19. Бифуркационные диаграммы при $\psi = 0.4\pi$, $b = 0.5$, $\Delta = 0$ (а), $\Delta = 0.05$ (б) и $\Delta = 0.2$ (в), $\Delta = 0.5$ (г). Сплошными линиями показаны устойчивые точки, пунктирными — неустойчивые, темными кружками — устойчивый предельный цикл, светлыми кружками — неустойчивый. Область существования устойчивого цикла закрашена серым.

В случае нулевой расстройки (рис. 1.19(а)) при малых значениях параметра связи устойчивой является только одна неподвижная точка A , соответствующая противофазной моде колебаний. При $\rho \approx 0.3$ происходит седло-узловая бифуркация, в результате которой от неустойчивой точки I , соответствующей синфазной моде, ответвляются две седловые точки $U_{3,4}$, после чего она становится устойчивой и возникает мультистабильность. Далее при $\rho \approx 0.4$ происходит слияние точек U_2-U_4 и U_1-U_3 . Из их устойчивых и неустойчивых многообразий образуется неустойчивый предельный цикл C_U , аналогично случаю, описанному в п. 1.3. При дальнейшем увеличении ρ цикл уменьшается в размерах и при $\rho \approx 1.1$ стягивается в точку A . Происхо-

дит обратная бифуркация Андронова–Хопфа, в результате которой точка A становится неустойчивой и мультистабильность исчезает.

В случае малой, но ненулевой расстройки (рис. 1.19(б)), бифуркационная диаграмма напоминает построенную на рис. 1.10(б) для изохронного случая. При малых ρ единственным устойчивым состоянием является режим биений, которому в фазовом пространстве отвечает устойчивый предельный цикл. Область существования этого цикла показана серым. Также существуют неустойчивые несимметричные точки $U_{1,2}$. С увеличением ρ происходят седлоузловые бифуркации, в результате которых рождаются пары точек $A-U_3$ и $I-U_4$. Основное отличие от рис. 1.10(б) заключается в том, что в данном случае синхронизация на противофазной моде возникает при меньших значениях параметра связи, чем для синфазной.

Теперь рассмотрим случай достаточно больших Δ , когда синфазная синхронизация устанавливается в результате бифуркации Андронова-Хопфа (рис. 1.19(в)). Как и в случае малых расстроек, при малых ρ единственным устойчивым состоянием является режим биений, которому в фазовом пространстве отвечает устойчивый предельный цикл. Кроме того, существуют две неустойчивые точки: точка I , отвечающая синфазному решению и точка U_1 , отвечающая несимметричному решению. С увеличением параметра связи, при $\rho \approx 0.29$ происходит седлоузловая бифуркация, в результате которой, аналогично рис. 1.19(б), на цикле образуется еще одна пара точек, одна из которых отвечает противофазному режиму синхронизации (A), другая — несимметричному решению U_3 .

При $\rho \approx 0.459$ происходит бифуркация рождения пары предельных циклов (устойчивого C_S и неустойчивого C_U) из сгущения фазовых траекторий. Таким образом, вновь появляется мультистабильность, причем неустойчивый цикл лежит на поверхности, разграничивающей бассейны притяжения точки A и устойчивого предельного цикла. При $\rho \approx 0.53$ происходит супер-

критическая бифуркация Андронова–Хопфа, т.е. при $\rho > 0.53$ синфазный режим синхронизации (I) тоже становится устойчивым.

При дальнейшем увеличении параметра связи неустойчивый цикл уменьшается в размерах и при $\rho \approx 1.12$ стягивается в точку A . Исчезновение мультистабильности, как и во всех случаях, описанных выше, происходит в результате обратной бифуркации Андронова–Хопфа. Теперь устойчивым является только одно решение, соответствующее противофазной моде.

Теперь обсудим механизмы синхронизации при большом значении расстройки $\Delta = 0.5$, когда для обеих мод переход к синхронизации происходит в результате бифуркации Андронова–Хопфа (ср. рис. 1.18(б)). Соответствующая бифуркационная диаграмма приведена на рис. 1.19(г). Видно, что в области малых ρ существуют неустойчивая точка I и несимметричное решение U_1 . Также в фазовом пространстве существует устойчивый предельный цикл C_s , отвечающий режиму биений. При $\rho \approx 0.39$ происходит обратная бифуркация Андронова–Хопфа: из точки U_1 образуется неустойчивый предельный цикл C_U , а сама эта точка становится устойчивой. Отметим, что же время, при малых ρ для этой точки $R_1 \approx 0$ и $R_2 \approx 1.0$, т.е. это несимметричное решение. Однако с ростом ρ амплитуды колебаний выравниваются, а разность фаз стремится к π . Поэтому на рис. 1.19(г) мы обозначили устойчивую точку символом A . Действительно, из фазового портрета, приведенного на рис. 1.20, видно, что в этой точке $R_{1,2} \approx 1.0$, $\varphi \approx \pi$, т.е. она отвечает противофазной синхронизации. Также на рис. 1.20 показаны нестягиваемый (т.е. такой, для которого разность фаз не ограничена) устойчивый предельный цикл C_s , и неустойчивый стягиваемый цикл C_U .

Таким образом, при $\rho > 0.39$ имеет место либо противофазная синхронизация, либо режим биений, т.е. возникает мультистабильность. Рис. 1.20 дает представление о том, как устроены бассейны притяжения соответствующих аттракторов. Вновь отметим, что если, например, начальные амплиту-

ды колебаний очень малы, то для попадания в режим противофазной синхронизации начальная разность фаз должна быть близка к π .

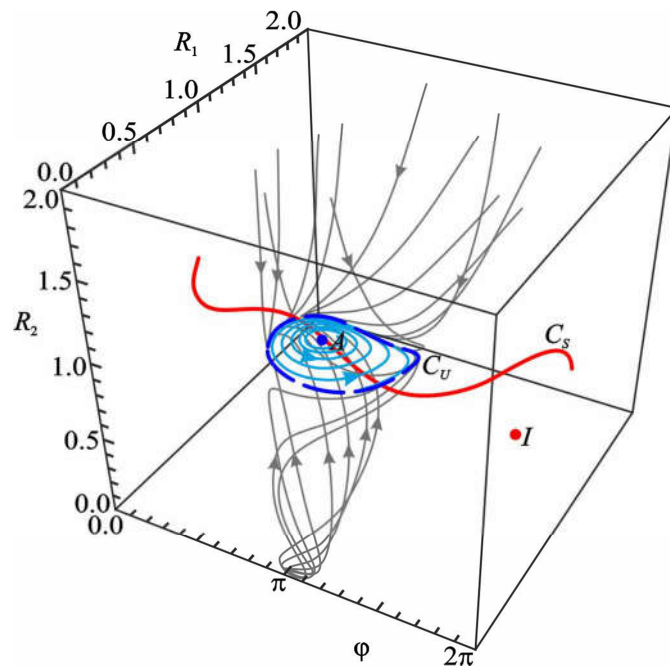


Рис. 1.20. Фазовый портрет для системы при $\psi = 0.4\pi$, $b = 0.5$, $\Delta = 0.5$, $\rho = 0.5$.

При увеличении связи устойчивый цикл C_s вначале замыкается вокруг неустойчивой точки I , затем уменьшается в размерах и при $\rho \approx 0.63$ происходит бифуркация Андронова–Хопфа. Цикл исчезает, а точка I становится устойчивой. Такой переход к синхронному режиму аналогичен известному механизму синхронизации подавлением (гашением) [1,5].

Стоит также отметить, что если стартовать с малых значений ρ и плавно увеличивать этот параметр с наследованием начальных условий, то синхронный режим установится лишь при $\rho \approx 0.63$, причем это будет синхронизация на синфазной моде. Для установления режима противофазной синхронизации необходимо попасть в соответствующий бассейн притяжения. Эта ситуация отличается от случая, который иллюстрирует рис. 1.19в, поскольку бистабильность возникает в результате иного механизма.

1.5. Синхронизация в случае конечного времени задержки

Теперь рассмотрим особенности синхронизации при конечном времени запаздывания. Как уже отмечалось во Введении, система связанных генераторов с запаздыванием в канале связи является распределенной, т.е. обладает, вообще говоря, бесконечным числом собственных мод. Ограничимся рассмотрением случая изохронных осцилляторов ($b = 0$) и рассмотрим, как трансформируются области синхронизации при увеличении времени задержки τ .

Выберем набег фазы $\psi = 0.2\pi$, когда при малых τ мультистабильности нет (см. рис. 1.6(a)). Как было показано в разд. 1.3, мультистабильность возникает, когда набег фазы сигнала, распространяющегося между генераторами, превышает $\pi/4$. Поскольку в режиме синхронизации

$$A_j = A_{j0} \exp(i\omega t), \quad j = 1, 2, \quad (1.26)$$

из уравнений (1.7) имеем

$$\begin{aligned} i\left(\omega + \frac{\Delta}{2}\right) A_{10} &= \left(1 - |A_{10}|^2\right) A_{10} + \rho e^{-i(\psi + \omega\tau)} A_{20}, \\ i\left(\omega - \frac{\Delta}{2}\right) A_{20} &= \left(1 - |A_{20}|^2\right) A_{20} + \rho e^{-i(\psi + \omega\tau)} A_{10}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Таким образом, видно, что набег фазы в данном случае равен $\psi + \omega\tau$. Поэтому следует ожидать, что с ростом τ набег фазы будет увеличиваться, что будет приводить к таким же изменениям, как и при увеличении параметра ψ .

Сказанное подтверждает рис. 1.21, на котором построены границы областей синхронизации при $\tau = 1.0$. Исследование системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (1.7) проводилось с помощью непосредственного численного интегрирования, для которого использовалась известная модификация метода Рунге–Кутты 4-го порядка для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [49]. Также проводилось сопоставление с результатами, полученными помощью программного пакета DDEBifTool [51], который предназначен для бифуркаци-

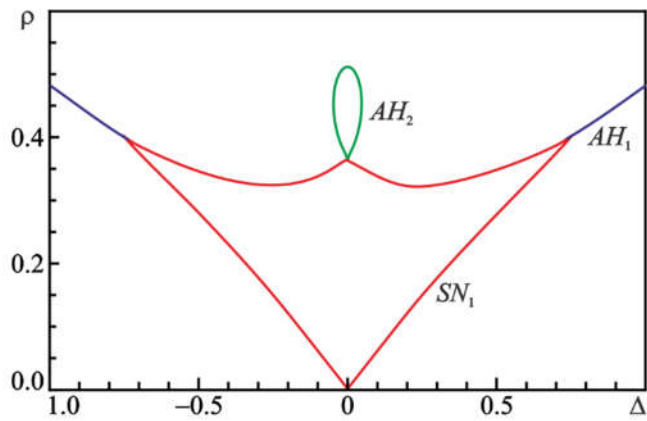


Рис.1.21. Разбиение плоскости параметров Δ, ρ при $\psi = 0.2\pi$, $\tau = 1.0$.

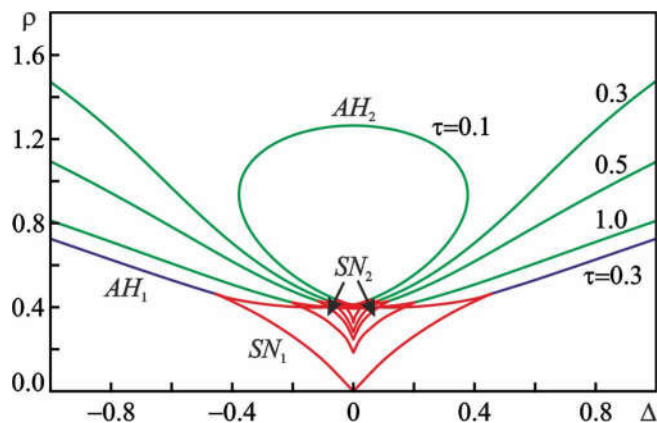


Рис. 1.22. Области синфазной и противофазной синхронизации на плоскости параметров Δ, ρ при $\psi = 0.4\pi$ и $\tau = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$.

онного анализа систем с запаздыванием.³ Результаты, полученные с помощью обоих подходов, полностью согласуются друг с другом.

Из рис. 1.21 видно, что появляется область синхронизации на противофазной моде. Отметим, что по мере увеличения времени задержки размер этой области увеличивается. Более того, при достаточно больших τ форма ее границ качественно изменяется, что показано на рис. 1.22. На этом рисунке приведены границы областей противофазной синхронизации при различных τ . В отличие от рис. 1.21 значение параметра фазового набегу выбрано равным $\psi = 0.4\pi$, когда трансформация границ более наглядна. Что касается границ области синфазной синхронизации, то они от времени задержки зависят очень слабо, поэтому на рис. 1.22 они построены только при $\tau = 0.3$.

³ Расчеты при помощи пакета DDEBifTool были проведены М.И. Балакиным.

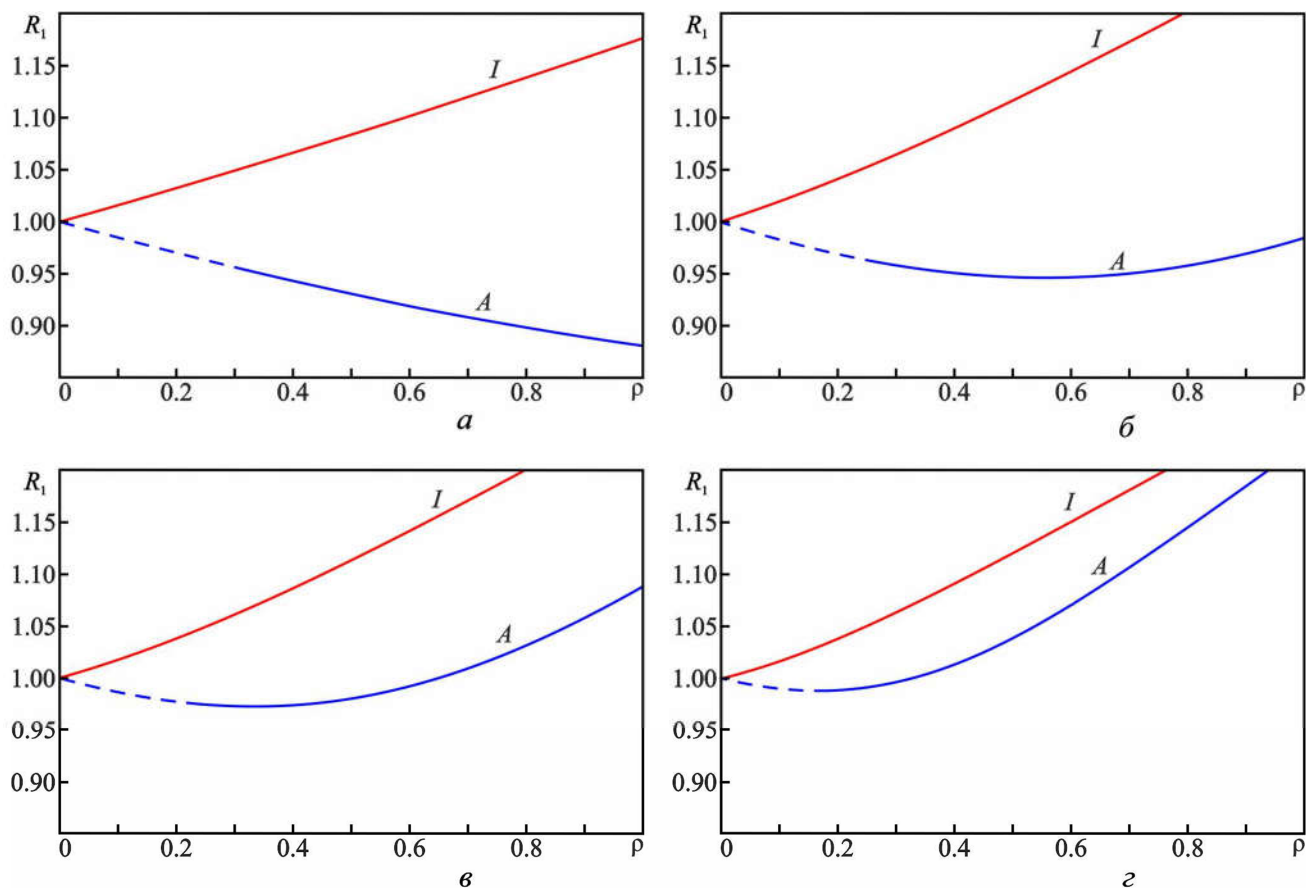


Рис. 1.23. Зависимости амплитуд синфазной (I) и противофазной (A) мод от параметра связи при $\Delta = 0$, $\psi = 0.4\pi$, $\tau = 0.1$ (а), 0.3 (б), 0.5 (в), 1.0 (г).

При малых значениях времени задержки область синхронизации носит замкнутый характер, однако при увеличении τ ее верхняя граница размыкается. Объяснить такое поведение можно, проанализировав зависимости амплитуд синфазной и противофазной мод от параметра связи, приведенные на рис. 1.23. При малых τ с ростом ρ амплитуда синфазной моды растет, а противофазной — монотонно уменьшается. В результате, как уже отмечалось выше, для противофазной моды уменьшается эффективная амплитуда сигнала, с которым один генератор воздействует на другой, и, соответственно, уменьшается ширина полосы синхронизации. Однако при больших τ амплитуда противофазной моды достигает минимума при некотором значении ρ , после чего начинает расти. Таким образом, увеличивается и ширина полосы синхронизации, а линия обратной бифуркации Андронова–Хопфа (AH_2) на рис. 1.22 размыкается.

Отметим, что при дальнейшем росте τ ситуация становится еще более сложной, поскольку появляются новые режимы синхронизации [32]. Действительно, полагая $A_{01,02} = R_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2})$, из (1.27) нетрудно получить трансцендентное уравнение для собственных частот колебаний

$$\omega = -\frac{\rho}{2} \left[\frac{R_1}{R_2} \sin(\psi + \omega\tau - \varphi) + \frac{R_2}{R_1} \sin(\psi + \omega\tau + \varphi) \right] \quad (1.28)$$

Очевидно, что с увеличением ρ и τ число вещественных корней уравнения (1.28) увеличивается. Таким образом, возможно одновременное существование не двух, а более устойчивых режимов [32]. Такое поведение характерно для систем с большим временем задержки [29,31].

1.6. Выводы

В Главе 1 представлен бифуркационный анализ явлений синхронизации в системе двух генераторов с предельным циклом, связанных с задержкой. Результаты такого исследования важны для более глубокого понимания поведения связанных микроволновых генераторов, используемых в системах сложения мощностей.

1. Проведен анализ синхронизации в приближении, когда время задержки считается малым по сравнению с характерным временем установления колебаний ($\tau \ll 1$). В фазовом приближении, которое справедливо при слабой связи и малых расстройках, получено обобщенное уравнение Адлера для разности фаз колебаний, анализ которого показал, что картина синхронизации во многом определяется набегом фазы в канале связи ψ . В случае, когда $\psi = \arctg(b/2) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, связь чисто диссипативная, при $\psi = \text{arcsctg} b + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — чисто инерционная (b — параметр неизохронности). С увеличением параметра b значение набега фазы ψ , при котором доминирует диссипативная связь, увеличивается, а значение, при котором связь чисто инерционная, уменьшается.

2. Проведен бифуркационный анализ в амплитудно-фазовом приближении. Построены границы областей устойчивости синхронных режимов на плоскости параметров «расстройка–связь», которые в области малых расстроек и малых значений коэффициента связи хорошо согласуются с результатами, полученными в фазовом приближении. Показано, что, помимо двух неподвижных точек I и A , соответствующих режимам синфазной и противофазной синхронизации, существуют от двух до четырех седловых несимметричных точек U_1-U_4 . Наличие разнообразных седлоузловых бифуркаций, связанных со слиянием различных точек, обуславливает сложную структуру бифуркационных линий на плоскости параметров Δ, ρ .

3. Показано, что в изохронном случае бистабильность режимов синхронизации имеет место при $\pi/4 + \pi n < \psi < 3\pi/4 + \pi n$. На плоскости параметров Δ, ρ область синхронизации на противофазной моде лежит внутри области синхронизации на синфазной моде и ограничена линией обратной бифуркации Андронова–Хопфа. При выходе из этой области неустойчивый цикл, который лежит на поверхности, разграничивающей бассейны притяжения двух аттракторов, уменьшается в размерах и сливается с устойчивой точкой, соответствующей противофазной моде. После этого мультистабильность в системе исчезает и остается единственный аттрактор, соответствующий синфазному режиму синхронизации.

4. При учете неизохронности появляется дополнительный фазовый набег, зависящий от амплитуды колебаний. В результате при увеличении параметра неизохронности b картина синхронизации претерпевает изменения, аналогичные тем, которые происходят по мере увеличения параметра ψ . В частности, обнаружено, что с ростом b происходит переход от диссипативной связи к инерционной, в результате чего область синхронизации на противофазной моде увеличивается в размерах и выходит за границы синхронизации на синфазной моде. Тем не менее, область противофазной синхронизации при любых b ограничена сверху. Такое поведение связано с тем, что амплитуда противофазной моды уменьшается с увеличением параметра связи, т.е.

при достаточно больших ρ эффективная амплитуда сигнала, поступающего из канала связи в колебательные системы генераторов, начинает уменьшаться. Соответственно, начинает уменьшаться ширина полосы синхронизации на противофазной моде.

5. Проведено исследование процессов синхронизации при конечном времени задержки τ . Поскольку набег фазы сигнала, распространяющегося в канале связи, увеличивается с ростом τ , с увеличением времени задержки происходят трансформация картины синхронизации, аналогичные описанным выше. С ростом τ область противофазной синхронизации на плоскости Δ, ρ вначале увеличивается в размерах, а затем размыкается сверху. Такое поведение объясняется тем, что при достаточно больших значениях τ амплитуда противофазной моды с ростом ρ вначале уменьшается, а затем начинает расти. В результате начинает увеличиваться и ширина полосы синхронизации на противофазной моде.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ синхронизации двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой

2.1. Модель двух связанных генераторов с жестким возбуждением

2.1.1. Основные уравнения

В Главе 1 была введена в рассмотрение модель генераторов с предельным циклом, связанных с задержкой, которая описывается системой уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд (1.4). В случае связанных генераторов с мягким самовозбуждением, функцию электронной восприимчивости можно аппроксимировать полиномом $\Phi \approx \alpha - \beta|A|^2$, учитывая только первое нелинейное слагаемое. Здесь $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, $\beta = \beta' + i\beta''$ — комплексные коэффициенты. Нетрудно обобщить эту модель на случай связанных генераторов с жестким возбуждением. В этом случае $\beta' < 0$, то есть нелинейный эффект первого порядка приводит к росту амплитуды колебаний вместо насыщения. Выражение для восприимчивости следует записать с точностью до членов порядка $|A|^4$, а именно, $\Phi \approx \alpha - \beta|A|^2 - \gamma|A|^4$, где $\gamma = \gamma' + i\gamma''$, причем $\gamma' > 0$ (см., например, [5,52-54]). В итоге вместо (1.5) придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 + \frac{i\Delta}{2} A_1 + A_1 &= \left(\alpha - \beta|A_1|^2 - \gamma|A_1|^4 \right) A_1 + \rho e^{-i\nu} A_2(t - \tau), \\ \dot{A}_2 - \frac{i\Delta}{2} A_2 + A_2 &= \left(\alpha - \beta|A_2|^2 - \gamma|A_2|^4 \right) A_2 + \rho e^{-i\nu} A_1(t - \tau). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь используются те же обозначения, что и в Главе 1. Напомним, что оба генератора считаются идентичными, за исключением небольшой расстройки собственных частот $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_{1,2}$.

Далее, следуя работам [52-54], для простоты ограничимся случаем, когда коэффициент γ можно считать вещественным, т.е. $\gamma'' \approx 0$. Тогда удобно выполнить перенормировку переменных и параметров:

$$A_{1,2} \rightarrow (-\beta'/\gamma')^{1/2} A_{1,2}, \quad t \rightarrow \gamma' t / (\beta')^2, \quad \Delta \rightarrow (\beta')^2 \Delta / \gamma', \quad \rho \rightarrow (\beta')^2 \rho / \gamma', \quad (2.2)$$

в результате чего уравнения (2.1) приводятся к виду

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dt} + \frac{i\Delta}{2} A_1 &= \left(\sigma + (1+ib)|A_1|^2 - |A_1|^4 \right) A_1 + \rho e^{-i\psi} A_2(t-\tau), \\ \frac{dA_2}{dt} - \frac{i\Delta}{2} A_2 &= \left(\sigma + (1+ib)|A_2|^2 - |A_2|^4 \right) A_2 + \rho e^{-i\psi} A_1(t-\tau),\end{aligned}\quad (2.3)$$

где $\sigma = \gamma'(\alpha-1)/(\beta')^2$ — параметр возбуждения, $b = \beta''/\beta'$ — параметр неизохронности. В принятой нормировке режим жесткого возбуждения реализуется при $-1/4 < \sigma < 0$ (см., например, [34,52-54]).

По аналогии со случаем мягкого возбуждения, целесообразно вначале рассмотреть ситуацию, когда время задержки мало по сравнению с характерным временем установления колебаний, т.е. $\tau \ll 1$. В этом случае уравнения (2.3) превращаются в систему ОДУ

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dt} + \frac{i\Delta}{2} A_1 &= \left(\sigma + (1+ib)|A_1|^2 - |A_1|^4 \right) A_1 + \rho e^{-i\psi} A_2, \\ \frac{dA_2}{dt} - \frac{i\Delta}{2} A_2 &= \left(\sigma + (1+ib)|A_2|^2 - |A_2|^4 \right) A_2 + \rho e^{-i\psi} A_1.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Разделяя (2.4) на уравнения для действительных амплитуд и фаз, полагая $A_{1,2} = R_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2})$, получим систему уравнений третьего порядка (ср. (1.9))

$$\begin{aligned}\dot{R}_1 &= (\sigma + R_1^2 - R_1^4) R_1 + \rho R_2 \cos(\psi + \varphi), \\ \dot{R}_2 &= (\sigma + R_2^2 - R_2^4) R_2 + \rho R_1 \cos(\psi - \varphi), \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + b(R_2^2 - R_1^2) + \rho \left[\frac{R_1}{R_2} \sin(\psi - \varphi) - \frac{R_2}{R_1} \sin(\psi + \varphi) \right],\end{aligned}\quad (2.5)$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность фаз, точка сверху означает дифференцирование по времени t .

2.1.2. Классификация неподвижных точек при слабой связи

Как уже отмечалось в Главе 1, неподвижные точки системы (2.5) отвечают режимам синхронизации. Однако в системе связанных генераторов с жестким возбуждением ситуация усложняется, так как число неподвижных

точек увеличивается. Действительно, рассмотрим сначала несвязанные генераторы ($\rho = 0$). В этом случае из уравнений (2.5) получаем

$$\sigma + R_{1,2}^2 - R_{1,2}^4 = 0, \quad (2.6)$$

откуда находим, что стационарные решения имеют вид

$$R_{1,2}^2 = R_{\pm}^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sigma}}{2}. \quad (2.7)$$

Решение R_+ является устойчивым, а R_- — неустойчивым [5]. Помимо этого, устойчивым является также нулевое решение $R_{1,2} = 0$.

