

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи



СТРЕЛКОВА Галина Ивановна

**ХИМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ В АНСАМБЛЯХ  
НЕЛОКАЛЬНО СВЯЗАННЫХ ХАОТИЧЕСКИХ  
ОСЦИЛЛЯТОРОВ**

01.04.03 – Радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант:  
доктор физико-математических наук,  
профессор, АНИЩЕНКО В.С.

Саратов – 2019

# СОДЕРЖАНИЕ

|   |            |
|---|------------|
| <b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....   | <b>7</b>   |
| <b>Глава 1. Механизмы возникновения, структура и свойства фазовой и амплитудной химер в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов</b> ..... | <b>45</b>  |
| 1.1 Введение .....  | 45         |
| 1.2 Переход «когерентность—некогерентность» в ансамбле нелокально связанных логистических отображений .....   | 48         |
| 1.2.1 Модель, методы исследования и диаграммы режимов .....   | 48         |
| 1.2.2 Режим полной хаотической синхронизации .....  | 55         |
| 1.2.3 Режим колебательной хаотической синхронизации .....   | 57         |
| 1.2.4 Режим фазовой химеры .....  | 59         |
| 1.2.5 Режим амплитудной химеры .....  | 68         |
| 1.2.6 Пространственно-неупорядоченные периодические колебания .....   | 73         |
| 1.2.7 Бифуркации связанности в области некогерентного хаоса .....   | 74         |
| 1.3 Механизм перехода «когерентность—некогерентность» .....   | 76         |
| 1.4 Переход «синхронизация—десинхронизация» в ансамбле нелокально связанных отображений Эно .....   | 80         |
| 1.4.1 Модель и диаграмма режимов .....  | 81         |
| 1.4.2 Динамика кольца связанных отображений Эно. Фазовая и амплитудная химеры .....   | 84         |
| 1.4.3 Анализ влияния функции воздействия .....  | 89         |
| 1.5 Амплитудная и фазовая химеры в кольце генераторов Анищенко—Астахова с нелокальным взаимодействием .....   | 91         |
| 1.6 Выводы по первой главе .....  | 97         |
| <b>Глава 2. Переход «когерентность—некогерентность» в ансамблях нелокально связанных хаотических систем с квазигиперболическим аттрактором</b> .....      | <b>100</b> |

|   |            |
|---|------------|
| 2.1 Введение .....  | 100        |
| 2.2 Переход «когерентность—некогерентность» в кольце нелокально связанных отображений Лози .....    | 104        |
| 2.2.1 Модель и диаграммы режимов .....  | 104        |
| 2.2.2 Динамика ансамбля нелокально связанных отображений Лози ...                                   | 108        |
| 2.2.3 Анализ влияния функции воздействия .....  | 118        |
| 2.3 Переход к пространственно-временному хаосу в ансамбле нелокально связанных систем Лоренца ..... | 119        |
| 2.3.1 Модель и бифуркационные диаграммы .....   | 119        |
| 2.3.2 Влияние эффективных значений параметров на динамику индивидуальной системы Лоренца .....      | 126        |
| 2.3.3 Режим уединенных состояний .....  | 129        |
| 2.3.4 Уединенные состояния и двухъямная химера .....  | 131        |
| 2.3.5 Пространственно-временная перемежаемость .....  | 136        |
| 2.3.6 Сосуществование режимов двухъямной химеры и пространственно-временной перемежаемости .....    | 143        |
| 2.3.7 Режим полной некогерентности .....  | 146        |
| 2.4 Выводы по второй главе .....  | 147        |
| <b>Глава 3. Перемежаемость во времени и время жизни химерных состояний .....</b>                    | <b>151</b> |
| 3.1 Введение .....  | 151        |
| 3.2 Эффект перемежаемости в ансамбле нелокально связанных логистических отображений .....           | 154        |
| 3.2.1 Временная динамика парциальных осцилляторов амплитудной химеры.....                           | 154        |
| 3.2.2 Эволюция во времени кластеров амплитудных химер.....  | 159        |
| 3.3 Особенности динамики химерных состояний в ансамбле отображений Эно .....                        | 165        |
| 3.3.1 Нестационарная динамика элементов амплитудной химеры.....                                     | 165        |
| 3.3.2 Время жизни химерных состояний .....  | 168        |
| 3.4 Влияние шумовых воздействий на время жизни амплитудных химер .                                  | 175        |

|  |            |
|--|------------|
| 3.4.1 Локализованное кратковременное шумовое воздействие на амплитудные химеры в кольце логистических отображений .....    | 175        |
| 3.4.2 Зависимость времени жизни амплитудных химер от длительности шумового воздействия .....                               | 184        |
| 3.4.3 Воздействие шумом на все осцилляторы ансамбля отображений Эно .....  | 188        |
| 3.5 Выводы по третьей главе .....  | 192        |
| <b>Глава 4. Химера уединенных состояний: структура и механизм реализации .....</b>   | <b>195</b> |
| 4.1 Введение .....   | 195        |
| 4.2 Особенности динамики системы двух связанных ансамблей хаотических отображений .....                                    | 197        |
| 4.2.1 Модель связанных ансамблей .....   | 197        |
| 4.2.2 Пространственно-временные структуры, индуцированные межслойной связью .....  | 199        |
| 4.2.3 Химера уединенных состояний .....  | 209        |
| 4.3 Механизм возникновения химеры уединенных состояний в изолированном ансамбле нелокально связанных отображений Эно ..... | 213        |
| 4.3.1 Исследуемая система .....  | 213        |
| 4.3.2 Индуцированная шумом химера уединенных состояний .....   | 215        |
| 4.3.3 Режим бистабильности в ансамбле отображений Эно в присутствии шума .....   | 217        |
| 4.3.4 Бассейны притяжения аттракторов индивидуальных осцилляторов ансамбля в отсутствие шума .....                         | 222        |
| 4.4 Сценарий рождения уединенных состояний в ансамбле нелокально связанных отображений Лози .....                          | 228        |
| 4.5 Уединенные состояния и химеры уединенных состояний в ансамблях моделей нейронов .....                                  | 232        |
| 4.5.1 Пространственно-временные структуры в ансамбле нелокально связанных отображений Некоркина .....                      | 233        |

|  |            |
|--|------------|
| 4.5.2 Химера уединенных состояний в ансамбле осцилляторов ФитцХью-Нагумо с нелокальной связью .....            | 243        |
| 4.6 Выводы по четвертой главе .....  | 252        |
| <b>Глава 5. Синхронизация химерных структур в двух связанных ансамблях хаотических отображений .....</b>       | <b>254</b> |
| 5.1 Введение .....   | 254        |
| 5.2 Исследуемая модель .....   | 255        |
| 5.3 Характеристики степени синхронизации .....   | 258        |
| 5.4 Синхронизация ансамблей при однонаправленном диссипативном взаимодействии .....                            | 260        |
| 5.4.1 Случай идентичных ансамблей .....  | 260        |
| 5.4.2 Случай неидентичных ансамблей .....  | 263        |
| 5.4.3 Области внешней синхронизации .....  | 268        |
| 5.4.4 Двупараметрические диаграммы режимов .....   | 274        |
| 5.5 Взаимная синхронизация диссипативно связанных ансамблей .....  | 279        |
| 5.5.1 Случай идентичных ансамблей .....  | 279        |
| 5.5.2 Случай неидентичных ансамблей .....  | 281        |
| 5.6 Сравнение с классическими эффектами синхронизации периодических автоколебаний .....                        | 286        |
| 5.7 Эффекты синхронизации в системе ансамблей с инерционной связью ..  | 288        |
| 5.8 Взаимная синхронизация сложных структур в системе связанных ансамблей Эно и Лози .....                     | 292        |
| 5.9 Выводы по пятой главе .....  | 296        |
| <b>Глава 6. Вынужденная синхронизация химерных структур в многослойных сетях хаотических отображений .....</b> | <b>298</b> |
| 6.1 Введение .....   | 298        |
| 6.2 Вынужденная синхронизация химерных структур в однородной мультиплексной сети .....                         | 300        |
| 6.2.1 Исследуемая модель и оценка степени синхронности структур ....   | 300        |
| 6.2.2 Сеть логистических отображений .....   | 304        |

|       |   |            |
|-------|---|------------|
| 6.2.3 | Сеть кубических отображений.....  | 316        |
| 6.3   | Вынужденная синхронизация неоднородной мультиплексной сети хаотических осцилляторов в режиме химерного состояния..... | 323        |
| 6.3.1 | Исследуемая модель .....  | 323        |
| 6.3.2 | Случай слабой неоднородности при однонаправленном взаимодействии всех слоев .....                                     | 328        |
| 6.3.3 | Эффект «первоначальной» синхронизации.....  | 333        |
| 6.3.4 | Влияние степени неоднородности слоев .....  | 337        |
| 6.3.5 | Влияние обратной связи .....  | 343        |
| 6.4   | Выводы по шестой главе.....   | 347        |
|       | <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>   | <b>349</b> |
|       | <b>БЛАГОДАРНОСТИ .....</b>  | <b>355</b> |
|       | <b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>  | <b>356</b> |

# ВВЕДЕНИЕ

## Актуальность исследуемой проблемы

Коллективная динамика сложных систем различной природы, синхронизация ансамблей взаимодействующих осцилляторов, формирование разнообразных диссипативных структур и их эволюция представляют собой одно из центральных направлений исследований в нелинейной динамике и связанных междисциплинарных областях науки. Полученные результаты отражены в большом количестве монографий [1–18] и статей [19–53].

Для ансамблей пространственно-организованных активных элементов с локальным взаимодействием (обычно диффузионного типа) и активных сред установлены такие явления, как пространственно-временной хаос (турбулентность) [5, 23, 32, 43], пространственно-временная перемежаемость [27–29], образование кластеров синхронизации [10, 25, 35, 36, 38], регулярные и нерегулярные пространственные структуры [12, 31, 34, 35], мультистабильность [30, 46], различные типы волновых процессов [6, 23, 37, 40]. Синхронизация и формирование различных кластерных структур характерны также для ансамблей активных элементов с глобальным взаимодействием через среднее поле [35, 45].

В начале 21-го века были открыты новые типы пространственно-временных структур, названные *химерными состояниями*. Впервые эти структуры были обнаружены японским физиком Y. Kuramoto и его коллегой D. Battogtokh в 2002 году в ансамблях идентичных фазовых осцилляторов (фазовых осцилляторов Курамото) с симметричной нелокальной связью между элементами [54]. Нелокальная связь характеризуется тем, что каждый осциллятор ансамбля симметрично связывается с конечным числом  $P$  ближайших соседних осцилляторов справа и слева,  $1 < P < N/2$ , где  $N$  – общее число

осцилляторов ансамбля. Случай  $P = 1$  отвечает локальной связи. При глобальной связи каждый осциллятор взаимосвязан со всеми осцилляторами ансамбля справа и слева ( $P = N/2$ ). Несмотря на то, что изначально все осцилляторы имели одинаковые собственные частоты, ансамбль нелокально связанных фазовых осцилляторов в исследованиях Y. Kuramoto разделился на две пространственно локализованные части: когерентную область периодических синфазных колебаний и некогерентную область, характеризующуюся хаотическим поведением осцилляторов во времени и различными средними частотами [54, 55].

Более детально новая пространственно-временная структура была исследована и описана в работе [55], где и был предложен термин *химерное состояние* или *химера*. Под химерными структурами понимают сосуществование в ансамбле синхронных (когерентных) и несинхронных (некогерентных) кластеров, включающих конечное число четко разграниченных в пространстве элементов ансамбля. Химера представляет собой совокупность «сочетаемого» и «несочетаемого». Оригинальное определение химерного состояния, данное D. Abrams и S. Strogatz в работе [55], звучит следующим образом: *a chimera state is a spatio-temporal pattern in which a system of identical oscillators is split into coexisting regions of coherent (phase and frequency locked) and incoherent (drifting) oscillation*. Химерная структура, обнаруженная в ансамблях связанных фазовых осцилляторов и ставшая *классической* химерой Курамото [54, 55], обычно трактуется как *фазовая*, что подразумевает неоднородное распределение фазы осцилляторов в пространстве ансамбля. Первые обзоры по химерным состояниям были написаны M.J. Panaggio и D.M. Abrams в 2015 году [56] и E. Schöll в 2016 году [57]. В 2020 году выходит первая монография по химерным структурам в сложных сетях, подготовленная A. Zakharova [58].

Отметим, что структуры типа химерных наблюдались задолго до их определения в работе [54]. Внимание исследователей в те годы было сосредоточено на анализе и управлении переходами от режимов пространственного хаоса к полной синхронизации всех элементов ансамблей [59–61]. Структуры типа хи-



мерных наблюдались в качестве переходных режимов к синхронизации и назывались синхронными и несинхронными кластерами [20,28]. Химерные состояния представляют собой промежуточную стадию при переходе от режима полной синхронизации (когерентности) ансамбля к режиму полной рассинхронизации (некогерентности<sup>1</sup>) или пространственно-временного хаоса при изменении параметра связи. Такой переход может происходить и через другие состояния частичной синхронизации, а именно, через *уединенные состояния* (в английской терминологии — *solitary states* [62]). Механизм такого сценария отличается от случая перехода через химерные состояния. Термин *уединенный* (*solitary*) происходит от латинского «*solitarius*», что обозначает одинокий, изолированный. В случае химерных состояний ансамбль самопроизвольно распадается на сосуществующие области когерентного (синхронизированного) и некогерентного поведения, которые локализованы в пространстве. Напротив, для уединенных состояний характерно, что отдельные «уединенные» осцилляторы при вариации коэффициента связи начинают покидать синхронный кластер в случайных положениях в пространстве [62–67].

С момента обнаружения химерных состояний в кольце фазовых осцилляторов Курамото, данная модель привлекла внимание исследователей [68–87]. В частности, были исследованы случаи двух взаимодействующих идентичных популяций фазовых осцилляторов [71, 83], в которых химерные состояния отвечали ситуации, когда одна популяция (подсистема) была полностью синхронизована, тогда как вторая подсистема находилась в рассинхронизованном состоянии. Позже было также показано, что элементы ансамбля необязательно должны быть идентичными и химерные состояния могут быть обнаружены в неоднородных ансамблях (сетях) фазовых осцилляторов [72, 73].

Открытие химерных состояний инициировало большой всплеск теоретических, численных и экспериментальных исследований. Было показано, что по-

---

<sup>1</sup>Детальные пояснения понятий «когерентности» и «некогерентности» применительно к рассматриваемым в работе случаям даны в первой главе диссертационной работы.

явление химерных состояний не ограничивается оригинальной моделью связанных фазовых осцилляторов Курамото. Они также наблюдаются в ансамблях с различными типами индивидуальных элементов: хаотических моделях с дискретным [88–90, 92–95] и непрерывным временем [96–98], Булевых сетях [99], осцилляторах Стюарта-Ландау [100–110], моделях Курамото с инерцией [111, 112], осцилляторах ван дер Поля [113–118], модифицированном уравнении Икеды с запаздыванием [119], моделях нейронов ФитцХью-Нагумо [120–124, 127, 128], Ходжкина-Хаксли [129], Морриса-Лекара [131], LIF нейронов [125–127, 132], осцилляторах Хиндмарша-Розе [133–135], системах с возбуждением I-го типа [136], экологических осцилляторах (системах Розенцвейга-МакАртура) [137, 138], осцилляторах Рэля [139], осцилляторах Дуффинга [140], осцилляторах ван дер Поля–Дуффинга [89], системах квантовых осцилляторов [114, 115], осцилляторах на плоскости [141], осцилляторах Гинзбурга–Ландау [142], химических осцилляторах [143–146], механических осцилляторах [147–149], лазерных системах [150–152], электронных цепях [153], оптоэлектронных сетях [154].

Впервые строгий теоретический анализ химерных состояний был дан в работе [71] для ансамбля нелокально связанных фазовых осцилляторов Курамото. В дальнейшем строгие математические исследования химерных состояний в различных системах были проведены в работах [68–70, 74, 85, 86, 88, 90, 91, 99]. Результаты аналитических исследований последних лет обобщены в обзоре О. Omel'chenko [155].

Большая часть работ по химерным состояниям посвящена их численному исследованию. Принимая во внимание довольно широкий спектр систем, в которых были обнаружены химерные состояния, необходимо отметить, что свойства и особенности данной структуры могут существенно зависеть от собственной динамики индивидуального элемента ансамбля. Были предприняты попытки ввести классификацию типов химерных структур [156]. Помимо классической химеры Курамото, были также обнаружены *амплитудная* химера и *химерная смерть* в ансамблях гармонических осцилляторов Стюарта-Ландау

[100–110] и экологических осцилляторах [137, 138]; *двухъямные* химеры в ансамблях нелокально связанных бистабильных осцилляторов [92, 98]; *мультикластерные и бегущие* химерные состояния в ансамблях фазовых осцилляторов Курамото [75, 76] и различных моделях нейронов [129–132]; *мультихимерные* состояния в ансамблях нелокально связанных нейронов Хиндмарш-Розе [133], моделях с возбуждением I-го типа [136] (подробный обзор по химерам в нейронных системах представлен в работе [157]), в кольце осцилляторов ван дер Поля [113]; *перемежающиеся* химерные состояния в популяциях фазовых осцилляторов Курамото с инерцией [111]; *виртуальные* химерные состояния в модифицированном уравнении Икеды с запаздывающей обратной связью [119]; *несовершенные* химерные состояния в моделях маятника [149]; *турбулентные* химеры [109]; *вложенные* химеры в ансамблях логистических отображений с фрактальной связью [93]; *когерентно-резонансные* химерные состояния в ансамбле нейронов ФитцХью-Нагумо в возбуждимом режиме в присутствии шума [123, 124], *когерентно-резонансные химеры периода 2*, индуцированные в данном ансамбле введением запаздывающей обратной связи [158]; *3D химеры* в решетке фазовых осцилляторов Курамото [159–161] и моделях нейрона [162]. Отметим также особые (волновые) химерные состояния, которые возникают в распределенных системах и двумерных ансамблях (решетках) нелокально связанных нелинейных осцилляторов. К ним относятся *спирально-волновые химеры* [72, 77, 146, 163–175] и *химеры, формирующиеся на базе концентрических волн* [176, 177].

Однако в литературе имеется относительно мало работ по исследованию химерных и других пространственно-временных структур (таких как *уединенные состояния*) в ансамблях, составленных из осцилляторов с хаотическим поведением. Вместе с тем, хаотические осцилляторы представляют собой широкий класс нелинейных систем и характеризуются довольно богатой динамикой. Детальные исследования в данном направлении с целью анализа особенностей переходов «когерентность—некогерентность» в ансам-

*блях нелокально связанных хаотических осцилляторов, выявления различных типов химерных состояний и установления механизмов их возникновения проводятся в рамках настоящей диссертационной работы.*

Было показано, что химерные состояния представляют собой долгоживущие переходные процессы для систем с конечным числом элементов и их время жизни для фазовых осцилляторов экспоненциально возрастает с увеличением числа элементов [56, 69]. Если число осцилляторов в ансамбле  $N \rightarrow \infty$ , химерные состояния становятся устойчивыми. Довольно часто наблюдалось, что химеры являются переходными состояниями к режиму синфазной синхронизации или эти два состояния могут сосуществовать в одной области пространства параметров. Бассейн притяжения химерных состояний типично является относительно малым по сравнению с областью притяжения синхронного состояния [178]. Поэтому, во многих ситуациях требуется выбор и задание специально подготовленных начальных условий для обнаружения химерных структур [88, 96, 179]. Этот факт также является причиной, почему данные гибридные состояния долгое время не обнаруживались. Однако, выбор начальных условий в виде случайного распределения в некотором интервале значений переменных состояния представляется более предпочтительным, как наиболее соответствующий практическому функционированию реальных ансамблей в природе и технике. Все результаты численных исследований, представленные в настоящей диссертационной работе, получены именно для случайно распределенных начальных условий. *Стоит отметить, что вопрос о различии динамических свойств и характеристик различных типов химерных состояний, которые наблюдаются при численном моделировании динамики ансамблей хаотических осцилляторов, а также их времени жизни не был отражен в литературе по химерным состояниям. Проведение исследований в данном направлении является одной из основных задач настоящей диссертационной работы.*

Первоначально химерные состояния были исследованы для двух типов топологии ансамблей. Первый тип представляет собой топологию кольца с нело-

кальной связью, которая использовалась в работах [54, 55]. Изменяя радиус нелокальной связи, можно реализовать два предельных случая: локальную и глобальную связи между осцилляторами. Нелокальная топология связи может быть описана различными функциями связи: экспоненциальной [54], косинусоподобной [55], кусочно-постоянной [68, 69, 88, 120] или степенной [72, 137]. Второй тип топологии представляет собой модель двух популяций, когда система (сеть) состоит из двух идентичных глобально связанных подсистем (популяций) со слабой силой связи между популяциями [71]. Впоследствии химерные состояния были также обнаружены при глобальной [107, 108, 151, 180–188] и локальной связи [138, 188–192], при задании нерегулярных типов топологии [193–197] и иерархических или квазифрактальных и случайных фрактальных типов связи [93, 116, 118, 121, 126, 132, 198–201]. Кроме стационарных видов топологии ансамблей, перечисленных выше, было показано, что химерные состояния реализуются в сложных системах, изменяющихся во времени [202], а также в динамических сетях с адаптивными связями [203–205]. Химерные состояния в ансамблях моделей нейронов исследовались при отталкивающей (repulsive) [206], отражающей (reflecting) [207] и диагональной типах связи [208]. Возникновение сложных режимов динамики также наблюдалось при звездообразной топологии связи в ансамблях осцилляторов [209–211]. В настоящей диссертационной работе рассматриваются и изучаются замкнутые в кольцо ансамбли хаотических осцилляторов с нелокальной связью, задаваемой через функции или координаты переменных состояния.

При проведении численного моделирования пространственно-временной динамики ансамблей связанных осцилляторов для установления факта возникновения химерных состояний и их иллюстрации часто используется графическое представление динамики ансамбля в виде пространственных распределений мгновенных значений динамических переменных и пространственно-временных диаграмм их значений. Для количественной характеристики химерных состояний в случае одномерного кольца  $N$  связанных фазовых ос-

цилляторов и периодических автогенераторов часто используется параметр порядка [54, 70, 88]. Еще одна количественная мера химерных состояний основана на расчете средней частоты колебаний [54, 55]. Указанные характеристики использовались для диагностики фазовых химер в ансамблях осцилляторов Курамото или периодических автогенераторов. Другие показатели существования химерных состояний в ансамблях квантовых осцилляторов базируются на использовании корреляционных характеристик [114, 156]. В работе [212] был предложен индекс локальной чувствительности, позволяющий количественно оценить степень чувствительности элементов некогерентных кластеров химерной структуры к внешним воздействиям. *Однако, стоит отметить, что для исследования химерных состояний в ансамблях хаотических осцилляторов не были предложены соответствующие количественные характеристики. Вследствие этого, детального статистического анализа как перехода «когерентность—некогерентность», так и свойств различных типов химерных состояний в ансамблях хаотических осцилляторов проведено не было. Данная задача систематически и подробно решается в диссертационной работе.*

Сложные структуры из синхронных и несинхронных кластеров были обнаружены не только в математических моделях ансамблей, но и в ряде натуральных экспериментов. Через десять лет после теоретического обоснования существования химерных состояния появились первые экспериментальные работы по химерам на оптических световых модуляторах [213] и в химических системах [143, 144]. Затем химерные структуры были обнаружены в экспериментах с использованием механических систем [147, 148], электронных или оптоэлектронных осцилляторов [119, 150, 152], электрохимических систем [145, 183, 214], локально связанных электронных цепях (модели ФитцХью-Нагумо) [153], оптических гребней [215], глобально связанных через среднее поле бистабильных осцилляторов с запаздыванием в цепи обратной связи [216]. Химерные состояния наблюдались экспериментально в оптических глобально связанных ан-

самблях, состоящих всего из четырех элементов [154]. Численно и экспериментально было показано существование виртуальной химеры в одном осцилляторе с запаздывающей обратной связью [119]. Относительно недавно, в химических автоколебательных системах впервые экспериментально была реализована спирально-волновая химера [146]. Данные факты говорят о возможности образования химерных состояний в реальных системах различной природы и тем самым свидетельствуют о грубости данного режима в целом.

Важным фактором, влияющим на динамику ансамблей и активных сред, является действие случайных сил, порождаемых внутренними и внешними источниками шума. Шуму в распределенных системах посвящена монография [217]. Обычно случайные воздействия (шум) препятствуют синхронизации и разрушают пространственные структуры. Однако в определенных случаях в распределенных системах наблюдаются стохастические эффекты, приводящие к росту упорядоченности и формированию структур, такие как стохастический и когерентный резонанс, индуцированная шумом синхронизация, перемежаемость [103, 218–231] и ряд других работ в этом же направлении. Было показано, что шум может не только изменять время жизни химерных состояний [103], но также индуцировать возникновение гибридных состояний, таких как когерентно-резонансная химера, обнаруженная в ансамблях возбудимых осцилляторов с нелокальным взаимодействием [123, 124]. Слабое шумовое воздействие на ансамбль нелокально связанных хаотических систем может приводить к изменению характера некогерентных кластеров, а также к возбуждению новых некогерентных кластеров [232]. *Тем не менее, влияние шума на свойства различных типов химерных структур, их время жизни и на возможность управления временем жизни химер в ансамблях хаотических систем практически не изучено. Данная проблема детально исследуется в настоящей диссертационной работе.*

В последние годы большой интерес вызывают исследования динамики связанных между собой ансамблей и сетей. Одними из основополагающих и пи-

онерских в этой области работ считаются следующие обзоры и книги [234–238]. Сложная сеть может быть составлена из элементов, в свою очередь, являющихся сложными сетями [233], которые могут демонстрировать сложные пространственно-временные режимы и структуры. Актуальность и востребованность исследований особенностей взаимодействия сложных систем обусловлена задачами моделирования, возникающими во многих областях науки и техники. В качестве моделей сложных сетей часто выступают системы, состоящие из многих взаимодействующих слоев, представляющих собой ансамбли осцилляторов с определенным характером взаимодействия. Особенно характерны такие «многослойные» модели для задач нейродинамики [239–243, 245], экологии и климата [244, 246–250], эпидемиологии [252, 253], социологии и экономики [254–260], организации транспорта [261–264], энергосетей [48, 265–267], инфокоммуникационных сетей [269, 270]. Выделяют сложные многослойные сети, известные как *мультиплексные* (multiplex) и *многослойные* (multilayer)<sup>2</sup> [271–277].

В многослойных сетях, в которых отдельные слои могут демонстрировать сложное пространственно-временное поведение, включая реализацию различных химерных состояний, взаимодействие слоев может приводить к возникновению или подавлению химерных состояний [278–285], а также индуцировать появление новых химерных структур [122].

В ряде работ последних лет были установлены и исследованы различные эффекты синхронизации сложных пространственно-временных структур, включая химерные, в многослойных сетях: кластерная синхронизация [51, 286–288], обобщенная синхронизация [289, 290], фазовая синхронизация [291], межслойная синхронизация [292, 293], синхронизация сетей с запаздывающими и адаптивными связями [49, 52, 204], удаленная (relay) синхронизация [294–299], взрывная синхронизация [300–303, 305–309], «клонирование» химерных структур [310]. *Однако, эффекты вынужденной и взаимной синхронизации химерных структур различного типа в многослойных ансамблях нелокально связан-*

---

<sup>2</sup>Определения данных типов сетей даны в главе 6 диссертации.



*ных хаотических осцилляторов практически не рассмотрены и не изучены. Проведение исследований в данном направлении является одной из основных задач настоящей диссертационной работы.*

Химерные состояния имеют непосредственное отношение к процессам и структурам, возникающим и наблюдающимся в реальных системах. Одно из ярких и важных практических приложений химерных состояний относится к области нейродинамики и нейрофизиологии. Было показано, что химерные структуры характеризуют импульсные состояния в нейронных системах, в которых локализованные области когерентных колебаний окружены областью некогерентностью [311, 312], а также феномен медленного сна одним полушарием головного мозга у некоторых видов птиц и водных млекопитающих (дельфинов, ушастых тюленей, ламантинов) [313–316], которые спят с одним открытым глазом, что позволяет предположить синхронное функционирование одной половины мозга при асинхронном поведении другой половины. Формирование химерных структур отражает состояние человеческого мозга при «эффекте первой ночи» в незнакомой обстановке у человека [317]. Недавно проведенные исследования показали наличие химероподобных состояний в ансамбле нейронов, моделирующем активность нейронов коры головного мозга кошки [318].

Существование областей синхронизации и десинхронизации имеет непосредственную связь с различными видами патологий мозговой и нервной деятельности [199, 319], такими как болезнь Паркинсона [320, 321], аутизм, эпилептические припадки [199, 322–328], болезнь Альцгеймера [329], шизофрения [330] и опухоли головного мозга. В работе [331] было отмечено, что во время исследований, в которых участников просили координировать движение левого и правого пальцев с периодически вспыхивающим светом, ЭЭГ выявили кластеры скоординированной и несогласованной активности. Другими возможными приложениями химерных состояний является их роль в исследованиях механизмов организации восприятия [332] и поведенческой чувствительности [333, 334].

Исследования образования химерных структур также имеют важное практическое значение для установления устойчивого функционирования энергосетей [48, 265–267] и систем жизнеобеспечения, транспортных [261–264] и информационно-коммуникационных сетей [269, 270], включающих телефонные сети, сети теле- и радиовещания, компьютерные сети, полносвязные спутниковые сети, сети радиолокационных станций, для выявления особенностей взаимодействия и формирования социальных сообществ и сетей [257, 259, 260, 335] и др.

Приведенные данные о направлениях работ и уже имеющихся результатах убедительно свидетельствуют о том, что анализ химерных структур в ансамблях связанных осцилляторов различной природы и степени сложности является современной и актуальной научной проблемой нелинейной теории колебаний и волн, традиционно относящейся к задачам радиофизики. В решение указанной проблемы вовлечено большое количество известных в мировой науке коллективов, среди которых много признанных специалистов по нелинейной динамике. На основе сказанного можно сделать вывод о том, что актуальность научного направления и тема настоящей диссертационной работы органически сочетается с научными интересами широкого круга специалистов в мировой науке и является востребованной и важной для исследований в современной радиофизике.

## **Цель диссертационной работы**

**Целью работы** являются выявление и детальный анализ различных типов химерных пространственно-временных структур в одиночных и связанных ансамблях нелокально взаимодействующих осцилляторов с хаотической динамикой, исследование механизмов формирования новых химерных структур в ансамблях хаотических осцилляторов различного типа, включая ансам-

бли с негиперболическим и квазигиперболическим хаотическими аттракторами, анализ динамических и статистических характеристик химерных структур, их устойчивости к шумовым возмущениям, времени жизни и чувствительности к способу задания начальных условий, а также детальный анализ эффектов вынужденной и взаимной синхронизации химерных структур в двух связанных ансамблях и многослойных сетях.

Для достижения поставленной цели определены и сформулированы **основные задачи** диссертационного исследования:

- выявление механизмов формирования, структуры, динамических и статистических характеристик фазовых и амплитудных химерных структур в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов с дискретным и непрерывным временем с хаотическими аттракторами негиперболического типа (квазиаттракторами);
- динамический и статистический анализ пространственно-временных структур при переходе «когерентность—некогерентность» в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов с квазигиперболическим типом аттракторов, описание характеристик пространственно-временных структур из уединенных состояний на примере ансамблей отображений Лозы и осцилляторов Лоренца;
- установление закономерностей формирования нестационарности и нерегулярных переключений во времени в режимах амплитудной химеры, анализ времени жизни амплитудной и фазовой химер и влияния шумовых возмущений на время жизни химерных состояний;
- обнаружение и анализ нового типа химерных структур, включающих в качестве кластеров некогерентности уединенные состояния (химера уединенных состояний), и описание общего механизма формирования указанного типа химерных структур;

- выявление особенностей вынужденной и взаимной синхронизации химерных структур в двух однонаправленно и взаимосвязанных ансамблях нелокально взаимодействующих хаотических осцилляторов;
- анализ процессов передачи (ретрансляции) синхронных химерных структур от одного слоя к другим в пространстве многослойной сети из ансамблей хаотических осцилляторов.

## Научная новизна

Диссертационная работа посвящена решению принципиально новых задач анализа химерных состояний в ансамблях взаимодействующих нелинейных осцилляторов с хаотической динамикой. Полученные результаты являются новыми и в ряде задач приоритетными. Совокупность результатов диссертации позволяет существенно расширить представления о механизмах формирования, структуре и свойствах химерных структур в ансамблях нелокально связанных осцилляторов и выявляет характерные особенности динамики ансамблей из осцилляторов с хаотической динамикой. Результаты диссертации находятся в соответствии с уже установившимися представлениями в этой области знаний, гармонично расширяя и дополняя их. Несомненная новизна основных результатов работы подтверждается их публикацией в целом ряде научных статей в высокорейтинговых отечественных и зарубежных физических журналах с высоким импакт-фактором, входящих в международные и российские системы цитирования Web of Science, Scopus, РИНЦ. Содержание диссертационной работы соответствует паспорту специальности «01.04.03 – Радиофизика».

В работе впервые получены следующие научные результаты:

- Детально описан переход от режима полной хаотической синхронизации к пространственно-временному хаосу в одномерных ансамблях с хаотическими аттракторами негиперболического типа при условии нелокальной связи. Впервые установлено, что при указанном переходе возникает два

вида химерных структур: фазовые и амплитудные, обоснована их типичность для ансамблей хаотических осцилляторов, как с дискретным, так и непрерывным временем, реализующим переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода.

- Выявлены и описаны бифуркационные механизмы формирования фазовых и амплитудных химерных структур в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов с негиперболическим типом хаотического аттрактора.
- С помощью расчетов коэффициентов взаимной корреляции между колебаниями осцилляторов ансамблей в режиме химерных состояний впервые количественно обоснованы свойства некогерентности химерных кластеров амплитудных и фазовых химер и выявлены принципиальные различия в их статистических характеристиках.
- Впервые проведен теоретический и численный анализ влияния свойства гиперболичности аттрактора на примере ансамбля из нелокально связанных систем Лоренца на возможность реализации режимов химерных структур. Установлено, что управляющие параметры индивидуальных осцилляторов за счет нелокальной связи становятся зависящими от коэффициента связи. Показано, что при вариации силы связи параметры индивидуального осциллятора изменяют свои эффективные значения, которые могут соответствовать как режимам квазигиперболического, так и негиперболического аттракторов. В результате в первом случае рождение химерных структур исключено. Если при изменении параметров происходит переход от квазигиперболического к негиперболическому типу аттрактора, то в этом случае реализация химерных структур становится возможной.
- Детально описаны особенности переходов от режима полной хаотической синхронизации к режиму пространственно-временного хаоса в ряде ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов с квазигипербо-

лическим типом аттрактора индивидуальных осцилляторов. Установлено, что указанный переход осуществляется, как правило, через режим уединенных состояний. При этом с уменьшением величины коэффициента нелокальной связи имеет место монотонное возрастание числа осцилляторов в режиме уединенных состояний и при стремлении силы связи к нулю реализуется режим пространственно-временного хаоса.

- Впервые обнаружен и исследован эффект перемежаемости в динамике хаотических осцилляторов некогерентного кластера амплитудной химеры, проявляющийся в нерегулярных во времени переключениях режимов колебаний от хаотических к периодическим и наоборот. Установлен факт конечности времени жизни амплитудной химеры, которая представляет собой переходный процесс.
- Впервые методом численного эксперимента установлена возможность управления временем жизни амплитудной химеры в ансамблях хаотических осцилляторов в широких пределах путем внешнего аддитивного шумового воздействия, как на отдельные осцилляторы, так и на все осцилляторы ансамбля.
- Обнаружен и описан новый тип химерной структуры — «химеры уединенных состояний», найденный при моделировании динамики системы двух связанных ансамблей из хаотических осцилляторов Лози и Эно. Эта химерная структура характеризуется сосуществованием в пространстве ансамбля некогерентного кластера (кластеров) осцилляторов в режиме уединенных состояний и когерентного кластера (кластеров) осцилляторов в режиме синхронных колебаний. Показано, что химера уединенных состояний является одной из типичных для ансамблей нелокально связанных осцилляторов и может быть реализована не только в системах двух взаимосвязанных ансамблей, но и в изолированных ансамблях отображений

Лози, Эно, отображений Некоркина и в ансамбле осцилляторов ФитцХью-Нагумо.

- Впервые установлен и описан механизм рождения уединенных состояний и химерных структур на их основе. Рождение указанных пространственно-временных структур обусловлено появлением бистабильности в динамике индивидуальных осцилляторов ансамбля. Показано, что причиной возникновения бистабильности является нелокальная связь индивидуальных осцилляторов с конечным числом соседей.
- Установлены и исследованы эффекты вынужденной и взаимной синхронизации сложных пространственно-временных структур, включая химерные, в случае диссипативной взаимосвязи между ансамблями хаотических осцилляторов с нелокальной связью. Показано, что с ростом коэффициента связи между ансамблями осуществляется переход к синхронной динамике элементов взаимодействующих ансамблей, которая сохраняется в конечной области синхронизации в пространстве управляющих параметров системы. Установлено качественное соответствие эффекта синхронизации пространственно-временных структур с выводами классической теории синхронизации предельного цикла.
- Установлена возможность эффективной синхронизации структур (с заданной точностью) при наличии неоднородности слоев и выявлено влияние различных видов неоднородности на эффективную синхронизацию. Показано, что химерная структура, заданная в первом слое, передается (ретранслируется) от слоя к слою с малыми искажениями, величина которых определяется величиной расстройки параметров. Эффективная синхронизация структур во всех слоях многослойного ансамбля осцилляторов реализуется при достижении величиной параметра однонаправленной связи определенного порогового значения. Установлено, что эффект ретрансляции структур затрудняется с увеличением расстройки по управляющим

параметрам взаимодействующих слоев и при введении помимо однонаправленной связи дополнительной обратной связи между слоями.

## **Достоверность полученных результатов**

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием строгих математических результатов, классических математических моделей нелинейной динамики, методов теоретического и численного анализа, строго обоснованных и многократно проверенных и протестированных в исследованиях по анализу нелинейных процессов в сложных системах. Достоверность результатов работы подтверждается их воспроизводимостью с использованием различных подходов и численных схем, соответствием с данными, полученными другими авторами, а также использованием специальных программных комплексов, разработанных и протестированных на широком классе задач нелинейной динамики.

## **Основные положения, выносимые на защиту**

1. При переходе от режима полной хаотической синхронизации к пространственно-временному хаосу с уменьшением бифуркационного параметра (силы нелокальной связи) от максимального значения до 0 в ансамблях хаотических осцилляторов с аттракторами негиперболического типа возникают два типа химерных структур: фазовые и амплитудные. Осцилляторы некогерентных кластеров фазовых химер характеризуются периодическими (или близкими к периодическим) колебаниями с нерегулярным в пределах кластера сдвигом фаз колебаний. Амплитудные химеры представляют собой отдельные группы осцилляторов в пространстве ансамбля с некоррелированными хаотическими колебаниями, то есть кластеры осцилляторов с некогерентной хаотической динамикой.



2. Переход от режима полной хаотической синхронизации к режиму пространственно-временного хаоса при уменьшении силы нелокальной связи от максимального значения до 0 в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов с квазигиперболическим типом аттрактора индивидуальных осцилляторов осуществляется, как правило, через режим уединенных состояний, число которых монотонно возрастает и при стремлении силы связи к нулю вызывает переход к режиму пространственно-временного хаоса.
3. Гипотеза, сформулированная В.С. Анищенко с соавторами [90], о невозможности реализации химерных состояний в ансамблях хаотических осцилляторов с квазигиперболическими аттракторами является справедливой в случае, если при наличии нелокальной связи между элементами ансамбля динамика индивидуального осциллятора соответствует режиму квазигиперболического хаоса. Изменение эффективных значений управляющих параметров индивидуальных осцилляторов ансамбля, обусловленное нелокальной связью, может привести к трансформации квазигиперболического аттрактора в негиперболический и в этом случае возможна реализация химерных состояний.
4. В ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов в режиме амплитудных химер реализуется эффект перемежаемости, который проявляется в нерегулярных переключениях во времени хаотических (амплитудная химера) и периодических колебаний (фазовая химера). Это явление наблюдается на конечном интервале времени и завершается переходом к режиму фазовой химеры. Фазовая химера является стационарной структурой. Амплитудная химера характеризуется нестационарностью динамики элементов и конечным временем жизни.
5. Путем внешних случайных возмущений как одиночных осцилляторов, так и всех осцилляторов ансамбля, можно управлять эффектом перемежаемо-

сти, а, следовательно, и временем жизни амплитудной химеры, в широких пределах.

6. Новый тип химерной структуры — «химеры уединенных состояний», обнаруженной при моделировании динамики системы двух связанных ансамблей из хаотических осцилляторов Лози и Эно, характеризуется сосуществованием в пространстве ансамбля некогерентного кластера (кластеров) осцилляторов в режиме уединенных состояний и когерентного кластера (кластеров) осцилляторов в режиме синхронных колебаний. Химера уединенных состояний является одной из типичных для ансамблей нелокально связанных осцилляторов различного типа и может быть реализована в изолированных ансамблях систем с дискретным и непрерывным временем.
7. Механизм рождения уединенных состояний и химеры уединенных состояний заключается в возникновении режима бистабильности в динамике индивидуальных осцилляторов ансамблей, обусловленного нелокальной связью. Бистабильность характеризуется сосуществованием двух притягивающих областей в пространстве состояний индивидуальных осцилляторов, отвечающих режимам уединенных состояний и когерентной динамики и имеющих свои бассейны притяжения.
8. При диссипативной связи между двумя ансамблями хаотических осцилляторов существуют области в пространстве параметров взаимодействующих систем, в которых наблюдаются эффекты вынужденной и взаимной синхронизации пространственно-временных структур, включая химерные. Установленные эффекты синхронизации могут считаться обобщением представлений классической теории синхронизации периодических автоколебаний на случай синхронизации пространственно-временных структур в системах связанных ансамблей взаимодействующих нелинейных осцилляторов.

9. Возможна эффективная синхронизация (синхронизация с заданной точностью) пространственных структур всех или части слоев неоднородной многослойной сети в режиме задающего слоя со сложной пространственно-временной динамикой (в химерном состоянии). Эффект ретрансляции задающей структуры затрудняется с увеличением расстройки слоев сети по управляющим параметрам и при введении помимо однонаправленной связи дополнительной обратной связи между слоями.

## Научная и практическая значимость

В диссертационной работе решена крупная научная задача в области радиофизики и нелинейной динамики, посвященная детальному анализу механизмов формирования, динамических и статистических свойств, так называемых химерных пространственно-временных структур в ансамблях взаимосвязанных хаотических осцилляторов различной природы. Результаты работы носят в основном фундаментально научный характер, расширяют и дополняют имеющиеся представления в актуальной области исследований, связанных с изучением закономерностей и свойств формирования пространственно-временных структур в ансамблях и сетях взаимодействующих нелинейных осцилляторов. В работе в качестве основных объектов исследований выбраны ансамбли нелокально связанных осцилляторов с хаотической динамикой индивидуальных элементов ансамблей, образование химерных структур в которых к настоящему времени было исследовано недостаточно.

Фундаментально важными с научной точки зрения являются полученные результаты сравнительного анализа динамики ансамблей из связанных осцилляторов с квазигиперболическим и негиперболическим типом аттракторов. Установлены условия, при которых в таких ансамблях химерные структуры не могут формироваться, и вскрыты причины возможного возникновения хи-

мерных структур за счет влияния нелокальной связи на характеристики индивидуальных осцилляторов. Показано, что химеры в таких ансамблях могут быть реализованы только в случае утраты аттрактором индивидуального осциллятора свойств квазигиперболичности. Всесторонне проанализирована динамика ансамблей связанных хаотических осцилляторов с негиперболическим типом хаотических аттракторов. Установлены механизмы формирования химер и обоснована их типичность. Выделены два различных типа химерных состояний, характерных для ансамблей хаотических осцилляторов — амплитудная и фазовая химеры, причем существование амплитудных химер в ансамблях хаотических осцилляторов было установлено впервые. Также был обнаружен новый тип сложной структуры, названный химерой уединенных состояний. Показано, что амплитудная химера в ансамбле хаотических осцилляторов является нестационарной и имеет конечное время жизни, которым можно управлять внешним шумовым возмущением. Приоритетным результатом является установление общего бифуркационного механизма рождения режимов уединенных состояний и химер на их основе. Режимы уединенных состояний наблюдались многими исследователями и применительно к широкому кругу различных ансамблей. Результаты диссертации вносят полную ясность в вопрос реализации таких состояний, которая до сих пор отсутствовала. Важным научным результатом работы является исследование вынужденной и взаимной синхронизации пространственно-временных структур в системах связанных ансамблей. Эти результаты находятся в качественном согласии с выводами классической теории синхронизации предельного цикла и в определенном смысле могут трактоваться как обобщение выводов этой теории на случай синхронизации сложных пространственно-временных структур, которыми являются химерные состояния.

Краткий анализ основных результатов диссертации свидетельствует о том, что полученные результаты существенно дополняют и расширяют име-

ющиеся представления современной теории колебаний и волн и могут быть использованы научной общественностью в дальнейших исследованиях.

Полученные результаты носят не только фундаментально научный характер, но имеют и существенное прикладное значение. Исследования формирования сложных структур и эффектов их синхронизации важны при моделировании и анализе процессов передачи информации в инфокоммуникационных системах, в том числе системах радиосвязи, радиолокации и радионавигации, при определении условий устойчивого функционирования энергосетей и систем жизнеобеспечения. Все эти системы представляют собой сложные многослойные сети с нелокальным характером взаимодействия, в которых возможно формирование кластерных структур. Большой интерес полученные результаты могут представлять в приложениях к анализу активности ансамблей нейронов и моделированию когнитивной деятельности головного мозга. Используемые в работе математические модели и численные методы их анализа во многом сходны с моделями, описывающими нейронную активность. Установленный в работе эффект перемежаемости для амплитудной химеры в автономном ансамбле нелокально связанных осцилляторов находится в качественном соответствии с экспериментами в нейродинамике. Данные анализа электроэнцефалограмм мозга человека показывают качественно аналогичную динамику нерегулярных во времени переключений между периодическими и хаотическими колебаниями во времени. Учитывая, что нейронные ансамбли мозга человека и животных функционируют в условиях достаточно интенсивных шумов, результаты управления временем жизни амплитудной химеры путем шумового возмущения могут быть использованы в нейродинамике. Основные результаты диссертационной работы внедрены и активно используются в учебной работе кафедры радиофизики и нелинейной динамики Саратовского госуниверситета при подготовке бакалавров и магистров по направлению «Радиофизика» и аспирантов по направлению «Физика и астрономия». В частности, результаты используются при чтении спецкурсов «Введение в нелинейную динамику», «Динамические системы

с дискретным временем», курса «Теория колебаний» для бакалавров направления «Радиофизика», курса «Избранные вопросы теории колебаний и волн» для магистров направления «Радиофизика», а также курса лекций «Дополнительные главы теории колебаний и волн» для аспирантов направления «Физика и астрономия», при подготовке курсовых, выпускных квалификационных работ и научно-исследовательских работ. Разработанные в процессе диссертационного исследования специальные компьютерные программы широко используются в специализированных учебных практикумах и научной работе студентов направлений «Радиофизика» и «Инфокоммуникационные технологии в системах связи», а также в исследованиях аспирантов кафедры радиофизики и нелинейной динамики.

## **Апробация результатов и публикации**

Результаты, представленные в диссертационной работы, неоднократно докладывались на всероссийских и международных конференциях, школах и семинарах:

- International Conference “Dynamics Days Europe”, Corfu, Greece, June 6–10, 2016; Rostock, Germany, September 2-6, 2019.
- 11 и 12 Международные школы-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур”, г. Саратов, 3-8 октября 2016; 1-6 октября 2019.
- “Saratov Fall Meeting”, Saratov State University, Saratov, 2016, 2018, 2019.
- The DPG Spring Meeting, Regensburg, Germany, April 1-5, 2019.
- International Conference on Control of Self-Organizing Nonlinear Systems, Warnemuende, Rostock, Germany, September 09-13, 2018.
- International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA 2018), Tarragona, Spain, September 2-6, 2018.
- VI и VII Международные научные конференции “Компьютерные науки и информационные технологии”, СГУ имени Н.Г. Чернышевского, 2016, 2018.

- Joint Meeting of the DPG and EPS Condensed Matter Divisions (DPG Spring Meeting-2018), Technical University at Berlin, Germany, March 11-16, 2018.
- XVIII Научная школа «Нелинейные волны-2018», Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород (ИПФ РАН), 26 февраля – 4 марта 2018.
- XV International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2017), Thessaloniki, Greece, September 25-30, 2017.
- Workshop on Control of Self-Organizing Nonlinear Systems, Lutherstadt Wittenberg, August 29-31, 2017.
- International Symposium “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics” (NWP-2017), Moscow – St. Petersburg, July 22-28, 2017.
- Ginzburg Centennial Conference on Physics, Moscow, May 29 – June 3, 2017.
- The SFB910 Symposium “Chaotic Dynamics”, Technical University at Berlin, Germany, November 25, 2016.
- International Workshop “Spatio-Temporal Structures in Ensembles of Interacting Oscillators”, Saratov State University, Saratov, September 14-16, 2016.
- International Conference-School “Dynamics, Bifurcations and Chaos 2016” (DBC III), Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, July 18-22, 2016.

Результаты работы также неоднократно обсуждались на научных семинарах кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ и Института теоретической физики Технического университета г. Берлина (Германия) по приглашению проф. E. Schöll и проф. А. Захаровой.

**Гранты.** Исследования, результаты которых вошли в настоящую диссертационную работу, проводились при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№14-52-12002, 15-02-02288), Министерства образования и науки в рамках базовой части Государственного задания (проекты №№2014/203, 3.8616.2017), Немецкого Физического Общества (DFG) в рамках проекта SFB 910 (подпроект B11, 2015–2022 гг.).

**Публикации.** Результаты диссертационной работы в центральных рецензируемых научных журналах, входящих в системы цитирования Web of Science, Scopus, РИНЦ, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук, среди которых CHAOS: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science [177, 336–341], Письма в журнал технической физики [342, 343], Известия вузов. Радиофизика [344], Physics Letters A [128], Chaos, Solitons & Fractals [172, 345], Nonlinear Dynamics [98], Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation [346], The European Physical Journal Special Topics [347], Regular and Chaotic Dynamics [348–350], Russian Journal of Nonlinear Dynamics [351], Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика [95, 174, 352], AIP Conference Proceedings [353], Proceedings of SPIE [354]. Всего по теме диссертации опубликована 31 статья, из которых 21 статья опубликована в журналах, индексируемых в базе данных Web of Science и Scopus, 5 статей – в трудах международных конференций. Получено 4 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [355–358]. Результаты диссертационной работы частично вошли в 3 монографии [61, 359, 360], одна из которых опубликована в издательстве Springer [360].

### **Личный вклад соискателя**

Результаты диссертационной работы получены соискателем лично, либо под его научным руководством. Из работ, опубликованных в соавторстве, в диссертацию включены результаты и положения, выносимые на защиту, полученные автором лично, либо при его непосредственном участии. Постановка цели и задач исследования осуществлялась автором при участии научного консультанта. Проведение исследований и расчетов, обработка, интерпретация и обсуждение результатов, написание научных статей осуществлялись в основном лично автором работы. Ряд работ, опубликованных в соавторстве с профессора-



ми В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасовой, E. Schöll, А. Захаровой, были выполнены в равных долях. К работе над задачами диссертации в качестве соавторов привлекались студенты кафедры (Е.В. Рыбалова, С.А. Богомолов, Д.Ю. Ключина, А.М. Пузанов, Т.Р. Богатенко), аспиранты (Н.И. Семенова, И.А. Шепелев, А.В. Бух) и сотрудники кафедры (доцент А.В. Слепнев). При этом постановка задач, обсуждение результатов и написание статей было выполнено лично автором.

## Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Диссертационная работа содержит 401 страницу текста, включая 148 иллюстраций. Список литературы включает 465 наименований.

Во **Введении** обоснована актуальность выбранной темы диссертационной работы, сформулированы цель работы и задачи исследований, описаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Введение содержит основные результаты и положения, выносимые на защиту, сведения о достоверности и апробации результатов.

В **первой главе** диссертационной работы приводятся результаты детального численного анализа перехода от режима полной хаотической синхронизации к пространственно-временному хаосу (переход «когерентность—некогерентность») в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов осцилляторов. Исследования проводились в рамках динамического и корреляционного описания пространственно-временной динамики ансамбля, включая формирование химерных состояний. В качестве характеристик режима использовались мгновенные профили, пространственно-временные профили и коэффициент взаимной корреляции колебаний различных элементов ансамбля. Последний может рассматриваться как универсальный количественный критерий согласованности поведения различных элементов ансамбля во времени и пространстве.

В разделе 1.2 и 1.3 представлен детальный анализ пространственно-временной динамики одномерного, замкнутого в кольцо ансамбля логистических отображений с нелокальной связью. Установлено, что при уменьшении значения силы нелокальной связи от 1 до 0 переход «когерентность—некогерентность» сопровождается возникновением химерных состояний, содержащих кластеры когерентности и некогерентности. Обнаружены два типа химерных структур, названные *фазовой* и *амплитудной* химерами. Фазовая химера была получена ранее [88], амплитудная химера найдена впервые. Приводится детальное описание механизмов возникновения, анализируется эволюция функции связи (и функции воздействия) и ее роль при формировании данных химерных состояний, формулируются условия для их реализации. Определяются и анализируются динамические и статистические свойства указанных химерных структур. Показано, что все осцилляторы кластера фазовой химеры демонстрируют периодическую во времени динамику, характеризующуюся случайным чередованием сдвига «фаз» колебаний элементов. В случае амплитудной химеры четко наблюдается хаотизация амплитуд в соответствующем некогерентном кластере. Корреляционные характеристики указанных химерных структур анализировались на основе расчетов коэффициента взаимной корреляции (КВК). Результаты исследований показали качественные и количественные различия в значениях КВК для фазовой и амплитудной химер. Установлено, что в областях пространственной некогерентности фазовой химеры имеют место скачки КВК между значениями  $\pm 1$ . В силу хаотичности динамики осцилляторов кластера амплитудной химеры имеет место заметный спад пространственной корреляции.

Существование фазовой и амплитудной химерных состояний и общность их свойств подтверждается приведенным анализом и описанием пространственно-временной динамики ряда ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов, в которых парциальные (индивидуальные) элементы двумерным отображением Эно (раздел 1.4) и трехмерной дифференциаль-

ной системой Анищенко—Астахова (раздел 1.5). Отметим, что в указанных системах, включая логистическое отображение, переход к хаосу происходит через каскад бифуркаций удвоения периода, а возникающий хаотический аттрактор относится к негиперболическому типу.

На основе результатов исследований, описанных в первой главе диссертационной работы, можно заключить, что установленный бифуркационный переход «когерентность—некогерентность», сопровождающийся возникновением фазовых и амплитудных химерных состояний, является общим для ансамблей нелокально связанных хаотических систем с удвоением периода.

**Вторая глава** диссертационной работы посвящена изложению результатов численного анализа пространственно-временной динамики ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов, локальная динамика которых описывается хаотическими системами с квазигиперболическими аттракторами. В качестве объектов исследований выбраны ансамбли отображений Лози и систем Лоренца.

В разделе 2.2 работы рассматривается ансамбль (кольцо) нелокально связанных идентичных отображений Лози. Показано, что при уменьшении силы нелокальной связи от 1 до 0 в ансамбле реализуются режимы, для которых характерны резкие выбросы амплитуд для отдельных осцилляторов ансамбля. Эти выбросы происходят случайным образом, а сами осцилляторы располагаются в различных частях пространства ансамбля. Подобные режимы в литературе были названы *уединенными состояниями* (*solitary states* [62]). Сначала в ансамбле возникает только одно уединенное состояние, число которых увеличивается с уменьшением силы нелокальной связи. Временная динамика осцилляторов в режиме уединенных состояний отличается от поведения во времени других осцилляторов ансамбля, которые могут находиться либо в когерентном режиме, либо быть полностью синхронизованными. В отличие от химерного состояния, осцилляторы в режиме уединенные состояния не формируют кла-

стеров некогерентности с четкими границами в пространстве ансамбля, а число таких осцилляторов довольно сильно зависит от величины связи.

Таким образом, установлено, что переход к режиму полной некогерентности в ансамбле нелокально связанных отображений Лози при уменьшении силы нелокальной связи происходит через последовательное увеличение числа осцилляторов в режиме уединенных состояний, число которых растет практически линейно с уменьшением силы связи. При этом возникновения химерных состояний не наблюдалось. Показано, что переход осциллятора ансамбля отображений Лози в режим уединенного состояния диагностируется по наличию выброса амплитуды переменной состояния на мгновенном пространственном профиле и по аналогичному выбросу (изменению) значения КВК, что свидетельствует об отсутствии корреляции между рассматриваемыми осцилляторами. При стремлении силы связи к нулю, влияние соседних осцилляторов исчезает, и ансамбль представляет собой совокупность несвязанных индивидуальных отображений Лози в хаотическом режиме.

В разделе 2.3 приводятся результаты анализа пространственно-временных структур в кольце связанных систем Лоренца, реализуемых при слабой нелокальной связи. Впервые показано, что даже в случае, когда индивидуальные элементы в отсутствии взаимодействия находятся в режиме, соответствующем квазигиперболическому аттрактору Лоренца, помимо уединенных состояний в ансамбле могут наблюдаться химерные состояния различных типов и эффекты перемежаемости между различными режимами функционирования элементов как во времени, так и пространстве. Установлено теоретически и подтверждено численно, что изменение силы нелокальной связи может приводить к сдвигу эффективных значений управляющих параметров, в результате которого индивидуальная система Лоренца приобретает свойства бистабильности. При этом динамика индивидуальных осцилляторов меняется и они переходят в режим негиперболического хаоса. Вследствие этого реализуется возможность наблюдать режимы химерных состояний различного типа. Подробно описаны

режимы сосуществования химерных структур и пространственно-временной перемежаемости.

Представленные во второй главе результаты свидетельствуют о том, что режимы уединенных состояний являются типичными и реализуются при переходе к режиму полной некогерентности в ансамблях нелокально связанных хаотических систем, индивидуальные элементы которых характеризуются хаотическими аттракторами квазигиперболического типа. Подтверждена и уточнена гипотеза [90] о невозможности реализации химерных состояний в ансамблях хаотических осцилляторов с квазигиперболическими аттракторами индивидуальных осцилляторов (в отсутствие связей). Однако, данный вывод является справедливым в случае, если при наличии нелокальной связи между элементами ансамбля хаотический аттрактор индивидуального осциллятора остается квазигиперболическим. В случае потери свойств гиперболичности хаотическим аттрактором, в ансамблях нелокально связанных хаотических систем возможна реализация химерных структур различного типа.

В **третьей главе** диссертационной работы описываются особенности динамики во времени фазовой и амплитудной химерных состояний и анализируется влияние шумового воздействия на данные структуры. Показано, что установленные свойства являются типичными для данных химерных структур и проявляются при исследовании динамики различных ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов с удвоением периода.

В разделе 3.2 на примере анализа эволюции химерных структур в одномерном ансамбле нелокально связанных логистических отображений показано, что фазовая химера, осцилляторы которой характеризуются периодической во времени динамикой, представляет собой установившийся и устойчивый во времени режим функционирования ансамбля. Во временной реализации осциллятора из некогерентного кластера амплитудной химеры наблюдаются нерегулярные переключения во времени между хаотическими и периодическими колебаниями, что свидетельствует о нестационарной временной динамике ос-

циллятора. Установленный процесс нерегулярных переключений напоминает эффект перемежаемости, известный из теории динамического хаоса как один из сценариев его развития.

Процесс перемежаемости и конечное время жизни характерны и для некогерентного кластера амплитудной химеры в целом, что подтверждается результатами исследований эволюции во времени некогерентных кластеров амплитудных химер, приведенными как для случая ансамбля логистических отображений (раздел 3.2), так и для отображений Эно (раздел 3.3). Изменения во времени мгновенных пространственных профилей динамики ансамбля отражают нестационарную динамику некогерентных кластеров амплитудной химеры. Отметим, что переключения между режимами происходят нерегулярно во времени. Спустя определенное число итераций амплитудная химера исчезает и в ансамбле остается только фазовая химера. Таким образом, амплитудная химера характеризуется конечным временем жизни. В то же время некогерентные кластеры фазовой химеры не претерпевают изменений, а осцилляторы из этих кластеров демонстрируют стационарные периодические колебания. Расчеты свидетельствуют, что фазовая химера является долгоживущей структурой.

В разделе 3.4 впервые приводятся результаты численного статистического анализа влияния глобального (на все элементы ансамбля) и целенаправленного (действующего только на элементы некогерентных кластеров) кратковременного аддитивного шумового воздействия на фазовые и амплитудные химеры в ансамблях нелокально связанных логистических отображений и отображений Эно. Показано, что фазовые химерные состояния являются устойчивыми по отношению к шумовым воздействиям. Постоянно действующий на систему с установившейся фазовой химерой шум не индуцирует возникновения новых режимов и структур, а ведет лишь к зашумлению мгновенных пространственных профилей. При этом возрождения некогерентного кластера амплитудной химеры не наблюдается. Кратковременное (в течение одной итерации) воздействие локализованного или глобального источника шума индуцирует восстановление

режима амплитудных химер, а, следовательно, и процесса перемежаемости во времени. Кроме того, время жизни амплитудных химерных состояний может быть увеличено в численных экспериментах до сколь угодно больших величин. Если единичные возмущения вводить в элементы всего ансамбля постоянно с некоторыми интервалами во времени, то нерегулярные переключения между режимами амплитудной и фазовой химер будут наблюдаться бесконечное время. Таким образом, показана возможность управления временем жизни амплитудных химер или длительностью процесса перемежаемости путем шумового возмущения.

В **четвертой главе** диссертационной работы приводятся результаты численных исследований пространственно-временной динамики системы двух связанных одномерных ансамблей (колец) хаотических систем с нелокальной связью. Каждый из ансамблей имеет топологию кольца, включает одинаковое число элементов и характеризуется нелокальной связью между индивидуальными осцилляторами. Связь между одномерными ансамблями является локальной и симметричной, то есть  $i$ -й элемент первого ансамбля связан с  $i$ -м элементом второго с коэффициентом связи. Подобная топология связи между ансамблями называется мультиплексной. Функции связи в рассматриваемой системе задают тип межслойной связи, которая может быть диссипативной или инерционной.

В результате проведенных исследований продемонстрирована возможность реализации в каждом из рассматриваемых ансамблей пространственно-временных структур, которые не наблюдались в них без взаимодействия. В разделе 4.2 показано, что в результате введения взаимной диссипативной или инерционной межслойной связи в ансамбле нелокально связанных отображений Эно возможна реализация режимов уединенных состояний и бегущих волн, а в ансамбле отображений Лози — режимов фазовой и амплитудной химерных состояний. Было также показано, что при малой величине силы диссипативной или инерционной связи между ансамблями, в ансамбле отображений Эно возникает новый тип химерной структуры, названный *химерой уединенных со-*

*стояний* (*solitary state chimera*), в то время как ансамбль отображений Лози находится в режиме уединенных состояний. Некогерентный кластер данной структуры состоит только из осцилляторов в режиме уединенного состояния и локализован в пространстве ансамбля.

Результаты численных исследований, изложенные в разделе 4.3 диссертационной работы, продемонстрировали возможность реализации химеры уединенных состояний в изолированном ансамбле отображений Эно как в случае воздействия мультипликативным шумом на коэффициент нелокальной связи в ансамбле, так и в условиях отсутствия шумового возмущения. Было установлено, что механизм возникновения режима уединенных состояний и химеры уединенных состояний связан с появлением бистабильности в динамике индивидуальных осцилляторов ансамбля, обусловленной нелокальной связью индивидуальных осцилляторов с конечным числом соседей, что аналогично воздействию «внешних» сигналов. Бистабильность характеризуется сосуществованием двух изолированных аттракторов, соответствующих режиму уединенных состояний и когерентной динамике и имеющих свои бассейны притяжения. При случайном характере задания начальных условий часть осцилляторов попадает в бассейн притяжения одного аттрактора, а часть — в область притяжения второго, что и приводит к возможности возникновения как уединенных состояний, так и соответствующих химерных структур. Проведенные численные исследования показали, что рождение режимов бистабильности не является следствием воздействия шума, а обусловлены влиянием нелокальной связи.

Установленный механизм рождения уединенных состояний и химеры уединенных состояний в изолированном ансамбле отображений Эно полностью согласуется с данными, представленными в работе [418] для ансамбля нелокально связанных отображений Лози и кратко изложенными в разделе 4.4.

В разделе 4.5 диссертационной работы общность установленного механизма подтверждается на примерах реализации режимов уединенных состояний и



химеры уединенных состояний в ансамблях нелокально связанных моделей нейрона: отображений Некоркина и осцилляторов ФитцХью–Нагумо.

**Пятая глава** диссертационной работы посвящена изложению результатов исследования эффектов вынужденной и взаимной синхронизации пространственно-временных структур, включая химерные структуры различного типа, в двух связанных одномерных ансамблях логистических отображений с нелокальной связью. Рассмотрены случаи диссипативного и инерционного типов связи между ансамблями. Для количественной оценки степени идентичности структур в режиме синхронизации и расчета областей синхронизации на плоскости управляющих параметров системы использовались коэффициент взаимной корреляции (КВК) между симметричными осцилляторами взаимодействующих ансамблей и среднеквадратичные отклонения значений переменных соответствующих осцилляторов по времени и по ансамблю. В случае полной синхронизации (полной идентичности пространственно-временных структур ансамблей) величины КВК равны 1, а среднеквадратичных отклонений — нулю для всех элементов мультиплексной системы.

В пятой главе диссертационной работы подробно описаны результаты исследований эффектов вынужденной и взаимной синхронизации в случае идентичных ансамблей, при введении расстройки по управляющим параметрам и параметрам нелокальной связи, а также для диссипативного и инерционного типов связи между ансамблями. Выводы о реализации эффектов синхронизации подтверждаются выполнением двух условий: идентичности колебательных процессов соответствующих осцилляторов ансамбля и наличием конечной области (области синхронизации) на плоскости параметров системы, в которой первое условие выполняется. Исследования показали, что при выеужденной синхронизации пространственно-временная структура управляющего ансамбля «захватывает» структуру управляемого ансамбля и идентичные структуры сохраняются в области синхронизации. При взаимной синхронизации реализуется взаимозахват структур во взаимодействующих ансамблях. При этом синхрон-

ные структуры отличаются от исходных структур в ансамблях в отсутствие связи. Эффекты вынужденной и взаимной синхронизации в исследуемых ансамблях наблюдаются в конечных областях синхронизации, что подтверждено расчетами областей синхронизации на плоскости различных параметров рассматриваемых систем количественных характеристик степени синхронизации.

В результате проведенного анализа установлено качественное соответствие результатов по исследованию эффектов синхронизации пространственно-временных структур, включая химерные, с выводами классической теории синхронизации периодических автоколебаний. Это позволяет рассматривать результаты, полученные в диссертационной работе, как обобщение представлений о классическом явлении синхронизации периодических автоколебаний на случай синхронизации пространственно-временных структур в системах связанных ансамблей нелокально взаимодействующих нелинейных осцилляторов.

В **шестой главе** диссертационной работы показана возможность передачи (ретрансляции) выбранной химерной структуры в многослойной (мультиплексной) сети от одного слоя к другому и установлены условия такой передачи с минимальными изменениями данной структуры. Рассматриваемая сеть с открытыми концами состоит из 20 слоев (колец нелокально связанных осцилляторов) и первый слой является задающим. Локальная динамика индивидуальных элементов определялась логистическими отображениями двух видов и кубическим отображением. В качестве передаваемой (задающей) структуры в первом слое выбиралась химерная структура различного типа. Рассмотрены случаи однонаправленного взаимодействия слоев в случае их идентичности, полной неоднородности взаимодействующих слоев, а также случай наличия несимметричной взаимной связи между слоями, включающей неоднородную однонаправленную компоненту и компоненту неоднородной обратной связи, которые не равны между собой. Под обратной связью в данном случае понимается воздействие последующего слоя сети на предыдущий.

В разделе 6.2 диссертационной работы установлено, что при увеличении силы однонаправленной связи и при наличии слабой расстройки параметров первого (задающего) слоя от параметров остальных слоев имеет место вынужденная синхронизация химерных структур во всех слоях. Для количественной оценки степени синхронности структур в различных слоях к задающей структуре использован среднеквадратичное отклонения структуры  $i$ -го слоя от задающей структуры по времени и по ансамблю. Проведен численный анализ влияния расстройки по радиусу и силе нелокальной связи между первым слоем и всеми остальными слоями сети. Показано, что химерная структура, устанавливающаяся в первом слое, передается от слоя к слою с малыми искажениями, величина которых определяется величиной расстройки параметров.

В разделе 6.3 диссертационной работы показана возможность ретрансляции комбинированной химерной структуры в рассматриваемой мультиплексной сети в присутствии неоднородностей по различным параметрам и при наличии обратной связи. Степень синхронизации структур в различных слоях по отношению к задающему слою определялась по максимальному среднеквадратичному (по времени) отклонению мгновенных состояний элементов в рассматриваемом слое относительно состояний соответствующих элементов первого слоя.

Показано, что эффект вынужденной синхронизации многослойной сети в режиме комбинированной химерной структуры характеризуется различием в порогах синхронизации для кластеров некогерентности фазовой и амплитудной химер. Данный факт подтверждается построением диаграмм синхронных и несинхронных режимов в рассматриваемой сети при вариации величины однонаправленной межслойной связи и при наличии неоднородности слоев сети. Установлено, что одинаковая по величине неоднородность различных параметров сети по-разному влияет на возможность вынужденной синхронизации. Расстройка значений параметров, управляющих динамикой индивидуальных элементов, оказывается гораздо разрушительнее для синхронизации, чем аналогичная расстройка по силе нелокальной связи внутри слоев. Проведенный ана-

лиз показал, что наличие обратной компоненты взаимодействия между слоями, кроме первого, оказывает довольно существенное влияние на эффект вынужденной синхронизации всех слоев сети.

В **Заключении** подведены итоги диссертационной работы, сформулированы основные результаты и выводы.