По аналогии со случаем мягкого возбуждения (см. п. 1.1.2) предположим теперь, что связь конечная, но слабая, т.е. $\rho \ll 1$, и рассмотрим для простоты случай $\Delta = 0$. При этом неподвижные точки определяются из уравнений

$$\begin{aligned} (\sigma + R_1^2 - R_1^4)R_1 + \rho R_2 \cos(\psi + \varphi) &= 0, \\ (\sigma + R_2^2 - R_2^4)R_2 + \rho R_1 \cos(\psi - \varphi) &= 0, \\ b(R_2^2 - R_1^2) + \rho \left[\frac{R_1}{R_2} \sin(\psi - \varphi) - \frac{R_2}{R_1} \sin(\psi + \varphi) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Как и в п. 1.1.2, решения этих уравнений можно подразделить на симметричные, для которых амплитуды колебаний первого и второго генераторов одинаковы, и несимметричные.

Во-первых, уравнения (2.8) имеют симметричные решения, для которых $R_{1,2} = R_+ + O(\rho)$. Они соответствуют режимам синфазной и противофазной синхронизации, поэтому будем обозначать их I и A . Также существуют решения, для которых $R_{1,2} = R_- + O(\rho)$, их будем обозначать как I_- и A_- . При этом очевидно, что, поскольку в отсутствие связи решения $R_{1,2} = R_-$ неустойчивы, то неустойчивыми будут и соответствующие решения в случае связанных генераторов I_- , A_- .

Теперь обсудим несимметричные решения. Уравнения (2.8) имеют четыре несимметричных решения, для которых одна из амплитуд близка к ну-

лю, а другая — к R_+ или к R_- . Будем обозначать их как $U_{1,2}$ и $P_{1,2}$ соответственно. Поскольку для генератора с жестким возбуждением нулевое решение является устойчивым, решения $U_{1,2}$ могут быть устойчивыми. Они соответствуют режимам, когда один из генераторов подавляет колебания другого. При этом генераторы колеблются синхронно, однако фактически второй генератор находится в режиме вынужденных колебаний с малой амплитудой. Что касается решений $P_{1,2}$, то они всегда неустойчивы.

Кроме того, имеются еще два несимметричных решения, для которых одна из амплитуд близка к R_+ , а другая — к R_- . Будем обозначать их как $S_{1,2}$. Эти решения также являются неустойчивыми.

Наконец, уравнения (2.8) имеют нулевое решение $R_1 = R_2 = 0$ (точка O), которое, по крайней мере при слабой связи, является устойчивым.

Аналогично п. 1.1.2, составим Таблицу 2.1, в которой в первой строке приведены значения амплитуды первого генератора в отсутствие связи, в первом столбце — значения амплитуды второго, а в остальных ячейках таблицы показаны обозначения для неподвижных точек, которые возникают при ненулевой связи.

Таблица 2.1. Классификация неподвижных точек системы (2.5).

	$R_1 = 0$	$R_1 = R_-$	$R_1 = R_+$
$R_2 = 0$	O	P_1	U_1
$R_2 = R_-$	P_2	I_-, A_-	S_1
$R_2 = R_+$	U_2	S_2	I, A

2.2. Анализ синхронизации в фазовом приближении

В случае слабой связи и малой расстройки режимы синхронизации возникают в результате седлоузловой бифуркации. Полезно вначале проанализировать эти режимы в фазовом приближении. Для связанных генераторов с мягким самовозбуждением такая задача была рассмотрена в п. 1.2. Как будет показано далее, особенность системы с жестким возбуждением состоит в

том, что при слабой связи в фазовом пространстве возникают не один, а четыре предельных цикла — один устойчивый и три неустойчивых. Фазовое приближение позволяет приближенно проанализировать седлоузловые бифуркации на этих циклах.

2.2.1. Седлоузловые бифуркации симметричных решений

При введении слабой связи между генераторами, $\rho \ll 1$, устойчивые решения $R_{1,2} = R_+$ превращаются в устойчивый предельный цикл. Если частотная расстройка мала, на этом цикле происходит седлоузловая бифуркация, в результате которой рождаются точки I и A . Как и в п. 1.2, найдем приближенно амплитуды колебаний с точностью до членов $\sim \rho$. Будем искать решения в виде $R_{1,2} = R_+ + r_{1,2}$, где $r_{1,2} \sim \rho$ — малые добавки. Линеаризуя первые два уравнения системы (2.8), получим

$$\begin{aligned} (\sigma + R_+^2 - R_+^4)r_1 + (2R_+ - 4R_+^3)R_+r_1 + \rho R_+ \cos(\psi + \varphi) &= 0, \\ (\sigma + R_+^2 - R_+^4)r_2 + (2R_+ - 4R_+^3)R_+r_2 + \rho R_+ \cos(\psi - \varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

или, с учетом (2.6),

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{\rho}{2R_+(1-2R_+^2)} \cos(\psi + \varphi) = 0, \\ r_2 &= -\frac{\rho}{2R_+(1-2R_+^2)} \cos(\psi - \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Теперь можно приближенно найти отношения амплитуд колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{R_2} &\approx \frac{R_+ - \frac{\rho}{2R_+(1-2R_+^2)} \cos(\psi + \varphi)}{R_+ - \frac{\rho}{2R_+(1-2R_+^2)} \cos(\psi - \varphi)} = \frac{1 - \frac{\rho}{2R_+^2(1-2R_+^2)} \cos(\psi + \varphi)}{1 - \frac{\rho}{2R_+^2(1-2R_+^2)} \cos(\psi - \varphi)} \approx \\ &\approx 1 - \frac{\rho}{2R_+^2(1-2R_+^2)} [\cos(\psi + \varphi) - \cos(\psi - \varphi)] = \\ &= 1 + \frac{\rho}{R_+^2(1-2R_+^2)} \sin \psi \sin \varphi \end{aligned}$$

или, окончательно,

$$\frac{R_1}{R_2} \approx 1 - \frac{2\rho}{\sqrt{1+4\sigma}(1+\sqrt{1+4\sigma})} \sin \psi \sin \varphi. \quad (2.11)$$

Аналогично находим, что

$$\frac{R_2}{R_1} \approx 1 + \frac{2\rho}{\sqrt{1+4\sigma}(1+\sqrt{1+4\sigma})} \sin \psi \sin \varphi. \quad (2.12)$$

Соотношения (2.11) и (2.12) следует подставить в третье уравнение системы (2.5). Также в это уравнение входит слагаемое

$$b(R_2^2 - R_1^2) \approx 2bR_+(r_2 - r_1) + b(r_2^2 - r_1^2) = \frac{b\rho}{1-2R_+^2} (\cos(\psi + \varphi) - \cos(\psi - \varphi)) + \\ + \frac{b\rho^2}{4R_+^2(1-2R_+^2)^2} (\cos^2(\psi - \varphi) - \cos^2(\psi + \varphi)).$$

В итоге, подставляя эти выражения третье уравнение системы (2.5), получим *обобщенное уравнение Адлера*

$$\dot{\varphi} + \Delta = \frac{2b\rho}{\sqrt{1+4\sigma}} \sin \psi \sin \varphi - 2\rho \cos \psi \sin \varphi + \\ + \frac{b\rho^2}{2(1+4\sigma)(1+\sqrt{1+4\sigma})} \sin 2\psi \sin 2\varphi - \frac{2\rho^2}{\sqrt{1+4\sigma}(1+\sqrt{1+4\sigma})} \sin^2 \psi \sin 2\varphi. \quad (2.13)$$

Обозначив

$$\lambda = \sqrt{1+4\sigma}(1+\sqrt{1+4\sigma})/2, \quad (2.14)$$

можно привести (2.13) к виду

$$\dot{\varphi} + \Delta = -2\rho \sin \varphi \left(\cos \psi - \frac{b}{\sqrt{1+4\sigma}} \sin \psi \right) - \\ - \frac{\rho^2}{\lambda} \sin 2\varphi \left(\sin^2 \psi - \frac{b}{4\sqrt{1+4\sigma}} \sin 2\psi \right). \quad (2.15)$$

Члены порядка ρ и ρ^2 в правой части уравнения (2.15) отвечают за диссипативную (диффузионную) и реактивную (инерционную) связь, соответственно.

На рис. 2.1 приведена зависимость параметра λ от параметра возбуждения σ , построенная согласно формуле (2.14). Очевидно, что ее имеет

смысл рассматривать только при $\sigma > -1/4$. С ростом σ параметр λ монотонно возрастает, т.е. вклад инерционной связи уменьшается. Отметим, что при $\sigma = 0$, т.е. на границе между мягким и жестким возбуждением, $\lambda = 1$ и уравнение (2.15) совпадает с (1.18).

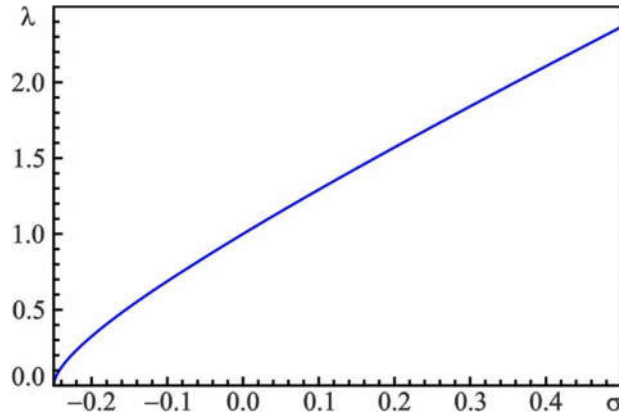


Рис. 2.1. Зависимость параметра λ от параметра возбуждения σ .

В режиме синхронизации уравнение (2.15) перепишется в виде

$$\Delta = -2\rho \sin \varphi \left(\cos \psi - \frac{b}{\sqrt{1+4\sigma}} \sin \psi \right) - \frac{\rho^2}{\lambda} \sin 2\varphi \left(\sin^2 \psi - \frac{b}{4\sqrt{1+4\sigma}} \sin 2\psi \right). \quad (2.16)$$

Нетрудно показать, что граница устойчивости (т.е. условие седлоузловой бифуркации) определяется из следующего соотношения:

$$\frac{d\Delta}{d\varphi} = -2\rho \cos \varphi \left(\cos \psi - \frac{b}{\sqrt{1+4\sigma}} \sin \psi \right) - \frac{2\rho^2}{\lambda} \cos 2\varphi \left(\sin^2 \psi - \frac{b}{4\sqrt{1+4\sigma}} \sin 2\psi \right) = 0. \quad (2.17)$$

Отсюда находим

$$\rho = -\frac{4\lambda \cos \varphi \left(\cos \psi \sqrt{1+4\sigma} - b \sin \psi \right)}{\cos 2\varphi \left(4\sin^2 \psi \sqrt{1+4\sigma} - b \sin 2\psi \right)}. \quad (2.18)$$

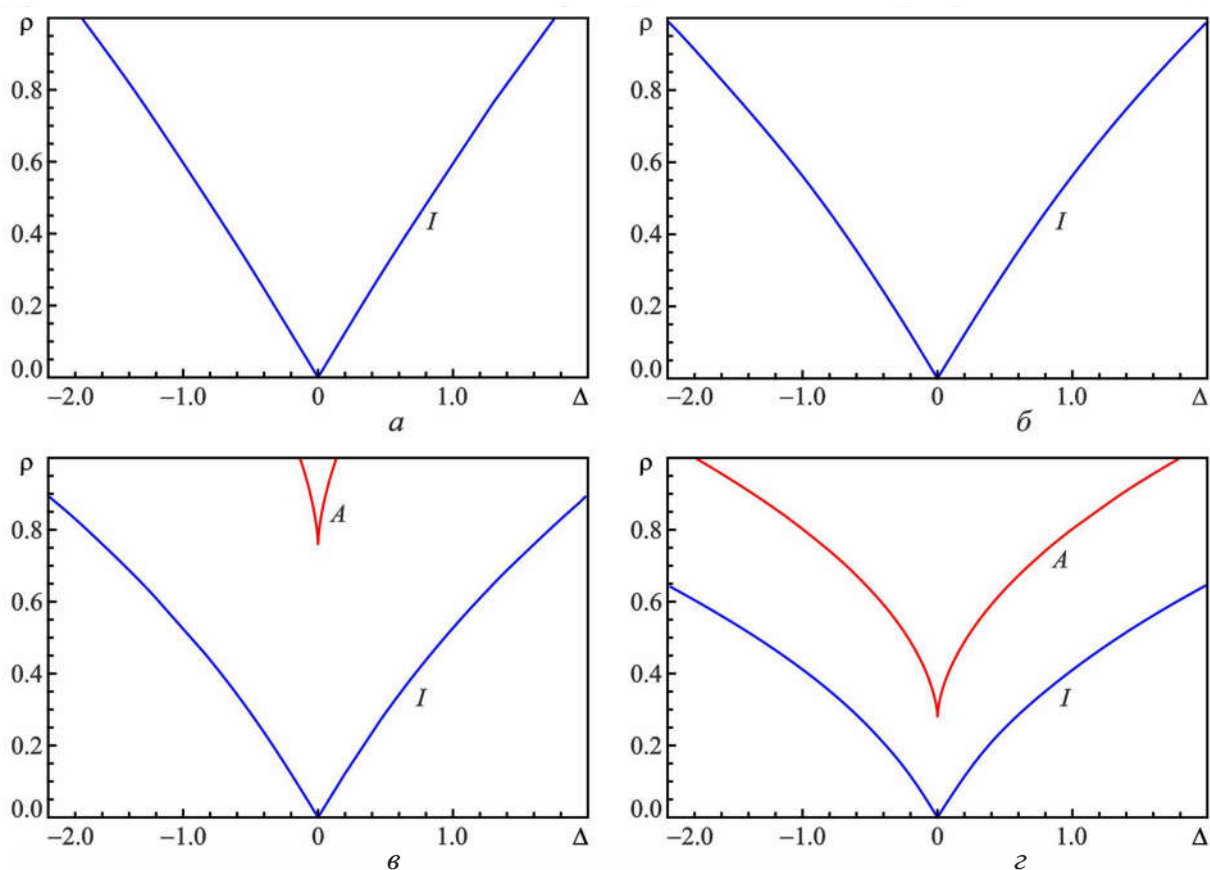


Рис. 2.3. Области синфазной и противофазной синхронизации на плоскости параметров Δ, ρ при $\psi = 0.2\pi$ и различных значениях параметра возбуждения: $\sigma = -0.01$ (а), -0.16 (б), -0.2 (в), -0.24 (г).

Соотношения (2.16) и (2.18) задают в параметрическом виде границы языка синхронизации на плоскости Δ, ρ .

Рассмотрим изохронный случай $b = 0$. Для определенности выберем $\sigma = -0.16$, тогда $R_+ = \sqrt{0.8} \approx 0.894$, $R_- = \sqrt{0.2} \approx 0.447$. На рис. 2.2 на плоскости параметров Δ, ρ построены области синфазной (I) и противофазной (A) синхронизации для различных значений набега фазы ψ . При $\psi = 0$ связь чисто диссипативная, поэтому синхронизация возможна только на синфазной моде, а границы языка являются прямыми линиями. При $\psi \neq 0$ начинает сказываться реактивная связь и появляются области синхронизации на противофазной моде (ср. рис. 1.2). С увеличением ψ размер области противофазной синхронизации увеличивается, а при $\psi = \pi/2$, когда связь становится чисто

реактивной, границы синхронизации на синфазной и противофазной модах вырождены.

Теперь рассмотрим трансформацию языков синхронизации при изменении параметра возбуждения. Выберем значение набега фазы $\psi = 0.2\pi$. В этом случае доминирует диссипативная связь. Как показано на рис. 2.1, с уменьшением σ параметр λ уменьшается и, соответственно, увеличивается влияние реактивной связи. Это приводит к появлению областей противофазной синхронизации, которые увеличиваются в размерах, что показано на рис. 2.3.

Аналогично можно найти границы седлоузловой бифуркации на неустойчивом предельном цикле, в результате которой рождаются точки I_- и A_- . Для этого достаточно в приведенных выше формулах заменить R_+ на R_- . В итоге границы седлоузловой бифуркации будут определяться следующими формулами:

$$\Delta = -2\rho \sin \varphi \left(\cos \psi + \frac{b}{\sqrt{1+4\sigma}} \sin \psi \right) - \frac{\rho^2}{\lambda} \sin 2\varphi \left(\sin^2 \psi + \frac{b}{4\sqrt{1+4\sigma}} \sin 2\psi \right), \quad (2.19)$$

$$\rho = -\frac{4\lambda \cos \varphi (\cos \psi \sqrt{1+4\sigma} + b \sin \psi)}{\cos 2\varphi (4\sin^2 \psi \sqrt{1+4\sigma} + b \sin 2\psi)}, \quad (2.20)$$

но теперь

$$\lambda = -\sqrt{1+4\sigma} (1 - \sqrt{1+4\sigma}) / 2. \quad (2.21)$$

Отметим, что о данной бифуркации имеет смысл говорить только при $-1/4 < \sigma < 0$, т.е. когда $R_-^2 > 0$ (см. (2.7)).

2.2.2. Седлоузловые бифуркации несимметричных решений

При слабой связи, помимо двух упомянутых выше предельных циклов, для которых $R_{1,2} \approx R_+$ и $R_{1,2} \approx R_-$, имеются еще два неустойчивых цикла, для которых $R_1 \approx R_+$, $R_2 \approx R_-$ и наоборот. Пользуясь фазовым приближением,

можно найти условия седлоузловых бифуркаций на этих циклах, в результате которых рождаются пары точек $S_{1,3}$ и $S_{2,4}$. Для этого будем искать решения в виде $R_1 = R_+ + r_1$, $R_2 = R_- + r_2$, где $r_{1,2} \sim \rho$ — малые добавки. Тогда вместо соотношений (2.10) получим

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{\rho R_-}{2R_+^2(1-2R_+^2)} \cos(\psi + \varphi) = 0, \\ r_2 &= -\frac{\rho R_+}{2R_-^2(1-2R_-^2)} \cos(\psi - \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Пользуясь выражениями (2.22), находим

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{R_2} &\approx \frac{R_+ + r_1}{R_- + r_2} \approx \frac{R_+ - \frac{\rho R_-}{2R_+^2(1-2R_+^2)} \cos(\psi + \varphi)}{R_- - \frac{\rho R_+}{2R_-^2(1-2R_-^2)} \cos(\psi - \varphi)} \approx \\ &\approx \frac{R_+}{R_-} - \frac{\rho}{2R_+^2(1-2R_+^2)} \cos(\psi + \varphi) + \frac{\rho R_+^2}{2R_-^4(1-2R_-^2)} \cos(\psi - \varphi). \end{aligned}$$

Аналогично можно найти, что

$$\frac{R_2}{R_1} \approx \frac{R_-}{R_+} - \frac{\rho}{2R_-^2(1-2R_-^2)} \cos(\psi - \varphi) + \frac{\rho R_-^2}{2R_+^4(1-2R_+^2)} \cos(\psi + \varphi).$$

С учетом выражений для R_{\pm} (2.7) эти выражения приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{R_2} &\approx \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sigma}}{1 - \sqrt{1 + 4\sigma}} + \\ &+ \frac{\rho(1 + \sqrt{1 + 4\sigma})}{4\sigma^2 \sqrt{1 + 4\sigma}} \left((1 + 2\sigma) \cos \psi \cos \varphi + \sqrt{1 + 4\sigma} \sin \psi \sin \varphi \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{R_1} &\approx \frac{1 - \sqrt{1 + 4\sigma}}{1 + \sqrt{1 + 4\sigma}} - \\ &- \frac{\rho(1 - \sqrt{1 + 4\sigma})}{4\sigma^2 \sqrt{1 + 4\sigma}} \left((1 + 2\sigma) \cos \psi \cos \varphi + \sqrt{1 + 4\sigma} \sin \psi \sin \varphi \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Подставляя (2.23), (2.24) в третье уравнение системы (2.5), получим обобщенное уравнение Адлера

$$\begin{aligned} \dot{\phi} + \Delta = & \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} \left(\sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \right) + \\ & + \frac{\rho^2 (1 + \sqrt{1+4\sigma})}{4\sigma^2 \sqrt{-\sigma} \sqrt{1+4\sigma}} \left((1+2\sigma) \cos \psi \cos \varphi + \sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \sin \varphi \right) \sin(\psi - \varphi) - \\ & - \frac{\rho^2 (1 - \sqrt{1+4\sigma})}{4\sigma^2 \sqrt{-\sigma} \sqrt{1+4\sigma}} \left((1+2\sigma) \cos \psi \cos \varphi + \sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \sin \varphi \right) \sin(\psi + \varphi). \end{aligned}$$

После ряда преобразований его можно привести к более компактному виду:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} + \Delta = & \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} \left(\sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \right) \times \\ & \times \left[1 + \frac{\rho}{2\sigma^2 \sqrt{1+4\sigma}} \left((1+2\sigma) \cos \psi \cos \varphi + \sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \sin \varphi \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Если раскрыть скобки в (2.25), получим члены порядка $\rho \sin \varphi$, $\rho \cos \varphi$, ответственные за диссипативную связь, а также члены порядка $\rho^2 \sin 2\varphi$, $\rho^2 \cos 2\varphi$, ответственные за инерционную связь. Однако нахождение условий седлоузловых бифуркаций при этом значительно усложняется. В то же время, в данном случае седлоузловые бифуркации не связаны с увеличением или уменьшением числа устойчивых состояний (поскольку происходят на неустойчивых циклах). Кроме того, в отличие от бифуркаций симметричных точек, когда при $\cos \psi = 0$ слагаемое, ответственное за диссипативную связь, тождественно равно нулю (см. (2.13)), в данном случае этого не происходит и, по крайней мере при достаточно малых ρ , диссипативная связь все равно будет доминировать. Поэтому можно ограничиться учетом только диссипативной связи. Если отбросить в уравнении (2.25) члены порядка ρ^2 , оно примет вид

$$\dot{\phi} + \Delta = b\sqrt{1+4\sigma} + \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} \left(\sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \right). \quad (2.26)$$

В режиме синхронизации из (2.26) имеем

$$\Delta = b\sqrt{1+4\sigma} + \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} \left(\sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \right). \quad (2.27)$$

Границы седлоузловой бифуркации определяются из условия слияния двух корней уравнения (2.27):

$$\frac{d\Delta}{d\varphi} = -\frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} \left(\sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \right) = 0,$$

откуда можно найти, что

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\operatorname{ctg} \psi}{\sqrt{1+4\sigma}}.$$

Подставляя это соотношение в (2.27), после ряда вычислений находим

$$\Delta = b\sqrt{1+4\sigma} - \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} \sqrt{1+4\sigma} \sin^2 \psi. \quad (2.28)$$

Это выражение определяет линии бифуркаций на плоскости Δ, ρ .

Очевидно, что имеется еще одно несимметричное решение, для которого $R_1 = R_- + r_1$, $R_2 = R_+ + r_2$. Для него условия седлоузловой бифуркации совпадают с (2.28) с точностью до знака.

Теперь можно построить все линии седлоузловых бифуркаций на плоскости параметров Δ, ρ . Пример для случая $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, и $b = 0.2$ приведен на рис. 2.4. Область синхронизации закрашена голубым цветом. Она ограничена линиями SN_1 седлоузловых бифуркаций симметричных решений $R_{1,2} = R_+ + O(\rho)$, которые задаются соотношениями (2.16), (2.18). Также на этом рисунке показаны линии SN_2 седлоузловых бифуркаций неустойчивых решений $R_{1,2} = R_- + O(\rho)$. Они лежат несколько ниже линий SN_1 , причем при малых ρ и Δ практически совпадают с ними. Действительно, условия возникновения этих бифуркаций отличаются только значением параметра λ (см. формулы (2.14) и (2.21)), который входит во второе слагаемое в обобщенном уравнении Адлера (2.15), которое имеет порядок ρ^2 . Таким образом, если доминирует диссипативная связь, отличие будет мало.

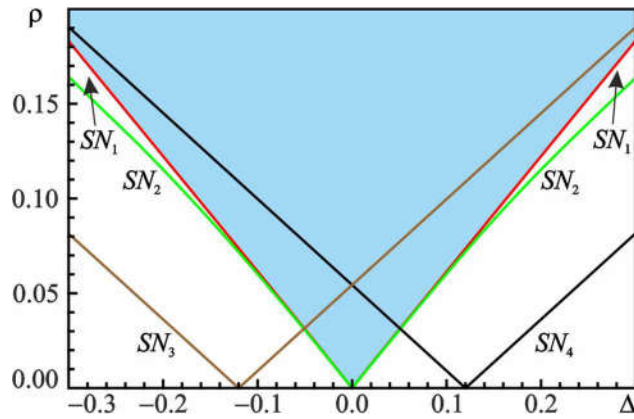


Рис. 2.4. Линии седлоузловых бифуркаций SN_{1-4} , построенные на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, и $b = 0.2$. Область синфазной синхронизации закрашена цветом.

Также отметим, что, поскольку в уравнении (2.28) присутствует слагаемое $b\sqrt{1+4\sigma}$, отвечающее за неизохронность, на плоскости Δ, ρ линии седлоузловых бифуркаций несимметричных решений $SN_{3,4}$ опираются на горизонтальную ось не в начале координат, а в точках $\Delta = \pm b\sqrt{1+4\sigma} = \pm 0.12$.

Таким образом, фазовое приближение позволяет проанализировать условия возникновения синхронизации посредством захвата частоты. Полученное обобщенное уравнение Адлера (2.15) совпадает с полученным в п.1.2 для случая мягкого самовозбуждения (при $\sigma = 0$). Вместе с тем, анализ показывает, что в случае жесткого возбуждения также имеются седлоузловые бифуркации неустойчивых симметричных и несимметричных решений. Тот факт, что имеется четыре седлоузловые бифуркации, говорит о том, что при малой связи в фазовом пространстве существуют четыре предельных цикла, причем один из них является устойчивым (на нем образуются точки I и A), остальные три — неустойчивые. Однако фазовое приближение не позволяет изучать поведение предельных циклов.

Более подробную картину позволяет получить бифуркационный анализ в амплитудно-фазовом приближении, результаты которого представлены в следующем разделе.

2.3. Исследование синхронизации в амплитудно-фазовом приближении.

Бифуркационный анализ и численное моделирование

Как и в Главе 1, рассмотрим приближение малого времени запаздывания и проведем бифуркационный анализ системы (2.5) при помощи пакета XPPAUT. Для начала будем считать осцилляторы изохронными ($b = 0$) и рассмотрим ситуацию, когда набег фазы $\psi = 0.2\pi$. Как следует из результатов п. 2.2, в этом случае связь носит по преимуществу диссипативный характер. Как и в п. 2.2, параметр возбуждения выберем равным $\sigma = -0.16$, так чтобы $R_+ = \sqrt{0.8} \approx 0.894$, $R_- = \sqrt{0.2} \approx 0.447$.