# Глава 1. Механизмы возникновения, структура и свойства фазовой и амплитудной химер в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов

## 1.1 Введение

Свойства перехода к режиму химерных состояний в ансамбле нелокально связанных хаотических систем впервые были описаны в работах [88, 96], в которых выявлены важные закономерности исследуемого перехода. Тем не менее, остаются нерешенными проблемы относительно новых возможных типов химерных структур, механизмов их рождения и свойств в таких ансамблях и не проанализирована роль функции или слагаемого связи (то есть совокупного воздействия соседних осцилляторов на конкретный осциллятор ансамбля) в образовании химерных структур.

Химерные состояния или «хаотические» химеры, которые возникают в ансамблях нелокально связанных хаотических систем, являются нетривиальным образованием со сложным распределением некогерентных кластеров в пространстве и их динамики во времени. Исследование эволюции таких сложных пространственно-временных структур путем лишь наблюдения за изменением пространственных профилей состояний ансамбля оказывается явно недостаточным. Для анализа и описания специфических структур, таких как химерные состояния, требуется проводить не только качественный, но и количественный анализ с привлечением ряда различных методов и количественных характеристик. В частности, при исследовании ансамбля связанных фазо-

вых осцилляторов чаще всего используется индекс или коэффициент фазовой синхронизации [361]. В случае ансамблей дискретных хаотических осцилляторов эта характеристика не всегда применима. Для таких систем наиболее подходящим и конструктивным является использование корреляционного подхода [60, 61, 360, 364, 366]. Так, одной из важных характеристик пространственно-временной динамики ансамбля взаимосвязанных осцилляторов является взаимная корреляция колебаний различных элементов ансамбля. На сегодняшний день, корреляционный подход к исследованию химер практически не применялся. Исключение составляет работа [156], в которой использовались некоторые усредненные по ансамблю характеристики взаимной корреляции элементов. Полученные при этом количественные показатели были использованы для классификации химерных состояний. Тем не менее, классификация химерных структур требует, прежде всего, определения их качественных и количественных различий и должна быть основана на анализе бифуркационных механизмов их формирования с привлечением статистического анализа. Пока такие исследования проведены далеко не полностью.

В первой главе диссертационной работы приводятся результаты детального численного анализа перехода от режима полной хаотической синхронизации к пространственно-временному хаосу (переход «когерентность–некогерентность») в ансамбле нелокально связанных логистических отображений в хаотическом режиме. Исследования проводились в рамках динамического и корреляционного описания пространственно-временной динамики ансамбля, включая формирование химерных состояний. В качестве характеристик режима использовались мгновенные профили, пространственно-временные профили и коэффициент взаимной корреляции колебаний различных элементов ансамбля. Последний может рассматриваться как универсальный количественный критерий согласованности поведения различных элементов ансамбля во времени и пространстве.

Путем анализа пространственной и временной динамики ансамбля и функции связи при рассмотрении перехода «когерентность—некогерентность» выявлена возможность рождения химерных состояний двух типов: фазовых и амплитудных. В данной главе описываются механизмы их возникновения, анализируется эволюция функции связи и ее роль при формировании данных химерных состояний, формулируются условия для их реализации. Иллюстрируются структуры фазовой и амплитудной химер, определяются и анализируются их отличительные особенности и основные свойства. Существование фазовой и амплитудной химерных состояний и общность их свойств подтверждается приведенным анализом и описанием пространственно-временной динамики ряда ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов, в которых парциальные (индивидуальные) элементы описываются логистическим отображением, двумерным отображением Эно и трехмерной дифференциальной системой Анищенко—Астахова. Данные модели хаотических осцилляторов хорошо известны и широко используются в нелинейной динамике и радиофизике. Важно отметить, что в указанных системах переход к хаосу происходит через каскад бифуркаций удвоения периода [60, 61, 360, 362–366], а возникающий хаотический аттрактор относится к негиперболическому типу или, следуя терминологии Афраймовича и Шильникова, «квазиаттракторам» [367–369]. Негиперболический аттрактор теоретически включает в себя бесконечное множество регулярных устойчивых по Ляпунову и хаотических подмножеств, реализация которых зависит от начальных условий. Таким образом, имеет место мультистабильность. Более того, при малом изменении управляющих параметров системы квазиаттракторы демонстрируют множество внутренних бифуркаций как регулярных, так и хаотических подмножеств, существующих в области квазиаттрактора.

Результаты численных исследований, изложенные в первой главе, опубликованы в работах [336, 342–344, 346–348, 370–373].

## 1.2 Переход «когерентность–некогерентность» в ансамбле нелокально связанных логистических отображений

### 1.2.1 Модель, методы исследования и диаграммы режимов

Предметом анализа является пространственно-временная динамика одномерного, замкнутого в кольцо ансамбля идентичных хаотических отображений с нелокальной связью, описываемого следующими уравнениями:

$$x_i^{t+1} = f(x_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t) - f(x_i^t)], \quad (1.1)$$

где  $x$  – динамическая переменная,  $i = 1, 2, \dots, N$  – порядковый номер осциллятора, который можно рассматривать как дискретную пространственную координату,  $N$  – число осцилляторов в ансамбле, которое выбирается равным 1000 элементам,  $t$  обозначает дискретное время (номер итерации),  $P$  задает число соседних осцилляторов, с которыми связан  $i$ -й осциллятор с каждой стороны,  $\sigma$  – коэффициент или сила связи  $i$ -го элемента с  $P$  соседями. Схема исследуемого ансамбля с топологией кольца и нелокальными связями между индивидуальными элементами приведена на рисунке 1.1.

Динамика всех осцилляторов описывается отображением, задаваемым функцией последования вида  $f(x) = \alpha x(1 - x)$ . Это – классическое логистическое отображение, являющееся одной из фундаментальных моделей нелинейной динамики, в котором переход к хаосу происходит через каскад бифуркаций удвоения периода [362]. Осцилляторы исследуются при фиксированном значении параметра  $\alpha = 3.8$ , что соответствует режиму развитого динамического хаоса в индивидуальном элементе с положительным значением показателя Ля-



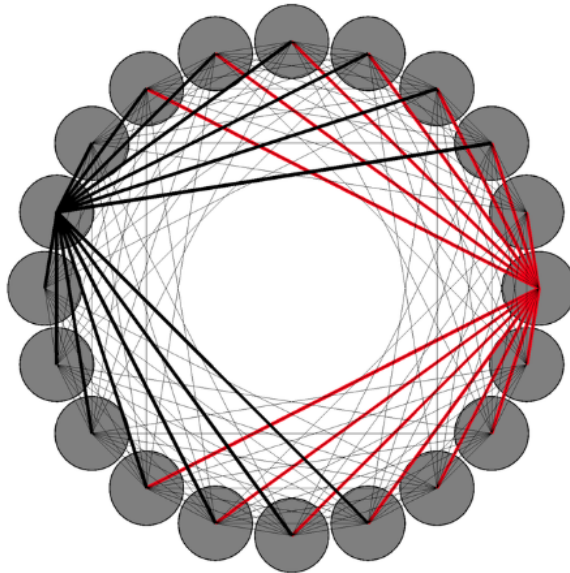


Рисунок 1.1. Схема одномерного, замкнутого в кольцо ансамбля нелокально связанных идентичных осцилляторов. Серые кружки соответствуют осцилляторам ансамбля, каждый из которых связан со своими ближайшими  $P$  соседями с каждой стороны (связи показаны черными, красными и серыми линиями)

пунова. В качестве бифуркационных параметров ансамбля (1.1) выбираются сила связи  $\sigma$  и радиус связи  $r = P/N$ .

Второе слагаемое в (1.1) отражает интенсивность связи и характеризует суммарное или совокупное воздействие соседних осцилляторов на конкретный  $i$ -й осциллятор ансамбля:

$$F_i = \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t) - f(x_i^t)]. \quad (1.2)$$

Для удобства изложения будем называть  $F_i$  *функцией связи*.

В силу выбранной топологии кольца, граничные условия являются периодическими, то есть  $x_{N+1}^t = x_1^t$ . Рассматриваемый ансамбль состоит из идентичных элементов и характеризуется кольцевой симметрией. Соответственно, при одинаковых начальных условиях динамический режим всегда будет соответствовать полной синхронизации всех элементов ансамбля. В проводимых исследованиях начальные условия  $x_i^0$  выбирались случайным образом распре-

деленными в интервале  $0 < x_i^0 < 1.0$ ,  $i = 1, 2, \dots, 1000$ . Подобный выбор начальных условий является наиболее приближенным к реальным условиям и ситуациям и существенно отличает данное исследование от представленного в работах [88, 96], в которых были использованы специально подготовленные начальные условия.

Численный анализ динамики всего ансамбля (1.1) и поведения функции связи (1.2) проводится с использованием различных характеристик режимов. В работах, посвященных исследованию химерных состояний, главным образом приводятся и анализируются мгновенные пространственные профили, показывающие значения всех динамических переменных  $x_i$  в фиксированный момент времени. Для более наглядного и полного представления как пространственной, так и временной динамики элементов ансамбля, в настоящей работе также используется метод построения так называемых *пространственно-временных профилей*, впервые введенных в работе [346]. Для каждого индивидуального элемента ансамбля  $i = 1, \dots, N = 1000$  на график выводятся последние 50–100 итераций  $x_i^t$  и  $F_i$ . Этот метод позволяет диагностировать тип колебаний (периодический или хаотический), определять период колебаний и режимы синхронизации (десинхронизации) элементов ансамбля. Отметим, что для численного анализа режимов динамики ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов выбирается достаточно большое время расчета (наблюдения) порядка  $t = 10^4 \div 10^8$  итераций (в зависимости от рассматриваемой системы и/или поставленной задачи), без учета времени установления (переходного процесса)  $t = 5 \times 10^3$  итераций.

Для анализа пространственной когерентности используется коэффициент взаимной корреляции колебаний (КВК) различных элементов ансамбля [336]. Будем рассматривать первый и  $i$ -й элементы в один и тот же момент времени. Для них КВК определяется по формуле:

$$R_{1i} = \frac{\langle \tilde{x}_1^t \tilde{x}_i^t \rangle}{\sqrt{\langle (\tilde{x}_1^t)^2 \rangle \langle (\tilde{x}_i^t)^2 \rangle}}, \quad (1.3)$$

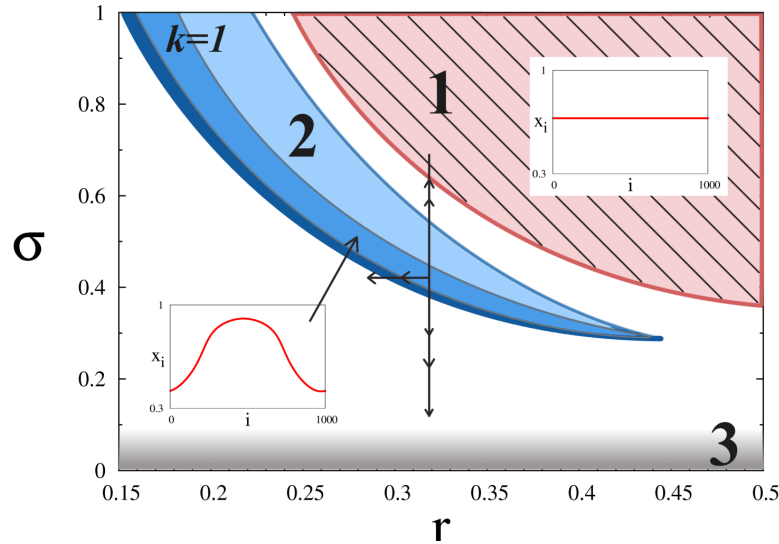


Рисунок 1.2. Фрагмент бифуркационной диаграммы ансамбля (1.1) на плоскости параметров  $(r, \sigma)$ . Область 1 отвечает полной хаотической синхронизации всех элементов ансамбля (см. вставку в области 1). Область 2 когерентной динамики отвечает регулярным колебаниям элементов с периодом  $2^l$  ( $l = 1, 2, 3$ ) и характеризуется волновым числом  $k = 1$  (см. вставку внизу слева). В области 3 реализуется режим пространственно-временного хаоса (асинхронная динамика) элементов ансамбля. Линия со стрелками показывает движение на плоскости параметров при проводимых расчетах. Параметры системы:  $a = 3.8$ ,  $N = 1000$

где  $\tilde{x}^t = x^t - \langle x^t \rangle$  — флуктуация относительно среднего значения, где  $t = 1, 2, \dots$  — дискретное время. Скобки  $\langle \dots \rangle$  обозначают усреднение по времени. При наличии перемешивания в режиме хаотической динамики процесс колебаний можно считать эргодическим. В этом случае усреднение по времени эквивалентно усреднению по ансамблю реализаций.

На рисунке 1.2 приведен фрагмент бифуркационной диаграммы на плоскости параметров  $(r, \sigma)$ , построенной численно для системы (1.1) [88, 96, 346]. Диаграмма отражает наличие области полной хаотической синхронизации (область 1), области периодической динамики (область 2) и области асинхронных хаотических колебаний всех элементов ансамбля (область 3). Область 1 ограни-

чена линией бифуркации прорыва (blowout bifurcation). Эта бифуркация в системах двух взаимодействующих идентичных осцилляторов и сопровождающие ее эффекты исследовались во многих работах (например, [374–379]), однако для распределенных ансамблей с нелокальным взаимодействием она практически не рассматривалась. На этой бифуркационной линии происходит разрушение режима полной хаотической синхронизации, которое диагностируется по знаку наибольшего трансверсального показателя Ляпунова для предельного множества, принадлежащего симметричному инвариантному многообразию [61]. Если показатель становится положительным, то предельное множество (синхронное состояние) теряет свою устойчивость и все многообразие перестает быть устойчивым. Положение линии бифуркации прорыва на плоскости параметров  $(r, \sigma)$ , а, следовательно, и размер области полной хаотической синхронизации, зависит от локальной динамики элементов ансамбля (1.1), то есть от значения управляющего параметра  $a$  логистического отображения. Как было показано в [96], при увеличении параметра  $a$  бифуркационная линия смещается в сторону больших значений параметров связи  $r$  и  $\sigma$ , а размер самой области синхронизации существенно уменьшается.

Бифуркационные линии в области 2 на диаграмме рис. 1.2 характеризуют переходы от периодических колебаний во времени с периодом 2 к колебаниям с периодами 4 и 8 (при движении по параметру  $\sigma$  сверху вниз). Будем использовать терминологию, введенную в работах [88, 96]. Тогда области 1 и 2 на диаграмме рисунка 1.2 соответствуют «областям когерентности» с гладкими мгновенными пространственными профилями. Этот профиль в общем случае характеризуется некоторым числом максимумов, которое определяет «волновое число»  $k$ . Областям 1 и 2 на диаграмме рисунка 1.2 отвечают волновые числа  $k = 0$  и  $k = 1$ , соответственно. В соответствии с работами [88, 96] колебания элементов ансамбля считаются когерентными, если выполняется условие

$$|x_i^t - x_{i+1}^t| < \delta, \quad \delta \ll 1, \quad t = \text{const} \gg 1, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.4)$$

Таким образом, если мгновенное распределение значений динамических переменных вдоль ансамбля (мгновенный пространственный профиль) представляет собой гладкую, медленно меняющуюся в пространстве функцию, то можно говорить о когерентном состоянии ансамбля. Наглядной иллюстрацией данного факта является профиль, приведенный на нижней левой вставке рисунка 1.2 и отражающий режим когерентной динамики в области 2. Режиму строгой когерентности должно отвечать условие  $|x_i^t - x_{i+1}^t| = 0$  (см. вставку на рисунке 1.2 в верхнем правом углу).

В областях белого цвета на рисунке 1.2 наблюдаются сложные колебательные режимы и их бифуркации, включая появление химерных состояний.

Если рассмотреть динамику ансамбля (1.1) при уменьшении радиуса связи  $r < 0.15$ , то на плоскости параметров  $(r, \sigma)$  имеют место дополнительные узкие области когерентной динамики с волновыми числами  $k = 2, 3$  и более [88, 96]. Таким образом, наблюдается каскад бифуркаций добавления периода в пространстве. Эти области имеют вид, подобный области 2 на рисунке 1.2, и внутри них также наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода колебаний индивидуальных элементов во времени.

Как видно из рисунка 1.2, с уменьшением коэффициента связи от значения  $\sigma = 1$  до значения  $\sigma < 0.1$  в системе (1.1) реализуется глобальный переход от режима полной когерентности (полной хаотической синхронизации) к режиму полной некогерентности или пространственно-временному хаосу.

Детальный анализ и описание перехода «когерентность–некогерентность» в ансамбле (1.1) проводится при фиксированном значении радиуса связи  $r = 0.32$  и при вариации силы (коэффициента) связи  $\sigma$  в интервале  $[0, 0.7]$ . Указанное значение  $r$  было выбрано исходя из того факта, что в этом сечении и при уменьшении силы связи  $\sigma$  хорошо наблюдается появление химерного состояния, как это было впервые показано в работах [88, 96].

Для более глубокого понимания динамических процессов, происходящих в ансамбле (1.1), рассмотрим фазо-параметрическую диаграмму при переходе

от когерентной к некогерентной динамике для выбранного элемента ансамбля  $i = 500$ . С этой целью рассчитывается зависимость переменной  $x_{500}$  от времени  $t$  при вариации коэффициента связи при фиксированном значении радиуса связи  $r = 0.32$  и для каждого значения коэффициента связи (с заданным шагом) выводится 100 последних значений переменной  $x_i$ . Начальные условия выбирались случайно распределенными в интервале  $0 < x_i^0 < 1$  и данная реализация фиксировалась для всех последующих вычислений. Полученная диаграмма приведена на рисунке 1.3.

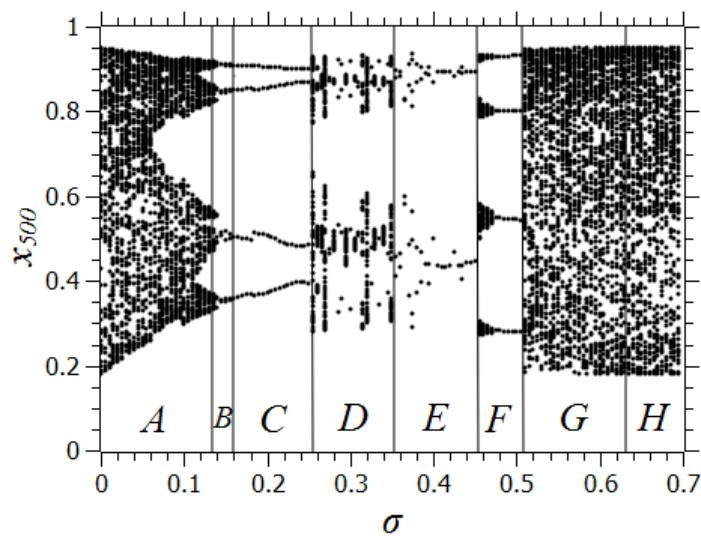


Рисунок 1.3. Зависимость множества значений переменной  $x_i$  элемента  $i = 500$  от величины коэффициента связи  $\sigma$  при  $r = 0.32$ . На график выведены значения  $x_i$  для 100 итераций системы (1.1) после периода установления

Отметим, что результаты, представленные на рисунке 1.3, будут несколько различаться для различных элементов ансамбля и различных начальных условий. Однако качественно области с различными типами колебаний при вариации  $\sigma$  сохраняются. На рисунке 1.3 буквами  $A, B, C, \dots$  обозначена последовательность режимов колебаний, реализуемых в ансамбле (1.1) при вариации коэффициента связи  $\sigma$ . Область  $D$  отвечает существованию химерных состояний.

## 1.2.2 Режим полной хаотической синхронизации

Начнем численный анализ динамики ансамбля (1.1) с рассмотрения области  $H$  на рисунке 1.3 (она же область 1 на рисунке 1.2), соответствующей полной хаотической синхронизации ( $\sigma \geq 0.63$ ). Результаты расчетов представлены на рисунке 1.4.

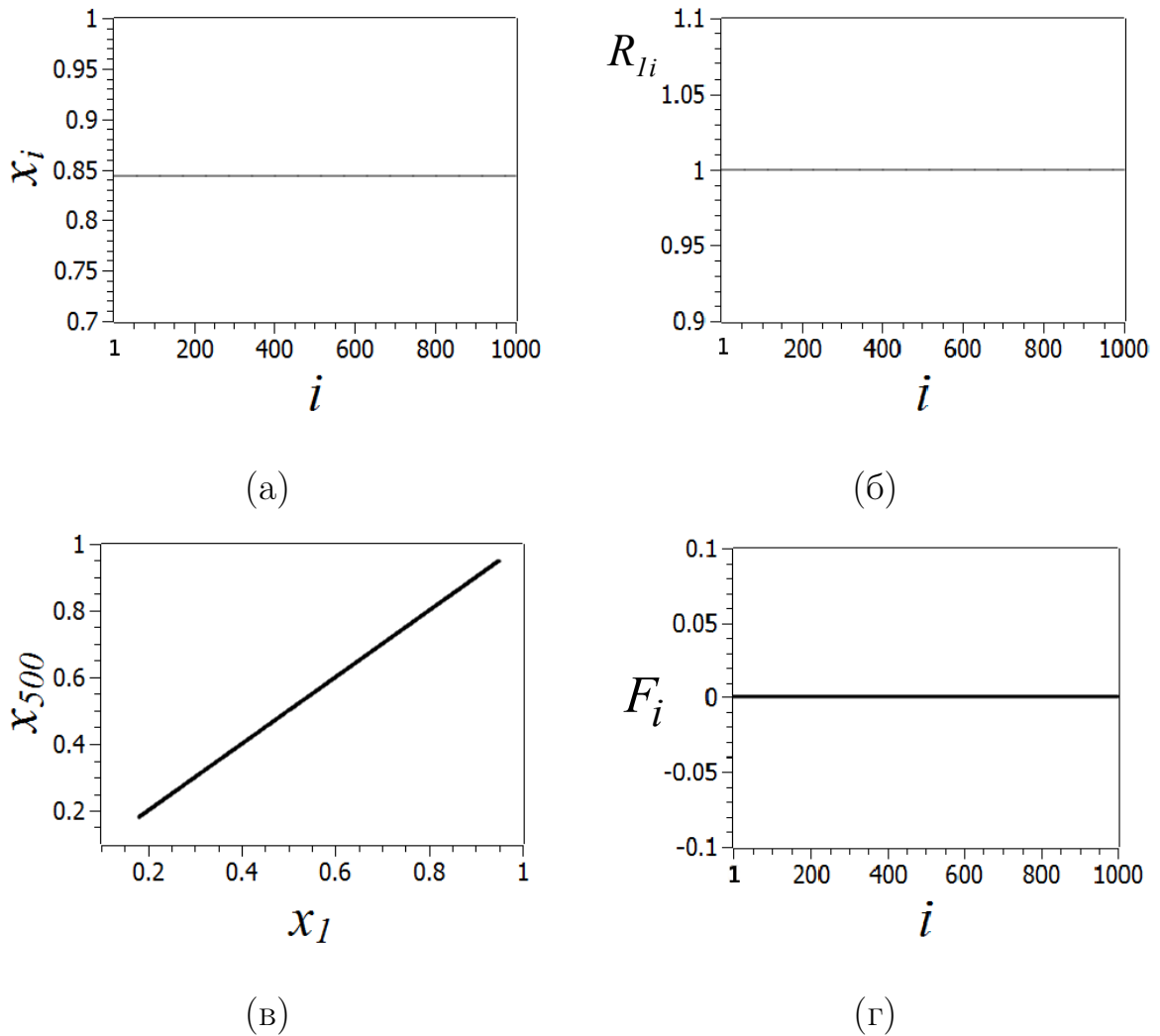


Рисунок 1.4. Иллюстрация режима полной хаотической синхронизации при  $\sigma = 0.64$  и  $r = 0.32$ . (а) Мгновенный пространственный профиль переменных  $x_i$ , (б) коэффициент взаимной корреляции  $R_{1i}$ , (в) проекция фазовой траектории на плоскость  $(x_1, x_{500})$ , (г) пространственно-временной профиль для функции связи  $F_i$ . Другие параметры системы как для рисунка 1.2

Из рисунка 1.4 следует, что режиму полной хаотической синхронизации (полной когерентности) отвечает постоянство значений динамических переменных в пространстве (рисунок 1.4,а), равенство единице КВК  $R_{1i}$  (1.3) для всех осцилляторов ансамбля  $i = 2, 3, \dots, N$  (рисунок 1.4,б) и расположение точек хаотической траектории строго в симметричном подпространстве  $U : x_i \equiv x_1 \forall i = 2, 3, \dots, N$  (пример проекции на плоскость  $(x_1, x_{500})$  приведен на рисунке 1.4,в). Значения функции связи  $F_i$  (рисунок 1.4,г) равны нулю и этот факт означает, что динамика всех элементов ансамбля соответствует колебательному режиму индивидуального осциллятора.

Как видно из временной зависимости для 500-го осциллятора (рисунок 1.5,а), колебания элементов ансамбля (1.1) являются хаотическими. Тем не менее, мгновенные значения всех переменных  $x_i$  в каждый момент времени  $t$  совпадают. Пространственно-временной профиль динамики ансамбля, приведенный на рисунке 1.5,б, представляет собой набор прямых горизонтальных линий, соответствующих различным значениям  $x_i$ .

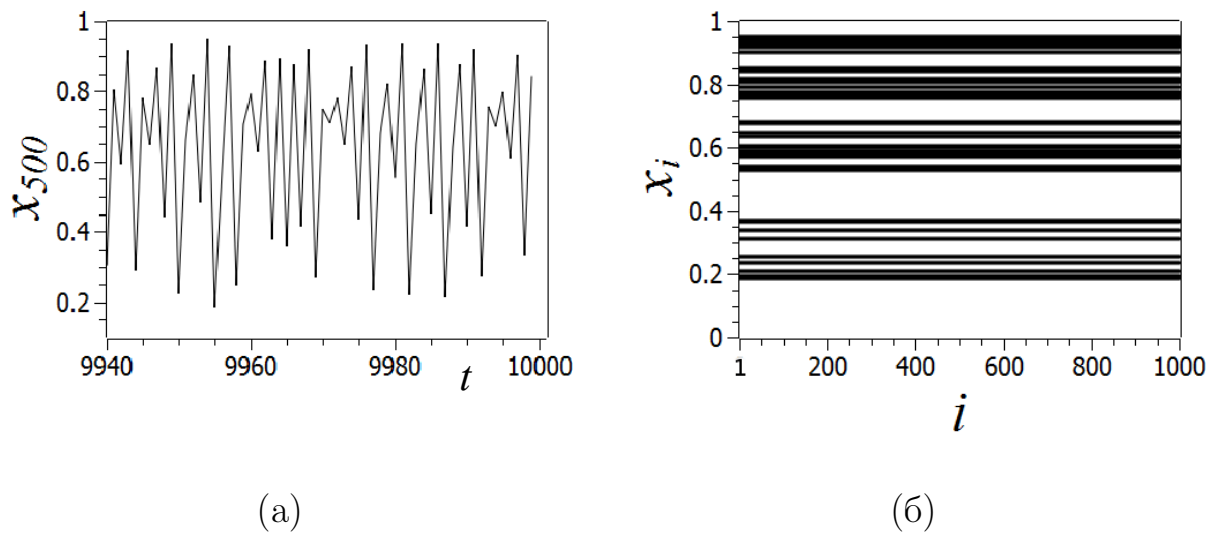


Рисунок 1.5. (а) Вид колебаний во времени для осциллятора с номером  $i = 500$  ансамбля (1.1), (б) пространственно-временной профиль динамики ансамбля (1.1) в режиме полной хаотической синхронизации  $\sigma = 0.64$  и  $r = 0.32$ . Другие параметры системы как для рисунка 1.2



### 1.2.3 Режим колебательной хаотической синхронизации

При уменьшении коэффициента связи  $\sigma$  ( $\sigma < 0.63$ ) в результате бифуркации прорыва режим полной хаотической синхронизации становится неустойчивым. При малом отклонении  $\sigma < \sigma_{cr} \approx 0.63$  от бифуркационной линии, в ансамбле (1.1) реализуется режим, при котором мгновенный профиль становится отличным от прямой линии и приобретает колокообразную (или солитоноподобную) форму. Однако, как и в областях регулярной динамики (например, в области 2 на рисунке 1.2), он может быть описан гладкой функцией пространственной координаты. Пример такого профиля приведен на рисунке 1.6,а. Согласно условию (1.4) он отвечает режиму когерентности.

Как видно из рисунка 1.6,б, коэффициент взаимной корреляции  $R_{1i}$  (1.3) становится зависящим от номера осциллятора  $i$  и его значение уменьшается с ростом расстояния между осцилляторами. В середине кольца КВК достигает минимума  $\approx 0.84$ . Это означает, что полная корреляция колебаний осцилляторов ансамбля отсутствует. Фазовые траектории уже не лежат в симметричном подпространстве  $U$ , о чем свидетельствуют проекции фазовых траекторий на плоскости переменных  $(x_1, x_{50})$  и  $(x_1, x_{500})$ , приведенные на рисунке 1.6,в,г, соответственно. Из них также видно, что пространственная корреляция падает с увеличением расстояния между осцилляторами.

Описанный режим наблюдается в области  $G$ , отмеченной на рисунке 1.3. Данный режим был впервые обнаружен и детально описан в работе [336]. Можно выделить следующие его особенности. Мгновенные пространственные профили описываются гладкими функциями (рисунок 1.6,а), то есть удовлетворяют условию (1.4), и, следовательно, соответствуют когерентному режиму. При этом взаимный коэффициент корреляции вдоль ансамбля не равен единице (рисунок 1.6,б). Данный факт свидетельствует о том, что полной хаотической синхронизации в ансамбле (1.1) больше не наблюдается. Если просле-

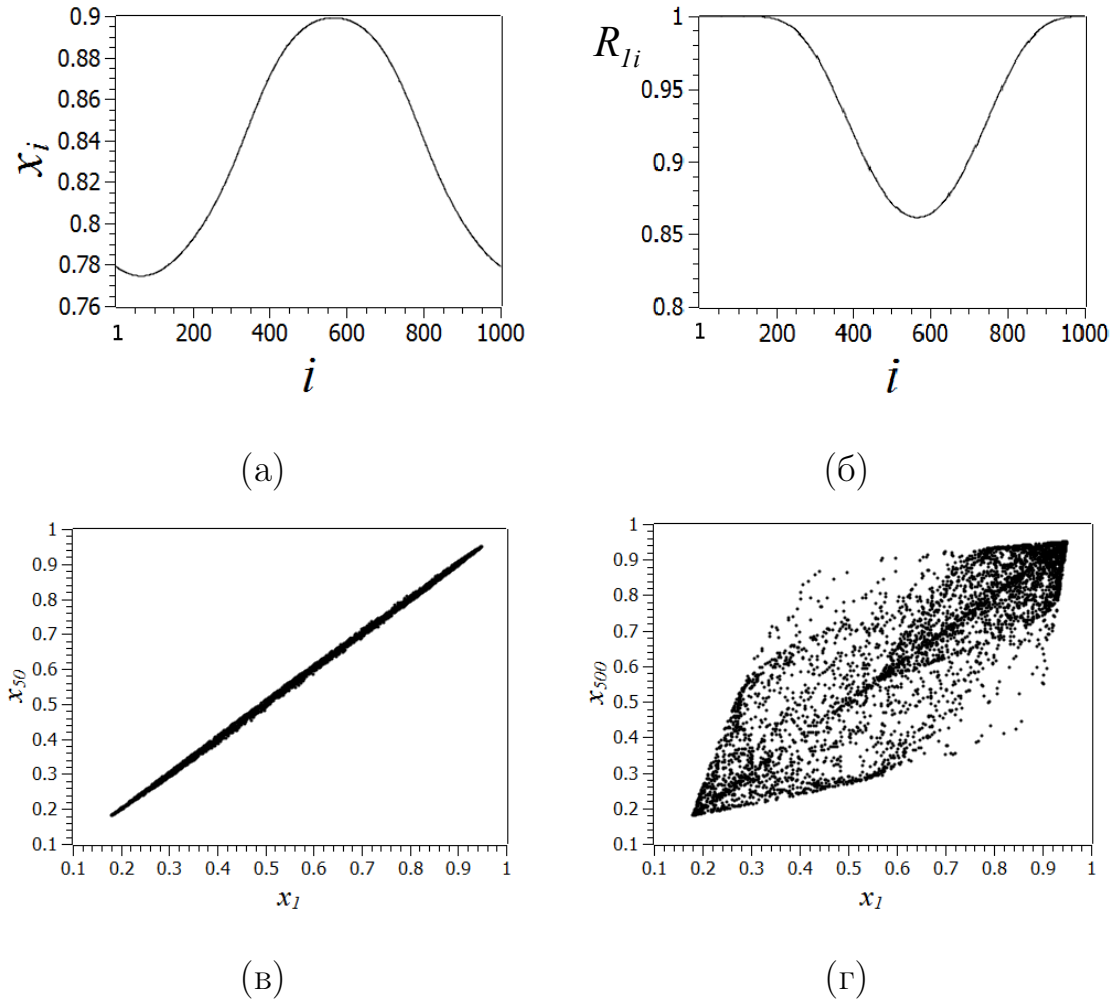


Рисунок 1.6. Иллюстрация режима колебательной (частичной) хаотической синхронизации в ансамбле (1.1) при  $\sigma = 0.55$  и  $r = 0.32$ . (а) Мгновенный пространственный профиль переменных  $x_i$ , (б) коэффициент взаимной корреляции  $R_{1i}$ , проекции фазовой траектории на плоскости переменных  $(x_1, x_{50})$  (в) и  $(x_1, x_{500})$  (г). Другие параметры системы как для рисунка 1.2

дать эволюцию мгновенного профиля во времени и построить пространственно-временной профиль для переменных  $x_i$  (рисунок 1.7,а), то можно видеть случайные колебания формы профиля без потери его гладкости, что подтверждает когерентность рассматриваемого режима. Соответствующий пространственно-временной профиль для функции связи  $F_i$  приведен на рисунке 1.7,б, из которого видно, что поведение  $F_i$  также носит осциллирующий характер. Отметим, что для построения пространственно-временных профилей на рисунке 1.7 использу-

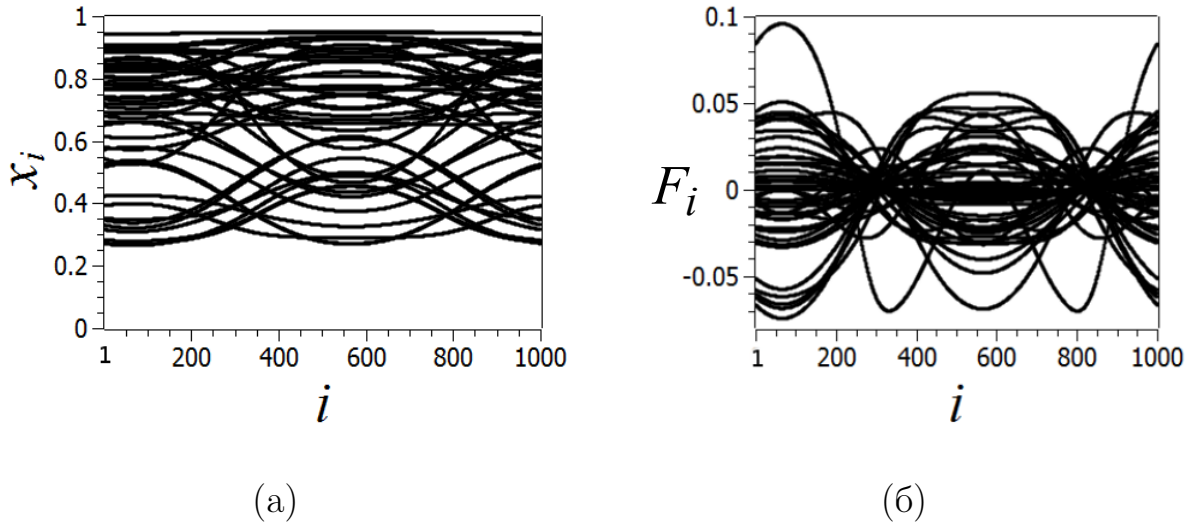


Рисунок 1.7. Пространственно-временные профили динамики ансамбля (1.1) (а) и функции связи  $F_i$  (б) при  $\sigma = 0.55$  и  $r = 0.32$ . Другие параметры системы как для рисунка 1.2

ются 50 последних итераций  $x_i^t$  для каждого элемента ансамбля  $i = 1, 2, \dots, N$ . На основании указанных особенностей и характеристик, этот особый режим частичной хаотической синхронизации можно назвать «колебательной хаотической синхронизацией».

### 1.2.4 Режим фазовой химеры

При  $0.37 < \sigma < 0.5$  в областях  $E$  и  $F$  на рисунке 1.3 (область 2 на рисунке 1.2) колебания элементов ансамбля (1.1) во времени являются периодически. Внутри области 2 с уменьшением силы связи реализуется каскад бифуркаций удвоения периода. Соответствующие мгновенные профили для переменных  $x_i$  и пространственно-временные профили динамики ансамбля и функции связи  $F_i$  приведены на рисунке 1.8. Как видно из графиков рисунка 1.8,а,б, мгновенные профили имеют гладкую колокообразную форму и отражают режимы когерентности. Временная динамика всех элементов ансамбля и функции связи является периодической и с уменьшением  $\sigma$  от 0.43 до 0.35 демонстрирует

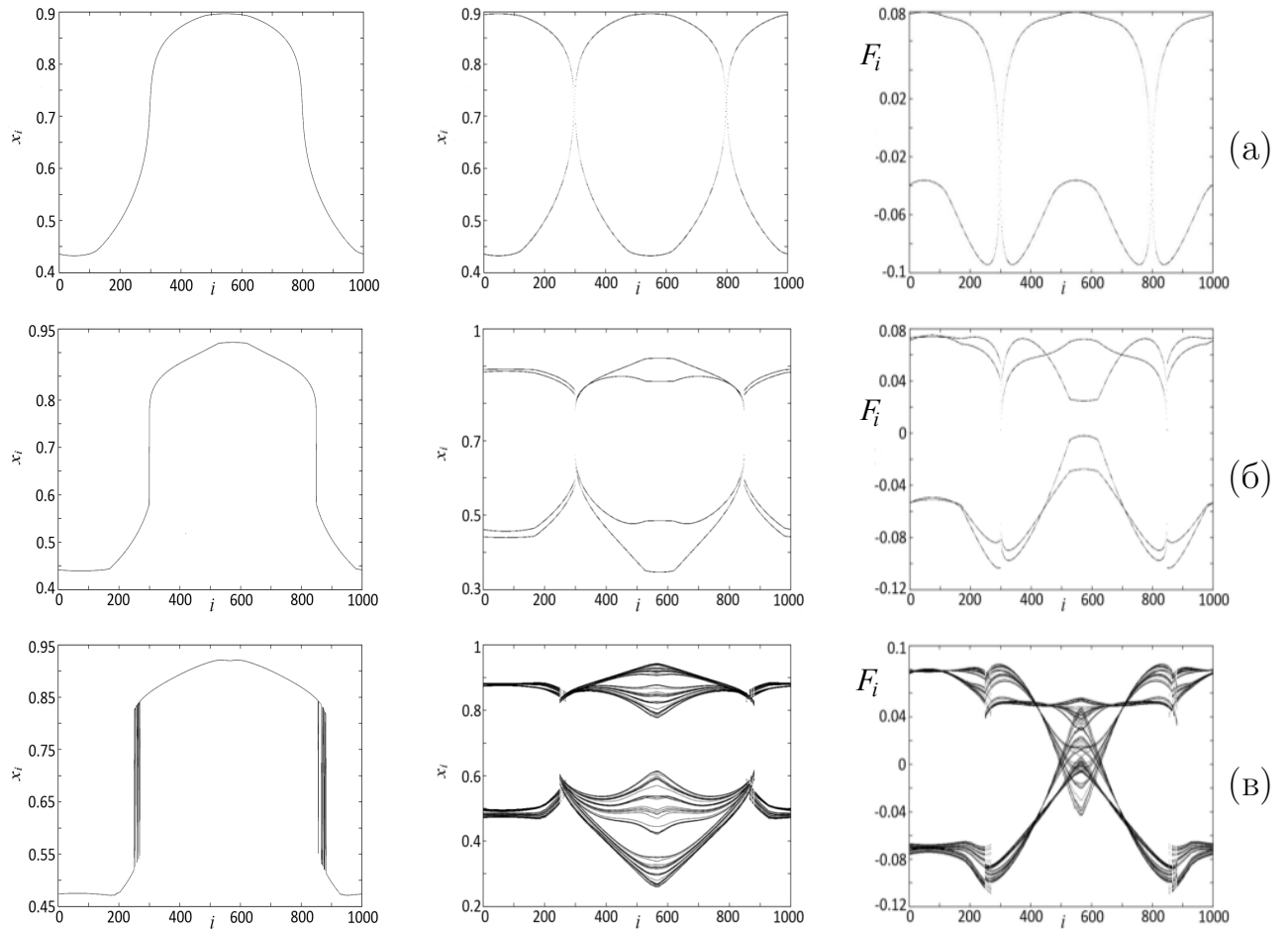


Рисунок 1.8. Мгновенные профили для переменных  $x_i$  ансамбля (1.1) (левая колонка) и пространственно-временные профили динамики ансамбля (центральная колонка) и функции связи  $F_i$  (правая колонка), отражающие динамику системы (1.1) при уменьшении силы связи  $\sigma$ : (а)  $\sigma = 0.43$ , (б)  $\sigma = 0.38$ , (в)  $\sigma = 0.35$ . Другие параметры:  $r = 0.32$ ,  $a = 3.8$ ,  $N = 1000$

каскад бифуркаций удвоения периода (циклы периода 2, 4 на рисунке 1.8а,б, соответственно). Кроме того, в областях  $E$  и  $F$  при некоторых значениях коэффициента связи возможны также квазипериодические колебания. Естественно, что в режиме регулярных (периодических или квазипериодических) колебаний элементов ансамбля, КВК  $R_{1i}$  для всех  $i = 2, 3, \dots, N$  строго равен единице. Таким образом, режимы динамики, наблюдающиеся в областях  $E$  и  $F$  на рисунке 1.3, являются когерентными.

При дальнейшем уменьшении силы связи  $\sigma < 0.37$  и переходе в область  $D$  на рисунке 1.3 колебания во всех элементах ансамбля становятся слабо хаотическими. Переход к хаосу наглядно иллюстрируют пространственно-временные профили динамики ансамбля и функции связи, представленные на рисунке 1.8,в (центральная и правая колонки) для  $\sigma = 0.35$ . Мгновенный профиль (рисунок 1.8,в, левая колонка) отражает появление двух областей некогерентной динамики ( $260 \leq i \leq 280$  и  $860 \leq i \leq 880$ ), которые сосуществуют с областями когерентной (синхронной) динамики остальных осцилляторов, то есть рождается химерное состояние.

Как показали численные исследования [346], переход от когерентной динамики всего ансамбля осцилляторов к появлению областей с некогерентной динамикой (возникновению химерного состояния) связан с бифуркациями удвоения периода колебаний как функции связи, так и каждого индивидуального элемента ансамбля. При этом рождение химерного состояния наблюдается при достижении параметром  $\sigma$  критического значения  $\sigma_{cr} \simeq 0.35$ , при котором реализуется переход к слабо хаотическому режиму колебаний всех осцилляторов ансамбля и функции связи (рисунок 1.8,в). Отметим, что временная динамика элементов из некогерентных кластеров возникающего химерного состояния соответствует «зашумленным» регулярным колебаниям периода 2.

В работе [88] было установлено, что для  $\sigma \lesssim 0.4$  фронт мгновенного профиля становится вертикальным, то есть пространственная производная стремится к бесконечности, затем претерпевает разрыв и в итоге при  $\sigma \leq 0.35$  приводит к появлению режима химерных состояний в окрестности разрушившегося волнового фронта. Появление химер авторы [88] связывают именно с обращением производной в бесконечность, что позволяет оценить теоретически критическое значение коэффициента связи  $\sigma_{cr} \simeq 0.41$ , отвечающее разрушению фронта и рождению химерных состояний в их окрестности. С точки зрения динамики ансамбля осцилляторов (1.1) обращение пространственной производной в бесконечность обусловлено сдвигом «фазы» на одну итерацию в соседних ос-

цилляторах, который реализуется при наибольшей разнице максимальных и минимальных амплитуд колебаний двухтактного цикла.

Как видно из рисунка 1.8,б, динамика всех элементов ансамбля (1.1) и функции связи является периодической (цикл периода 4), а фронт мгновенного профиля уже становится строго вертикальным и характеризуется бесконечной производной, что является предвестником возникновения областей некогерентности. Однако химерного состояния (областей с некогерентной динамикой) при этом еще не возникает. Появлению химеры отвечает переход к слабо развитой хаотической динамике функции связи и ансамбля в целом (рисунок 1.8,в).

Обсудим более подробно динамику элементов ансамбля (1.1), принадлежащих некогерентным кластерам химерной структуры. Рассмотрим для удобства мгновенный профиль динамики ансамбля, приведенный на рисунке 1.9,а и рассчитанный для  $\sigma = 0.29$  и случайно распределенных начальных условий. На рисунке цифрами 1 и 2 обозначены области когерентной динамики, в которых соседние осцилляторы характеризуются практически идентичными колебаниями. Однако временная динамика элементов в областях 1 и 2 различна: колебания в области 2 сдвинуты «по фазе» на одну итерацию<sup>1</sup>. Такой же характер демонстрирует и функция связи, представленная на рисунке 1.9,б для выбранных элементов из 1 и 2 областей. Как видно из графика, колебания во времени элементов из обеих областей характеризуются периодом 2, то есть  $x_i^t = x_i^{t+2}$ . Если сдвинуть временную реализацию 319-го элемента из области 2 на одну итерацию, то она полностью совпадет с временной зависимостью 318-го элемента из области 1 (см. рисунок 1.9,б), то есть  $x_i^t = x_i^{t+1}$ . Так как период колебаний равен 2, то сдвиг на одну итерацию дает колебания, сдвинутые во времени на половину периода. В этом случае колебания можно назвать противофазными. Таким образом, если в областях 1 колебания различных ос-

---

<sup>1</sup>Определение фазы для дискретных последовательностей  $x^t$  ( $t = 1, 2, \dots$ ) строго ввести нельзя. Для удобства описания мы будем использовать термин «фаза», имея в виду следующее. Если для дискретного ряда периода 2 последовательности  $x_1^t$  и  $x_2^t$  будут совпадать при сдвиге по дискретному времени на единицу, то есть  $x_1^t = x_2^{t+1}$ , то можно говорить о сдвиге «фаз» на полпериода.

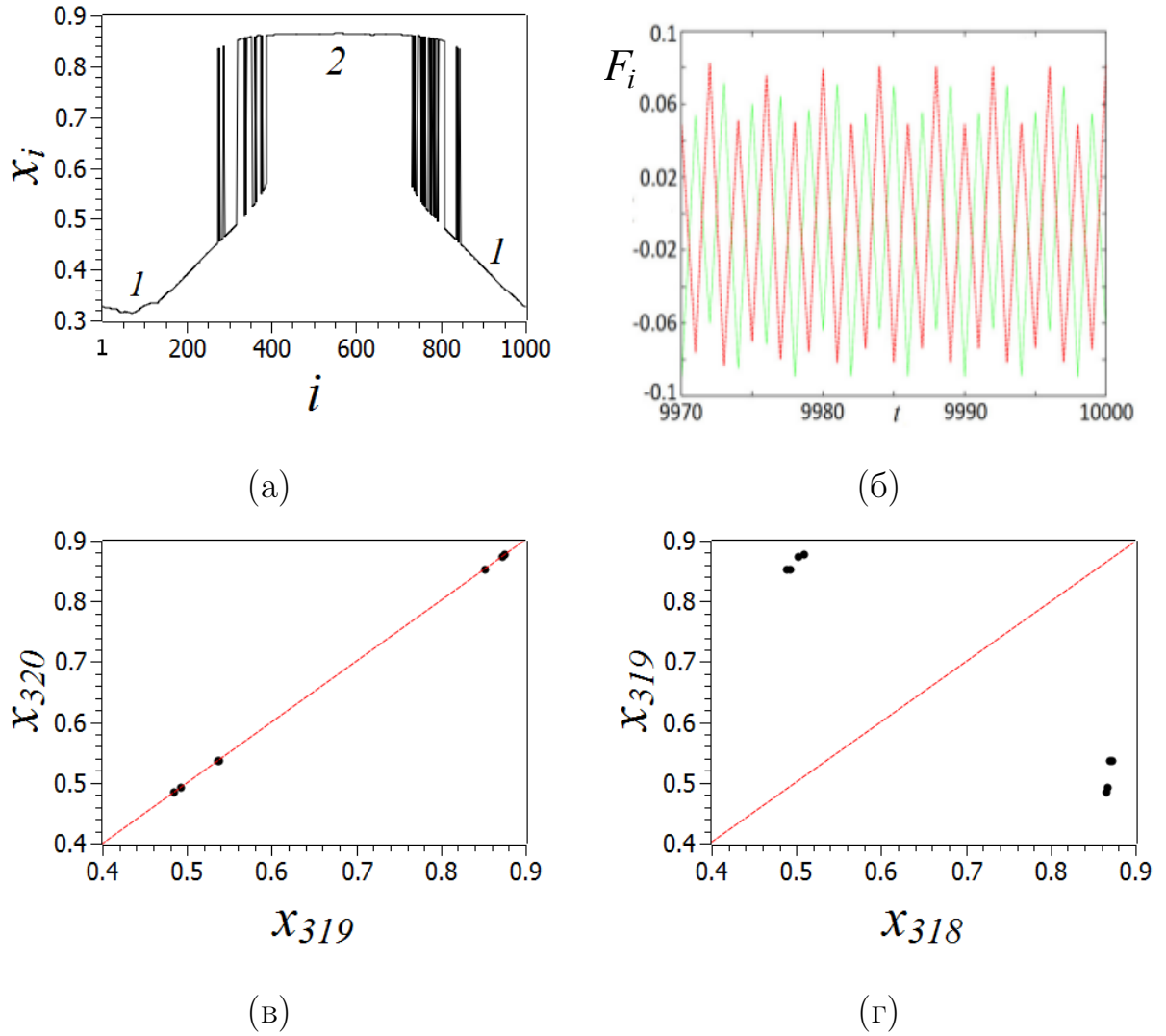


Рисунок 1.9. (а) Мгновенный профиль динамики ансамбля (1.1) для  $\sigma = 0.29$  и  $r = 0.32$ , (б) временная реализация для функции связи  $F(x_i)$  для 318-го (сплошная зеленая линия) и 319-го осциллятора (пунктирная красная линия), проекции фазовых траекторий на плоскости переменных  $(x_{319}, x_{320})$  (в) и  $(x_{318}, x_{319})$  (г)

цилляторов являются синфазными, то по отношению к ним в области 2 они противофазны. На рисунке 1.9 показано отличие синфазных (рисунок 1.9,в) и противофазных (рисунок 1.9,г) колебаний в проекциях на плоскости соответствующих переменных. В первом случае точки фазовых траекторий лежат на биссектрисе и следовательно, осцилляторы колеблются синфазно. На рисунке

1.9,г осцилляторы демонстрируют противофазные колебания, так как один из них принадлежит области 1, а другой – области 2 (рисунок 1.9,а).

Обращаясь к профилю когерентной динамики до возникновения химер (рисунок 1.8,б), можно отметить, что скачок «фазы» происходит в осцилляторах  $i \simeq 300$  и  $i \simeq 800$ .

Рассмотрим процесс смены «фазы» колебаний, который проявляется еще до возникновения химерного состояния. Как видно из рисунка 1.8,а, для элементов  $i \simeq 298$  и  $i \simeq 798$  функция связи  $F_i \simeq 0$ . При этом колебания периода 2 в указанных осцилляторах вырождаются в однотоктные, их амплитуды становятся равными  $x_{302}^t \simeq 0.73 = \text{const}$ . Если положить в уравнении (1.1) функцию связи равной нулю, то получаем

$$x_i^{t+1} = ax_i^t(1 - x_i^t) = \text{const}, \quad i = 302. \quad (1.5)$$

Отображение (1.5) имеет неустойчивую неподвижную точку  $x^0 = ax^0(1 - x^0)$  с координатой  $x^0 = 0.7368$ , что совпадает с данными рисунка 1.8,а (центральная колонка). Неподвижная точка  $x^0$  является седловой и разделяет бассейны притяжения синфазных и противофазных колебаний [96, 346].

Если рассмотреть динамику элементов с номерами  $i = 296, 297$  (меньше 298) и  $i = 299, 300$  (больше 298), то можно пронаблюдать, как меняется фаза колебаний. Результаты расчетов представлены на рисунке 1.10. Как видно из рисунка 1.10,а, амплитуда 2-тактных колебаний осцилляторов при подходе к элементу  $i = 298$  уменьшается, но колебания при этом синфазны с колебаниями во всех осцилляторах с номерами  $i < 298$ . В осцилляторе  $i = 298$  амплитуда колебаний устанавливается постоянной на уровне  $\simeq 0.725$  (рисунок 1.10,б). Для осцилляторов с номерами  $i > 298$  колебания вновь становятся двупериодическими и их амплитуда начинает нарастать (как это видно из рисунка 1.10,в). Но при этом «фаза» колебаний претерпевает скачок: колебания в осцилляторах  $i > 298$  отличаются от колебаний в осцилляторах  $i < 298$  сдвигом на одну итерацию.



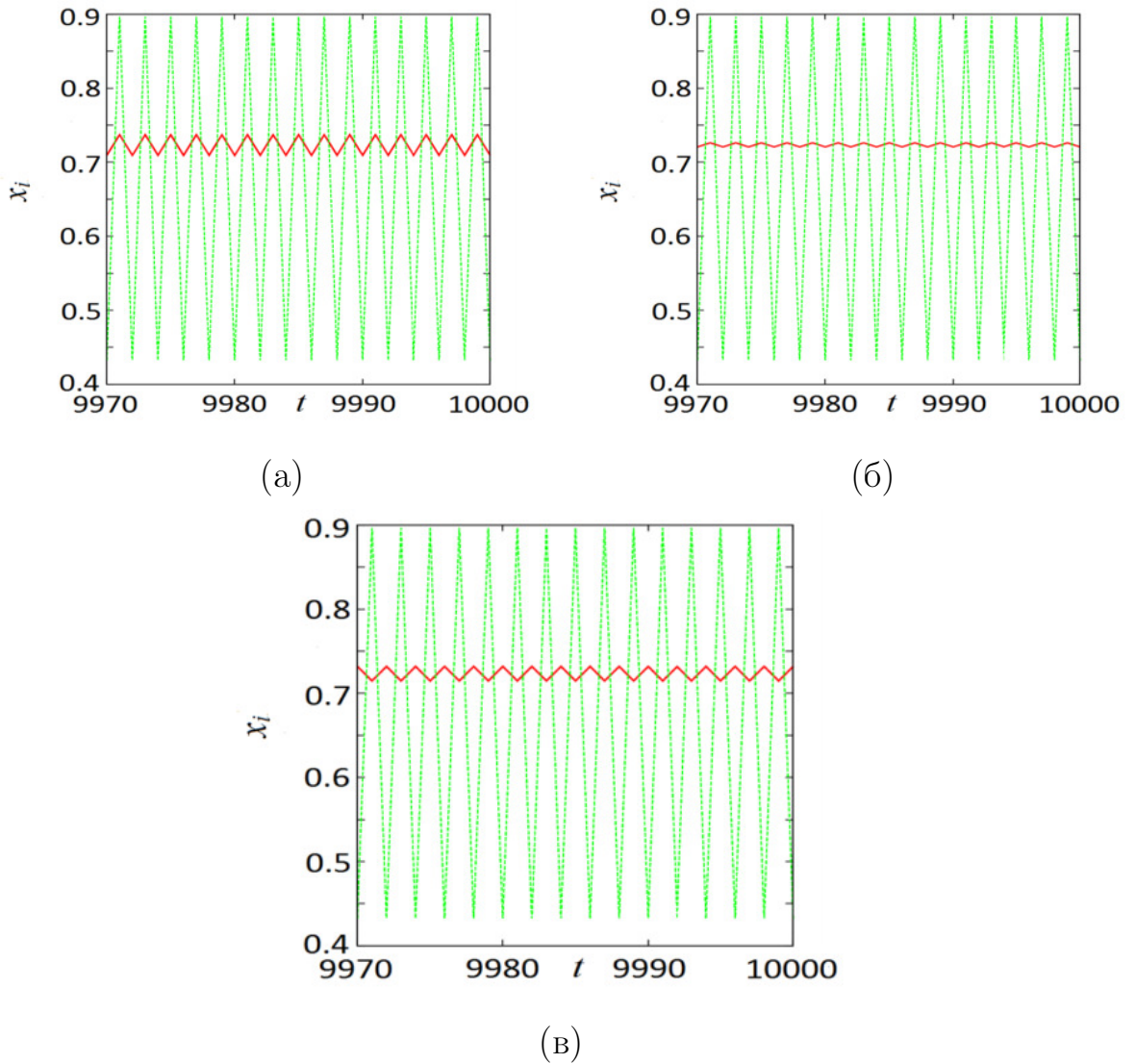


Рисунок 1.10. Процесс смены «фазы» колебаний в осцилляторе  $i = 298$  при переходе от осциллятора  $i = 297$  к осциллятору  $i = 299$  при  $\sigma = 0.43$ . Сплошной зеленой линией на графиках изображена зависимость  $x_{i=48}^t$ , отражающая когерентный режим (см. рисунок 1.9,а). Сплошной красной линией показаны зависимости  $x_{i=297}^t$  (а),  $x_{i=298}^t$  (б),  $x_{i=299}^t$  (в). Другие параметры ансамбля (1.1) как для рисунка 1.8

Анализируя представленные численные результаты, можно заключить, что в кластерах некогерентности химерного состояния, возникающих в ансамбле (1.1) при  $\sigma \simeq 0.35$  (рисунок 1.8,в), имеет место нерегулярное чередование синфазных и противофазных колебаний амплитуд индивидуальных элементов. В некогерентных кластерах соседние осцилляторы колеблются со сдвигом «фа-

зы» на одну итерацию. Сдвиг «фаз» осцилляторов в этих областях носит случайный характер в пространстве, определяется начальными состояниями и во времени сохраняется постоянным. Таким образом, механизмом рождения химеры в (1.1) является потеря устойчивости режима синфазной синхронизации с переходом в режим перемежаемости между синфазными и противофазными колебаниями в определенных областях (кластерах) пространственной структуры. В связи с этим, режим сосуществования в ансамбле нелокально связанных логистических отображений (1.1) областей когерентности и некогерентности, характеризующихся случайным чередованием сдвига «фаз» колебаний элементов внутри кластеров некогерентности, был назван *фазовой химерой* [346]. Таким образом, химерное состояние, найденное в ансамбле (1.1) и впервые описанное в работах [88, 96], можно отнести к типу фазовой химеры. Данный тип химеры, обнаруженный для ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов, отличается от фазовой химеры Курамото, введенной в рассмотрение применительно к ансамблям нелокально связанных фазовых осцилляторов [54]. В последнем случае под фазовой химерой понимается неоднородное распределение значений фазы осцилляторов в пространстве ансамбля.

Проведем анализ фазовой химеры, используя корреляционный подход. Для этого рассчитаем коэффициент взаимной корреляции между 1-м и  $i$ -ми элементами ансамбля (1.1) по формуле (1.3) для режима фазовой химеры при  $\sigma = 0.29$  (рисунок 1.9,а). Результаты расчетов приведены на рисунке 1.11,б. Для удобства сопоставления полученных результатов на рисунке 1.11,а продублирован мгновенный профиль для переменных  $x_i$ , полученный для  $\sigma = 0.29$  и представленный на рисунке 1.9,а.

Из рисунка 1.11 следует, что в областях когерентности 1 и 2, в которых колебания осцилляторов отличаются только фазой, КВК принимает значения, близкие по абсолютной величине к единице:  $R_{1i} = +1$  в области 1 и  $-1$  в области 2. Отличия в знаке как раз характеризуют синфазность (область 1) и противофазность (область 2) колебаний  $i$ -го осциллятора по отношению к первому.

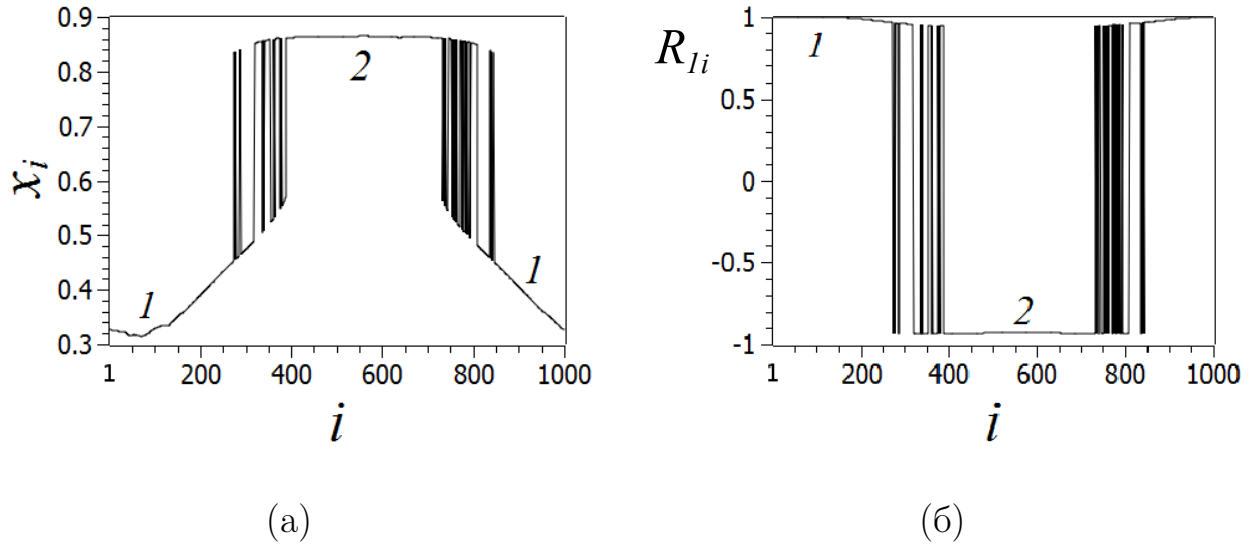


Рисунок 1.11. (а) Мгновенный профиль динамики ансамбля (1.1) в режиме фазовой химеры и (б) соответствующие результаты расчета КВК  $R_{1i}$ .

Параметры системы (1.1):  $\sigma = 0.29$ ,  $r = 0.32$ ,  $a = 3.8$ ,  $N = 1000$

В областях пространственной некогерентности фазовой химеры имеют место скачки коэффициента взаимной корреляции  $R_{1i}$  между значениями  $\pm 1$ . Этот факт еще раз подтверждает случайное чередование синфазных и противофазных колебаний, что является главной особенностью фазовой химеры. Отметим важный момент. Хотя значения КВК, как отмечалось выше, близки по абсолютной величине к единице, в данном случае строгого равенства  $|R_{1i}| = 1$  не наблюдается. Как показывают расчеты, в режиме фазовой химеры  $|R_{1i}| \lesssim 1$ . Это связано с тем, что в рассматриваемом в работе случае переход к режиму фазовой химеры сопровождается возникновением слабо хаотических колебаний элементов ансамбля во времени. Степень хаотичности при  $\sigma = 0.29$  все еще довольно мала, так как динамика элементов подобна «зашумленным» колебаниям периода 2, но именно хаотическое во времени поведение приводит к тому, что абсолютная величина КВК хотя и незначительно, но становится меньше единицы [342, 343, 346].

Как показали численные исследования, фазовые химерные состояния являются установившимися и устойчивыми во времени структурами. Данный

факт был многократно проверен и подтвержден численными расчетами при задании довольно продолжительного времени наблюдения. Кроме того, как будет представлено в главе 3 диссертационной работы, определенный тип химерных состояний переходит с течением времени именно к фазовому химерному состоянию. Отметим, что вывод об устойчивости получен на основе численного моделирования, с помощью которого, строго говоря, довольно сложно отличить устойчивый процесс колебаний от долгоживущего переходного процесса.

### 1.2.5 Режим амплитудной химеры

При дальнейшем уменьшении силы связи  $\sigma$  в области  $D$  (рисунок 1.3),  $0.25 < \sigma < 0.29$ , кластеры некогерентности фазовой химеры расширяются [88, 96]. Затем возникает новая локализованная в пространстве ансамбля область некогерентной динамики, которая расположена в когерентной области 1 на рисунке 1.9,а. Этот кластер образуется и существует одновременно с фазовой химерой. Пример мгновенного профиля нового режима динамики ансамбля (1.1) представлен на рисунке 1.12,а. Область, отмеченная на рисунке цифрой 2, соответствует родившемуся некогерентному кластеру и включает осцилляторы  $120 < i < 290$ . Области 1 на рисунке 1.12,а отвечают кластерам некогерентности фазового химерного состояния. Новая область некогерентности характеризуется наиболее развитой хаотической динамикой как для индивидуальных осцилляторов (рисунок 1.12,б), так и для функции связи (рисунок 1.12,в). При этом четко наблюдается развитая хаотизация амплитуд осцилляторов в области некогерентности 2 (в отличие от случая фазовой химеры). Их поведение становится полностью асинхронным, в то время как соседние с некогерентным кластером осцилляторы колеблются почти периодически и синхронно. В соответствии с указанными особенностями динамики, новое химерное состояние естественно назвать *амплитудной химерой*. Следует различать данное химер-

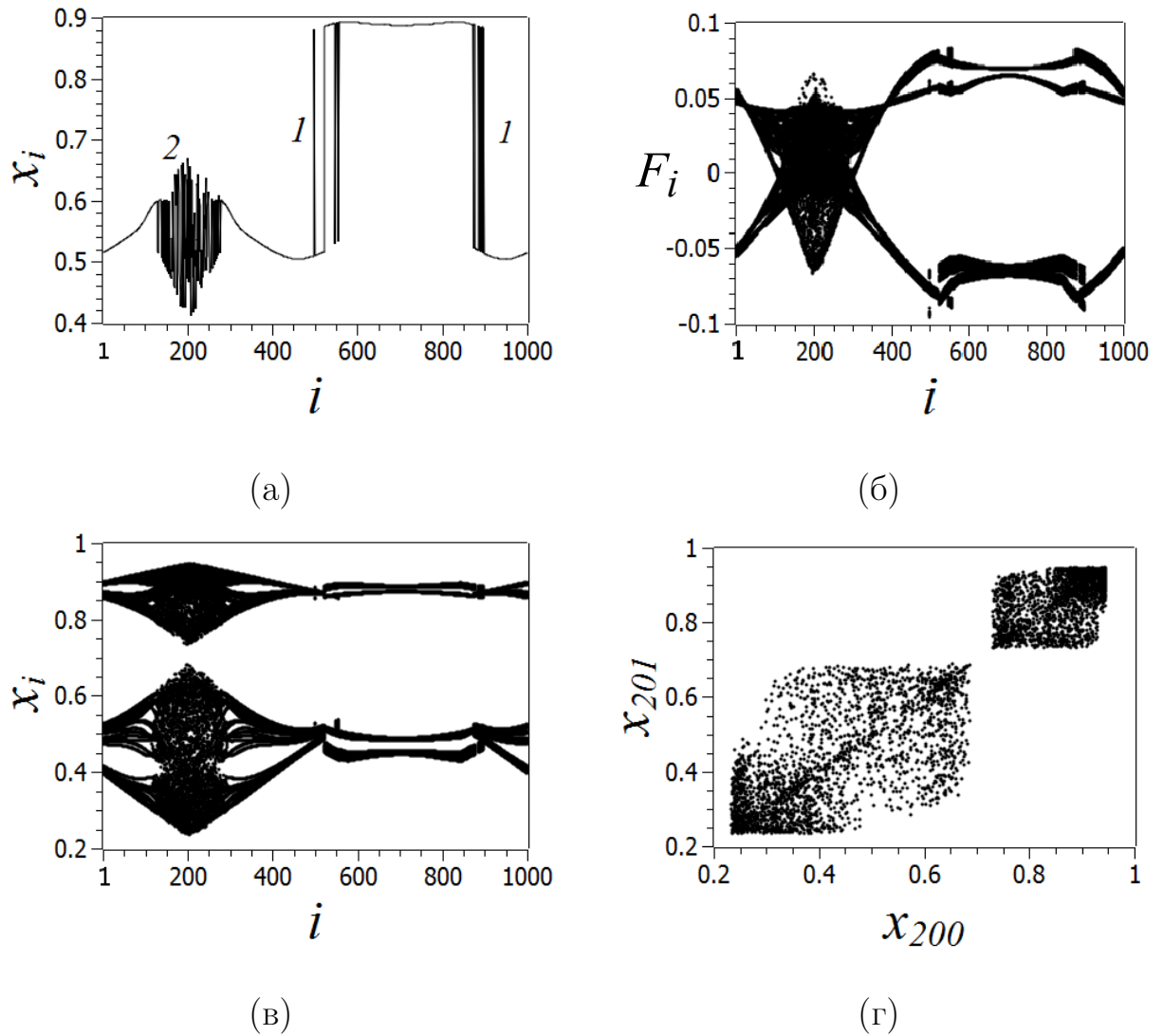


Рисунок 1.12. Сосуществование фазовой (области 1) и амплитудной (область 2) химерных состояний в ансамбле (1.1) для  $\sigma = 0.28$ . (а) Мгновенный профиль динамики ансамбля и пространственно-временные профили для функции связи  $F_i$  (б) и амплитуд индивидуальных элементов  $x_i$  (в), (г) проекция фазовой траектории на плоскость переменных  $(x_{200}, x_{201})$ .

Другие параметры системы:  $r = 0.32$ ,  $a = 3.8$ ,  $N = 1000$

ное состояние с амплитудной химерой, обнаруженной в ансамблях с периодической динамикой [100, 101]. В последнем случае все элементы амплитудной химеры в сети систем Стюарта-Ландау демонстрируют периодическую динамику во времени, а в некогерентной области пространственная последовательность положений центров колебаний является абсолютно случайной [100–102, 104].