На рис. 2.5 построены линии седлоузловых бифуркаций SN и бифуркаций Андронова–Хопфа AH на плоскости параметров «расстройка собственных частот Δ – параметр связи ρ ». Как было показано выше (п. 2.1.2), в системе связанных генераторов с жестким возбуждением наряду с режимом синхронизации, в котором амплитуды колебаний в обеих подсистемах примерно равны (ему в данном случае отвечает неподвижная точка I), возможны также синхронные режимы, в которых амплитуда одного генератора значительно больше, чем другого (неподвижные точки $U_{1,2}$). Соответственно, на рис. 2.5 различными цветами закрашены области, в которой имеется одно (голубой), два (розовый) или три (фиолетовый) устойчивых состояния. Белым цветом показана область биений, где режим синхронизации вообще отсутствует.

В области не слишком больших расстроек режим синхронизации с примерно равными значениями амплитуд ограничен линией седлоузловой бифуркации точек SN_1 и линией бифуркации Андронова–Хопфа AH_1 , аналогично случаю связанных генераторов с мягким самовозбуждением, рассмотренному в Главе 1. Однако при увеличении расстройки наблюдаются существенные отличия. В частности, области биений оказываются замкнутыми. Отметим, что похожая структура на плоскости параметров наблюдалась в за-

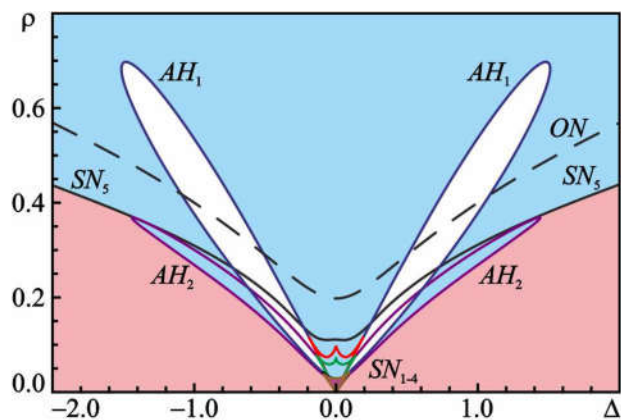


Рис. 2.5. Границы седлоузловых бифуркаций (SN) и бифуркаций Андронова–Хопфа (AH) на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, $b = 0$. Области устойчивости синхронных режимов закрашены различными цветами.

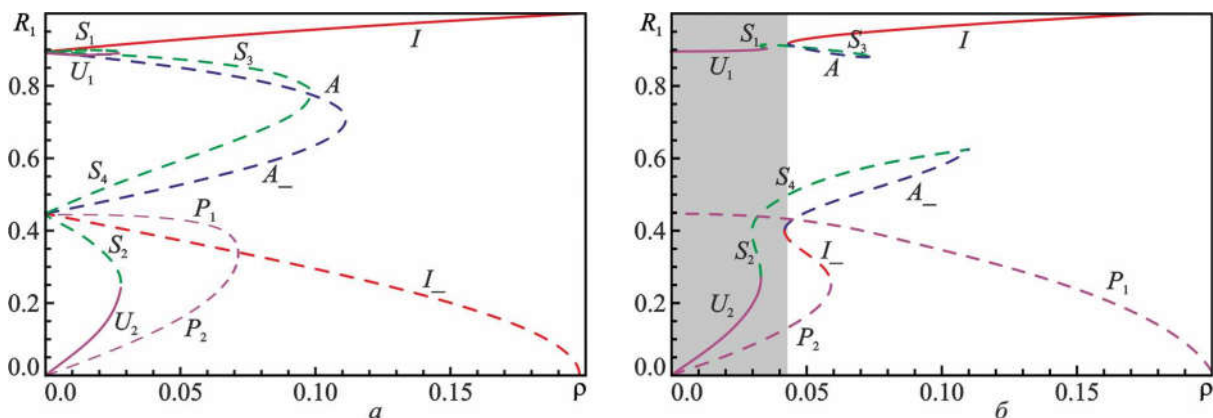


Рис. 2.6. Бифуркационные диаграммы при $\sigma = -0.16$, $b = 0$, $\psi = 0.2\pi$, $\Delta = 0$ (а) и $\Delta = 0.07$ (б). Сплошными линиями показаны устойчивые точки, пунктирными – неустойчивые.

даче о синхронизации двухмодовой автоколебательной системы внешним сигналом [55]. Ниже проанализируем различные ситуации более подробно.

2.3.1. Случай малых расстроек

Рассмотрим вначале случай малых расстроек, когда происходят седлоузловые бифуркации, которые обсуждались в п. 2.2. Ситуацию помогают понять однопараметрические бифуркационные диаграммы, построенные для различных значений расстройки собственных частот (рис. 2.6). На рис. 2.6(а) приведена бифуркационная диаграмма для амплитуды колебаний первого генератора R_1 в случае $\Delta = 0$. Сплошными линиями показаны устойчивые со-

стояния, штриховыми — неустойчивые. Обозначения особых точек введены в соответствии с Таблицей 2.1.

Так же, как и в п. 1.1.2, при $\Delta = 0$ для симметричных точек I , A , I_- , A_- значения R_1 и R_2 равны, в то время как пары несимметричных точек $U_{1,2}$, $P_{1,2}$, $S_{1,2}$ и $S_{3,4}$ инвариантны относительно замены

$$(R_1, R_2, \varphi) \rightarrow (R_2, R_1, -\varphi).$$

На рис. 2.6(а) видно пять седлоузловых бифуркаций, соответствующих слиянию разных неподвижных точек. При $\rho \approx 0.028$ происходят две седлоузловые бифуркации, в результате которых устойчивые точки U_1 и U_2 сливаются с седловыми точками S_1 и S_2 , соответственно. В результате этих бифуркаций точки $U_{1,2}$ теряют устойчивость, т.е. теряют устойчивость режимы синхронизации, в которых один из генераторов доминирует. Таким образом, вместо четырех устойчивых режимов остаются два: режим синхронизации на синфазной моде (точка I) и точка O в начале координат.

При $\rho \approx 0.071$ неустойчивые точки P_1 и P_2 сливаются с точкой I_- . Далее эта точка при $\rho \approx 0.197$ сливается с точкой O в начале координат. После этого режим жесткого возбуждения исчезает и единственным устойчивым режимом остается синфазная синхронизация. Кроме того, при $\rho \approx 0.098$ точки S_3 и S_4 сливаются с точкой A , а затем, при $\rho \approx 0.111$ — с точкой A_- .

Обсудим теперь особенности синхронизации при ненулевой расстройке. На рис. 2.6(б) построена бифуркационная диаграмма для $\Delta = 0.07$. Видны некоторые отличия от случая $\Delta = 0$. Прежде всего, как уже отмечалось в п. 2.2, при малых значениях ρ в фазовом пространстве существуют четыре предельных цикла, один из которых устойчив. Соответственно, происходят четыре седлоузловые бифуркации, в результате которых последовательно рождаются пары точек S_2 и S_4 , S_1 и S_3 , I_- и A_- , I и A . При дальнейшем увеличении параметра связи видно, что вместо тройного слияния точек $P_{1,2}$ и I_- (см. рис. 2.6(а)) происходит слияние точек I_- и P_2 , а точка P_1 сливается с

точкой O при $\rho \approx 0.21$ (при $\Delta < 0$, наоборот, точка I_- сливается с P_1 , а O — с P_2). Аналогично, вместо седлоузловой бифуркации точек $S_3 - S_4 - A$ при $\rho \approx 0.073$ сливаются точки S_3 и A , а при $\rho \approx 0.109$ — точки S_4 и A_- .

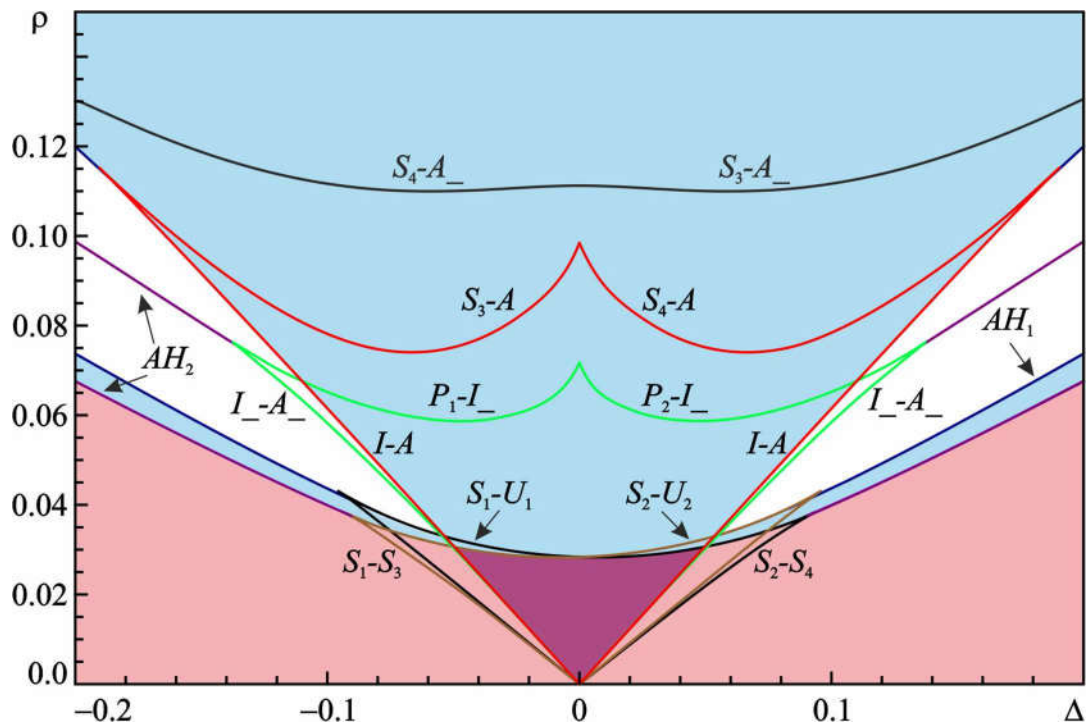


Рис. 2.7. Увеличенный фрагмент плоскости параметров Δ, ρ в области малых расстройек. Параметры те же, что на рис. 2.5.

На рис. 2.7 в увеличенном масштабе построена наиболее сложно устроенная часть плоскости параметров рис. 2.5, соответствующая малым значениям расстройки и связи. На этом рисунке показано, какие точки рождаются или исчезают при тех или иных седлоузловых бифуркациях. Области устойчивости точек $U_{1,2}$, т.е. области устойчивости режимов, в которых один из генераторов доминирует, при малых расстройках ограничены сверху линиями, на которых происходит слияние точек $S_1 - U_1$ и $S_2 - U_2$, а при больших расстройках — линиями бифуркаций Андронова–Хопфа AH_2 . Эти линии утыкаются в линии седлоузловых бифуркаций $I_- - A_-$ (сверху), $S_1 - S_3$ и $S_2 - S_4$ (снизу слева и справа соответственно). Линии бифуркаций Андронова–Хопфа AH_1 утыкаются в линии седлоузловых бифуркаций $I - A$ (сверху),

$S_1 - U_1$ и $S_2 - U_2$ (снизу слева и справа соответственно). В точках касания линий AH_1 и $I - A$ реализуется ситуация, аналогичная бифуркации Богданова-Тakensа [5,7]. Ситуация в точках касания AH_1 и $S_1 - S_3$, $S_2 - S_4$ требует более детального изучения.

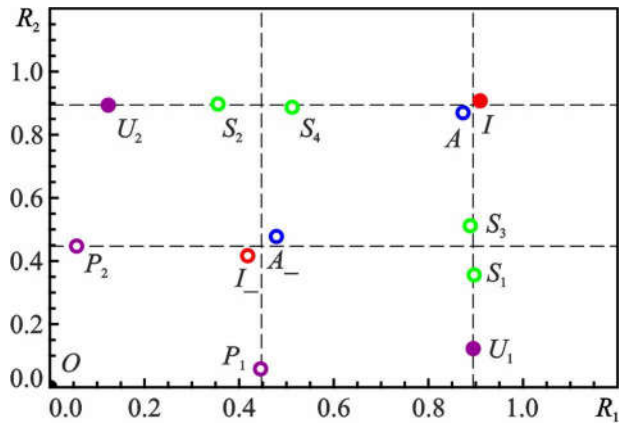


Рис. 2.8. Проекция неподвижных точек системы (2.5) на плоскость R_1, R_2 при $\sigma = -0.16$, $b = 0$, $\psi = 0.2\pi$, $\Delta = 0$ и $\rho = 0.02$.

Полезную информацию дает также рис. 2.8, на котором приведена проекция неподвижных точек на плоскость R_1, R_2 . Она построена для случая, когда расстройка $\Delta = 0$ и связь достаточно мала, так что существуют все 13 точек. Горизонтальные и вертикальные штриховые линии соответствуют значениям $R_{1,2} = R_{\pm}$ (см. формулы (2.7)). В данном случае мы находимся в области, внутри которой устойчивы все три режима синхронизации, а также нулевое решение. Эта область показана на рис. 2.7 фиолетовым цветом. Рис. 2.8 позволяет качественно представить структуру бассейнов притяжения. Если обе начальные амплитуды достаточно велики (превышают R_-), в системе установится синфазный режим синхронизации. Этому режиму соответствует устойчивая точка I . На рис. 2.9(а) приведен пример зависимостей амплитуд от времени для такого случая, которые получены в результате численного моделирования исходной системы уравнений (2.5).

Если начальная амплитуда одного из генераторов превышает значение R_- , а у другого — нет, будет происходить подавление колебаний одного из

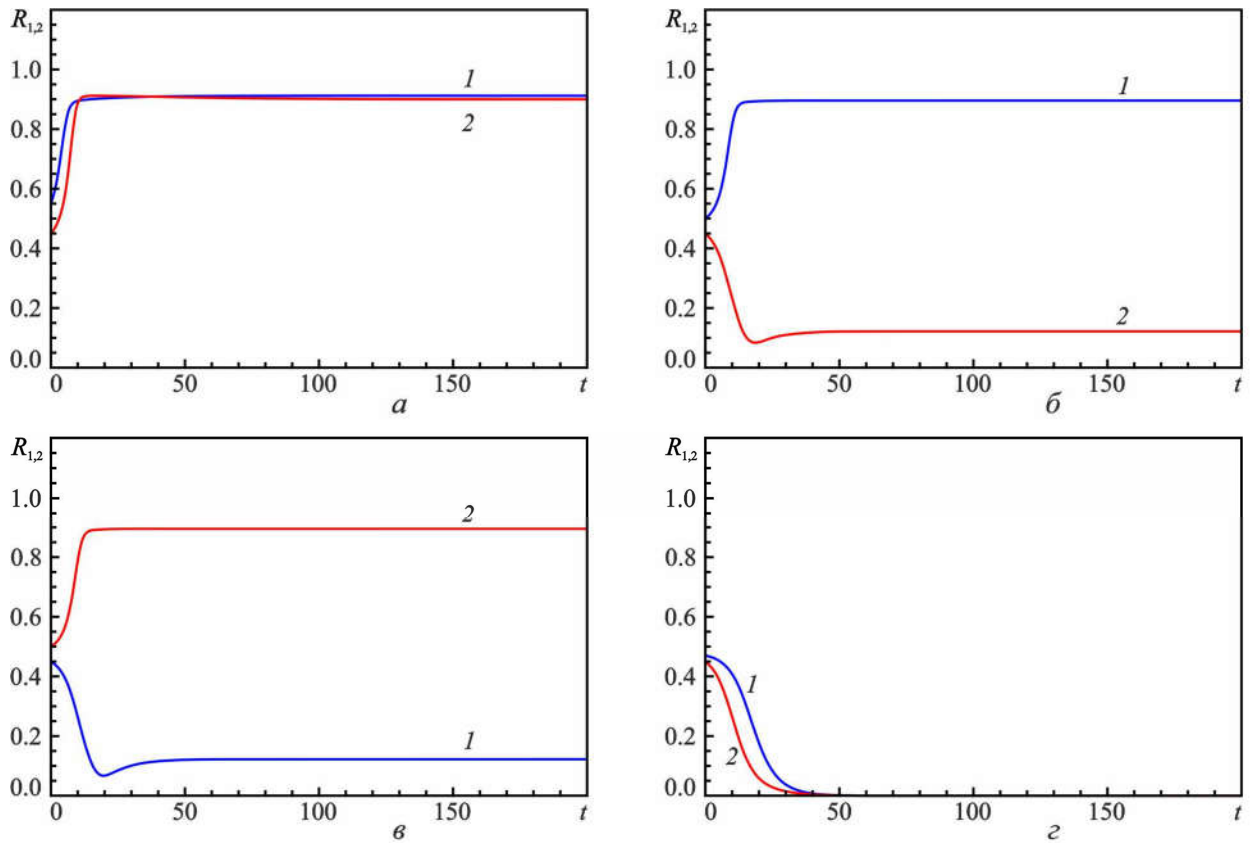


Рис. 2.9. Зависимости амплитуд первого и второго генератора от времени при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, $\rho = 0.02$, $\Delta = 0.02$ и различных начальных условиях: (а) $R_{1,2} > R_-$ — режим взаимной синхронизации; (б) $R_1 > R_-$, $R_2 < R_-$, (в) $R_1 < R_-$, $R_2 > R_-$ — режимы подавления одного генератора другим; (г) $R_{1,2} < R_-$ — затухание колебаний.

генераторов и установление режимов, которым соответствуют устойчивые точки U_1 или U_2 . Данную ситуацию иллюстрируют рис. 2.9(б,в). Если же начальная амплитуда обоих генераторов меньше, чем R_- , происходит затухание колебаний (см. рис. 2.9(г)).

Разумеется, поскольку система (2.5) трехмерная, в реальности ситуация зависит еще и от начальной разности фаз и проекции границ бассейнов притяжения на плоскость R_1, R_2 не являются прямыми линиями. Однако эти отличия незначительны, поскольку ситуация, когда имеют место все четыре режима, реализуется только в случае слабой связи.

Из рис. 2.8 нетрудно понять, как трансформируется картина бассейнов притяжения в результате седлоузловых бифуркаций $S_1 - U_1$ и $S_2 - U_2$, в

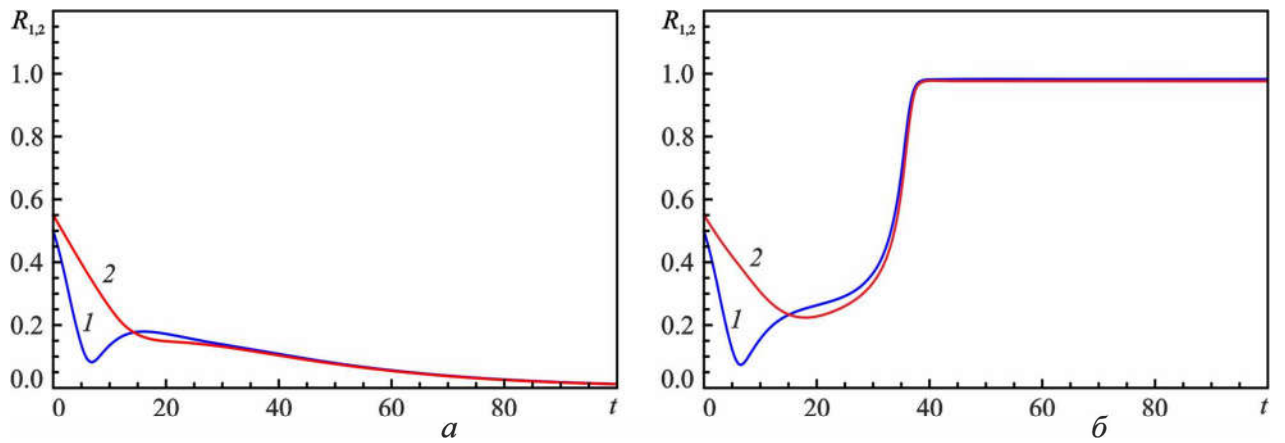


Рис. 2.10. Зависимости амплитуд первого и второго генератора от времени при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, $\Delta = 0.02$, $\rho = 0.15$ и различных начальных условиях: (а) $R_1(0) = 0.5$, $R_2(0) = 0.55$, $\varphi(0) = 0.98\pi$ — гибель колебаний; (б) начальные амплитуды те же, а $\varphi(0) = 0.97\pi$ — режим взаимной синхронизации.

результате которых точки $U_{1,2}$ перестают существовать. Однако следует отметить еще одно важное обстоятельство. При увеличении параметра связи происходит седлоузловая бифуркация, в результате которой сливаются точки A_- и S_3 или S_4 . При этом бассейн притяжения точки I трансформируется таким образом, что при начальной разности фаз $\varphi(0) \approx \pi$ фазовая траектория стремится к точке O , независимо от того, каковы были значения начальных амплитуд. Эту ситуацию иллюстрирует рис. 2.10. Если начальная разность фаз является неблагоприятной, даже при начальных значениях амплитуд $R_{1,2}(0) > R_-$, сигнал одного генератора начинает поступать в колебательную систему другого в противофазе, в результате чего происходит полное взаимное подавление колебаний обоих генераторов (рис. 2.10(а)). Однако при небольшом изменении начальной разности фаз устанавливается режим взаимной синхронизации (см. рис. 2.10(б)). Таким образом, в данном случае мы имеем специфический случай эффекта гибели колебаний, который, в отличие от известного (см., например, [3,7]), обусловлен не увеличением эффективной диссипации, а изменением структуры бассейнов притяжения. Аналогичное поведение наблюдалось и в случае вынужденной синхронизации генератора с жестким возбуждением внешним сигналом [34].

Ясно, что с практической точки зрения зависимость от начальной разности фаз, которая, вообще говоря, является случайной величиной — явление нежелательное. Поэтому целесообразно выбирать параметры таким образом, чтобы находиться ниже границы седлоузловой бифуркации, в результате которой сливаются точки A и S_3 или S_4 (см. рис. 2.7), или же в области, где нулевое состояние уже потеряло свою устойчивость.

Условие потери устойчивости точкой O нетрудно найти аналитически. Проводя стандартную процедуру линеаризации уравнений (2.4) относительно малых возмущений, приходим к характеристическому уравнению, которое имеет вид

$$(p - \sigma)^2 + (\Delta/2)^2 = \rho^2 e^{-2i\psi}. \quad (2.29)$$

Случаю, когда нулевое решение теряет устойчивость, соответствует чисто мнимый корень характеристического уравнения $p = i\omega$. Тогда, разделяя (2.29) на вещественную и мнимую части и исключая из полученных соотношений ω , получим выражение, определяющее границу устойчивости на плоскости Δ, ρ :

$$\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 = \rho^2 \cos 2\psi + \frac{\rho^4 \sin^2 2\psi}{4\sigma^2} - \sigma^2. \quad (2.30)$$

На рис. 2.5 эта граница показана штриховой линией ON .

Отметим, что при $\psi \rightarrow \pi/2$, т.е. когда связь приобретает чисто реактивный характер, граница устойчивости смещается в область больших значений ρ . Эту ситуацию иллюстрирует рис. 2.11, на котором построены границы устойчивости точки O при разных ψ . При чисто реактивной связи нулевое решение всегда устойчиво. Действительно, при $\Delta = 0$ из (2.30) нетрудно найти

$$\rho = |\sigma| \frac{\sqrt{2(1 - \cos 2\psi)}}{\sin 2\psi}, \quad (2.31)$$

откуда видно, что $\rho \rightarrow \infty$ при $\psi = \pi/2$. При $\psi = 0$, когда связь чисто диссипативная, получаем $\rho = |\sigma|$.

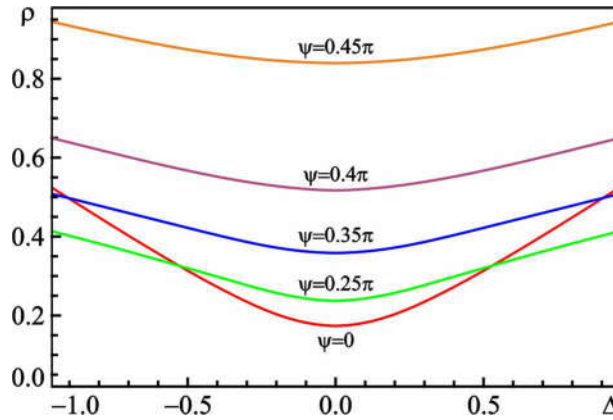


Рис. 2.11. Границы устойчивости нулевого решения, построенные по формуле (2.30) при $\sigma = -0.16$ и различных значениях набега фазы.

2.3.2. Случай больших расстройк

Теперь обратимся к случаю больших расстройк. На рис. 2.12 приведены бифуркационные диаграммы для амплитуд колебаний первого R_1 и второго R_2 генераторов в случае $\Delta = 1.8$. Видно, что при слабой связи существуют два устойчивых состояния $U_{1,2}$, две неустойчивые точки $P_{1,2}$, устойчивое нулевое решение O . Также в фазовом пространстве существуют четыре предельных цикла. Как уже отмечалось выше (см. п. 2.2), при введении слабой связи между генераторами, существует устойчивый цикл с примерно равными амплитудами $R_{1,2} = R_+$, который будем обозначать C_+ . Этому циклу соответствует режим биений. Также существует неустойчивый предельный цикл C_- с амплитудами примерно равными $R_{1,2} = R_-$. Помимо этих предельных циклов существуют еще два неустойчивых цикла, для которых $R_1 \approx R_+$, $R_2 \approx R_-$ и наоборот. Их будем обозначать C_{\pm} и C_{\mp} , соответственно. На рис. 2.13 приведена проекция неподвижных точек и предельных циклов на плоскость R_1, R_2 при достаточно слабой связи, когда существуют 5 неподвижных точек и 4 предельных цикла.

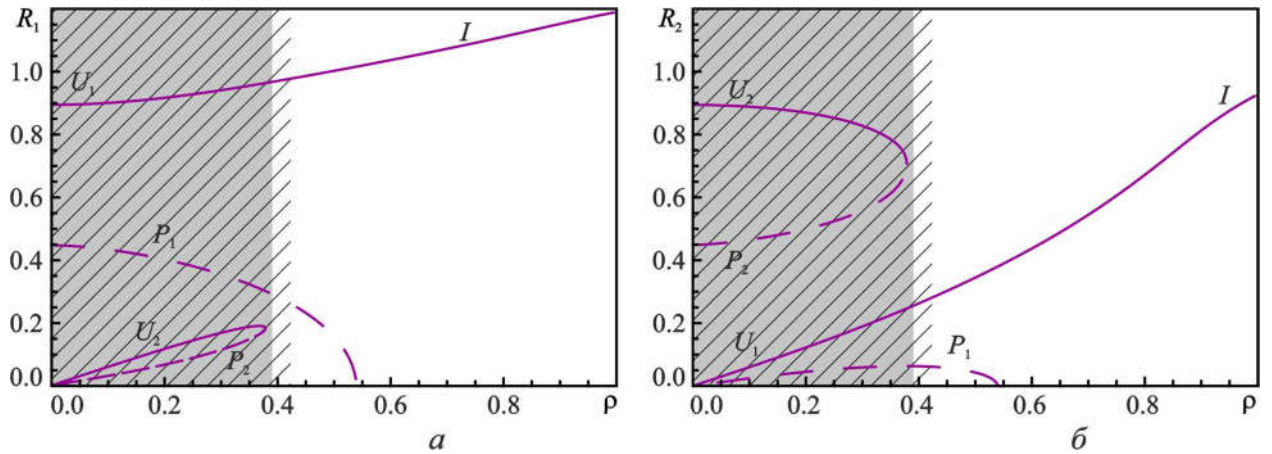


Рис. 2.12. Бифуркационные диаграммы для амплитуды первого (а) и второго (б) генераторов при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ и $\Delta = 1.8$.

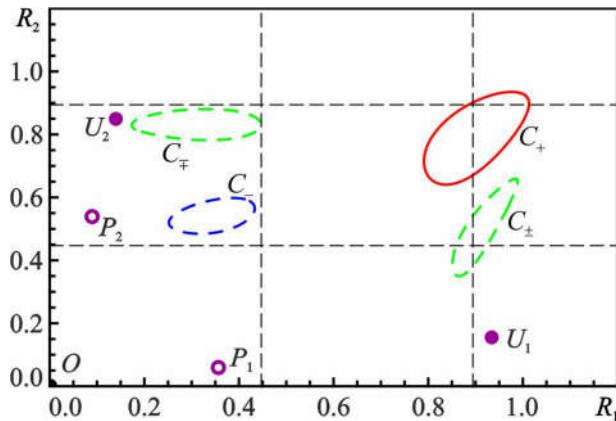


Рис. 2.13. Проекция неподвижных точек системы (2.5) и предельных циклов на плоскость R_1, R_2 при $\sigma = -0.16$, $b = 0$, $\psi = 0.2\pi$, $\Delta = 1.8$ и $\rho = 0.3$. Сплошной кривой показан устойчивый цикл, штриховыми — неустойчивые.

Поверхности, на которых лежат неустойчивые циклы C_- , C_{\pm} и C_{\mp} , разграничивают бассейны притяжения четырех существующих аттракторов (точки O , $U_{1,2}$ и цикл C_+). Анализ показывает, что при увеличении ρ вначале происходит слияние циклов C_+ и C_{\pm} , а затем — слияние циклов C_- и C_{\mp} . Области существования этих циклов показаны на рис. 2.12 серым цветом и штриховкой соответственно.

Как видно из бифуркационных диаграмм, при $\rho \approx 0.415$ режим, когда второй генератор доминирует над первым, теряет устойчивость в результате

седлоузловой бифуркации $U_2 - P_2$. Что касается режима, в котором доминирует первый генератор (точка U_1), то он сохраняет устойчивость при любых значениях параметра связи. Однако стоит отметить, что с увеличением ρ амплитуда колебаний второго генератора R_2 увеличивается и становится примерно такой же, как R_1 . Разность фаз при этом приближается к нулю. Таким образом, при больших расстройках режим с сильно различающимися амплитудами колебаний плавно переходит в режим синфазной синхронизации и существует при любом значении параметра связи. Здесь можно усмотреть некоторую аналогию с эффектом широкополосной синхронизации, который изучался в работах [56,57].

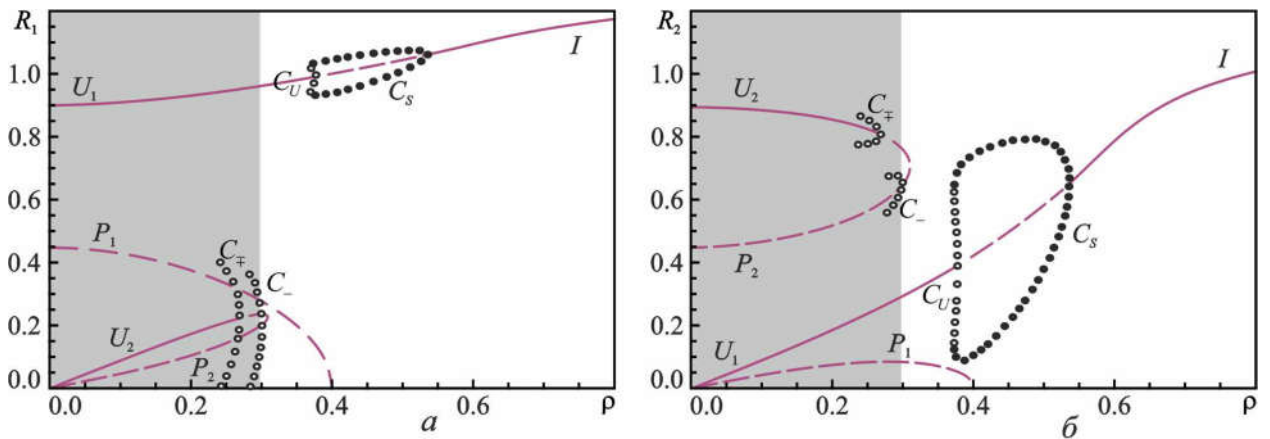


Рис. 2.14. Бифуркационные диаграммы для первого (а) и второго (б) генераторов при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ и $\Delta = 1.0$. Серым цветом закрашена область существования предельных циклов C_+ и C_- .

На рис. 2.14 приведены бифуркационные диаграммы для случая $\Delta = 1.0$, когда точки $U_{1,2}$ теряют устойчивость в результате обратных бифуркаций Андронова–Хопфа AH_2 (ср. рис. 2.5). При слабой связи ситуация такая же, как и при $\Delta = 1.8$: в фазовом пространстве существует пять неподвижных точек и четыре предельных цикла (см. рис. 2.13). Отличие состоит в том, что с увеличением ρ циклы C_+ и C_- уменьшаются в размерах и становятся стягиваемыми. При $\rho \approx 0.269$ происходит обратная бифуркация Андронова–Хопфа: цикл C_+ сливается с точкой U_2 , в результате чего она теряет устой-

чивость. Неустойчивый цикл C_- сливается с точкой P_2 при $\rho \approx 0.301$. Что касается циклов C_+ и C_{\mp} , то они сливаются друг с другом и исчезают, так же, как и при $\Delta = 1.8$. После этого устойчивыми остаются только режим синхронизации, в котором доминирует первый осциллятор (точка U_1) и режим отсутствия колебаний (точка O).

Еще одно отличие от случая $\Delta = 1.8$ связано с тем, что при $\rho \approx 0.372$ образуются еще два цикла: устойчивый и неустойчивый, которые будем обозначать C_S и C_U , соответственно. При $\rho \approx 0.377$ цикл C_U в результате обратной бифуркации Андронова–Хопфа сливается с точкой U_1 и она теряет устойчивость. Однако устойчивым остается режим биений, которому соответствует цикл C_S . Этот цикл при $\rho \approx 0.536$ сливается с теперь уже неустойчивой точкой U_1 , в результате чего она снова становится устойчивой. Таким образом, при обратном движении по параметру ρ наблюдается нормальная (суперкритическая) бифуркация Андронова–Хопфа.

2.3.3. Влияние неизохронности

Теперь рассмотрим случай неизохронных осцилляторов. Выберем для определенности значение $b = 0.1$. На рис. 2.15(а) построены границы седлоузловых бифуркаций и бифуркаций Андронова–Хопфа на плоскости параметров для этого случая. В целом представленная картина синхронизации аналогична изохронному случаю, за исключением того, что границы седлоузловых бифуркаций несимметричных точек SN_3 и SN_4 выходят не из начала координат, а из точек $\Delta = \pm b\sqrt{1 + 4\sigma}$, как было показано в п. 2.2.2. На рис. 2.15(б) приведен увеличенный фрагмент в области малых расстройек. Отметим, что границы седлоузловых бифуркаций SN_{1-4} достаточно хорошо согласуются с результатами анализа в фазовом приближении, что иллюстрирует рис. 2.16.

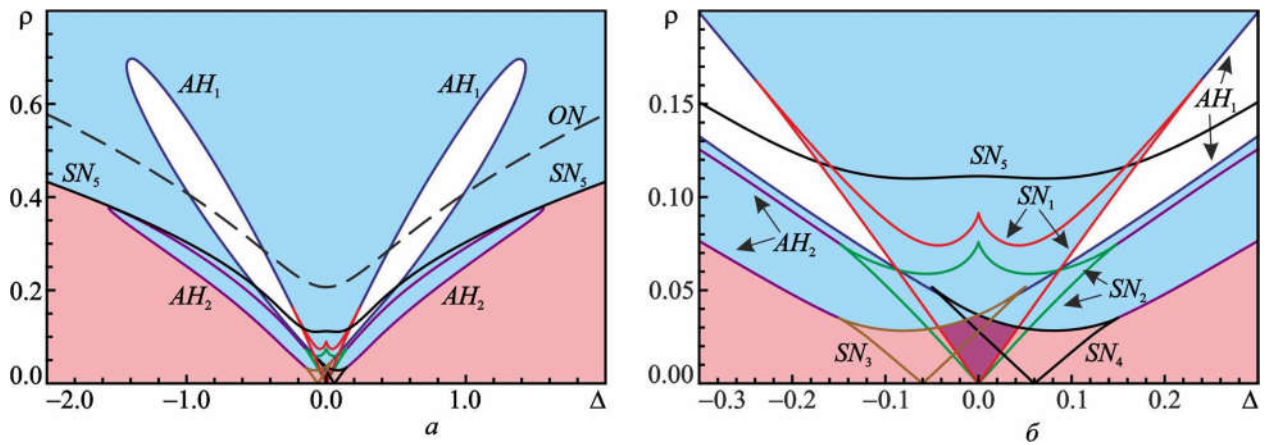


Рис. 2.15. Границы седлоузловых бифуркаций (SN) и бифуркаций Андронова–Хопфа (AH) на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ и $b = 0.1$ (а) и ее увеличенный фрагмент в области малых расстройок (б). Области устойчивости синхронных режимов закрашены различными цветами.

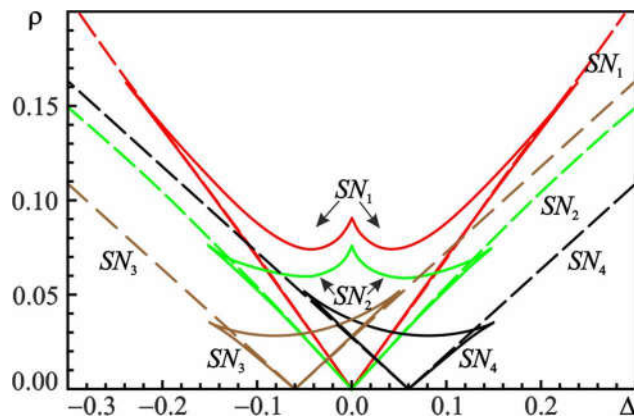


Рис. 2.16. Границы седлоузловых бифуркаций (SN) на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ и $b = 0.1$. Сплошными линиями показаны результаты бифуркационного анализа с помощью ХРРАУТ, штриховыми — результаты анализа в рамках фазового приближения (п. 2.2)

Когда параметр ψ принимает такие значения, что инерционная связь становится существенной, возникает устойчивый режим противофазной синхронизации с примерно равными амплитудами. Это подтверждает рис. 2.17, на котором построены области устойчивости синхронных режимов на плоскости параметров Δ, ρ в случае $\psi = 0.4\pi$. Видно, что появляется область противофазной синхронизации, причем ее конфигурация аналогична описанной

в п. 1.2 для связанных генераторов с мягким самовозбуждением. Поэтому останавливаться подробно на ее анализе мы не будем.

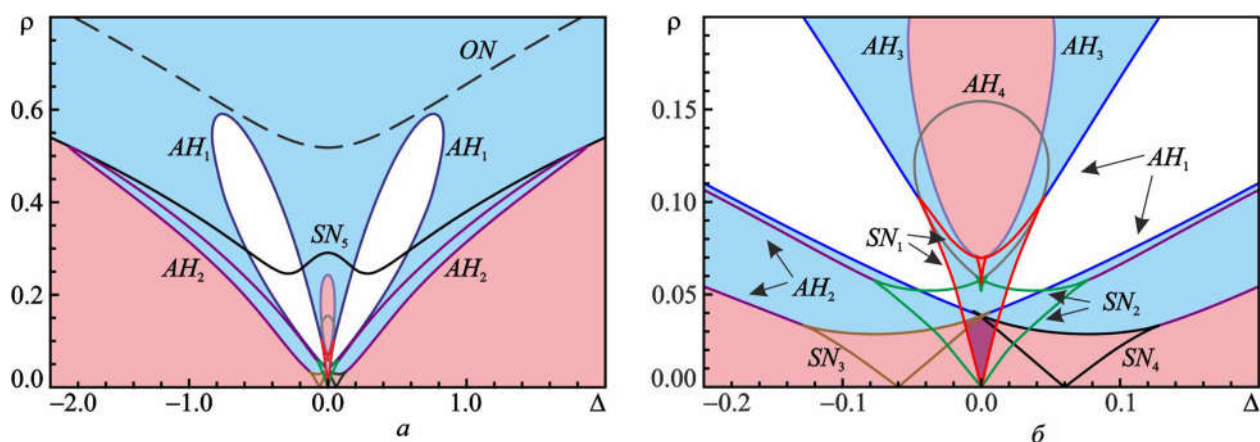


Рис. 2.17. Границы седлоузловых бифуркаций (SN) и бифуркаций Андронова–Хопфа (AH) на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.4\pi$ и $b = 0.1$ (а) и ее увеличенный фрагмент в области малых расстройок (б). Области устойчивости синхронных режимов закрашены различными цветами.

2.4. Выводы

В Главе 2 представлен анализ синхронизации системы двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Показано, что динамика в такой системе значительно усложняется по сравнению со связанными системами с мягким самовозбуждением. Помимо режимов синхронизации, в которых амплитуды колебаний R_1 и R_2 одного порядка, существуют режимы, в которых один из генераторов доминирует, т.е. $R_1 \gg R_2$ или наоборот. Также устойчивым является нулевое решение.

При слабой связи в фазовом пространстве имеется 5 неподвижных точек, из которых три (две, отвечающие режимам с доминированием одного из генераторов, и точка O , отвечающая отсутствию колебаний) являются устойчивыми, а также четыре предельных цикла, один из которых является устойчивым, а три — неустойчивыми. При увеличении связи на четырех упомянутых циклах происходят седлоузловые бифуркации, в результате чего число неподвижных точек увеличивается до 13, из которых 4 устойчивы.

Проведен анализ синхронизации в фазовом приближении. Получены обобщенные уравнения Адлера для различных ситуаций, из которых найдены простые аналитические формулы для условий возникновения вышеупомянутых седлоузловых бифуркаций.

Проведен бифуркационный анализ в амплитудно-фазовом приближении. Показано, что в случае малых расстроек и слабой связи наблюдается картина, хорошо согласующаяся с фазовым приближением. С увеличением параметра связи неподвижные точки $U_{1,2}$, которые соответствуют режимам с доминированием одного из осцилляторов, сливаются с седловыми неподвижными точками $S_{1,2}$ и исчезают.

При дальнейшем увеличении ρ происходит трансформация бассейна притяжения точки O , в результате которой, если в начальный момент времени колебания генераторов близки к противофазным, колебания затухают при любых начальных амплитудах. Это своеобразная разновидность эффекта гибели колебаний, которая обусловлена не увеличением эффективной диссипации, а изменением структуры бассейнов притяжения.

Показано, что с увеличением параметра связи точка O в начале координат теряет устойчивость, сталкиваясь одной из седловых точек P_1 или P_2 . После этого единственным устойчивым режимом является режим взаимной синхронизации. Такое поведение обусловлено увеличением эффективной добротности колебательной системы. Таким образом, с практической точки зрения наиболее благоприятная ситуация реализуется в том случае, когда параметр превышает значение, при котором нулевое решение теряет устойчивость.

В случае больших расстроек устройство плоскости параметров во многом определяется поведением упомянутых выше предельных циклов. При слабой связи устойчивы два режима с доминированием одного из осцилляторов (точки $U_{1,2}$) и режим биений (предельный цикл C_+). С увеличением параметра связи цикл C_+ теряет устойчивость не в результате седлоузловой

бифуркации, как в случае малых расстроек, а сливается с циклом C_{\mp} и исчезает. Что касается точек $U_{1,2}$, то одна из них либо сливается с одной из седловых точек $P_{1,2}$, либо теряет устойчивость, в результате обратной (субкритической) бифуркации Андронова–Хопфа. Другая из этих точек остается устойчивой при любых значениях параметра связи, причем амплитуды колебаний обоих осцилляторов постепенно сравниваются, т.е. режим колебаний с доминированием одного из осцилляторов постепенно трансформируется в режим синфазной синхронизации.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ ДВУХ ГИРОТРОНОВ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДЕРЖКОЙ

В предыдущих главах рассматривались достаточно простые модели связанных генераторов с полиномиальной нелинейностью. Как уже отмечалось во Введении, очевидный интерес представляет обобщение полученных результатов на системы связанных микроволновых генераторов, в особенности — гиротронов. Как правило, теоретическое исследование процессов синхронизации гиротронов и других микроволновых генераторов проводят путем вычислительного эксперимента на основе тех или иных математических моделей, хорошо зарекомендовавших себя в микроволновой электронике. В основном используются модели нестационарной теории с фиксированной [33,58-60] или нефиксированной [21,33,61,62] структурой высокочастотного (ВЧ) поля. В последние годы появилась возможность исследования процессов в гиротронах с помощью 3-D «полностью электромагнитных» кодов [63,64]. Однако с помощью таких подходов затруднительно дать достаточно полное описание картины синхронизации, в частности, выявить структуру областей синхронизации в пространстве управляющих параметров и провести бифуркационный анализ механизмов перехода в режим синхронизации. В особенности ситуация усложняется при увеличении запаздывания в канале связи, когда априори неизвестно само число мультистабильных состояний.

В данной главе предложена модифицированная квазилинейная модель системы связанных гиротронов в виде системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, которая позволяет исследовать режимы синхронизации, используя автоматизированные пакеты бифуркационного анализа XPPAUT [48] и DDEBifTool [51]. Показано, что с помощью данной модели можно определить значения наиболее важных с практической точки зрения количественных параметров (мощность, КПД, частота генерации), которые достаточно хорошо согласуются с результатами численного моделиро-

вания на основе уравнений нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля.

3.1. Модифицированная квазилинейная модель гиротрона

Рассмотрим систему двух связанных гиротронов, которые, как и в предыдущих главах, будем считать идентичными за исключением небольшой расстройки собственных частот: $\omega_1 \neq \omega_2$, причем $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_0$, где $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ — средняя частота. Будем исходить из известных уравнений нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля (см., например, [33,58-60]). Считая, что время пролета электронов много меньше, чем характерное время установления колебаний, т.е. $L/v_{\parallel 0} \ll Q/\omega_0$, где Q — добротность резонатора, L — длина пространства взаимодействия, $v_{\parallel 0}$ — продольная скорость электронов, запишем уравнения движения электронов (индексы «1» и «2» относятся к первому и второму гиротронам, соответственно):⁴

$$\frac{dp_{1,2}}{d\zeta} + i\left(\Delta_H + |p_{1,2}|^2 - 1\right)p_{1,2} = iA_{1,2}f_s(\zeta) \quad (3.1)$$

Здесь $p_{1,2}$ — безразмерные поперечные импульсы электронов, $A_{1,2}$ — медленно меняющиеся (по сравнению с $\exp(i\omega_0 t)$) безразмерные комплексные амплитуды полей, $\zeta = (\beta_{\perp}^2/2\beta_{\parallel})\omega_0 z/c$ — безразмерная продольная координата, $\beta_{\parallel} = v_{\parallel 0}/c$, $\beta_{\perp} = v_{\perp 0}/c$, $\Delta_H = 2(\omega_0 - \omega_H)/(\beta_{\perp}^2 \omega_0)$ — расстройка циклотронного резонанса, ω_H — циклотронная частота. Функция $f_s(\zeta)$ описывает распределение поля в резонаторе. Выберем ее в виде гауссовой функции

$$f_s(\zeta) = \exp\left[-3\left(\frac{2\zeta}{\zeta_k} - 1\right)^2\right], \quad (3.2)$$

⁴ Будем ограничиваться случаем, когда взаимодействие осуществляется на основной циклотронной гармонике.

где $\zeta_k = (\beta_{\perp}^2/2\beta_{\parallel})\omega_0 L/c$. Функция (3.2) часто используется для аппроксимации реального распределения поля в резонаторе гиротрона.

Уравнения (3.1) решаются с граничными условиями

$$p(\zeta = 0) = e^{i\varphi_0}, \quad (3.3)$$

где начальные фазы φ_0 равномерно распределены по промежутку $[0, 2\pi]$.

Амплитуды $A_{1,2}$ подчиняются уравнениям возбуждения (1.4), которые запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{d\tau} + \frac{i\Delta}{2} A_1 + A_1 &= I_s \Phi(A_1) A_1 + \rho e^{-i\psi} A_2 (\tau - \tau_d), \\ \frac{dA_2}{d\tau} - \frac{i\Delta}{2} A_2 + A_2 &= I_s \Phi(A_1) A_2 + \rho e^{-i\psi} A_1 (\tau - \tau_d). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь введен безразмерный параметр тока [33,41-43]

$$I_s = \left(\frac{e\mu_0}{\pi m_0 c} \right) \frac{1}{\beta_{\perp}^2 \beta_{\parallel} \gamma_0} \frac{Q G_{mn} I_b}{N_s}, \quad (3.5)$$

где I_b — постоянный ток электронного пучка, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная, γ_0 — релятивистский масс-фактор в начале пространства

взаимодействия, $N_s = \int_0^{\zeta_k} |f_s(\zeta)|^2 d\zeta \approx \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ — норма волны, $\mu = \zeta_k / \sqrt{3}$ —

нормированная длина пространства взаимодействия,

$$G_{mn} = \frac{J_{m-1}^2(v_{mn} R_b / R_g)}{J_m^2(v_{mn})(v_{mn}^2 - m^2)}$$

— фактор связи пучка с рабочей модой TE_{mn} , J_m — функция Бесселя 1-го рода порядка m , v_{mn} — n -й положительный корень уравнения $J'_m(v) = 0$, R_b и R_g — радиусы электронного пучка и волновода, соответственно.

Также в уравнениях (3.4) введены обозначения (ср. п. 1.1): $\tau = \omega_0 t / (2Q)$ — безразмерное время, $\Delta = 2Q(\omega_1 - \omega_2) / \omega_0$ — безразмерная расстройка, $\tau_d = \omega_0 t_d / (2Q)$ — нормированное время задержки t_d , $\psi = \omega_0 t_d$ — набег фазы

сигнала за время прохождения по цепи связи, $\rho = \sqrt{P_{in}/P_{out}}$ — коэффициент связи. Отметим, что в силу определения параметра связи физический смысл имеют значения $\rho < 1$ (в отличие от глав 1,2, где мы выполняли перенормировку переменных и параметров (1.6) или (2.2)).

Решая уравнения движения (3.1) можно определить гармоники высокочастотного тока

$$J_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{1,2} d\varphi_0, \quad (3.6)$$

с помощью которых можно найти функцию электронной восприимчивости

$$\Phi(A_{1,2}) = \frac{i}{A_{1,2}} \int_0^{\zeta_k} J_{1,2}(\zeta, \tau) f_s^*(\zeta) d\zeta. \quad (3.7)$$

Вместе с тем, существует известный подход, позволяющий провести приближенное аналитическое исследование автоколебаний в гиротроне с фиксированной структурой ВЧ поля. Он основан на так называемой квазилинейной теории [33,41-43,53], в рамках которой уравнения движения электронов решаются приближенно методом разложения по малому параметру, в роли которого выступает амплитуда поля. В результате можно найти сгруппированный ток и получить выражение комплексной электронной восприимчивости в виде ряда по степеням амплитуды поля $\Phi \approx \alpha - \beta|A|^2 + \dots$. Однако квазилинейная теория справедлива только при небольшом превышении порога самовозбуждения, поэтому ее результаты носят качественный характер.

Можно предложить следующую модификацию квазилинейной теории, которая позволяет добиться не только качественного, но и количественного соответствия с нестационарной теорией гиротрона с фиксированной структурой поля. Рассмотрим для простоты одиночный гиротрон, для которого уравнение возбуждения имеет вид

$$\frac{dA}{d\tau} + A = I_s \Phi(A) \cdot A. \quad (3.8)$$

Тогда для режима стационарных колебаний с фиксированной частотой Ω из уравнения (3.8) получим

$$\begin{aligned} 1 &= I_s \Phi'(A), \\ \Omega &= I_s \Phi''(A), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\Phi' \equiv \text{Re}\Phi$, $\Phi'' \equiv \text{Im}(\Phi)$ — вещественная (активная) и мнимая (реактивная) составляющие электронной восприимчивости соответственно. Проведя серию расчетов установления колебаний при различных значениях параметра I_s на основе приведенных выше уравнений нестационарной теории с фиксированной структурой ВЧ поля, можно найти соответствующие значения частоты и амплитуды колебаний $\Omega(I_s)$ и $W(I_s)$, где $W = |A|^2$. Далее, если обратить зависимость $W(I_s)$ и выразить $I_s = I_s(W)$, из соотношений (3.9) можно определить Φ' и Φ'' как функции W :

$$\Phi' = 1/I_s(W), \quad (3.10)$$

$$\Phi'' = \Omega(W)/I_s(W). \quad (3.11)$$

В качестве конкретного примера рассмотрим гиротрон с рабочей модой $\text{TE}_{25,10}$, предназначенный для электронно-циклотронного нагрева плазмы. Гиротрон имеет следующие параметры [65]: рабочая частота 170 ГГц, мощность порядка 1 МВт, ток электронного пучка 45 А, напряжение 73 кВ, радиус резонатора 17.77 мм, радиус пучка 7.39 мм, длина однородного участка резонатора 11.5 мм, питч-фактор 1.3, магнитное поле 6.7 Тл. При таких значениях параметров имеем $\Delta_H \approx 0.5$, $\mu \approx 10$. Для других гиротронов подобного класса также характерны близкие значения безразмерных параметров.

На рис. 3.1(а,б) приведен пример зависимостей $W(I_s)$ и $\Omega(I_s)$ при значениях параметров $\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10$. Значение Δ_H выбрано меньшим, чем в [65], чтобы генератор находился в режиме мягкого самовозбуждения. На рис. 3.1(в,г) построены соответствующие зависимости $\Phi'(W)$ и $\Phi''(W)$, для которых можно подобрать достаточно простые аппроксимации:

$$\Phi'(W) = \frac{\alpha' - \beta'W}{1 + \delta'W}, \quad \Phi''(W) = \frac{\alpha'' + \beta''W + \gamma''W^2}{1 + \delta''W^2}, \quad (3.12)$$

где $\alpha' = 54.05$, $\beta' = 15.0 \times 10^2$, $\delta' = 60.0$, $\alpha'' = -22.0$, $\beta'' = 8.0 \times 10^3$, $\gamma'' = 28.0 \times 10^4$, $\delta'' = 5.0 \times 10^4$. На рис. 3.1 зависимости, построенные по формулам (3.12), показаны сплошными линиями.