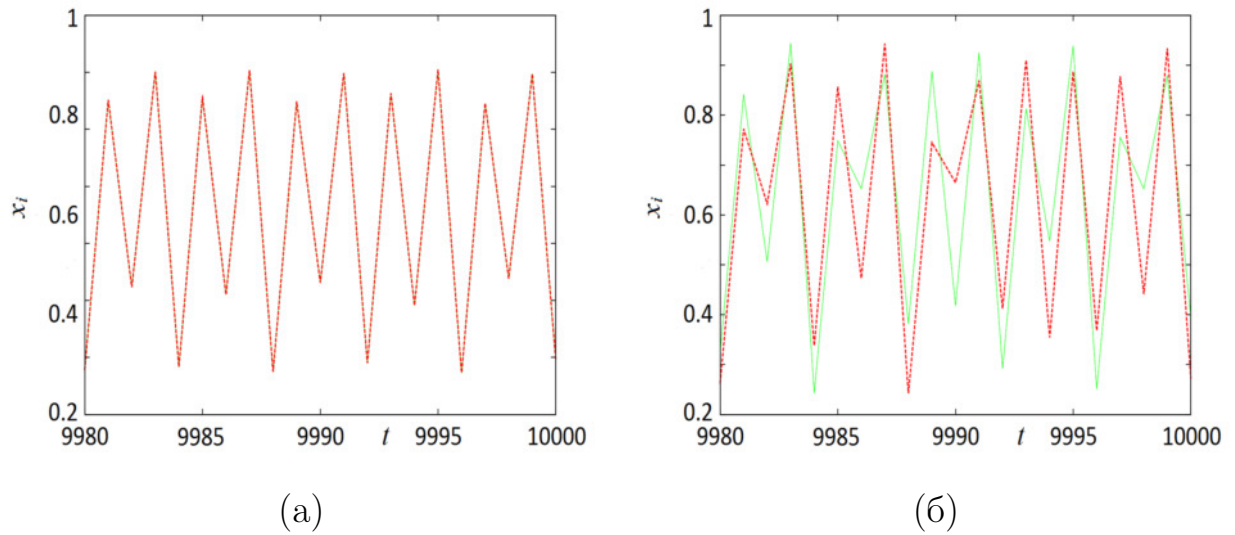


Рисунок 1.13. Временные реализации  $x_i^t$  для осцилляторов  $i = 380$  (сплошная зеленая кривая) и  $i = 381$  (пунктирная красная линия) в области когерентности (рисунок 1.12) (а) и для  $i = 194$  (сплошная зеленая кривая) и  $i = 195$  (пунктирная красная кривая) в области некогерентности амплитудной химеры (б). Параметры ансамбля (1.1):  $\sigma = 0.28$ ,  $r = 0.32$ ,  $a = 3.8$ ,  $N = 1000$

Если сравнить временную динамику осцилляторов из некогерентных кластеров амплитудной и фазовой химер (рисунок 1.13), то можно сделать вывод о том, что индивидуальные осцилляторы в области некогерентности амплитудной химеры характеризуются полностью асинхронной хаотической динамикой. Проекция хаотической траектории на плоскость переменных  $(x_{200}, x_{201})$  (рисунок 1.12,г) также свидетельствует о несогласованном хаотическом поведении соседних элементов, принадлежащих кластеру некогерентности амплитудной химеры. Кроме того, на проекции (рисунок 1.12,г) видно существование двух областей хаотического множества в рассматриваемой области пространства. Траектория посещает их регулярно через одну итерацию по времени. Таким образом, дискретная последовательность во времени  $x_i^t$  включает две компоненты: периодическую с периодом 2 и хаотическую.

Проанализируем корреляционные свойства амплитудной химеры. По аналогии с анализом режима фазовой химеры, на рисунке 1.14,а продублирован

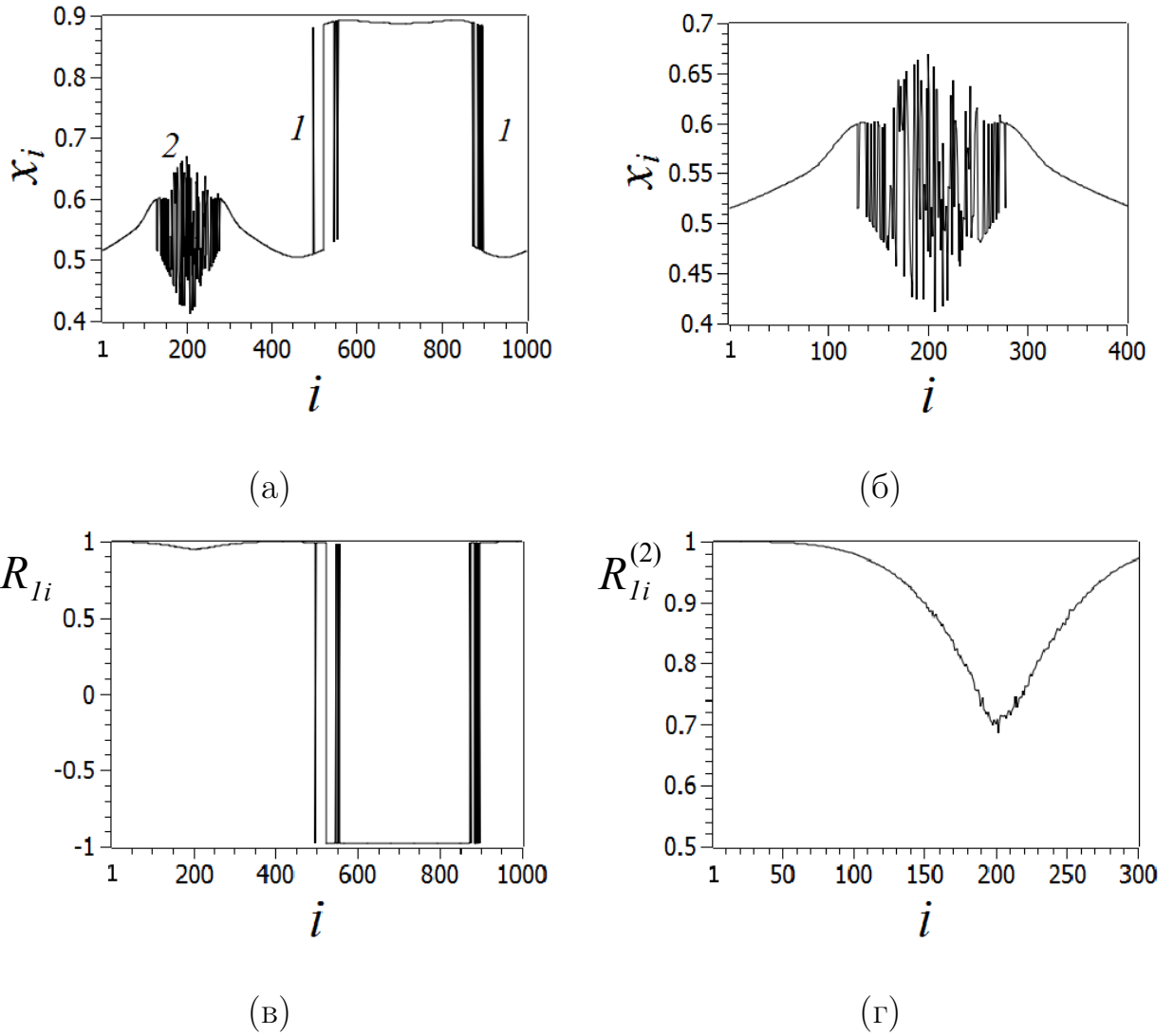


Рисунок 1.14. (а) Мгновенный профиль динамики ансамбля (1.1), (б) увеличенный фрагмент мгновенного профиля, иллюстрирующий амплитудную химеру, (в) коэффициент взаимной корреляции  $R_{li}$  для всего ансамбля, (г) КВК  $R_{li}^{(2)}$  1-го и  $i$ -го осцилляторов в области амплитудной химеры, рассчитанный по реализациям во времени с выборкой каждой второй точки. Параметры системы:  $\sigma = 0.28$ ,  $r = 0.32$ ,  $a = 3.8$ ,  $N = 1000$

мгновенный профиль динамики ансамбля для  $\sigma = 0.28$ . Кроме того, увеличенный фрагмент, четко иллюстрирующий амплитудную химеру, показан на рисунке 1.14,б. Результаты расчетов коэффициента взаимной корреляции  $R_{li}$  (1.3) приведены на рисунке 1.14,в. Как видно из рисунка, для некогерентных кластеров фазовой химеры КВК по-прежнему близок к  $\pm 1$ . Однако для амплитудной

химеры имеется незначительное уменьшение модуля КВК. Именно наличие периодической компоненты (рисунок 1.12,г) является причиной очень слабого снижения КВК в области амплитудной химеры ( $R_{1i} \approx 0.9$  для  $120 < i < 290$ ). Если исключить эту регулярную компоненту, рассматривая значения переменных через одну итерацию, то полученный в этом случае КВК  $R_{1i}^{(2)}$  (рисунок 1.14,г) существенно уменьшается (до значения  $\approx 0.68$ ). Минимум корреляции соответствует центру амплитудной химеры, где имеет место наиболее развитый хаос. Спад пространственной корреляции соответствует несинхронному хаотическому поведению осцилляторов в области некогерентности амплитудной химеры. Таким образом, в отличие от фазовой химеры, амплитудная химера позволяет говорить о «настоящей» некогерентности колебаний, которые характеризуются уменьшением корреляций и в пространстве, и во времени.

Следует отметить, что в области  $D$  одновременно сосуществует множество различных химерных структур, наблюдающихся при разных начальных условиях. Эффект аномальной мультистабильности (huge multistability) отмечался в работах [88, 96].

В отличие от фазовых химерных состояний, амплитудная химера характеризуется нестационарными колебаниями во времени, имеет конечное время жизни (конечный период переходного процесса) и представляет собой метастабильную структуру. С точки зрения численного моделирования, именно амплитудные химеры относятся к классу переходных структур (transient chimeras) [156]. Особенности эволюции во времени элементов и кластеров некогерентности амплитудных химер и наблюдающиеся при этом эффекты будут подробно изучены и описаны в главе 3 диссертационной работы.

Амплитудные химерные состояния наблюдались также в кольце нелокально связанных осцилляторов Ресслера [96]. Однако в указанной работе этот тип химер не был выделен в специальный класс и не исследовался. Как показали наши численные расчеты [346], амплитудная химера является типичной структурой и реализуется в ансамблях нелокально связанных дифференциальных



систем с хаотическим аттрактором спирального типа. Данный факт будет подтвержден и описан в следующих разделах настоящей главы на примере кольца нелокально связанных генераторов Анищенко—Астахова.

## 1.2.6 Пространственно-неупорядоченные периодические колебания

Продолжим динамический и корреляционный анализ перехода «когерентность—некогерентность» в ансамбле нелокально связанных логистических отображений (1.1). При дальнейшем уменьшении коэффициента связи  $\sigma < 0.25$  в ансамбле устанавливаются периодические во времени колебания с периодом 4 в области  $C$  (рисунок 1.3), которые в области  $B$  претерпевают последовательность удвоений периода. Несмотря на полную регулярность во времени, пространственное поведение в этих областях является абсолютно нерегулярным. Подобные режимы наблюдались в ансамблях с локальным взаимодействием [12]. Иллюстрация данного режима при  $\sigma = 0.2$  приведена на рисунке 1.15. Мгновенные профили имеют тот же характер, что и в режиме фазовой химеры, описанном выше. Однако области пространственной некогерентности, возникающие в режиме фазовой химеры, расширяются и захватывают всё пространство кольца (рисунок 1.15,а). В силу периодичности во времени коэффициент взаимной корреляции  $R_{1i}$  для всех значений  $i$  строго равен единице по абсолютной величине, а его знак меняется случайным образом в пространстве в соответствии с фазами индивидуальных осцилляторов (рисунок 1.15,б).

Подобное поведение сохраняется и в области периодических колебаний большего периода (область  $B$  на рисунке 1.3) вплоть до возникновения пространственно-временного хаоса.

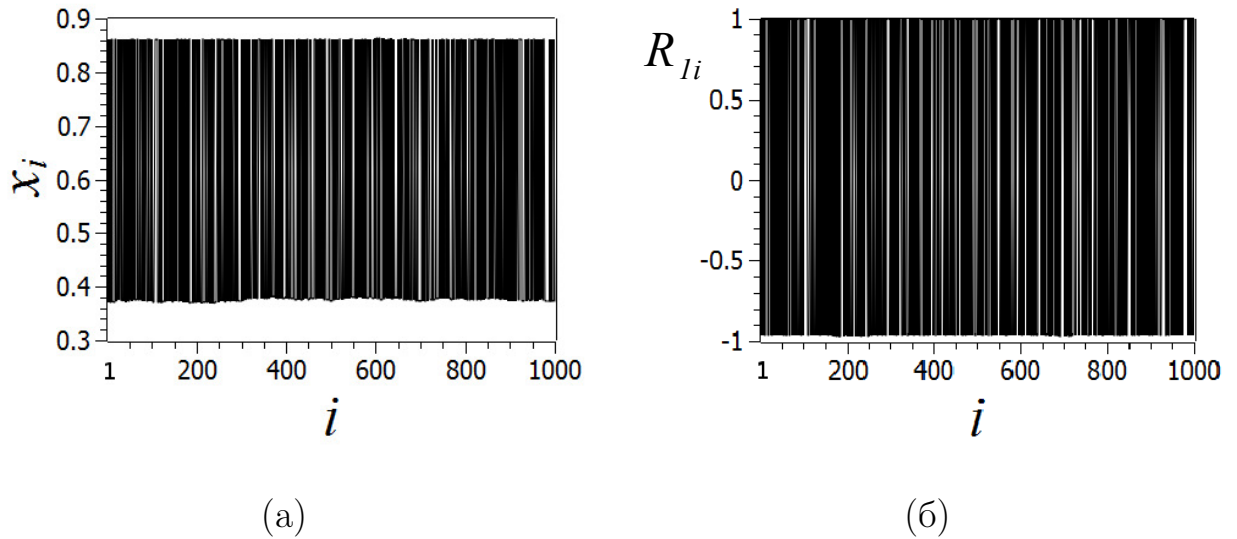


Рисунок 1.15. Иллюстрация режима пространственно-неупорядоченных периодических колебаний в ансамбле (1.1) при  $\sigma = 0.2$ . (а) Мгновенный пространственный профиль, (б) коэффициент взаимной корреляции  $R_{li}$ .

Другие параметры:  $r = 0.32$ ,  $a = 3.8$ ,  $N = 1000$

### 1.2.7 Бифуркации связанности в области некогерентного хаоса

Когда нелокальная связь между элементами кольца (1.1) становится довольно слабой ( $\sigma < 0.13$ ), наблюдается переход к хаотической во времени динамике (область 3 на рисунке 1.2 и область  $A$  на рисунке 1.3). Колебания  $x_i^t$  в области  $A$  соответствуют режиму пространственно-временного хаоса: индивидуальные осцилляторы характеризуются хаотической динамикой во времени, а между элементами ансамбля синхронизация полностью отсутствует. Пространственное поведение является полностью нерегулярным (некогерентным). С уменьшением  $\sigma$  происходит развитие хаоса, проявляющееся в бифуркациях связанности. Они состоят в слиянии частей хаотического множества, происходящее во всех осцилляторах ансамбля. Точки, соответствующие мгновенным состояниям осцилляторов, на графиках пространственного профиля образу-

ют горизонтальные полосы различной ширины. Так, например, при  $\sigma = 0.1$  можно видеть хаотическое множество, состоящее из двух подмножеств (рисунок 1.16,а), а при  $\sigma = 0.05$  наблюдается развитый хаос с объединенной областью

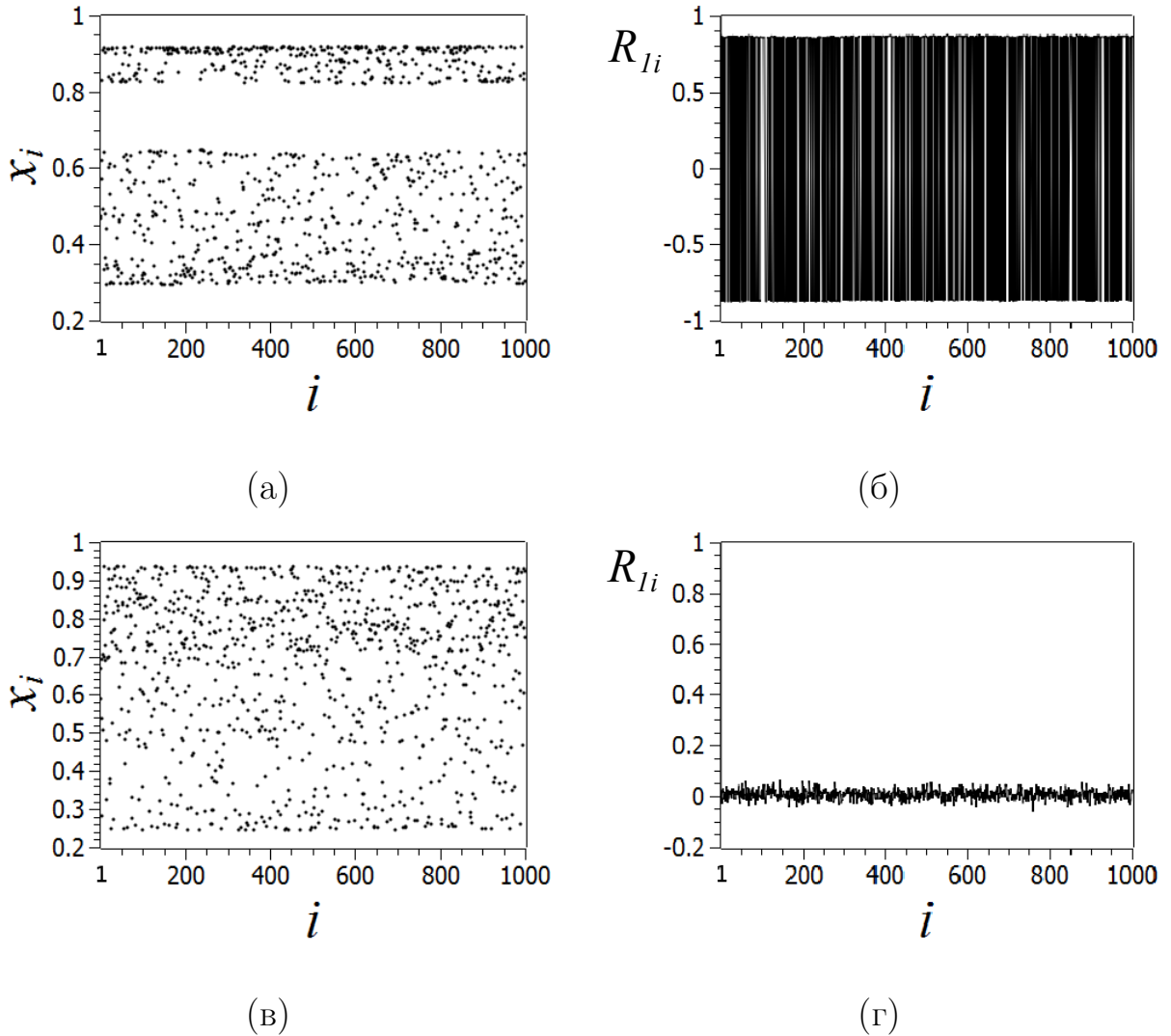


Рисунок 1.16. Режим некогерентного хаоса в ансамбле (1.1). (а) Мгновенный пространственный профиль и (б) коэффициент взаимной корреляции  $R_{1i}$  в области хаотического аттрактора, состоящего из двух подмножеств, для  $\sigma = 0.1$ , (в) мгновенный пространственный профиль и (г) КВК  $R_{1i}$  в области односвязанного хаоса для  $\sigma = 0.05$ . Точки на графиках пространственных профилей не соединены линиями, чтобы можно было лучше различить структуру хаотического множества. Другие параметры:  $r = 0.32$ ,  $a = 3.8$ ,

$$N = 1000$$

значений переменных (рисунок 1.16,в). Поскольку поведение во времени хаотическое и в системе присутствует перемешивание, взаимная корреляция различных осцилляторов становится по абсолютной величине существенно меньше единицы, причем спад КВК  $R_{1i}$  в пространстве (с ростом  $i$ ) происходит не постепенно, как в режиме колебательной хаотической синхронизации, а мгновенно (рисунок 1.16,г). Для двухсвязанного хаотического множества из-за регулярных во времени переключений между частями хаотического множества значения КВК не спадают до нуля, а осциллируют на уровне  $\pm 0.87$  (рисунок 1.16,б). С переходом к односвязанному хаотическому аттрактору значения КВК спадают практически до нуля (рисунок 1.16,г).

### 1.3 Механизм перехода «когерентность—некогерентность»

Как следует из представленных выше результатов, переход ансамбля нелокально связанных хаотических осцилляторов от режима полностью когерентной динамики (режима полной хаотической синхронизации) к режиму полной некогерентности (пространственно-временному хаосу) осуществляется при уменьшении параметра связи  $0.05 < \sigma < 1.0$ . Когда сила нелокальной связи достаточно велика ( $\sigma > 0.5$ ), ансамбль демонстрирует режимы полной, а затем колебательной хаотической синхронизации. При  $0.35 < \sigma < 0.5$  реализуется каскад бифуркаций удвоения периода колебаний как в индивидуальных осцилляторах, так и для функции связи, и возникает фазовая химера. В критической точке  $\sigma \simeq 0.35$  наблюдается переход к режиму слабого хаоса (близкий к режиму «зашумленного» цикла периода 2). Далее при  $\sigma < 0.35$  рождаются амплитудные химеры и число некогерентных кластеров увеличивается. При  $\sigma \rightarrow 0$  реализуется несинхронный хаотический режим во всем ансамбле (область 3 на рисунке 1.2). Для ответа на вопрос о механизме перехода обратимся к исходному уравнению (1.1). Учитывая, что суммирование во втором слагаемом ведется

по индексу  $i$ , перепишем (1.1) в виде:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f(x_i^t) - \sigma f(x_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} f(x_j^t) = \\ &= (1 - \sigma)f(x_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} f(x_j^t). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Учитывая, что  $f(x) = ax(1 - x)$ , из (1.6) получаем

$$x_i^{t+1} = a(1 - \sigma)x_i^t(1 - x_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} ax_j^t(1 - x_j^t), \quad j \neq i. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) включает два бифуркационных параметра: коэффициент нелокальной связи  $\sigma$  и радиус связи (число соседей)  $P$ . Однако, как следует из (1.7), основным бифуркационным параметром ансамбля (1.1) является  $\sigma$ , значения которого управляют влиянием сразу первого и второго слагаемых в уравнении (1.7). Учет этого позволяет понять механизм бифуркационных переходов. Первое слагаемое может рассматриваться как логистическое отображение с новым управляющим параметром  $a_{\text{eff}} = a(1 - \sigma)$ . Отсюда видно, что коэффициент связи  $\sigma$  уменьшает эффективный параметр логистического отображения и соответственно, влияет на режимы динамики отображения и их бифуркации. На рисунке 1.17 приведена зависимость значений переменной  $x$ , а, следовательно, и 1-го слагаемого в уравнении (1.7)  $a(1 - \sigma)x^t(1 - x^t)$ , от величины силы нелокальной связи  $\sigma$  при фиксированном значении параметра  $a = 3.8$  [380].

Второе слагаемое в (1.7) отражает воздействие  $P$  соседних осцилляторов и роль коэффициента связи  $\sigma$  также ведет к изменению эффективного значения параметра  $a$ , который принимает значение  $\sigma a$ .

Можно выделить два предельных значения  $\sigma$ . В первом случае, когда  $\sigma \rightarrow 1$ , первое слагаемое в (1.7) будет стремиться к нулю. При этом второе слагаемое характеризуется ростом параметра  $\sigma a$ , что приводит в итоге к переходу в хаотический режим всех элементов ансамбля. За счет увеличения связи ( $\sigma \rightarrow 1$ ) элементы ансамбля реализуют режим полностью синхронных хаотических колебаний (область 1 на рисунке 1.2).

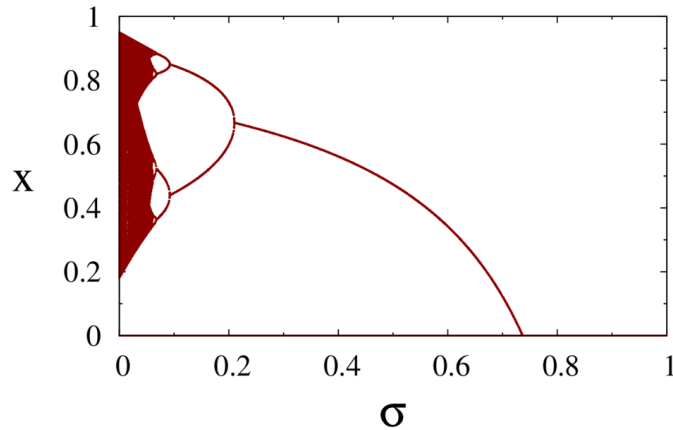


Рисунок 1.17. Зависимость значений переменной  $x$ , принимаемых 1-м слагаемым в (1.7)  $x^{t+1} = a(1 - \sigma)x^t(1 - x^t)$ , от силы нелокальной связи  $\sigma$  для  $a = 3.8$  [380]

При  $\sigma \rightarrow 0$ , что представляет второй предельный случай для силы связи, первое слагаемое в (1.7) при  $a = 3.8$  будет описывать хаотические колебания в каждом индивидуальном элементе, а ролью второго слагаемого можно пренебречь в силу его малости. В этом случае в кольце установится режим некогерентных хаотических колебаний (область 3 на рисунке 1.2). Бифуркационные явления в ансамбле будут иметь место лишь в некоторой области значений параметра  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ , при которых роль как первого, так и второго слагаемых в (1.7) будет существенной. Как показали приведенные выше результаты расчетов для  $r = 0.32$ , бифуркационные явления наблюдаются в интервале  $0.05 < \sigma < 0.63$ . При вариации радиуса нелокальной связи  $r$  (или числа соседних элементов  $P$ ) этот интервал несколько изменится. Отметим, что верхняя граница  $\sigma_2$  задается условием наличия колебаний в индивидуальных осцилляторах, когда в логистическом отображении будет реализован цикл периода не менее 2.

Влияние связи (увеличение силы связи  $\sigma$ ) приводит к уменьшению эффективного значения управляющего параметра логистического отображения и переводит режим колебаний осцилляторов ансамбля в периодический. Пери-

одические колебания каждого из элементов ансамбля при этом испытывают воздействие со стороны соседних  $P$  осцилляторов, которое задается вторым слагаемым в (1.7). Таким образом, наличие нелокальной связи вызывает два эффекта: (1) изменение эффективного значения управляющего параметра индивидуального отображения (первое слагаемое в (1.7)) и (2) увеличение интенсивности воздействия соседей на элемент ансамбля (второе слагаемое в (1.7)) при росте  $\sigma$ .

При уменьшении параметра связи эффективный параметр нелинейности логистического отображения растет, что ведет к каскаду бифуркаций удвоения периода колебаний осцилляторов ансамбля (см. рисунок 1.17). При достижении критической точки рождения хаоса в элементах ансамбля возникают кластеры некогерентных колебаний в пространстве кольца. С дальнейшим уменьшением  $\sigma$  (с ростом эффективного значения параметра нелинейности (1.7) индивидуальных осцилляторов) весь ансамбль переходит в режим некогерентных хаотических колебаний. Таким образом, появление конечного числа кластеров некогерентности (химерных состояний) представляет собой промежуточное состояние ансамбля при глобальном переходе от режима когерентности, когда все элементы в кольце демонстрируют синфазные хаотические колебания ( $\sigma \rightarrow 1$ ), к режиму некогерентной динамики всего ансамбля ( $\sigma \rightarrow 0$ ). Появление конечного числа областей некогерентности химерных состояний обусловлено различными начальными условиями, случайным образом распределенных по ансамблю. Исследования показали, что описанная картина перехода качественно не меняется при вариации случайного распределения начальных условий  $x_i^0$  в интервале от 0 до 1.

## 1.4 Переход «синхронизация–десинхронизация» в ансамбле нелокально связанных отображений Эно

Результаты численных экспериментов, представленные в работах [96, 346–348], убедительно свидетельствуют о том, что переход «когерентность–некогерентность», подробно описанный в разделе 1.2 для кольца логистических отображений, является общим для ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов с удвоением периода. В качестве индивидуальных элементов ансамблей нами также выбирались двумерное отображение Эно [347, 348], осциллятор Ресслера [96], генератор Анищенко–Астахова [346]. В рассмотренных ансамблях переход от режима полной хаотической синхронизации к пространственно-временному хаосу при уменьшении коэффициента нелокальной связи сопровождается возникновением химерных состояний двух типов: фазовой и амплитудной химер. Все динамические и корреляционные свойства химерных структур и особенности их динамики как во времени, так и пространстве, качественно и даже количественно (для ансамбля связанных отображений Эно) соответствуют результатам численного анализа, проведенного для ансамбля нелокально связанных логистических отображений (1.1).

Для подтверждения сказанного, в данном разделе кратко изложены результаты исследований динамики кольца нелокально связанных двумерных отображений Эно при вариации параметров нелокальной связи. Особое внимание уделяется описанию режимов фазовой и амплитудных химерных структур в данном ансамбле.



### 1.4.1 Модель и диаграмма режимов

Одномерный ансамбль нелокально связанных отображений Эно описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f_x(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma_x}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f_x(x_j^t, y_j^t) - f_x(x_i^t, y_i^t)], \\ y_i^{t+1} &= f_y(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma_y}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f_y(x_j^t, y_j^t) - f_y(x_i^t, y_i^t)], \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $x$  и  $y$  — динамические переменные,  $i = 1, 2, \dots, N$  — порядковый номер осциллятора,  $N$  — общее число элементов в кольце,  $t$  — дискретное время,  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  — коэффициенты связи,  $P$  — число соседних элементов (с одной стороны), связанных с  $i$ -м осциллятором,  $r = P/N$  — радиус нелокальной связи. Функции  $f_x(x, y)$  и  $f_y(x, y)$  соответствуют первому и второму уравнениям отображения Эно, соответственно:

$$f_x(x, y) = 1 - \alpha x^2 + y, \quad f_y(x, y) = \beta x, \quad (1.9)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — управляющие параметры отображения.

Отображение Эно (1.9) [381, 382] описывает динамику достаточно широкого класса хаотических систем. Так при  $\beta \rightarrow 0$  (1.9) переходит в классическое логистическое отображение. Для трехмерных дифференциальных систем с хаотическим аттрактором, возникающем в окрестности петли сепаратрисы седло-фокуса (теорема Шильникова [383]), отображение, порождаемое в секущей плоскости, топологически эквивалентно отображению (1.9) [61, 360, 363, 364]. Таким образом, можно полагать, что отображение (1.9) служит достаточно общей моделью систем с хаотическим аттрактором, возникающим через каскад бифуркаций удвоения периода. Аттракторы указанного типа относятся к классу негиперболических и по определению Афраймовича—Шильникова [367] являются квазиаттракторами. Динамические системы с негиперболическим хаоти-

ческим аттрактором характеризуются свойством мультистабильности, когда в фазовом пространстве системы сосуществуют счетное множество как регулярных, так и хаотических предельных множеств [61, 360, 364].

Исследования показали, что введение нелокальной связи по всем динамическим переменным, задающим состояние индивидуального элемента рассматриваемых ансамблей, не влияет на характер перехода «когерентность—некогерентность» в ансамбле осцилляторов. Поэтому в ансамбле (1.8) мы ограничимся нелокальной связью только по переменной  $x$  и будем полагать  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\sigma_y = 0$ . Тогда система (1.8) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f_x(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f_x(x_j^t, y_j^t) - f_x(x_i^t, y_i^t)], \\ y_i^{t+1} &= f_y(x_i^t, y_i^t). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Проводя несложные преобразования, аналогичные предпринятым в разделе 1.3 (см. уравнения (1.6) и (1.7) для ансамбля нелокально связанных логистических отображений), можно переписать систему (1.10) в другом виде:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= (1 - \sigma)f_x(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P; j \neq i}^{i+P} f_x(x_j^t, y_j^t), \\ y_i^{t+1} &= f_y(x_i^t, y_i^t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Первое слагаемое в первом уравнении системы (1.11) характеризует ансамбль осцилляторов без учета связи с соседними  $2P$  осцилляторами, а второе слагаемое непосредственно описывает влияние *только*  $2P$  осцилляторов, то есть характеризует исключительно влияние соседей. Обозначим второе слагаемое в 1-м уравнении (1.11)  $\Phi_i$  и назовем его *функцией воздействия*. Заметим, что она отличается от функции связи  $F_i$  (1.2), которая была введена в разделе 1.1 при рассмотрении динамики ансамбля логистических отображений.

Численный анализ динамики ансамбля (1.10) и (1.11) проводится для  $N = 1000$  элементов, периодических граничных условий и начальных условий  $x_i^0, y_i^0$ , случайно распределенных в интервале  $[-0.5, 0.5]$ . Параметры  $\alpha$  и  $\beta$

индивидуальных осцилляторов выбираются и фиксируются равными  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.2$ , что отвечает режиму развитого хаоса в элементах ансамбля (1.8) в отсутствие связи.

На рисунке 1.18 представлена бифуркационная диаграмма на плоскости параметров  $(r, \sigma)$  для ансамбля (1.11).

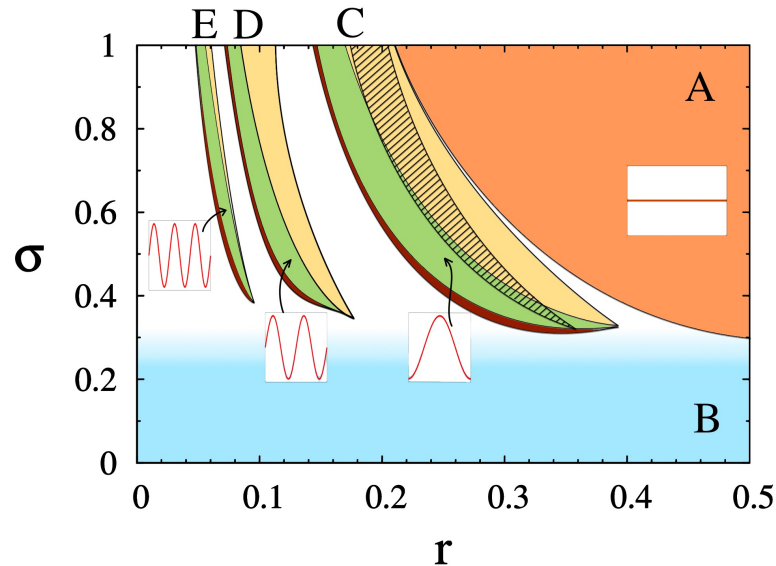


Рисунок 1.18. Диаграмма режимов ансамбля (1.11) на плоскости параметров  $(r, \sigma)$ .  $A$  – область полной хаотической синхронизации,  $B$  – область полной некогерентности,  $C$ ,  $D$  и  $E$  обозначают области когерентности с волновыми числами  $k = 1, 2$  и  $3$ , соответственно. В областях  $C, D$  и  $E$  регулярной динамике во времени периода 2 соответствует желтый цвет, периода 4 – зеленый и периода 8 – бордовый. На вставках показаны типичные мгновенные профили когерентных состояний. Параметры ансамбля:  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $N = 1000$

Диаграмма отражает динамические режимы с когерентным и некогерентным поведением элементов при вариации параметров  $r$  и  $\sigma$ . Область  $A$  соответствует полной хаотической синхронизации,  $B$  – полной рассинхронизации или пространственно-временному хаосу. Буквами  $C$ ,  $D$  и  $E$  обозначены области когерентности с волновыми числами  $k = 1, 2$  и  $3$ , соответственно [88]. С точки зрения временной динамики в этих областях можно выделить области с колеба-

ниями периода 2, 4 и 8. Как видно из рисунка 1.18, на область когерентности  $C$  накладывается другая — заштрихованная область. Она соответствует режиму, который характеризуется когерентными (гладкими) мгновенными профилями (как показано на вставке для области  $C$ ), но временная динамика элементов ансамбля может быть периодической или квазипериодической. Наложение двух областей на рисунке 1.18 свидетельствует о наличии мультистабильности и в зависимости от начальных условий можно получить различные режимы динамики.

Сравнение приведенной диаграммы режимов для ансамбля отображений Эно (1.18) с полной бифуркационной диаграммой для ансамбля логистических отображений [88, 96] и ее фрагментом (рисунок 1.2) показывает их качественную и даже количественную эквивалентность. Таким образом, как показано в работах [90, 347, 348], в кольце нелокально связанных отображений Эно (1.10) переход от режима полной синхронизации (полной когерентности) к десинхронизации (полной некогерентности) происходит по сценарию, аналогичному переходу в ансамбле нелокально связанных логистических отображений.

## 1.4.2 Динамика кольца связанных отображений Эно.

### Фазовая и амплитудная химеры

Исследование динамики кольца нелокально связанных отображений Эно (1.11) проводится при фиксированном значении радиуса связи  $r = 0.32$  и уменьшении силы связи  $\sigma$  от 1 до 0. Особенности пространственно-временной динамики ансамбля изучаются путем анализа эволюции мгновенных профилей для переменных  $x_i$  в момент времени  $t = 10^4$ , пространственно-временных профилей динамики всего ансамбля и функции нелокальной связи  $\Phi_i$ . Для построения пространственно-временных профилей на графики выводятся 50 послед-

них итераций  $x_i^t$  и  $\Phi_i^t$  ( $9950 \leq t \leq 10000$ ) для каждого элемента ансамбля (1.11)  $1 \leq i \leq 1000$ .

При последовательном уменьшении коэффициента связи  $\sigma$  в интервале  $0.48 < \sigma \leq 1.0$  (область  $A$  и частично область  $C$  на диаграмме режимов (рисунок 1.18)) ансамбль отображений Эно (1.11) демонстрирует аналогичные режимы динамики, которые реализуются в кольце нелокально связанных логистических отображений и были описаны в подразделах 1.2.2 и 1.2.3 настоящей работы. На рисунке 1.19 приведены мгновенные профили для переменных  $x_i$  (левая колонка) и пространственно-временные профили динамики ансамбля (1.11) (центральная колонка) и функции воздействия  $\Phi_i$  (правая колонка), которые иллюстрируют типичные динамические режимы, наблюдаемые в ан-

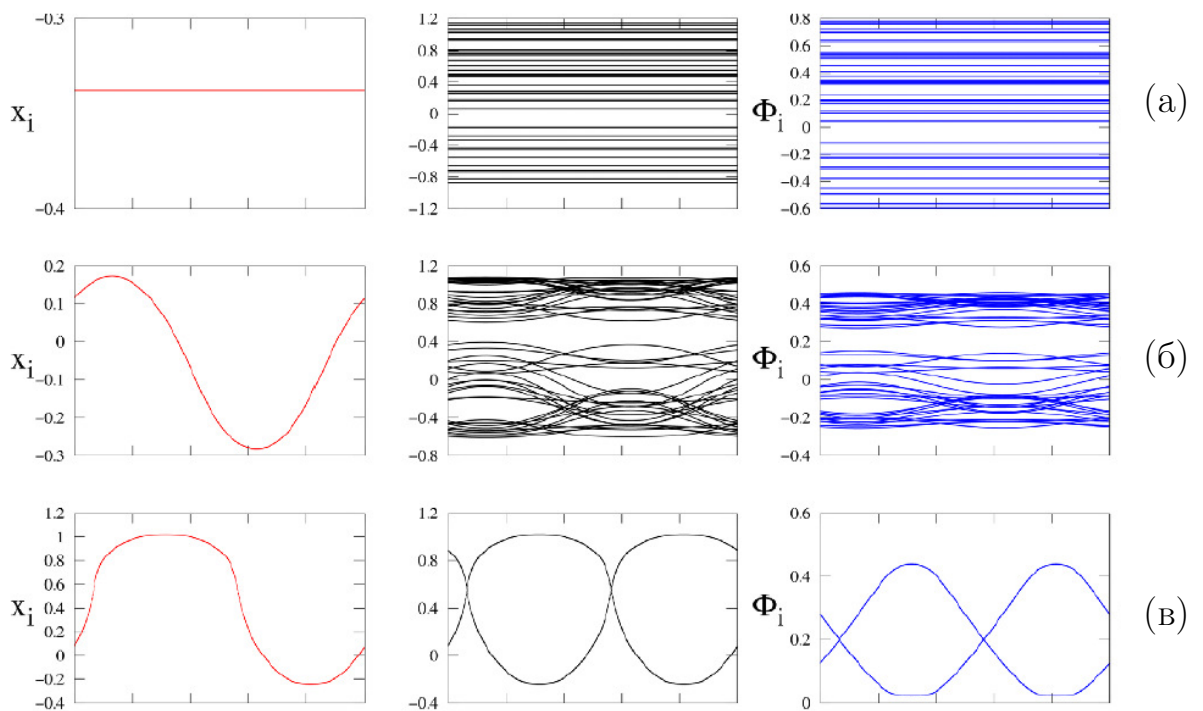


Рисунок 1.19. Мгновенные профили для переменных  $x_i$  (левая колонка) ансамбля (1.11) и пространственно-временные профили динамики ансамбля (центральная колонка) и функции воздействия  $\Phi_i$  (правая колонка) при уменьшении коэффициента связи  $\sigma$ : (а)  $\sigma = 0.68$ , (б)  $\sigma = 0.49$ , (в)  $\sigma = 0.48$ .

Другие параметры:  $r = 0.32$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $N = 1000$

самбле связанных отображений Эно при уменьшении значений силы связи  $\sigma$ . Так рисунки 1.19,а и б отражают режимы полной и колебательной (частичной) хаотической синхронизации, соответственно.

При  $\sigma \approx 0.48$  элементы ансамбля (1.11) резко переходят в режим устойчивых периодических колебаний периода 2 (рисунок 1.19,в). При этом крутизна фронта мгновенного профиля (рисунок 1.19,в, слева) и пространственно-временного профиля (рисунок 1.19,в, в центре) резко возрастает. Функция воздействия (рисунок 1.19,в, справа) также демонстрирует периодические колебания периода 2. На бифуркационной диаграмме (рисунок 1.18) этот режим реализуется в области когерентности  $C$ , отмеченной желтым цветом.

При дальнейшем уменьшении коэффициента нелокальной связи  $\sigma$  пространственные профили теряют гладкость и при  $\sigma \simeq 0.41$  появляются два разрыва волнового фронта (рисунок 1.20,а). Пространственная производная в точках разрывов стремится к бесконечности (рисунок 1.20,а, слева). Разрыв профиля связан с резким изменением фазы колебаний: колебания элементов ансамбля на верхних и нижних ветвях мгновенных профилей (рисунок 1.20,а, слева и в центре) являются периодическими с периодом 2, но сдвинуты по «фазе» на полпериода. При этом функция воздействия остается также периодической с периодом 2 (рисунок 1.20,а, справа), но в точках пересечения графиков  $\Phi_i$  также характеризуется сменой «фазы» на одну итерацию дискретного времени.

Как было отмечено [88, 96], разрыв волнового фронта и, как следствие, обращение пространственной производной в бесконечность является одной из главных причин рождения химерного состояния. Действительно, в окрестности разрывов мгновенного профиля появляются малые области некогерентности. Этот момент соответствует рождению фазовой химеры в ансамбле (1.11). Результаты расчетов приведены на рисунке 1.20,б. Цифрами «1» на пространственно-временном профиле  $x_i$  отмечены области некогерентности фазовой химеры. Данный режим характеризуется нерегулярным чередованием во времени колебаний периода 4, отличающихся сдвигом фазы на одну итерацию.

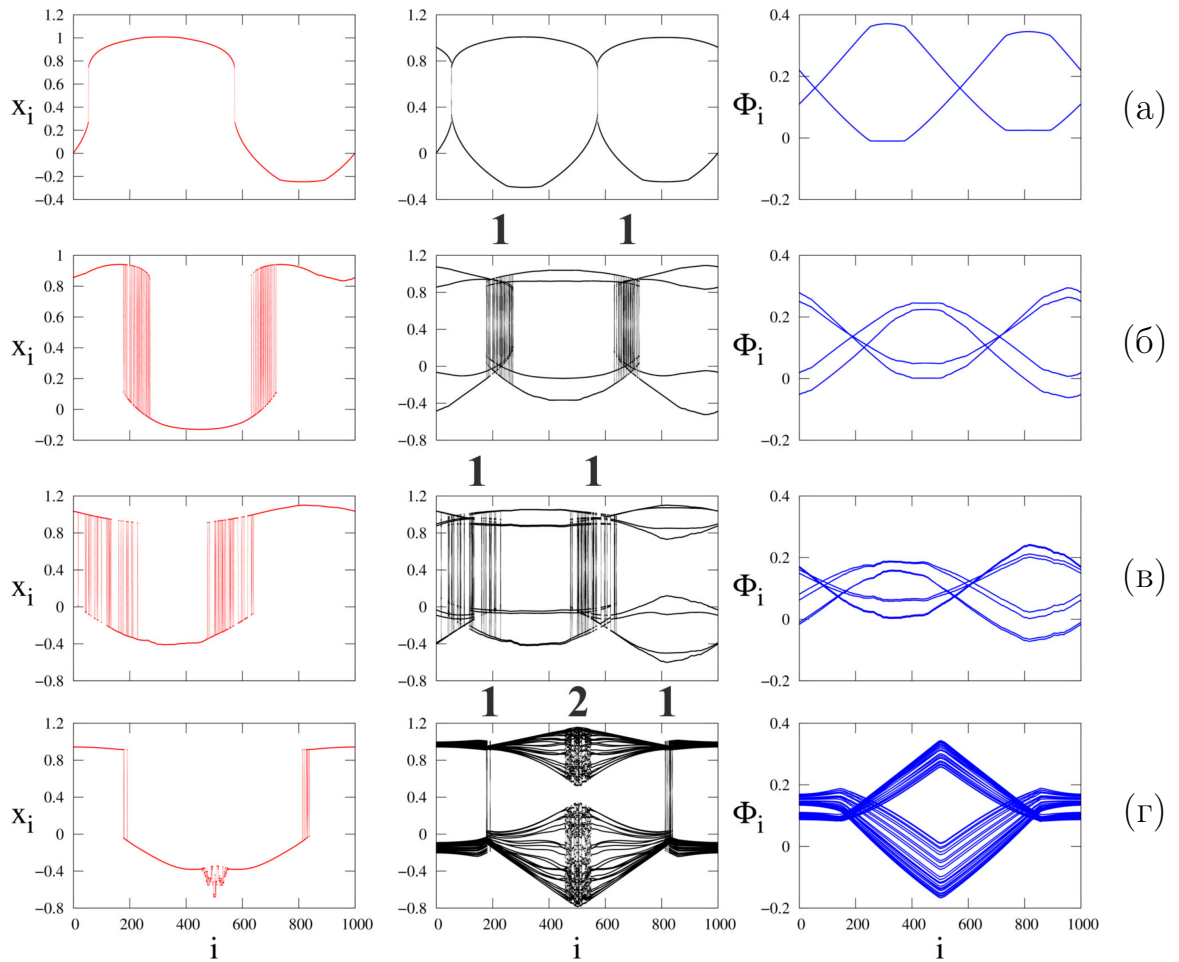


Рисунок 1.20. Эволюция мгновенных профилей для переменных  $x_i$  ансамбля (1.11) (левая колонка), пространственно-временных профилей динамики кольца (центральная колонка) и функции воздействия  $\Phi_i$  (правая колонка) при уменьшении коэффициента связи  $\sigma$ : (а)  $\sigma = 0.41$ , (б)  $\sigma = 0.316$ , (в)  $\sigma = 0.296$ , (г)  $\sigma = 0.26$ . 1 – кластеры фазовых химер, 2 – кластер амплитудной химеры. Другие параметры как для рисунка 1.19

При этом все элементы ансамбля вне областей некогерентности колеблются регулярно с периодом 4 (рисунок 1.20,б, в центре). Функция воздействия  $\Phi_i^t$  также характеризуется регулярными колебаниями периода 4 (рисунок 1.20,б, справа). Стоит отметить, что режим колебаний периода 4 может наблюдаться и до возникновения фазовой химеры. При этом мгновенный профиль может иметь вид гладкого (когерентного) профиля с двумя разрывами, как на рисунке 1.20,а. Однако для формирования химерных состояний основным условием является периодическое во времени решение с периодом колебаний  $\geq 4$ . С уменьшением

силы связи  $\sigma$  области некогерентности фазовой химеры расширяются (рисунок 1.20,в, слева), происходит каскад бифуркаций удвоения периода колебаний как всех элементов ансамбля (рисунок 1.20,в, в центре), так и функции воздействия (рисунок 1.20,в, слева).

В отличие от ансамбля нелокально связанных логистических отображений, в котором появление кластеров некогерентности фазового химерного состояния сопровождается переходом динамики элементов и функции связи в режим слабо хаотических колебаний на базе цикла периода 2, то в данном рассматриваемом случае в ансамбле нелокально связанных отображений Эно для возникновения фазовой химеры может быть достаточно наличие периодической во времени динамики с периодом 4. Однако, и 2-периодическая динамика элементов и функции воздействия в ансамбле Эно может приводить к возникновению фазовой химеры. Различия в режимах связаны с выбором начальных условий.

При  $\sigma \approx 0.26$  в центре ансамбля появляется ограниченный кластер осцилляторов  $450 \leq i \leq 550$  (рисунок 1.20,г, слева), колебания которых становятся сильно хаотическими (рисунок 1.20,г, в центре, область «2»). Функция воздействия также демонстрирует хаотическую динамику, ярко выраженную в области появившегося кластера (рисунок 1.20,г, справа). По определению, введенному в подразделе 1.2.5 для кольца логистических отображений, данный некогерентный кластер соответствует амплитудной химере. Причем последняя может сосуществовать с фазовой химерой (рисунок 1.20,г, слева) или наблюдаться отдельно.

При  $\sigma \rightarrow 0$  ансамбль (1.11) переходит в режим несинхронного пространственно-временного хаоса (область  $B$  на рисунке 1.18). Как показали расчеты, этот переход происходит по тому же бифуркационному сценарию и сопровождается реализацией таких же пространственно-временных структур, которые были описаны и проиллюстрированы для кольца логистических отображений в подразделах 1.2.6 и 1.2.7.



### 1.4.3 Анализ влияния функции воздействия

Как следует из уравнений системы (1.11), динамика каждого осциллятора представляет собой суперпозицию двух составляющих: собственной (локальной) динамики отображения Эно и влияния соседних осцилляторов  $\Phi_i$ . При значениях параметров  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.2$  изолированное отображение Эно (1.9) находится в хаотическом режиме, при этом  $x_{\max} \approx 1.273$ ,  $x_{\min} \approx -1.2847$  – максимальное и минимальное значения переменной  $x$ . Слагаемое связи  $\Phi_i$ , по сути, является средним арифметическим  $2P$  отображений Эно в хаотическом режиме, умноженным на  $\sigma$ . Это означает, что слагаемое воздействия должно вести себя как индивидуальное отображение Эно с амплитудой, умноженной на  $\sigma$ .

На рисунке 1.21 представлена зависимость функции воздействия  $\Phi_i^t$  от величины силы связи  $\sigma$ . Осциллятор  $i$ , для которого вычислялись значения функ-

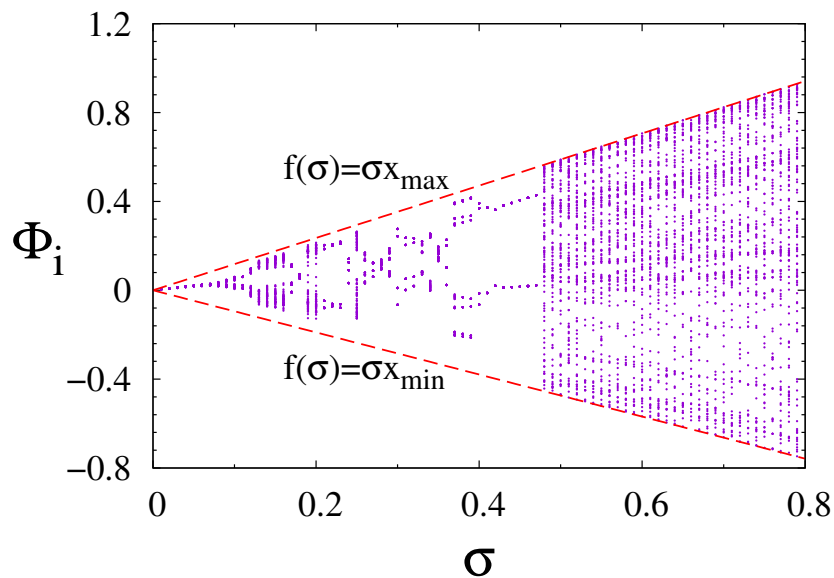


Рисунок 1.21. Зависимость функции воздействия  $\Phi_i$  от значений силы связи  $\sigma$ .

Верхняя и нижняя границы значений  $\Phi_i(\sigma)$  аппроксимированы линейной функцией  $f(\sigma) = \sigma x$  ( $x_{\max} = 1.279$ ,  $x_{\min} = -1.2847$ ). Другие параметры как для рисунка 1.19

ции воздействия, определялся следующим образом. Для каждого значения  $\sigma$  выбирался некоторый  $i$ -й осциллятор, которому соответствовало максимальное значение  $x_i$  мгновенного пространственного профиля. Затем для этого осциллятора и для каждого значения  $\sigma$  выводятся 50 значений  $\Phi_i^t$ , соответствующих 50 итерациям ( $9950 \leq t \leq 10000$ ) ансамбля (1.11).

В областях полной и частичной хаотической синхронизации ( $0.48 \lesssim \sigma \lesssim 0.8$ ) динамика определяется исключительно функцией воздействия. При этом значения, соответствующие первому слагаемому уравнения (1.11), много меньше, чем максимальные значения, которые принимает  $\Phi_i$ . Как видно из графика, в области хаотической синхронизации разброс значений функции воздействия находится в интервале от  $\sigma x_{\min}$  до  $\sigma x_{\max}$ .

В области возникновения и существования фазовой и амплитудной химерных состояний ( $0.2 \lesssim \sigma \lesssim 0.41$ ) оба слагаемых в системе (1.11) оказывают существенное влияние на динамику ансамбля связанных отображений Эно и практически невозможно выделить, какому из них принадлежит доминирующая роль. Формирование тех или иных сложных пространственно-временных структур в кольце (1.11) зависит как от собственной (локальной) динамики отображения Эно, определяемой эффективным значением параметра  $\alpha_{\text{eff}} = (1 - \sigma)\alpha$ , так и от влияния соседних  $2P$  осцилляторов  $\Phi_i$ .

В области полной некогерентности (пространственно-временного хаоса) при  $\sigma < 0.2$  первое слагаемое имеет большее значение, чем второе. При  $\sigma \rightarrow 0$  величина функции воздействия стремится к нулю, все элементы ансамбля ведут себя как изолированные осцилляторы и демонстрируют хаотическую динамику, определяемую заданными значениями параметров индивидуального отображения Эно.

## 1.5 Амплитудная и фазовая химеры в кольце генераторов Анищенко–Астахова с нелокальным взаимодействием

В работах [96, 346] было показано, что переход от режима полной синхронизации к режиму пространственно-временного хаоса сопровождается возникновением химерных состояний и в кольцах нелокально связанных дифференциальных систем с удвоением периода. Индивидуальные элементы этих ансамблей описываются либо уравнениями системы Ресслера [96], либо модели генератора Анищенко–Астахова [346]. Бифуркационные сценарии «когерентность–некогерентность» в указанных ансамблях демонстрируют аналогичную картину эволюции пространственно-временных режимов, которая была детально описана для колец нелокально связанных логистических отображений (1.1) и отображений Эно (1.10). Отличительной особенностью динамики ансамблей нелокально связанных дифференциальных систем является тот факт, что при переходе «когерентность–некогерентность» в них первой возникает амплитудное химерное состояние.

С целью наглядного подтверждения и обобщения рассмотрим кольцо генераторов Анищенко–Астахова [363, 364] с нелокальной связью, заданное уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= mx_i + y_i - x_i z_i + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (x_j - x_i), \\ \frac{dy_i}{dt} &= -x_i + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (y_j - y_i), \\ \frac{dz_i}{dt} &= g[\Phi(x_i) - z_i], \quad \Phi(x_i) = \frac{x_i}{2} (x_i + |x_i|).\end{aligned}\tag{1.12}$$

В уравнениях (1.12)  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$  и  $z_i(t)$  – безразмерные динамические переменные, задающие состояние  $i$ -го генератора,  $i = 1, 2, \dots, N$  – номер генератора;  $t$  – безразмерное время;  $m$  и  $g$  – управляющие параметры генератора;  $\sigma$  – пара-

метр (сила) нелокальной связи;  $P$  – число соседних генераторов слева и справа от  $i$ -го генератора. Граничные условия являются периодическими с периодом  $N$ :  $x_0 = x_N$ ,  $y_0 = y_N$ ,  $z_0 = z_N$ .

Рассмотрим кольцо из  $N = 100$  генераторов и зафиксируем радиус связи  $r = P/N = 0.25$ . Для управляющих параметров индивидуального генератора выберем значения  $m = 1.49$  и  $g = 0.2$ , которые отвечают режиму динамического хаоса. Хаотический аттрактор спирального типа, реализующийся в генераторе Анищенко–Астахова при данных значениях параметров, возникает в результате каскада бифуркаций удвоения периода и относится к классу негиперболических хаотических аттракторов [60, 61, 360, 363, 364, 366]. Кроме того, сечение Пуанкаре данного хаотического аттрактора порождает отображение, которое может быть описано двумерным отображением Эно [61, 360, 363, 364].

На рисунке 1.22 приведены результаты расчетов для ансамбля (1.12) при уменьшении значений параметра связи  $\sigma$ . В левой колонке рисунка 1.22 представлены мгновенные профили переменных  $x_i$ , правая колонка иллюстрирует пространственно-временные профили для координаты  $y_i$  в сечении Пуанкаре плоскостью  $x_i = 0$ . Из рисунка 1.22,а,б (левая колонка) видно, что наличие разрыва вертикального фронта мгновенного профиля  $x_i$  не ведет к образованию химерных состояний (рисунок 1.22,а,б, правая колонка). Амплитудное химерное состояние возникает только в случае, когда элементы кольца переходят в режим хаоса (рисунок 1.22,в,г, правая колонка). Развитая химера реализуется, когда степень хаотической динамики достаточно высока (рисунок 1.22,в, левая колонка), что хорошо согласуется с результатами для кольца логистических отображений (см. раздел 1.2). Отметим, что как и для логистических отображений (рисунок 1.12), хаотизация колебаний имеет место в ограниченном кластере генераторов  $30 < i < 50$ , который соответствует области некогерентности амплитудной химеры.

На рисунке 1.23,а [97] показан мгновенный профиль значений амплитуд колебаний (значений переменных  $x_i$ ), соответствующий режиму амплитудной

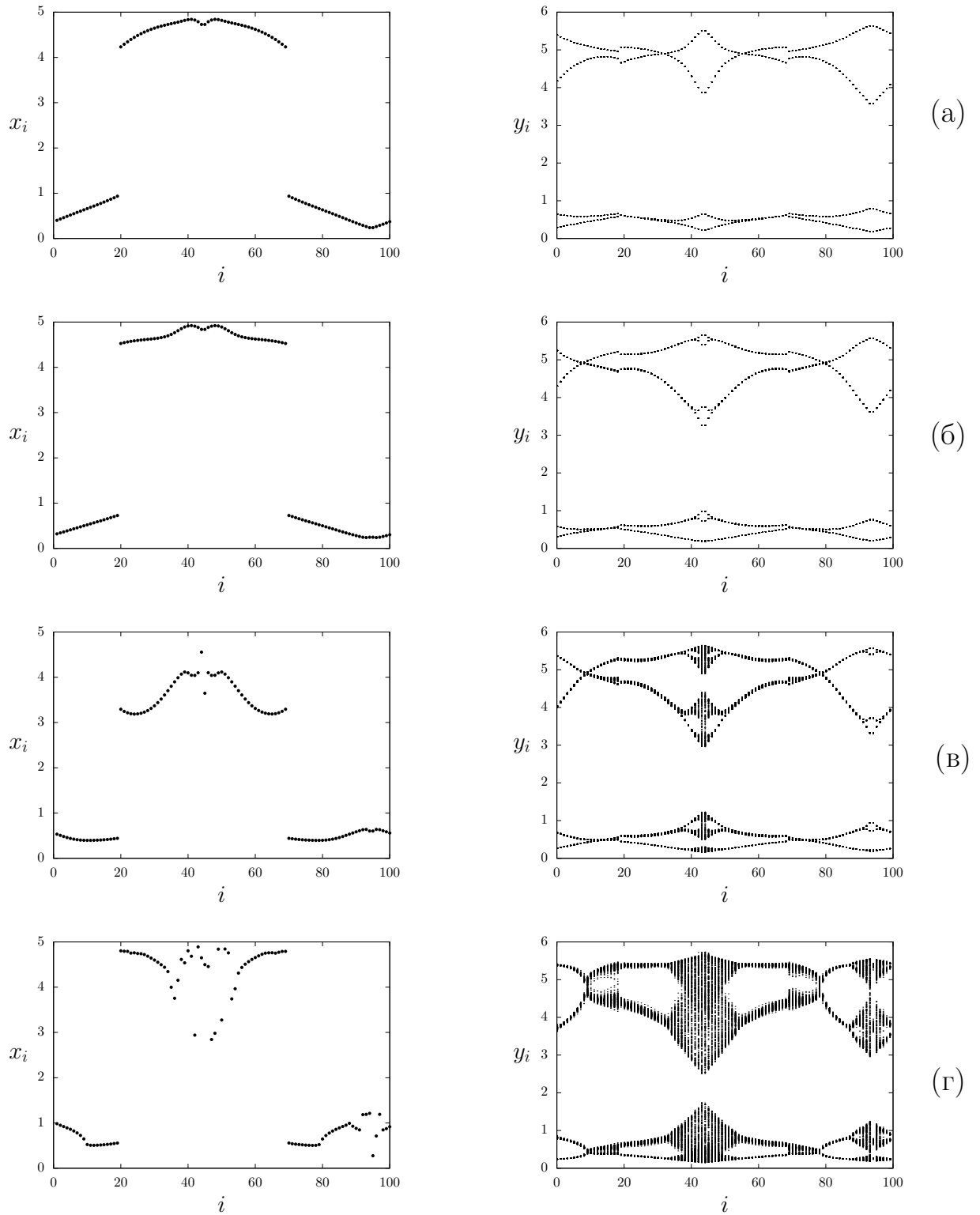


Рисунок 1.22. Возникновение амплитудной химеры в ансамбле нелокально связанных генераторов Анищенко–Астахова (1.12). Мгновенные профили переменных  $x_i$  (левая колонка) и пространственно-временные профили для координат  $y_i$  в отображении Пуанкаре (правая колонка) при уменьшении силы связи  $\sigma$ : (а)  $\sigma = 0.08$ , (б)  $\sigma = 0.07$ , (в)  $\sigma = 0.059$ , (г)  $\sigma = 0.04$ .

Параметры системы (1.12):  $r = 0.25$ ,  $m = 1.49$ ,  $g = 0.2$ ,  $N = 100$

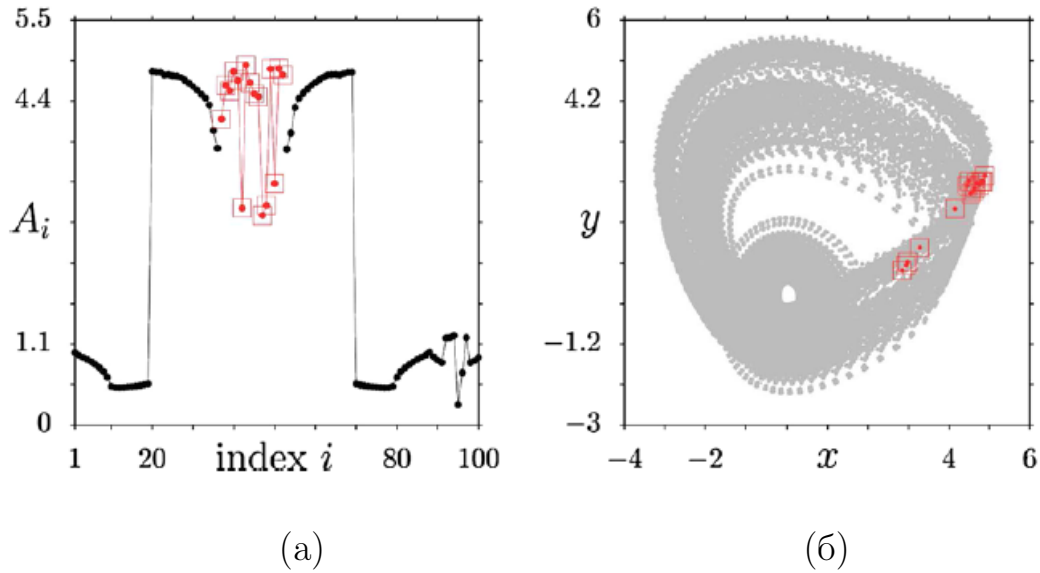


Рисунок 1.23. Иллюстрация режима амплитудной химеры в кольце генераторов Анищенко–Астахова (1.12 при  $\sigma = 0.04$ ). (а) Мгновенный профиль значений амплитуд  $A_i$  (переменных  $x_i$ ). Красными точками в квадратах отмечены осцилляторы некогерентного кластера амплитудной химеры. (б) Проекция двухленточного хаотического аттрактора на плоскость переменных  $(x, y)$ , реализующегося в индивидуальном генераторе, на которую нанесены значения амплитуд (красные точки в квадратах) осцилляторов амплитудной химеры. Параметры ансамбля (1.12:  $r = 0.25$ ,  $m = 1.49$ ,  $g = 0.2$ ,  $N = 100$  [97])

химеры в кольце генераторов Анищенко–Астахова (1.12 при  $\sigma = 0.04$  (см. также рисунок 1.22,г). На этом же рисунке 1.23,а красными точками в квадратах отмечены мгновенные значения состояний осцилляторов ансамбля, которые принадлежат некогерентному кластеру амплитудной химеры. На рисунке 1.23,б приведена проекция хаотического аттрактора на плоскость переменных  $(x, y)$ , который реализуется в индивидуальном генераторе при выбранных значениях параметров  $m = 1.4$  и  $g = 0.2$ . В этом случае предельное множество представляет собой двухленточный хаотический аттрактор. Из рисунка 1.23,б видно, что мгновенные значения состояний осцилляторов амплитудной химеры (отмечены красными точками в квадратах) располагаются в ограниченной области боль-

шой ленты хаотического аттрактора и характеризуются небольшим случайным распределением вдоль траектории.

По аналогии с предыдущими исследованиями (разделы 1.2 и 1.5), для ансамбля (1.12) также была проанализирована динамика слагаемого связи при переходе к режиму амплитудной химеры. В качестве примера была выбрана функция связи по переменным  $x_i$  (второе слагаемое в первом уравнении системы (1.12)):

$$F_x(i, t) = \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (x_j - x_i). \quad (1.13)$$

Установлено, что возникновению амплитудной химеры предшествуют бифуркации удвоения периода и переход к хаотическому поведению слагаемого связи. Результаты расчетов представлены на рисунке 1.24 в виде эволюции

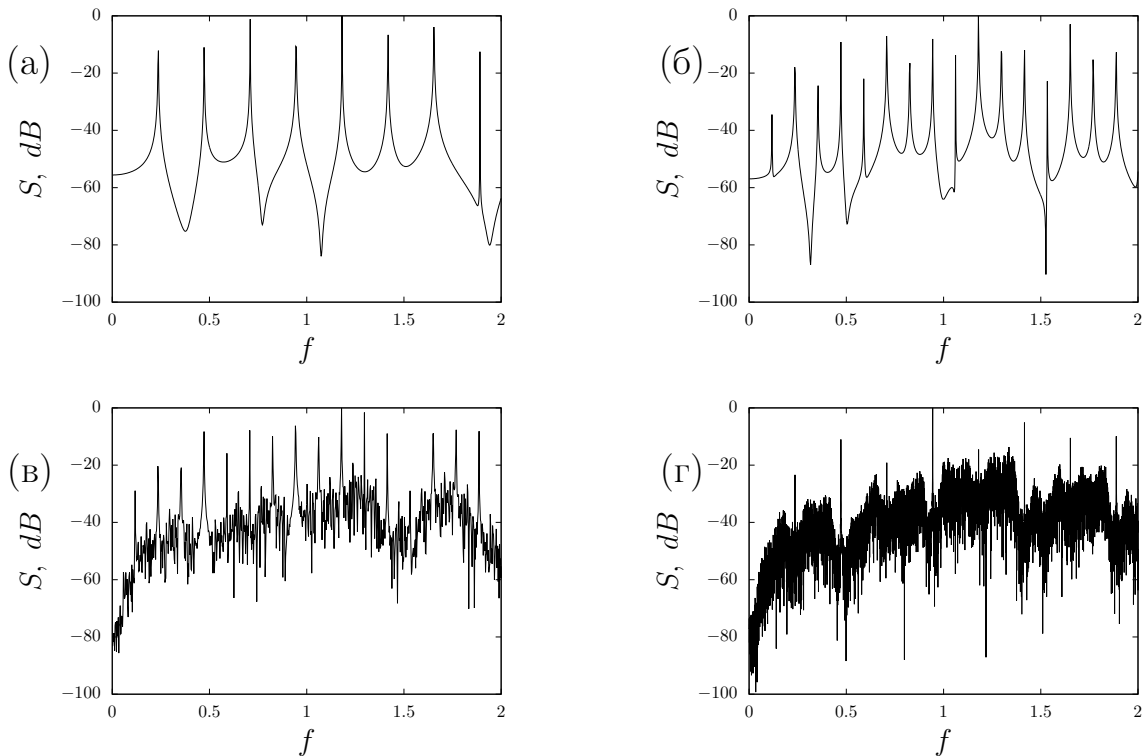


Рисунок 1.24. Спектры мощности колебаний слагаемого связи  $F_x(i, t)$  (1.12) для элемента с номером  $i = 43$  при уменьшении силы связи  $\sigma$ : (а)  $\sigma = 0.08$ , (б)  $\sigma = 0.07$ , (в)  $\sigma = 0.059$ , (г)  $\sigma = 0.04$ . Другие параметры те же, что и на рисунке 1.22

спектров мощности колебаний  $S(\omega)$ . Представленные данные четко свидетельствуют о хаотизации связи в момент рождения амплитудной химеры.

В ансамбле связанных генераторов Анищенко—Астахова с нелокальной связью удалось также получить и фазовые химерные состояния, которые реализуются при определенных значениях параметров связи  $\sigma$  и  $r$  и специально подобранных начальных условиях [97]. В качестве иллюстрации на рисунке 1.25,а показан мгновенный профиль значений амплитуд  $A_i$  (переменных  $x_i$ ), иллюстрирующий сосуществование фазовой и амплитудной химер. Отметим, что данная пространственно-временная структура реализуется при тех же значениях параметров нелокальной связи,  $\sigma = 0.04$ ,  $r = 0.25$ , как и в случае существования только амплитудной химеры, но при других, специально под-

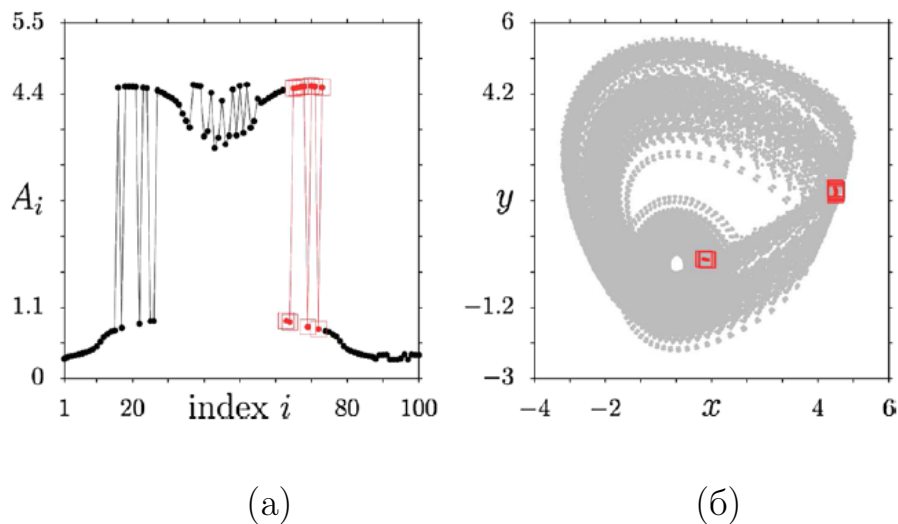


Рисунок 1.25. Иллюстрация фазовой химеры в кольце генераторов Анищенко—Астахова (1.12, полученной при специальных начальных условиях.

(а) Мгновенный профиль значений амплитуд  $A_i$  (переменных  $x_i$ ). Красными точками в квадратах отмечены осцилляторы некогерентного кластера фазовой химеры. (б) Проекция на плоскость переменных  $(x, y)$

двухленточного хаотического аттрактора, реализующегося в индивидуальном генераторе, на которую нанесены значения амплитуд (красные точки в квадратах) осцилляторов фазовой химеры. Параметры ансамбля (1.12:

$$\sigma = 0.04, r = 0.25, m = 1.49, g = 0.2, N = 100 [97]$$



готовленных начальных условиях. Данный факт доказывает наличие высокой степени мультистабильности в ансамблях элементов с нелокальной связью в режимах химерных состояний. Как видно из рисунка 1.25,а, в ансамбле (1.12) возникают два некогерентных кластера фазовой химеры, характеризующихся случайным чередованием осцилляторов между нижним и верхним уровнями мгновенного профиля. Осцилляторы, принадлежащие правому кластеру фазовой химеры, отмечены на рисунке красными точками в квадратиках. Аналогично рисунку 1.23,б, распределение амплитуд колебаний осцилляторов фазовой химеры, отмеченных на рисунке 1.25,а, показано на проекции двухленточного хаотического аттрактора на плоскость переменных  $(x, y)$  (рисунок 1.25,б). Из приведенного графика видно, что часть состояний с меньшей амплитудой (нижний уровень мгновенного профиля) принадлежит малой ленте предельного множества, а другая часть, с бóльшей амплитудой (верхний уровень мгновенного профиля), локализована на большой петле. На основании приведенных результатов можно заключить, что формирование фазовой химеры в ансамблях нелокально связанных дифференциальных систем возможно только при наличии многообходного хаотического аттрактора в индивидуальном осцилляторе.

## 1.6 Выводы по первой главе

В настоящей главе представлены результаты численного анализа динамики ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов, которые описываются логистическим отображением, отображением Эно и моделью генератора Анищенко—Астахова в хаотическом режиме. На основании проведенных исследований можно сформулировать следующие основные выводы.

1. Представлен детальный анализ бифуркационного перехода «когерентность—некогерентность» в кольце нелокально связанных логистических отображений и отображений Эно в хаотическом ре-

жиме на основе эволюции мгновенных пространственных профилей, пространственно-временных профилей динамики ансамблей и функции связи при уменьшении силы нелокальной связи. Показано, что основные этапы перехода включают режимы полной хаотической синхронизации (полной когерентности), колебательной (частичной) хаотической синхронизации (данный режим установлен и описан впервые), фазовой и амплитудной химерных состояний, пространственно-неупорядоченных периодических колебаний и пространственно-временного хаоса (полной некогерентности).

2. Показано, что глобальный переход от режима полной хаотической синхронизации к пространственно-временному хаосу характеризуется промежуточным состоянием в виде химерных структур двух типов — фазовой и амплитудной, которые впервые введены в рассмотрение в работе.
3. Установлено, что бифуркационный переход «когерентность-некогерентность» является общим для ансамблей нелокально связанных хаотических систем с удвоением периода и характеризующихся хаотическим аттрактором негиперболического типа.
4. Для анализа перехода «когерентность—некогерентность» впервые применен корреляционный подход, основанный на расчетах коэффициента взаимной корреляции между первым и  $i$ -м элементами ансамбля, и получена количественная оценка статистических характеристик рассматриваемых динамических режимов.
5. Вскрыты и описаны механизмы и необходимые условия возникновения фазовых и амплитудных химерных состояний, определены и проанализированы их структура и основные особенности. Показано, что возникновению фазовой химеры предшествует не только формирование вертикального фронта мгновенного профиля (обращение пространственной производной в бесконечность) и дальнейший его разрыв, но и переход как функции связи,

так и всех элементов ансамбля в режим слабо хаотических колебаний (подобных «зашумленным» периодическим колебаниям). Некогерентные кластеры фазовой химеры представляют собой случайное чередование осцилляторов с периодическими или слабо хаотическими колебаниями, которые сдвинуты по «фазе» на одну итерацию (полпериода). Усиление степени хаотичности в поведении группы осцилляторов ансамбля и соответствующей им функции связи ведет к появлению амплитудного химерного состояния, кластеры некогерентности которой характеризуются развитой хаотической динамикой элементов и нерегулярным разбросом мгновенных амплитуд.

6. Определены статистические свойства фазовых и амплитудных химер. Установлено, что в областях пространственной некогерентности фазовой химеры имеют место скачки значений коэффициента взаимной корреляции  $R_{1i}$  между значениями  $\pm 1$ , которые подтверждают случайное чередование синфазных и противофазных колебаний, что является главной особенностью химерного состояния фазового типа. Значение коэффициента взаимной корреляции существенно уменьшается в кластере некогерентности амплитудной химеры. Минимум корреляции соответствует его центру, где имеет место наиболее развитый хаос. Спад пространственной корреляции соответствует несинхронному хаотическому поведению осцилляторов в области некогерентности амплитудной химеры. Таким образом, в отличие от фазовой химеры, амплитудная химера позволяет говорить о «настоящей» некогерентности колебаний, которые становятся некогерентными не только в пространстве, но и во времени.

## Глава 2. Переход «когерентность – некогерентность» в ансамблях нелокально связанных хаотических систем с квазигиперболическим аттрактором

### 2.1 Введение

Исследования динамики ансамблей связанных осцилляторов с хаотическим поведением должно проводиться с учетом характеристик хаотических аттракторов индивидуальных элементов ансамблей. В теории динамических систем в качестве основных различают следующие типы хаотических аттракторов: грубые гиперболические (странные) аттракторы, квазигиперболические и негиперболические (негрубые) аттракторы или квазиаттракторы [367–369]. Грубые гиперболические аттракторы представляют собой наиболее простой тип хаотических притягивающих множеств в фазовом пространстве динамических систем размерности 3 и более. Гиперболические аттракторы в области их существования по параметрам характеризуются устойчивостью по Пуассону, не претерпевают внутренних бифуркаций при вариации параметров и мало чувствительны к незначительным внешним возмущениям [384]. Эти свойства гиперболических аттракторов позволили математикам доказать ряд важных теорем, характеризующих эффект динамического хаоса [385]. Обычно такие аттракторы представляют собой некоторую математическую идеализацию и в экспериментах, как правило, не наблюдаются. В математике известны, по крайней мере, два примера грубых гиперболических аттракторов: аттрактор (соленоид) Смейла-Вильямса [386] и аттрактор Плыкина [387, 388]. Совсем недавно

был предложен ряд моделей динамических систем, а также механические и радиофизические системы, в которых возможна реализация режимов однородно гиперболических аттракторов [389–393].

Квазигиперболические аттракторы наиболее близки по своим характеристикам к грубым гиперболическим. Они не включают устойчивых по Ляпунову регулярных подмножеств и не демонстрируют внутренних бифуркаций при вариации параметров в конечном интервале. Отличие квазигиперболических аттракторов от строго гиперболических заключается в том, что для них существуют области в фазовом пространстве, в которых не выполняется следующее требование: структура множества должна удовлетворять условию произведения канторова множества на интервал [368]. Нарушение этого условия важно с точки зрения строгой математики, но не оказывает влияния на результаты численного анализа. В контексте вычислительных экспериментов указанный тип хаотического аттрактора можно считать практически гиперболическим в том смысле, что этот аттрактор является единственным притягивающим множеством в фазовом пространстве и мультистабильности не наблюдается. Известными примерами динамических систем с квазигиперболическими аттракторами являются одномерное отображение типа «палатка» (tent map) [394], двумерное отображение Лози [395], дискретная модель Белыха [396, 397], модель Лоренца [398, 399] при определенных значениях параметров, которые соответствуют классическому квазигиперболическому аттрактору [365, 398–405], и другие динамические системы с аттракторами типа Лоренца [406–413].

Более распространенный и более сложный тип хаотических аттракторов относится к классу негиперболических. По терминологии Афраймовича и Шильникова этот тип притягивающих предельных множеств называют «квазиаттракторами» [367–369], особенности которого описаны в разделе 1.1 первой главы диссертации. Указанные (далеко не полностью) свойства квазигиперболических и негиперболических хаотических аттракторов, безусловно, должны

сказываться на динамических характеристиках ансамблей хаотических осцилляторов.

Впервые на различия в динамике ансамблей связанных осцилляторов с гиперболическими и негиперболическими хаотическими аттракторами было указано в работе [90]. В ней сформулирована важная гипотеза: «Химерные состояния могут рождаться только в ансамблях с негиперболическим типом хаотических аттракторов и не возникают в ансамблях осцилляторов с гиперболическим типом аттракторов». Как показали наши дальнейшие исследования, гипотеза в целом подтверждается экспериментальными (численными) расчетами. Однако, как будет представлено в настоящей главе, для более общего случая данная гипотеза нуждается в уточнении. Уточнение состоит в требовании, чтобы хаотический аттрактор в индивидуальных осцилляторах ансамбля при наличии связи с соседними осцилляторами не утрачивал свойства гиперболичности. Дело в том, что каждый отдельный осциллятор в ансамбле взаимосвязан с некоторым числом соседних осцилляторов и функционирует в неавтономном режиме. Наличие воздействия на индивидуальный осциллятор может привести к нарушению свойств гиперболичности, а может и не изменить тип хаотического аттрактора. Все зависит от конкретной рассматриваемой системы и уровня взаимосвязи осцилляторов в ансамбле.

В главе 1 диссертационной работы были рассмотрены ансамбли нелокально связанных хаотических осцилляторов, хаотические аттракторы которых возникают через каскад бифуркаций удвоения периода (сценарий Фейгенбаума) и относятся к негиперболическому типу [60, 61, 360, 363, 364, 367, 368]. В качестве индивидуальных элементов были выбраны одномерное логистическое отображение, двумерное отображение Эно и трехмерная дифференциальная система Анищенко—Астахова. Было установлено, что бифуркационный переход «когерентность—некогерентность» в указанных ансамблях сопровождается возникновением фазовых и амплитудных химерных состояний. Данная особенность является типичной для ансамблей нелокально связанных хаотических

систем с удвоениями периода и хаотическим аттрактором негиперболического типа.

В главе 2 диссертационной работы описываются результаты численных исследований динамики ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов, локальная динамика которых описывается системами с квазигиперболическими хаотическими аттракторами. В качестве парциальных осцилляторов выбраны отображение Лози и система Лоренца. Устанавливаются отличительные особенности пространственно-временной динамики данных ансамблей при изменении значений параметров нелокальной связи и проводится их сопоставление с данными, описанными в первой главе. Показывается, что в указанных ансамблях переход «когерентность—некогерентность» при уменьшении силы связи характеризуется реализацией таких пространственно-временных структур как уединенные состояния (solitary states) [62]. Возникновение и эволюция этих структур в исследуемых ансамблях хаотических систем исследуются и описываются впервые. Особенно ярко данный сценарий проявляется в случае ансамбля нелокально связанных отображений Лози.

Особое внимание во второй главе уделяется анализу пространственно-временных структур в кольце связанных систем Лоренца, реализуемых при слабой силе нелокальной связи. Этот вопрос практически не был отражен в литературе по исследованию бифуркационных переходов к пространственной некогерентности [96]. Впервые показано, что даже в случае, когда индивидуальный элемент характеризуется классическим квазигиперболическим аттрактором Лоренца, помимо уединенных состояний в ансамбле могут наблюдаться химерные состояния различных типов и эффекты перемежаемости между различными режимами функционирования элементов как во времени, так и пространстве. Как установлено, формирование данных структур и реализация связанных с ними эффектов обусловлены потерей квазигиперболических свойств хаотическими аттракторами в индивидуальных системах Лоренца за счет влияния нелокальной связи.

Материалы второй главы основаны на результатах, опубликованных в работах [98, 339, 344, 347, 348, 372, 373, 414].

## 2.2 Переход «когерентность-некогерентность» в кольце нелокально связанных отображений Лози

### 2.2.1 Модель и диаграмма режимов

В данном разделе исследуется пространственно-временная динамика замкнутого в кольцо одномерного ансамбля двумерных отображений Лози с нелокальным типом связи [347, 348]. Уравнения системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f_x(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f_x(x_j^t, y_j^t) - f_x(x_i^t, y_i^t)], \\ y_i^{t+1} &= f_y(x_i^t, y_i^t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обозначения параметров в системе (2.1) те же самые, что и для ансамбля нелокально связанных отображений Эно (1.10) (раздел 1.4), но функции  $f_x(x, y)$  и  $f_y(x, y)$  теперь определяются первым и вторым уравнениями двумерного отображения Лози [395], соответственно:

$$f_x(x, y) = 1 - \alpha|x| + y, \quad f_y(x, y) = \beta x, \quad (2.2)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — управляющие параметры отображения.

Отображение Лози (2.2) представляет собой нелинейное взаимно однозначное диссипативное (для  $\beta < 1$ ) отображение, которое при  $\beta \rightarrow 0$  переходит в известное одномерное квазигиперболическое отображение «палатка» (tent map) [394]. Теоретически было доказано [404], что хаотический аттрактор в системе (2.2) является квазигиперболическим (или обобщенным гиперболи-



ческим), так как для него нарушается одно из условий гиперболичности. Рождению хаотического аттрактора в отображении Лози не предшествует каскад бифуркаций удвоения периода, он возникает жестко при  $\alpha = 1.3$ . Показано, что в области значений  $1.3 \lesssim \alpha \lesssim 1.8$  этот аттрактор является единственным притягивающим предельным множеством на фазовой плоскости, не содержит устойчивых неподвижных точек (мультистабильность отсутствует), не претерпевает внутренних бифуркаций в при изменении параметров  $\alpha$  и  $\beta$  и имеет однородный бассейн притяжения. Это доказывается зависимостями старшего ляпуновского показателя от параметра  $\alpha$  и изменения начальных условий, которые в обоих случаях представляют собой гладкие функции [364].

Поскольку отображение (2.2) является диффеоморфизмом, его можно обоснованно рассматривать как отображение Пуанкаре некоторой дифференциальной системы с размерностью фазового пространства  $N = 3$ . Было показано [404], что отображение Лози моделирует отображение, возникающее в секущей плоскости трехмерных дифференциальных систем с аттракторами типа Лоренца. Таким образом, можно полагать, что особенности динамики систем связанных отображений Лози могут иметь место и в случае ансамблей связанных систем с непрерывным временем с квазигиперболическими хаотическими аттракторами типа Лоренца.

По аналогии с кольцом нелокально связанных отображений Эно (см. раздел 1.4) представим систему (2.1) в модифицированной форме:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= (1 - \sigma)f_x(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P; j \neq i}^{i+P} f_x(x_j^t, y_j^t), \\ y_i^{t+1} &= \beta y_i^t, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $f_x(x, y) = 1 - \alpha|x| + y$ . Второе слагаемое в (2.3) есть функция  $\Phi_i$ , которая описывает воздействие  $2P$  соседних осцилляторов на данный осциллятор. По аналогии с ансамблем отображений Эно, будем называть  $\Phi_i$  функцией воздействия.

Пространственно-временная динамика ансамбля (2.1) и (2.3) анализируется численно для  $N = 1000$  элементов, периодических граничных условий и начальных условий  $x_i^0, y_i^0$ , случайно распределенных в интервале  $[-0.5, 0.5]$ . Значения параметров индивидуальных осцилляторов выбираются равными  $\alpha = 1.4, \beta = 0.3$ , что соответствует наличию квазигиперболического хаотического аттрактора в изолированном отображении (2.2). В процессе численного моделирования динамики ансамбля рассчитываются и строятся мгновенные профили значений переменных  $x_i$  в фиксированный момент времени, пространственно-временные профили элементов всего ансамбля и функции  $\Phi_i$ .

Основные динамические режимы, которые реализуются в кольце нелокально связанных отображений Лози (2.1) при изменении значений параметров связи, отражены на бифуркационной диаграмме, показанной на рисунке 2.1 на плоскости параметров нелокальной связи «радиус связи  $r$  — сила связи  $\sigma$ ».

Область  $A$  соответствует режиму полной хаотической синхронизации, область  $B$  — режиму пространственно-временного хаоса или полной некогерентности колебаний элементов ансамбля. На диаграмме, приведенной на рисунке 2.1, можно также видеть две узкие области,  $C$  и  $D$ , которые характеризуются гладкими пространственными профилями (см. соответствующие вставки на рисунке 2.1) и соответствуют когерентным режимам с волновыми числами  $k = 1, 2$ , соответственно. Однако динамика элементов во времени в этих областях является квазипериодической. Аналогичные режимы были найдены в ансамбле нелокально связанных отображений Эно. Они наблюдаются в заштрихованной области, показанной на бифуркационной диаграмме рисунка 1.18, и их реализация сильно зависит от задания начальных условий. Отметим, что по сравнению с областями когерентности  $C$  и  $D$  для ансамбля отображений Эно (рисунок 1.18), в областях  $C$  и  $D$  для ансамбля отображений Лози нельзя выделить подобласти с временной периодичностью, соответствующие бифуркациям удвоения периода колебаний элементов во времени.

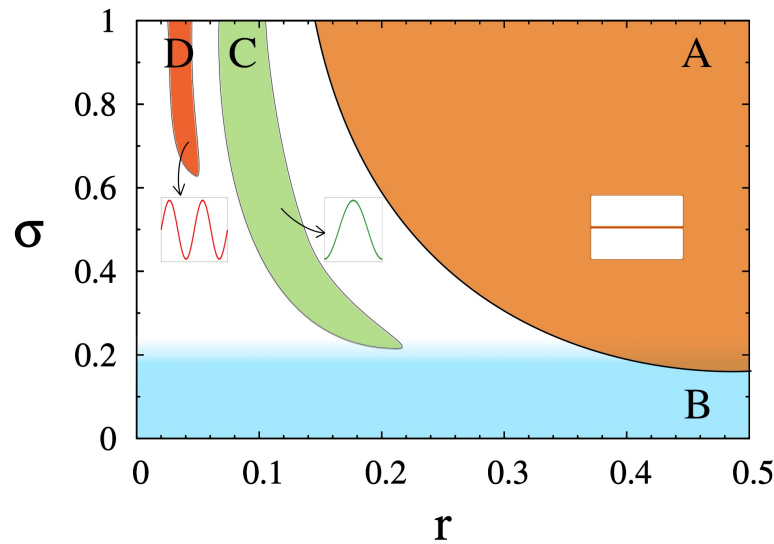


Рисунок 2.1. Диаграмма режимов ансамбля (2.3) на плоскости параметров  $(r, \sigma)$ .  $A$  – область полной хаотической синхронизации,  $B$  – область пространственно-временного хаоса,  $C$  и  $D$  соответствуют областям когерентности с волновыми числами  $k = 1, 2$ , соответственно. Область белого цвета отвечает режимам, близким к когерентным. На вставках показаны типичные мгновенные профили когерентных состояний. Параметры ансамбля:

$$\alpha = 1.4, \beta = 0.3, N = 1000$$

Область белого цвета на бифуркационной диаграмме рисунка 2.1 соответствует режимам, близким к когерентным. В зависимости от начальных условий пространственный когерентный профиль может довольно сильно меняться, а динамика элементов во времени может быть периодической или квазипериодической. Кроме того, при определенных значениях силы связи  $\sigma$ , радиуса связи  $r$  и начальных условиях в ансамбле отображений Лози могут наблюдаться режимы бегущих волн. Однако выделить область их существования с четкими границами на плоскости параметров  $(r, \sigma)$  не представляется возможным.

Из сравнения диаграмм режимов, полученных для ансамблей нелокально связанных отображений Эно (рисунок 1.18) и Лози (рисунок 2.1), видно, что они заметно отличаются друг от друга. Похожими являются только области полной хаотической синхронизации  $A$  и пространственно-временного хаоса  $B$ .

В связи с этим представляется интересным исследовать детали перехода от когерентности к некогерентности в ансамбле связанных отображений Лози (2.3).

### 2.2.2 Динамика ансамбля нелокально связанных отображений Лози

Для проведения численных исследований мы фиксируем значение радиуса связи  $r = 0.193$  и будем двигаться в этом сечении бифуркационной диаграммы (рисунок 2.1), уменьшая значение силы связи  $\sigma$  от 1 до 0.

Эволюция динамики системы (2.3) проиллюстрирована на рисунке 2.2 мгновенными профилями состояний  $x_i$  в момент времени  $t = 10^4$  (левая колонка), пространственно-временными профилями динамики ансамбля (центральная колонка) и функции воздействия  $\Phi_i$  (правая колонка). Как и при исследовании динамики ансамбля нелокально связанных отображений Эно (см. раздел 1.4), для построения пространственно-временных профилей в данном случае на графиках выводятся 50 последних итераций  $x_i^t$  и  $\Phi_i^t$  ( $9950 \leq t \leq 10000$ ) для каждого элемента ансамбля (2.3)  $1 \leq i \leq 1000$ .

При  $\sigma \in [0.62; 1.0]$  (область  $A$  на рисунке 2.1) элементы ансамбля (2.3) находятся в режиме полной хаотической синхронизации (рисунок 2.2,а). В этом случае динамика ансамбля полностью аналогична соответствующим режимам, реализующимся в ансамблях логистических отображений (рисунки 1.4 и 1.5) и отображений Эно (рисунок 1.19,а).

С уменьшением  $\sigma$  в интервале  $[0.48; 0.62]$  (белая область между областями  $C$  и  $A$  на рисунке 2.1) реализуется режим, соответствующий режиму колебательной хаотической синхронизации, который имеет место как в кольце нелокально связанных логистических отображений (рисунки 1.6 и 1.7), так и отображений Эно (рисунок 1.19,б). Как видно из рисунка 2.2,б, этому режиму

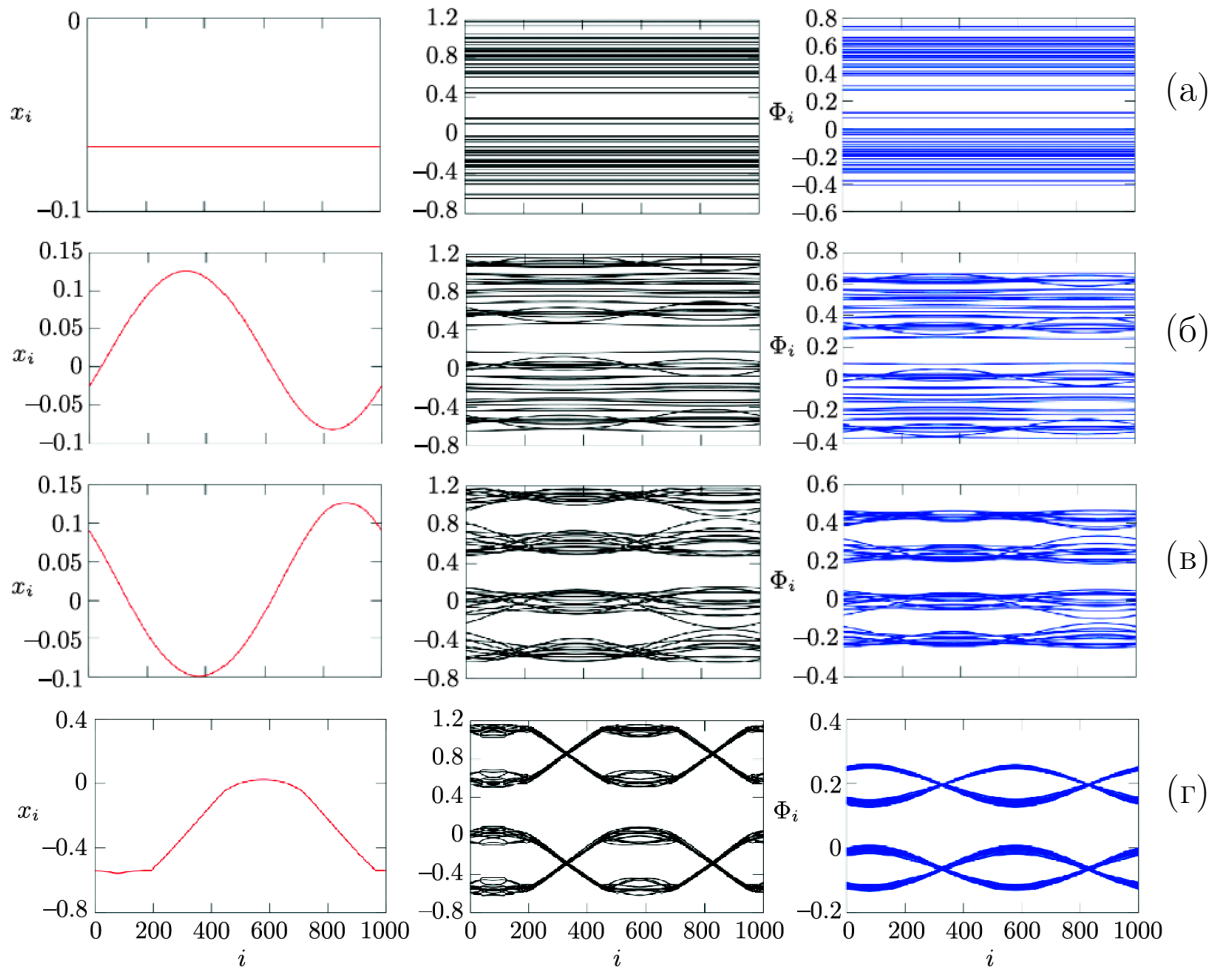


Рисунок 2.2. Мгновенные профили для переменных  $x_i$  (левая колонка) ансамбля (2.3) и пространственно-временные профили динамики ансамбля (центральная колонка) и функции воздействия  $\Phi_i$  (правая колонка) при уменьшении коэффициента связи  $\sigma$ : (а) 0.63, (б) 0.57, (в) 0.4, (г) 0.23. Другие параметры:  $r = 0.193$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $N = 1000$

отвечают гладкий волнообразный пространственный профиль (слева), соответствующий режиму пространственной когерентности, и хаотическая во времени динамика элементов ансамбля (в центре) и функции воздействия (справа).

Дальнейшее уменьшение значений силы связи  $\sigma \in [0.23; 0.48]$  не меняет пространственно-когерентной динамики ансамбля (рисунок 2.2, в, слева), но значения переменных  $x_i$  (рисунок 2.2, в, в центре) и функции  $\Phi_i$  (рисунок 2.2, в, справа) разделяются на 4 области, соответствующие слаборазвитому 4-ленточному хаотическому аттрактору в индивидуальных осцилляторах

ансамбля. Далее разброс амплитуд переменных  $x_i$  становится меньше и при  $\sigma \simeq 0.23$  в ансамбле (2.3) реализуется временная динамика, близкая к квазипериодической (рисунок 2.2,г, в центре и справа). При этом мгновенное пространственное распределение значений  $x_i$  (рисунок 2.2,г, слева) имеет вид гладкого когерентного волнообразного профиля.

Как показывают исследования, при уменьшении силы связи  $\sigma \leq 0.226$ , то есть при переходе в область пространственно-временного хаоса (область  $B$  на диаграмме рисунка 2.1), в кольце нелокально связанных отображений Лози реализуются режимы, которые не наблюдались в ансамблях нелокально связанных логистических отображений и отображений Эно. Для этих режимов характерны резкие выбросы амплитуд для отдельных осцилляторов ансамбля, которые происходят случайным образом, а сами осцилляторы располагаются в различных частях ансамбля. Подобные режимы в литературе были названы *уединенными состояниями* (в английской терминологии – *solitary states*) [62]. Эволюция режимов динамики ансамбля (2.3), демонстрирующих уединенные состояния, приведена на рисунке 2.3 при уменьшении значения коэффициента связи  $\sigma$ .

При  $\sigma \approx 0.226$  в ансамбле возникает только одно уединенное состояние (рисунок 2.3,а, слева). Как видно из мгновенных профилей на рисунке 2.3,б–г (левая колонка), число этих состояний увеличивается с уменьшением силы связи  $\sigma$ . Особенностью поведения осцилляторов в режиме уединенных состояний является то, что их временная динамика отличается от поведения во времени других осцилляторов ансамбля, которые в свою очередь могут либо находиться в когерентном режиме, либо быть полностью синхронизованными [63]. Таким образом, в режиме уединенных состояний ансамбль демонстрирует сочетание синхронной и асинхронной динамики в пространстве, что соответствует определению химерного состояния. Однако отличие от химерных состояний заключается в том, что уединенные состояния не формируют кластеров некогерентности с четкими границами в пространстве ансамбля. Как видно из рисунка 2.3,

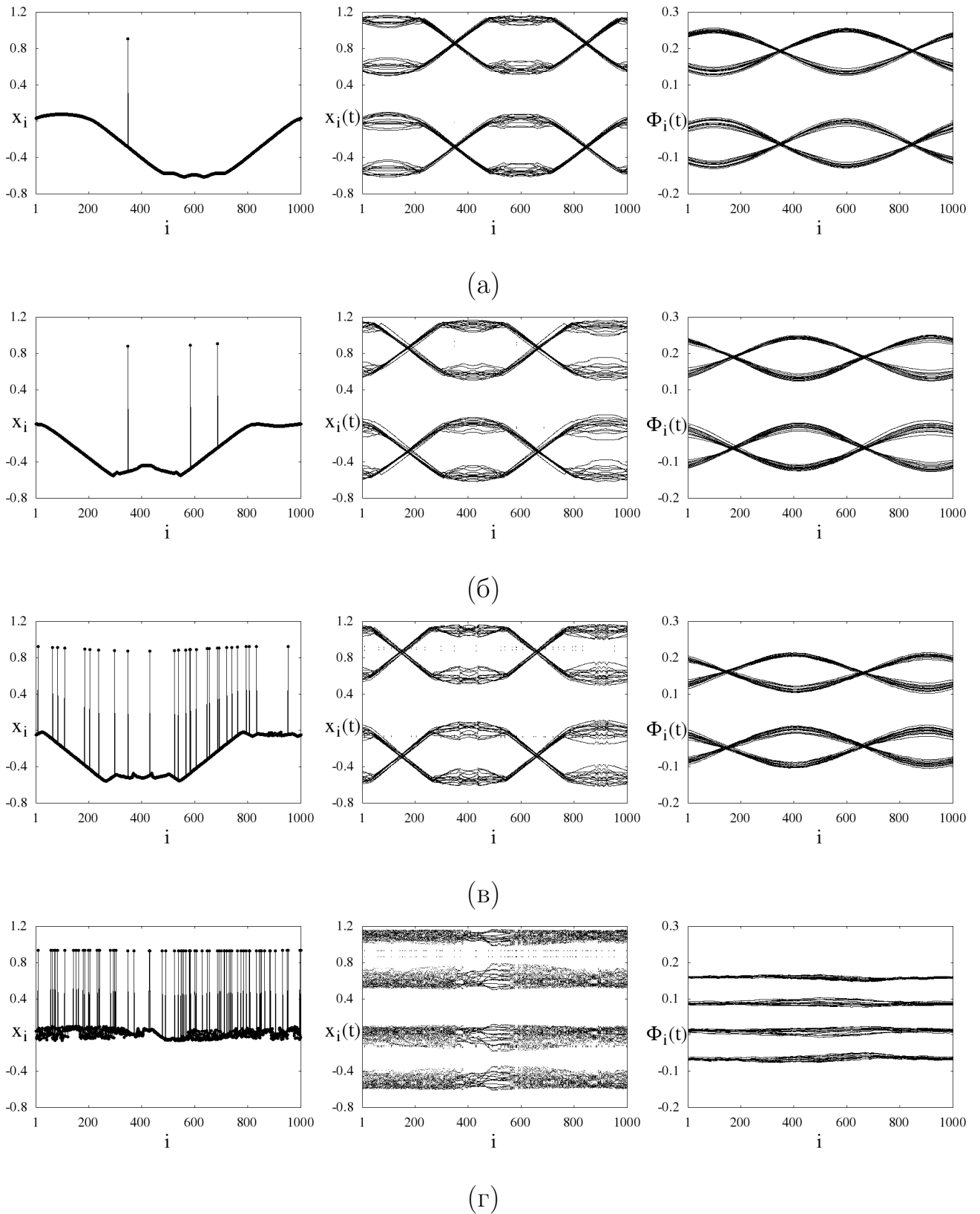


Рисунок 2.3. Эволюция мгновенных профилей для переменных  $x_i$  (левая колонка) ансамбля (2.3) и пространственно-временных профилей динамики ансамбля (центральная колонка) и функции воздействия  $\Phi_i$  (правая колонка) при уменьшении коэффициента связи  $\sigma$ : (а) 0.226, (б) 0.222, (в) 0.193, (г) 0.157. Другие параметры как для рисунка 2.2

левая колонка, с уменьшением коэффициента связи  $\sigma$  в ансамбле возникают группы осцилляторов в режиме уединенных состояний, напоминающие химерные структуры. Однако число осцилляторов в режиме уединенных состояний довольно сильно зависит от величины связи, что не удовлетворяет определению химерных состояний с точки зрения относительной устойчивости некогерентных кластеров по отношению к малой вариации значений параметров нелокальной связи. В связи с этим можно сделать вывод, что структуры, реализующиеся при уменьшении параметра связи  $\sigma$  (рисунок 2.3, левая колонка), не являются химерными состояниями.

Как видно из рисунка 2.3,а-в, возникновение конечного (небольшого) числа уединенных состояний практически не влияет на форму и вид пространственно-временных профилей динамики ансамбля (в центре) и функции воздействия (справа). Временная динамика элементов из когерентной области остается прежней, как и до возникновения уединенных состояний (рисунок 2.2,г). Однако на пространственно-временных профилях динамики ансамбля (рисунок 2.3,а-г, центральная колонка) появляются точки, отражающие динамику во времени осцилляторов в уединенном состоянии и соответствующие регулярным колебаниям периода 4. Значительное изменение вида пространственно-временных профилей и явный переход в режим пространственно-временного хаоса происходит в случае, когда количество осцилляторов в режиме уединенных состояний резко возрастает (рисунок 2.3,г). Значения  $x_i^t$ , соответствующие мгновенным состояниям осцилляторов в области когерентности, на графиках пространственно-временного профиля образуют 4 горизонтальные полосы, отвечающие 4-ленточному хаотическому множеству (рисунок 2.3,г, в центре). Такой же характер имеет и пространственно-временной профиль функции связи (рисунок 2.3,г, слева).

Как показали численные исследования, переход к режиму полной некогерентности в ансамбле нелокально связанных отображений Лози при уменьшении силы нелокальной связи происходит через последовательное увеличение



числа осцилляторов в режиме уединенных состояний. При этом возникновения химерных состояний не наблюдалось. На рисунке 2.4 приведены численные результаты динамики ансамбля отображений Лози для очень слабой нелокальной связи ( $\sigma \leq 0.07$ ). Как хорошо видно из мгновенных профилей (рисунок 2.4, левая колонка), все больше и больше осцилляторов демонстрируют резкие выбросы амплитуд и переходят в режим уединенных состояний. Наши расчеты показали, что независимо от начальных условий число уединенных состояний растет практически линейно с уменьшением силы связи. Результаты расчета зависимости числа уединенных состояний от значений силы связи  $\sigma$  приведены на рисунке 2.5.

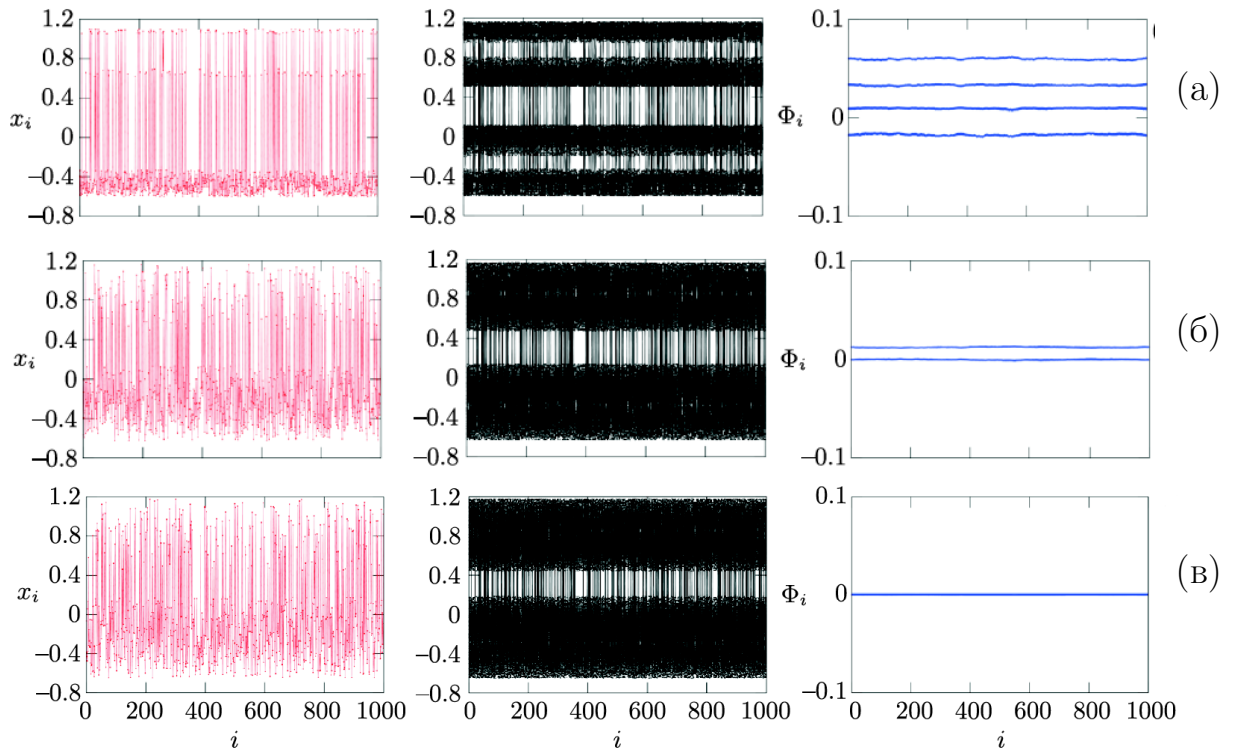


Рисунок 2.4. Мгновенные профили для переменных  $x_i$  (левая колонка) ансамбля (2.3) и пространственно-временные профили динамики ансамбля (центральная колонка) и функции воздействия  $\Phi_i$  (правая колонка) при уменьшении коэффициента связи  $\sigma$ : (а) 0.07, (б) 0.02, (в) 0.002. Другие параметры как для рисунка 2.2

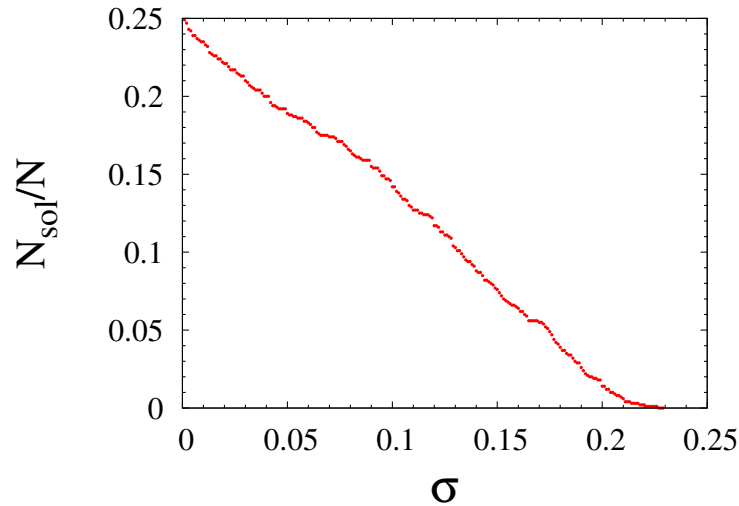


Рисунок 2.5. Зависимость числа уединенных состояний в ансамбле (2.3) от значений силы связи  $\sigma$ . Другие параметры как для рисунка 2.2

Представляет интерес выяснить статистические характеристики динамики ансамбля (2.3) в режиме уединенных состояний. С этой целью были проведены расчеты коэффициента взаимной корреляции (1.3) между 1-м осциллятором из когерентной области и осцилляторами в режиме уединенных состояний для пространственно-временных режимов, приведенных на рисунке 2.3. Полученные численные результаты представлены на рисунке 2.6.

Из сравнения рисунков 2.3 (левая колонка) и 2.6 видно, переход осциллятора ансамбля (2.3) в режим уединенного состояния диагностируется по наличию выброса амплитуды переменной состояния  $x_i$  на мгновенном пространственном профиле (рисунок 2.3, левая колонка) и по аналогичному выбросу (изменению) значения коэффициента взаимной корреляции (рисунок 2.6). КВК  $R_{1i}$  между первым элементом ансамбля (в области когерентности) и осциллятором (осцилляторами), находящимся в режиме уединенных состояний, отличен по модулю от 1 и принимает отрицательное значение, в то время как для осцилляторов из когерентной области значения КВК положительные,  $0.6 \lesssim R_{1i} \lesssim 1$  (рисунок 2.6). Во всех представленных случаях (рисунок 2.6) для осцилляторов в уединенном состоянии  $R_{1i} \approx -0.9$ , что свидетельствует об отсутствии полной корреляции между рассматриваемыми осцилляторами. Более того, отрицатель-

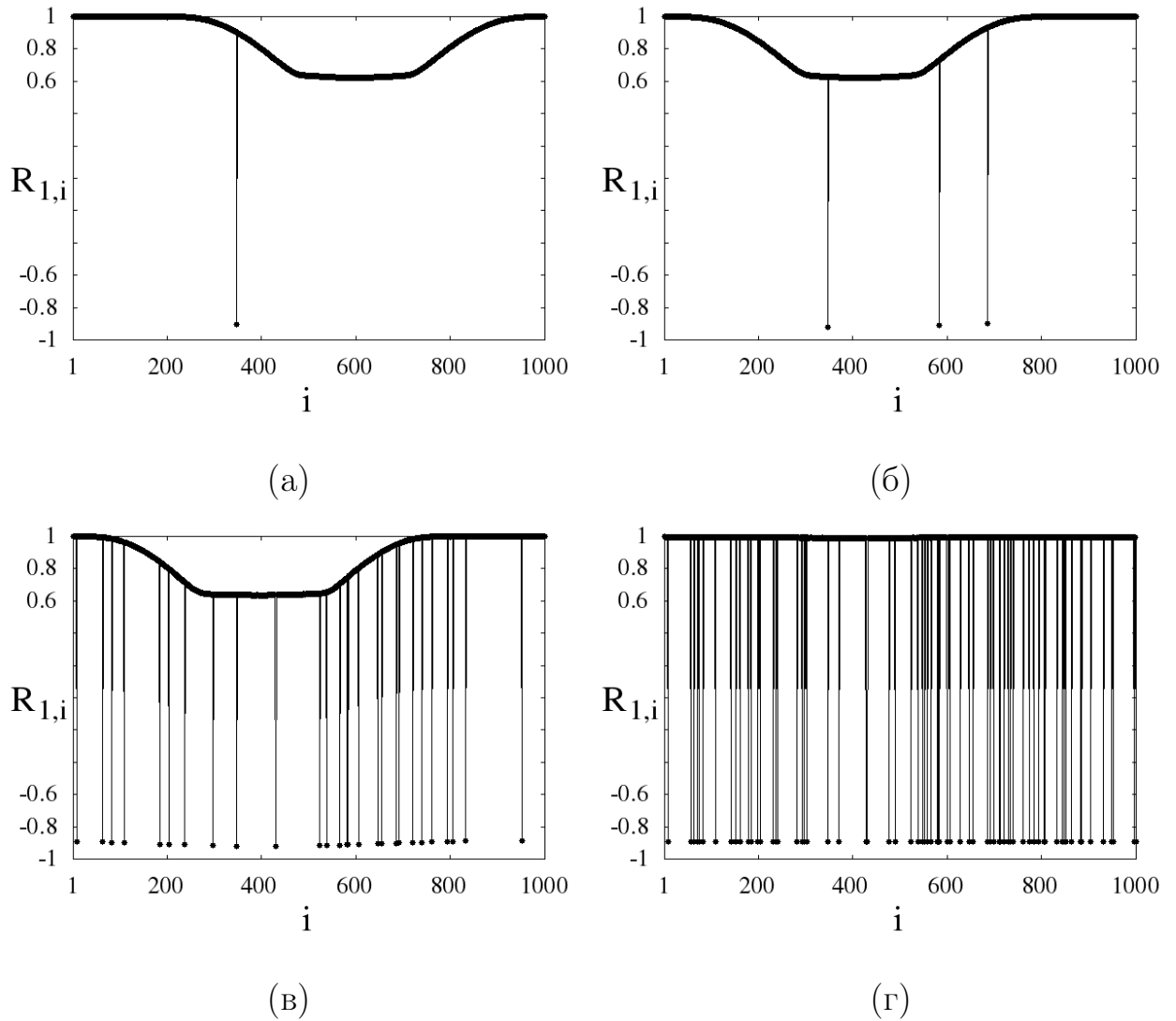


Рисунок 2.6. Коэффициент взаимной корреляции  $R_{1i}$  (1.3), рассчитанный для ансамбля (2.3) в режимах уединенных состояний для различных значений силы связи  $\sigma$ : (а) 0.226, (б) 0.222, (в) 0.193, (г) 0.157. Другие параметры как для рисунка 2.2

ное значение КВК для осцилляторов в уединенном состоянии показывает, что эти осцилляторы и осцилляторы из когерентной области колеблются в противофазе друг относительно друга.

При очень слабой силе нелокальной связи  $\sigma$  временная динамика осцилляторов ансамбля становится все более хаотической (рисунок 2.4, центральная колонка) и в итоге формируется хаотическое множество, состоящее из двух лент (двухсвязанный хаотический аттрактор). Одновременно с этим функция

воздействия  $\Phi_i$  практически не зависит от номера осциллятора  $i$  и демонстрирует сначала колебания периода 4 (рисунок 2.4,а, справа), а затем — периода 2 с очень малой амплитудой (рисунок 2.4,б, справа). При  $\sigma \rightarrow 0$  функция связи обращается в ноль (рисунок 2.4,в, справа). Как следует из уравнений (2.3), при  $\sigma \rightarrow 0$  влияние связи исчезает и ансамбль представляет собой совокупность не связанных индивидуальных отображений Лози в хаотическом режиме. В силу того, что начальные условия для осцилляторов заданы случайным образом, ансамбль отображений Лози переходит в режим пространственно-временного хаоса. Возникает важный вопрос: а что при этом происходит с режимом уединенных состояний? Ответ на этот вопрос требует специальных исследований, результаты которых будут представлены в главе 4. Будет показано, что рождение уединенных состояний обусловлено возникновением режима бистабильности в индивидуальных осцилляторах ансамбля вследствие нелокальной связи. При  $\sigma \rightarrow 0$  бистабильность исчезает и, соответственно, исчезают и режимы уединенных состояний.

Отметим, что уединенные состояния были обнаружены в ансамблях глобально связанных фазовых осцилляторов, осцилляторов ван дер Поля и систем Ресслера с притягивающими и отталкивающими типами связи [62, 67], в ансамблях локально, нелокально и глобально связанных осцилляторов Курамото с инерцией [63, 65], в связанных ансамблях (мультиплексных сетях) моделей нейрона ФитцХью-Нагумо [66, 122, 340], в нелинейном осцилляторе с запаздывающей обратной связью, находящимся под внешним шумовым воздействием [415], в популяциях осцилляторов Стюарта-Ландау с локальным и глобальным взаимодействием [416, 417].

Детальный механизм возникновения уединенных состояний был установлен в 2018 году и подробно описан в наших работах для случая кольца нелокально связанных отображений Лози [418] и ансамблей связанных осцилляторов других типов [340, 345, 352]. Подробное изложение данного бифуркационного сценария будет приведено в четвертой главе настоящей работы.

Интересной особенностью динамики ансамбля нелокально связанных отображений Лози является реализация режима бегущих волн. Однако этот режим может быть найден только при малых значениях радиуса связи ( $r \leq 0.06$ ) и больших значениях силы связи ( $\sigma \geq 0.7$ ). В силу того, что режим бегущих волн сильно зависит от выбора начальных условий, нанести область его существования на диаграмму режимов на рисунке 2.1 не представляется возможным. В качестве примера на рисунке 2.7 проиллюстрированы режимы бегущих волн для значения радиуса связи  $r = 0.05$  и двух различных значений силы связи  $\sigma$ .

Режимы бегущих волн также реализуются в ансамбле нелокально связанных систем Лоренца [419], но не были зафиксированы в ансамблях нелокально связанных логистических отображений, отображений Эно и систем Ресслера.

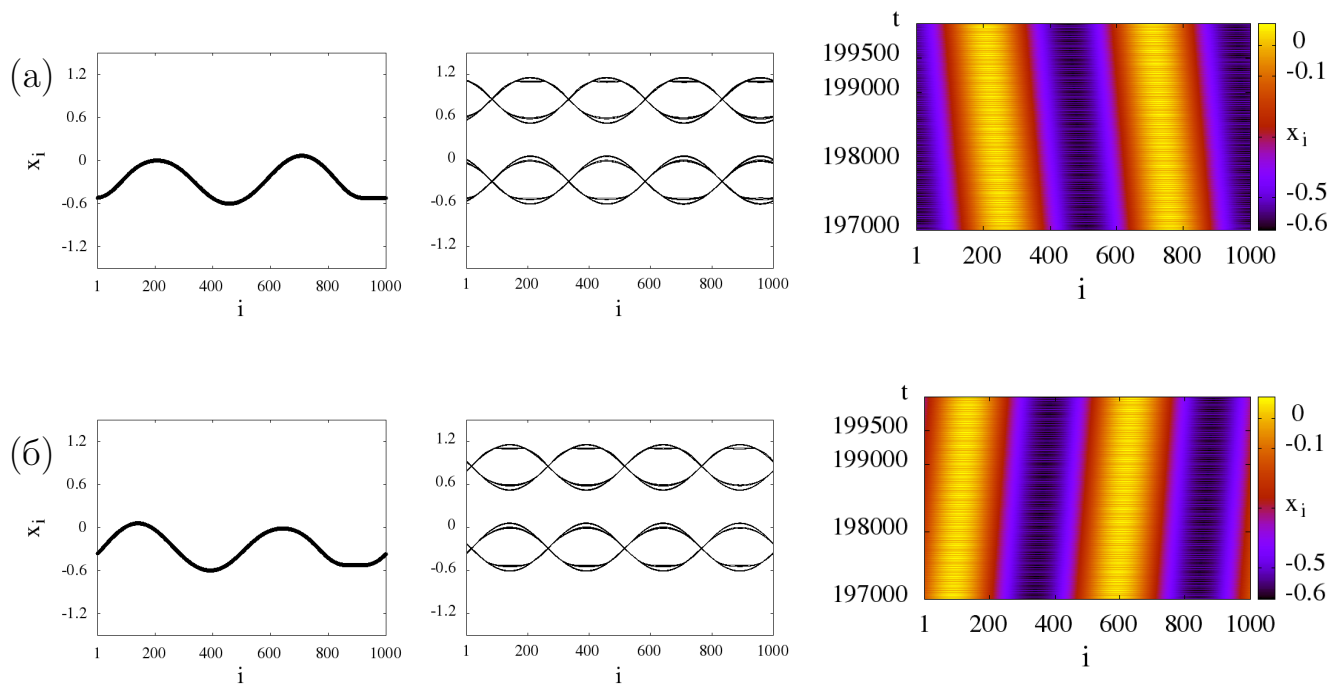


Рисунок 2.7. Иллюстрации режимов бегущих волн в кольце нелокально связанных отображений Лози (2.3). (а) Мгновенный профиль для переменных  $x_i$  (левая колонка), (б) пространственно-временной профиль для состояний  $x_i$  (центральная колонка), (в) пространственно-временная диаграмма динамики ансамбля (правая колонка) для различных значений силы связи  $\sigma$ : (а) 0.87, (б) 0.89. Параметры ансамбля:  $r = 0.05$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $N = 1000$

### 2.2.3 Анализ влияния функции воздействия

По аналогии с рассмотрением динамики кольца нелокально связанных отображений Эно (см. подраздел 1.4.4) обратимся к анализу роли функции воздействия  $\Phi_i^t$ , которая задается вторым слагаемым в системе (2.3) и характеризует воздействие со стороны  $2P$  соседних осцилляторов на  $i$ -й осциллятор ансамбля.

На рисунке 2.8 представлена зависимость значений функции  $\Phi_i$  от величины силы связи  $\sigma$  в интервале  $[0; 1]$ . Метод построения данной диаграммы соответствует алгоритму расчета, подробно описанному в подразделе 1.4.4 для кольца отображений Эно.

Из графика рисунка 2.8 видно, что значения, принимаемые функцией  $\Phi_i$  в областях хаотической синхронизации вплоть до появления первого уединенного состояния ( $0.3 \leq \sigma \leq 1$ ), ограничиваются интервалом  $[\sigma x_{\min}; \sigma x_{\max}]$ , где  $x_{\max}$

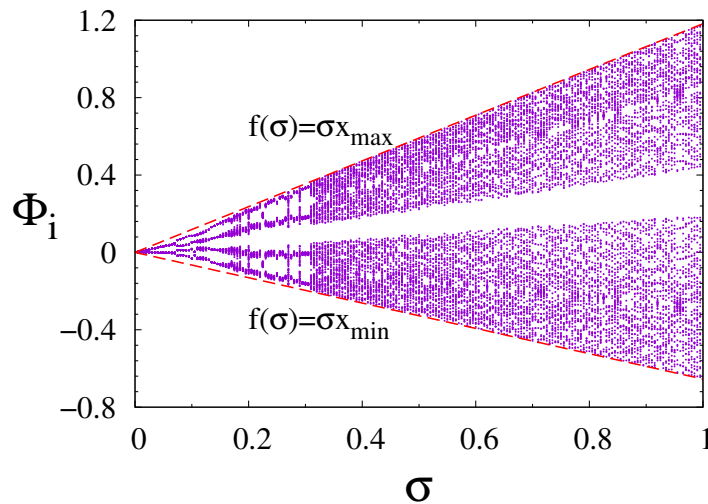


Рисунок 2.8. Зависимость значений функции  $\Phi_i$  от величины силы связи  $\sigma$  ансамбля (2.3) при  $r = 0.193$ . На график выведены значения  $\Phi_i$  для 50 итераций ( $9950 \leq t \leq 10000$ ). Верхняя и нижняя границы значений  $\Phi_i$  аппроксимированы линейной функцией  $f(\sigma) = x\sigma$  ( $x_{\max} = 1.181845$ ,

$$x_{\min} = -0.654588)$$

и  $x_{\min}$  — максимальное и минимальное значения, которые может принимать переменная  $x$  в изолированном отображении Лози при значениях параметров  $\alpha = 1.4$  и  $\beta = 0.3$ . В этом случае динамика ансамбля (2.3) достаточно сильно зависит от слагаемого связи. Как следует из сопоставления рисунков 2.8 и 2.3 (правая колонка), в интервале изменения силы связи  $\sigma \in [0.16; 0.3]$ , соответствующем увеличению числа уединенных состояний, значения функции воздействия  $\Phi_i$  уменьшаются, характер ее динамики становится почти квазипериодическим (на базе цикла периода 4) и практически не меняется с уменьшением силы связи. При  $\sigma \rightarrow 0$ , значения функции воздействия стремятся к нулю (рисунки 2.8 и 2.4 (правая колонка)), и, следовательно, динамика ансамбля (2.3) определяется только первым слагаемым, которое зависит от собственной динамики отображения Лози. Значения управляющих параметров  $\alpha = 1.4$  и  $\beta = 0.3$  соответствуют хаотическому режиму в изолированном отображении Лози и, таким образом, при  $\sigma \rightarrow 0$  динамика во времени всех осцилляторов ансамбля (2.3) становится хаотической. При этом ансамбль в целом демонстрирует переход в режим пространственно-временного хаоса.

## 2.3 Переход к пространственно-временному хаосу в ансамбле нелокально связанных систем Лоренца

### 2.3.1 Модель и бифуркационные диаграммы

Система Лоренца [398, 399] представляет собой систему, в которой при изменении значений управляющих параметров могут наблюдаться различные регулярные и хаотические режимы. Уравнения модели Лоренца имеют следующий вид:

$$\dot{x} = -\xi(x - y), \quad \dot{y} = \rho x - y - xz, \quad \dot{z} = xy - \beta z, \quad (2.4)$$

где  $\xi$ ,  $\rho$  и  $\beta$  — управляющие параметры.

В зависимости от значений управляющих параметров в системе Лоренца могут наблюдаться два различных типа хаотического аттрактора: квазигиперболический и негиперболический (квазиаттрактор) [367, 401–403]. Причем режим квазигиперболического аттрактора реализуется в конечной области значений управляющих параметров системы. На рисунке 2.9 приведена бифуркационная диаграмма системы Лоренца (2.4) на плоскости параметров  $(\rho, \xi)$  при фиксированном значении параметра  $\beta = 8/3$  [403].

Существованию аттрактора Лоренца отвечает заштрихованная область на плоскости параметров  $(\rho, \xi)$ . Вне указанной области при достаточно больших значениях параметров  $\rho$  и  $\xi$  свойства хаотического аттрактора будут кардинально другими: квазигиперболический аттрактор Лоренца трансформируется в негиперболический (квазиаттрактор).

Как было отмечено во Введении ко второй главе (раздел 2.1), аттрактор Лоренца представляет собой пример типичного или классического квазигиперболического аттрактора. Как и для квазигиперболического хаотического аттрактора Лози, для него нарушается одно из условий гиперболичности [368, 404]. Аттракторы типа Лоренца были обнаружены в ряде динамических систем и

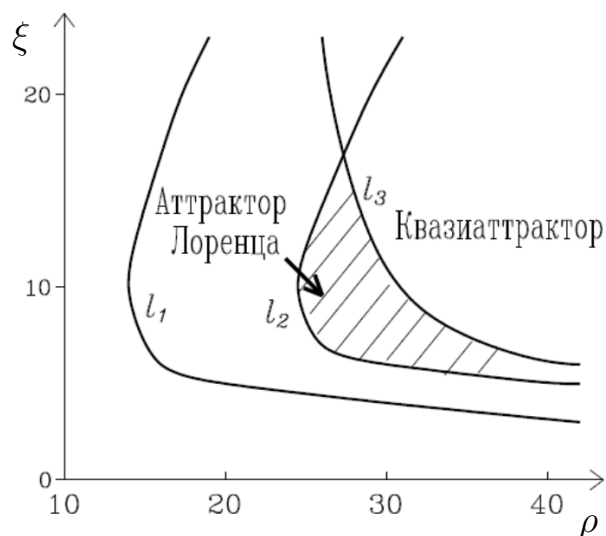


Рисунок 2.9. Бифуркационная диаграмма системы Лоренца на плоскости параметров  $(\rho, \xi)$  для фиксированного  $\beta = 8/3$



впоследствии был выделен отдельный класс аттракторов, называемых аттракторами типа Лоренца [211, 406–411, 413].

Первые исследования бифуркационного перехода от режима когерентности к пространственно-временному хаосу в ансамбле нелокально связанных моделей Лоренца при изменении параметров связи были проведены и описаны в работах [96, 419] для случая, когда в индивидуальном элементе ансамбля реализуется режим классического квазигиперболического аттрактора Лоренца. Уравнения замкнутого в кольцо ансамбля систем Лоренца с нелокальной связью имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i &= \xi(y_i - x_i) + \frac{\sigma_x}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} (x_k - x_i), \\
 \dot{y}_i &= x_i(\rho - z_i) - y_i + \frac{\sigma_y}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} (y_k - y_i), \\
 \dot{z}_i &= x_i y_i - \beta z_i + \frac{\sigma_z}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} (z_k - z_i), \\
 x_{i+N}(t) &= x_i(t), \quad y_{i+N}(t) = y_i(t), \\
 z_{i+N}(t) &= z_i(t).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь  $x_i, y_i, z_i$  — действительные динамические переменные, индекс  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) — номер элемента в ансамбле и представляет собой дискретную пространственную координату,  $N$  — общее число элементов в ансамбле.  $\xi, \rho$  и  $\beta$  являются управляющими параметрами индивидуальной системы Лоренца. Для численного моделирования динамики ансамбля (2.5) выбираются «стандартные» значения управляющих параметров  $\xi = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$ , которые соответствуют классическому квазигиперболическому аттрактору Лоренца. С помощью параметра  $P$  задается число ближайших соседей, с которыми  $i$ -й осциллятор связан с каждой стороны, и вводится радиус связи  $r = P/N$ , который характеризует степень нелокального взаимодействия и является мерой нелокальной связи.  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  обозначают силу или коэффициент нелокальной связи по соответствующим координатам. В дальнейшем мы полагаем, что нелокальная связь осуществляется только по двум первым переменным, т.е.  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ,

$\sigma_z = 0$ . Как показали численные эксперименты, подобное допущение качественно не влияет на результаты расчетов.

В работе [96] отмечалось, что при изменении силы связи в интервале  $\sigma \in [1; 8]$  при фиксированном радиусе связи  $r = 0.3$  в ансамбле (2.5), фронт когерентного мгновенного профиля для переменной  $x_i$  претерпевает разрыв, что является основным условием появления химерных состояний. Был сделан вывод, что этом случае может иметь место бифуркационный сценарий «когерентность-некогерентность», установленный и описанный для ансамблей нелокально связанных логистических отображений, отображений Эно и систем Ресслера. Однако, факта существования химерных состояний в ансамбле (2.5) и их иллюстрации приведено не было. Как было показано позже в работе [90], химерные структуры действительно возникают при переходе «когерентность-некогерентность» в ансамбле (2.5) только в случае больших значений управляющего параметра  $\rho \gtrsim 160$ , когда хаотический аттрактор Лоренца становится негиперболическим.

В работе [419] было установлено, что основными режимами, которые реализуются в ансамбле нелокально связанных систем Лоренца при больших значениях силы связи  $\sigma \in [10; 45]$ , являются когерентные бегущие волны с различными волновыми числами  $k = 1, 2, 3$  и стационарные структуры, реализация которых сильно зависит от начальных условий. Диаграмма режимов, построенная численно для ансамбля (2.5) на плоскости параметров связи  $(r, \sigma)$  [419], приведена на рисунке 2.10.

На диаграмме режимов можно выделить несколько характерных областей различного размера, отражающих основные динамические режимы и пространственно-временные структуры, которые реализуются в ансамбле нелокально связанных систем Лоренца. Основную часть диаграммы занимают области полной хаотической синхронизации и бегущих волн с различными волновыми числами. Отметим, что эти режимы реализуются в ансамбле (2.5) при довольно больших значениях силы связи  $\sigma$ . В работе [419] основное внимание

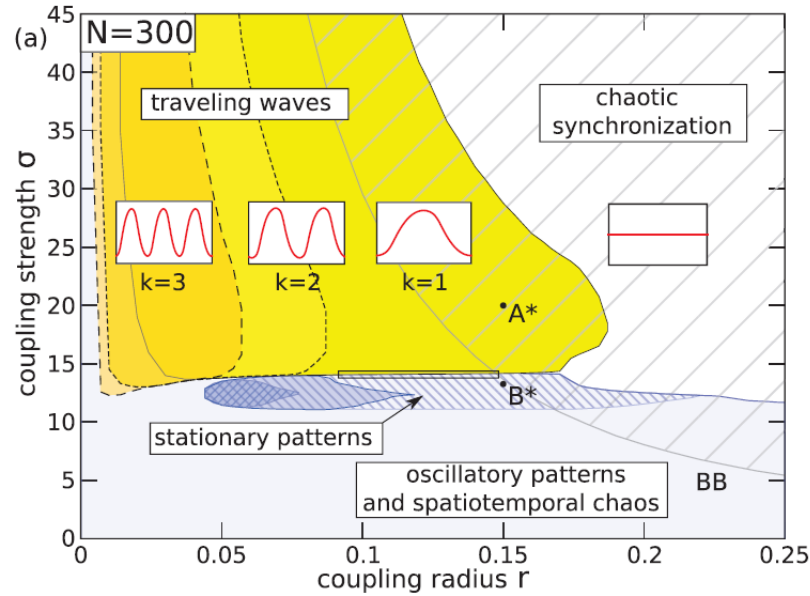


Рисунок 2.10. Различные динамические режимы ансамбля (2.5) на плоскости параметров  $(r, \sigma)$ . Когерентные бегущие волны отмечены волновыми числами  $k = 1, 2, 3$ . Мгновенные профили типичных волновых форм показаны для переменных  $x_i$  на вставках. Полностью синхронизованное хаотическое состояние наблюдается в белой заштрихованной области, ограниченной линией бифуркации прорыва ВВ. Параметры:  $\xi = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$ ,

$$N = 300, \sigma_x = \sigma_y = \sigma, \sigma_z = 0 [419]$$

уделяется анализу бифуркационных сценариев перехода от стационарных состояний (плотно заштрихованная серая область на рисунке 2.10) к когерентным бегущим волнам. Непосредственный переход от режима пространственно-стационарных и синхронных структур к пространственно-временному хаосу, который наблюдается при малых значениях силы связи  $\sigma$ , ни в работе [419], ни в других работах не рассматривался. Поэтому представляется интересным и целесообразным провести детальный численный анализ данного перехода, результаты которого описываются в данном разделе.

Рассматриваемый ансамбль (2.5) состоит из  $N = 300$  нелокально связанных систем Лоренца в режиме квазигиперболического хаотического аттрактора. Пространственно-временная динамика ансамбля исследуется при периодических граничных условиях для всех переменных и вариации значений па-

раметров нелокальной связи в интервалах  $\sigma \in [0; 1.2]$  и  $r \in [0; 0.35]$ . Таким образом, анализируется область перехода к пространственно-временному хаосу (серая область на рисунке 2.10) в случае слабой нелокальной связи. Уравнения ансамбля (2.5) интегрируются методом Рунге-Кутты 4-го порядка в течение 16000 безразмерных единиц времени с фиксированным шагом интегрирования  $h = 0.001$ . Первые 8000 единиц времени считаются периодом установления и не учитываются в дальнейших расчетах. Для построения диаграммы режимов на плоскости параметров  $(r, \sigma)$  для указанных пределов изменения этих параметров выбирался ряд реализаций начальных условий, случайно распределенных в интервале  $[-1; 1]$ . Это позволит определить наиболее типичные (доминирующие) режимы динамики в ансамбле, учитывая зависимость от начальных условий. Полученная в результате численных расчетов диаграмма режимов представлена на рисунке 2.11.

Как видно из приведенной диаграммы, при уменьшении значения силы связи  $\sigma$  и в зависимости от значений радиуса связи  $r$  в ансамбле (2.5) реализуются режимы, характеризующиеся различной пространственно-временной динамикой и имеющие место в конечных областях изменения параметров связи. На рисунке 2.11 области существования этих режимов показаны разным цветом и отмечены буквами. Область  $A$  отвечает режиму устойчивых двухъямных химер, который будет подробно описан далее, и уединенных состояний. В областях, отмеченных буквами  $B, B', B''$ , наблюдается перемежающееся поведение во времени и пространстве между пространственно-когерентным и пространственно-некогерентным ( $B'$ ) или частично некогерентным ( $B$  и  $B''$ ) режимами. В области  $C$  наблюдаются метастабильные двухъямные химерные структуры и область  $D$  соответствует режиму полной некогерентности (пространственно-временному хаосу). При значениях параметров  $r$  и  $\sigma$ , соответствующих заштрихованным областям диаграммы на рисунке 2.11, ансамбль (2.5) демонстрирует высокую степень мультистабильности, и реализация тех

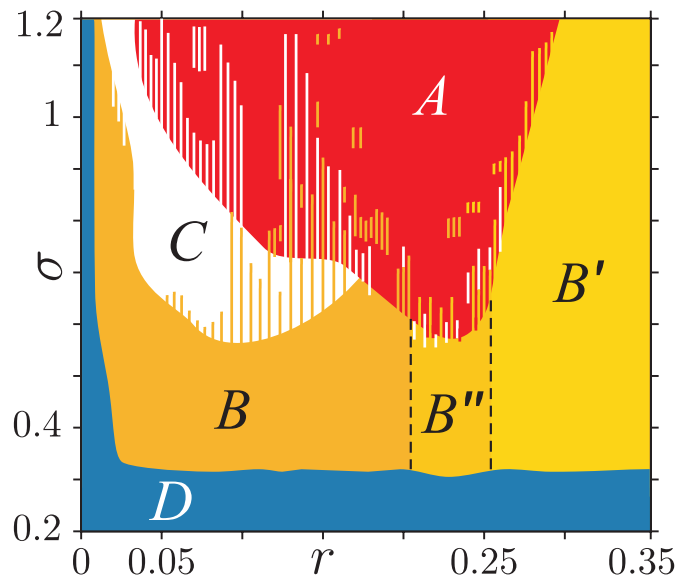


Рисунок 2.11. Диаграмма режимов динамики ансамбля (2.5) на плоскости параметров  $(r, \sigma)$  при слабой силе нелокальной связи. В области  $A$  наблюдаются режимы уединенных состояний и двухъямных химер, области  $B, B', B''$  соответствуют перемежаемости во времени и пространстве между пространственно-когерентной и пространственно-некогерентной ( $B'$ ) или частично некогерентной ( $B$  и  $B''$ ) динамикой, в области  $C$  имеют место метастабильные двухъямные химеры, область  $D$  обозначает область пространственно-временной некогерентности. Параметры:  $\xi = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  
 $\beta = 8/3$ ,  $N = 300$

или иных режимов в этих областях зависит от выбора начальных условий и вариации параметров связи.