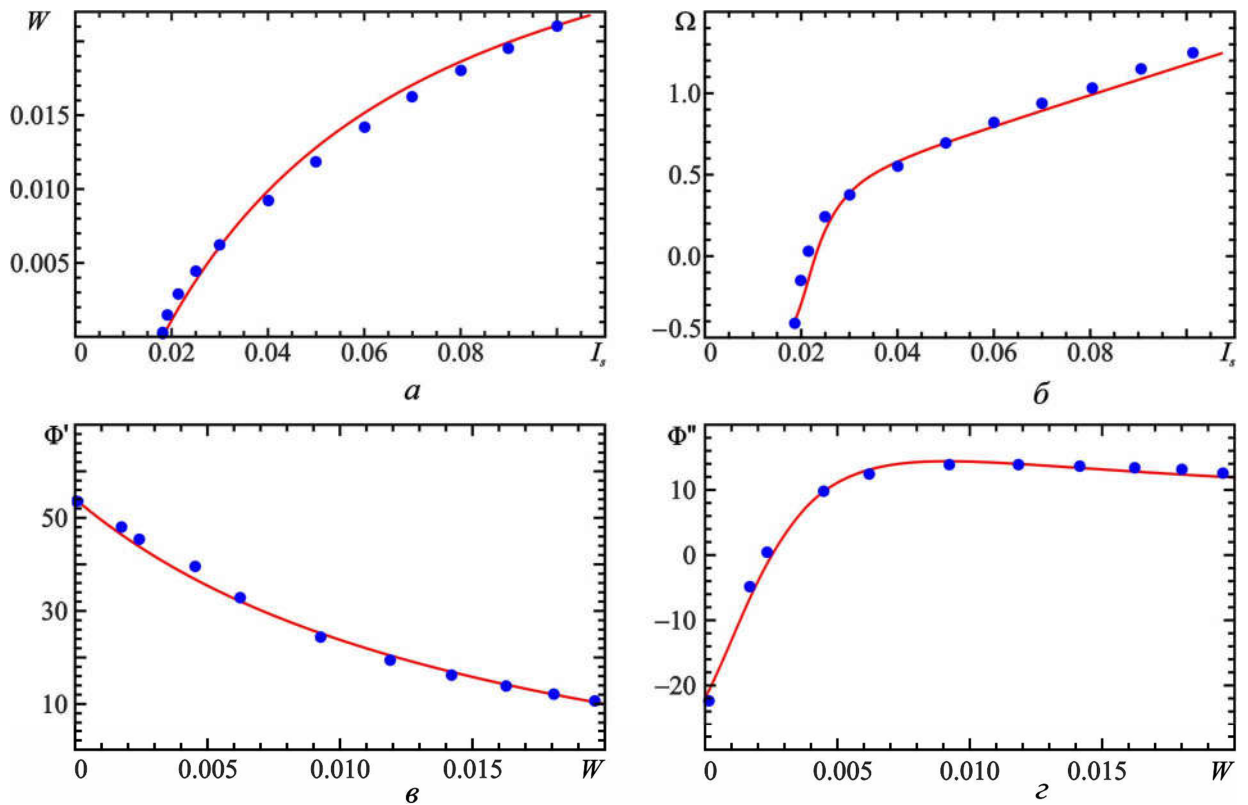


Рис. 3.1. Зависимости квадрата амплитуды колебаний (а) и частоты (б) от нормированного параметра тока, а также зависимости активной (в) и реактивной (г) составляющих электронной восприимчивости от квадрата амплитуды в случае мягкого самовозбуждения ($\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10$).

Отметим, что параметры α' и α'' определяют значения активной и реактивной восприимчивости в линейном пределе, когда $W \rightarrow 0$. Отсюда находим, что $\alpha' = 1/I_{s0}$, а $\alpha'' = \Omega_0/I_{s0}$, где I_{s0} — стартовое значение параметра I_s , Ω_0 — частота генерации на пороге самовозбуждения.

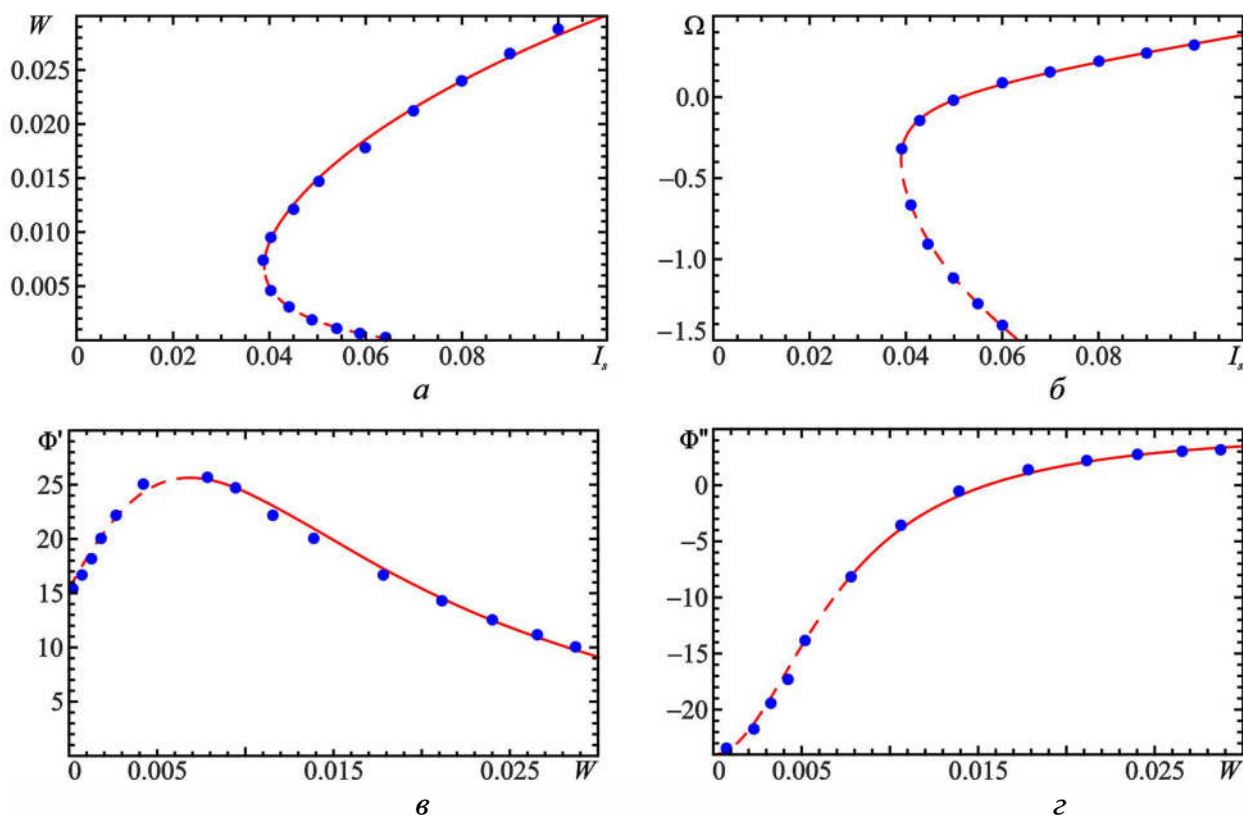


Рис. 3.2. Зависимости квадрата амплитуды колебаний (а) и частоты (б) от нормированного параметра тока, а также зависимости активной (в) и реактивной (г) составляющих электронной восприимчивости от квадрата амплитуды в случае жесткого возбуждения ($\Delta_H = 0.53$, $\mu = 10$).

На рис. 3.2 построены аналогичные зависимости для случая жесткого возбуждения ($\Delta_H = 0.53$, $\mu = 10$). Аппроксимации зависимостей $\Phi'(W)$ и $\Phi''(W)$ в данном случае имеют вид

$$\Phi'(W) = \frac{\alpha' - \beta'W - \gamma'W^2}{1 + \delta'W^2}, \quad \Phi''(W) = \frac{\alpha'' + \beta''W^2}{1 + \delta''W^2}, \quad (3.13)$$

где $\alpha' = 15.3864$, $\beta' = -3 \times 10^3$, $\gamma' = 45 \times 10^3$, $\delta' = 68 \times 10^2$, $\alpha'' = -24.0$, $\beta'' = 10^5$, $\delta'' = 2 \times 10^4$. Видно, что в области $0.39 < I_s < 0.65$ одному и тому же значению параметра соответствует два значения амплитуды колебаний, одно из которых неустойчиво. На рис. 3.2 неустойчивые состояния показаны пунктиром. При численном моделировании они определялись путем интегрирования уравнений в обратном времени.

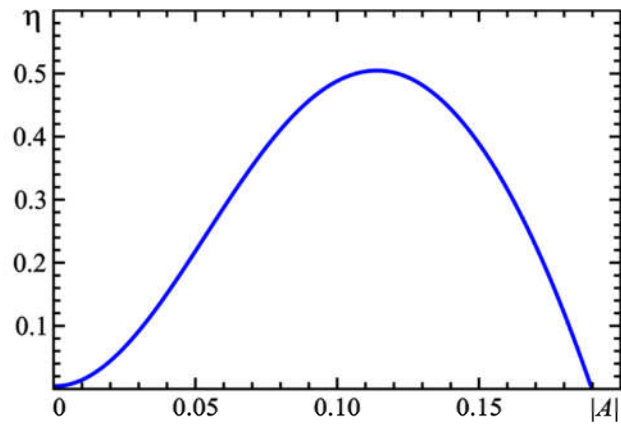


Рис. 3.3. Зависимость поперечного КПД от амплитуды стационарных колебаний при $\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10$.

Что касается состояния равновесия $A = 0$, то оно устойчиво при $I_s < 0.65$. Таким образом, в области $0.39 < I_s < 0.65$ имеет место бистабильность и возбуждение автоколебаний происходит жестким образом.

С практической точки зрения представляет интерес не амплитуда поля в резонаторе, а выходная мощность, которую можно определить, зная поперечный КПД

$$\eta = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p(\zeta_k)|^2 d\varphi_0,$$

т.е. долю вращательной энергии, отдаваемой электронами полю. В режиме установившихся одночастотных колебаний удобно выразить КПД через активную электронную восприимчивость (см., например, [33,53]):

$$\eta = 2\Phi'(|A|)|A|^2. \quad (3.14)$$

Зависимость КПД от амплитуды колебаний при значениях параметров $\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10$ построена на рис. 3.3. КПД достигает максимума $\eta = \eta_{\max} \approx 0.505$ при амплитуде колебаний $|A| = A_{\max} \approx 0.113$. Тогда из (3.9) можно найти соответствующее значение параметра тока $I_s \approx 0.05$. Однако в случае двух связанных гиротронов амплитуда колебаний изменится, поэтому изменится и оптимальное значение I_s , которое, вообще говоря, зависит от параметра связи ρ . Более подробно этот вопрос обсуждается ниже в разделе 3.3.

3.2. Сравнение с нестационарной теорией гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля

Проведем сопоставление результатов моделирования для разработанной модели с расчетами по традиционным уравнениям нестационарной теории гиротрона, когда функция восприимчивости Φ находится в результате интегрирования уравнений движения (3.1). Для определенности будем рассматривать случай мягкого самовозбуждения ($\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10$), когда для Φ' и Φ'' имеем соотношения (3.12) (см. рис. 3.1 (в,г)). Нормированный параметр тока выберем равным $I_s = 0.05$, поскольку при таком значении I_s в одиночном гиротроне достигается максимальный КПД ($\sim 50\%$) (см. рис. 3.3). Безразмерное время запаздывания выберем равным $\tau_d = 3.0$. Поскольку для рассматриваемого гиротрона частота генерации $f_0 \approx 170$ ГГц, а добротность резонатора $Q \approx 1100$ [65], получим, что время запаздывания $t_d \approx 6.2$ нс, что соответствует расстоянию между гиротронами $l \sim 2$ м.

На рис. 3.4 построены области синхронизации на плоскости параметров коэффициент связи ρ — частотная расстройка $\Delta f = (\omega_1 - \omega_2)/(2\pi)$ (для наглядности расстройка выражена в размерных единицах). Результаты моделирования на основе нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой поля показаны кружками, а границы синхронизации, рассчитанные на основе модифицированной квазилинейной модели, развитой в п.3.1, — сплошными линиями. Видно, что они полностью согласуются друг с другом.

Как уже отмечалось в п. 1.4, при наличии запаздывания появляется, вообще говоря, несколько режимов синхронизации, которые можно разделить на синфазные и противофазные (на рис. 3.4 они обозначены символами I и A соответственно). Действительно, рассмотрим для простоты случай нулевой расстройки собственных частот, когда уравнения (1.4) принимают вид

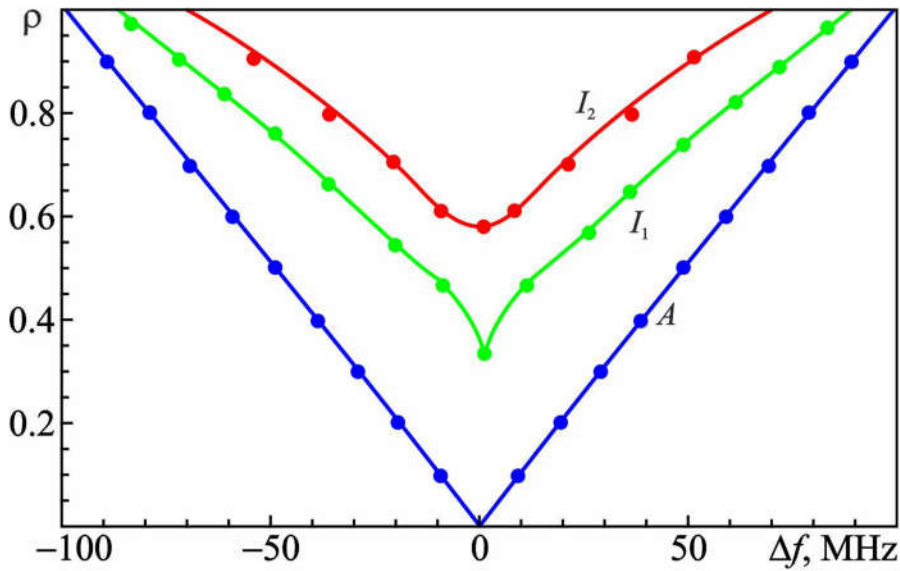


Рис. 3.4. Области синхронизации на синфазных ($I_{1,2}$) и противофазной (A) модах при $I_s = 0.05$, $\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10.0$, $\psi = 0.4\pi$, $\tau_d = 3.0$. Линиями показаны результаты численного моделирования для модифицированной квазилинейной модели, кружками — для уравнений нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля.

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{d\tau} + A_1 &= I_s \Phi(A_1) \cdot A_1 + \rho e^{-i\psi} A_2 (\tau - \tau_d), \\ \frac{dA_2}{d\tau} + A_2 &= I_s \Phi(A_2) \cdot A_2 + \rho e^{-i\psi} A_1 (\tau - \tau_d). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Очевидно, что эти уравнения имеют решения $A_1 = A_2$ и $A_1 = -A_2$, которые отвечают синфазной и противофазной моде соответственно. В режиме синхронизации колебания обоих генераторов происходят с одинаковой частотой Ω , для которой из уравнений (3.15) можно получить следующее уравнение:

$$\Omega = I_s \Phi''(W) \mp \rho \sin(\Omega \tau_d + \psi). \quad (3.16)$$

Здесь знак « \rightarrow » соответствует синфазному решению, знак « \leftarrow » — противофазному.

Решая уравнение (3.16), можно найти значения собственных частот, причем число корней (т.е. число собственных мод) увеличивается с ростом времени задержки. Анализ этого уравнения (см., например, [32,66,67]) пока-

зывает, что корни, для которых $\cos(\Omega\tau_d + \psi) > 0$, отвечают устойчивым состояниям, а корни для которых $\cos(\Omega\tau_d + \psi) < 0$ — неустойчивым.

Отметим, что при построении областей синхронизации, представленных на рис. 3.4, необходимо задавать начальные условия таким образом, чтобы попасть в бассейн притяжения аттрактора, соответствующего той или иной моде, что в случае развитой мультистабильности представляет собой нетривиальную задачу. Поэтому использовалась следующая методика. Вначале, решая уравнение (3.16), определяли собственные частоты различных мод. Затем проводили расчет при нулевой расстройке $\Delta = 0$, задавая начальные возмущения (для системы с запаздыванием, очевидно их нужно задать на интервале длительностью τ_d) в виде гармонических колебаний с малой амплитудой и соответствующей частотой

$$A_{1,2}(\tau) = A_0 \exp(i\Omega\tau + \varphi_{1,2}).$$

При этом для синфазных/противофазных мод разность фаз выбиралась равной 0 либо π соответственно. Уравнения интегрировались до момента установления режима синхронизации на соответствующей моде. Далее проводились расчеты при плавном увеличении расстройки с наследованием начальных условий до тех пор, пока не происходила потеря устойчивости данного режима.

При выбранных на рис. 3.4 значениях параметров устойчивыми являются две синфазные и одна противофазная моды, причем наиболее широкую полосу синхронизации имеет противофазная мода. Для синфазных мод имеется порог синхронизации, т.е. даже при нулевой расстройке синхронизация наступает при конечных значениях параметра связи.

Как видно из рис. 3.4, взаимная синхронизация возможна при расстройке собственных частот порядка 100 МГц. Собственная частота резонатора гиротрона близка к частоте отсечки, которая для ТЕ-мод определяется соотношением

$$\omega_c = \frac{v_{mn}c}{R_g},$$

где R_g — радиус резонатора, v_{mn} — n -ый корень уравнения $J'_m(v) = 0$, где J'_m — производная от функции Бесселя соответствующего порядка. Следовательно, изменение радиуса на малую величину ΔR_g вызывает изменение собственной частоты

$$\Delta f / f_0 \sim -\Delta R_g / R_g.$$

Поскольку для рассматриваемого гиротрона $R_g = 17.77$ мм [65], допустимое отклонение составляет примерно 10 мкм, в то время как современные технологии имеют погрешность изготовления около 2 мкм [68].

На рис. 3.5 приведены примеры зависимостей КПД и мгновенных частот от времени, рассчитанные как на основе теории с фиксированной структурой поля, так и с помощью модифицированной квазилинейной модели. Видно, что последняя хорошо описывает режим биений с достаточно сложной модуляцией КПД и частоты, который имеет место при выбранных значениях параметров. Мгновенные частоты определялись как производные от мгновенных фаз $\varphi_{1,2} = \arg(A_{1,2})$.

В п. 1.2. на примере связанных генераторов с кубичной нелинейностью было показано, что при малой расстройке и слабой связи синхронизация наступает в результате седлоузловой бифуркации, а при больших расстройке и сильной связи — бифуркации Андронова-Хопфа. Этот факт хорошо иллюстрируют рис. 3.5 и рис. 3.6. Приведенные на рис. 3.5 графики соответствуют случаю, когда параметры близки к границе установления синхронизации на противофазной моде. Зависимости имеют вид релаксационных колебаний со стадиями быстрого и медленного изменения переменных, что характерно для установления синхронизации путем захвата частот, т.е. в результате седлоузловой бифуркации [2,3,5].

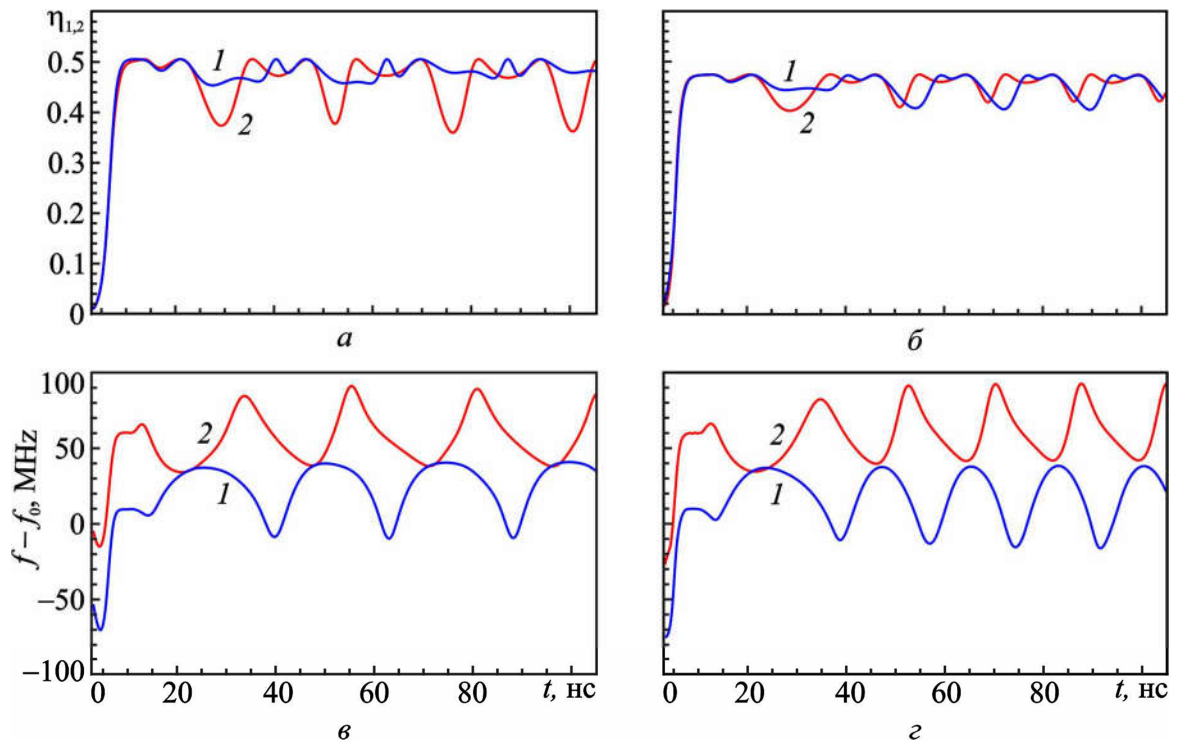


Рис. 3.5. Зависимости КПД (а, б) и частот (в, г) первого (кривые 1) и второго (кривые 2) гиротрона от времени для модифицированной квазилинейной модели (а,в) и для модели гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля (б,г). Значения параметров: $\rho = 0.5$, $\Delta = 75$ МГц, остальные параметры те же, что на рис. 3.4.

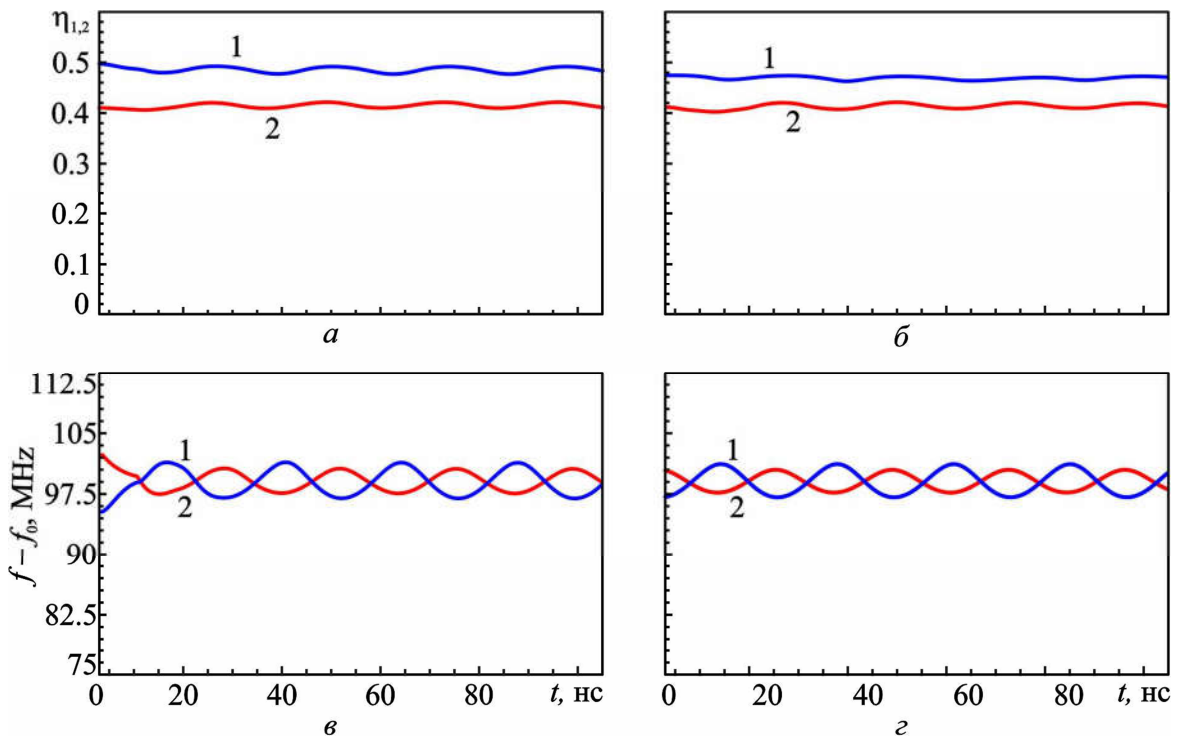


Рис. 3.6. Зависимости КПД (а, б) и частот (в, г) первого (кривые 1) и второго (кривые 2) гиротрона от времени для модифицированной квазилинейной модели (а,в) и для модели гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля (б,г). Значения параметров: $\rho = 0.8$, $\Delta = 80$ МГц, остальные параметры те же, что на рис. 3.4.

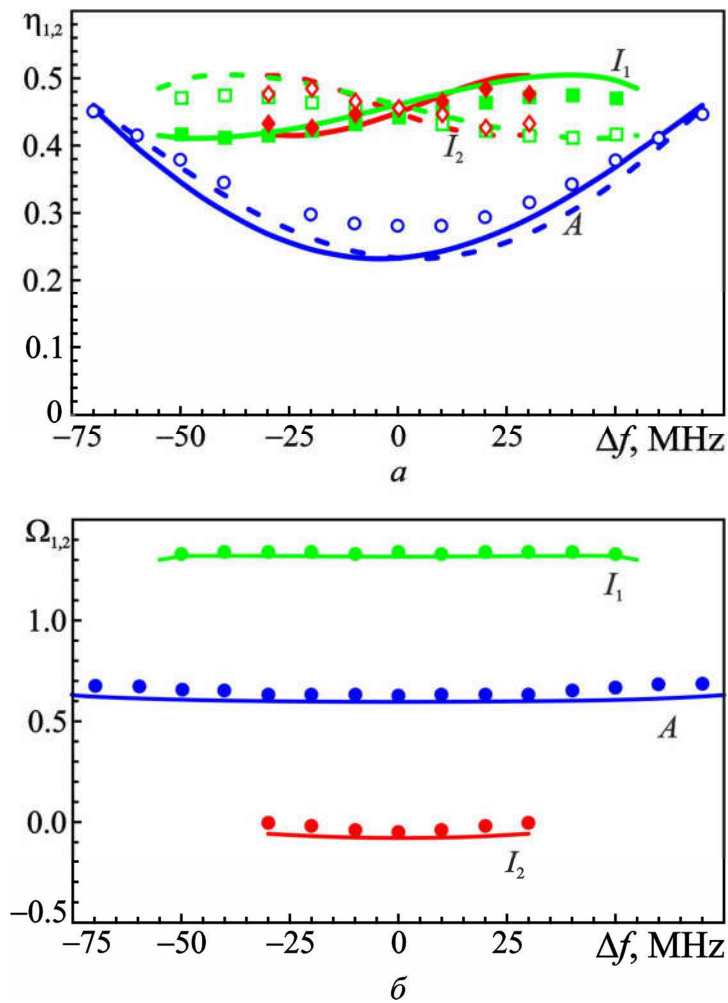


Рис. 3.7. Зависимости КПД (а) и частоты (б) первого гиротрона от расстройки частот при синхронизации на синфазных ($I_{1,2}$) и противофазной (A) модах ($\rho = 0.8$, остальные параметры те же, что на рис. 3.4). Линиями показаны результаты, полученные для упрощенной модели, символами — результаты для модели гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля (кружки — противофазная мода, квадраты — первая синфазная, ромбы — вторая синфазная).

Иная картина поведения наблюдается в окрестности границ синхронизации для синфазных мод. Для них переход к синхронизации происходит через подавление колебаний одного генератора другим, т.е. в результате бифуркации Андронова–Хопфа. Зависимости КПД и мгновенной частоты от времени для этого случая приведены на рис. 3.6. Видно, что амплитуда колебаний мала, т.е. биения возникают мягко, что типично для синхронизации подавлением [2,3,5].

На рис. 3.7 приведены примеры зависимостей КПД и частоты от расстройки собственных частот в режиме синхронизации. Выбрано значение коэффициента связи $\rho = 0.8$, при котором устойчивы две синфазных ($I_{1,2}$) и одна противофазная (A) моды (ср. рис. 3.4). Зависимости КПД для первого и второго гиротронов симметричны относительно оси $\Delta = 0$, а частоты в режиме синхронизации, очевидно, одинаковы для обеих подсистем. Обратим внимание, что частоты слабо зависят от расстройки.

Вновь отметим, что результаты расчетов для двух рассматриваемых моделей хорошо согласуются друг с другом: расхождение не превышает 5%. Также из рис. 3.7 видно, что синфазные моды характеризуются более высоким КПД, чем противофазная. Максимальные значения КПД составляют $\sim 50\%$, что примерно равно КПД в отсутствие связи. С другой стороны, для противофазной моды КПД также может достигать значений $\sim 50\%$ в области малых ρ , где эта мода является единственной (см. рис. 3.4). Также можно заметить, что характер зависимостей КПД от расстройки для синфазных и противофазной мод отличается, а именно, для противофазной моды максимальный КПД достигается вблизи границ языка синхронизации.

3.3. Бифуркационный анализ в случае малого времени запаздывания

Важное преимущество модифицированной квазилинейной модели состоит в том, что она позволяет исследовать режимы синхронизации аналитически, используя методы теории колебаний и нелинейной динамики, в том числе, с помощью современных пакетов для автоматизированного бифуркационного анализа, которые использовались в главах 1,2 для более простых моделей с мягким и жестким возбуждением. Рассмотрим ситуацию, когда время задержки мало по сравнению с характерным временем установления колебаний, т.е. $\tau_d \ll 1$ или в размерных переменных $t_d \ll 2Q/\omega_0$. В этом случае, как уже отмечалось в п. 1.2, в правых частях уравнений (1.4) можно положить $A_{1,2}(\tau - \tau_d) \approx A_{1,2}(\tau)$, после чего они превращаются в систему ОДУ.

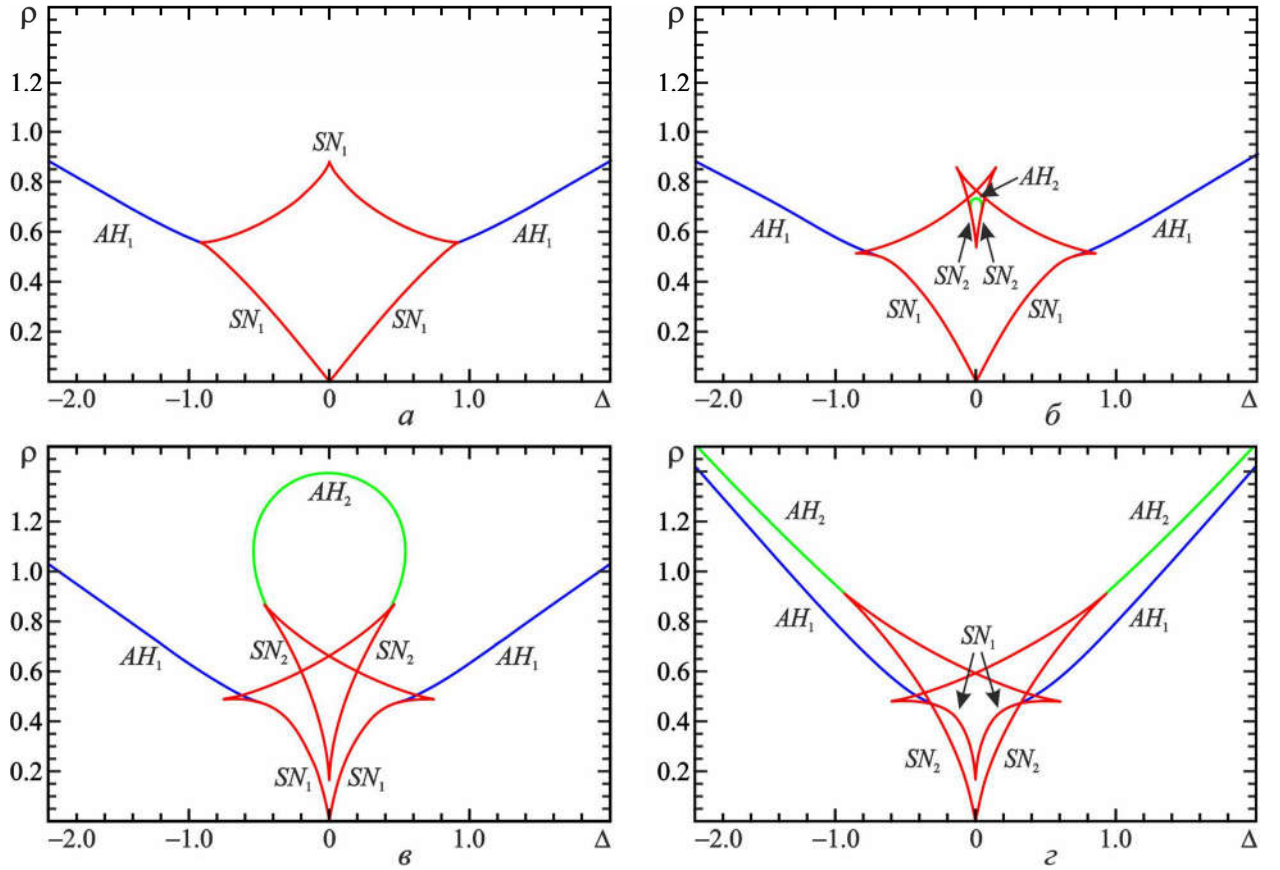


Рис. 3.8. Области синхронизации на синфазной и противофазной модах на плоскости параметров Δ, ρ при $I_s = 0.05$, $\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10.0$ и при различных значениях набега фазы: $\psi = 0.2\pi$ (а), 0.3π (б), 0.4π (в), 0.5π (г)

Полагая $A_{1,2} = R_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2})$, разделим её на уравнения для действительных амплитуд и фаз и получим систему уравнений третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= (I_s \Phi'(R_1^2) - 1) R_1 + \rho R_2 \cos(\psi + \varphi), \\ \dot{R}_2 &= (I_s \Phi'(R_2^2) - 1) R_2 + \rho R_1 \cos(\psi - \varphi), \\ \dot{\varphi} + \Delta &= I_s (\Phi''(R_1^2) - \Phi''(R_2^2)) + \rho \left[\frac{R_1}{R_2} \sin(\psi - \varphi) - \frac{R_2}{R_1} \sin(\psi + \varphi) \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность фаз.

Исследование системы (3.17) проводилось с использованием программного пакета ХРРАУТ [48]. Начнем со случая мягкого самовозбуждения, когда функции восприимчивости задаются соотношениями (3.12). На рис. 3.8 построены области устойчивости синхронных режимов при различных значениях набега фазы ψ на плоскости параметров «расстройка соб-

ственных частот Δ – параметр связи $\rho \gg 1$.⁵ На этом рисунке приведены границы седлоузловой бифуркации $SN_{1,2}$ и бифуркации Андронова-Хопфа $AH_{1,2}$ (индексы 1 и 2 соответствуют синфазной и противофазной модам).

Представленные на рис. 3.8 результаты качественно согласуются с полученными в Главе 1 для связанных осцилляторов с кубичной нелинейностью. Структура областей синхронизации определяется прежде всего параметром ψ , который характеризует набег фазы сигнала в канале связи. Когда доминирует диссипативная связь, синхронизация возможна только на синфазной моде (рис. 3.8(a)). Конфигурация областей синхронизации в этом случае хорошо согласуется с рис. 1.6(a). По мере увеличения ψ начинает сказываться инерционная связь. Появляется область, в которой устойчива противофазная синхронизация, т.е. возникает бистабильность синхронных режимов (подробнее см. п. 1.2). На рис. 3.8(б,в) эта область, как и в случае связанных осцилляторов с кубичной нелинейностью (см. рис. 1.6 и рис. 1.18), ограничена снизу линиями SN_2 , а сверху — линией AH_2 . В случае, когда доминирует инерционная связь, бистабильность имеет место практически во всей области синхронизации (рис. 3.8(г)). Видно, что границы для синфазной и противофазной мод несколько отличаются, тогда как в изохронном случае при $\psi = \pi/2$ они были бы полностью вырождены [7,32,37]. Такое отличие обусловлено неизохронностью, за которую отвечают слагаемые, пропорциональные Φ'' в последнем уравнении системы (3.17). Более того, следует отметить, что, как и на рис. 1.18, в области малых расстройек границы для синфазной и противофазной мод поменялись местами, т.е. при очень слабой связи возможна лишь противофазная синхронизация. Схожее поведение отмечалось и в ряде других работ, где рассматривались связанные системы, в которых конкурируют инерционный и диссипативный тип связи (см., например, [7,37]).

⁵ Для большей наглядности на рис. 3 бифуркационные линии построены вплоть до значений $\rho = 1.5$, хотя в силу определения этого параметра значения $\rho > 1$ физического смысла не имеют.

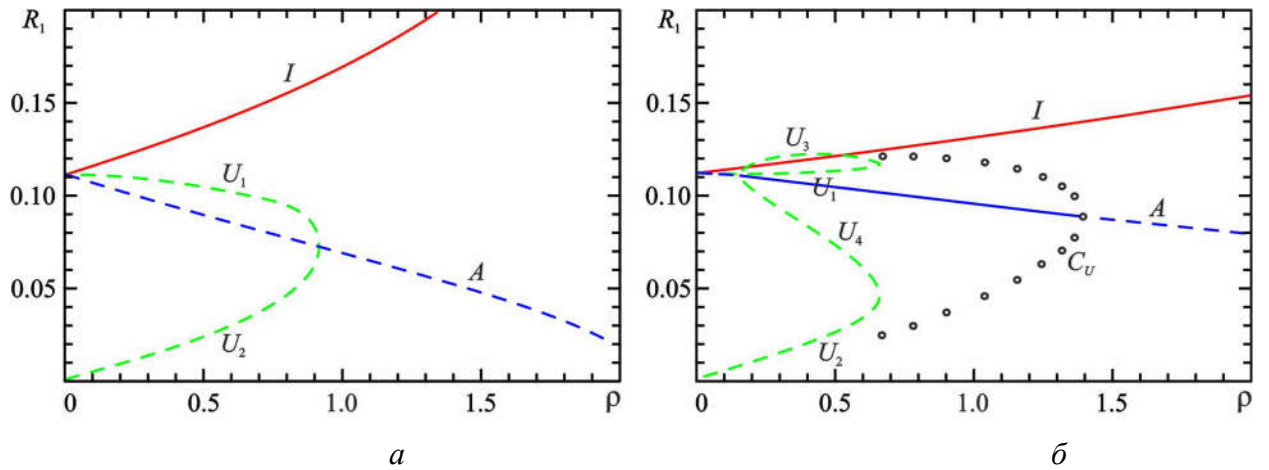


Рис. 3.9. Бифуркационные диаграммы для состояний равновесия и предельных циклов при $I_s = 0.05$, $\Delta = 0$, $\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10.0$, $\psi = 0.2\pi$ (а), 0.4π (б). Сплошными линиями показаны устойчивые точки, пунктирными — неустойчивые, кружками — неустойчивый предельный цикл.

На рис. 3.9 построены однопараметрические бифуркационные диаграммы, построенные в случае $\Delta = 0$ для двух различных значений ψ . Сплошными линиями показаны устойчивые положения равновесия, пунктирными — неустойчивые, кружками показан неустойчивый предельный цикл. В целом они вполне аналогичны бифуркационным диаграммам, представленным на рис. 1.8(а) и рис. 1.10(а). Так, в случае, когда доминирует диссипативная связь (рис. 3.9(а)), при малых значениях параметра ρ существуют неподвижные точки, соответствующие синфазной (I) и противофазной (A) модам, а также точки $U_{1,2}$, соответствующие несимметричным решениям (мы используем те же обозначения, что и в Главах 1,2). Устойчивым является только решение на синфазной моде. С увеличением ρ несимметричные решения приближаются к неустойчивой точке A . При $\rho \approx 0.91$ они сливаются друг с другом и исчезают.

В случае, когда доминирует инерционная связь, на рис. 3.9(б) мы видим, что при $\rho \approx 0.19$ происходит бифуркация вил, в результате которой от точки A ответвляются еще две седловые точки $U_{3,4}$, а сама эта точка становится устойчивой. Таким образом, возникает мультистабильность синхронных режимов. Далее точки $U_{1,3}$ и $U_{2,4}$ попарно приближаются друг к другу и

при $\rho \approx 0.68$ в результате двойной седлоузловой бифуркации сливаются и исчезают. Из гетероклинических траекторий, соединяющих точки $U_{1,2}$ и $U_{3,4}$, образуется неустойчивый предельный цикл C_U , который показан на рис. 3.9(б) кружками. С дальнейшим ростом параметра связи неустойчивый цикл уменьшается в размерах и при $\rho \approx 1.41$ происходит обратная бифуркация Андронова–Хопфа, в результате чего точка A теряет устойчивость и мультистабильность синхронных режимов исчезает. Этой бифуркации соответствует линия AN_2 на рис. 3.8(б,в). Аналогичную структуру имеет бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 1.10(а).

Как видно из рис. 3.9, с ростом ρ амплитуда колебаний для синфазной моды увеличивается, а для противофазной — уменьшается. Однако, как уже отмечалось, на практике интерес представляют значения мощности и КПД, а не амплитуды. Выше мы анализировали случай, когда $I_s = 0.05$, что соответствует максимальному КПД для одиночного гиротрона. Однако при наличии связи ситуация изменяется. Рассмотрим, как зависит КПД от параметра связи в различных случаях. Моделирование будем проводить при значении параметра набега фазы $\psi = 0.4\pi$, при котором наблюдается бистабильность синхронных режимов (см. рис. 3.8(в) и рис. 3.9(б)). Для простоты ограничимся случаем $\Delta = 0$.

На рис. 3.10 построены зависимости поперечного КПД от параметра связи ρ для синфазной и противофазной моды. Рассмотрим вначале случай $I_s = 0.05$ (рис. 3.10(а)). Поскольку для обеих мод с ростом ρ амплитуда начинает все сильнее отличаться от оптимального значения $A_{\max} \approx 0.113$, КПД убывает. При этом он примерно одинаков для обеих мод.

Если несколько уменьшить параметр тока, амплитуда колебаний в отсутствие связи станет меньше оптимальной. Тогда при увеличении ρ для синфазной моды амплитуда будет увеличиваться и приближаться к A_{\max} . Соответственно, значение КПД для синфазной моды также увеличивается, при-

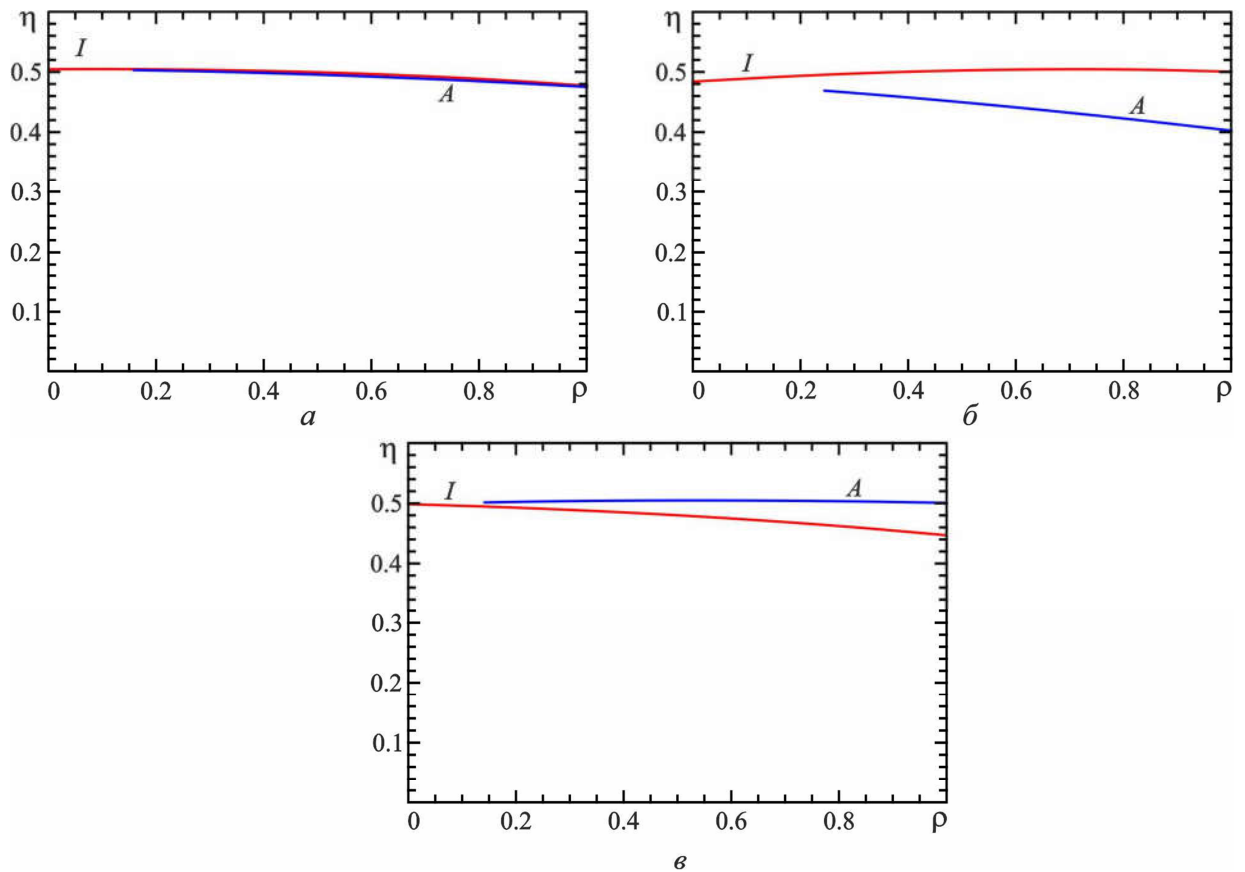


Рис. 3.10. Зависимости поперечного КПД от параметра связи ρ в режимах синфазной (I) и противофазной (A) синхронизации при $\Delta = 0$, $\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10.0$, $\psi = 0.4\pi$ и различных значениях параметра тока: $I_s = 0.05$ (а), 0.04 (б), 0.06 (в).

ближаясь к максимальному значению 0.505 (рис. 3.10(б)). Для противофазной моды КПД, напротив, уменьшается.

При $I_s = 0.06$ имеет место обратная ситуация (рис. 3.10(в)). В отсутствие связи амплитуда колебаний будет больше оптимальной. Соответственно, с увеличением ρ для синфазной моды амплитуда увеличивается, а КПД уменьшается. Однако для противофазной моды амплитуда уменьшается и, следовательно, КПД увеличивается. Причем в данном случае увеличится и мощность колебаний по сравнению с двумя не связанными гиротронами. Такое поведение полностью согласуется с зависимостью $\eta(|A|)$, представленной на рис. 3.3.

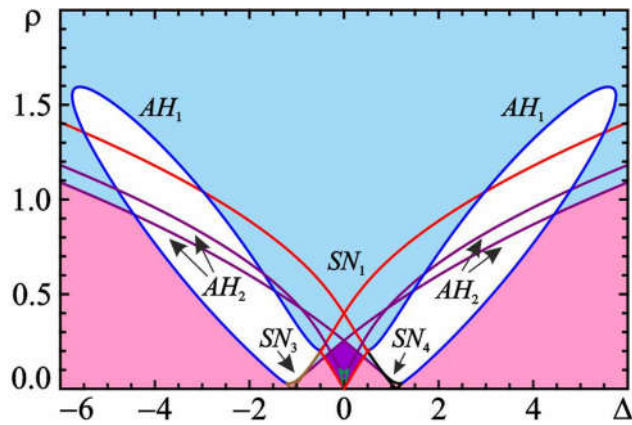


Рис. 3.11. Границы седлоузловых бифуркаций (SN) и бифуркаций Андронова–Хопфа (AH) на плоскости параметров Δ, ρ при $I_s = 0.05$, $\Delta_H = 0.53$, $\mu = 10.0$ и $\psi = 0.2\pi$.

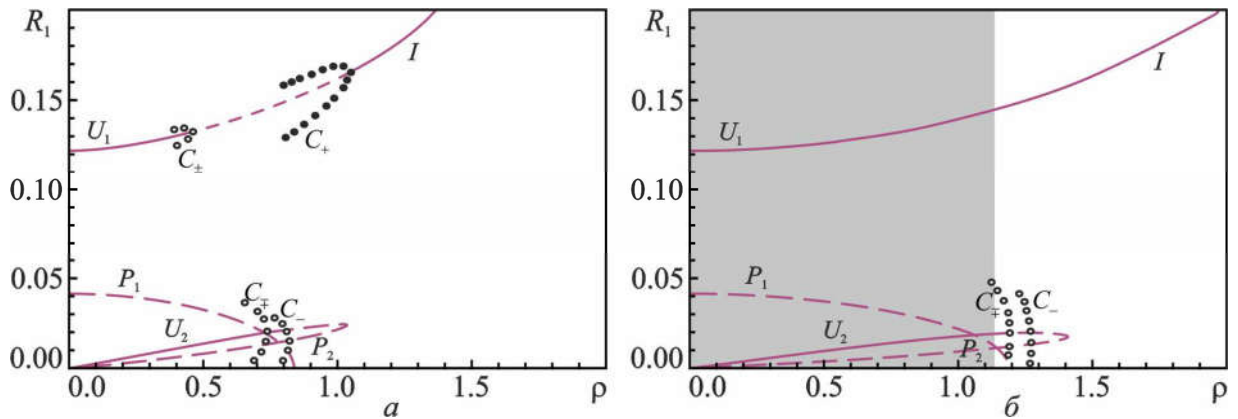


Рис. 3.12. Бифуркационные диаграммы для амплитуды колебаний первого гиротрона при $\Delta = 3.0$ (а) и $\Delta = 6.0$ (б). Остальные параметры те же, что и на рис. 3.11.

Далее рассмотрим случай жесткого возбуждения, когда функции электронной восприимчивости задаются соотношениями (3.13). На рис. 3.11 построены области синхронизации на плоскости параметров Δ, ρ . В целом эта картина качественно согласуется с результатами, полученными в Главе 2 при анализе синхронизации связанных систем с полиномиальной нелинейностью (см., например, рис. 2.15). Так, помимо режима синхронизации, в котором амплитуды колебаний в обеих подсистемах примерно равны, имеют место режимы, когда один гиротрон подавляет колебания другого. На рис. 3.11

отмечены области, в которых устойчивы один, два или три стационарных режима.

На рис. 3.12 приведены примеры бифуркационных диаграмм при различных значениях расстройки. Они имеют много общего с обсуждавшимся в Главе 2 (см. рис. 2.12 и 2.14). Так, в случае, изображенном на рис. 3.12(а), вначале имеются пять неподвижных точек: две устойчивые точки $U_{1,2}$, соответствующие режимам с подавлением одного генератора другим, две неустойчивые $P_{1,2}$ и устойчивая точка O , отвечающая отсутствию колебаний. Также имеются четыре предельных цикла, из которых один (C_+) является устойчивым и отвечает режиму биений, а три других (C_- , C_\pm и C_\mp) неустойчивы. С ростом ρ вначале теряет устойчивость точка U_1 в результате обратной бифуркации Андронова–Хопфа. Затем, при $\rho \approx 1.05$ она вновь приобретает устойчивость в результате нормальной бифуркации Андронова–Хопфа, превращаясь в точку I , соответствующую синфазной синхронизации. Режим биений при этом исчезает, т.е. наблюдается типичная картина синхронизации подавлением. Следует, однако, заметить, что значения $\rho > 1$ физически недостижимы, так что в реальности режим синфазной синхронизации при таких больших расстройках наблюдаться не будет. Что касается точки U_2 то она теряет устойчивость при $\rho \approx 0.74$ в результате обратной бифуркации Андронова–Хопфа с участием цикла C_\mp . Точка O теряет устойчивость при $\rho \approx 0.84$, сталкиваясь с неустойчивой точкой P_2 .

В случае, который иллюстрирует рис. 3.12(б), отличие состоит в том, что режим биений исчезает вследствие слияния циклов C_+ и C_\pm . Однако вновь отметим, что это происходит при $\rho > 1$. Точка U_1 всегда остается устойчивой, постепенно трансформируясь в точку I .

3.4. Переключение между различными режимами синхронизации

Наличие мультистабильности, с одной стороны, является нежелательным эффектом, поскольку может приводить к скачкообразным изменениям

мощности и частоты при вариации параметров. С другой стороны, мультистабильность открывает возможности для быстрого переключения частоты, что может быть полезно для ряда приложений [69].

В данном разделе обсудим возможность управляемого переключения между синфазной и противофазной модами. Для лучшего соответствия с реальными условиями рассмотрим динамику с учетом конечного времени запаздывания. Как уже отмечалось в п. 3.2, число возможных режимов синхронизации может быть больше двух. Однако высшие моды возникают лишь при достаточно больших значениях параметра связи, что с практической точки зрения не представляет большого интереса.

Выберем нормированный параметр тока равным $I_s = 0.04$, что меньше значения, при котором КПД одиночного гиротрона достигает максимума. Соответственно, можно ожидать, что в режиме синфазной синхронизации КПД увеличится (см. рис. 3.10(б)). Безразмерное время запаздывания выберем равным $\tau_d = 3.0$, что соответствует расстоянию между гиротронами около двух метров (подробнее см. п. 3.2).