Перед тем как перейти к детальному численному исследованию динамических режимов, реализуемых в ансамбле (2.5) при слабой нелокальной связи и представленных на диаграмме рисунка 2.11, проведем теоретический анализ влияния коэффициента нелокальной связи на динамику индивидуального осциллятора ансамбля (2.5), сопровождая его примерами численных расчетов. Данное исследование является важным для дальнейшего изложения материала второй главы и будет способствовать более глубокому пониманию причин

реализации разнообразных пространственно-временных структур и эффектов в рассматриваемом ансамбле.

### 2.3.2 Влияние эффективных значений параметров на динамику индивидуальной системы Лоренца

В разделах 1.3, 1.4.4. и 2.2.3 было показано, что при очень малых значениях нелокальной связи ( $\sigma \rightarrow 0$ ) главную роль в пространственно-временной динамике всего ансамбля нелокально связанных хаотических осцилляторов играет поведение во времени индивидуального элемента ансамбля. При этом слагаемое связи или функция воздействия  $\Phi_i$  стремится к нулю. В свою очередь характер режима колебаний индивидуального элемента определяется эффективными значениями его управляющих параметров, которые в данном случае зависят от силы нелокальной связи  $\sigma$  и могут приводить к значительным изменениям поведения во времени индивидуального осциллятора, а, следовательно, и структуры реализуемого типа аттрактора в фазовом пространстве.

Как хорошо видно из уравнений ансамбля (2.5), составляющие  $x_i, y_i, z_i$ , входящие в слагаемые функции связи, не зависят от индекса  $k$ . Следовательно, мы можем вынести их за знак суммы, и в этом случае уравнения системы примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \xi(y_i - x_i) - \sigma x_i + \frac{\sigma}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} x_k, \\ \dot{y}_i &= x_i(\rho - z_i) - y_i - \sigma y_i + \frac{\sigma}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} y_k, \\ \dot{z}_i &= x_i y_i - \beta z_i. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В результате проведенной математической процедуры появилось два новых члена:  $\sigma x_i$  и  $\sigma y_i$ , в 1-м и 2-м уравнениях ансамбля, соответственно. Очевидно, что это вызовет изменение эффективных значений управляющих параметров инди-

видуальной системы Лоренца. В этом случае индивидуальная система Лоренца без учета воздействия со стороны соседей будет описываться следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \xi y - (\xi + \sigma)x, \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - (1 + \sigma)y, \\ \dot{z} &= xy - \beta z.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Как следует из системы (2.7), коэффициент нелокальной связи приводит к замене управляющего параметра  $\xi$  при переменной  $x$  в 1-м уравнении на эффективный параметр  $(\xi + \sigma)$  и появлению нового параметра  $(1 + \sigma)$  при переменной  $y$  во 2-м уравнении. Следовательно, динамика системы Лоренца будет также зависеть от значений новых эффективных параметров и может существенно меняться при их вариации. На рисунке 2.12 проиллюстрированы проекции фазовых портретов режимов колебаний системы (2.7) на плоскость переменных  $(x, z)$  при увеличении значения силы связи  $\sigma$  и при изменении времени расчета  $t$ .

Как следует из рисунка 2.12,а, при довольно слабой силе связи  $\sigma \lesssim 0.28$ , динамика системы (2.7) качественно не меняется и соответствует режиму классического квазигиперболического аттрактора Лоренца, который существует в системе независимо от времени наблюдения  $t$ . При этом мультистабильности не наблюдается, и аттрактор Лоренца является единственным притягивающим множеством в фазовом пространстве системы. При превышении коэффициентом связи  $\sigma$  некоторого критического значения  $\sigma_{\text{кр}} \simeq 0.28$ , в силу сдвига эффективных значений параметров системы Лоренца (2.7) происходит бифуркационный переход от аттрактора Лоренца (рисунок 2.12,а) к режиму двух сосуществующих устойчивых фокусов (рисунок 2.12,в). В результате динамика системы становится бистабильной. Однако этот переход происходит не сразу, а сопровождается некоторым эффектом, который имеет место при промежуточных значениях силы связи  $\sigma \simeq 0.45$ . Как видно из рисунка 2.12,б (слева), на небольших временах наблюдения все также реализуется аттрактор Лоренца,

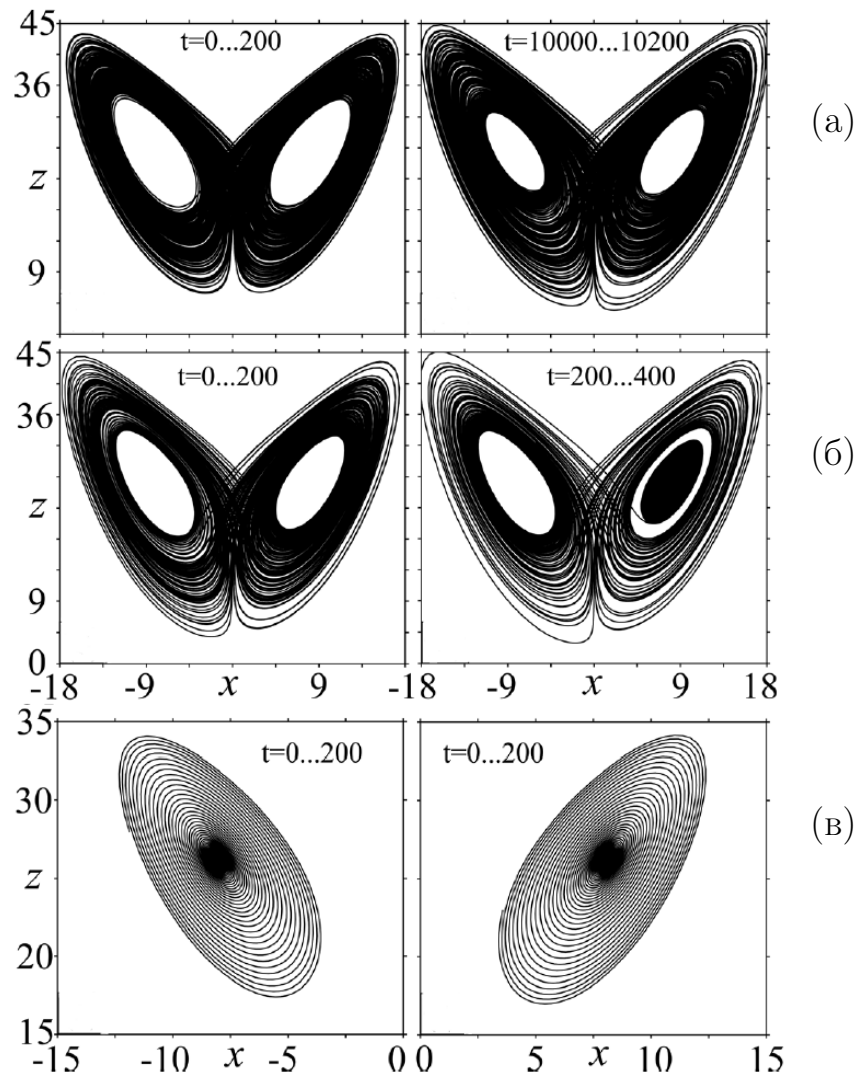


Рисунок 2.12. Проекция фазовых портретов на плоскость переменных  $(x, z)$  для системы (2.7) при увеличении значения силы связи  $\sigma$  и для различных интервалов времени расчета  $t$ :

(а)  $\sigma = 0.27$  для  $t \in [0; 200]$  (слева) и  $t \in [10000; 10200]$  (справа), (б)  $\sigma = 0.45$  для  $t \in [0; 200]$  (слева) и  $t \in [200; 400]$  (справа), (в)  $\sigma = 0.7$  для  $t \in [0; 200]$  (устойчивый фокус слева) и для  $t \in [0; 200]$  (устойчивый фокус справа).

Другие параметры:  $\xi = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$

который при увеличении времени расчета  $t$  сосуществует с устойчивыми фокусами. В частности, на рисунке 2.12,б (справа) проиллюстрированы аттрактор Лоренца и один из симметричных фокусов. Численные расчеты показали, что хаотический аттрактор представляет собой метастабильное состояние, которое



существует в течение конечного, но достаточно большого времени наблюдения и исчезает только на очень больших временах. Кроме того, данный режим реализуется в конечном интервале изменения коэффициента связи  $\sigma$ , но время жизни метастабильного хаотического множества довольно быстро и существенно уменьшается при увеличении силы связи  $\sigma$ . Когда  $\sigma \rightarrow 1$ , в фазовом пространстве остаются два симметричных устойчивых фокуса, а сама система (2.7) становится бистабильной. Таким образом, влияние нелокальной связи приводит к переходу от режима квазигиперболического аттрактора к режиму бистабильности в индивидуальной системе Лоренца, что является типичным для режима негиперболического аттрактора.

### 2.3.3 Режим уединенных состояний

Как было показано в разделе 2.2.2, в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов, индивидуальные элементы которых характеризуются квазигиперболическими хаотическими аттракторами, переход к режиму пространственно-временного хаоса происходит через возникновение уединенных состояний. В силу того, что индивидуальные осцилляторы ансамбля (2.5) функционируют в режиме квазигиперболического аттрактора Лоренца, вполне логично ожидать появления уединенных состояний и в ансамбле нелокально связанных систем Лоренца. Данное предположение также базируется на том факте, что отображение Лози является топологически эквивалентным отображению Пуанкаре, которое возникает в секущей плоскости системы Лоренца при классических значениях управляющих параметров  $\xi = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$ . Проведенные численные расчеты показали, что, действительно, при определенных значениях параметров связи  $\sigma$  и  $r$  возможно получить режимы уединенных состояний в ансамбле (2.5). На рисунке 2.13 показаны мгновенные пространственные профили значений переменных  $x_i$  в момент времени  $t = 8.5 \times 10^3$ .

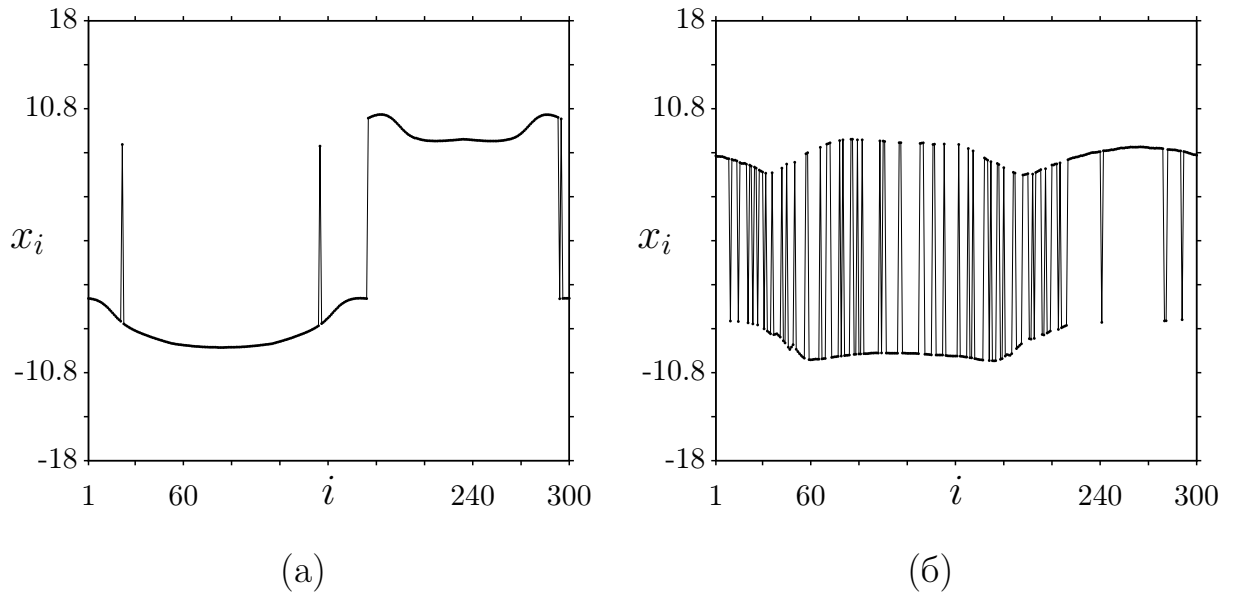


Рисунок 2.13. Режимы уединенных состояний в ансамбле (2.5). Мгновенные профили значений переменных  $x_i$  в момент времени  $t = 8.5 \times 10^3$  для различных значений параметров связи: (а)  $\sigma = 1.9$ ,  $r = 0.197$ , (б)  $\sigma = 1.5$ ,  $r = 0.223$ . Другие параметры как для рисунка 2.11

Отметим, что уединенные состояния могут возникнуть в ансамбле уже при достаточно больших значениях силы связи  $\sigma \simeq 2.5$ , лежащих выше диапазона изменения  $\sigma$  на диаграмме рисунка 2.11, но их реализация зависит от выбора начальных условий. Как видно из рисунка 2.13,а, только два осциллятора демонстрируют резкие выбросы амплитуд, в то время как другие осцилляторы по-прежнему остаются в когерентном режиме. При уменьшении значений параметров связи или при изменении начальных условий число осцилляторов, характеризующихся резкими выбросами амплитуд из когерентного состояния, может увеличиваться довольно резко и включать уже бóльшую часть осцилляторов ансамбля (рисунок 2.13,б). Приведенные режимы динамики ансамбля (2.5) удовлетворяют определению, данному в работе [62], и поэтому их по праву можно отнести к режимам уединенных состояний. Как показывают численные исследования, режимы уединенных состояний в рассматриваемой системе занимают промежуточное место между режимами частичной когерентности и двухъямных химерных состояний и могут рассматриваться как переходный ре-

жим. Переход между этими состояниями происходит довольно плавно, поэтому очень трудно и практически невозможно четко определить область на плоскости параметров  $(r, \sigma)$ , в которой существуют только уединенные состояния.

Отметим, что режим уединенных состояний в ансамбле нелокально связанных систем Лоренца обнаружен и описан впервые. Кроме того, возникновение этих состояний происходит в соответствии с механизмом, который будет описан в главе 4.

### 2.3.4 Уединенные состояния и двухъямная химера

Обратимся к бифуркационной диаграмме на рисунке 2.11 и рассмотрим детально режимы и пространственно-временные структуры, которые реализуются в каждой из приведенных на ней областей. Как и раньше, мы приводим и анализируем мгновенные профили и пространственно-временные профили динамики ансамбля (2.5). По аналогии с анализом динамики кольца нелокально связанных логистических отображений для количественной оценки пространственной когерентности и некогерентности колебаний элементов ансамбля используется коэффициент взаимной корреляции (1.3). Однако в данном случае вычисляется взаимная корреляция между выбранным  $n$ -м осциллятором из кластера когерентности и другими осцилляторами ансамбля. Обозначим для данного случая коэффициент корреляции как  $R_{ni}$ , который рассчитывается по следующей формуле:

$$R_{ni} = \frac{\langle \tilde{x}_n^t \tilde{x}_i^t \rangle}{\sqrt{\langle (\tilde{x}_n^t)^2 \rangle \langle (\tilde{x}_i^t)^2 \rangle}}, \quad \tilde{x}_i^t = x_i^t - \langle x_i^t \rangle. \quad (2.8)$$

Как было показано в разделе 2.3.2, при определенных значениях силы связи  $\sigma$ , близких к 1, динамика индивидуальной системы Лоренца в кольце (2.5) претерпевает существенные изменения. Режим системы уже не соответствует квазигиперболическому аттрактору Лоренца, а приобретает характер

ные черты бистабильной системы. В этом случае в фазовом пространстве существуют два симметричных предельных множества, которые соответствуют областям положительных и отрицательных значений переменных  $x$  и  $y$ , и отвечают режиму слабого хаоса с положительным значением старшего ляпуновского показателя. Отметим, что такой тип временной динамики индивидуального осциллятора ансамбля (2.5) характерен только для области  $A$  на диаграмме режимов, приведенной на рисунке 2.11.

В области  $A$  диаграммы на рисунке 2.11 реализуется режим, мгновенный профиль которого приведен на рисунке 2.14,а. Как видно из рисунка, пространственно-временная структура состоит из двух когерентных кластеров, включающих элементы  $1 \leq i \leq 120$  и  $140 \leq i \leq 250$ , и двух некогерентных кластеров с элементами  $120 \leq i \leq 150$  и  $250 \leq i \leq 290$ . Расчеты показали, что два когерентных кластера всегда формируются в ансамбле (2.5) при различных начальных условиях. Эти кластеры характеризуются достаточно гладким профилем амплитуд (рисунок 2.14,а), который не меняется в течение всего времени наблюдения и согласно определению (1.4) соответствует синхронной (когерентной) динамике всех элементов этих кластеров. Однако, как следует из рисунка 2.14,а, временная динамика осцилляторов когерентных кластеров отвечает различным сосуществующим симметричным аттракторам. Так, элементы первого кластера  $1 \leq i \leq 120$  осциллируют в области отрицательных значений переменных  $x$  и  $y$  и соответствуют «отрицательному» аттрактору или левой «потенциальной» ямке. Колебания элементов второго кластера  $140 \leq i \leq 250$  происходят в области положительных значений переменных и относятся к «положительному» аттрактору или правой «потенциальной» ямке. Проекции типичных фазовых портретов сосуществующих предельных множеств представлены на рисунке 2.14,б для двух элементов ансамбля, принадлежащих нижнему (область отрицательных значений) и верхнему (область положительных значений) уровням мгновенного профиля (рисунок 2.14,а).

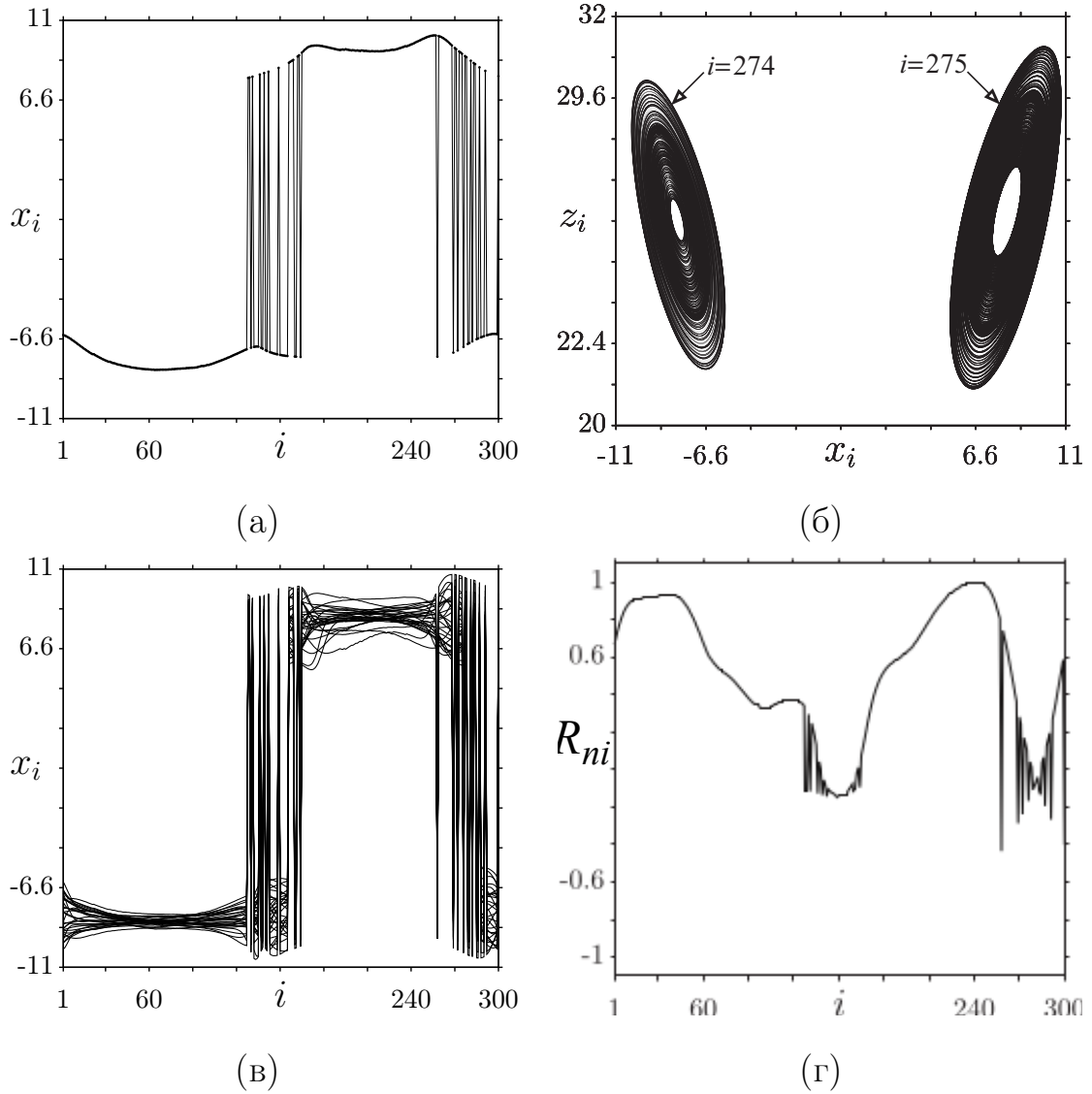


Рисунок 2.14. Иллюстрация режима двухъямной химерной структуры в ансамбле (2.5). (а) Мгновенный профиль значений переменной  $x_i$ , (б) проекции фазовых портретов двух сосуществующих симметричных притягивающих множеств для двух соседних осцилляторов  $i = 274$  и  $i = 275$  из некогерентного кластера, (в) пространственно-временной профиль, включающий 30 мгновенных профилей, (г) коэффициент взаимной корреляции  $R_{ni}$  (2.8) между 240-м осциллятором и другими элементами ансамбля. Другие параметры как для рисунка 2.11

Динамику всех элементов ансамбля (2.5) во времени и пространстве отражает пространственно-временной профиль, представленный на рисунке 2.14,в и включающий 30 мгновенных профилей, взятых через каждые 10 единиц без-

размерного времени. Как видно из графиков на рисунке 2.14,а,в, некогерентные кластеры образованы группами элементов  $120 \leq i \leq 150$  и  $250 \leq i \leq 290$ , находящихся в режиме уединенных состояний. Колебания во времени каждого из этих элементов происходят только в своей области значений, то есть соответствуют либо «отрицательному», либо «положительному» аттрактору, и не переключаются между ними. Это хорошо видно из рисунка 2.14,б, на котором приведены проекции для двух соседних элементов из второго некогерентного кластера. Временная динамика всех элементов ансамбля является слабо хаотической, что подтверждается небольшим по величине положительным значением старшего ляпуновского показателя  $\Lambda = 0.015249$ . Отметим, что границы наблюдаемых когерентных и некогерентных кластеров в пространстве ансамбля остаются неизменными во времени, а пространственная структура (рисунок 2.14,а) является типичной и реализуется практически для любых случайно распределенных начальных условий.

Результаты расчетов коэффициента взаимной корреляции (КВК)  $R_{ni}$  (2.8), представленные на рисунке 2.14,г, показывают, что только некоторые группы осцилляторов в когерентных кластерах демонстрируют полную когерентность или синхронность ( $R_{ni} \simeq 1$ ). С увеличением расстояния между ними и приближением к кластерам некогерентности значение КВК уменьшается и они перестают быть полностью когерентными. Однако в этом случае значения  $R_{ni}$  все же остаются достаточно большими по сравнению с некогерентными кластерами, для элементов которых КВК практически равен нулю. Данный факт отражает полную потерю когерентности между элементами когерентных и некогерентных кластеров ансамбля.

На основе проведенных численных исследований можно заключить, что пространственно-временная структура, реализуемая в области  $A$  на бифуркационной диаграмме рисунка 2.11, полностью соответствует определению «классического» химерного состояния [55]. Однако этот особый тип химерного состояния является результатом наличия режима бистабильности в индивидуальных

осцилляторах ансамбля (2.5). Подобная химерная структура была впервые описана в работе [92], в которой исследовались режимы динамики в двумерной решетке нелокально связанных одномерных кубических отображений в бистабильном режиме, и названа *двухъямной химерой*. Двухъямные химеры типичны для сетей бистабильных элементов и характеризуются тем, что элементы, принадлежащие некогерентным кластерам, нерегулярно распределены между двумя аттракторами, характерными для индивидуального элемента, в то время как все элементы в кластере когерентности находятся на одном аттракторе. Этот тип химерных состояний был также выявлен и при изучении динамики кольца нелокально связанных систем Чуа [98]. Однако, и кубическое отображение, и цепь Чуа относятся к классу систем с негиперболическим хаотическим аттрактором и характеризуются свойством мультистабильности. Двухъямная химера, обнаруженная в ансамбле нелокально связанных систем Лоренца (2.5), также обусловлена возникновением режима бистабильности в индивидуальной системе Лоренца в силу сдвига эффективных значений ее параметров. Сравнение мгновенных профилей на рисунке 2.14,а для ансамбля систем Лоренца (2.5) и на рисунке 1.9,а для режима фазовой химеры в ансамбле логистических отображений (1.1) отражает их практически полное сходство. Однако существует принципиальное отличие во временной динамике осцилляторов некогерентных кластеров. В случае двухъямной химеры в ансамбле систем Лоренца осцилляторы, расположенные на нижнем и верхнем уровнях профиля (рисунок 2.14,а), колеблются в одной фазе, то есть синфазно. При этом, как было показано, каждый элемент постоянно находится «в одной ямке», то есть вблизи одного из симметричных устойчивых фокусов, и не переключается в окрестность другого фокуса.

С другой стороны, по своим свойствам и структуре некогерентных кластеров данная химера схожа с режимом уединенных состояний, описанным в разделе 2.3.3. Однако отличие заключается в том, что осцилляторы ансамбля (2.5) с нерегулярным пространственным распределением (уединенные состоя-

ния) образуют некогерентные кластеры. Тем не менее, с точки зрения причины (условия) формирования данной химерной структуры прослеживается определенное сходство с так называемой химерой уединенных состояний, описанию которой будет посвящена четвертая глава.

Важно отметить, что приведенные выше результаты убедительно свидетельствуют о том, что в ансамбле из осцилляторов Лоренца в режиме квазигиперболичности индивидуальных осцилляторов в отсутствие связи уверенно регистрируются химерные структуры. Однако, как подробно описано, аттрактор Лоренца в индивидуальных осцилляторах за счет влияния нелокальной связи теряет свойства квазигиперболичности.

### 2.3.5 Пространственно-временная перемежаемость

Рассмотрим особенности динамики ансамбля связанных систем Лоренца в режиме, который реализуется в области  $B'$  диаграммы режимов на рисунке 2.11. Этот режим является основным в исследуемой системе в области достаточно больших значений радиуса связи  $r > 0.26$  и силы связи  $\sigma \gtrsim 0.32$ . В этом случае наблюдается чередование или перемежаемость во времени между режимами полной пространственно-временной некогерентности и частичной когерентности. Пространственно-временная диаграмма данного режима динамики представлена на рисунке 2.15,а, на котором хорошо виден эффект перемежаемости между указанными структурами. Мгновенные профили, соответствующие частичной когерентности и полной некогерентности, приведены на рисунке 2.15,б,в, соответственно. В качестве примера на рисунке 2.16,а,б приведены фрагмент временной реализации  $x_i(t)$  и проекция фазового портрета на плоскость переменных  $(x_i, z_i)$  для отдельного осциллятора ансамбля, соответственно.



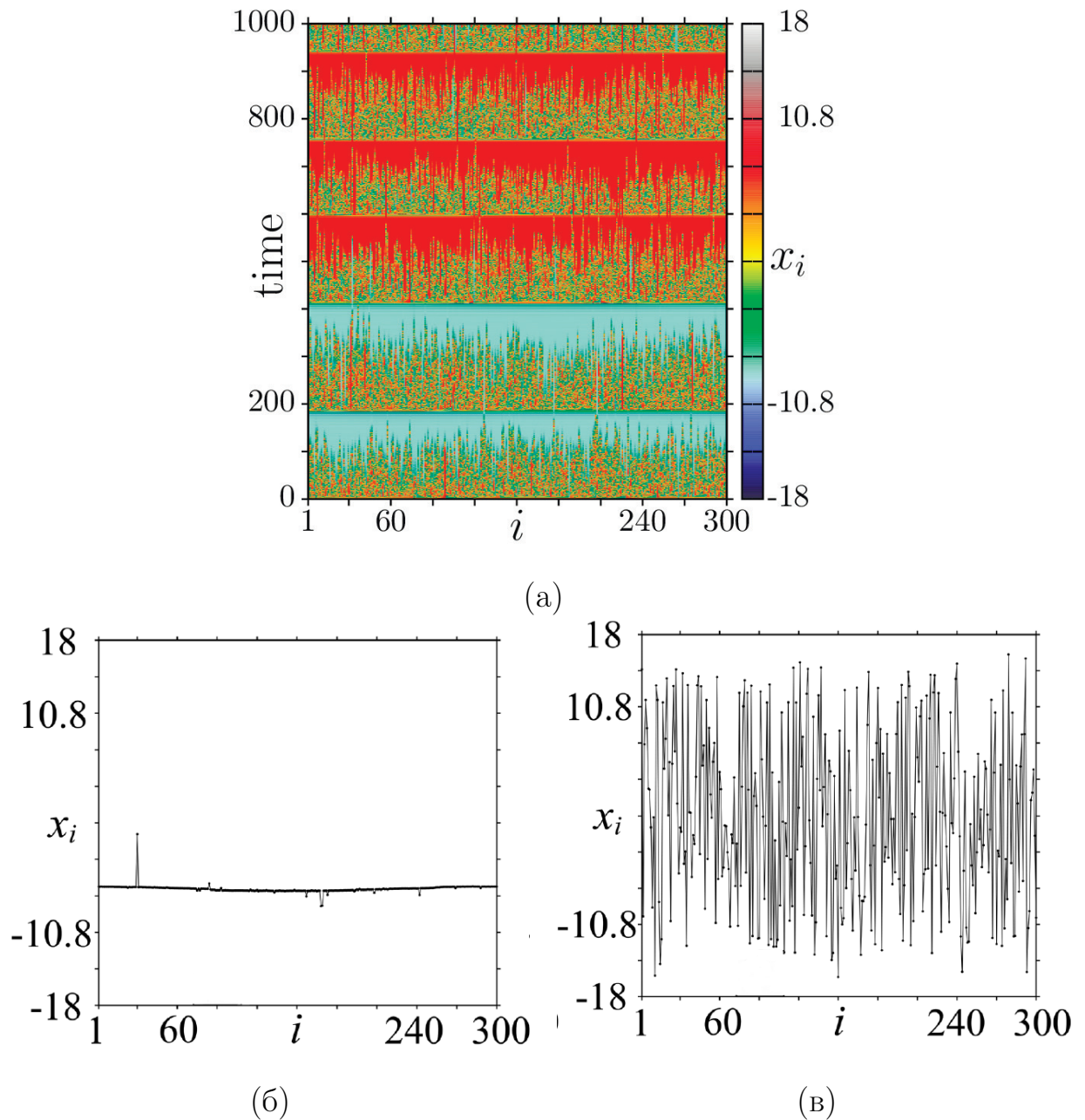


Рисунок 2.15. Иллюстрация перемежаемости во времени между режимами полной некогерентности и частичной когерентности в ансамбле (2.5) (область  $B'$  на диаграмме рисунка 2.11) для значений параметров связи  $r = 0.28$  и  $\sigma = 0.4$ . (а) Пространственно-временной профиль динамики ансамбля, мгновенные профили состояний системы в режимах частичной когерентности (б) и полной некогерентности (в). Другие параметры как для рисунка 2.11

Как видно из представленных графиков, в режиме частичной когерентности почти все элементы ансамбля совершают синхронные колебания только в

одной области значений переменной  $x$ , соответствующей окрестности одного из симметричных состояний равновесия, и не переключаются в другую в течение конечного времени наблюдения. Исключение составляют несколько осцилляторов (рисунок 2.15,б), которые демонстрируют небольшие выбросы амплитуд и могут быть отнесены к уединенным состояниям. По этой причине реализуемый режим был отнесен к разряду частично когерентных. Как следует из рисунка 2.15,а, с течением времени значения амплитуд осцилляторов в когерентном состоянии могут меняться, что связано с переходом (переключением) в окрестность другого состояния равновесия.

В режиме полной некогерентности (рисунок 2.15,в) индивидуальный осциллятор ансамбля демонстрирует колебания переключательного типа с довольно большим разбросом значений амплитуд, причем переключения между двумя областями происходят достаточно часто и нерегулярно (рисунок 2.16,а). Кроме того, колебания различных осцилляторов ансамбля являются некоге-

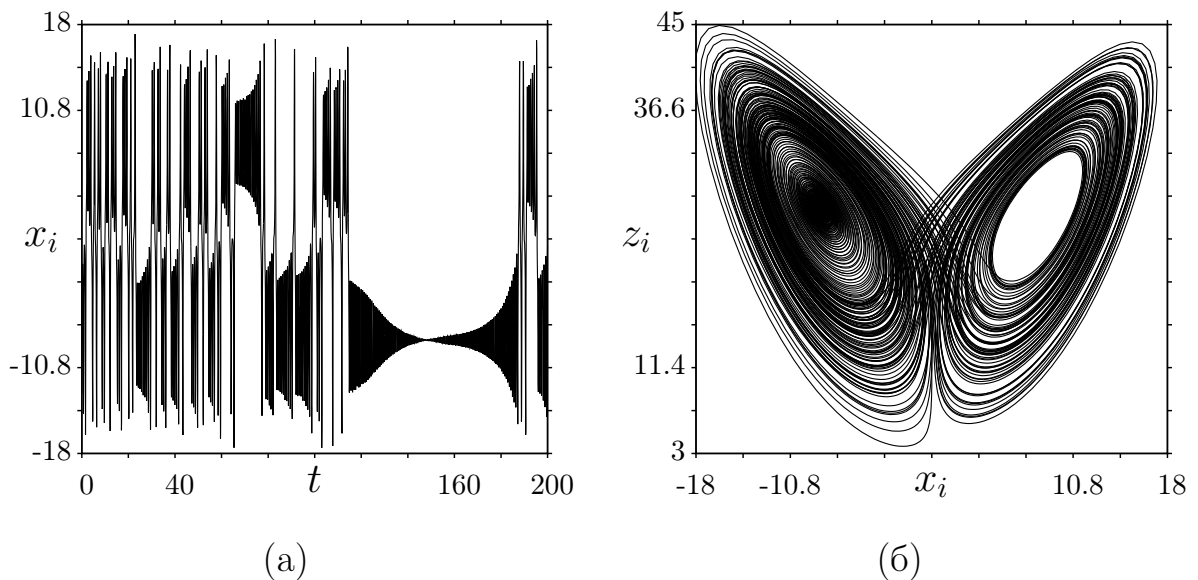


Рисунок 2.16. (а) Фрагмент временной реализации и (б) проекция фазового портрета хаотического аттрактора Лоренца на плоскость переменных  $(x_i, z_i)$  для 260-го осциллятора ансамбля (2.5) при  $r = 0.28$  и  $\sigma = 0.4$ . Старший показатель Ляпунова равен  $\Lambda = 0.93865$ . Другие параметры как для рисунка 2.11

рентными. Данная временная динамика соответствует режиму классического хаотического аттрактора Лоренца в индивидуальном осцилляторе, проекция фазового портрета которого показана на рисунке 2.16,б. Однако, в частично когерентном режиме колебания осцилляторов ансамбля происходят вблизи одного из симметричных состояний равновесия. Особенность структуры фазового пространства индивидуальной системы Лоренца связана со сдвигом значений эффективных параметров в виду наличия нелокальной связи (см. раздел 2.3.2 и рисунок 2.12,б).

Как видно из рисунка 2.16,а, амплитуда колебаний с ростом времени уменьшается и становится минимальной при  $t \simeq 150$ . Значение амплитуды стремится к значению координаты состояния равновесия (устойчивого фокуса). После прохождения этого момента времени, амплитуда вновь начинает нарастать и происходит переход к некогерентному режиму. Стоит отметить, что переход от полной рассинхронизации к частичной синхронизации (когерентности) происходит не мгновенно для всех осцилляторов ансамбля, а с некоторым сдвигом по времени. В то же время, переключение в некогерентный режим осуществляется практически одновременно для всех элементов. Временной интервал между переключениями с одного режима функционирования на другой является довольно большим, но сами переключения происходят нерегулярно во времени. С увеличением силы связи  $\sigma$  и для значений радиуса связи  $r > 0.26$  частота смены режимов уменьшается.

Теперь обратимся к интервалу малых значений радиуса связи  $0 < r < 0.2$ , которые соответствуют области  $B$  на диаграмме режимов на рисунке 2.11. В этом случае также имеет место эффект перемежаемости, но реализуется он между другими сложными структурами и наблюдается как во времени, так и пространстве. Режим пространственно-временной динамики ансамбля (2.5) в области  $B$  проиллюстрирован на рисунке 2.17,а,б с помощью пространственно-временного и мгновенного пространственного профилей состояний ансамбля, соответственно.

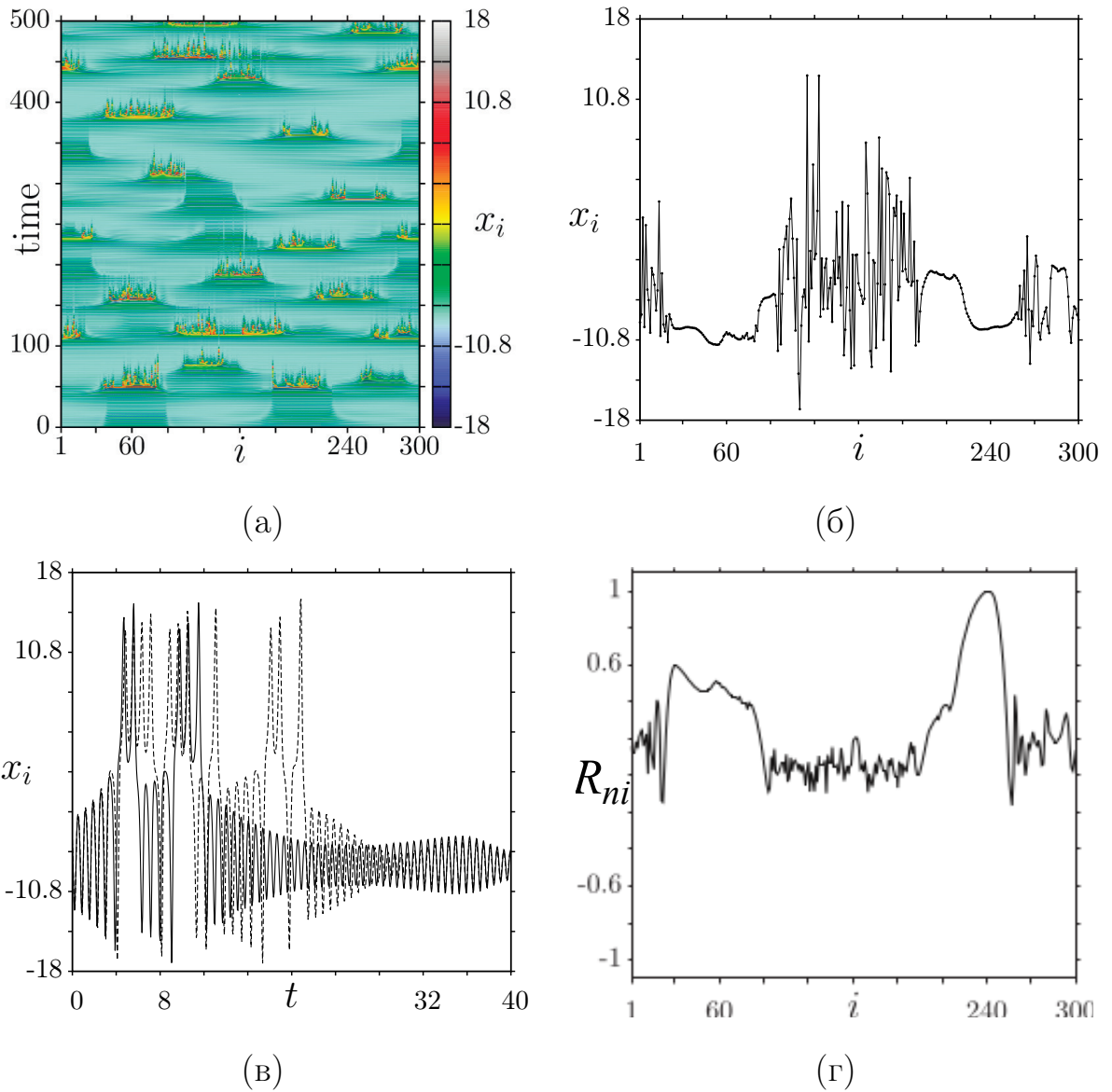


Рисунок 2.17. Режим пространственно-временной перемежаемости между когерентным состоянием и метастабильными химероподобными структурами в ансамбле (2.5) (область  $B$  на рисунке 2.11) для значений радиуса связи  $r = 0.19$  и силы связи  $\sigma = 0.56$ . (а) Пространственно-временной профиль, (б) мгновенный профиль состояний ансамбля в момент времени  $t = 120$ , (в) фрагмент временных реализаций для 120-го (сплошная кривая) и 121-го (пунктирная кривая) осцилляторов из некогерентного кластера, (г) величина коэффициента взаимной корреляции между 240-м осциллятором и другими осцилляторами ансамбля. Старший ляпуновский показатель равен  $\Lambda = 0.5145$ .

Другие параметры как для рисунка 2.11

Как хорошо видно из рисунка 2.17,а, при малых значениях радиуса связи  $r$  в ансамбле (2.5) уже не наблюдаются режимы полной некогерентности. На их смену приходит режим, при котором в пространстве ансамбля формируются и сосуществуют кластеры осцилляторов с синхронным поведением и с некогерентной (хаотической) динамикой во времени. Такая пространственно-временная структура соответствует химерному состоянию. Однако, как следует из рисунка 2.17,а, это состояние имеет характерные черты нестационарного процесса, которые проявляются в виде нерегулярных переключений между когерентным и некогерентными режимами динамики осцилляторов во времени, а также в случайном изменении локализации (миграции) когерентных и некогерентных кластеров в пространстве ансамбля с течением времени. Данный режим может относиться к классу *турбулентных химер* [109, 156]. Наши исследования показали, что одновременно может наблюдаться несколько некогерентных кластеров, возникающих в разных областях пространства, но все они имеют различное время жизни. Тем не менее, как показывает рисунок 2.17,б, мгновенный профиль состояний ансамбля в фиксированный момент времени отражает сосуществование когерентных и некогерентных кластеров осцилляторов с четко определенными границами в пространстве ансамбля. Таким образом, в данном случае химерное состояние характеризуется конечным и довольно коротким временем жизни ( $t \approx 20$  единиц безразмерного времени).

Особенностью данного динамического режима является то, что все осцилляторы ансамбля колеблются вокруг одного и того же состояния равновесия (в окрестности одного из симметричных фокусов), переключаясь в другую «ямку» (или окрестность другого состояния равновесия) через очень большой период времени ( $t > 10000$  единиц времени). На рисунке 2.17,в представлены фрагменты временных зависимостей координаты  $x_i$  для двух соседних осцилляторов из некогерентного кластера. Как видно из графиков, колебания обоих элементов являются хаотическими, носят переключательный характер, а значения их мгновенных амплитуд и фаз абсолютно не совпадают. В режиме когерентной

динамики всех элементов ансамбля и для осцилляторов из когерентных кластеров химерной структуры характерны колебания только в одной и той же «ямке» (в окрестности состояния равновесия). Причем соседние осцилляторы демонстрируют синфазные и близкие по амплитуде колебания, что соответствует режиму частичной синхронизации.

Для количественной характеристики наблюдаемого маложивущего химерного состояния, на рисунке 2.17,г представлены результаты расчета величины коэффициента взаимной корреляции (2.8) между произвольно выбранным осциллятором  $i = 240$  из когерентного кластера и всеми другими элементами ансамбля. В силу того, что химероподобное состояние имеет короткое время жизни ( $t \approx 20$  единиц времени), значения коэффициента взаимной корреляции можно оценить только приблизительно. Тем не менее, их распределение дает достаточно адекватное представление о статистической взаимосвязи колебаний осцилляторов ансамбля и понимание динамики ансамбля в целом. Как хорошо видно из рисунка 2.17,г, значения  $R_{ni}$  практически равны нулю для элементов, входящих в некогерентные кластеры. Кроме того, колебания осцилляторов из когерентных кластеров также не являются полностью когерентными между собой, так как для них значения коэффициента корреляции лежат в интервале  $0.5 < R_{ni} < 1$ . Однако эти значения  $R_{ni}$  существенно больше, чем в случае осцилляторов из некогерентных кластеров. Как следует из рисунка 2.17,в,г, временная динамика соседних осцилляторов и распределение величин коэффициента взаимной корреляции являются типичными для режима амплитудных химер, свойства которых подробно описаны в разделе 1.2.5 для ансамбля нелокально связанных логистических отображений. Установленные особенности рассматриваемого режима позволяют сделать вывод, что химерное состояние, которое реализуется в области  $B$  на диаграмме режимов (рисунок 2.11) для ансамбля (2.5), подобно амплитудной химере.

Таким образом, в области  $B$  диаграммы режимов (рисунок 2.11) наблюдается перемежаемость во времени между режимом когерентности ансамбля

и режимами маложивущих химерных состояний, когерентные и некогерентные кластеры которых демонстрируют эффект перемежаемости как во времени, так и в пространстве. Процесс переключений между этими режимами носят нерегулярный характер, а сами динамические моды характеризуются конечным и небольшим временем жизни. Отметим, что процесс пространственно-временной перемежаемости реализуется в конечной области значений параметров  $r$  и  $\sigma$  и при различных случайно выбранных начальных условиях.

При вариации значений радиуса связи  $r$  в конечном интервале  $0.2 < r < 0.26$ , что соответствует области  $B''$  на диаграмме режимов рисунка 2.11, реализуются смешанные режимы динамики осцилляторов ансамбля. Данная область характеризуется чередованием когерентного режима либо с полностью некогерентной динамикой осцилляторов (которая наблюдалась в области  $B'$ ), либо с режимом химероподобных состояний (которая имеет место в области  $B$ ). Важная особенность динамического режима в области  $B''$  состоит в том, что переход от режима неустойчивых химерных структур к режиму полной рассинхронизации (некогерентности) и наоборот всегда сопровождается возникновением режима когерентной (синхронной) динамики всех осцилляторов ансамбля, который реализуется в течение довольно короткого времени. Более того, переключения между симметричными «ямками» (окрестностями состояний равновесия) в данном когерентном режиме при  $0.2 < r < 0.26$  происходят гораздо чаще, чем это наблюдалось в области  $B$ .

### 2.3.6 Сосуществование режимов двухъямной химеры и пространственно-временной перемежаемости

Перейдем к рассмотрению динамики, которую демонстрирует ансамбль (2.5) в области  $C$  на диаграмме рисунка 2.11 при довольно малых значениях

радиуса связи  $0.025 < r < 0.175$ , но достаточно сильной нелокальной связи между элементами  $0.6 < \sigma < 1.2$ . Область  $C$  характеризуется режимом, который сочетает в себе особенности динамики, реализуемой в областях  $A$  и  $B$ . Пространственно-временная диаграмма и мгновенный профиль значений переменных  $x_i$  осцилляторов для типичного режима в области  $C$  приведены на рисунке 2.18,а,б, соответственно.

С одной стороны, реализуемый режим сохраняет пространственно-временную структуру, соответствующую двухъямной химере. При этом значения состояний осцилляторов в некогерентных кластерах нерегулярно распределены между двумя ямками. С другой стороны, наблюдается пространственно-временная перемежаемость, которая характерна для области  $B$  (см. раздел 2.3.5). В области  $C$  этот эффект проявляется в чередовании режима полной когерентной динамики (причем часть элементов совершает синхронные колебания вблизи одного состояния равновесия, а другая часть осцилляторов — в окрестности другого) с маложивущими амплитудными химерами, кластеры некогерентности которых возникают и исчезают в различные моменты времени и в различных областях пространства ансамбля.

Как видно из рисунка 2.18,а, границы некогерентных кластеров двухъямной химеры не являются четко определенными и могут изменяться во времени в пределах некоторых областей пространства ансамбля. Однако кластерная пространственно-временная структура со специфическим двухъямным распределением осцилляторов ансамбля сохраняется в течение всего времени наблюдения. На рисунке 2.18,в показаны фрагменты временных реализаций для двух соседних осцилляторов, принадлежащих одному из некогерентных кластеров двухъямной химеры. Как видно из графиков, элементы демонстрируют хаотические колебания переключательного типа. В том случае, если границы некогерентных кластеров остаются неизменными, колебания происходят вокруг одного из состояний равновесия. В свою очередь элементы когерентных кластеров осциллируют в окрестности только «своей ямки» (состояния равновесия) в



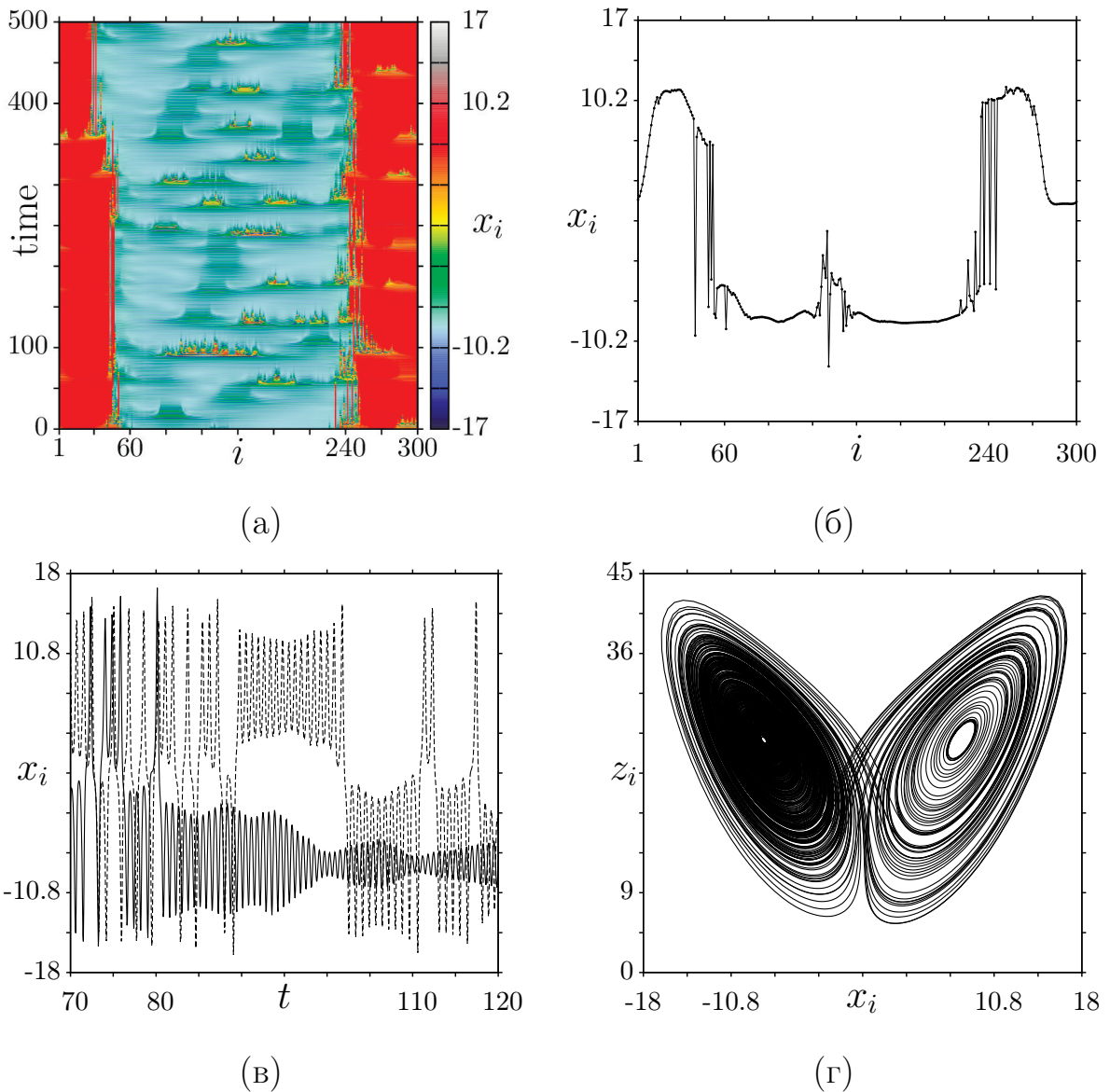


Рисунок 2.18. Иллюстрация динамики ансамбля (2.5) в области  $C$  на диаграмме режимов (рисунок 2.11) для значений параметров связи  $\sigma = 0.7$  и  $r = 0.083$ . (а) Пространственно-временная диаграмма, (б) мгновенный профиль значений переменных  $x_i$ , (в) фрагменты временных реализаций для 242-го (сплошная кривая) и 243-го (пунктирная кривая) осцилляторов из некогерентного кластера, (г) проекция фазового портрета хаотического аттрактора на плоскость переменных  $(x_i, z_i)$  242-го осциллятора. Старший ляпуновский показатель равен  $\Lambda = 0.713674$ . Другие параметры как для рисунка 2.11

зависимости от своей пространственной локализации. В области  $C$  временная динамика индивидуального осциллятора ансамбля (2.5) отвечает режиму квазигиперболического хаотического аттрактора Лоренца. Соответствующая проекция фазового портрета на плоскость переменных  $(x_i, z_i)$  для выбранного осциллятора приведена на рисунке 2.18,г. Однако степень хаотичности колебаний значительно выше, чем для режима устойчивой двухъямной химеры, реализующегося в области  $A$ . Старший ляпуновский показатель равен  $\Lambda = 0.713674$ , что почти в 50 раз превышает значение показателя для хаотического аттрактора в индивидуальном осцилляторе для режима в области  $A$ .

### 2.3.7 Режим полной некогерентности

Область  $D$  на диаграмме рисунка 2.11) соответствует режиму полной некогерентности или пространственно-временного хаоса, когда все осцилляторы ансамбля (2.5) полностью рассинхронизованы. Этот режим реализуется для локальной или почти локальной связи ( $0 < r < 0.015$ ) для всех значений силы связи в интервале  $\sigma \in [0; 1.2]$ , а также для всего диапазона изменения значений радиуса связи  $r$ , когда сила связи  $\sigma \lesssim 0.32$  (см. рисунок 2.11). В качестве иллюстрации на рисунке 2.19,а приведена пространственно-временная диаграмма типичного режима колебаний осцилляторов ансамбля, который реализуется при малом значении силы связи  $\sigma$ .

Когда осцилляторы ансамбля (2.5) связаны локально ( $r = 0.003$ ) и сила связи довольно большая, динамика ансамбля в общих чертах похожа на режим частичной когерентности, который наблюдается в области  $B$ . В этом случае большая часть элементов ансамбля осциллирует в одной области хаотического аттрактора Лоренца в течение достаточно долгого времени, после чего может происходить переключение в симметричную область предельного множества. Однако временная динамика каждого осциллятора является сильно хаотиче-

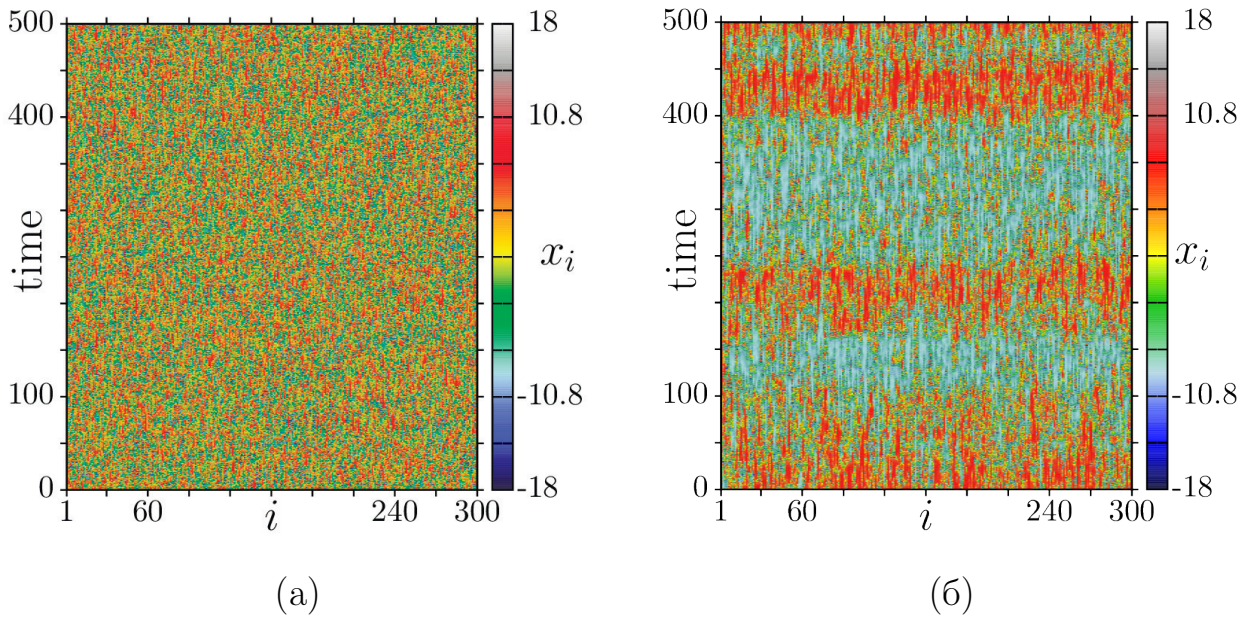


Рисунок 2.19. Пространственно-временные диаграммы для режима пространственно-временного хаоса в ансамбле (2.5) (область  $D$  на рисунке 2.11) для (а)  $r = 0.063$ ,  $\sigma = 0.28$  и (б)  $r = 0.003$ ,  $\sigma = 0.49$ . Другие параметры как для рисунка 2.11

ской, а соответствующее пространственное распределение состояний элементов ансамбля является некогерентным. Соответственно, этот режим нельзя назвать даже частично когерентным. Пространственно-временная диаграмма данного режима показана на рисунке 2.19,б. Как хорошо видно из рисунка, кроме описанных выше особенностей данный режим также характеризуется явно заметной перемежаемостью колебаний осцилляторов во времени, обусловленной переключениями траектории индивидуального осциллятора ансамбля между двумя областями аттрактора Лоренца.

## 2.4 Выводы по второй главе

Во второй главе работы описаны результаты численного моделирования динамики ансамблей нелокально связанных отображений Лози и систем Лорен-

ца в хаотическом режиме при вариации значений параметров нелокальной связи. Отметим, что хаотические аттракторы в изолированном отображении Лози и модели Лоренца при классических значениях ее управляющих параметров относятся к квазигиперболическому типу. На основании полученных численных результатов можно сделать следующие основные выводы.

1. Приведены результаты детального численного исследования перехода «когерентность—некогерентность» в кольце нелокально связанных отображений Лози в хаотическом режиме с использованием мгновенных пространственных и пространственно-временных профилей динамики элементов ансамбля и функции связи при уменьшении силы нелокальной связи. Показано, что при глобальном переходе от режима полной хаотической синхронизации к пространственно-временному хаосу возникают так называемые уединенные состояния, число которых линейно растет при уменьшении силы нелокальной связи. Уединенные состояния характеризуются временной динамикой, полностью отличной от поведения во времени остальных элементов ансамбля. Установлено, что уединенные состояния возникают случайным образом и не формируют устойчивых кластеров некогерентности с определенными границами в пространстве ансамбля.
2. Впервые проведен детальный численный анализ динамики ансамбля нелокально связанных систем Лоренца в режиме квазигиперболического хаотического аттрактора при небольших значениях силы и радиуса связи и описаны полученные результаты. Впервые показано, что в данном ансамбле реализуются режимы уединенных состояний, число которых увеличивается при уменьшении значения силы связи. Однако для этих режимов практически невозможно четко определить область на плоскости параметров нелокальной связи  $(r, \sigma)$  в силу того, что уединенные состояния представляют собой переходный режим между режимом частичной когерентности динамики ансамбля и химерными состояниями.

3. Установлено, что режимы уединенных состояний являются типичными и реализуются при переходе к режиму полной некогерентности в ансамблях нелокально связанных хаотических систем, индивидуальные элементы которых характеризуются хаотическими аттракторами квазигиперболического типа.
4. Для ансамбля нелокально связанных систем Лоренца в условиях слабой нелокальной связи впервые проведен теоретический анализ влияния силы нелокальной связи на эффективные значения управляющих параметров индивидуального осциллятора. Установлено теоретически и подтверждено численно, что изменение силы нелокальной связи может приводить к сдвигу эффективных значений управляющих параметров, в результате которого индивидуальная система Лоренца приобретает свойства бистабильности. Происходит переход от режима квазигиперболического аттрактора Лоренца к бистабильной динамике (что является типичным для режима негиперболического аттрактора) и реализуется возможность наблюдать режимы химерных состояний.
5. Впервые показано, что в области малых значений параметров связи в ансамбле нелокально связанных систем Лоренца в режиме квазигиперболического хаотического аттрактора во невзаимодействующих осцилляторах реализуются режимы двухъямных химерных состояний и наблюдаются процессы перемежаемости во времени и пространстве режимов частичной когерентности либо с режимами полной некогерентности, либо амплитудных и двухъямных химерных состояний. Можно заключить, что подобные типы динамики являются типичными и в общем случае могут иметь место в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов с хаотическим аттрактором типа Лоренца.

6. Показано, что гипотеза о невозможности реализации химерных состояний в ансамблях хаотических осцилляторов с квазигиперболическими аттракторами индивидуальных осцилляторов [90] (в отсутствие связей) подтверждается. Однако это утверждение является справедливым в случае, если при наличии нелокальной связи между элементами ансамбля хаотический аттрактор индивидуального осциллятора будет оставаться квазигиперболическим. Это условие может нарушаться, и квазигиперболический аттрактор будет трансформироваться в другие виды аттракторов со всеми вытекающими последствиями. Последнее утверждение обосновано в главе 2 на примере ансамбля нелокально связанных систем Лоренца.

## Глава 3. Перемежаемость во времени и время жизни химерных состояний

### 3.1 Введение

При проведении компьютерного моделирования динамики сложных ансамблей взаимодействующих осцилляторов и численного анализа эволюции во времени реализуемых в них сложных пространственно-временных структур важным моментом является определение и исследование свойств стационарности и устойчивости исследуемых типов динамических режимов. Как было отмечено в работах [56, 156], практически все химерные состояния, включая «классическую» химеру в модели Курамото [54], являются долгоживущими переходными состояниями с бесконечным переходным периодом в непрерывном пределе  $N \rightarrow \infty$ , где  $N$  — общее число элементов в ансамбле.

Как показали наши исследования [336, 337, 353], некоторые типы пространственно-временных структур, например, фазовая химера, при проведении расчетов на достаточно больших временах сохраняют как свои динамические характеристики во времени, так и распределение в пространстве. В этом смысле их можно называть устойчивыми или стационарными. Под стационарностью понимается тот факт, что режимы функционирования любых элементов как когерентных, так и некогерентных кластеров химерных состояний во времени остаются неизменными. В рамках численных расчетов фазовая химера представляет собой долгоживущую пространственно-временную структуру и время ее жизни ограничивается только заданным временем расчета или наблюдения в ходе проведения численного моделирования. В то же время другой тип химерной структуры — амплитудная химера — характеризуется нестацио-

нарными колебаниями во времени, имеет конечное время жизни и представляет собой короткоживущую (по сравнению с фазовой химерой) структуру.

Большие ансамбли взаимосвязанных элементов живой и неживой природы характеризуются, как правило, довольно сложной динамикой. Ярким примером могут служить ансамбли нейронов мозга человека и животных. Результаты исследований нейронных ансамблей свидетельствуют о наличии переключений режимов их функционирования во времени и пространстве [331, 420]. Такие переключения происходят как в автономном режиме их функционирования, так и при возмущениях. Возникает вопрос: можно ли численно смоделировать режим переключений химерных структур в автономном ансамбле взаимодействующих идентичных осцилляторов?

В главе 3 работы на примере анализа эволюции химерных структур в одномерных ансамблях связанных логистических отображений и отображений Эно детально анализируются и описываются особенности динамики во времени фазовой и амплитудной химерных состояний. Показано, что установленные свойства являются типичными для данных химерных структур и проявляются при изучении динамики различных ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов с удвоением периода. В настоящей главе впервые будет показана и описана возможность реализации эффекта нерегулярных переключений во времени (процесса перемежаемости во времени) между амплитудными и фазовыми химерными структурами, рассмотрены некоторые особенности этого явления, а также дан ответ на вопрос о времени жизни амплитудной химеры.

Известно, что шум неизбежно присутствует во многих реальных системах и в той или иной степени влияет на режимы их функционирования [421–423]. Чаще всего воздействие шума ассоциируется с негативными эффектами, приводящими к разрушению режимов динамики систем и исчезновению структур. Однако шум может играть и конструктивную роль, которая проявляется в поддержании (стабилизации) режимов функционирования и управлении ими [225], а также может способствовать улучшению некоторых характеристик



динамики системы. Наглядным примером могут служить эффекты стохастического [219, 220, 424, 425] и когерентного резонанса [221] в нелинейных системах. Кроме того, шум может индуцировать появление принципиально новых структур и эффектов, которые не могут быть реализованы в сложных системах и ансамблях в отсутствие шумового воздействия [217, 222, 226, 228, 231, 426]. Таким образом, устойчивость реализуемых пространственно-временных структур в сложных ансамблях взаимодействующих элементов, а также их эволюция по времени и пространству могут зависеть и определяться реакцией системы на внешние воздействия.

В ряде работ проводился анализ влияния внешних шумовых [57, 102, 103, 123, 212, 232] и периодических [427] воздействий на ансамбли нелокально связанных хаотических элементов в режиме химерных состояний. Было установлено, что фазовая химера является устойчивым по отношению к внешним возмущениям состоянием [337], тогда как амплитудная химера может либо трансформироваться в фазовое химерное состояние [232, 337, 353], либо исчезнуть совсем при выборе определенных параметров воздействия [103].

В настоящей главе впервые приводятся результаты численного статистического анализа влияния глобального (на все элементы ансамбля) и целенаправленного (действующего только на элементы некогерентных кластеров) кратковременного аддитивного шумового воздействия на время жизни амплитудных химерных состояний после их «смерти» или перехода в режим фазовых химерных состояний в ансамбле нелокально связанных хаотических отображений (логистических отображений и отображений Эно). Показано, что процессом перемежаемости (переключений) во времени между амплитудной и фазовой химерами, то есть между хаотической и периодической динамикой, можно управлять путем кратковременных шумовых воздействий на элементы всего ансамбля или только на элементы некогерентных кластеров амплитудных химер. Будет показана возможность увеличения времени жизни амплитудных химер при определенном шумовом воздействии и проанализировано влияние интен-

сивности и длительности шумового воздействия на время жизни амплитудных химер.

Результаты численных исследований, представленные и проиллюстрированные в 3-й главе, опубликованы в работах [336, 337, 350, 353, 372].

## **3.2 Эффект перемежаемости в ансамбле нелокально связанных логистических отображений**

### **3.2.1 Временная динамика парциальных осцилляторов амплитудной химеры**

В качестве объекта исследования для решения указанной задачи используем одномерное кольцо нелокально связанных логистических отображений в хаотическом режиме (1.1), подробно описанное в разделе 1.1. Как было показано, при определенных значениях коэффициента нелокальной связи  $\sigma$  в ансамбле возникают два типа химерных состояний: фазовая (рисунок 1.9) и амплитудная (рисунок 1.12) химеры. Причем амплитудная химера может сосуществовать в пространстве ансамбля вместе с фазовой. Пространственно-временные структуры ансамбля включают кластеры когерентности (когда соседние осцилляторы имеют близкие значения амплитуды  $|x_i - x_{i+1}| < \delta$ ,  $\delta \ll 1$ , то есть выполняется условие (1.4)) и некогерентности (для соседних осцилляторов нарушается условие (1.4)). Элементы некогерентных кластеров амплитудной и фазовой химер отличаются друг от друга временной динамикой. В случае фазовых химер колебания осцилляторов во времени являются периодическими или слабо хаотическими, а в случае амплитудных — хаотическими. Расчеты показали, что фазовая химера представляет собой установившийся и устойчивый во време-

ни режим функционирования ансамбля (1.1) [337, 353]. Временные реализации  $x_i^t$  любого осциллятора из кластера некогерентности фазовой химеры характеризуются стационарными периодическими или слабо хаотическими (почти периодическими) колебаниями, которые сохраняются на очень больших временах ( $\gtrsim 10^8$  итераций дискретной системы). Иная картина имеет место для амплитудных химер. Если рассмотреть реализацию  $x_i^t$  для любого осциллятора из некогерентного кластера амплитудной химеры, то наблюдаются нерегулярные переключения колебаний осциллятора во времени между хаотическими и периодическими. Таким образом, временная динамика  $x_i^t$  осцилляторов из некогерентного кластера амплитудной химеры является нестационарной. Спустя определенное число итераций порядка  $t \simeq 3 \times 10^5$  имеет место переключение осцилляторов амплитудной химеры в режим периодической динамики. Другими словами, амплитудная химера переходит в фазовую и перестает существовать («умирает»).