Для исследования возможности переключения мод целесообразно рассмотреть ситуацию, когда связь носит по преимуществу инерционный характер, чтобы бистабильность наблюдалась уже при достаточно малых ρ . Этого можно добиться, подбирая значение набега фазы ψ . Соответствующие границы областей синхронизации на синфазной и противофазной модах построены на рис. 3.13. Существует еще одна область синхронизации, однако она лежит выше по параметру связи ($\rho > 0.5$), поэтому с практической точки зрения интереса не представляет. Отметим, что расчеты проводились как на основе модифицированной квазилинейной модели, так и с помощью нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой поля. Видно, что результаты моделирования полностью согласуются друг с другом.

Обратим внимание, что в данном случае инерционная связь доминирует при $\psi = 0$, что отличается от случая $\tau_d \ll 1$, рассматривавшегося в п. 3.3,

где при $\psi = 0$ как раз доминировала диссипативная связь. Это объясняется тем, что частота сигнала, а, следовательно, и фазовый набег, зависят от времени запаздывания. Действительно, если обратиться к характеристическому уравнению (3.16), то видно, что чисто инерционная связь реализуется при $\Omega\tau_d + \psi \approx 2\pi n + \pi/2$. Значение ψ , при котором выполняется это условие, не является фиксированным, а зависит самосогласованным образом от других управляющих параметров.

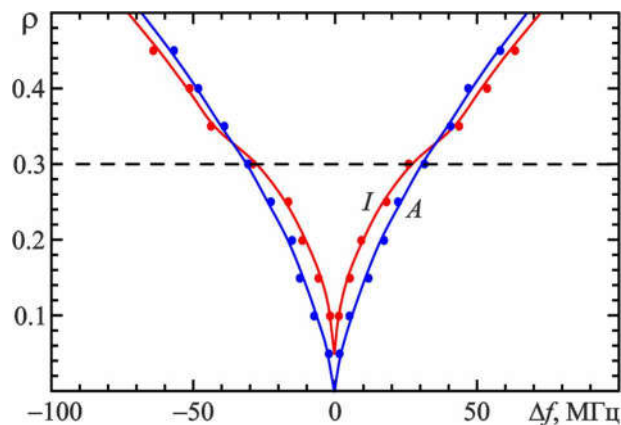


Рис. 3.13. Границы областей синхронизации на синфазной (I) и противофазной (A) модах при $I_s = 0.04$, $\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10.0$, $\psi = 0$ и $\tau_d = 3.0$. Сплошными линиями показаны результаты численного моделирования для модифицированной квазилинейной модели, кружками — для уравнений нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля.

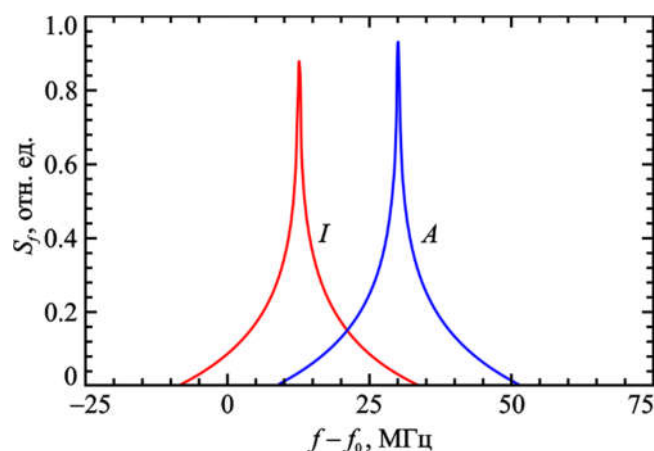


Рис. 3.14. Спектры колебаний синфазной и противофазной мод при $\rho = 0.3$, $\Delta = 0.3$. Остальные параметры те же, что на рис. 3.13.

Выберем значение коэффициента связи равным $\rho = 0.3$, что соответствует примерно 10% от мощности выходного сигнала, а параметр расстройки собственных частот — равным $\Delta = 0.3$, что соответствует 23 МГц в размерных единицах. При таком значении расстройки устойчивы и синфазный, и противофазный режимы синхронизации (см. пунктирную линию на рис. 3.11). На рис. 3.14 построены спектры колебаний для синфазной и противофазной мод. Видно, что частоты отличаются примерно на 18 МГц.

Вопрос о том, как возбудить ту или иную моду, является нетривиальным. Фактически ответ на него определяется тем, как устроены бассейны притяжения двух сосуществующих аттракторов. Однако, если для конечномерной системы (3.17), фазовое пространство которой трехмерно, возможно проанализировать конфигурацию бассейнов притяжения, то для бесконечномерной системы (3.4) это сделать затруднительно. Компьютерное моделирование показывает, что, если рассматривать самовозбуждение от малых шумовых флуктуаций, то при выбранных значениях параметров синфазные и противофазные колебания устанавливаются примерно с равной вероятностью.

Можно, однако, предложить простой и физически обоснованный способ, позволяющий возбуждать желаемую моду. Он основан на том, что частоты противофазной и синфазной мод близки к парциальным частотам первого и второго гиротрона соответственно. Поэтому, если один из гиротронов включается немного раньше другого, он навязывает ему свою частоту, которая близка к частоте соответствующей моды. В итоге эта мода и будет устанавливаться после включения другого гиротрона.

Аналогично можно реализовать управляемые переключения между синфазной и противофазной модами. Для этого необходимо на короткое время уменьшать мощность генерации одного из гиротронов. В современных гиротронах для УТС экспериментально реализована 100% модуляция выходной мощности в виде импульсов длительностью 100 мкс с характерной дли-

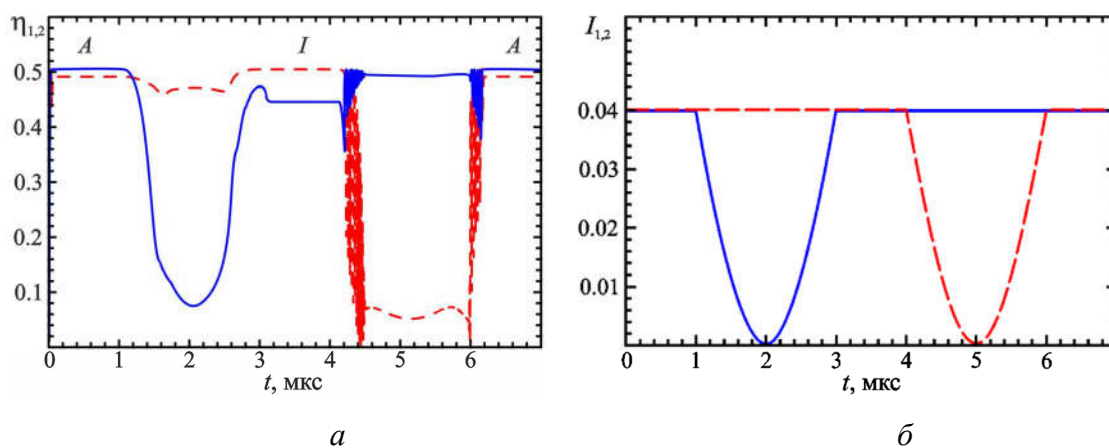


Рис. 3.15. Зависимости от времени КПД (а) и безразмерного параметра тока (б) первого (сплошные линии) и второго (пунктир) гиротронов, иллюстрирующие процесс переключения мод. Символами *I* и *A* отмечены стадии синфазной и противофазной синхронизации. Параметры те же, что на рис. 3.14.

тельностью фронта порядка 1 мкс (см., например, [70]). Модуляция осуществлялась с помощью управления анодным напряжением электронной пушки.

Рассмотрим динамику переключения мод в случае, когда осуществляется кратковременное уменьшение параметра тока одного из гиротронов. На рис. 3.15(а) приведены зависимости КПД первого и второго гиротронов от времени. Вначале устанавливается синхронизация на противофазной моде. В этом режиме КПД первого гиротрона примерно равен КПД одиночного гиротрона (50.5%, см. рис. 3.3), а КПД второго несколько меньше. Затем в момент времени $t_1 = 1$ мкс параметр тока первого гиротрона I_1 начинает изменяться по закону $I_1(t) = I_{\max} \left[1 - \sin(\pi(t - t_1)/T) \right]$, где $T = 2$ мкс (см. рис. 3.15(б)). Такая зависимость моделирует фронты импульса переключения. Длительность стадии, когда один из гиротронов выключен, очевидно, не влияет на процесс переключения.

Из рис. 3.15(а) видно, что с уменьшением тока КПД первого гиротрона падает примерно до 8%, а КПД второго гиротрона уменьшается, но незначительно. Отметим, что, поскольку в резонатор продолжает поступать сигнал

второго гиротрона, КПД первого не падает до нуля даже когда ток становится ниже стартового и гиротрон не генерирует.

После того, как I_1 восстанавливается до рабочего значения, устанавливается режим синхронизации на синфазной моде. Отметим, что теперь КПД первого гиротрона примерно равен максимальному, а КПД второго гиротрона составляет около 45%. Аналогичное уменьшение тока второго гиротрона, которое начинается в момент времени $t_2 = 4$ мкс, приводит к обратному переключению. Данное значение t_2 выбрано для наглядности, на динамику процесса переключения оно, очевидно, не влияет.

Подчеркнем, что минимальное время, за которое можно осуществить переключение, определяется лишь тем, насколько быструю модуляцию мощности гиротрона удастся осуществить. При численном моделировании мы варьировали время T , за которое изменяется ток, в широких пределах, 0.1–10 мкс, и не обнаружили принципиальных отличий. Единственное ограничение состоит в том, это время должно быть велико по сравнению с временем задержки (в данном случае 6 нс). Возможно, более быструю модуляцию мощности можно осуществить, воздействуя на гиротрон модулированным внешним сигналом [71].

Для анализа нестационарных процессов типа переключения мод удобно использовать аппарат непрерывного вейвлет-преобразования (см., например, [72,73]). В частности, для задач частотно-временного анализа наиболее подходящим представляется комплексный вейвлет Морле

$$\psi_{s,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_0(\eta),$$

где $\psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} \exp(i\omega_0\eta) \exp(-\eta^2/2)$ — материнский вейвлет, $\eta = (t - t_0)/s$, s — масштаб вейвлетного преобразования. Параметр ω_0 определяет качество разрешения по частоте и времени: с его ростом улучшается разрешение в фурье-пространстве, но ухудшается локализация по времени [72]. При выборе $\omega_0 = 6.0$ величина $f_s = 1/s$ примерно соответствует фурье-частоте.

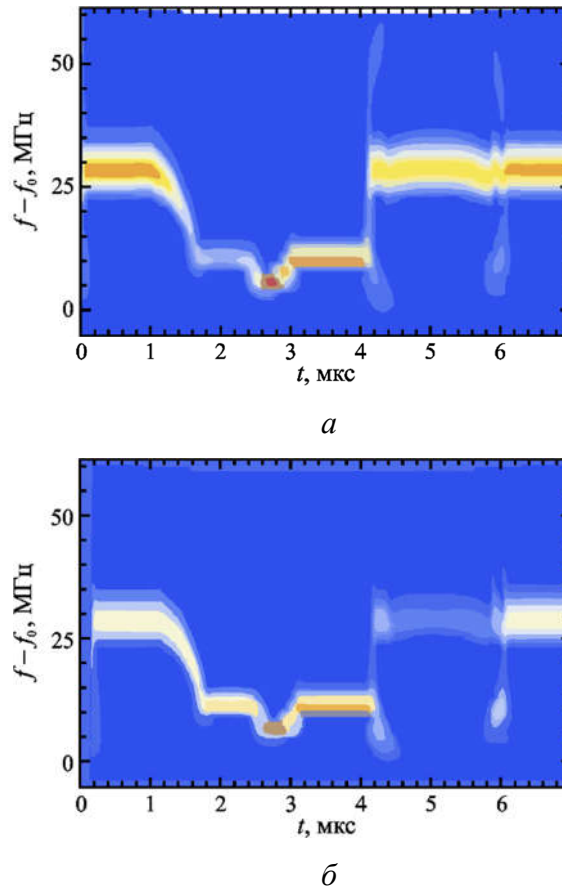


Рис. 3.16. Результаты вейвлет-анализа зависимостей $A_1(t)$ (а) и $A_2(t)$ (б).

Комплексный вейвлет-спектр функции $f(t)$ определяется в результате преобразования

$$W(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{s, t_0}^*(\eta) dt.$$

Наглядным способом графического представления результатов вейвлет-преобразования являются проекции распределения амплитуд коэффициентов $|W(s, t_0)|$ на плоскость t_0, f_s , показанные на рис. 3.16. Более светлые оттенки соответствуют бóльшим значениям $|W(s, t_0)|$. При этом мы фактически получаем картину распределения интенсивностей спектральных компонент во времени. Хорошо видны переключения между двумя режимами, причем значения частот, определенные с помощью вейвлет-преобразования, практически совпадают с частотами синфазной и противофазной мод, см. рис. 3.14. Сравнение результатов вейвлет-анализа сигналов

первого и второго гиротронов (рис. 3.16(а,б)) наглядно показывает, в какие моменты времени генерируют оба гиротрона, а в какие — только один.

3.5. Влияние конкуренции мод на процессы синхронизации

Поскольку в современных гиротронах, как правило, используются сверхразмерные колебательные системы (поперечные размеры резонатора значительно превышают длину волны) [25,33], особое значение приобретает влияние конкуренции мод на процессы генерации. Синхронизация гиротронов может способствовать подавлению паразитных мод. Действительно, если рассмотреть систему уравнений связанных гиротронов в отсутствие частотной расстройки (3.15), очевидно, что она имеет решения $A_1 = \pm A_2$, соответствующие синфазной и противофазной модам. Для таких решений уравнения (3.15) приобретают тот же вид, что и в случае гиротрона с отражениями [59,74]. Как было показано в [74], при определенных условиях введение отражений приводит к подавлению паразитных мод. В данном разделе рассмотрим аналогичную задачу для случая двух связанных гиротронов.

Поскольку обобщить модифицированную квазилинейную модель на многомодовый случай не удастся, будем использовать аппарат нестационарной многомодовой теории гиротрона с фиксированной структурой ВЧ-поля (см., например, [33,41-43,58-60,71]). Уравнение движения электронов (3.1) переписется в виде

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\zeta} + i(\Delta_H + |p|^2 - 1)p &= i \sum_s A_s f_s(\zeta) \exp(i\psi_s), \\ p(\zeta = 0) &= e^{i\varphi_0}, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь $\Delta_s = \frac{2}{\beta_{\perp}^2} \frac{\omega_s - \omega_0}{\omega_0}$ — безразмерная отстройка частоты s -й моды ω_s от частоты рабочей моды ω_0 , остальные обозначения были введены в п. 3.1. Функции $f_s(\zeta)$, описывающие распределения полей мод в резонаторе, имеют вид $f_s(\zeta) = f_{s0}(\zeta) \exp(i\Delta_s \zeta)$, где $f_{s0}(\zeta)$ — гауссова функция (3.2).

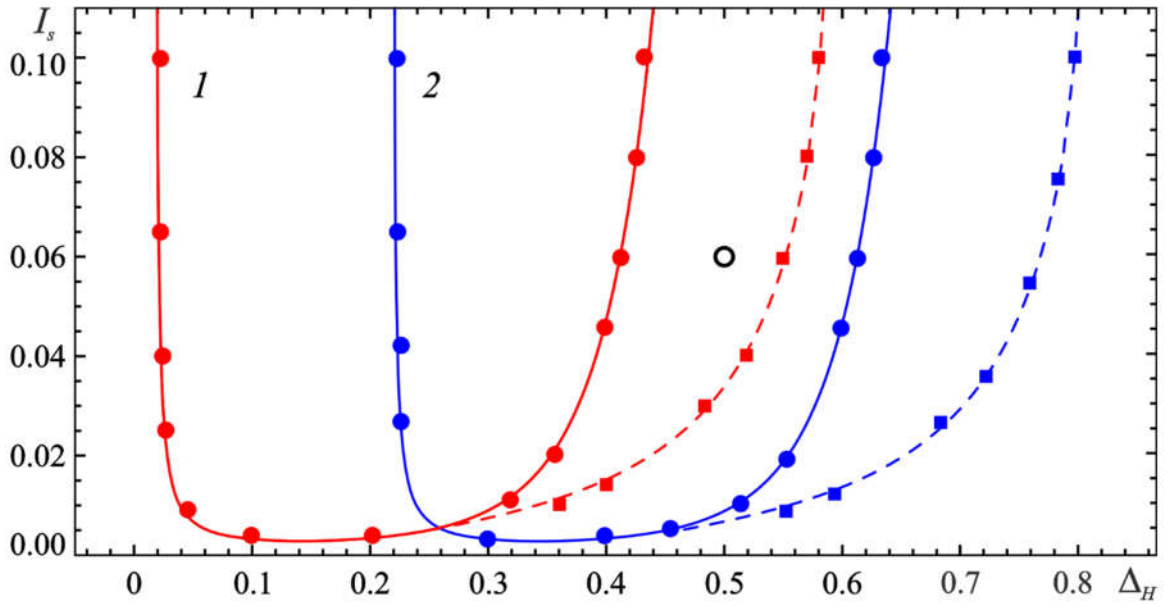


Рис. 3.17. Зоны генерации рабочей ($s=0$) и паразитной ($s=1$) мод для гиротрона с гауссовой продольной структурой поля при $\mu=15$, $\Delta_s=0.2$. Границы мягкого возбуждения показаны кружками (численное моделирование) и сплошными линиями (линейная теория гиротрона с гауссовой структурой поля). Пунктирные линии и квадраты — области жесткого возбуждения. Светлый кружок — точка $I_s=0.06$, $\Delta_H=0.5$, для которой проводилось численное моделирование.

Уравнения возбуждения для амплитуд различных мод A_s запишем в виде

$$\frac{dA_s}{d\tau} + \frac{Q_0 A_s}{Q_s} = iI_s \int_0^{\zeta_k} f_s^*(\zeta) \langle \langle p \rangle_{\varphi_0} \exp(-i\Psi_s) \rangle_{\Psi} d\zeta, \quad (3.19)$$

где Q_s и I_s — добротность и безразмерный параметр тока для s -той моды соответственно, факторы

$$\Psi_s = (m_0 - m_s)\Psi - (\omega_0 - \omega_s)t_0 \quad (3.20)$$

описывают различную азимутальную структуру мод (m_s — азимутальные индексы, t_0 — время влета электрона, Ψ — азимутальная координата), символ $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение.

Рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда конкурируют только две моды ($s=0,1$), где индекс $s=0$ соответствует рабочей моде, $s=1$ — па-

разитной. Для простоты будем считать, что добротности и параметры тока для обеих мод примерно одинаковы. На рис. 3.17 приведены зоны генерации гиротрона, рассчитанные на основе нестационарной теории с фиксированной гауссовой структурой высокочастотного поля. Сплошными линиями и кружками показаны границы мягкого возбуждения, штриховыми линиями и квадратами — жесткого. Если считать, что добротности и продольные распределения поля в резонаторе для различных мод примерно одинаковы, зоны генерации будут иметь идентичный вид, но ввиду расстройки собственных частот, будут сдвинуты вдоль оси расстроек циклотронного резонанса Δ_H на величину Δ_s . Рис. 3.17 построен для случая, когда $\Delta_s = 0.2$, что примерно соответствует параметрам мегаваттного гиротрона диапазона 170 ГГц с рабочей модой $TE_{28,12}$ [58,60], который разрабатывается для электронно-циклотронного нагрева плазмы.

Максимальный КПД $\eta \approx 0.7$ в гиротроне с гауссовой структурой поля, как известно, достигается в режиме жесткого возбуждения при $\mu = 15$, $I_s = 0.06$, $\Delta_H = 0.53$ (см., например, [60]). Таким образом, в окрестности точки, в которой КПД рабочей моды максимален, возбуждение паразитной моды происходит мягким образом.

Если рассматривать модель связанных двухмодовых гиротронов, уравнения (3.19) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{dA_{j,0}}{d\tau} + A_{j,0} &= iI_0 \int_0^{\zeta_k} f_s^*(\zeta) \langle p \rangle_{\varphi_0} d\zeta + \rho e^{-i\psi} A_{k,0}(t - \tau), \\ \frac{dA_{j,1}}{d\tau} + A_{j,1} &= iI_0 \int_0^{\zeta_k} f_s^*(\zeta) \langle \langle p \rangle_{\varphi_0} \exp(-i\Delta m \Psi) \rangle_{\Psi} d\zeta, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $A_{j,0}$ и $A_{j,1}$ — амплитуды рабочей и паразитной мод соответствующего гиротрона ($j = 1, 2$, $k = 2, 1$). Здесь мы считаем, что вывод энергии устроен таким образом, что связь осуществляется только по рабочей моде, а также для простоты пренебрегаем расстройкой собственных частот гиротронов. Поскольку в случае учета только двух мод время t_0 устраняется из соотношений

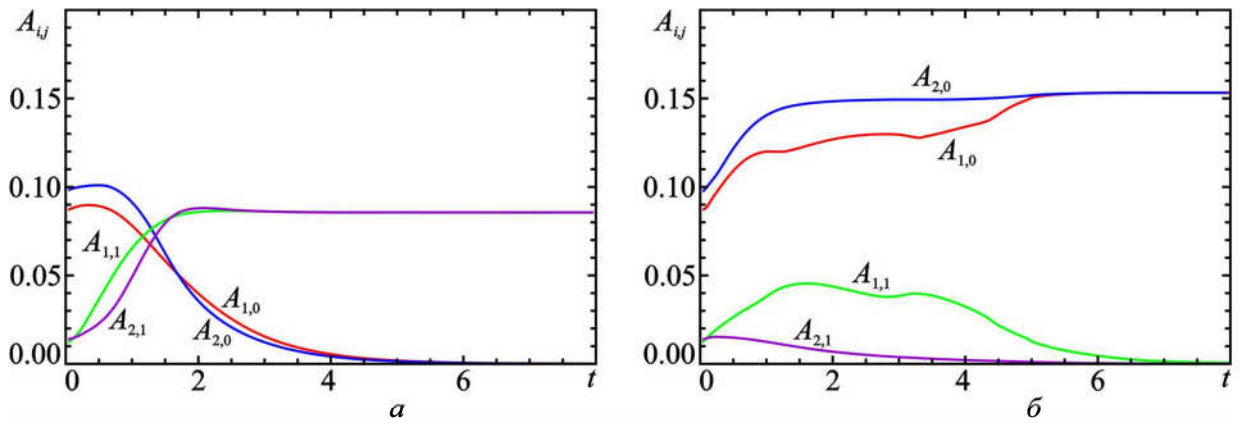


Рис. 3.18. Зависимости амплитуд основной и паразитной мод для первого и второго гиротронов от времени при $I_s = 0.05$, $\Delta_H = 0.5$, $\mu = 15$, $\tau_d = 0.1$: (а) – несвязанные гиротроны; (б) – связанные гиротроны, $\rho = 0.5$, $\psi = 0$. Начальные условия выбраны следующим образом: $A_{1,0} = 0.077$, $A_{1,1} = 0.010$, $A_{2,0} = 0.087$, $A_{2,1} = 0.012$.

(3.20) путем переопределения азимутальной координаты Ψ [60], эти соотношения, очевидно, принимают вид $\Psi_0 = 0$, $\Psi_1 = (m_0 - m_1)\Psi = \Delta m\Psi$.

Для численного моделирования выберем параметры $\mu = 15$, $I_s = 0.06$, $\Delta_H = 0.5$. На рис. 3.17 соответствующая точка отмечена светлым кружком. Значение Δ_H несколько меньше оптимального, так как при $\Delta_H = 0.53$ мы находимся очень близко к порогу срыва колебаний рабочей моды, что затрудняет синхронизацию.

Как следует из рис. 3.17, при рассматриваемых параметрах имеет место бистабильность, причем для рабочей моды возбуждение колебаний происходит жестким образом, а для паразитной — мягко. Поэтому для возбуждения рабочей моды ее начальная амплитуда должна быть достаточно велика.⁶ Тем не менее, на начальной стадии переходного процесса возмущения паразитной моды нарастают и могут привести к подавлению рабочей моды. Пример такого переходного процесса приведен на рис. 3.18(а). Хотя начальные значения амплитуд паразитных мод значительно меньше, чем у рабочих, паразит-

⁶ На практике попадание в бассейн притяжения рабочей моды обеспечивается сценарием включения гиротрона, см., например, [33].

ные моды побеждают в процессе конкуренции. Однако при введении связи между гиротронами паразитные моды подавляются и происходит установление режима синхронизации, как показано на рис. 3.18(б). Причина, очевидно, в том, что связь увеличивает эффективную добротность рабочих мод, что способствует подавлению паразитных мод.

3.6. Выводы

В данной главе развита модифицированная квазилинейная модель системы связанных гиротронов, основанная на аппроксимации функции электронной восприимчивости, найденной в результате расчетов с помощью уравнений нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля. Данная модель позволяет получить результаты, не только качественно, но и количественно согласующиеся с нестационарной теорией гиротрона с фиксированной структурой поля. Модифицированная квазилинейная модель позволяет определить число устойчивых состояний (т.е. режимов синхронизации) и найти их собственные частоты. Она хорошо описывает структуру областей синхронизации на плоскости параметров расстройка — коэффициент связи, зависимости КПД и частоты в режиме синхронизации от расстройки, а также сложный характер амплитудной и частотной модуляции в режиме биений. Количественно значения КПД и частоты для двух рассматриваемых моделей отличаются не более чем на 5%, в то же время, скорость расчета для модифицированной квазилинейной модели примерно на порядок выше. Однако основным ее преимуществом является возможность применения автоматизированных пакетов бифуркационного анализа для изучения режимов синхронизации.

Проведено исследование синхронизации на примере мощного гиротрона диапазона 170 ГГц в режиме мягкого и жесткого самовозбуждения. В приближении, когда время запаздывания мало по сравнению с временем установления колебаний, результаты бифуркационного анализа хорошо согласуются с теорией, развитой в Главах 1 и 2 упрощенных моделей связанных ав-

токолебательных систем с полиномиальными нелинейностями. Переход к синхронному режиму при малых расстройках осуществляется в результате взаимного захвата частот, а при достаточно больших — в результате подавления собственных колебаний одного из гиротронов. В целом структура областей синхронизации на плоскости параметров «частотная расстройка — связь» качественно аналогична изученной в Главах 1 и 2.

Проанализирована возможность достижения максимального КПД в системе связанных гиротронов. Показано, что для этого параметр тока I_s целесообразно выбирать либо ниже, либо выше того, который соответствует оптимальному КПД для одиночного гиротрона. Тогда при введении связи КПД синфазной (при уменьшенном I_s) или противофазной (при увеличенном I_s) будет достигать оптимального значения.