Для проведения численных исследований выберем значение радиуса связи  $r = 0.14$  и силы связи  $\sigma = 0.255$  и рассмотрим динамику ансамбля (1.1) [353]. Соответствующие мгновенный и пространственно-временной профили для переменных  $x_i$  представлены на рисунке 3.1. Мгновенный профиль (рисунок 3.1,а) получен в фиксированный момент времени  $t = 7.8 \times 10^4$  и отражает реализацию сложной пространственно-временной структуры, возникшей на базе волнообразного профиля с волновым числом  $k = 2$ . Пространственно-временной профиль (рисунок 3.1,б), состоящий из 50 последовательных мгновенных профилей, характеризует как пространственную, так и временную динамику всех элементов ансамбля (1.1). Как видно из рисунка 3.1, данная структура состоит из нескольких некогерентных кластеров, которые разделены участками с когерентным (синхронным) поведением. Некогерентные кластеры принадлежат трем фазовым ( $240 \leq i \leq 430$ ,  $600 \leq i \leq 670$ ,  $830 \leq i \leq 910$ ) и двум амплитудным ( $1 \leq i \leq 160$ ,  $720 \leq i \leq 785$ ) химерным структурам. В дальнейшем для простоты изложения некогерентный кластер с элементами  $1 \leq i \leq 160$  будем

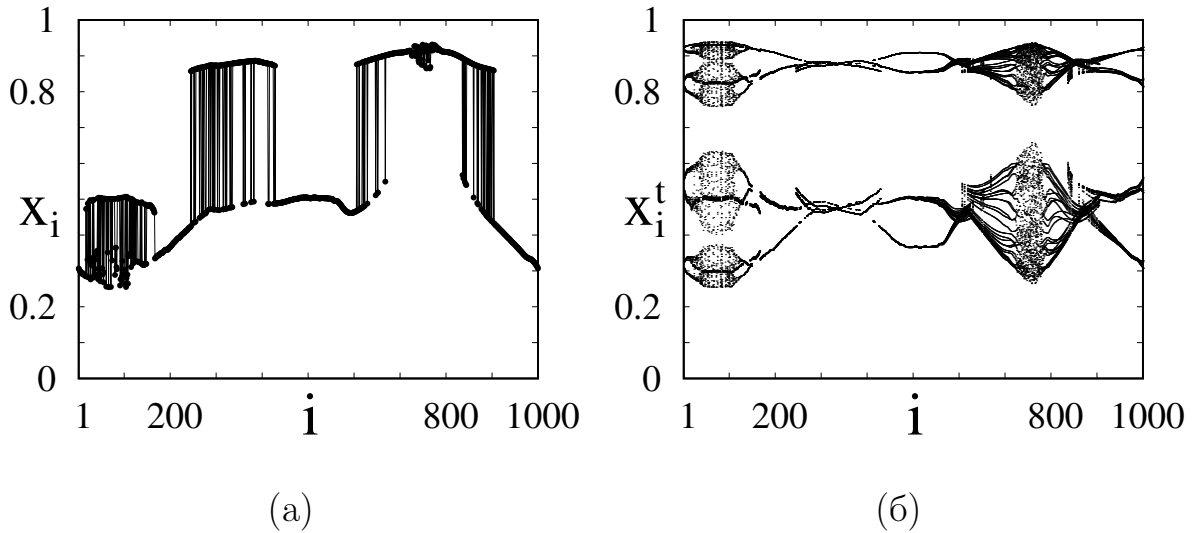


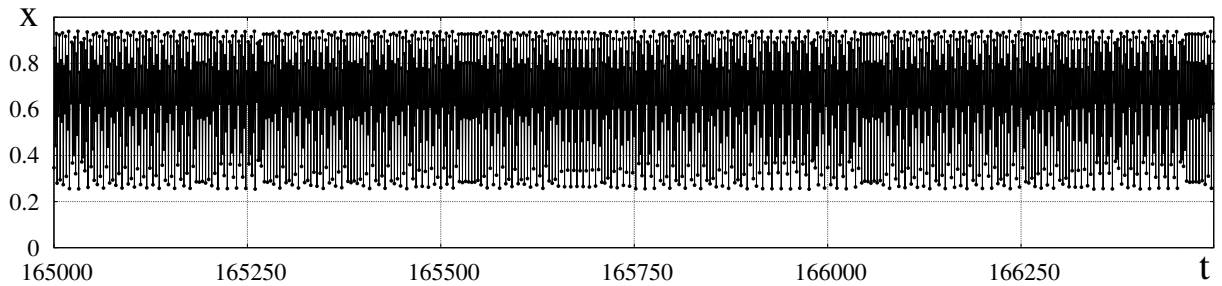
Рисунок 3.1. Мгновенный (при  $t = 7.8 \times 10^4$ ) (а) и пространственно-временной (б) профили динамики ансамбля (1.1). Наблюдаются и сосуществуют фазовые ( $240 \leq i \leq 430$ ,  $600 \leq i \leq 670$ ,  $830 \leq i \leq 910$ ) и амплитудные ( $1 \leq i \leq 160$ ,  $720 \leq i \leq 785$ ) химеры. Параметры системы (1.1):  $\alpha = 3.8$ ,  $\sigma = 0.255$ ,  $r = 0.14$ ,  $N = 1000$

называть 1-й амплитудной химерой, а кластер с элементами  $720 \leq i \leq 785$  – 2-й амплитудной химерой. 1-я амплитудная химера локализуется на нижнем уровне профиля, а 2-я амплитудная химера находится на верхнем уровне между двумя некогерентными кластерами фазовой химеры. Из формы пространственно-временного профиля (рисунок 3.1,б) видно, что осцилляторы, формирующие амплитудные химеры, характеризуются развитой хаотической динамикой во времени, в то время как элементы некогерентных кластеров фазовых химер и когерентных кластеров демонстрируют практически периодические колебания.

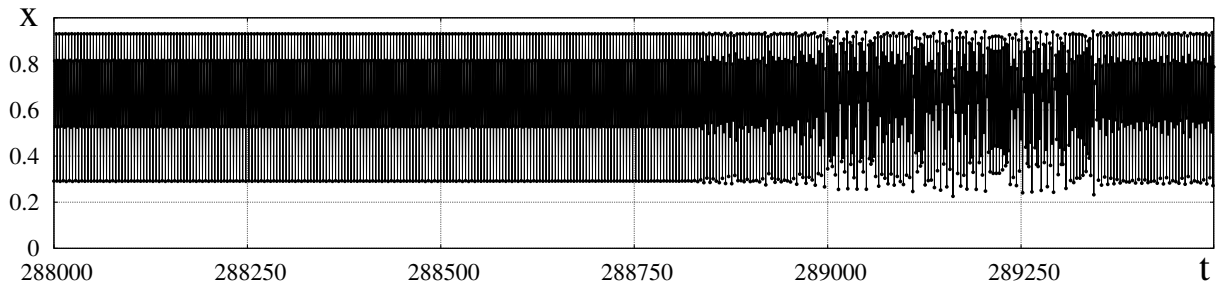
Как показали наши исследования [337, 353], фазовая химера является устойчивой, стационарной и долгоживущей структурой, сохраняющей свои динамические и корреляционные свойства на протяжении достаточно большого времени наблюдения (времени расчета)  $t \gtrsim 10^8$  и при вариации параметров нелокальной связи в некотором небольшом интервале значений. Амплитудная химера представляет собой нестационарную структуру, элементы которой мо-

гут демонстрировать переключения между различными колебательными режимами во времени.

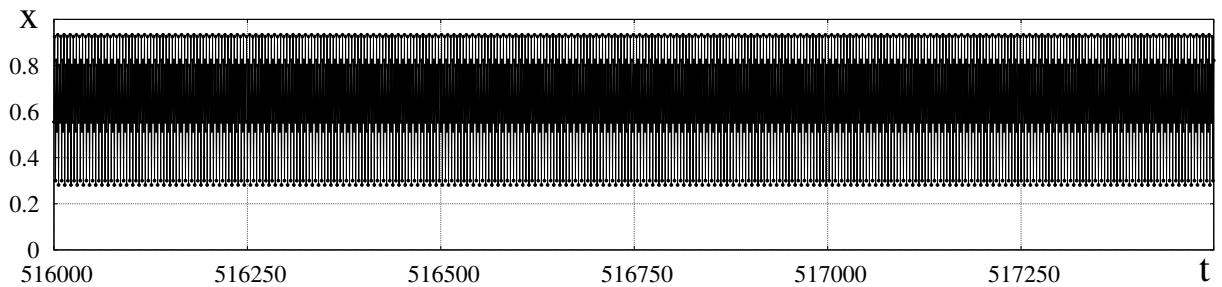
Для иллюстрации эффекта переключений в ансамбле (1.1) выберем произвольный элемент из некогерентного кластера любой амплитудной химеры и построим его временную зависимость  $x_i^t$ . На рисунке 3.2 приведены три фрагмента временной реализации для 100-го элемента из 1-й амплитудной химеры (см. рисунок 3.1). Как следует из рисунка 3.2,а, хаотическая динамика во време-



(а)



(б)



(в)

Рисунок 3.2. Фрагменты временной реализации для осциллятора  $i = 100$  из 1-й амплитудной химеры (см. рисунок 3.1). Параметры системы (1.1):  $\alpha = 3.8$ ,

$$\sigma = 0.255, r = 0.14, N = 1000$$

ни выбранного осциллятора превалирует, что является типичным для амплитудной химеры. Однако время от времени интервалы хаотических колебаний сменяются очень короткими промежутками периодической динамики, что соответствует режиму фазовой химеры. Чередование интервалов периодических и хаотических колебаний носит нерегулярный характер. С увеличением времени наблюдения (рисунок 3.2,б) регулярная динамика начинает превалировать во времени, а длительность интервалов, соответствующих хаотической динамике, становится короче.

Процесс нерегулярных переключений, представленный на рисунке 3.2, напоминает эффект перемежаемости, известный из теории динамического хаоса как один из сценариев его развития [428, 429]. Однако в данном случае речь может идти только о качественном соответствии процессов нерегулярных переключений во времени между двумя различными типами колебаний в сравнении с переключениями между ламинарными и турбулентными фазами. Классический эффект перемежаемости подчиняется универсальному закону зависимости длительности ламинарных фаз от уровня надкритичности. В рассматриваемом случае ансамбля осцилляторов (1.1) взаимосвязи длительностей двух различных колебательных режимов, демонстрирующих переключений, нами не обнаружено.

Обнаруженный эффект переключений между амплитудной и фазовой химерами можно назвать режимом «перемежающейся во времени химеры». Согласно классификации химерных состояний, предложенной в работе [156], данный тип химеры можно отнести к категории переходных (нестационарных) химерных структур (*transient chimeras*).

Если проследить за динамикой выбранного 100-го элемента далее, в течение длительного времени, то можно увидеть, что процесс нерегулярных переключений (временной перемежаемости) между периодическими и хаотическими колебаниями закончится и перемежающаяся во времени химера окончательно переключится в режим фазовой химеры. Данный факт проиллюстрирован

на рисунке 3.2,б, на котором хорошо виден переход от амплитудной к фазовой химере. Процесс перемежаемости или нерегулярных переключений для элементов 1-й амплитудной химеры завершается при  $t = 314000$  окончательным переходом к режиму периодических колебаний и, следовательно, установлением режима фазовой химеры. Для времени наблюдения  $t > 314000$  переключений во времени больше не наблюдается, и временная динамика выбранного элемента становится периодической. На рисунке 3.2,в показан фрагмент временной динамики 100-го осциллятора после «смерти» амплитудной химеры и ее преобразования в фазовую химеру. Таким образом, установлено, что время жизни 1-й амплитудной химеры составляет  $t = 314000$  итераций, то есть является конечным.

### 3.2.2 Эволюция во времени кластеров амплитудных химер

Результаты численных исследований, представленные выше, характеризуют временную эволюцию колебаний произвольно выбранного осциллятора из некогерентного кластера амплитудной химеры. Отметим, что любой элемент амплитудной химеры будет демонстрировать аналогичное представленному на рисунке 3.2 поведение.

Рассмотрим эволюцию во времени некогерентных кластеров амплитудных химер в целом. На рисунке 3.3 приведена пространственно-временная диаграмма динамики ансамбля (1.1), которая отражает изменение значений амплитуд колебаний всех элементов кольца во времени и иллюстрирует установление и эволюцию исследуемой пространственно-временной структуры. Для более наглядного восприятия на график выводилась каждая 128 итерация. Как видно из данного рисунка, в ансамбле (1.1) сначала устанавливается 2-я амплитудная химера (через время  $t \approx 5050$  итераций), и только потом — 1-я, для которой требуется время установления  $t \approx 9800$  итераций. Некогерентные кластеры

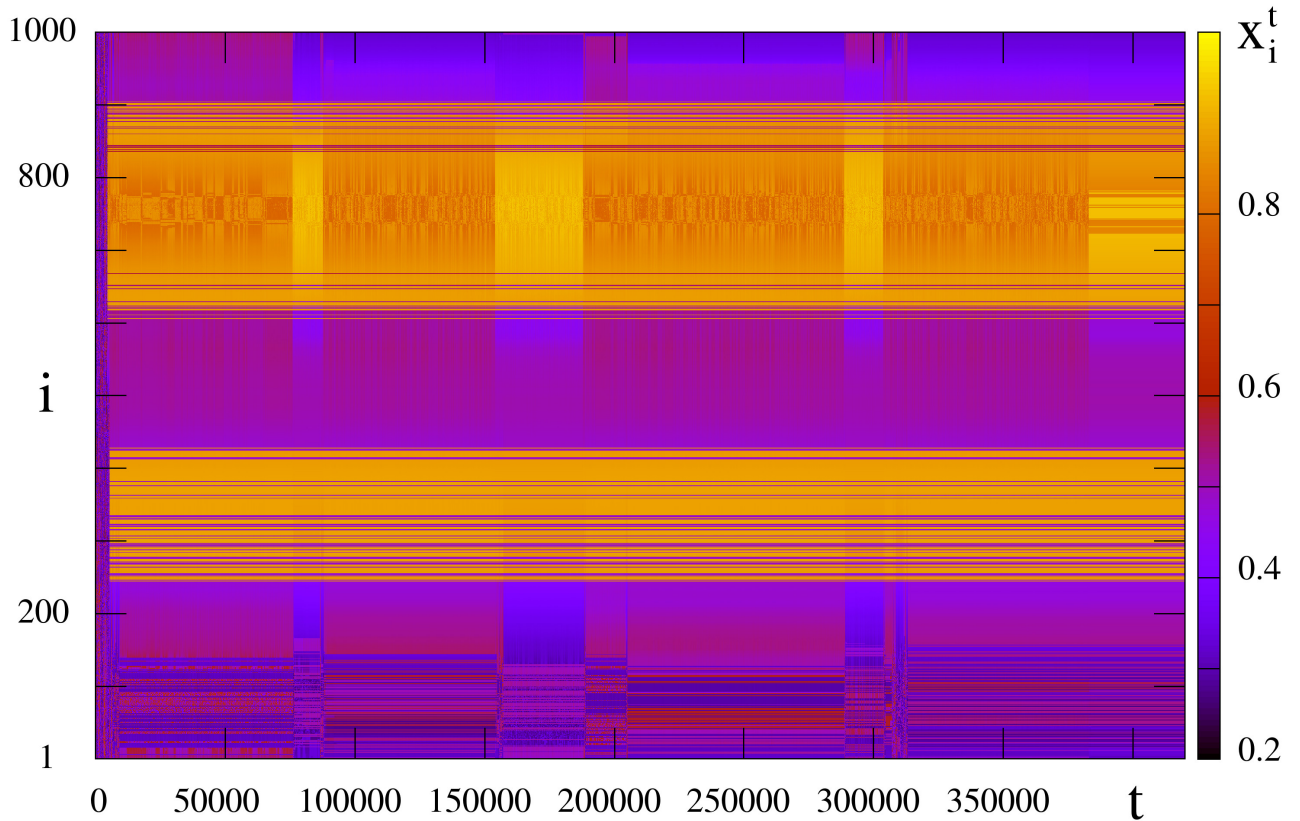


Рисунок 3.3. Пространственно-временная диаграмма динамики ансамбля (3.1).

На графике представлена каждая 128 итерация. Параметры ансамбля (1.1)

как для рисунка 3.2

фазовых химерных состояний (или просто фазовые химеры) формируются в ансамбле в течение достаточно небольшого времени установления или переходного процесса порядка  $t \approx 5050$  (как и в случае 2-й амплитудной химеры).

Диаграмма на рисунке 3.3 хорошо отражает нерегулярные переключения во времени элементов 1-й амплитудной химеры между различными режимами динамики. Например, в интервале  $89500 < t < 154000$  элементы некогерентного кластера демонстрируют периодические колебания, а в течение времени наблюдения  $54000 < t < 206000$  — хаотические. Можно также заметить, что кластер 1-й амплитудной химеры достаточно редко переключается с одного режима динамики на другой, а длительности ламинарных и турбулентных фаз колебаний довольно велики. Как видно из диаграммы рисунка 3.3, для элементов 2-й амплитудной химеры характерна довольно частая смена режимов



колебаний, при этом длительность периодических фаз по сравнению с интервалами хаотической динамики намного короче.

Для иллюстрации процесса переключений элементов кластеров амплитудных химер на рисунке 3.4 приведены мгновенный и пространственно-временной профили, которые отражают динамику элементов ансамбля (1.1) в различные фиксированные моменты времени (для мгновенных профилей). Из рисунка 3.4,а,б видно, что весь кластер 1-й амплитудной химеры переключился в режим периодических колебаний, тогда как элементы 2-й амплитудной химеры демонстрируют хаотическую динамику. Как следует из диаграммы на рисун-

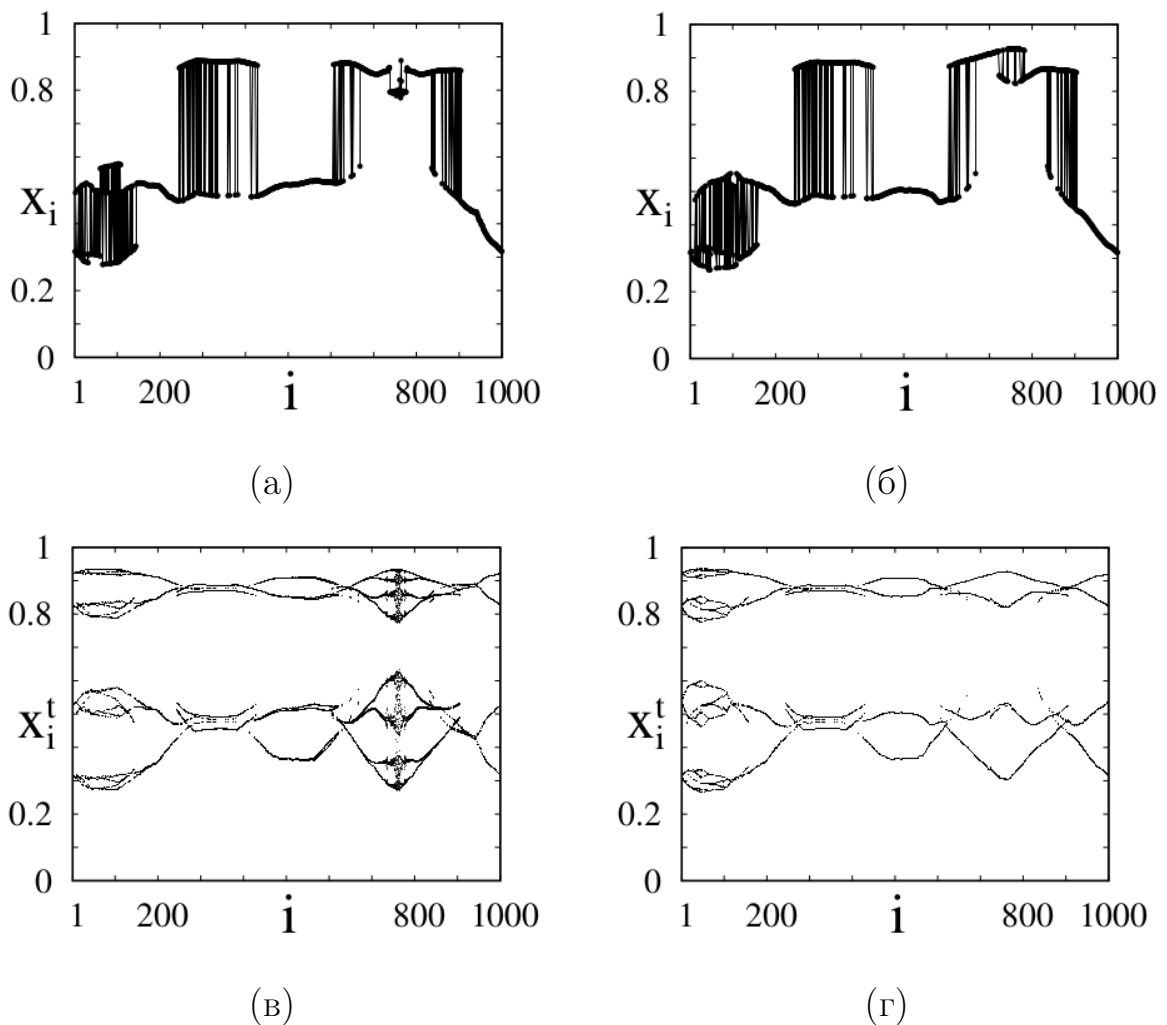


Рисунок 3.4. Мгновенные (а,в) и соответствующие пространственно-временные (б,г) профили динамики ансамбля (1.1) в различные моменты времени: (а)  $t = 106000$ , (в)  $t = 430000$ . Параметры ансамбля как для рисунка 3.2

ке 3.3, длительность процесса переключений или перемежаемости, а, следовательно, и время жизни амплитудных химер являются конечными. По прошествии некоторого времени амплитудные химеры исчезают и переходят в режим фазовой химеры. Колебания элементов в кластерах амплитудных химер перестают быть хаотическими во времени и меняют свой характер на периодический. В результате данного перехода пространственно-временная структура ансамбля (1.1) содержит только некогерентные кластеры фазовой химеры и области с когерентной динамикой. Как хорошо видно из рисунка 3.3, время жизни 1-й амплитудной химеры составляет  $\tau_{\text{life}}^1 = 314000$  и оно заметно меньше, чем время жизни 2-й амплитудной химеры  $\tau_{\text{life}}^2 = 384000$ . При  $t > 384000$  обе амплитудные химеры переходят в режим периодических колебаний или фазовой химеры, как показано на рисунке 3.4,в,г. В результате проведенных численных расчетов установлено, что с увеличением времени наблюдения ( $t > 10^7$ ) возврата к хаотической динамике (к режиму амплитудной химеры) не происходит.

Эффект перемежаемости между различными режимам динамики некогерентных кластеров амплитудной химеры и конечное время жизни амплитудной химеры наблюдается и для более сложной пространственно-временной структуры ансамбля (1.1), которая состоит из множества областей с некогерентной динамикой, принадлежащих фазовым и амплитудным химерам. Как было показано [88,96], химерные структуры реализуются в достаточно большом диапазоне изменения радиуса связи  $r$  и при его уменьшении наблюдаются довольно сложные пространственно-временные структуры, которые демонстрируют явление перемежаемости. Пример такой перемежающейся во времени химеры проиллюстрирован на рисунке 3.5 при  $r = 0.08$ ,  $\sigma = 0.25$  [336]. Как видно из графика мгновенного профиля (рисунок 3.5,а), данная структура включает несколько некогерентных кластеров, характерных для фазовой химеры, и один кластер ( $300 \leq i \leq 390$ ) с особым перемежающимся поведением. Коэффициент взаимной корреляции  $R_{1i}$  (1.3) (рисунок 3.5,б) для некоторых осцилляторов близок по модулю к единице. В то же время имеются кластеры осцилляторов, для ко-

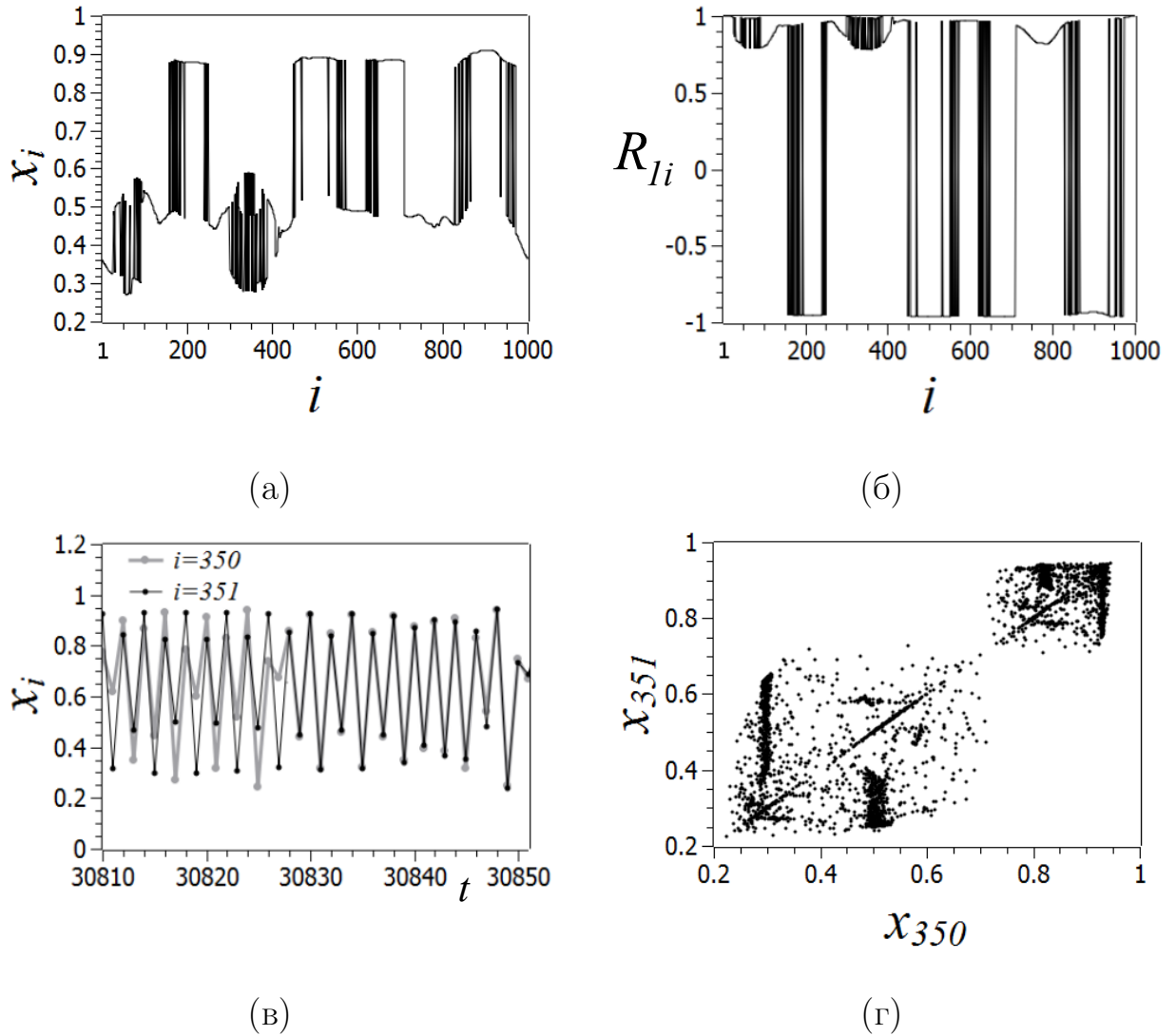


Рисунок 3.5. Перемежающаяся химера в ансамбле (1.1) при  $r = 0.08$ ,  $\sigma = 0.25$ . (а) Мгновенный пространственный профиль, (б) коэффициент взаимной корреляции  $R_{1i}$ , (в) фрагмент колебаний во времени осцилляторов с номерами  $i = 350$  и  $i = 351$ , (г) проекция фазовой траектории на плоскость переменных  $(x_{350}, x_{351})$

торых  $|R_{1i}| < 1$ , что свидетельствует о наличии слабого хаоса. На рисунке 3.5, в приведен фрагмент колебаний во времени осцилляторов с номерами  $i = 350$  и  $i = 351$ . Можно видеть, что осцилляторы на некотором интервале времени колеблются почти в противофазе (что характерно для фазовой химеры), а на другом интервале их колебания становятся синфазными и различаются по амплитуде (амплитудная химера). О перемежаемости свидетельствует и проек-

ция траектории на плоскость переменных  $(x_{350}, x_{351})$  (рисунок 3.5,г), в которой часть точек располагается на биссектрисе (синфазное поведение), а часть локализована в областях, далеких от биссектрисы. В этом случае длительность процесса перемежаемости во времени ограничена и при числе итераций системы (1.1)  $t \geq 4 \times 10^4$  наблюдается переключение кластера перемежающейся химеры в режим фазового химерного состояния. Отметим, что время жизни режима перемежающейся химеры сильно зависит от начальных условий.

Из приведенных численных результатов следует, что длительность процесса перемежаемости, а, следовательно, и время жизни амплитудной химеры, зависит от сложности структуры рассматриваемого химерного состояния. Наши расчеты показали, что с увеличением числа некогерентных кластеров фазовой и амплитудной химер (что наблюдается при уменьшении радиуса связи  $r$ ) время жизни амплитудных химер уменьшается почти на порядок.

В ходе проведения численных исследований было установлено, что эффект перемежаемости во времени между амплитудной и фазовой химерными структурами, описанный выше, также проявляется в динамике других ансамблей нелокально связанных хаотических систем с удвоением периода. В следующем разделе третьей главы данный факт будет подтвержден результатами расчетов для ансамбля двумерных отображений Эно с нелокальной связью.

### 3.3 Особенности динамики химерных состояний в ансамбле отображений Эно

#### 3.3.1 Нестационарная динамика элементов амплитудной химеры

Для обоснования общности и типичности эффекта нерегулярных переключений (эффекта перемежаемости) во времени между различными типами динамики элементов амплитудной химеры обратимся к ансамблю нелокально связанных отображений Эно (1.10). Данное кольцо состоит из  $N = 1000$  элементов, каждый из которых функционирует в хаотическом режиме, соответствующем значениям управляющих параметров изолированного отображения Эно  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ . Динамика кольца (1.10) рассматривается при случайно заданных начальных условиях в интервале  $[-0.5, 0.5]$  для каждого элемента  $x_i^0$  и  $y_i^0$ .

Как было установлено и показано в разделе 1.4.2, при изменении значения силы нелокальной связи  $\sigma$  в ансамбле нелокально связанных отображений Эно могут реализовываться режимы фазовых и амплитудных химер. Причем, при вариации  $\sigma$  в определенном диапазоне значений наблюдаются пространственно-временные структуры, отражающие режим сосуществования этих химерных состояний. Как показывают расчеты, число сосуществующих некогерентных кластеров зависит от значения радиуса нелокальной связи  $r$ . Выберем значения параметров нелокальной связи  $\sigma = 0.25$  и  $r = 0.16$ . В этом случае в ансамбле отображений Эно реализуется сложный пространственно-временной режим, который характеризуется мгновенным профилем, приведенным на рисунке 3.6. Фазовые химеры обозначены цифрой 1, амплитудные — цифрой 2. Из

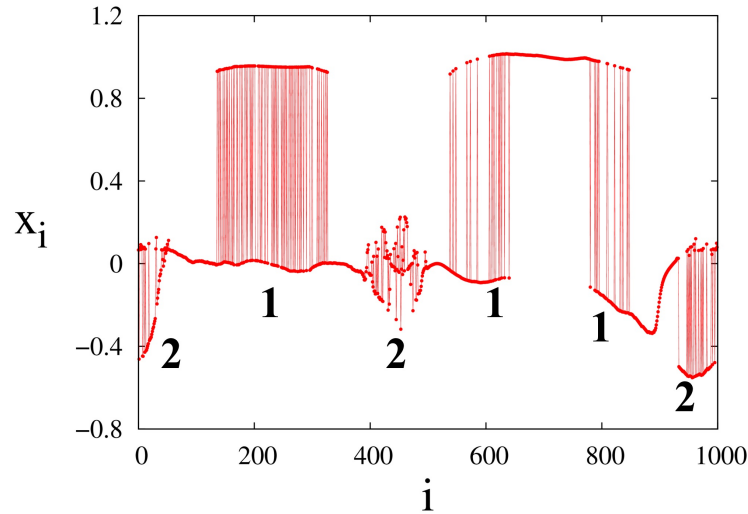


Рисунок 3.6. Мгновенный профиль состояний  $x_i$  ансамбля (1.10) в момент времени  $t = 10^4$ . Фазовые химеры обозначены цифрой 1, амплитудные — цифрой 2. Параметры ансамбля:  $\sigma = 0.25$ ,  $r = 0.16$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$

рисунка 3.6 видно, что в системе (1.10) сосуществуют 3 некогерентных кластера фазовых химер и 3 кластера амплитудных химер [337].

Элементы кластеров фазовых химер характеризуются стационарными, почти периодическими колебаниями во времени, но их фазы случайным образом сдвинуты друг относительно друга внутри некогерентного кластера. Данное поведение сохраняется на времени наблюдения  $\simeq 10^8$ . Для осцилляторов, принадлежащих кластерам амплитудных химер, типична сильно развитая хаотическая динамика. Однако, как показали расчеты, она является нестационарной и сопровождается нерегулярными переключениями во времени между хаотическими и периодическими колебаниями. Проиллюстрируем данное наблюдение на примере расчета временной реализации для произвольно выбранного осциллятора из кластера амплитудной химеры. На рисунке 3.7 показана временная реализация  $x_i(t)$  для осциллятора  $i = 441$ , который принадлежит кластеру амплитудной химеры (см. рисунок 3.6). Как хорошо видно из рисунка 3.7, реализация  $x_{441}(t)$  явно не стационарна и характеризуется нерегулярными переключениями режимов колебаний во времени. На данном рисунке интервалы времени, в которых колебания  $x_{441}(t)$  практически периодические или хаоти-

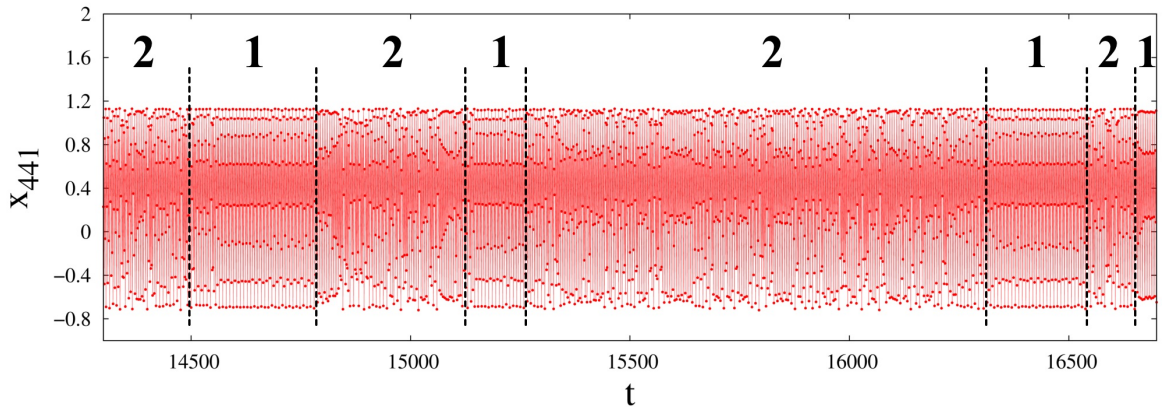


Рисунок 3.7. Временная реализация  $x_i(t)$  для осциллятора  $i = 441$ , принадлежащего кластеру 2 амплитудной химеры в ансамбле (1.10) (см. рисунок 3.6). Параметры как для рисунка 3.6

ческие, обозначены цифрами 1 и 2, соответственно. Периодические колебания имеют период 8 и отвечают режиму фазовой химеры. Хаотические колебания соответствуют режиму амплитудной химеры. Длительности интервалов периодической и хаотической динамики являются различными и не коррелируют ни между собой, ни со временем наблюдения (расчета). Подобный характер временной динамики наблюдается и является характерным для любого осциллятора из любого некогерентного кластера амплитудной химеры. Таким образом, как показывают расчеты (рисунок 3.7), в ансамбле (1.10) наблюдается процесс нерегулярных переключений во времени между регулярными (периодическими) и хаотическими колебаниями для элементов из кластеров амплитудных химер. Как было отмечено в разделе 3.2.1, данный процесс, с качественной точки зрения, аналогичен эффекту перемежаемости во времени между двумя различными режимами динамики.

Проведенные численные исследования показывают, что нестационарные режимы колебаний, типа показанного на рисунке 3.7, характеризуются конечным временем жизни. С увеличением времени расчета (количества итераций) до величины  $t > 2 \times 10^5$  перемежаемость исчезает и устанавливаются перио-

дические устойчивые колебания, которые отвечают режиму фазовой химеры. Данный переход будет проиллюстрирован в следующем разделе.

### 3.3.2 Время жизни химерных состояний

Проанализируем эволюцию во времени некогерентных кластеров фазовых и амплитудных химерных состояний в ансамбле (1.10). Сначала рассмотрим режим фазовой химеры, реализуемый при значениях параметров связи  $\sigma = 0.36$  и  $r = 0.32$ . С этой целью построим численно мгновенные профили переменных  $x_i$  в различные моменты времени. Результаты расчетов представлены на рисунке 3.8. Как видно из рисунка, в ансамбле наблюдаются два некогерентных кластера фазовой химеры, которые включают элементы  $50 \leq i \leq 100$  и  $510 \leq i \leq 560$ . В этом случае фазовой химере в (1.10) отвечает режим периодических колебаний с периодом 4, который характеризуется нерегулярными сдвигами фаз между элементами внутри некогерентного кластера. Как вид-

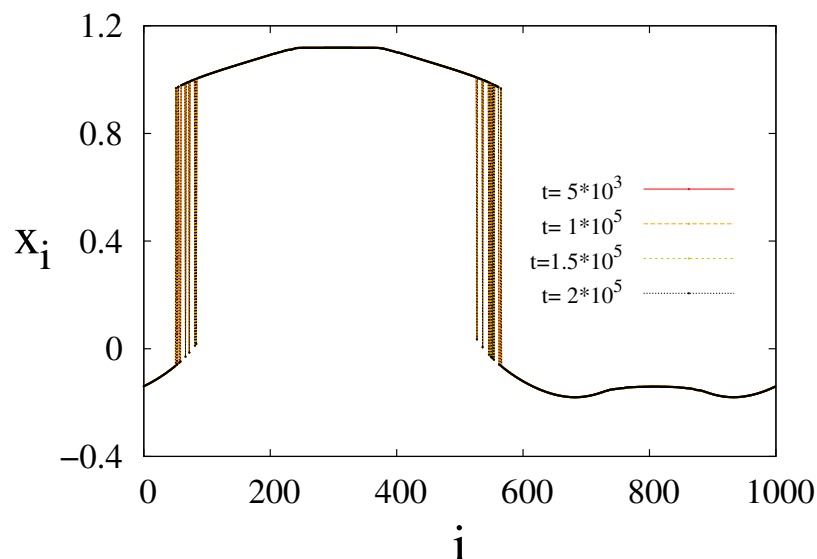


Рисунок 3.8. Мгновенные профили состояний  $x_i$  ансамбля (1.10) в режиме фазовой химеры в моменты времени  $t = 5 \times 10^3$ ,  $10^5$ ,  $1.5 \times 10^5$ ,  $2 \times 10^5$ .

Параметры системы:  $\sigma = 0.36$ ,  $r = 0.32$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$



но из рисунка 3.8, мгновенные профили, рассчитанные для моментов времени  $t = 5 \times 10^3, 10^5, 1.5 \times 10^5, 2 \times 10^5$ , полностью совпадают. Это означает, что процесс колебаний элементов ансамбля стационарен и не меняется во времени. Расчеты свидетельствуют, что стационарность не разрушается и на временах  $t \geq 10^8$ , то есть фазовая химера является долгоживущей структурой.

Теперь рассмотрим эволюцию во времени кластеров некогерентности амплитудной химеры. На рисунке 3.9 представлены результаты расчетов мгновенных профилей для значений параметров  $\sigma = 0.304$  и  $r = 0.32$ , отвечающих возникновению амплитудной химеры с относительно малым разбросом амплитуд в некогерентном кластере ( $250 \leq i \leq 380$ ).

Анализ численных результатов, представленных на рисунке 3.9, свидетельствует о том, что имеет место нестационарность, проявляющаяся в качественном изменении во времени характера мгновенных профилей. Причем эти изменения являются ярко выраженными. Для этого достаточно сравнить, например, профили для  $t = 4.5 \times 10^4$  и  $t = 5 \times 10^4$ . Более того, кластер некоге-

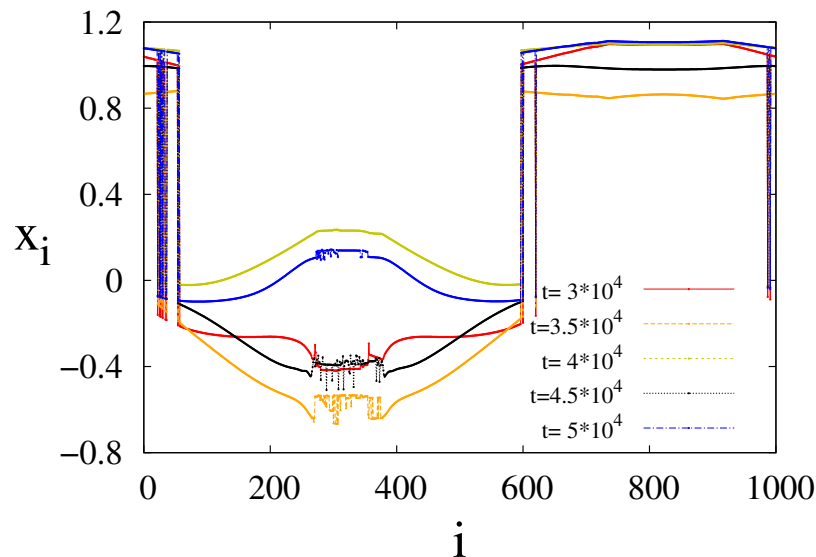


Рисунок 3.9. Мгновенные профили для переменных  $x_i$  ансамбля (1.10) в режиме амплитудной химеры (кластер с элементами  $250 \leq i \leq 380$ ) в моменты времени  $t = 3 \times 10^4, 3.5 \times 10^4, 4 \times 10^4, 4.5 \times 10^4, 5 \times 10^4$ . Параметры системы:  $\sigma = 0.304, r = 0.32, \alpha = 1.4, \beta = 0.3$

рентности амплитудной химеры может практически исчезать (см. профиль при  $t = 4 \times 10^4$ ) и появляться вновь при  $t = 5 \times 10^4$ . Это означает, что для любого осциллятора из кластера амплитудной химеры (например, для  $i = 260$  или  $i = 300$ ) временная реализация будет качественно иметь вид, представленный на рисунке 3.7, и отражать явление перемежаемости. Как показали расчеты, нестационарные явления в поведении осцилляторов из некогерентного кластера амплитудной химеры наблюдаются в течение ограниченного времени. Как следует из рисунка 3.10, нестационарная динамика уже отсутствует на временах  $t \geq 1.5 \times 10^5$ . В ансамбле (1.10) амплитудная химера исчезает и остается только фазовая химера с двумя кластерами некогерентности.

Графики, приведенные на рисунках 3.9 и 3.10, были построены для режима амплитудной химеры с малым разбросом амплитуд (значений  $x_i$ ) осцилляторов из некогерентной области. Однако, если изменить начальные условия

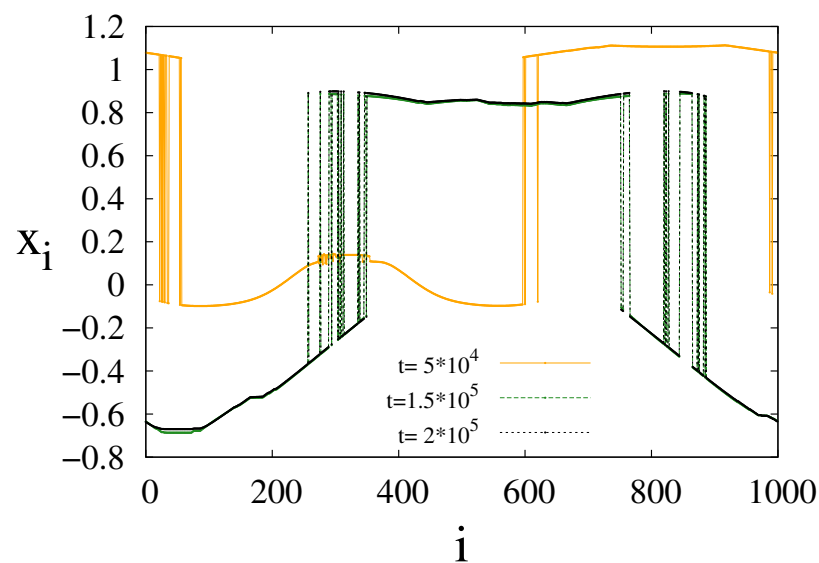


Рисунок 3.10. Переключение с амплитудной химеры (кластер с элементами  $250 \leq i \leq 380$ ) на фазовую при увеличении количества итераций. Мгновенные профили для переменных  $x_i$  ансамбля (1.10) рассчитаны для моментов времени  $t = 5 \times 10^4$ ,  $1.5 \times 10^5$ ,  $2 \times 10^5$ . Параметры системы:  $\sigma = 0.304$ ,  $r = 0.32$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ . Видно, что мгновенный профиль для  $t \geq 1.5 \times 10^5$  не содержит амплитудной химеры

или значения параметров связи  $\sigma$  и  $r$ , то можно получить амплитудную химеру, характеризующуюся довольно большой дисперсией распределения амплитуд осцилляторов в некогерентной области. Пример данной структуры приведен на рисунке 3.11, на котором также хорошо виден эффект переключений (или временной перемежаемости) и окончательный переход амплитудной химеры (кластер с элементами  $250 \leq i \leq 380$ ) в фазовую при  $t \simeq 1.5 \times 10^5$ .

Для более детальной иллюстрации процесса переключения или перехода амплитудной химеры в режим фазовой химеры рассмотрим временные реализации для одного из осцилляторов внутри кластера амплитудной химеры в ансамбле (1.10). Выберем для примера осциллятор ансамбля с номером  $i = 305$ , который находится в центре амплитудной химеры (рисунок 3.10). Результаты расчетов представлены на рисунке 3.12.

В силу того, что периодические колебания, соответствующие режиму фазовой химеры, имеют период 4, то для наглядности представления режима периодичности на рисунке 3.12,а–в показана каждая четвертая итерация

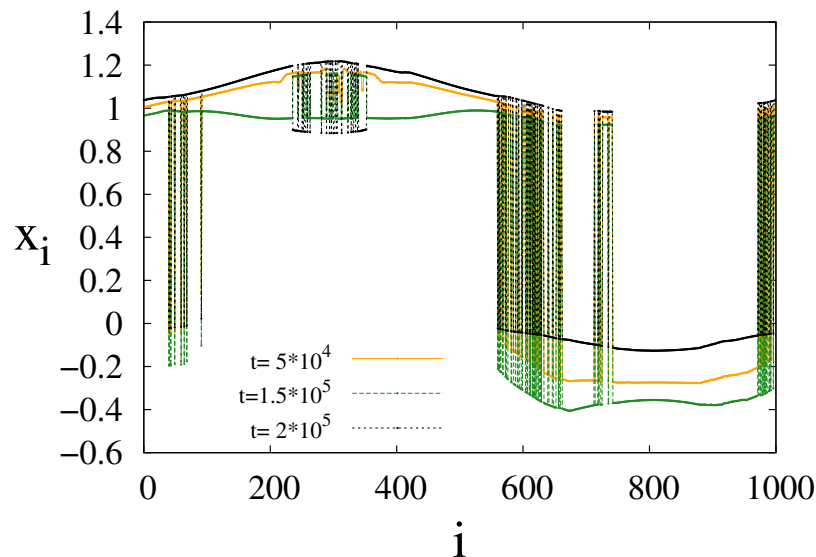


Рисунок 3.11. Иллюстрация переключения амплитудной химеры в фазовую. Мгновенные профили для переменных  $x_i$  ансамбля (1.10) в моменты времени  $t = 5 \times 10^4$ ,  $1.5 \times 10^5$ ,  $2 \times 10^5$ . Параметры системы:  $\sigma = 0.32$ ,  $r = 0.32$ ,  $\alpha = 1.4$ ,

$$\beta = 0.3$$

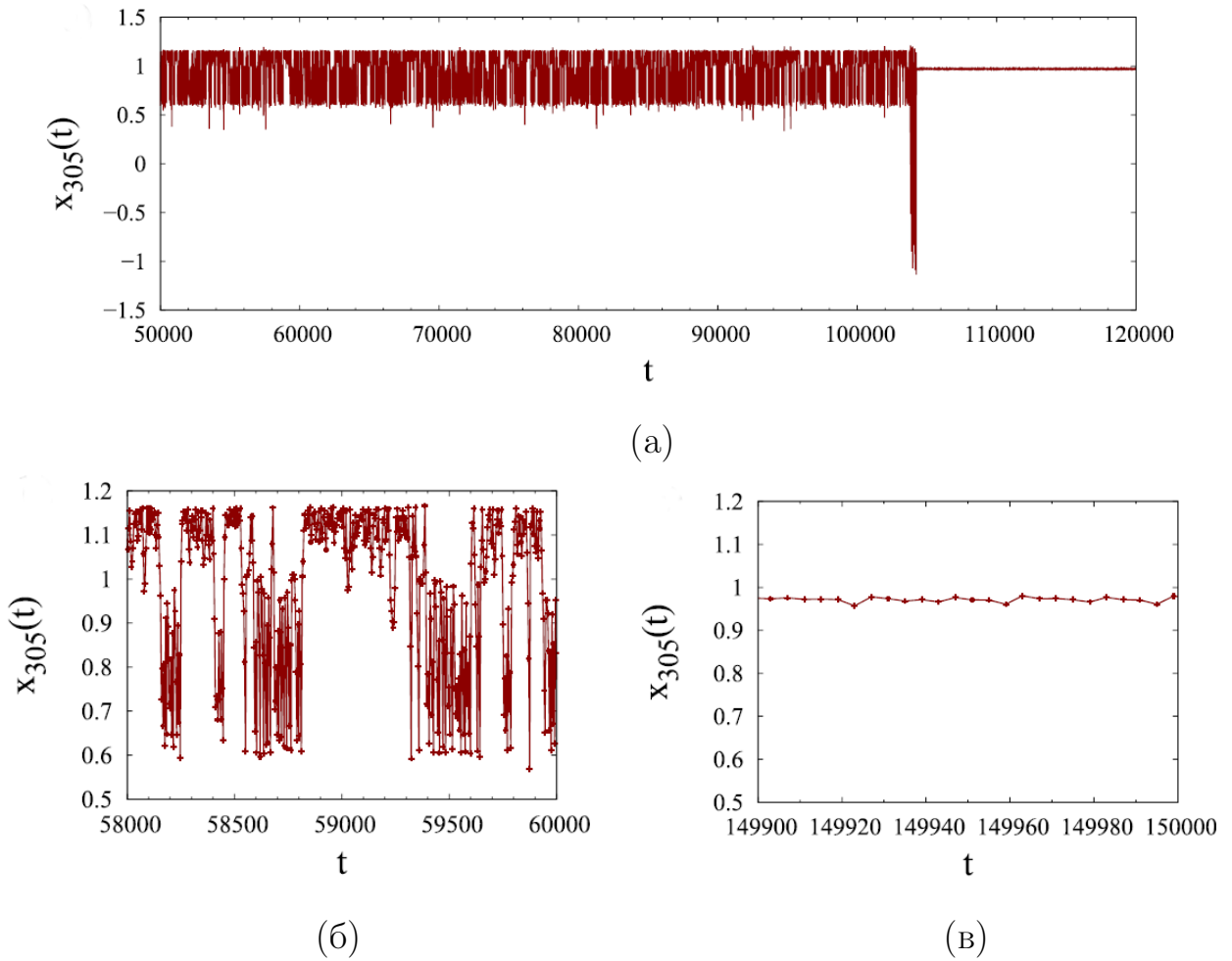


Рисунок 3.12. Временные реализации для осциллятора  $i = 305$ , иллюстрирующие переключение с режима амплитудной химеры на фазовую (а), режим амплитудной химеры (б) и режим фазовой химеры (в). Параметры:  $\sigma = 0.304$ ,  $r = 0.32$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ . Для наглядности представления режима периодичности на рисунке 3.12,а–в представлена каждая четвертая итерация.

Рисунок 3.12,а иллюстрирует переход от режима амплитудной химеры ( $t \leq 1.05 \times 10^5$ ) к фазовой ( $t > 1.05 \times 10^5$ ). Фрагмент временной реализации, показанный на рисунке 3.12,б, отражает хаотический характер колебаний 305-го осциллятора и соответствует режиму амплитудной химеры. На рисунке 3.12,в приведен фрагмент временной реализации, отвечающий установившемуся режиму фазовой химеры, в который перешла амплитудная химера в момент времени  $t \simeq 1.05 \times 10^5$ .

Отметим два важных обстоятельства. Приведенные на рисунке 3.12 результаты будут качественно эквивалентны, если представить соответствующие временные реализации для любого осциллятора из кластера амплитудной химеры с элементами  $250 \leq i \leq 380$  (рисунок 3.10). Кроме этого, если представить временную реализацию  $x_{305}(t)$  (рисунок 3.12,а) в более мелком масштабе времени, то она качественно воспроизведет реализацию на рисунке 3.7, которая иллюстрирует нестационарную динамику с перемежаемостью. Таким образом, в ансамбле (1.10) на конечных временах имеет место нестационарный процесс, характеризующийся случайными переключениями между различными состояниями. По истечении некоторого времени перемежаемость исчезает, амплитудная химера «умирает» и осуществляется переход в стационарный режим фазовой химеры (рисунок 3.12,а,  $t > 1.05 \times 10^5$ ). Таким образом, можно сказать, что время жизни амплитудной химеры, реализующейся при  $\sigma = 0.304$ ,  $r = 0.32$  (рисунок 3.10), составляет  $\tau_{\text{life}} \simeq 1.05 \times 10^5$ .

Для диагностики перехода от режима перемежаемости к установившемуся режиму фазовой химеры был также использован метод расчета максимального показателя Ляпунова  $\Lambda$ . Ансамбль (1.10) рассматривался в качестве динамической системы размерности  $2N$  ( $N = 1000$ ) и  $\Lambda$  вычислялся по стандартному алгоритму Бенеттина [430]. Результаты расчетов  $\Lambda$  для режима ансамбля, показанного на рисунке 3.11, приведены на рисунке 3.13. Как видно из рисунка, если  $\Lambda$  рассчитывать на интервале времени  $0 \leq t \leq 10.5 \times 10^4$ , то есть когда имеет место нестационарный процесс перемежаемости между амплитудными и фазовыми химерами, то  $\Lambda \simeq 0.191$ , то есть показатель положителен.

Если за начало отсчета времени взять  $t = 10.5 \times 10^4$  и считать  $\Lambda$  на интервале  $10.5 \times 10^4 \leq t \leq 3 \times 10^5$ , то получается  $\Lambda \simeq -0.048$ , то есть значение ляпуновского показателя отрицательно. Это вполне понятно. Сам факт случайных переключений и то, что амплитудная химера отвечает режиму хаотических колебаний, объясняет положительные значения  $\Lambda > 0$ . Переключению в режим

фазовой химеры отвечает переход к устойчивому периодическому режиму, которому отвечает отрицательное значение старшего показателя Ляпунова.

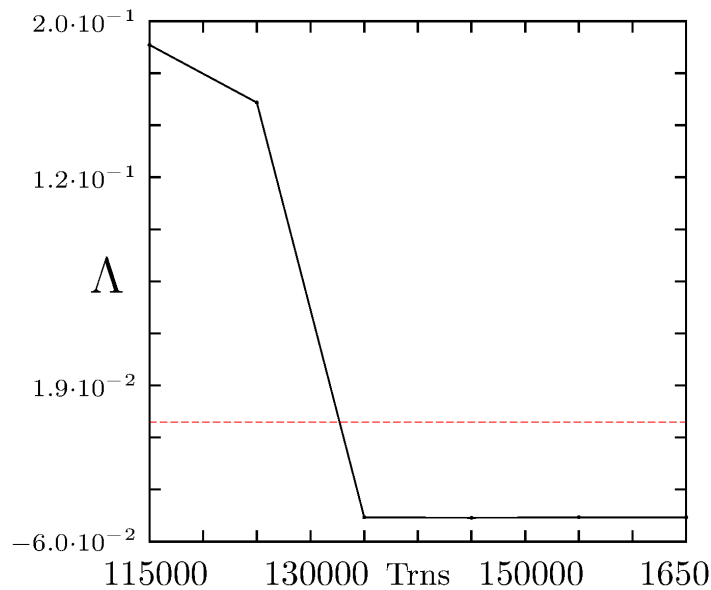


Рисунок 3.13. Зависимость старшего ляпуновского показателя  $\Lambda$  от времени наблюдения  $t$  для режимов ансамбля (1.10) на рисунке 3.11. Параметры:

$$\sigma = 0.32, r = 0.32, \alpha = 1.4, \beta = 0.3$$

Таким образом, численное моделирование динамики ансамблей логистических отображений (1.1) и отображений Эно (1.10) с нелокальной связью в режимах амплитудной и фазовой химер показало общий характер поведения во времени кластеров некогерентности химерных состояний. Осцилляторы некогерентного кластера фазовой химеры характеризуются установившимися периодическими или почти периодическими (слабо хаотическими) колебаниями, а сама фазовая химера представляет собой стационарную и долгоживущую структуру, то есть характеризующуюся достаточно большим ( $t \geq 10^8$ ) временем жизни.

Как индивидуальные элементы, так и кластеры некогерентных осцилляторов амплитудной химеры характеризуются нестационарной динамикой. Нестационарность проявляется в нерегулярном (непериодическом) во времени чередовании хаотических и периодических колебаний, что можно назвать перемежаемостью. Перемежаемость выглядит как нерегулярный процесс пере-

ключений между режимами амплитудной и фазовой химер. Нестационарность проявляется в течение конечного времени наблюдения и может трактоваться как переходный процесс к режиму стационарных колебаний. Таким образом, режим перемежаемости, а, следовательно, и режим амплитудной химеры характеризуется конечным временем жизни, значение которого зависит от рассматриваемого ансамбля и вида пространственно-временной (химерной) структуры.

### **3.4 Влияние шумовых воздействий на время жизни амплитудных химер**

Рассмотрим реакцию ансамблей нелокально связанных логистических отображений и отображений Эно на внешнее шумовое возмущение в режиме, когда амплитудные химерные состояния перешли в стационарные состояния фазовых химер, и проанализируем возможность восстановления процесса перемежаемости во времени, а, следовательно, режима амплитудных химер, и увеличения времени их жизни [350].

#### **3.4.1 Локализованное кратковременное шумовое воздействие на амплитудные химеры в кольце логистических отображений**

Вначале обратимся к ансамблю нелокально связанных логистических отображений (1.1) и проведем анализ влияния кратковременного шумового воздействия только на элементы кластеров амплитудных химер после их переключения в режим фазовых химер [350]. С этой целью в систему (1.1) введем

источник белого шума с равномерным распределением:

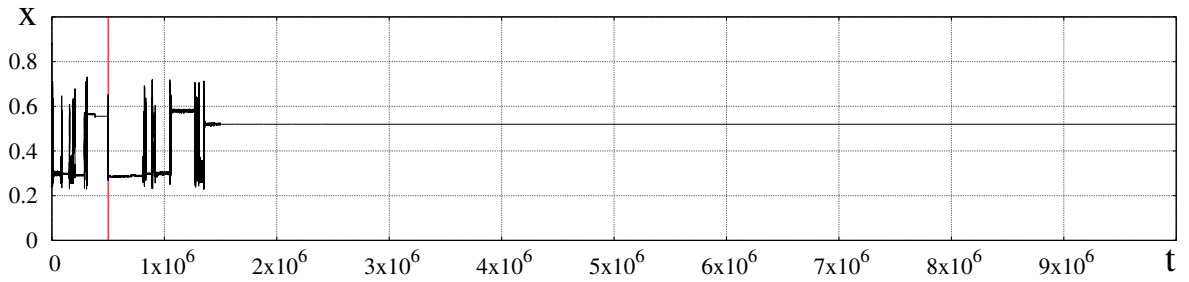
$$x_i^{t+1} = f(x_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t) - f(x_i^t)] + \delta(t-t_0) \sqrt{2D} \xi_i^t, \quad \delta = \begin{cases} 1, & 0 \leq t - t_0 < n, \\ 0, & t - t_0 \geq n, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $\xi_i^t$  — некоррелированные источники шума с равномерным распределением в интервале  $[-0.5; 0.5]$ ,  $D$  — интенсивность шума,  $t_0$  — время начала воздействия шума,  $n$  — количество итераций, характеризующих длительность воздействия источника шума. В численных экспериментах источник шума воздействует сначала только на 1-ю амплитудную химеру, то есть только на кластер элементов с номерами  $1 \leq i \leq 160$  (рисунок 3.1), в течение одной итерации, а затем — только на 2-ю амплитудную химеру, то есть только на группу осцилляторов с номерами  $720 \leq i \leq 785$ , также в виде единичного возмущения. Для всех остальных осцилляторов влияние шума отсутствует.

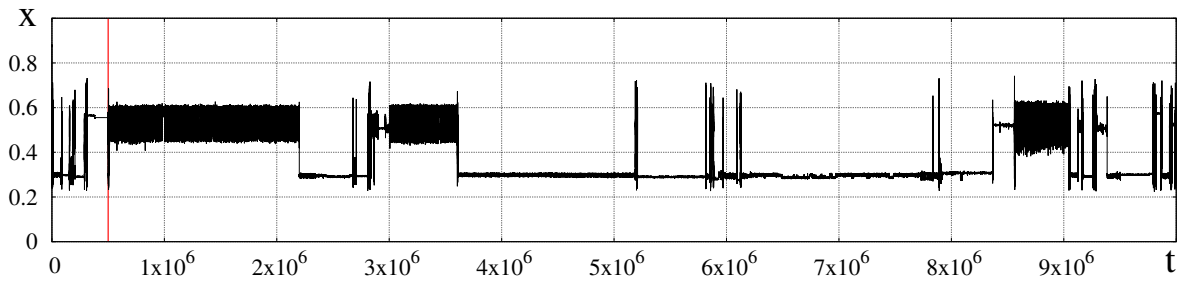
Перед тем как «включить» источник шума, необходимо убедиться, что после «смерти» амплитудной химеры установился стационарный режим фазовой химеры. Как было установлено ранее в разделе 3.2.2, обе амплитудные химеры в ансамбле (1.1) переходят в фазовые химерные состояния при  $t \geq 384000$  (рисунки 3.3 и 3.4). Поэтому источник шума вводится в систему (3.1) в момент времени  $t_0 = 5 \times 10^5$ .

В качестве иллюстрации рассмотрим кратковременное (единичное или единовременное,  $n = 1$ ) шумовое воздействие средней интенсивности, подаваемое только на 1-ю амплитудную химеру, на примере выбранного осциллятора из этого кластера. На рисунке 3.14 приведены временные реализации для 100-го осциллятора из кластера 1-й амплитудной химеры (рисунок 3.1) для двух относительно небольших значений интенсивности шума. Красной вертикальной линией отмечен момент воздействия шума. Для более наглядного представления периодичности процесса во времени, на рисунке 3.14 приведены значения амплитуды осциллятора только для каждой 32 итерации. В первом





(a)



(б)

Рисунок 3.14. Временные реализации для 100-го осциллятора из кластера 1-й амплитудной химеры (рисунок 3.1) для двух значений интенсивности шума: (а)  $D = 0.00157$ , (б)  $D = 0.00160$ . Параметры системы (3.1):  $\alpha = 3.8$ ,  $P = 140$ ,  $\sigma = 0.255$ . Для наглядности представления режима периодичности на графиках приведена каждая 32 итерация. Красной вертикальной линией отмечен момент добавления источника шума в систему (3.1)

случае, когда интенсивность шума  $D = 1.57 \times 10^{-3}$  (рисунок 3.14,а), процесс перемежаемости во времени наблюдается в течение  $t = 10^6$  итераций с момента подачи шумового воздействия. Данный эффект проявляется всего в нескольких нерегулярных переключениях между периодическими и хаотическими колебаниями, а во временной динамике доминируют регулярные колебания, тогда как участки хаотической динамики имеют короткую длительность. Процесс переключений завершается в момент времени  $t = 1.5 \times 10^6$  переходом в режим стационарных периодических колебаний, то есть в режим фазовой химеры (рисунок 3.14,а). Можно считать, что время жизни 1-й амплитудной химеры при воздействии на нее шумом интенсивности  $D = 1.57 \times 10^{-3}$  составляет

$\tau_{\text{life}}^1 = 10^6$  итераций. Таким образом, хотя воздействие шума интенсивности  $D = 1.57 \times 10^{-3}$  способно возродить 1-ю амплитудную химеру, тем не менее оно не может стабилизировать ее на длительном промежутке времени. Однако, как видно из рисунка 3.14,б, при очень незначительном увеличении интенсивности шума до  $D = 1.6 \times 10^{-3}$  происходит мгновенный возврат в режим амплитудной химеры (наблюдаются хаотические колебания) и возобновление процесса перемежаемости. Как показывают численные расчеты, в этом случае амплитудная химера живет гораздо больше времени ( $t > 10^7$  итераций). Если режим перемежаемости или амплитудной химеры наблюдается дольше, чем  $t = 10^7$  итераций с момента воздействия шума, то полагается, что время жизни амплитудной химеры больше выбранного времени наблюдения, и численные расчеты прекращаются.

**Статистический анализ влияния шума на время жизни.** Проведем статистический анализ влияния кратковременного локализованного шумового воздействия различной интенсивности на время жизни  $\tau_{\text{life}}$  1-й и 2-й амплитудных химер в ансамбле (3.1) после их «смерти» [350]. В силу того, что исследуемая система обладает свойством мультистабильности, при проведении исследований мы не будем ограничиваться выбором только одной реализации шума. Различные случайные реализации, которые производит генератор случайных чисел, могут приводить к абсолютно разным результатам. Таким образом, более правильно исследовать зависимость времени жизни  $\tau_{\text{life}}$  1-й и 2-й амплитудных химер в ансамбле (3.1) от интенсивности шума при использовании некоторого числа различных реализаций шума. Для проведения статистического анализа с целью оценки времени жизни химерных состояний были взяты 19 различных реализаций шума для каждой выбранной интенсивности. После выполнения расчетов определялись максимальное, минимальное значения и медиана времени жизни  $\tau_{\text{life}}$ . *Медиана* представляет собой число, характеризующее свойства некоторой выборки или реализации в математической статистике или теории

вероятности [431, 432]. Медиана есть значение, которое разделяет распределение (плотность вероятности) на две равновероятные части с суммарной вероятностью  $1/2$ . Если распределение не симметрично относительно максимума, то медианное значение и среднее значение не совпадают.

Для оценки наиболее типичного значения времени жизни в зависимости от интенсивности шума была выбрана именно медиана, так как ее значения являются независимыми от выбросов значений (элементов выборки) (проявляется свойство робастности), что очень важно в случае данных численных исследований. Все рассчитанные значения времени жизни  $\tau_{\text{life}}$  (для каждой выбранной интенсивности шума) сортировались по возрастанию от  $\tau_{\text{life}}(1)$  до  $\tau_{\text{life}}(19)$ , в результате чего определялись минимальное значение  $\tau_{\text{life}}(1)$ , медиана  $\tau_{\text{life}}(10)$  и максимальное значение  $\tau_{\text{life}}(19)$ . Соответствующие результаты численных расчетов для времени жизни 1-й и 2-й амплитудных химер при изменении интенсивности локализованного единичного шумового воздействия представлены на рисунках 3.15–3.17. Для построения приведенных зависимостей использовались различные реализации шума одинаковой интенсивности, которые оказывали воздействие только на некогерентные области амплитудных химер (по отдельности) в течение 1 итерации.

На рисунке 3.15 показаны зависимости максимального, минимального значений и медианы времени жизни  $\tau_{\text{life}}^1$  1-й амплитудной химеры для малых (рисунок 3.15,а) и больших (рисунок 3.15,б) значений интенсивности источника шума, оказывающего влияние только на элементы кластера 1-й амплитудной химеры в течение одной итерации. Как видно из представленных графиков, достаточно воздействовать на амплитудную химеру очень слабым шумом, чтобы восстановить ее и стабилизировать наблюдаемый режим в течение довольно долгого времени  $t > 10^7$  (рисунок 3.15,а, верхняя красная кривая). Уже при  $D \approx 10^{-5}$  наблюдается резкий скачок к максимальному значению времени жизни амплитудной химеры  $\tau_{\text{life}}^1 = 10^7$ . Однако, как следует из графика для медианы (рисунок 3.15,а, черная кривая), при малых интенсивностях шу-

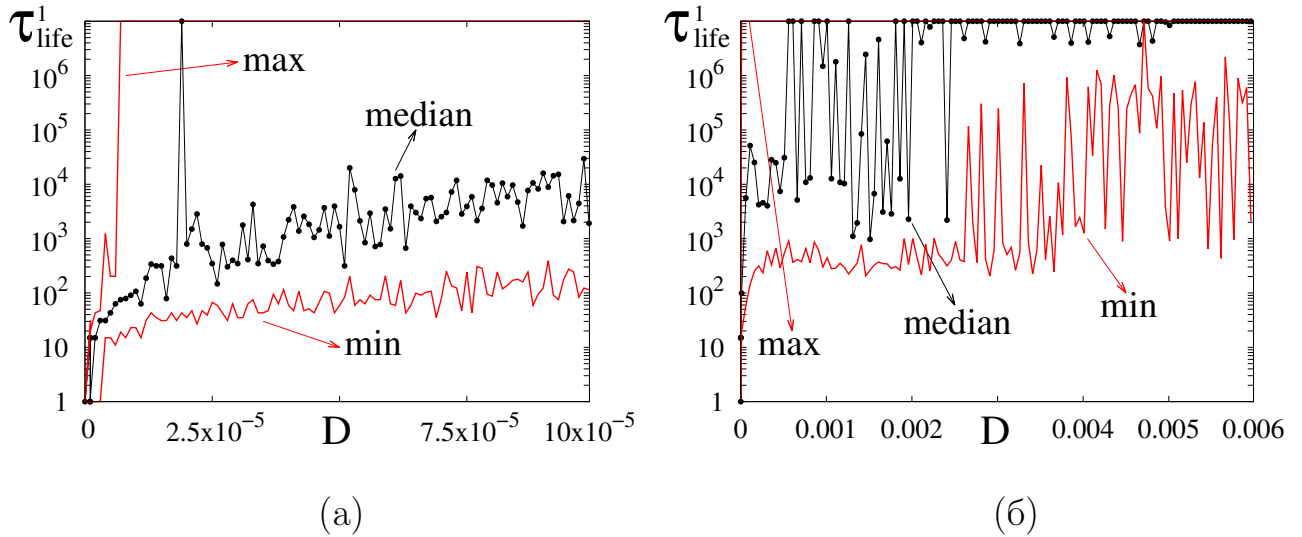


Рисунок 3.15. Зависимости максимального, минимального значений и медианы времени жизни  $\tau_{\text{life}}^1$  1-й амплитудной химеры от шума малой (а) и большой (б) интенсивности  $D$ , воздействующего на соответствующую область в течение 1 итерации. Параметры:  $\alpha = 3.8$ ,  $P = 140$ ,  $\sigma = 0.255$

ма время жизни 1-й амплитудной химеры не превышает значения  $\tau_{\text{life}}^1 = 5 \times 10^3$ . Максимальное значение медианы  $\tau_{\text{life}}^1 = 10^7$  достигается только при интенсивности шума порядка  $10^{-3}$  (рисунок 3.15,б, черная кривая) и сохраняется при  $D \gtrsim 3 \times 10^{-3}$ .

Зависимости максимального, минимального значений и медианы времени жизни  $\tau_{\text{life}}^2$  2-й амплитудной химеры от изменения интенсивности единовременного шумового воздействия, поданного только на кластер данной амплитудной химеры, приведены на рисунке 3.16. Как видно из графиков на рисунке 3.16,а, при довольно низком уровне шума все три представленные зависимости совпадают и соответствуют очень короткому времени жизни 2-й амплитудной химеры  $\tau_{\text{life}}^2 \approx 10^2$ . Для восстановления 2-й амплитудной химеры и достижения максимального значения времени ее жизни необходимо шумовое воздействие достаточно большой интенсивности  $D$  порядка  $10^{-3}$  (рисунок 3.16,б, верхняя красная кривая). В отличие от случая 1-й амплитудной химеры, медиана для

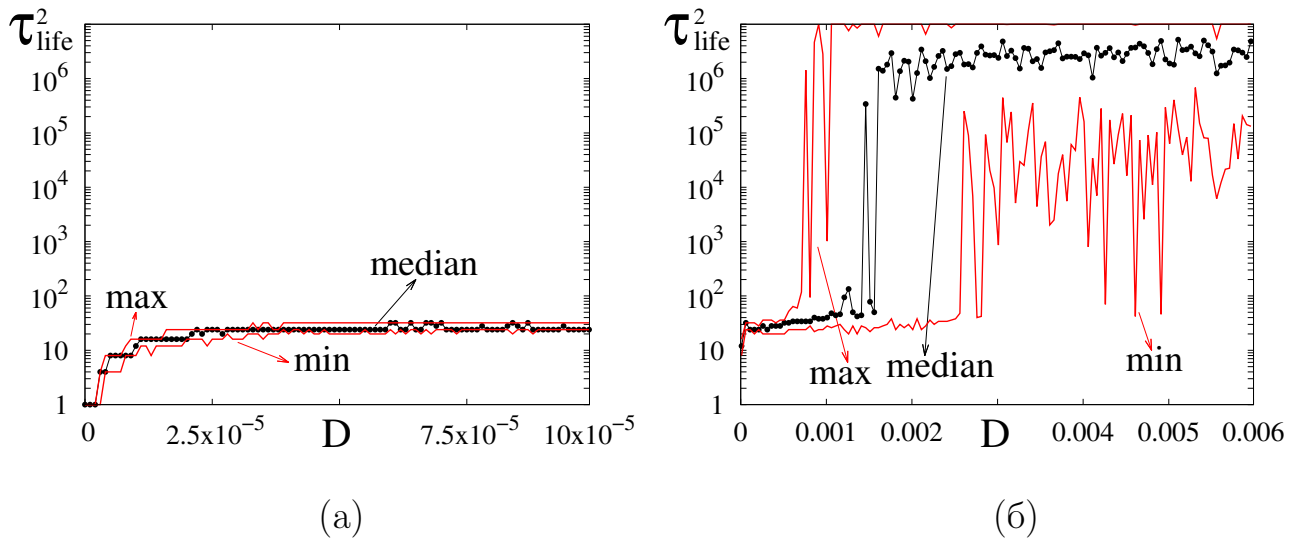


Рисунок 3.16. Зависимости максимального, минимального значений и медианы времени жизни  $\tau_{life}^2$  времени жизни 2-й амплитудной химеры от шума малой (а) и большой (б) интенсивности  $D$ , воздействующего на соответствующую область в течение 1 итерации. Параметры как для рисунка 3.15

2-й химеры никогда не достигает максимума и флуктуирует на некотором, практически постоянном уровне  $\tau_{life}^2 \approx 3 \cdot 10^6$ .

Таким образом, 1-я амплитудная химера оказывается более чувствительной к кратковременному шумовому воздействию и достаточно низкий уровень шума способен возродить и стабилизировать ее на довольно большое время. Данный факт может быть связан с тем, что кластеру 1-й амплитудной химеры принадлежит довольно большое число элементов ансамбля ( $N \simeq 160$ ) (рисунки 3.1 и 3.3), для которых характерна сильно развитая хаотическая динамика. Влияние элементов друг на друга в силу нелокальной связи значительно усиливается при наличии уже довольно слабого кратковременно действующего шума, что приводит к восстановлению амплитудной химеры и увеличению времени ее жизни. Для возрождения 2-й амплитудной химеры, включающей только  $N \simeq 65$  осцилляторов ансамбля (рисунки 3.1 и 3.3), требуется относительно сильное шумовое воздействие, но даже в этом случае время ее жизни

не может быть увеличено намного (по крайней мере до  $\tau_{\text{life}} = 10^7$ ).

**Особенности восстановления 2-й амплитудной химеры.** Как показывают проведенные численные исследования, после своего возрождения амплитудные химеры могут влиять на динамику всех других элементов ансамбля, переводя их в режим хаотических колебаний. Однако воздействие со стороны 1-й амплитудной химеры оказывается гораздо сильнее, чем второй. Это также можно объяснить тем, что кластер 1-й амплитудной химеры занимает довольно большую область в пространстве ансамбля по сравнению со 2-й амплитудной химерой. Следовательно, можно предположить, что если воздействовать шумом достаточной интенсивности только на 1-ю амплитудную химеру, то можно восстановить и стабилизировать 2-ю амплитудную химеру. На рисунке 3.17 показаны результаты расчетов зависимостей максимального, минимального значений и медианы времени жизни  $\tau_{\text{life}}^2$  2-й амплитудной химеры от интенсивности шума, воздействующего только на 1-ю амплитудную химеру в течение 1 итерации.

Как следует из рисунка 3.17, воздействие шума даже очень малой интенсивности только на 1-ю амплитудную химеру может индуцировать восстановление 2-й химеры и значительно увеличить время ее жизни (максимальное значение) по сравнению с непосредственным воздействием шумом только на кластер 2-й амплитудной химеры (см. рисунок 3.16). Это особенно отчетливо заметно на интервале  $0 < D < 0.001$  для зависимости максимального значения  $\tau_{\text{life}}^2$  на рисунке 3.17. Однако, как следует из зависимостей для медианы (рисунок 3.17, черная кривая) и минимального значения (рисунок 3.17, нижняя красная кривая), 2-я амплитудная химера оставалась в режиме фазовой химеры вплоть до интенсивности шума  $D \approx 0.002$ , воздействующего на 1-ю амплитудную химеру. Стоит отметить одну интересную особенность. Из сравнения графиков для медианы на рисунках 3.16,б и 3.17 хорошо видно, что время жизни 2-й амплитудной химеры в обоих случаях имеет одинаковое

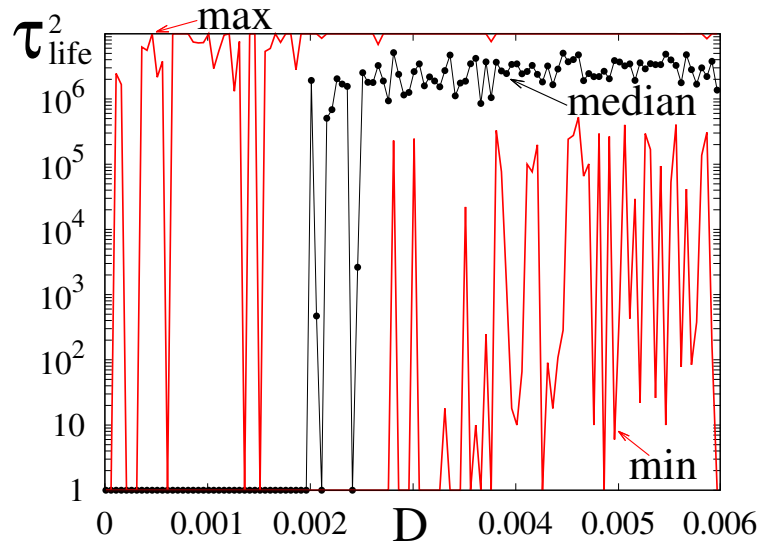


Рисунок 3.17. Зависимости максимального, минимального значений и медианы времени жизни  $\tau_{\text{life}}^2$  2-й амплитудной химеры от интенсивности шума  $D$ , воздействующего на 1-ю амплитудную химеру в течение 1 итерации.

Параметры как для рисунка 3.15

значение  $\tau_{\text{life}}^2 \approx 3 \times 10^6$ . Различия проявляются лишь в значениях интенсивности шумового воздействия, соответствующих данному времени жизни, которые, как видно из рисунков, незначительно отличаются друг от друга.

**Зависимость времени жизни от выбора  $\varepsilon$ -окрестности.** Во всех проведенных численных экспериментах при оценке времени жизни амплитудных химер до и после добавления шумового воздействия необходимо точно фиксировать момент переключения или перехода динамики осцилляторов рассматриваемого некогерентного кластера от хаотических колебаний к периодическим. Для этого требуется задать некоторую достаточно малую  $\varepsilon$ -окрестность, при регулярном (периодическом) попадании в которую значений амплитуд осцилляторов можно определить момент «смерти» амплитудной химеры. Для расчета всех зависимостей, представленных на рисунках 3.14-3.17, выбиралось значение  $\varepsilon = 0.005$ . На рисунке 3.18 приведены численные результаты, иллюстрирующие изменения оценки времени жизни 1-й амплитудной химеры от

интенсивности  $D$  локализованного единовременного шумового воздействия для различных значений  $\varepsilon$ -окрестности, определяющей периодическую динамику (или «смерть» амплитудной химеры).

Из приведенных зависимостей хорошо видно, что время жизни амплитудной химеры существенно зависит от увеличения значения  $\varepsilon$ -окрестности. Особенно это хорошо заметно из сравнения графиков, представленных, например, на рисунках 3.18,а и б. При выборе  $\varepsilon = 0.05$  (рисунок 3.18,в) амплитудная химера возрождается, а медиана (рисунок 3.18,в, черная кривая) времени ее жизни приближается к уровню  $10^7$  только в случае довольно сильного шума ( $D \geq 0.0025$ ). В то же время задание значительно меньшего значения  $\varepsilon$ -окрестности, например, 0.001 и 0.005 (рисунки 3.18,а и 3.15, соответственно), дает максимальное медианное значение времени жизни 1-й амплитудной химеры при довольно слабом шумовом воздействии. Таким образом, результаты проводимых расчетов достаточно сильно зависят от выбора условия, определяющего периодическую динамику во времени элементов амплитудной химеры. Данное обстоятельство необходимо принимать во внимание при проведении подобных исследований, когда требуется точно определить момент перехода от хаотической к периодической динамике осцилляторов.

### 3.4.2 Зависимость времени жизни амплитудных химер от длительности шумового воздействия

В предыдущем разделе было рассмотрено влияние локализованного (только на кластеры амплитудных химер) единичного воздействия источника аддитивного шума на время жизни амплитудных химер в ансамбле (3.1) после их «смерти» или перехода в режим фазовых химер. Представляется интересным проанализировать зависимость времени жизни амплитудных химер при изме-



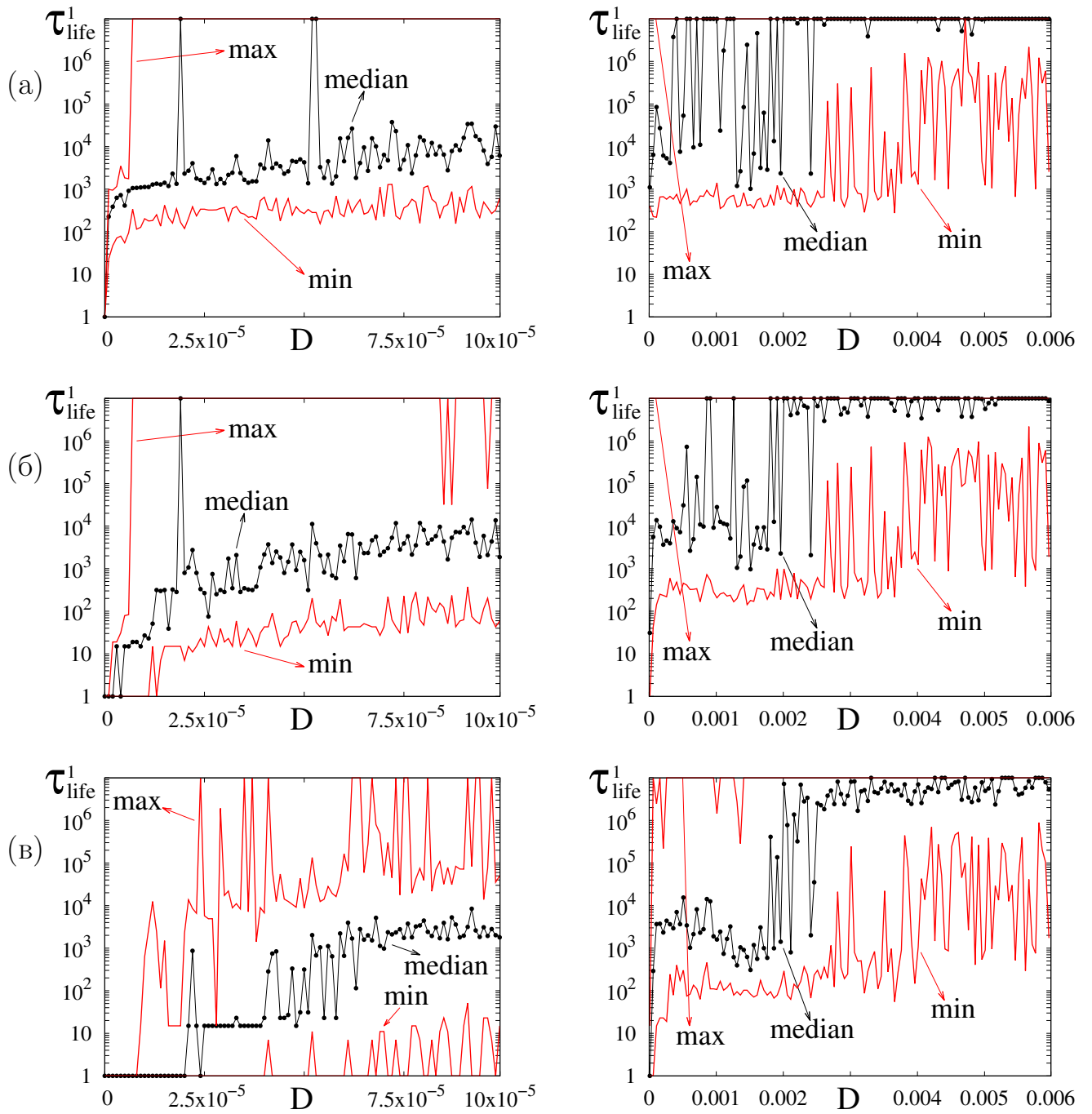


Рисунок 3.18. Зависимости максимального, минимального значений и медианы времени жизни  $\tau_{life}^1$  1-й амплитудной химеры от малых (левая колонка) и больших (правая колонка) значений интенсивности  $D$  одновременного шумового воздействия на соответствующую область ансамбля (3.1), для различных значений  $\varepsilon$ -окрестности: (а)  $\varepsilon = 0.001$ , (б)  $\varepsilon = 0.01$ , (в)  $\varepsilon = 0.05$ . Параметры как для рисунка 3.15

нении длительности целенаправленного шумового воздействия. В качестве примера рассмотрим влияние некоррелированного источника шума фиксированной интенсивности и различной длительности только на 1-ю амплитудную химеру. Результаты проведенных расчетов оценки максимального, минимального значений и медианы времени жизни  $\tau_{\text{life}}^1$  представлены на рисунке 3.19 для трех различных значений интенсивности шума при изменении длительности его воздействия в интервале  $n \in [1; 100000]$  итераций.

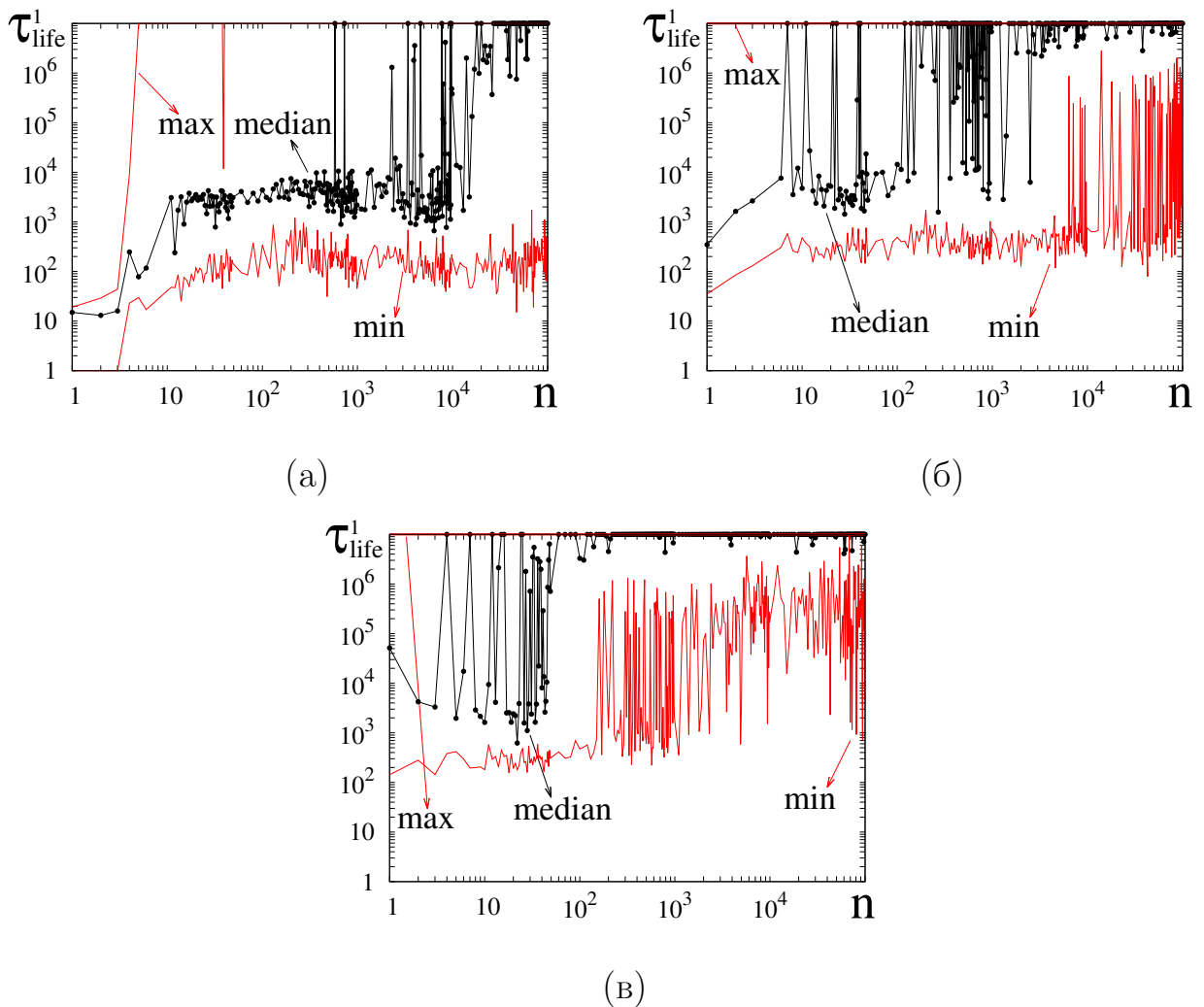


Рисунок 3.19. Зависимости максимального, минимального значений и медианы времени жизни  $\tau_{\text{life}}^1$  1-й амплитудной химеры от длительности  $n$  шумового воздействия на соответствующую область ансамбля (3.1) для трех различных значений интенсивности шума: (а)  $D = 10^{-6}$ , (б)  $D = 3 \times 10^{-5}$ , (в)  $D = 10^{-4}$ . Параметры как для рисунка 3.15

Как видно из рисунка 3.19,а (верхняя красная кривая), воздействие очень слабого шума ( $D = 10^{-6}$ ) конечной длительности может увеличить максимальное значение времени жизни 1-й амплитудной химеры и стабилизировать ее на продолжительное время ( $\tau_{\text{life}}^1 > 10^7$ ). Однако, как показывает график зависимости для медианы (рисунок 3.19,а, черная кривая) для получения устойчивого эффекта и максимального времени жизни воздействие должно длиться не менее  $n = 20000 \div 50000$  итераций. Но как можно заметить из того же графика, в пределах  $10 < n < 3 \times 10^3$  значение медианы колеблется в окрестности некоторого значения, гораздо меньшего  $10^7$ . Резкое увеличение среднего значения времени жизни  $\tau_{\text{life}}^1$  наблюдается, только начиная примерно с  $n = 600$  и  $n = 3 \cdot 10^3$  итераций. В то же время минимальное значение (рисунок 3.19,а, нижняя красная кривая) времени жизни почти не зависит от длительности воздействия (при  $n > 20 - 30$ ) и характеризуется некоторым средним значением, гораздо меньшим  $10^7$ .

На рисунке 3.19,б,в приведены рассчитанные зависимости максимального, минимального значений и медианы времени жизни 1-й амплитудной химеры от длительности шумового воздействия интенсивности  $D = 3 \times 10^{-5}$  и  $D = 10^{-4}$ , соответственно. Как показывают данные графики, немного усиленное, но единичное ( $n = 1$ ) шумовое возмущение может сразу обеспечить максимальное время жизни амплитудной химере (верхняя красная кривая, соответствующая максимуму, постоянно находится на уровне значения  $10^7$ ), что абсолютно согласуется с результатами, приведенными на рисунке 3.15. Данный эффект также сохраняется и при увеличении длительности воздействия на амплитудную химеру (см. рисунок 3.19,б,в, верхняя красная кривая). Как следует из графиков для медианы на рисунке 3.19,б,в (черные кривые), незначительное увеличение длительности действия шума способствует увеличению среднего значения времени жизни амплитудной химеры до максимального  $10^7$  и более. Так, например, наиболее выраженное и устойчивое увеличение медианы до максимального значения  $10^7$  достигается при действии шума интенсивности  $D = 3 \times 10^{-5}$  в те-

чение  $n \geq 5 \cdot 10^3$  итераций (рисунок 3.19,б) либо интенсивности  $D = 10^{-4}$  в течение  $n \geq 10^2$  итераций (рисунок 3.19,в). В случае, если необходимо также увеличить минимальное значение времени жизни (нижняя красная кривая на рисунке 3.19), то нужно приложить либо достаточно длительное воздействие  $n > 7000$  итераций малой интенсивности  $D = 3 \times 10^{-5}$ , либо воздействовать шумом довольно большой интенсивности  $D = 10^{-4}$ , но значительно менее продолжительное время  $n > 160$  итераций.

### 3.4.3 Воздействие шумом на все осцилляторы ансамбля отображений Эно

Для иллюстрации общности и типичности эффекта влияния шумового воздействия на время жизни амплитудных химерных состояний в ансамбле нелокально связанных хаотических отображений после «смерти» амплитудных химер рассмотрим динамику ансамбля нелокально связанных отображений Эно (1.10) в условиях шумового воздействия [337]. С этой целью в первое уравнение системы (1.10) добавим источник аддитивного белого шума:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f_x(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f_x(x_j^t, y_j^t) - f_x(x_i^t, y_i^t)] + \sqrt{2D}\xi_i^t, \\ y_i^{t+1} &= f_y(x_i^t, y_i^t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\xi^t$  — источник  $\delta$ -некоррелированного шума,  $D$  — интенсивность шума. В отличие от рассмотренного выше случая влияния шума на ансамбль нелокально связанных логистических отображений, в данной ситуации шумовое воздействие подается на все элементы ансамбля нелокально связанных отображений Эно.

Исследуем динамику ансамбля (3.2) для значений параметров связи  $\sigma = 0.304$ ,  $r = 0.32$  и на временах  $t \geq 1.5 \times 10^5$ . В этом случае в кольце отображе-

ний Эно устанавливается и наблюдается только стационарный режим фазовой химеры, представленный на рисунке 3.10. Как было показано в разделе 3.4.2, амплитудная химера (некогерентный кластер  $250 \leq i \leq 380$  на рисунке 3.10) исчезает, трансформируясь в фазовую химеру, и при достаточно большом времени наблюдения больше не появляется.

В наших исследованиях шум различной интенсивности  $D = 10^{-6}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-4}$  подавался одновременно на все элементы ансамбля (3.2) и действовал постоянно в течение всего времени наблюдения. В качестве примера на рисунке 3.20 приведены два мгновенных профиля состояний  $x_i$  ансамбля (3.2), рассчитанные в моменты времени  $t = 2 \times 10^5$  и  $t = 5 \times 10^5$ , в условиях постоянно действующего на все элементы кольца шума интенсивности  $D = 10^{-5}$ . Из сравнения приведенных профилей хорошо видно, что независимо от времени расчета (наблюдения) и воздействия источника шума приведенные мгновенные профили практически идентичны. Некогерентные кластеры фазовых химер не

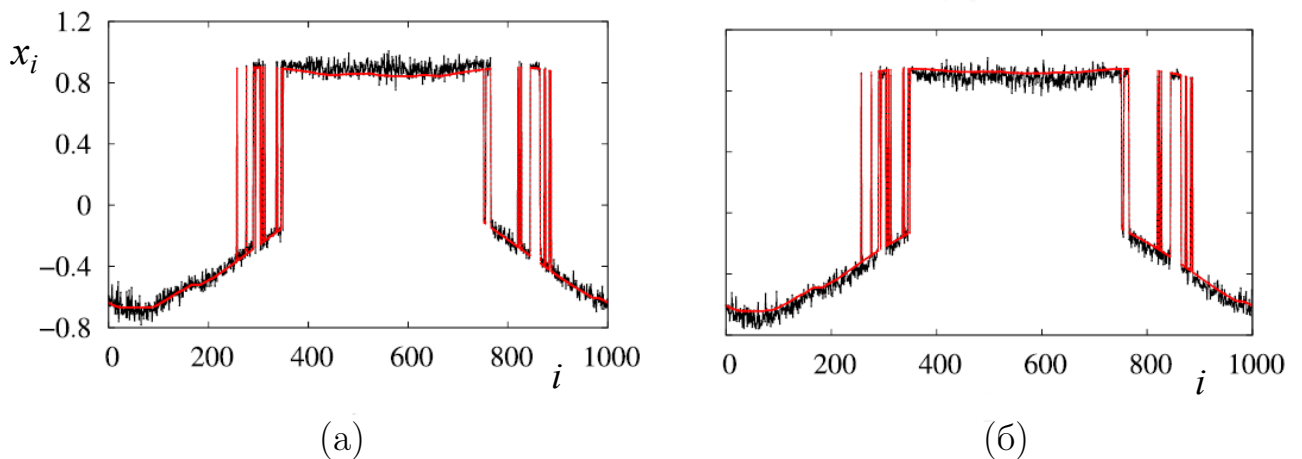


Рисунок 3.20. Мгновенные профили динамики ансамбля (3.2) в результате воздействия постоянного шума интенсивности  $D = 10^{-5}$  на все элементы для моментов времени  $t = 2 \times 10^5$  (а) и  $t = 5 \times 10^5$  (б). Черным цветом показан профиль, полученный при добавлении шума, красным (серым) цветом — невозмущенный случай. Параметры системы:  $\sigma = 0.304$ ,  $r = 0.32$ ,  $\alpha = 1.4$ ,

$$\beta = 0.3$$

изменяются ни по форме, ни по расположению в пространстве ансамбля, что свидетельствует об устойчивости фазовых химерных структур по отношению к шумовым воздействиям. Как видно из рисунка 3.20, постоянно действующий на систему с установившейся фазовой химерой шум не индуцирует возникновения новых режимов и структур, а ведет лишь к зашумлению мгновенных пространственных профилей. Кроме того, возрождения некогерентного кластера амплитудной химеры не наблюдается.

Теперь рассмотрим реакцию ансамбля (3.2) при кратковременном единичном шумовом возмущении всех элементов ансамбля. Для проведения данного исследования мы изменим значения параметров нелокальной связи и выберем режим, показанный на рисунке 3.11 для  $\sigma = 0.32$  и  $r = 0.32$ . В этом случае в ансамбле (1.10) также имеет место режим сосуществования амплитудной и фазовой химер и, как было установлено в разделе 3.4.2, при  $t \simeq 1.5 \times 10^5$  амплитудная химера «умирает» и ансамбль (1.10) переходит в режим только фазовых химерных состояний (рисунок 3.11). Непосредственно в момент времени  $t = 1.5 \times 10^5$  во все элементы ансамбля (3.2) добавляется шумовое возмущение определенной интенсивности, а уже на следующей итерации  $t = 1.5 \times 10^5 + 1$  источник шума выключается. На рисунке 3.21 приведены мгновенные пространственные профили, отражающие состояния элементов ансамбля (3.2) в момент подачи шумового воздействия (рисунок 3.21,а) и в некоторые последующие моменты времени, когда источник шума отключен (рисунок 3.21,б–г). На рисунке 3.21,а красным цветом показан мгновенный профиль установившегося режима фазовой химеры в момент  $t = 1.5 \times 10^5$  без воздействия шума, черным цветом — зашумленный мгновенный профиль в тот же момент времени. На последующих фрагментах (рисунок 3.21,б–г) красным цветом показан предыдущий профиль, черным — текущий, полученный в соответствующий момент времени.

Как видно из рисунка 3.21,а, при подаче кратковременного (действующего только в течение одной итерации) шумового возмущения на все элементы ансамбля (3.2) мгновенный профиль становится сильно зашумленным, так как

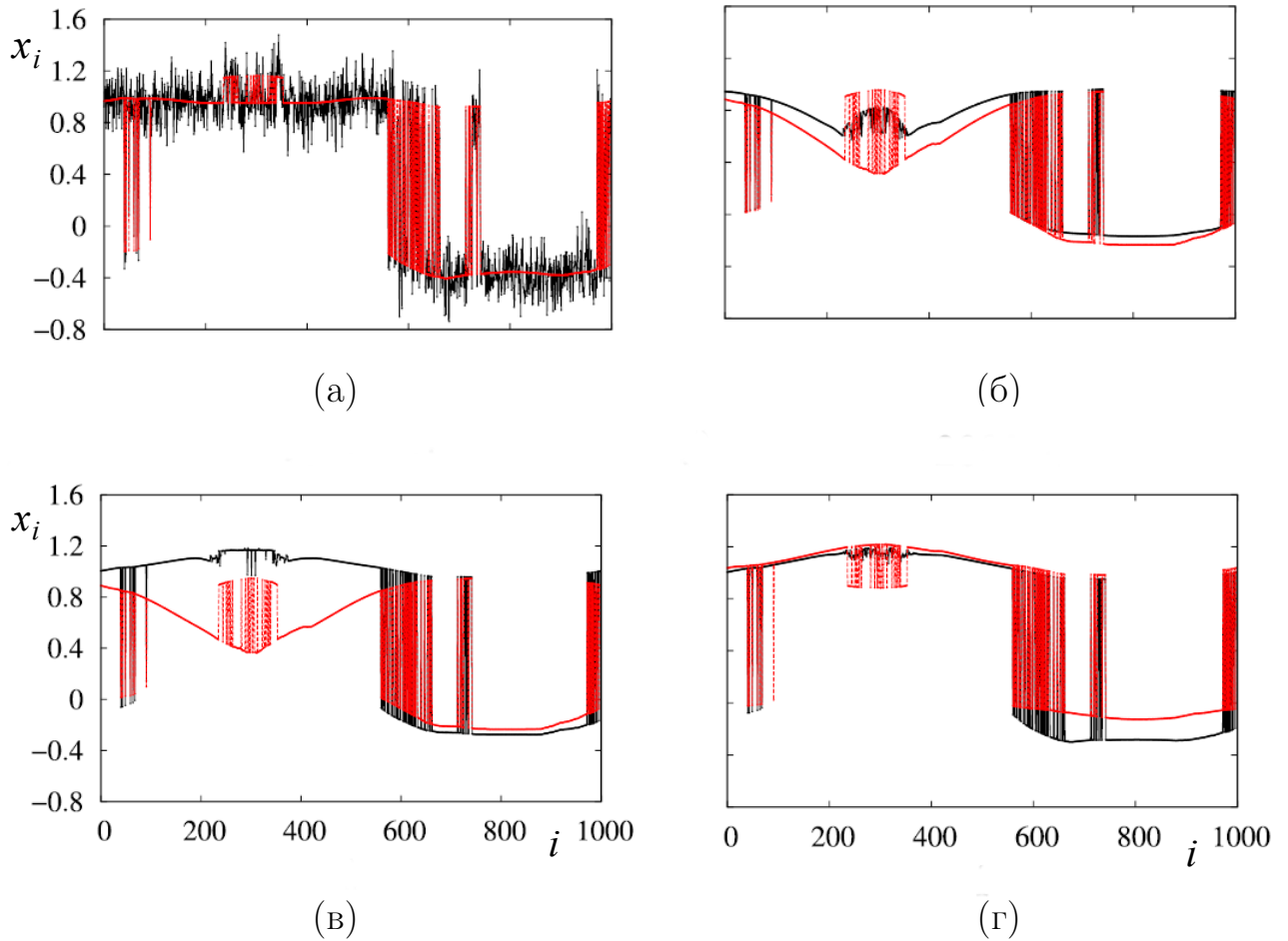


Рисунок 3.21. Мгновенные профили состояний  $x_i$  ансамбля (3.2), рассчитанные в момент  $t = 1.5 \cdot 10^5$  подачи шумового воздействия интенсивности  $D = 10^{-2}$  (а), и после выключения источника шума для моментов времен  $1.51 \times 10^5$  (б),  $1.6 \times 10^5$  (в) и  $2 \times 10^5$  (г). Красным цветом показан предыдущий профиль, черным – текущий. Параметры:  $\sigma = 0.32$ ,  $r = 0.32$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$

интенсивность шума достаточно велика ( $D = 10^{-2}$ ). Однако, как следует из рисунка 3.21,б–г, данное единичное воздействие индуцирует фазовый переход, в результате которого амплитудная химера восстанавливается на том же месте, где была раньше (кластер  $250 \leq i \leq 380$ , рисунок 3.21,б), и вновь наблюдается процесс нерегулярных переключений во времени между режимами амплитудной и фазовой химер (рисунок 3.21,в,г). Данный эффект сохраняется в течение относительно долгого времени наблюдения (рисунок 3.21,в,г) и тем самым сви-

детельствует о наличии долгоживущей амплитудной химеры. Тем не менее этот процесс не бесконечен, а, как было установлено ранее, имеет конечное время реализации или жизни. На достаточно больших временах ( $t > 2 \times 10^5$ ) процесс перемежаемости заканчивается, некогерентный кластер амплитудной химеры исчезает, уступая место режиму стационарной фазовой химеры. Отметим, что в результате кратковременного шумового воздействия сосуществующие с амплитудной химерой некогерентные кластеры фазовых химер не претерпели никаких изменений как во времени, так и пространстве ансамбля.

Результаты численных исследований показывают, что если кратковременное шумовое возмущение подавать периодически или нерегулярно через некоторые достаточно большие интервалы времени  $\Delta t \sim 5 \times 10^4$ , то ансамбль будет находиться в режиме нестационарных переключений бесконечно долгое время. Таким образом, появляется возможность управлять временем жизни процесса перемежаемости или амплитудных химерных состояний с помощью единичных шумовых воздействий на все элементы ансамбля.

### 3.5 Выводы по третьей главе

В результате проведенных численных исследований эволюции во времени химерных структур двух типов, фазовой и амплитудной, в ансамблях нелокально связанных логистических отображений и отображений Эно как без шума, так и в присутствии шумовых воздействий различной интенсивности были получены новые данные, позволяющие сделать следующие основные выводы.

1. Впервые установлен и проанализирован эффект перемежаемости во времени между амплитудной и фазовой химерами, который проявляется в нерегулярных переключениях во времени хаотических (амплитудная химера) и периодических колебаний (фазовая химера) в автономных ансам-



блях. Данное явление отражает нестационарную динамику элементов некогерентного кластера амплитудной химеры, которая наблюдается в течение конечного времени. По истечении этого времени перемежаемость исчезает и происходит переход к периодическим колебаниям в режиме фазовой химеры. Установлено, что фазовая химера представляет собой стационарную (установившуюся во времени и пространстве) и долгоживущую структуру. Амплитудная химера характеризуется нестационарностью режима динамики элементов и конечным временем жизни.

2. Впервые проведен статистический анализ влияния локализованного (только на элементы амплитудных химер) и глобального (на все элементы ансамбля) аддитивного шумового воздействия на эффект перемежаемости и время жизни амплитудных химерных состояний после их перехода в режим стационарной фазовой химеры. Установлено, что стационарный режим фазовой химеры устойчив по отношению к шумовому возмущению, постоянно действующему на все элементы ансамбля. В результате проведенных численных исследований показано, что воздействие локализованного или глобального единичного источника шума индуцирует восстановление режима амплитудных химер, а, следовательно, и процесса перемежаемости во времени. Кроме того, время жизни амплитудных химерных состояний может быть увеличено в численных экспериментах до сколь угодно больших величин. Если единовременные возмущения вводить в элементы всего ансамбля постоянно с некоторыми интервалами во времени, то переходный процесс будет наблюдаться бесконечное время. Таким образом, показана возможность управления временем жизни амплитудных химер или длительностью процесса перемежаемости путем применения целенаправленного или глобального кратковременного шумового возмущения малой интенсивности.

3. Численные исследования зависимости времени жизни амплитудных химер от длительности локализованного шумового воздействия показали, что для их восстановления и стабилизации достаточно приложить довольно слабое шумовое возмущение (интенсивности порядка  $10^{-6}$ ) в течение небольшого конечного промежутка времени. Данный факт является важным с прикладной точки зрения, когда для восстановления и/или поддержания нужного режима функционирования системы весьма значим фактор очень незначительных внешних воздействий.

## Глава 4. Химера уединенных состояний: структура и механизм реализации

### 4.1 Введение

В рамках численных исследований коллективной (кооперативной) динамики сложных ансамблей и систем большое внимание уделяется анализу формирования и реализации пространственно-временных режимов и структур в ансамблях связанных осцилляторов. В подавляющем числе работ исследуются одномерные или двумерные ансамбли идентичных осцилляторов при различной топологии связи между ними. Представляет интерес изучение динамики связанных ансамблей в случае, когда индивидуальные ансамбли состоят из элементов различных типов. В этом случае можно ожидать обогащение реализуемых режимов в каждом из взаимодействующих ансамблей, которое обусловлено наличием связи между рассматриваемыми системами. Кроме того, в таких более сложных ансамблях возможно появление абсолютно новых пространственно-временных структур, включая особые типы химерных состояний.

В четвертой главе диссертационной работы приводятся результаты численных исследований пространственно-временной динамики системы двух связанных одномерных ансамблей хаотических осцилляторов. Каждый из взаимодействующих ансамблей представляет собой кольцо нелокально связанных хаотических отображений различного типа. Индивидуальные элементы одного ансамбля описываются двумерными отображениями Эно, хаотические аттракторы которых относятся к негиперболическому типу. Другой ансамбль состоит из нелокально связанных двумерных отображений Лози, которые характеризуются квазигиперболическими хаотическими аттракторами. Как было подробно

описано в 1-й и 2-й главах настоящей работы, в зависимости от типа хаотического аттрактора в индивидуальном элементе, в ансамблях взаимодействующих хаотических осцилляторов с нелокальной связью реализуются различные типы пространственно-временных структур. Было установлено, что в одномерном ансамбле отображений Эно возникают фазовые, амплитудные и нестационарные (перемежающиеся) химерные состояния, в то время как ансамбль отображений Лози может демонстрировать структуры в виде уединенных состояний и режимы бегущих волн при определенных значениях параметров связи.

В четвертой главе показана возможность реализации в каждом из рассматриваемых ансамблей пространственно-временных структур, которые не наблюдались в них без взаимодействия. Впервые обнаружено и описано новое химерное состояние, названное *химерой уединенных состояний* (в английской терминологии — *solitary state chimera*) [338], которое реализуется в ансамбле нелокально связанных отображений Эно в результате его взаимосвязи с ансамблем отображений Лози. Установлен и подробно описан механизм возникновения новой химерной структуры на примере анализа динамики одномерного ансамбля нелокально связанных отображений Эно. Проведено сравнение и показан общий характер установленного механизма и сценария рождения режима уединенных состояний в ансамбле нелокально связанных отображений Лози [418]. Существование химеры уединенных состояний и общий характер ее свойств и механизма возникновения подтверждаются приведенными в настоящей главе данными численного анализа динамики ансамблей нелокально связанных моделей нейронов с дискретным временем (отображения Некоркина [433]) и непрерывным временем (осцилляторы ФитцХью-Нагумо [434]).

Результаты численных исследований, представленные в данной главе, опубликованы в работах [338, 340, 344, 345, 352, 354, 372, 373].

## 4.2 Особенности динамики системы двух связанных ансамблей хаотических отображений

### 4.2.1 Модель связанных ансамблей

Исследуемая модель представляет собой систему двух взаимодействующих одномерных ансамблей хаотических отображений. Каждый из ансамблей имеет топологию кольца, включает одинаковое число элементов и характеризуется нелокальной связью между индивидуальными осцилляторами. Связь между одномерными ансамблями является локальной и симметричной, то есть  $i$ -й элемент первого ансамбля связан с  $i$ -м элементом второго с коэффициентом связи  $\gamma$ . В контексте исследований динамики сложных сетей и ансамблей, подобная топология связи между ансамблями получила название мультиплексной [275,278]. Схематическое изображение исследуемой модели показано на рисунке 4.1. Каждое кольцо в подобном представлении может рассматриваться как отдельный слой, и в этом случае модель на рисунке 4.1 представляет собой двухслойную мультиплексную систему или сеть, а связь между ансамблями (слоями) называется межслойной.

Мультиплексная сеть, представленная на рисунке 4.1, описывается системой уравнений [338]:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f_i^t + \frac{\sigma_1}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f_j^t - f_i^t] + \gamma F_i^t, & y_i^{t+1} &= \beta x_i^t, \\ u_i^{t+1} &= g_i^t + \frac{\sigma_2}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [g_j^t - g_i^t] + \gamma G_i^t, & v_i^{t+1} &= \beta u_i^t. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $i = 1, 2, \dots, N$  — номер элемента в отдельном кольце,  $N = 1000$  — общее количество элементов в каждом ансамбле. Нелокальная связь между элементами в каждом кольце задается коэффициентами связи  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  и радиусами связи

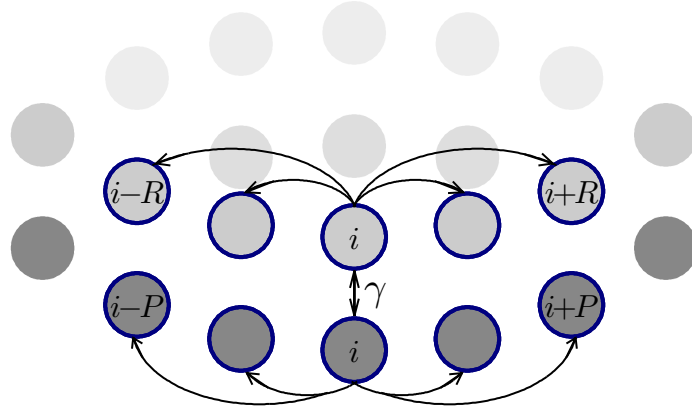


Рисунок 4.1. Схематическое представление исследуемой системы (4.1) и топологии ее связей

$P$  и  $R$ , которые определяют количество соседей или связей  $i$ -го элемента каждого кольца слева и справа. Коэффициент  $\gamma$  характеризует силу симметричной или межслойной связи между двумя соответствующими  $i$ -ми элементами из разных ансамблей (см. рисунок 4.1).

Первая пара уравнений в системе (4.1) описывает кольцо нелокально связанных отображений Эно, где функция  $f_i^t$  имеет следующий вид:  $f_i^t = f(x_i^t, y_i^t) = 1 - \alpha(x_i^t)^2 + y_i^t$ . Значения силы связи  $\sigma_1$  и число соседей  $P$  выбираются таким образом, чтобы в отсутствие межслойной связи в ансамбле отображений Эно наблюдалось химерное состояние (см. раздел 1.4.2).

Вторая пара уравнений в системе (4.1) соответствует кольцу нелокально связанных отображений Лози, для которых функция  $g_i^t$  задается отображением  $g_i^t = g(u_i^t, v_i^t) = 1 - \alpha|u_i^t| + v_i^t$ . В наших исследованиях значения параметров нелокальной связи  $\sigma_2$  и  $R$  соответствуют реализации режима уединенных состояний в ансамбле отображений Лози (см. раздел 2.2.2) в отсутствие взаимодействия с ансамблем отображений Эно.

Динамика изолированных отображений Эно и Лози определяется значениями их управляющих параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . В большинстве проводимых численных исследований для обоих колец они выбираются и фиксируются равными

$\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ , что соответствует хаотическому поведению во всех индивидуальных элементах рассматриваемой системы (4.1).

Функции  $F_i^t$  и  $G_i^t$  в системе (4.1) задают тип межслойной связи, которая может быть диссипативной или инерционной. В случае диссипативной связи соответствующие элементы двух ансамблей связаны через функции, задающие соответствующее отображение:

$$F_i^t = g(u_i^t, v_i^t) - f(x_i^t, y_i^t), \quad G_i^t = f(x_i^t, y_i^t) - g(u_i^t, v_i^t), \quad (4.2)$$

тогда как при инерционном типе межслойная связь задается через разность координат симметричных элементов ансамблей:

$$F_i^t = u_i^t - x_i^t, \quad G_i^t = x_i^t - u_i^t. \quad (4.3)$$

Данные определения видов связи соответствуют характеру взаимодействия связанных систем. Диссипативная связь стремится выровнять мгновенные амплитуды связанных элементов, а инерционная связь характеризуется способностью сохранять память о предыдущем состоянии системы [435].

Численное моделирование системы (4.1) проводилось для периодических граничных условий и начальных условий, случайно распределенных в интервале  $[-0.5; 0.5]$  для всех элементов рассматриваемых колец. Выбранное случайное распределение начальных условий затем фиксировалось и не менялось в ходе численных экспериментов.

## 4.2.2 Пространственно-временные структуры, индуцированные межслойной связью

**Режимы динамики ансамблей в отсутствие связи.** Из уравнений (4.1) следует, что при  $\gamma = 0$  имеются два несвязанных (изолированных) ансамбля нелокально связанных отображений Эно и Лози. В этом случае, как было

показано в разделе 1.4.2 настоящей работы, при выборе определенных значений параметров нелокальной связи ансамбль отображений Эно может демонстрировать два типа химерных состояний: фазовую и амплитудную химеры, – которые одновременно реализуются, например, при силе связи  $\sigma_1 = 0.32$  и радиусе связи  $P = 320$ . Мгновенный пространственный профиль данной комбинированной структуры показан на рисунке 4.2,а. Фазовая химера состоит из двух некогерентных кластеров, включающих элементы  $1 \leq i \leq 100$  и  $400 \leq i \leq 550$ , которые характеризуются периодическими колебаниями во времени, но демонстрируют между собой нерегулярный вдоль кластера сдвиг по «фазе». Чаще всего этот сдвиг равен половине периода колебаний (сдвиг по времени на одну итерацию). В этом случае коэффициент взаимной корреляции (КВК)  $R_{1i}$  (1.3) фазовой химеры равен по модулю 1, но в каждом некогерентном кластере нерегулярно меняет свой знак  $R_{1i} = \pm 1$  (см. рисунок 1.11,б).

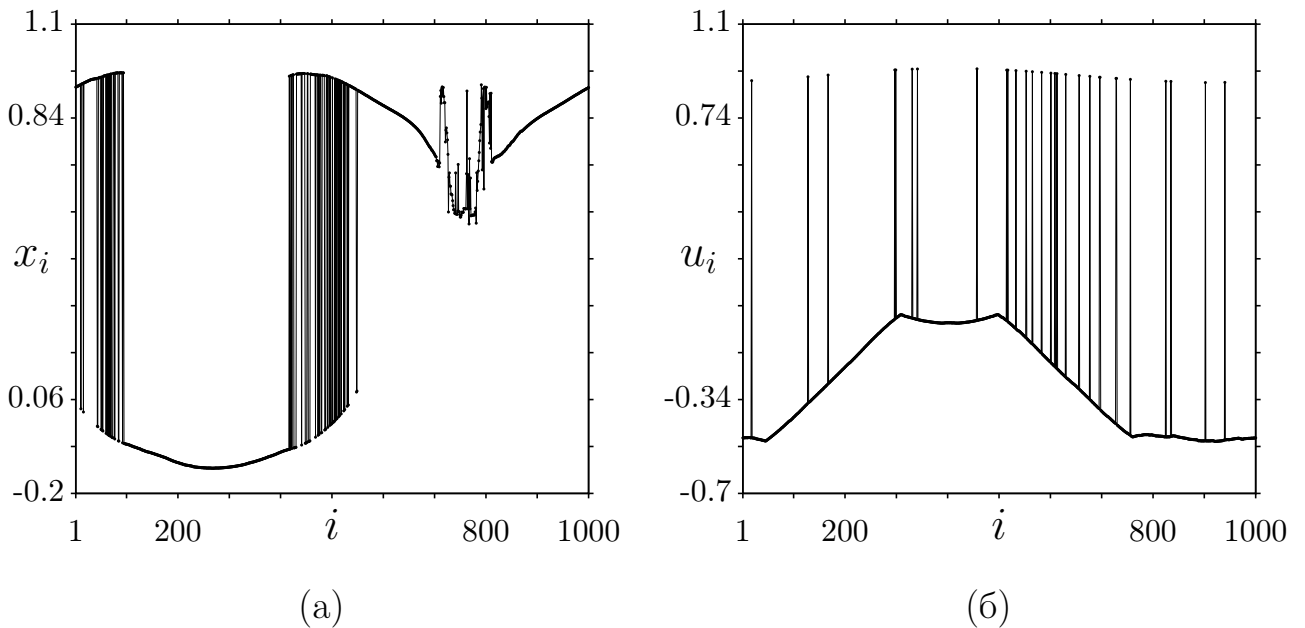


Рисунок 4.2. Мгновенные профили амплитуд в системе (4.1) в отсутствие взаимодействия между кольцами ( $\gamma = 0$ ) для ансамбля отображений Эно при  $\sigma_1 = 0.32$  и  $P = 320$  (а) и ансамбля отображений Лози при  $\sigma_2 = 0.225$  и  $R = 190$  (б)



Элементы  $700 \leq i \leq 820$  (рисунок 4.2,а) принадлежат некогерентному кластеру амплитудной химеры. Они демонстрируют хаотические колебания и некоррелированы друг с другом. Коэффициент взаимной корреляции для амплитудной химеры по модулю значительно меньше 1 (рисунок 1.14,в,г), что свидетельствует о несинхронном хаотическом поведении осцилляторов в некогерентном кластере амплитудной химеры. Кроме того, как было установлено и описано в главе 3, амплитудная химера характеризуется эффектом перемежаемости во времени между хаотическими и периодическими колебаниями и имеет конечное время жизни.

Как было подробно проанализировано и изложено в главе 2 (раздел 2.2.2), изолированный ансамбль нелокально связанных отображений Лози демонстрирует режим уединенных состояний, который является типичным и сопровождается переходом «когерентность—некогерентность» в ансамблях нелокально связанных хаотических систем, хаотические аттракторы которых относятся к квази-гиперболическому типу. Число осцилляторов, переходящих в режим уединенных состояний, возрастает при уменьшении силы нелокальной связи. Поведение во времени осцилляторов в режиме уединенных состояний существенно отличается от временной динамики остальных осцилляторов ансамбля. Пример пространственно-временной структуры для изолированного ансамбля Лози в системе (4.1) при  $\gamma = 0$  приведен на рисунке 4.2,б для значений параметров нелокальной связи  $\sigma_2 = 0.225$  и  $R = 190$ .

Таким образом, в отсутствие связи между кольцами в модели (4.1) каждый ансамбль демонстрирует принципиально различные пространственно-временные структуры, которые являются типичными и преимущественно реализуются в каждом из исследуемых колец.

**Случай диссипативной межслойной связи.** Рассмотрим теперь динамику мультиплексной сети (4.1) с диссипативным типом связи (4.2) между кольцами при изменении значения силы межслойной связи  $\gamma > 0$ . Численные

расчеты показали, что при введении такой связи между двумя кольцами и в зависимости от значения силы связи, в каждом из них могут наблюдаться амплитудные, фазовые химеры и уединенные состояния. На рисунках 4.3 и 4.5 приведены мгновенные пространственные профили распределения амплитуд в системе двух диссипативно связанных ансамблей отображений Эно и Лози (4.1) для двух различных значений силы связи  $\gamma$ .

Как видно из рисунка 4.3, введение диссипативной симметричной связи между кольцами приводит к кардинальному изменению пространственно-временной структуры в ансамбле отображений Лози (рисунок 4.3,б) по сравнению со случаем отсутствия связи (рисунок 4.2,б). Установившаяся комбинированная химерная структура в отображении Эно, хотя и немного видоизменяется после добавления межслойной связи (рисунок 4.3,а), но достаточно хорошо воспроизводится в ансамбле отображений Лози. В этом случае в каждом из диссипативно связанных колец реализуются амплитудная химера с элементами

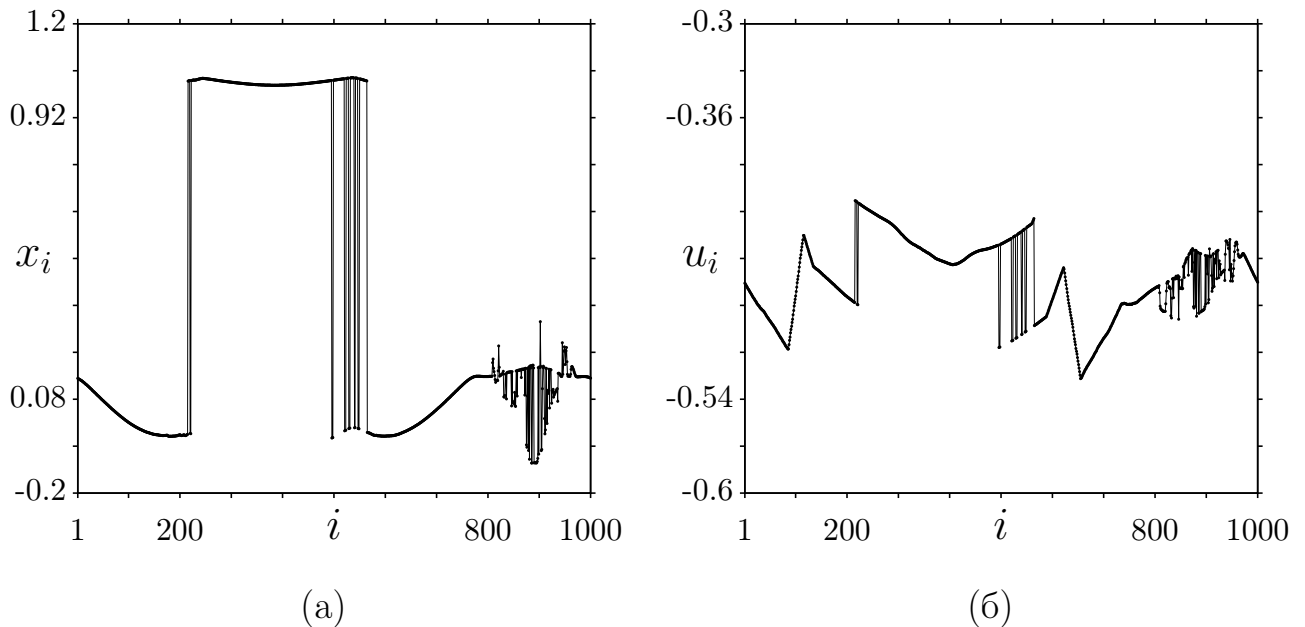


Рисунок 4.3. Мгновенные профили амплитуд в системе (4.1) в случае диссипативной связи (4.2) при  $\gamma = 0.015$  для ансамбля отображений Эно (а) и ансамбля отображений Лози (б). Параметры:  $\sigma_1 = 0.32$ ,  $\sigma_2 = 0.225$ ,  $P = 320$ ,

$$R = 190$$

$800 \leq i \leq 980$  и фазовая химера в виде двух некогерентных кластеров с элементами  $210 \leq i \leq 230$  и  $490 \leq i \leq 570$ . Таким образом, в ансамбле отображений Лози за счет связи с ансамблем отображений Эно наблюдается режим, который в изолированном ансамбле отображений Лози не может быть реализован. Отметим, что, как было показано ранее в главе 2, химерные структуры в ансамбле нелокально связанных отображений Лози обнаружены не были.

Как было показано в работе [337] и подробно описано в 3-й главе, время жизни амплитудной химеры в ансамбле отображений Эно является конечным и может быть неограниченно увеличено посредством единичного шумового воздействия на все элементы ансамбля. Если установить режим амплитудной химеры в системе связанных ансамблей (4.1) (рисунок 4.3), то время жизни амплитудной химеры можно контролировать, изменяя силу межслойной связи  $\gamma$ . Результаты расчетов зависимости времени жизни при вариации значения  $\gamma$  приведены на рисунке 4.4. Как видно из графика, данная зависимость является принципиально нелинейной, а сами значения времени жизни амплитудной хи-

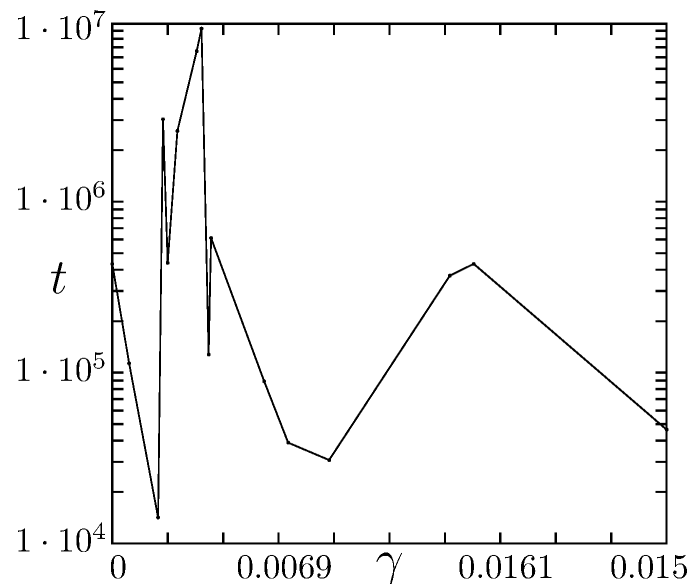


Рисунок 4.4. Зависимость времени жизни амплитудной химеры в ансамбле отображений Эно системы (4.1) от силы межслойной связи  $\gamma$  между ансамблями. Параметры как для рисунка 4.3

меры могут варьироваться в широких пределах. Этот эффект достигается в автономной системе (4.1) в отсутствие внешних воздействий. Так, например, при вариации значения межслойной связи в конечном интервале  $\gamma \in [0.0023, 0.0038]$  время жизни амплитудной химеры существенно возрастает, вплоть до  $10^7$ , что сравнимо со временем расчета (наблюдения). При дальнейшем увеличении силы связи между кольцами в системе (4.1) время жизни амплитудной химеры может либо уменьшаться до  $5 \times 10^4$ , либо увеличиваться на порядок.

Проведенные численные исследования показали, что при изменении значения силы межслойной диссипативной связи  $\gamma$  в системе (4.1) можно получить уединенные состояния в ансамбле отображений Эно, которые, как известно, не могут наблюдаться в нем без связи с кольцом отображений Лози. Данный случай проиллюстрирован на рисунке 4.5 мгновенными профилями амплитуд для каждого из двух связанных ансамблей (4.1) при  $\gamma = 0.0085$ . Как следует из рисунка 4.5,а, уединенные состояния реализуются в кольце отображений Эно в

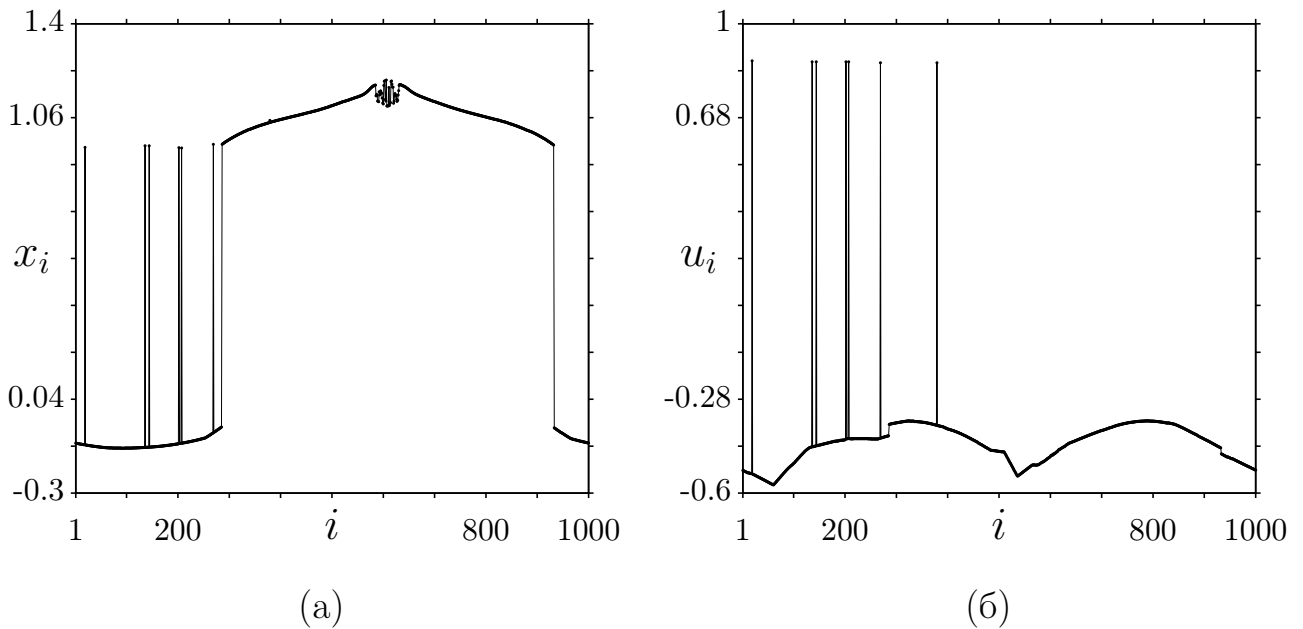


Рисунок 4.5. Мгновенные профили амплитуд в системе (4.1) в случае диссипативной связи (4.2) при  $\gamma = 0.0085$  для ансамбля отображений Эно (а) и ансамбля отображений Лози (б). Параметры:  $\sigma_1 = 0.35$ ,  $\sigma_2 = 0.225$ ,  $P = 320$ ,

$$R = 190$$

интервале элементов  $1 \leq i \leq 280$  и сосуществуют с некогерентным кластером амплитудной химеры, включающим элементы  $570 \leq i \leq 640$ . Мгновенный профиль амплитуд для ансамбля отображений Лози приведен на рисунке 4.5,б. Из сравнения приведенных профилей на рисунке 4.5 хорошо видно, что практически все уединенные состояния в каждом ансамбле наблюдаются в одной и той же области пространства ансамбля.

**Случай инерционной межслойной связи.** В случае инерционной межслойной связи (4.3) между ансамблями в системе (4.1) и при определенных значениях параметров нелокальной связи в каждом кольце, связанные ансамбли отображений Эно и Лози также демонстрируют новые пространственно-временные режимы, которые не могут быть реализованы в ансамблях в отсутствие взаимодействия между ними. Наиболее интересным и показательным в этом случае является возникновение режимов бегущих волн в ансамбле отображений Эно, индуцированных введением инерционной межслойной связи с кольцом отображений Лози. Отметим, что режимы бегущих волн не реализуются в изолированном кольце отображений Эно.

Проиллюстрируем данный эффект более подробно. С этой целью в системе (4.1) установим значения управляющих параметров для элементов ансамбля отображений Эно  $\alpha = 1.13$ ,  $\beta = 0.3$ , а для элементов ансамбля отображений Лози —  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ . В обоих случаях динамика индивидуальных отображений Эно и Лози по-прежнему остается хаотической. Значения параметров нелокальной связи для каждого ансамбля выбраны следующими:  $\sigma_1 = 0.344$ ,  $\sigma_2 = 0.22$ ,  $P = 320$ ,  $R = 193$ . При задании случайных начальных условий и в отсутствие межслойной связи  $\gamma$  в системе (4.1) в ансамблях отображений Эно и Лози реализуются отличные друг друга пространственно-временные режимы, проиллюстрированные на рисунке 4.6,а и б, соответственно.

Как следует из рисунка 4.6,а, пространственно-временная структура в изолированном ансамбле нелокально связанных отображений Эно характери-

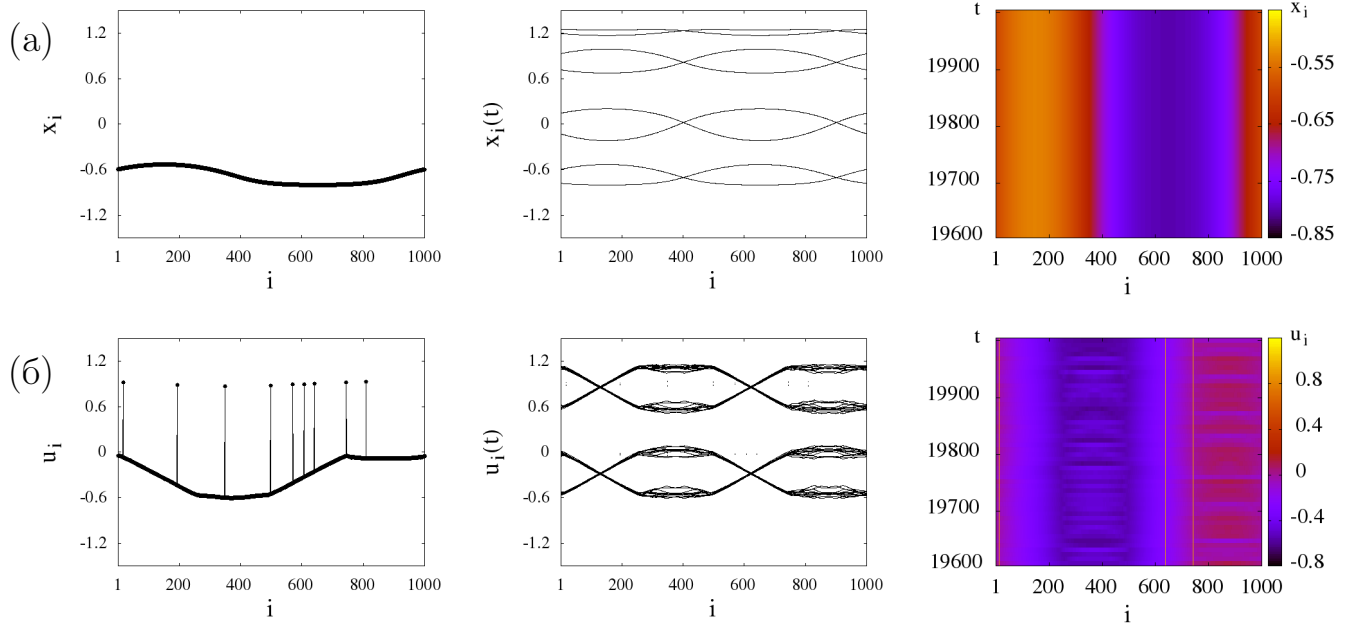


Рисунок 4.6. Пространственно-временные структуры в ансамбле отображений

Эно при  $\alpha = 1.13$ ,  $\beta = 0.3$  (а) и ансамбле отображений Лози при  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$  (б) в отсутствие межслойной связи  $\gamma = 0$  в системе (4.1). В левой колонке приведены мгновенные профили амплитуд, в центральной колонке — пространственно-временные профили (50 последних итераций), в правой колонке показаны пространственно-временные диаграммы, при построении которых выводилась каждая 8-я итерация. Другие параметры:  $\sigma_1 = 0.344$ ,

$$\sigma_2 = 0.22, P = 320, R = 193$$

зуется когерентным (гладким) мгновенным пространственным профилем (рисунок 4.6,а, слева), а временная динамика всех элементов ансамбля соответствует циклу периода 8 (рисунок 4.6,а, в центре). Если исключить периодичность, то есть учитывать только каждую 8-ю итерацию, можно получить пространственно-временную диаграмму, приведенную на рисунке 4.6,а, справа и отражающую однородную пространственно-временную структуру, установившуюся в изолированном ансамбле отображений Эно.

В отсутствие взаимодействия ( $\gamma = 0$ ) в системе (4.1) изолированное кольцо нелокально связанных отображений Лози находится в режиме уединенных состояний, как хорошо видно из мгновенного и пространственно-временного

профилей, приведенных на рисунке 4.6,б, слева и в центре, соответственно. Пространственно-временная диаграмма, изображенная на рисунке 4.6,б, справа, отражает неоднородную пространственно-временную динамику ансамбля за счет 2-х групп осцилляторов, демонстрирующих слабо хаотическое поведение во времени.