Предложен физически обоснованный способ управляемых переключений между синфазной и противофазной модами. Поскольку частоты синфазной и противофазной мод близки к парциальным частотам одного или другого гиротрона, переключения можно реализовать путем кратковременного уменьшения мощности генерации одного из гиротронов. Соответственно, частота колебаний становится примерно равной парциальной частоте другого гиротрона, и после восстановления тока до рабочего значения установится тот режим синхронизации, который более близок к ней по частоте. На практике время переключения будет ограничиваться временем, за которое можно осуществить модуляцию выходной мощности (порядка 1 мкс согласно [70]).

Рассмотрена модель двух связанных гиротронов, в которых учитывается конкуренция двух собственных мод, в типичной ситуации, когда самовозбуждение рабочей моды происходит жестко, а паразитной — мягко. Показано, что введение связи между гиротронами может приводить к подавлению паразитных мод.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты и выводы диссертации:

1. Проведен бифуркационный анализ взаимной синхронизации в системе двух связанных автоколебательных осцилляторов Ландау–Стюарта с учетом конечного времени запаздывания в канале связи. Показано, что запаздывающий характер связи определяет картину синхронизации генераторов. В фазовом приближении, которое справедливо при слабой связи и малых расстройках, получено обобщенное уравнения Адлера для разности фаз колебаний, с помощью которого получены простые формулы для границ седлоузловых бифуркаций, ограничивающих области синфазной и противофазной синхронизации. В зависимости от набега фазы сигнала, распространяющегося в канале связи, доминирует либо диссипативная связь, либо инерционная. На плоскости параметров «частотная расстройка Δ – связь ρ » реализуется картина, характерная для соответствующего типа связи. Показано, что связь является чисто диссипативной, когда $\psi = \arctg(b/2) + \pi n$ (b – параметр неизохронности), $n \in \mathbb{Z}$, и чисто инерционной при $\psi = \text{arccctg } b + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Проведен бифуркационный анализ синхронизации в амплитудно-фазовом приближении с помощью программного пакета ХРРАУТ. В приближении, когда время задержки мало по сравнению с характерным временем установления колебаний, изучена структура областей устойчивости режимов синфазной и противофазной синхронизации. Показано, что в изохронном случае бистабильность режимов синхронизации имеет место при $\pi/4 + \pi n < \psi < 3\pi/4 + \pi n$. На плоскости параметров Δ, ρ область синхронизации на противофазной моде лежит внутри области синхронизации на синфазной моде и ограничена линией обратной (субкритической) бифуркации Андронова–Хопфа. При выходе из этой области неустойчивый предельный цикл, который лежит на поверхности, разграничивающей бассейны притяжения двух аттракторов, уменьшается в размерах и сливается с устойчивой точкой, соответствующей противофазной моде. После этого мультистабильность

синхронных режимов исчезает и остается единственный аттрактор, соответствующий синфазному режиму синхронизации. При учете неизохронности появляется дополнительный фазовый набег, зависящий от амплитуды колебаний. В результате при увеличении параметра неизохронности b картина синхронизации претерпевает изменения, аналогичные тем, которые происходят по мере увеличения параметра ψ . В частности, обнаружено, что с ростом b происходит переход от диссипативной связи к инерционной, в результате чего область синхронизации на противофазной моде увеличивается в размерах и выходит за границы синхронизации на синфазной моде.

3. Проведено исследование процессов синхронизации при конечном времени задержки. Поскольку набег фазы сигнала, распространяющегося в канале связи, увеличивается с ростом τ , картина синхронизации претерпевает трансформации аналогичные тем, что происходят при увеличении ψ . С ростом τ область противофазной синхронизации вначале увеличивается в размерах, а затем размыкается сверху. Такое поведение объясняется тем, что при достаточно больших значениях τ амплитуда противофазной моды с ростом ρ вначале уменьшается, а затем начинает расти. В результате начинает увеличиваться и ширина полосы синхронизации на противофазной моде.

4. Изучена картина синхронизации в системе генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Обнаружено, что помимо режимов взаимной синхронизации с примерно равными амплитудами колебаний, возможны также стационарные режимы с подавлением колебаний одного генератора другим. Проведен бифуркационный анализ с помощью программного пакета ХРРАУТ и построены области устойчивости различных режимов на плоскости параметров «частотная расстройка — связь». Показано, что в случае малых расстроек и слабой связи с увеличением параметра связи неподвижные точки $U_{1,2}$, которые соответствуют режимам с доминированием одного из генераторов, сливаются с седловыми неподвижными точками и исчезают. В случае больших расстроек одна из точек $U_{1,2}$ либо исчезает, сливаясь

с одной из седловых точек, либо теряет устойчивость в результате обратной (субкритической) бифуркации Андронова–Хопфа. Другая из этих точек остается устойчивой при любых значениях параметра связи, причем амплитуды колебаний обоих осцилляторов постепенно сравниваются, а разность фаз стремится к нулю, т.е. режим колебаний с доминированием одного из осцилляторов постепенно трансформируется в режим синфазной синхронизации.

5. Установлено, что в системе двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой, при увеличении параметра связи происходит трансформация бассейна притяжения устойчивой нулевой неподвижной точки, в результате которой, если в начальный момент времени колебания генераторов близки к противофазным, колебания затухают при любых начальных амплитудах. Это своеобразная разновидность эффекта гибели колебаний, которая обусловлена не увеличением эффективной диссипации, а изменением структуры бассейнов притяжения. Показано, что с увеличением параметра связи точка O в начале координат исчезает, сталкиваясь одной из седловых неподвижных точек. После этого единственным устойчивым режимом является режим взаимной синхронизации. Таким образом, наиболее благоприятная с практической точки зрения ситуация реализуется в том случае, когда параметр связи превышает значение, при котором нулевое решение теряет устойчивость.

6. Предложена модифицированная квазилинейная модель системы связанных гиротронов, основанная на аппроксимации функции электронной восприимчивости, найденной в результате расчетов с помощью уравнений нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля. Модель позволяет получить результаты, не только качественно, но и количественно согласующиеся с нестационарной теорией гиротрона с фиксированной структурой поля. Модифицированная квазилинейная модель позволяет определить число режимов синхронизации и их собственные частоты, хорошо описывает структуру областей синхронизации на плоскости параметров «частотная расстройка–коэффициент связи», зависимости КПД и частоты от

расстройке в режиме синхронизации, а также сложный характер амплитудной и частотной модуляции в режиме биений. Количественно значения КПД и частоты для двух рассматриваемых моделей различаются не более чем на 5%. Важным преимуществом такой модели является возможность использования для изучения режимов синхронизации автоматизированные пакеты бифуркационного анализа.

7. В приближении малого времени задержки на основе модифицированной квазилинейной модели проведен бифуркационный анализ системы двух гиротронов, связанных с задержкой на примере мощного гиротрона диапазона 170 ГГц в режиме мягкого и жесткого самовозбуждения. В приближении, когда время запаздывания мало по сравнению с временем установления колебаний, результаты бифуркационного анализа хорошо согласуются с теорией, развитой в Главах 1 и 2 для упрощенных моделей связанных автоколебательных систем с полиномиальными нелинейностями.

8. Проанализирована возможность достижения максимального КПД в системе связанных гиротронов. Показано, что для этого параметр нормированный параметр тока целесообразно выбирать либо ниже, либо выше того, который соответствует оптимальному КПД для одиночного гиротрона. Тогда при введении связи КПД синфазной будет достигать максимального значения при уменьшенном значении безразмерного параметра тока, а КПД противофазной — при увеличенном.

9. Продемонстрирована возможность управляемых переключений между синфазной и противофазной модами. Поскольку частоты синфазной и противофазной мод близки к парциальным частотам одного или другого гиротрона, переключения можно реализовать путем кратковременного уменьшения мощности генерации одного из гиротронов. При численном моделировании модуляция мощности осуществляется уменьшением тока соответствующего гиротрона.

В заключение хочу выразить искреннюю благодарность и признательность моему научному руководителю Никите Михайловичу Рыскину за научное руководство, всестороннюю поддержку, понимание и неоценимую помощь при работе над диссертацией. Также хочу выразить благодарность соавторам, результаты совместных исследований с которыми вошли в настоящую диссертацию: Герасимовой Светлане Александровне и Балакину Максиму Игоревичу. Отдельную благодарность хочу выразить профессорско-преподавательскому составу факультета нелинейных процессов СГУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 600 с.
2. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 496 с.
3. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
4. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский–Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 544 с.
5. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
6. Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O. Synchronization. From Simple to Complex, Springer, Berlin, 2009. 425 p.
7. Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация в задачах. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2010. 256 с.
8. Zhang J., Zhang D., Fan Y., He J., Ge X., Zhang X., Ju J., Xun T. Progress in narrowband high-power microwave sources // Phys. Plasmas. 2020. Vol. 27, No. 1. P. 010501.
9. York R.A., Compton R.C. Quasi-optical power combining using mutually synchronized oscillator arrays // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1991. Vol. 39, No. 6. P. 1000-1009.
10. Benford J., Sze H., Woo W., Smith R.R., Harteneck B. Phase locking of relativistic magnetrons // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62, No. 8. P. 969.
11. Woo W., Benford J., Fittinghoff D., Harteneck G., Price D., Smith R., Sze H. Phase locking of high power microwave oscillators // J. Appl. Phys. 1989. Vol. 65, No. 2. P. 861.
12. Levine J.S., Benford J., Sze H., Woo W., Smith R.R., Harteneck B. Strongly coupled relativistic magnetrons for phase-locked arrays // Proc. SPIE.

- Vol. 1061. Microwave and Particle Beam Sources and Directed Energy Concepts, 1989.
13. Pengvanich P., Lau Y.Y., Cruz E., Gilgenbach R.M., Hoff B., Luginsland J.W., Analysis of peer-to-peer locking of magnetrons // *Phys. Plasmas*. 2008. Vol. 15, No. 10. 103104.
 14. Cruz E.J., Hoff B.W., Pengvanich P., Lau Y.Y., Gilgenbach R.M., Luginsland J.W. Experiments on peer-to-peer locking of magnetrons // *Appl. Phys. Lett.* 2009. Vol. 95, No. 19. 191503. DOI: 10.1063/1.3262970.
 15. Andreev A.D. Computer simulations of frequency- and phase-locking of cavity magnetrons // *J. Electromagnetic Waves Appl.* 2018. Vol. 32, No. 12. P. 1501-1518.
 16. Sze H., Price D., Harteneck B. Phase locking of two strongly coupled vircaters // *J. Appl. Phys.* 1990. Vol. 67, No. 5. P. 2278. DOI: 10.1063/1.345521.
 17. Hendricks K.J., Adler R., Noggle R.C. Experimental results of phase locking two virtual cathode oscillators // *J. Appl. Phys.* 1990. Vol. 68, No. 2. P. 820-825.
 18. Репин Б.Г., Дубинов А.Е. Исследование режимов фазировки трех виркаторов в рамках модели связанных осцилляторов Ван дер Поля // *ЖТФ*. 2006. Т. 76, № 4. С. 99.
 19. Levine J.S., Aiello N., Benford J., Harteneck B. Design and operation of a module of phaselocked relativistic magnetrons // *J. Appl. Phys.* 1991. Vol. 70, No. 5. P. 2838-2848.
 20. Benford J. Space applications of high-power microwaves // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2008. Vol. 36, No. 3. P. 569-581.
 21. Rozental R.M., Ginzburg N.S., Glyavin M.Yu., Sergeev A.S., Zotova I.V. Mutual synchronization of weakly coupled gyrotrons // *Phys. Plasmas*. 2015. Vol. 22, No. 9. 093118.
 22. Sakamoto K. Progress of high-power-gyrotron development for fusion research // *Fusion Sci. Tech.* 2007. Vol. 52. P. 145-153.

23. Thumm M. Recent advances in the worldwide fusion gyrotron development // IEEE Trans. Plasma Sci. 2014. Vol. 42, No. 3. P. 590-599.
24. Thumm M.K.A., Denisov G.G., Sakamoto K., Tran M.Q. // Nucl. Fusion. 2019. Vol. 59, No. 7. 073001.
25. Nusinovich G.S., Thumm M.K.A., Petelin M.I. The gyrotron at 50: historical overview // J. Infr. Millim. Terahertz Waves. 2014. Vol. 35, No. 4. P. 325–381.
26. Jelonnek J., Aiello G., Alberti S., Avramidis K., et al. Design considerations for future DEMO gyrotrons: A review on related gyrotron activities within EUROfusion. // Fusion Eng. Design. 2017. Vol. 123. P. 241-246.
27. Denisov G.G., Glyavin M.Y., Fokin A.P., Kuftin A.N., Tsvetkov A.I., Sedov A.S. First experimental tests of powerful 250 GHz gyrotron for future fusion research and collective Thomson scattering diagnostics // Rev. Sci. Instrum. 2018. Vol. 89, No. 8. 084702.
28. Fukunari M., Komurasaki K., Nakamura Y., Oda Y., Sakamoto K. Rocket propulsion powered using a gyrotron // J. Energy Power Eng. 2017. Vol. 11, No. 6. P. 363-371.
29. Wolfrum M., Yanchuk S. Eckhaus instability in systems with large delay // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 96, No. 22. 220201.
30. Балакин М.И., Рыскин Н.М. Бифуркационный механизм формирования развитой мультистабильности в осцилляторе ван дер Поля с запаздывающей обратной связью // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 2. С. 151-164.
31. Балакин М.И., Рыскин Н.М. Мультистабильность и сложные колебательные режимы в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45, № 6. С. 33-35.
32. Usacheva S.A., Ryskin N.M. Phase locking of two limit cycle oscillators with delay coupling // Chaos. 2014. Vol. 24, No. 2. 023123.
33. Nusinovich G.S. Introduction to the Physics of Gyrotrons. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2004. 335 p.

34. Yakunina K.A., Kuznetsov A.P., Ryskin N.M. Injection locking of an electronic maser in the hard excitation mode // *Phys. Plasmas*. 2015. Vol. 22, No. 11. 113107.
35. Клиньшов В.В., Некоркин В.И. Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // *УФН*. 2013. Т. 183, № 12. С. 1323-1336.
36. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // *Physica D*. 1990. Vol. 41, No. 3. P. 403-449.
37. Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V. Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // *Physica D*. 2009. Vol. 238, No. 14. P. 1203-1215.
38. Вайнштейн Л.А. Общая теория резонансных электронных автогенераторов // *Электроника больших мощностей*. Сб. 6. М.: Наука. 1969. С. 84-129.
39. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973. 400 с.
40. Пищик Л.А., Трубецков Д.И., Четвериков А.П. Нестационарные процессы в резонансных релятивистских генераторах типа О // *Лекции по СВЧ электронике и радиофизике (5-я зимняя школа-семинар инженеров)*. Кн. 1. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 1981. С. 42-68.
41. Нусинович Г.С. Теория многомодового гиротрона // В сб. «Гиротрон». Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 146-168.
42. Nusinovich G.S. Mode interaction in gyrodevices // *Int. J. Electron.* 1981. V. 51. No. 4. P. 457-474.
43. Nusinovich G. S. Review of the theory of mode interaction in gyrodevices // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 1999. Vol. 27, № 2. P. 313–326.
44. Wirkus S., Rand R. The dynamics of two coupled van der Pol oscillators with delay coupling // *Nonlinear Dynamics*. 2002. Vol. 30, No. 3. P. 205–221.
45. Safin A.R., Udalov N.N., Kapranov M.V. Mutual phase locking of very non-identical spin torque nanooscillators via spin wave interaction // *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* 2014. Vol. 67. 20601, 6p.

46. Izhikevich E.M. Phase models with explicit time delays // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58, No. 1. P. 905-908.
47. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Трубецков Д.И., Селиверстова Е.С. Удивительный Роберт Адлер. Лампа Адлера, уравнение Адлера и многое другое // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2-15. Т. 23, № 3. С. 3-26.
48. <http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html>
49. Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
50. Balanov A.G., Janson N.B., Astakhov V.V., McClintock P.V.E. Role of saddle tori in the mutual synchronization of periodic oscillations// *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 72, No. 2. 026214.
51. Engelborghs K., Luzyanina T., Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL // *ACM Trans. Math. Software*. 2002. Vol. 28, No. 1. P. 1-21.
52. Тарантович Т.М., Хонькин В.М. К динамике двухчастотного автогенератора с «жестким» возбуждением // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1973. Т.16, № 2. С. 222-226.
53. Моисеев М.А., Нусинович Г.С. К теории многомодовой генерации в гиромонотроне // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1974. Т. 17, №11. С. 1709-1717.
54. Нусинович Г.С., Родыгина Л.С., Тарантович Т.М. К теории синхронизации многомодовых генераторов с «жестким» самовозбуждением // *Радиотехника и электроника*. 1978. Т. 23, № 1. С. 91-96.
55. Перегородова Е.Н., Рыскин Н.М., Усачева С.А. Синхронизация системы двух конкурирующих мод внешним гармоническим сигналом // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 19, № 3. С. 154-170.
56. Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П. Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и

- ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т.15, № 4. С. 3-15.
57. Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П. Особенности синхронизации в системе связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, неидентичных по управляющему параметру // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, № 15. С. 15-21.
58. Бакунин В.Л., Денисов Г.Г., Новожилова Ю.В. Зоны захвата частоты многомодового гиротрона мегаваттного уровня мощности внешним сигналом // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 9. С. 747-758.
59. Новожилова Ю.В., Денисов Г.Г., Глявин М.Ю., Рыскин Н.М., Бакунин В.Л., Богдашов А.А., Мельникова М.М., Фокин А.П. Стабилизация частоты гиротрона под влиянием внешнего монохроматического сигнала или отраженной от нагрузки волны: Обзор // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 1. С. 4-34.
60. Бакунин В.Л., Денисов Г.Г., Завольский Н.А., Моисеев М.А. Зоны устойчивой одномодовой генерации в гиротроне со сверхразмерным резонатором // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 6. С. 67-81.
61. Зотова И.В., Гинзбург Н.С., Денисов Г.Г., Розенталь Р.М., Сергеев А.С. Режимы захвата и стабилизации частоты генерации в мощных гиротронах с низкодобротными резонаторами // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 9. С. 759-769.
62. Ginzburg N.S., Sergeev A.S., Zotova I.V. Time-domain self-consistent theory of frequency-locking regimes in gyrotrons with low-Q resonators // Phys. Plasmas. 2015. Vol. 22, No. 3. 033101.
63. Glyavin M.Yu., Ogawa I., Zotova I.V., Ginzburg N.S., Fokin A.P., Sergeev A.S., Rozental R.M., Tarakanov V.P., Bogdashov A.A., Krapivnitskaia T.O., Manuilov V.N., Idehara T. Frequency stabilization in a sub-terahertz gyrotron with delayed reflections of output radiation // IEEE Trans. Plasma Sci. 2018. Vol. 46, No. 7. P. 2465-2469.

64. Bandurkin I., Fedotov A., Glyavin M., Idehara T., Malkin A., Manuilov V., Sergeev A., Tsvetkov A., Zaslavsky V., Zotova I. Development of third-harmonic 1.2-THz gyrotron with intentionally increased velocity spread of electrons // IEEE Trans. Electron Devices. 2020. Vol. 67, No. 9 (в печати).
65. Глявин М.Ю., Денисов Г.Г., Кулыгин М.Л., Мельникова М.М., Новожилова Ю.В., Рыскин Н.М. Стабилизация частоты гиротрона слабой отражённой волной // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 9. С. 747-758.
66. Новожилова Ю.В., Рыскин Н.М., Усачева С.А. Нестационарные процессы в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки // ЖТФ. 2011. Т. 81, № 9. С. 16-22.
67. Al-Darabsah I., Campbell S.A. A phase model with large time delayed coupling // Physica D. 2020. Vol. 411. 132559
68. Lewis S.M., Nanni E.A., Temkin R.J. Direct machining of low-loss THz waveguide components with an RF choke // IEEE Microw. Wireless Comp. Lett. 2014. Vol. 24, No. 12. P. 842-844.
69. Nusinovich G.S., Sinitsyn O.V., Antonsen T.M. // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 98, No. 20. P. 205101.
70. Kajiwara K., Sakamoto K., Oda Y., Hayashi K., Takahashi K., Kasugai A. // Nucl. Fusion. 2013. Vol. 53, No. 4. P. 043013.
71. Бакунин В.Л., Денисов Г.Г., Новожилова Ю.В. Захват частоты многомодового гиротрона квазимонохроматическим внешним сигналом // Изв. вузов. Радиофизика. 2019. Т. 62, № 7. С. 549-565.
72. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
73. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia, SIAM, 2004.
74. Мельникова М.М. Влияние запаздывающих отражений на стабилизацию частоты и процессы конкуренции мод в гиротроне // Дисс. ... к.ф.-м.н. СГУ, Саратов, 2018.

75. Адилова А.Б., Герасимова С.А., Рыскин Н.М. Бифуркационный анализ взаимной синхронизации двух генераторов с запаздыванием в цепи связи // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 1. С. 3-12.
76. Адилова А.Б., Рыскин Н.М. Исследование синхронизации в системе двух гиротронов с запаздыванием в канале связи на основе модифицированной квазилинейной модели // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 6. С. 68-81.
77. Адилова А.Б., Преображенская Н.В., Рыскин Н.М. К теории синхронизации двухмодового электронного мазера с жестким возбуждением // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Физика. 2019. Т. 19, № 1. С. 19-27.
78. Adilova A.B., Gerasimova S.A., Melnikova M.M., Tyshkun A.V., Rozhnev A.G., Ryskin N.M. Using phase locking for improving frequency stability and tunability of THz-band gyrotrons // Proc. SPIE. 2018. Vol. 10717. Art. no. 107170A.
79. Adilova A.B., Gerasimova S.A., Ryskin N.M. Synchronization of delay-coupled gyrotron oscillators // European Phys. J. Web of Conferences. 2017. Vol. 149. 04029.
80. Adilova A.B., Ryskin N.M. Study of mutual phase locking of two gyrotrons coupled with delay // European Phys. J. Web of Conferences. 2018. Vol. 195. No. 6. 01001.
81. Адилова А.Б., Герасимова С.А., Рыскин Н.М. Взаимная синхронизация двух гиротронов, связанных с задержкой // Актуальные проблемы электронного приборостроения. Материалы научно-технической конференции. Саратов: СГТУ, 2016. Т. 1. С. 5-8.
82. Адилова А.Б., Мельникова М.М., Преображенская Н.В., Рыскин Н.М. Влияние конкуренции мод на процессы синхронизации в гиротроне // Актуальные проблемы электронного приборостроения. Материалы международной научно-технической конференции. Саратов: СГТУ, 2018. Т. 1. С. 201-205.

83. Adilova A.B., Ryskin N.M. Study of synchronization of delay-coupled oscillators with hard excitation // Proceedings of the 2020 International Conference on Actual Problems of Electron Devices Engineering. Saratov, Russia. 2020. P. 20-23.
84. Adilova A.B., Gerasimova S.A., Ryskin N.M. Study of interaction of two gyrotrons with time-delay coupling // 2017 Eighteenth International Vacuum Electronics Conference (IVEC). London, United Kingdom, 24-26 April 2017. P. 8289706.
85. Adilova A.B., Ryskin N.M. Multistability of phase-locked modes in a system of two delay-coupled gyrotron oscillators // 2019 International Vacuum Electronics Conference (IVEC). Busan, South Korea, 2019. P. 8744700.
86. Melnikova M.M., Adilova A.B., Ryskin N.M. Using reflections for suppressing parasitic oscillation in a multimode gyrotron // 2019 44th International Conference on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz). 1-6 Sept. 2019, Paris, France. P. 8874071.
87. Adilova A.B., Gerasimova S.A., Ryskin N.M. Mutual phase locking of two gyrotrons coupled with delay // 41st Int. Conf. on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz). Copenhagen, Denmark, 2016. P. 7758516
88. Адилова А.Б., Герасимова С.А., Рыскин Н.М. Взаимная синхронизация двух гиротронов, связанных с задержкой // Электроника и микроэлектроника СВЧ. Сб. статей VI Всероссийской конференции. СПб: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2017. С. 223-226.
89. Адилова А.Б., Герасимова С.А., Рыскин Н.М. Исследование взаимной синхронизации связанных гиротронов в режиме жесткого возбуждения // Проблемы СВЧ электроники. Сб. трудов III Всероссийской конференции им. В.А. Солнцева. М.: ИД Медиа Паблишер, 2017. С. 20-21.
90. Адилова А.Б., Герасимова С.А., Рыскин Н.М. Взаимная синхронизация двух гиротронов, связанных с задержкой // «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: тезисы докладов XI Всерос. конф. молодых ученых. Саратов: Изд-во «Техно-Декор», 2016. С. 7-8.

91. Адилова А.Б., Герасимова С.А., Рыскин Н.М. Влияние неизохронности на синхронизацию двух генераторов, связанных с задержкой // «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: тез. докл. XII Всерос. конф. молодых ученых. Саратов: Изд-во «Техно-Декор», 2017. С. 6-7.
92. Адилова А.Б., Рыскин Н.М. Изучение динамики двухмодовых гиротронов в режиме жесткого возбуждения с запаздыванием в цепи связи // «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: сборник трудов XIII Всерос. конф. молодых ученых. Саратов: Изд-во «Техно-Декор», 2018. С. 8-9.
93. Преображенская Н.В., Адилова А.Б., Рыскин Н.М. Синхронизация внешним сигналом двухмодовой автоколебательной системы с жестким возбуждением // «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: сборник трудов XIII Всерос. конф. молодых ученых. Саратов: Изд-во «Техно-Декор», 2018. С. 230-231.
94. Адилова А.Б., Рыскин Н.М. Исследование влияния неизохронности на режимы взаимной синхронизации двух генераторов, связанных с задержкой // «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: сборник трудов XIV Всерос. конф. молодых ученых. Саратов: Изд-во «Техно-Декор», 2019. С. 8-9.
95. Адилова А.Б., Рыскин Н.М. Мультистабильность режимов взаимной синхронизации двух гиротронов, связанных с задержкой // «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: тез. докл. XIV Всерос. конф. молодых ученых. Саратов: Изд-во «Техно-Декор», 2020. С. 6-7.
96. Адилова А.Б., Герасимова С.А., Рыскин Н.М. Синхронизация двух гиротронов, связанных с задержкой // Материалы XVII Международной зимней школы-семинара по радиофизике и электронике СВЧ, 5-10 февраля 2018 г., Саратов: ООО «Издательский центр «Наука». С. 60.
97. Адилова А.Б., Герасимова С.А., Балакин М.И., Рыскин Н.М. Синхронизация генераторов, связанных с задержкой // Материалы XII

Международной школы-конференции «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2019). 2019. С. 34-35.

98. Адилова А.Б., Герасимова С.А., Рыскин Н.М. Исследование взаимной синхронизации связанных гиротронов в режиме жесткого возбуждения // «Нелинейные волны–2018». XVIII научная школа. Тезисы докладов молодых ученых. Ниж. Новгород: ИПФ РАН. 2018. С. 5-6.
99. Адилова А.Б., Балакин М.И., Рыскин Н.М. Влияние запаздывания на взаимную синхронизацию двух автоколебательных систем // Нелинейные волны–2020. XIX научная школа. 29 февраля – 6 марта 2020 года, Нижний Новгород. Тезисы докладов. Ниж. Новгород: ИПФ РАН. С. 33.