Введем теперь инерционную связь (4.3) между рассматриваемыми ансамблями достаточно малой величины,  $\gamma = 0.0925$ . Реализующиеся в результате взаимодействия структуры в ансамблях отображений Эно и Лози показаны на рисунке 4.7,а,б, соответственно. Как хорошо видно из мгновенных профилей

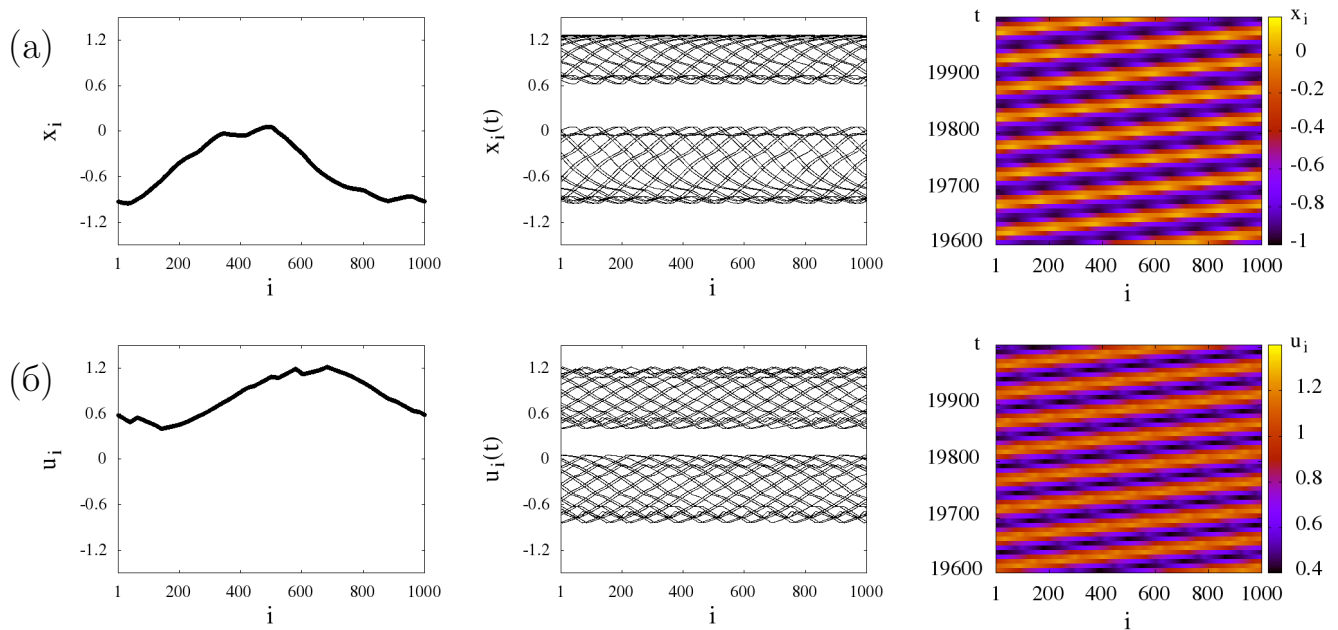


Рисунок 4.7. Пространственно-временные структуры в ансамбле отображений Эно при  $\alpha = 1.13$ ,  $\beta = 0.3$  (а) и ансамбле отображений Лози при  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$  (б) в случае инерционной межслойной связи  $\gamma = 0.0925$  в системе (4.1). В левой колонке приведены мгновенные профили амплитуд, в центральной колонке — пространственно-временные профили (50 последних итераций), в правой колонке показаны пространственно-временные диаграммы, при построении которых использовалась каждая 8-я итерация.

Другие параметры:  $\sigma_1 = 0.344$ ,  $\sigma_2 = 0.22$ ,  $P = 320$ ,  $R = 193$

(рисунок 4.7,а,б, левая колонка), пространственно-временных профилей (рисунок 4.7,а,б, средняя колонка) и пространственно-временных диаграмм (рисунок 4.7,а,б, правая колонка), наличие инерционной связи между кольцами индуцирует возникновение режима бегущих волн в каждом ансамбле. Более того, из анализа и сравнения вида и форм пространственно-временных профилей и пространственно-временных диаграмм (рисунок 4.7,а,б, средняя и правая колонки) можно утверждать, что бегущие волны в связанных ансамблях отображений Эно и Лози являются практически синхронными, что, безусловно, является прямым следствием эффекта взаимной синхронизации двух ансамблей.

Отметим еще один интересный момент. В случае диссипативной связи между ансамблями отображений Эно и Лози (4.1), рассмотренном выше, принципиально новая пространственно-временная структура реализовывалась в одном из взаимодействующих ансамблей, тогда как в другом ансамбле изначально установившийся режим претерпевал лишь несущественные изменения (рисунки 4.3 и 4.5). Наличие же инерционной межслойной связи может приводить к полному изменению режимов динамики в обоих взаимодействующих кольцах, о чем явно свидетельствуют результаты, иллюстрирующие возникновение режима бегущих волн (рисунок 4.7) как в ансамбле отображений Эно, так и в ансамбле отображений Лози.

Таким образом, наличие симметричной связи (как диссипативной, так и инерционной) между двумя ансамблями, состоящими из хаотических осцилляторов различного типа и демонстрирующих принципиально отличные друг от друга пространственно-временные структуры без связи, может индуцировать возникновение структур и режимов, которые не могут наблюдаться в ансамблях в отсутствие связи между ними.



### 4.2.3 Химера уединенных состояний

Кроме пространственно-временных структур, описанных в предыдущем разделе, в системе (4.1) как при диссипативной, так и инерционной межслойной связи можно реализовать новый тип химерной структуры, который был назван *химерой уединенных состояний* (в английской терминологии — *solitary state chimera*) [338]. Как следует из ее названия, некогерентный кластер данной структуры состоит только из осцилляторов в режиме уединенного состояния. Новая пространственно-временная структура возникает в ансамбле отображений Эно системы (4.1) при малой величине силы связи  $\gamma$  (рисунок 4.8,а), в то время как ансамбль отображений Лози находится в режиме уединенных состояний (рисунок 4.8,б).

Некогерентный кластер химеры уединенных состояний включает группу осцилляторов в интервале  $490 \leq i \leq 590$  ансамбля отображений Эно, находящихся в режиме уединенных состояний (рисунок 4.8,а). Кроме того, мгновенный профиль состояний  $x_i$  отражает наличие двух когерентных кластеров с элементами  $1 \leq i \leq 489$  и  $591 \leq i \leq 810$  и некогерентный кластер фазовой химеры, состоящий из элементов  $915 \leq i \leq 980$ . Новую структуру можно отнести к химерным состояниям, поскольку некогерентный кластер с отличным от других элементов поведением локализован в ограниченной по ширине области пространства ансамбля. Основное отличие структуры данного типа от фазовой химеры состоит в том, что элементы из кластера химеры уединенных состояний функционируют в режиме уединенных состояний и характеризуются асинхронными хаотическими колебаниями. Кроме того, области когерентной динамики отвечают режиму полной хаотической синхронизации в режиме развитого хаоса, тогда как в случае фазовой химеры мы имеем дело с периодическим или слабохаотическим поведением.

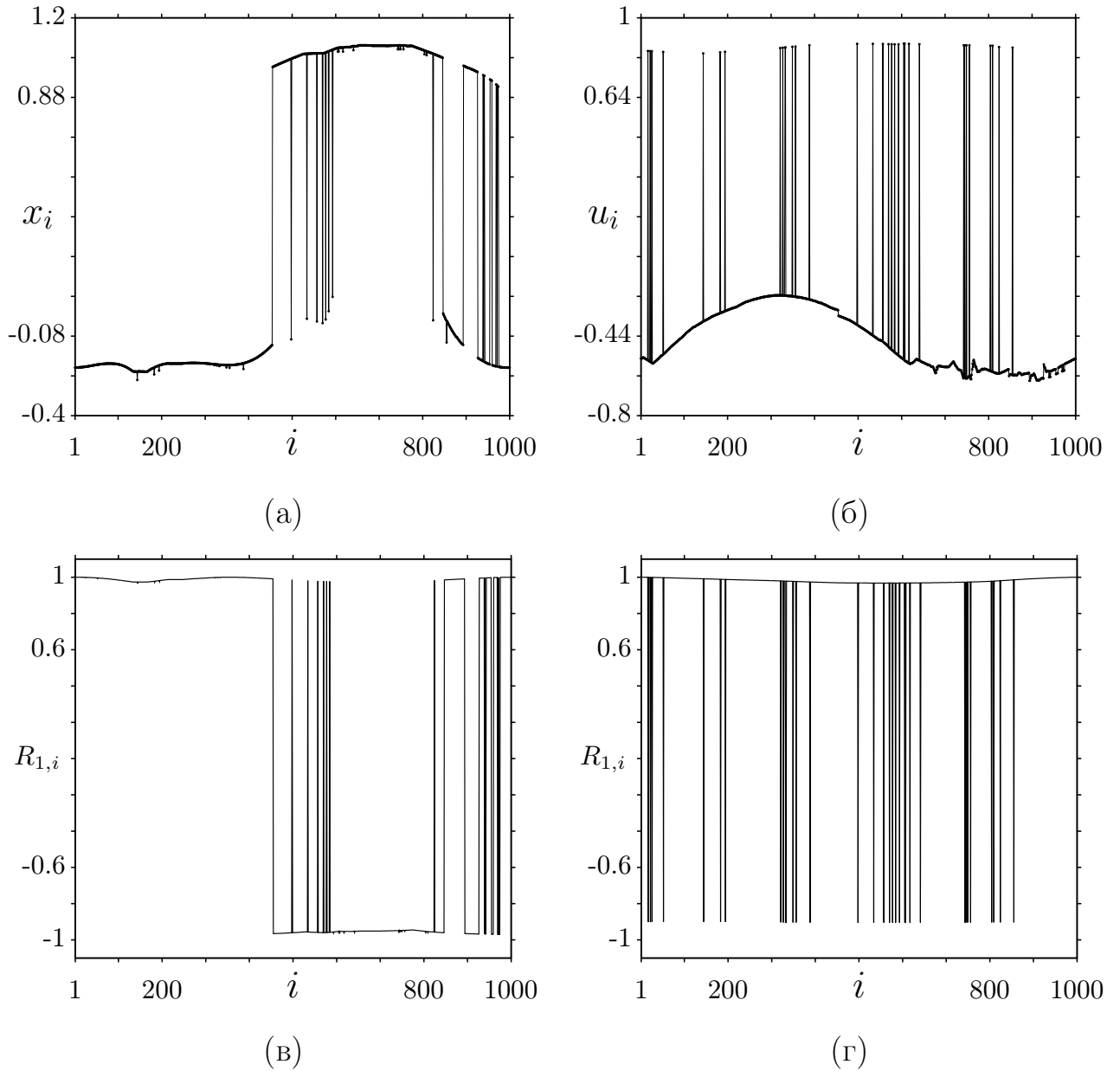


Рисунок 4.8. Мгновенные профили амплитуд  $x_i$  и  $u_i$  (верхний ряд) и распределение значений коэффициента взаимной корреляции  $R_{1,i}$  (нижний ряд) в системе (4.1) в случае инерционной связи (4.3) для ансамбля отображений Эно [(а) и (в)] и ансамбля отображений Лози [(б) и (г)] .

Параметры:  $\sigma_1 = 0.34$ ,  $\sigma_2 = 0.205$ ,  $P = 320$ ,  $R = 193$ ,  $\gamma = 0.02$

Полученные результаты были подтверждены численными расчетами значений коэффициента взаимной корреляции (КВК)  $R_{1,i}$  (1.3) для всех элементов системы (4.1) относительно 1-го осциллятора, принадлежащего области когерентности в каждом ансамбле. Результаты представлены на рисунке 4.8,в,г для ансамблей отображений Эно и Лози, соответственно. Расчет статистической характеристики показывает, что новая химерная структура уединенных состояний отличается от уже известных фазовой и амплитудной химер. Как видно из рисунка 4.8,в, все значения  $R_{1,i}$  не достигают по модулю единицы ( $|R_{1,i}| < 1$ ), что подтверждает тот факт, что все элементы в химере уединенных состояний колеблются хаотически. Кроме того, в кластере, отвечающем новому химерному состоянию, значения коэффициента  $R_{1,i}$  имеют характер выбросов с несколько различной высотой. В случае же фазовой химеры значения  $R_{1,i}$  нерегулярно переключаются между двумя уровнями  $\pm 1$ .

Характер распределения значений коэффициента взаимной корреляции для элементов ансамбля отображений Лози (рисунок 4.8,г), свидетельствует о режиме уединенных состояний в данном ансамбле. Как было установлено в разделе 2.2.2, каждому осциллятору, находящемуся в режиме уединенного состояния, соответствует выброс значения  $R_{1,i}$ , которое по модулю всегда строго меньше единицы. Подобная картина четко наблюдается для осцилляторов из химеры уединенных состояний в ансамбле отображений Эно (рисунок 4.8,в).

Новая химерная структура (рисунок 4.8,а) является достаточно грубой и характеризуется конечной областью существования в пространстве управляющих параметров системы (4.1). Однако в случае инерционной связи (4.3) химера уединенных состояний проявляет высокую чувствительность к выбору значений параметров системы (4.1) и начальных условий. Этот тип химерной структуры может наблюдаться и в случае диссипативной связи (4.2) и оказывается менее чувствительным (более грубым) по отношению к вариации параметров системы (4.1). Пример реализации химеры уединенных состояний в кольце отображений Эно для диссипативно связанных ансамблей и соответствующее

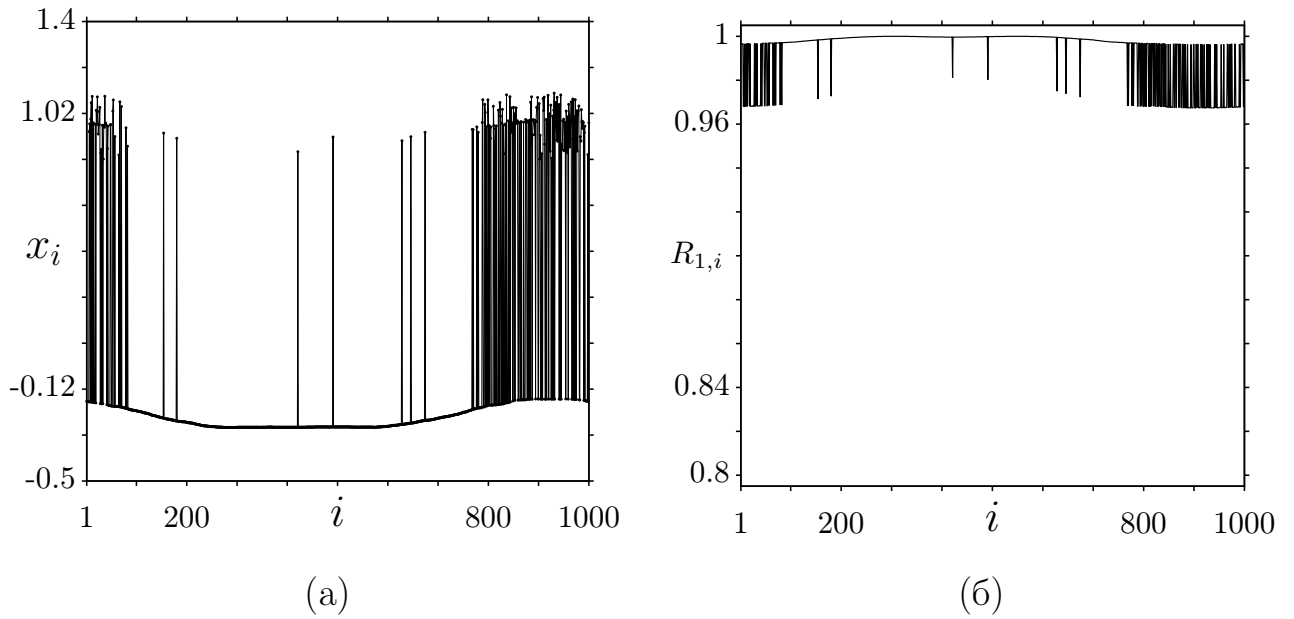


Рисунок 4.9. Мгновенный профиль амплитуд переменных  $x_i$  (а) и распределение значений коэффициента взаимной корреляции  $R_{1,i}$  (б) для ансамбля отображений Эно в случае диссипативной связи (4.2) в системе (4.1). Параметры:  $\sigma_1 = 0.39$ ,  $\sigma_2 = 0.1$ ,  $P = 320$ ,  $R = 190$ ,  $\gamma = 0.110$

распределение значений коэффициента взаимной корреляции  $R_{1,i}$  приведены на рисунке 4.9.

В случае диссипативной связи между ансамблями отображений Эно и Лози химера уединенных состояний состоит из двух некогерентных кластеров, включающих элементы  $1 \leq i \leq 100$  и  $750 \leq i \leq 1000$  кольца отображений Эно (рисунок 4.9,а). Как и в предыдущем случае, в графике распределения КВК  $R_{1,i}$  (рисунок 4.9,б) кластерам данной химерной структуры отвечают соответствующие совокупности выбросов значений  $R_{1,i} \simeq 0.97$ . Для элементов в областях когерентности (рисунок 4.9,а) КВК практически равен 1.

### 4.3 Механизм возникновения химеры уединенных состояний в изолированном ансамбле нелокально связанных отображений Эно

В предыдущем разделе главы было показано, что новый тип химерной структуры — «химера уединенных состояний» — был обнаружен в ансамбле нелокально связанных отображений Эно в результате его взаимодействия с кольцом нелокально связанных отображений Лози. Однако последующие численные исследования продемонстрировали возможность реализации данной химерной структуры в изолированном ансамбле отображений Эно как в случае воздействия шумом на коэффициент нелокальной связи, так и в условиях отсутствия шумового возмущения [345]. Проведенный анализ позволил установить и описать механизм возникновения химеры уединенных состояний.

#### 4.3.1 Исследуемая система

В данном разделе рассматривается кольцо отображений Эно с нелокальной связью (1.10). Индивидуальные элементы также функционируют в хаотическом режиме, соответствующем значениям управляющих параметров отображения Эно (1.9)  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ . Общее число элементов в ансамбле  $N = 1000$ . Динамика ансамбля (1.10) анализируется в присутствии внешнего мультипликативного шума, который модулирует коэффициент нелокальной связи  $\sigma$  в системе. В этом случае имеем  $\sigma = \sigma_0(1 + \sqrt{2D}\xi^t)$ , где  $\sigma_0$  — значение силы связи в невозмущенном случае (в отсутствие шума),  $\xi^t$  — источник мультипликативного шума, представляющий собой некоррелированный случайный процесс с равномерным распределением в интервале  $[-1; 1]$ ,  $D$  — интенсивность шума. Началь-

ные условия  $(x_i^0, y_i^0)$  выбираются случайным образом в интервале  $[-0.5 : 0.5]$  для всех элементов  $i = 1, \dots, N = 1000$  и затем фиксируются. Общее время расчета (наблюдения) составляет  $t = 5 \times 10^4$  итераций, из которых первые  $t = 10^4$  итераций отбрасываются в качестве периода установления.

Выберем значения силы связи  $\sigma_0 = 0.282$  и радиуса связи  $r = P/N = 0.32$ , при которых в ансамбле (1.10) в отсутствие шума ( $D = 0$ ) реализуется пространственно-временная структура, показанная на рисунке 4.10 [345].

График для мгновенного профиля (рисунок 4.10,а) отражает режим сосуществования некогерентных кластеров амплитудной ( $18 \leq i \leq 170$ ) и фазовой ( $360 \leq i \leq 402$  и  $788 \leq i \leq 927$ ) химер, разделенных областями когерентной динамики. Характер наблюдаемых пространственно-временных структур иллюстрируется и подтверждается пространственно-временным профилем, приведенным на рисунке 4.10,б в виде совокупности 50 последних мгновенных пространственных профилей динамики ансамбля (1.10). Как видно из рисунка 4.10,б, осцилляторы, принадлежащие некогерентным кластерам фазовой химеры, характеризуются периодической во времени динамикой и случайным рас-

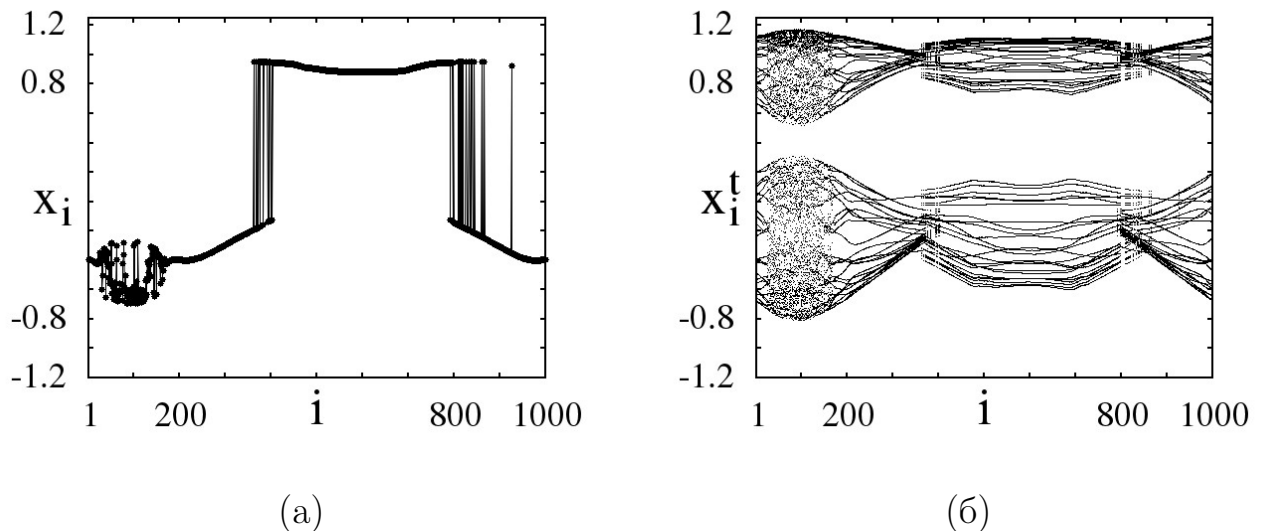


Рисунок 4.10. Мгновенный (в момент времени  $t = 5 \times 10^4$ ) (а) и пространственно-временной (б) профили амплитуд  $x_i$  элементов ансамбля (1.10). Параметры  $\sigma_0 = 0.282$ ,  $D = 0$ ,  $r = 0.32$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$

пределением фазы колебаний друг относительно друга. Кластер амплитудной химеры включает осцилляторы ансамбля, демонстрирующие высокую степень хаотичности колебаний во времени.

### 4.3.2 Индуцированная шумом химера уединенных состояний

В присутствии внешнего шумового возмущения в ансамбле (1.10) устанавливаются пространственно-временные режимы, которые могут достаточно сильно отличаться от структуры, наблюдающейся в системе в отсутствие шума (рисунок 4.10). Данное обстоятельство вполне очевидно и понятно и объясняется высокой степенью мультистабильности, присущей индивидуальным элементам ансамбля (1.10). Добавление источника шума может оказывать такое же сильное влияние на динамику рассматриваемого ансамбля, как и вариация начальных условий.

В разделе 4.2 было показано, что реализация режимов уединенных состояний и химеры уединенных состояний в ансамбле нелокально связанных отображений Эно наблюдалась только в случае взаимодействия с кольцом нелокально связанных отображений Лози. Однако представляется довольно интересным исследовать возможность индуцирования внешним шумом указанных пространственно-временных режимов в изолированном кольце отображений Эно (1.10). С этой целью, как упомянуто выше (раздел 4.3.1), источник внешнего шума добавляется мультипликативно в коэффициент нелокальной связи:  $\sigma = \sigma_0(1 + \sqrt{2D}\xi^t)$ .

Численные расчеты показывают, что при определенных значениях интенсивности шума  $D$  в ансамбле (1.10) могут реализовываться режимы как отдельных уединенных состояний, так и химеры уединенных состояний. Результаты

исследований приведены на рисунке 4.11 для двух различных значений интенсивности мультипликативного шума.

Как видно из рисунка 4.11,а, при наличии шумового возмущения небольшой интенсивности  $D = 2 \times 10^{-4}$  часть элементов ансамбля (1.10) в интервале  $490 \leq i \leq 840$  переходит в режим уединенных состояний, которые сосуществуют с 6-ю некогерентными кластерами фазовых химер ( $1 \leq i \leq 30$ ,  $100 \leq i \leq 130$ ,  $180 \leq i \leq 320$ ,  $400 \leq i \leq 450$ ,  $610 \leq i \leq 640$ ,  $880 \leq i \leq 900$ ). При увеличении интенсивности шума,  $D = 8.15 \times 10^{-4}$ , в интервале элементов  $705 \leq i \leq 845$  ансамбля отображений Эно реализуется химера уединенных состояний (рисунок 4.11,б), сосуществующая с некогерентными кластерами амплитудной ( $90 \leq i \leq 290$ ) и фазовых химер ( $450 \leq i \leq 550$ ,  $890 \leq i \leq 900$ ). Из рисунка 4.11,б видно, что некогерентный кластер с уединенными состояниями (химера уединенных состояний) формируется в области когерентности, которая находится между двумя фазовыми химерами.

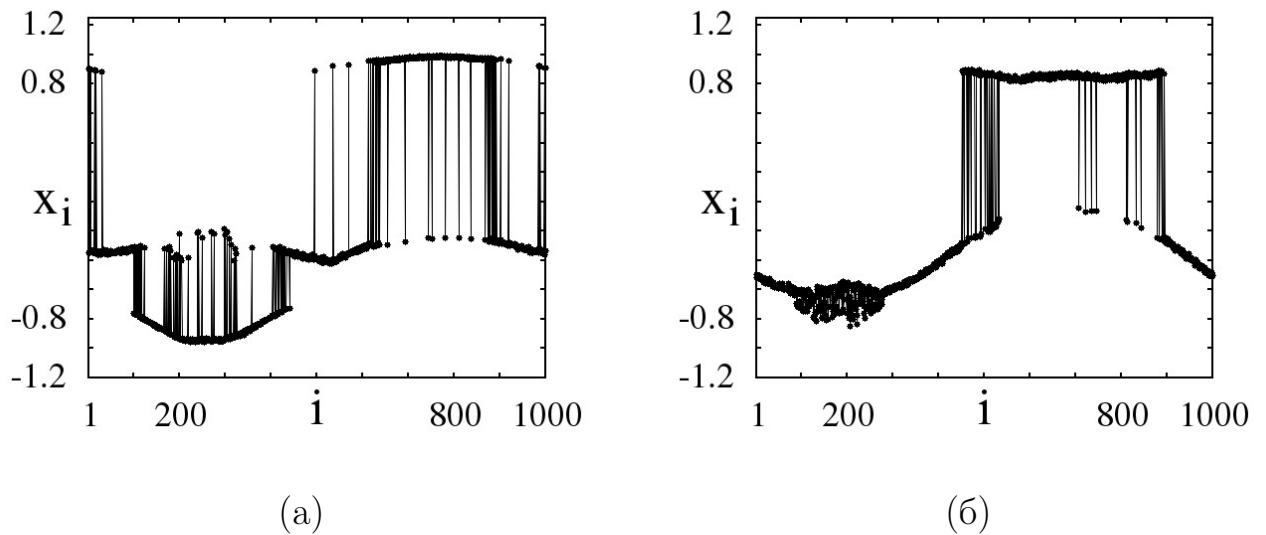


Рисунок 4.11. Мгновенные пространственные профили динамики ансамбля (1.10) в момент времени  $t = 5 \times 10^4$ . (а) Режим уединенных состояний (в интервале  $490 \leq i \leq 840$ ) при  $D = 2 \times 10^{-4}$  и (б) химера уединенных состояний (в интервале  $705 \leq i \leq 845$ ) при  $D = 8.15 \times 10^{-4}$ . Параметры:

$$\sigma_0 = 0.282, r = 0.32, \alpha = 1.4, \beta = 0.3$$



Таким образом, результаты, представленные на рисунке 4.11, свидетельствуют о том, что в ансамбле отображений Эно (1.10) мультипликативный шум в зависимости от интенсивности  $D$  индуцирует переход к режимам уединенных состояний (рисунок 4.11,а) и возникновение химеры уединенных состояний (рисунок 4.11,б). Отметим, что указанные режимы в изолированном кольце нелокально связанных отображений Эно (1.10) наблюдаются впервые.

### 4.3.3 Режим бистабильности в ансамбле отображений Эно в присутствии шума

Установленный в предыдущем разделе эффект индуцированных мультипликативным шумом переходов в режим уединенных состояний (рисунок 4.11,а) и химеры уединенных состояний (рисунок 4.11,б) явно отражает наличие мултистабильности в системе (1.9), которое обусловлено как свойством негиперболичности отображения Эно, так и влиянием нелокальной связи (второе слагаемое в 1-м уравнении ансамбля (1.10)). Под действием шумового возмущения фазовые траектории пересекают сепаратрису, разделяющую области притяжения различных аттракторов. В итоге часть осцилляторов ансамбля оказывается на одном аттракторе, а часть — на другом, о чем свидетельствуют результаты, представленные на рисунке 4.11. После попадания на один из двух аттракторов, фазовая траектория остается на нем и покинуть его, то есть возвратиться или переключиться на другой аттрактор, становится возможным только при наличии шума довольно большой интенсивности.

Здесь и далее под «аттракторами» индивидуальных осцилляторов понимаются различные области на фазовой плоскости  $(x_k, y_k)$  индивидуальных (парциальных) осцилляторов, к которым стремятся траектории в соответствующей проекции. На самом деле в многомерном фазовом пространстве (размерности

$2N$ , где  $N = 1000$ ) каждому установившемуся режиму соответствует свой единый многомерный аттрактор, а фазовые плоскости  $(x_k, y_k)$  различных элементов отражают его проекции. Соответственно, «бассейн притяжения» аттрактора для  $k$ -го осциллятора также понимается как двумерная проекция бассейна притяжения единого многомерного аттрактора системы на плоскость переменных  $(x_k, y_k)$ . Такие аттракторы и их бассейны притяжения можно назвать условными.

Построим численно фазовые портреты реализуемых аттракторов и их бассейны притяжения на плоскости переменных  $(x_k, y_k)$  для  $k$ -го осциллятора, который находится в режиме уединенного состояния и принадлежит химере уединенных состояний (рисунок 4.11,б). Для этого вначале необходимо убедиться в том, что пространственно-временной режим, который реализуется в ансамбле (1.10), является установившимся. Соответствующая пространственно-временная структура фиксируется через  $t = 5 \times 10^4$  итераций (см. рисунок 4.11,б). Затем выбирается  $k$ -й осциллятор, для которого будут построены фазовые портреты аттракторов и их бассейны притяжения. Если проследить за временной динамикой выбранного осциллятора на временах  $t > 5 \times 10^4$ , то можно построить фазовый портрет аттрактора, соответствующий режиму уединенного состояния. Если изменить значения координат выбранного осциллятора  $x_k$  и  $y_k$  в момент  $t = 5 \times 10^4$  на величины, отвечающие соседней когерентной области в пространстве ансамбля (см. рисунок 4.11,б), то в этом случае поведение осциллятора во времени совпадет с динамикой когерентных осцилляторов, и в результате фазовая траектория  $k$ -го осциллятора будет принадлежать другому аттрактору.

На рисунке 4.12,а приведены фазовые портреты аттракторов для осциллятора  $k = 721$ , полученные для различных начальных условий  $x_k^0$  и  $y_k^0$ . Как видно из рисунка 4.12,а, сосуществуют два различных аттрактора, изображенные черным (аттрактор 1,а,б) и серым (аттрактор 2,а,б) цветами. Первый аттрактор (1,а,б) соответствует режиму уединенного состояния, в котором находится

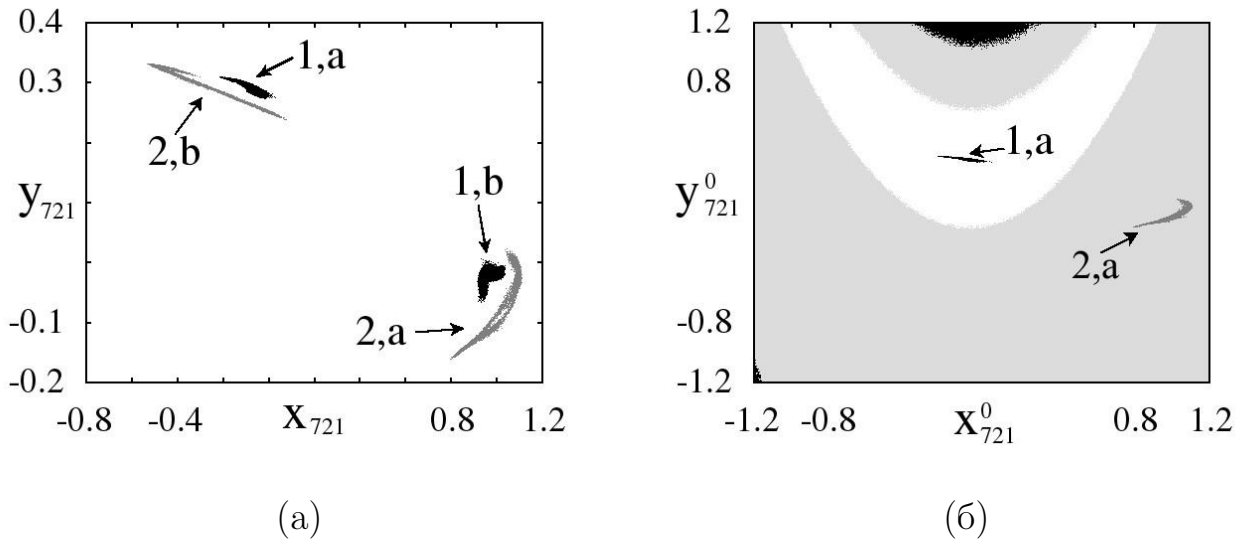


Рисунок 4.12. (а) Фазовые портреты аттракторов для осциллятора  $k = 721$  ансамбля (1.10) на плоскости переменных  $(x_{721}, y_{721})$ . Аттрактор 1,a,b (черные точки) соответствует режиму уединенного состояния, аттрактор 2,a,b (серые точки) – области когерентности. (б) Бассейны притяжения аттракторов 1 и 2 (белая область для ленты 1,a и серая область для ленты 2,a). Траектории уходят на бесконечность из области черного цвета. Параметры:  $\sigma_0 = 0.282$ ,

$$D = 8.15 \times 10^{-4}, r = 0.32, \alpha = 1.4, \beta = 0.3$$

осциллятор  $k = 721$ , как видно на мгновенном профиле, представленном на рисунке 4.11,б. Второй аттрактор (2,a,b) соответствует динамике 721-го осциллятора в когерентной области. После изменения значения координат данного осциллятора в момент времени  $t = 5 \times 10^4$  он больше не находится в режиме уединенного состояния, а начинает совершать колебания, соответствующие динамике осцилляторов в когерентном кластере. Здесь и далее аттрактор 1,a,b соответствует режиму уединенного состояния, а аттрактор 2,a,b – колебаниям, отвечающим когерентному состоянию. Каждый из аттракторов состоит из двух притягивающих подмножеств, обозначенных буквами а и б на рисунке 4.12,а, между которыми фазовая траектория регулярно (периодически) переключается через одну итерацию.

Эффекты переключений между лентами «а» и «б» аттракторов 1 и 2 иллюстрирует рисунок 4.13, на котором приведены временные зависимости для 721-го осциллятора, соответствующие различным режимам динамики. Серым цветом показаны колебания, отвечающие аттрактору 1, черным цветом — аттрактору 2. Видно, что колебания на аттракторах 1 и 2 сдвинуты во времени на одну итерацию и содержат регулярную компоненту периода 2. При этом четные номера итераций соответствуют лентам «а», а нечетные номера — лентам «б». В связи с тем, что начальные условия для выбранного осциллятора изменяются на четной итерации, то бассейны притяжения будут построены для лент 1,а и 2,а сосуществующих аттракторов.

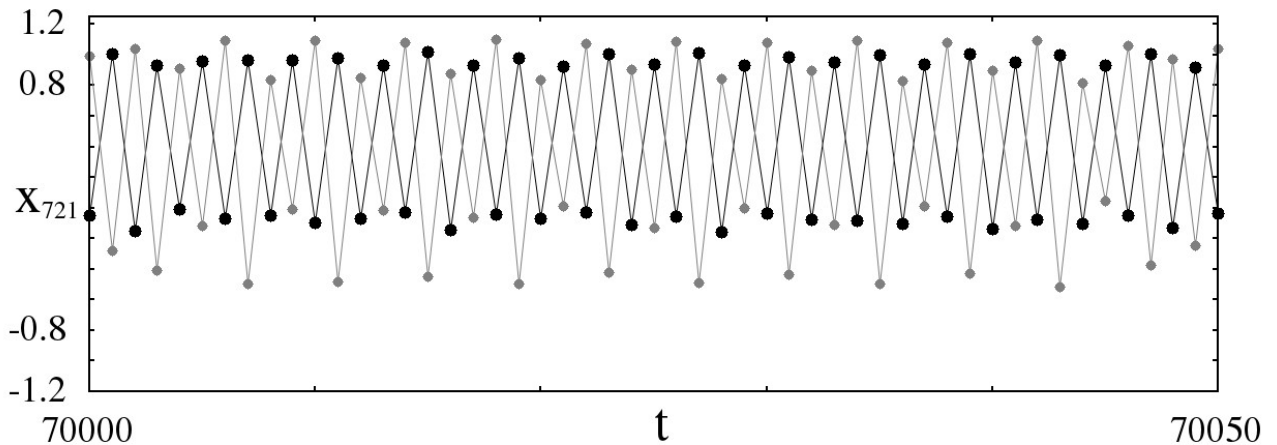


Рисунок 4.13. Временные реализации  $x_{721}(t)$ , отвечающие колебаниям на аттракторе 1,а,б (серые точки) и на аттракторе 2,а,б (черные точки). Четные итерации соответствуют лентам «а», нечетные итерации — лентам «б»

Бассейны притяжения аттракторов для выбранного  $k$ -го осциллятора строились по следующему алгоритму. После выхода исследуемой системы на установившийся режим (после времени установления  $t = 5 \times 10^4$ ), для  $k$ -го осциллятора задавались новые начальные условия из интервалов изменения переменных  $x$  и  $y$ :  $x_k^{50000} = x_k^0$ ,  $y_k^{50000} = y_k^0$ . Все остальные осцилляторы оставались в неизменном состоянии. Далее система итерировалась в течение  $t = 2 \times 10^4$ , после чего определялось состояние  $k$ -го осциллятора, то есть какому аттрактору

принадлежит его траектория. На фазовой плоскости  $(x_k, y_k)$  соответствующая начальная точка  $(x_k^0, y_k^0)$  отмечалась некоторым цветом, заранее выбранным для бассейна притяжения данного аттрактора. После этого процедура повторялась при измененных начальных условиях  $k$ -го осциллятора, так что в конечном итоге выполнялось полное «сканирование» плоскости переменных.

Соответствующие бассейны притяжения аттракторов для 721-го осциллятора приведены на рисунке 4.12,б. Область белого цвета соответствует бассейну притяжения аттрактора 1 (ленты 1,а), область серого цвета иллюстрирует бассейн притяжения аттрактора 2 (ленты 2,а). Из приведенного рисунка видно, что бассейн притяжения аттрактора для режима уединенного состояния значительно уже и меньше по сравнению с областью притяжения аттрактора для когерентного режима. Следовательно, при задании случайных начальных условий только очень небольшое число осцилляторов ансамбля (1.9) могут в дальнейшем перейти в режим уединенных состояний (4.11,б). Для бóльшей же части осцилляторов начальные условия принадлежат бассейну притяжения аттрактора 2, отвечающему когерентной динамике (рисунок 4.12,б). Если же для этих элементов задать начальные условия из бассейна притяжения аттрактора, соответствующему режиму уединенных состояний, то уже бóльшая часть пространства ансамбля будет занята осцилляторами в режиме уединенных состояний.

Приведенные численные результаты (рисунок 4.12) ясно отражают наличие режима бистабильности в индивидуальных осцилляторах ансамбля (1.10), который возникает в результате взаимодействия элементов, и, следовательно, свидетельствуют о возможности реализации режима уединенных состояний и химеры уединенных состояний в зависимости от задания начальных условий.

### 4.3.4 Бассейны притяжения аттракторов индивидуальных осцилляторов ансамбля в отсутствие шума

Вернемся к анализу динамики ансамбля (1.10) в отсутствие шума, положив  $D = 0$ . Проведенные численные исследования показали, что рождение режимов бистабильности (рисунок 4.12) не является следствием воздействия шума, а обусловлено влиянием нелокальной связи (второе слагаемое в первом уравнении системы (1.10)). Как было показано в первой главе настоящей работы (раздел 1.4), в ансамбле нелокально связанных отображений Эно в зависимости от значений параметров нелокальной связи могут возникать три различных пространственно-временных режима с химерными состояниями. Наряду с когерентными областями в пространстве ансамбля могут наблюдаться только некогерентные кластеры фазовой химеры, либо только амплитудная химера, либо режим сосуществования фазовой и амплитудной химер. В силу того, что режим только с амплитудной химерой встречается довольно редко, он исключается из рассмотрения.

Вначале рассмотрим случай реализации в кольце (1.10) при  $D = 0$  пространственно-временного режима только фазовой химеры. Соответствующий мгновенный профиль амплитуд элементов ансамбля представлен на рисунке 4.14,а. Фазовую химеру образуют два некогерентных кластера, включающие элементы  $290 \leq i \leq 350$  и  $786 \leq i \leq 844$ . Выберем некоторый осциллятор на границе кластера фазовой химеры, например,  $i = 290$ , и проанализируем его динамику во времени для различных начальных условий. В результате наблюдается режим сосуществования двух аттракторов, фазовые портреты которых на плоскости переменных  $(x_{290}, y_{290})$  приведены на рисунке 4.14,б. Как видно из данного рисунка, аттрактор 1,а,б в виде двухтактной ленты является слабо хаотическим, тогда как аттрактор 2,а,б представляет собой цикл периода 8. Как было установлено ранее (см. раздел 4.3.3), аттрактор 1,а,б соответствует

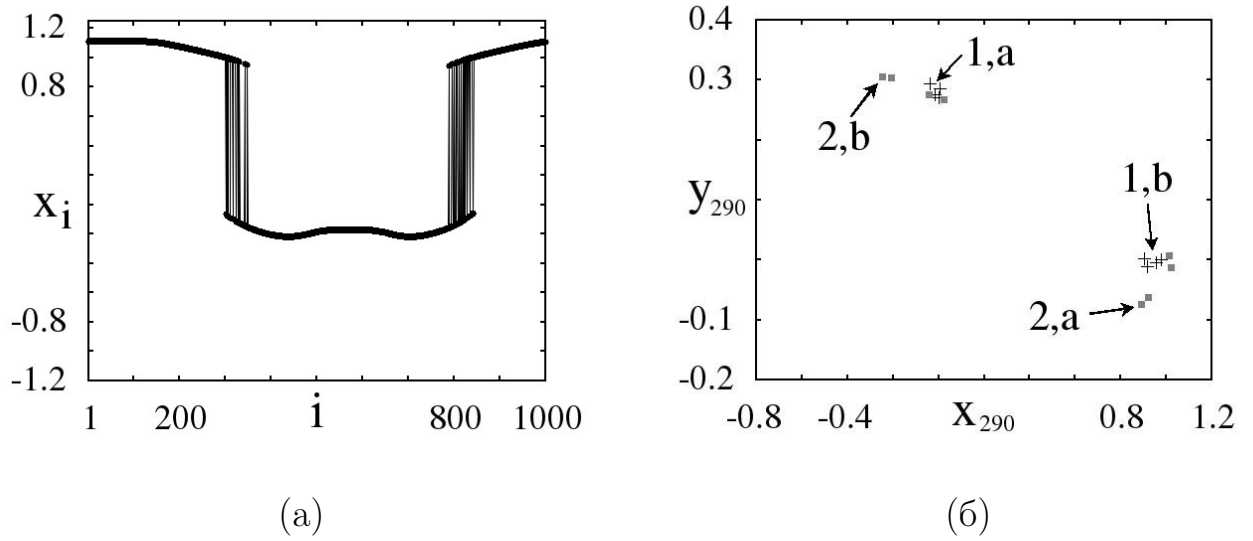


Рисунок 4.14. (а) Мгновенный профиль динамики ансамбля (1.10), иллюстрирующий режим фазовой химеры (области  $290 \leq i \leq 350$  и  $786 \leq i \leq 844$ ), (б) фазовые портреты сосуществующих аттракторов для осциллятора  $i = 290$  на плоскости переменных  $(x_{290}, y_{290})$ . Аттрактор 1,a,b (черные плюсы) соответствует режиму уединенного состояния, аттрактор 2,a,b (серые квадраты) — колебаниям в когерентном режиме. (в) Бассейны притяжения подмножеств «а» аттрактора 1 (белая область) и аттрактора 2 (черная область) для осциллятора  $i = 290$ . Параметры:  $\sigma_0 = 0.346$ ,  $D = 0$ ,  $r = 0.32$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$

режиму уединенного состояния, а аттрактор 2,а,b — колебаниям, отвечающим когерентному состоянию. Бассейны притяжения для подмножеств «а» сосуществующих аттракторов иллюстрирует рисунок 4.14,в, на котором область белого цвета соответствует бассейну аттрактора 1,а, а черная область — бассейну аттрактора 2,а. Как видно из рисунка 4.14,в, область притяжения аттрактора, отвечающего режиму уединенных состояний, имеет подковообразную форму и подобна аналогичной области, показанной на рисунке 4.12,б. Однако в отличие от последней, бассейн притяжения аттрактора 1,а для осциллятора  $i = 290$  намного шире (рисунок 4.14,в).

Как показали расчеты для ряда других осцилляторов ансамбля (1.10), при удалении рассматриваемого элемента от кластеров фазовой химеры размер бассейна притяжения аттрактора 1, соответствующего режиму уединенного состояния, существенно меняется [354]. Данный эффект проиллюстрирован на рисунке 4.15, на котором приведены бассейны притяжения сосуществующих аттракторов для трех выбранных осцилляторов ансамбля, расположенных на различном расстоянии от границы кластера фазовой химеры. Из приведенных рисунков следует, что чем дальше находится осциллятор от границы кластера некогерентности, тем уже становится бассейн притяжения аттрактора, характеризующего динамику в режиме уединенного состояния, (рисунок 4.15,а,б). В случае, когда расстояние между осциллятором и границей некогерентного кластера  $\Delta i \geq 40$ , бассейн притяжения аттрактора 1 полностью исчезает (рисунок 4.15,в). Данный результат свидетельствует о том, что осцилляторы, для которых  $\Delta i > 40$ , уже не характеризуются свойством бистабильности и, следовательно, никогда не смогут перейти в режим уединенного состояния. Для них характерна синхронная хаотическая динамика, соответствующая областям когерентности ансамбля и отвечающая аттрактору 2 (рисунок 4.14,б).

Для значений параметров  $\sigma_0$  и  $r$ , близких к рассматриваемым, установленное критическое значение  $\Delta i \simeq 40$  остается практически неизменным либо меняется в очень малых пределах.



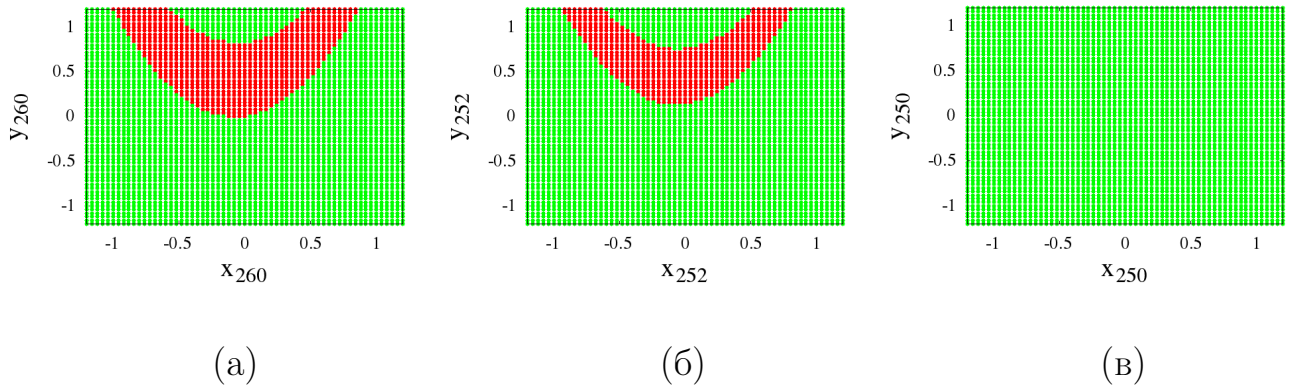
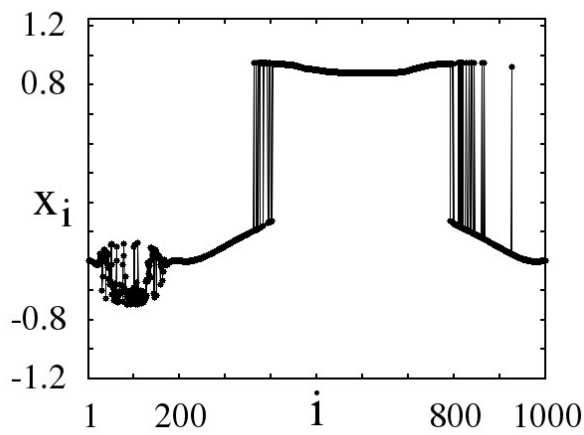


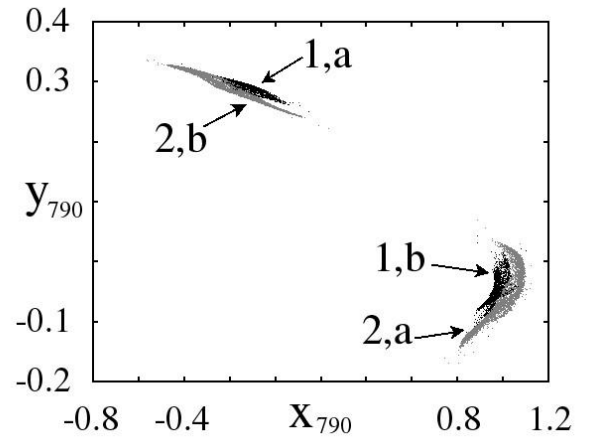
Рисунок 4.15. Изменения размеров бассейнов притяжения для осцилляторов ансамбля (1.10) при удалении от границы кластера фазовой химеры: (а)  $i = 260$ , (б)  $i = 252$ , (в)  $i = 250$ . Параметры:  $\sigma_0 = 0.346$ ,  $D = 0$ ,  $r = 0.32$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$

Перейдем теперь к пространственно-временному режиму, когда в исследуемом ансамбле (1.10) сосуществуют амплитудная и фазовая химеры. В этом случае мгновенный профиль динамики ансамбля имеет вид, представленный на рисунке 4.16,а. Некогерентный кластер амплитудной химеры включает элементы  $20 \leq i \leq 180$ , фазовая химера состоит из двух областей некогерентности с элементами  $360 \leq i \leq 405$  и  $790 \leq i \leq 870$ . Как и в предыдущем случае, индивидуальные элементы ансамбля по-прежнему характеризуются сосуществованием двух притягивающих множеств, отвечающих различным состояниям. В качестве примера на рисунке 4.16,б приведены фазовые портреты двух сосуществующих хаотических аттракторов для осциллятора  $i = 790$ , принадлежащего кластеру фазовой химеры. Аттрактор 1,а,б соответствует режиму уединенного состояния, аттрактор 2,а,б — режиму когерентной динамики.

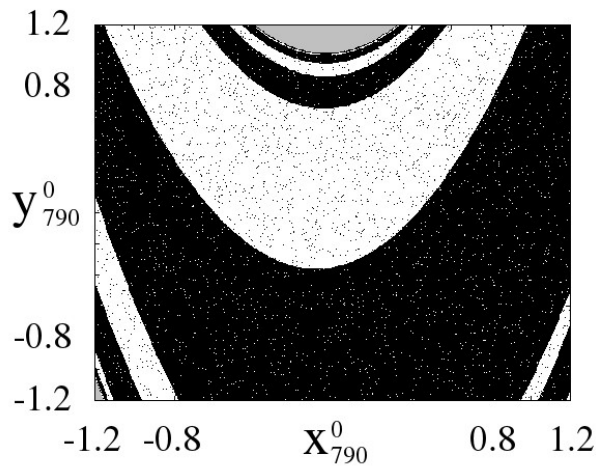
В рассматриваемом пространственно-временном режиме ансамбля (1.10) бассейны притяжения сосуществующих аттракторов могут быть двух видов. Первый вид качественно эквивалентен картине, показанной на рисунке 4.14,в. Однако чаще всего бассейны притяжения имеют структуру, представленную на рисунке 4.16,в для 790-го осциллятора на плоскости переменных  $(x_{790}, y_{790})$ .



(a)



(б)



(в)

Рисунок 4.16. (а) Мгновенный профиль динамики ансамбля (1.10), иллюстрирующий режим сосуществования амплитудной ( $20 \leq i \leq 180$ ) и фазовой химер ( $360 \leq i \leq 405$  и  $790 \leq i \leq 870$ ), (б) фазовые портреты сосуществующих аттракторов для осциллятора  $i = 790$  на плоскости переменных  $(x_{790}, y_{790})$ . Аттрактор 1,a,b (черные точки) соответствует режиму уединенного состояния, аттрактор 2,a,b (серые точки) – когерентному режиму. (в) Бассейны притяжения подмножеств «а» аттрактора 1 (белая область) и аттрактора 2 (черная область) для осциллятора  $i = 790$ .

Параметры:  $\sigma_0 = 0.282$ ,  $D = 0$ ,  $r = 0.32$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$

Белая область соответствует бассейну притяжения подмножества «а» аттрактора 1, характеризующего режим уединенного состояния, область черного цвета обозначает бассейн притяжения аттрактора 2,а, отвечающего когерентным колебаниям. С качественной точки зрения форма бассейнов притяжения осталась практически прежней в сравнении с ранее рассмотренными случаями. Тем не менее, имеет место весьма существенное отличие. Как ясно видно из рисунка 4.14,в, в бассейнах притяжения обоих аттракторов появились многочисленные вкрапления в виде очень малых областей, при задании начальных условий из которых траектория может попасть на другой аттрактор, что приведет к смене режима динамики рассматриваемого осциллятора. Подобная неоднородная структура областей притяжения аттракторов отражает явление «изрешечивания» (в английской терминологии — «*riddling*») [364, 436–440]. В этом случае вероятность появления уединенных состояний и химеры уединенных состояний значительно возрастает в силу задания случайно распределенных начальных условий. Как было недавно показано [441], наличие изрешеченного бассейна притяжения и его границы в ансамбле осцилляторов, демонстрирующем химерное состояние, является дилеммой химеры.

Отметим, что по аналогии с пространственно-временной структурой фазовой химеры, в данном случае также наблюдается прямая зависимость размера и существования бассейна притяжения аттрактора 1 от локализации осциллятора в пространстве ансамбля относительно некогерентных кластеров фазовой химеры. Как было показано в работе [354], при удалении выбранного осциллятора от границ кластеров фазовой химеры эффект риддлинга (изрешечивания) бассейна притяжения аттрактора для режима уединенного состояния становится все более выраженным и в конечном итоге бассейн полностью заполняется (замещается) точками и/или областями бассейна притяжения аттрактора 2 для когерентного режима.

Проведенный численный анализ показал, что уединенные состояния и химера уединенных состояний могут быть реализованы в изолированном ансам-

бле нелокально связанных отображений Эно (1.10) при изменении начальных условий, то есть в том случае, если начальные условия для индивидуальных осцилляторов ансамбля принадлежат небольшой области притяжения другого аттрактора, который соответствует другой области пространственного профиля ансамбля. В присутствии шумового воздействия на элементы ансамбля (1.10) попадание начальных условий в бассейн притяжения второго аттрактора становится более вероятным и соответственно можно чаще наблюдать возникновение уединенных состояний и химеры уединенных состояний.

#### **4.4 Сценарий рождения уединенных состояний в ансамбле нелокально связанных отображений Лози**

Как было показано во 2-й главе работы, самым типичным и характерным пространственно-временным режимом динамики в ансамбле нелокально связанных отображений Лози (2.1) является режим уединенных состояний (рисунок 2.3), который возникает при переходе от когерентности к некогерентности в данном ансамбле при уменьшении силы нелокальной связи  $\sigma$ . Химерных состояний при этом обнаружено не было. В работе [418] был вскрыт и детально проанализирован механизм возникновения уединенных состояний в ансамбле отображений Лози, заключающийся в появлении бистабильности в индивидуальных осцилляторах. Для сравнения численных результатов, представленных в разделах 4.2 и 4.3 настоящей работы, с данными, полученными в работе [418], и обоснования и установления общности причин и сценария возникновения режимов уединенных состояний в ансамблях отображений Эно и Лози, приведем краткое описание и ряд иллюстраций результатов для ансамбля нелокально связанных отображений Лози [354, 418].

В силу наличия нелокальной связи каждый отдельный осциллятор ансамбля отображений Лози подвергается воздействию со стороны конечного числа соседей, и динамика индивидуальных элементов может претерпевать существенные изменения за счет влияния конечного числа соседних осцилляторов. В результате, при изменении значения силы связи  $\sigma$  появляются два различных состояния, которые сосуществуют и для каждого из которых характерно свое притягивающее множество в фазовом пространстве системы.

Пример мгновенного пространственного распределения амплитуд элементов ансамбля (2.1) представлен на рисунке 4.17,а и иллюстрирует режим реализации конечного числа уединенных состояний в ансамбле в виде отдельных выбросов амплитуд колебаний элементов. Соответствующий пространственно-временной профиль приведен на рисунке 4.17,б и отражает наличие слабо хаотической динамики во времени для элементов в когерентной области и практически периодического поведения (цикл периода 4) для осцилляторов в режиме уединенного состояния. Таким образом, можно заключить, что индивидуальные осцилляторы ансамбля (2.1) приобретают свойство бистабильности, обусловленное наличием нелокальной связи. Данный факт подтверждается сосуществованием двух аттракторов в фазовом пространстве осцилляторов ансамбля. Так на рисунке 4.17,в приведены фазовые портреты двух аттракторов для произвольно выбранного осциллятора с номером  $i = 500$  при изменении начальных условий. Аттрактор 1,а,б соответствует режиму уединенного состояния и представляет собой цикл периода 4. Аттрактор 2,а,б отвечает колебаниям в когерентной области пространства ансамбля и является 4-ленточным хаотическим множеством.

Соответствующие бассейны притяжения сосуществующих аттракторов показаны на рисунке 4.17,г. Белая область представляет собой бассейн притяжения аттрактора 2,а,б, который является собственно аттрактором Лози, реализующимся в изолированном отображении Лози (2.2). Область серого цвета соответствует бассейну притяжения подмножества «а» аттрактора 1.

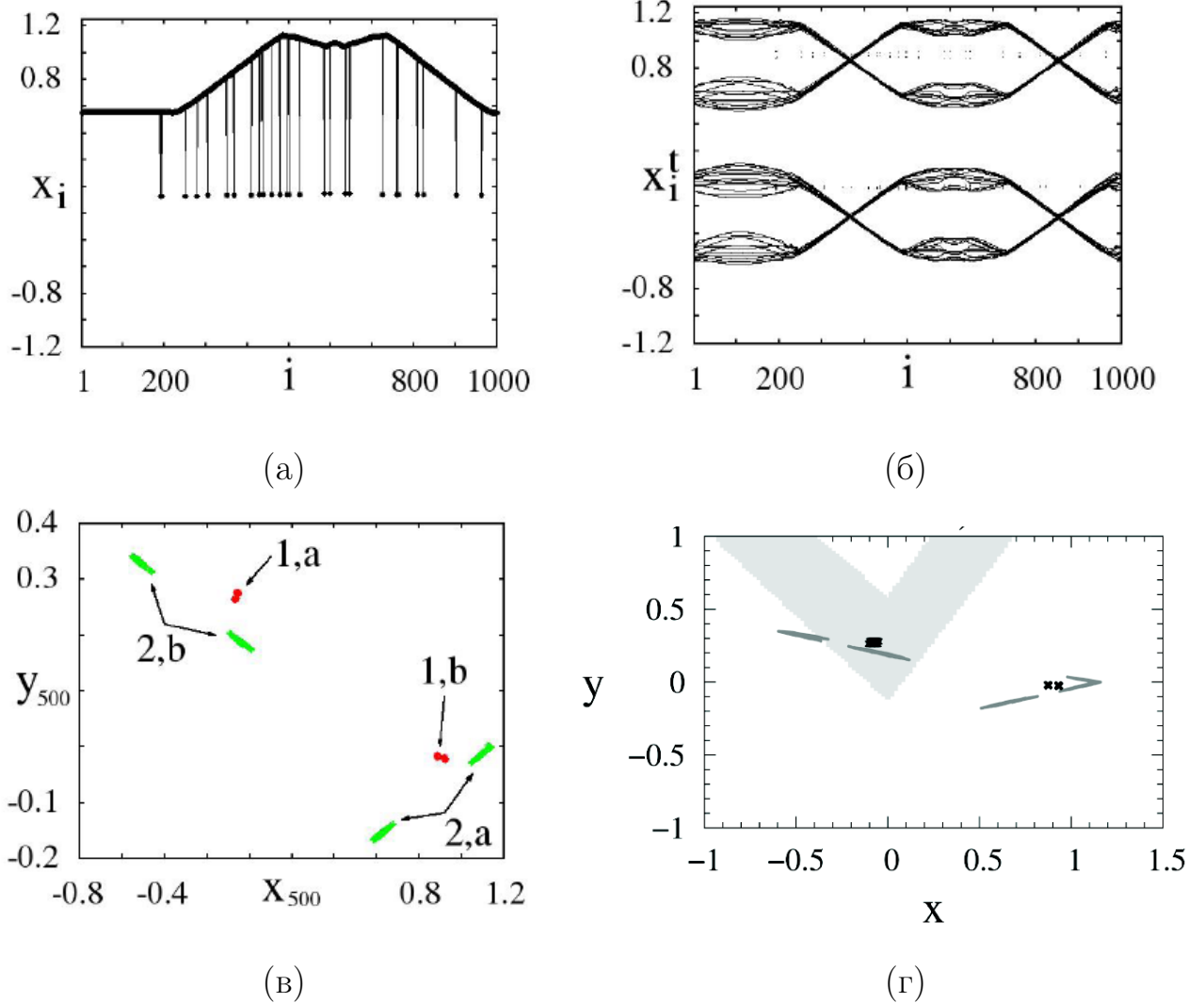


Рисунок 4.17. (а) Мгновенный профиль состояний ансамбля отображений Лози (2.2) при  $t = 5 \times 10^4$ , (б) пространственно-временной профиль (последние 50 профилей), (в) фазовые портреты сосуществующих аттракторов для осциллятора  $i = 500$  (аттрактор 1,a,b (красный цвет) соответствует режиму уединенных состояний, аттрактор 2,a,b (зеленый цвет) – колебаниям в когерентной области), (г) бассейны притяжения указанных аттракторов (белая область – аттрактора Лози 2,a,b, серая область – аттрактора 1,a).

Параметры:  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.19$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$

Как показали проведенные расчеты, для данных ансамблей размер области притяжения аттрактора в режиме уединенного состояния определяется различными параметрами. В разделе 4.3.4 было установлено, что для ансамбля отображений Эно в режиме фазовой химеры размер области притяжения аттрактора для уединенных состояний сильно зависит от пространственного расположения выбранного осциллятора относительно границ некогерентного кластера фазовой химеры и постепенно уменьшается, а в дальнейшем и полностью исчезает при определенном (критическом) удалении от границы кластера (рисунок 4.15). В случае ансамбля отображений Лози основными параметрами, влияющими на размер бассейна притяжения аттрактора для уединенных состояний, являются сила и радиус нелокальной связи. На рисунке 4.18 показано, как изменяется размер бассейна притяжения аттрактора  $1,а$  для выбранного осциллятора  $i = 400$  при уменьшении значения силы связи  $\sigma$ . Из представленных иллюстраций хорошо видно, что чем меньше сила связи  $\sigma$ , тем больше становится область притяжения аттрактора для режима уединенных состояний, а, следовательно, все больше осцилляторов имеют возможность перейти в режим уединенных состояний. Данный факт полностью объясняет увеличение числа уединенных состояний в ансамбле (2.1) при уменьшении  $\sigma$  (рисунки 2.3 и 2.5).

Таким образом, основной причиной и механизмом появления уединенных состояний и химеры уединенных состояний в ансамблях нелокально связанных отображений Лози и Эно является возникновение бистабильной динамики индивидуальных осцилляторов ансамблей в силу наличия нелокальной связи. Данное свойство проявляется в сосуществовании двух предельных множеств в пространстве состояний индивидуального осциллятора, одно из которых соответствует режиму уединенных состояний, а другое — синхронным или когерентным колебаниям.

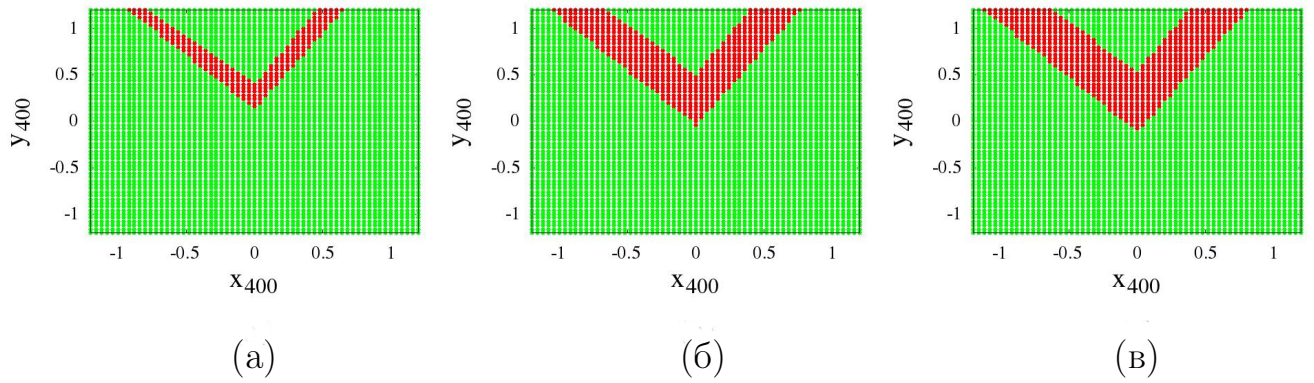


Рисунок 4.18. Изменения бассейнов притяжения аттракторов для осциллятора  $i = 400$  ансамбля (2.1) при уменьшении значения силы связи  $\sigma$ : (а) 0.222, (б) 0.2, (в) 0.189. Бассейн притяжения аттрактора для режима уединенных состояния показан красным цветом, область зеленого цвета соответствует аттрактору для когерентного режима. Параметры:  $r = 0.19$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$

## 4.5 Уединенные состояния и химеры уединенных состояний в ансамблях моделей нейронов

Учитывая, что полученные и описанные выше результаты не являются аналитически строгими, сформулированное утверждение и общность выявленного механизма нуждаются в подтверждении на примерах реализации режимов уединенных состояний и химеры уединенных состояний в ансамблях из других элементов.

В данном разделе приводятся результаты численного исследования динамики одномерных ансамблей нелокально связанных отображений, моделирующих нейронную активность (отображений Некоркина [433]), и осцилляторов ФитцХью-Нагумо [434]. Исследования показали, что в данных ансамблях могут возникать режимы уединенных состояний и химеры уединенных состояний [340, 352] и сценарий их рождения полностью соответствует установленному в работах [345, 418] и описанному в предыдущих разделах данной главы.



### 4.5.1 Пространственно-временные структуры в ансамбле нелокально связанных отображений Некоркина

**Динамика отображения Некоркина.** Двумерное отображение, описывающее активность нейрона, было предложено сравнительно недавно В.И. Некоркиным и Л.В. Вдовиным в работе [433] и не столь широко известно и используется в нелинейной динамике. Поэтому, прежде чем перейти к описанию модели ансамбля, ознакомимся кратко с отдельно взятым отображением Некоркина, которое будет использовано в качестве индивидуального осциллятора в ансамбле [172].

Динамика отображения Некоркина описывается следующей системой уравнений [433]:

$$\begin{aligned}x^{t+1} &= x^t + F(x^t) - y^t - \beta H(x^t - d), \\y^{t+1} &= y^t + \varepsilon(x^t - J),\end{aligned}\tag{4.4}$$

где переменная  $x^t$  определяет динамику мембранного потенциала нервной клетки,  $y^t$  — кумулятивный эффект всех ионных токов через мембрану. Функции  $F(x^t)$  и  $H(x^t - d)$  задаются следующими выражениями и условиями:

$$F(x^t) = x^t(x^t - a)(1 - x^t), \quad 0 < a < 1.\tag{4.5}$$

$$H(x^t) = \begin{cases} 1, & x^t > 0, \\ 0, & x^t \leq 0, \end{cases}\tag{4.6}$$

Параметр  $\varepsilon > 0$  в системе (4.4) определяет характерный временной масштаб переменной  $y^t$ , параметр  $J$  контролирует уровень деполяризации мембраны ( $J < d$ ), параметры  $\beta$  и  $d > 0$  соответствуют порогу возбуждения берстовых колебаний,  $t = 1, 2, \dots$  — дискретное время. При  $\beta = 0$  система (4.4) представляет собой дискретный аналог модели ФитцХью-Нагумо. Однако при  $\beta > 0$  за

счет наличия пороговой функции  $H(x^t - d)$  и при соответствующем выборе значений параметров  $d$  и  $\beta$  отображение (4.4) приобретает принципиально новые свойства.

Несмотря на свою простоту, отображение (4.4) может описывать ряд основных режимов активности нейронов при изменении управляющих параметров. Эти режимы включают спайк-берстовые колебания, в том числе хаотические, подпороговые колебания, а также режимы одиночной, периодической и хаотической генерации спайков [433]. Проиллюстрируем некоторые из них.

При определенных значениях параметров системы (4.4), например,  $a = 0.25$ ,  $\beta = 0.018$ ,  $d = 0.26$ ,  $J = 0.15$ ,  $\varepsilon = 0.005$ , наблюдаются переключения между подпороговыми колебаниями и спайками, которые происходят нерегулярно во времени (рисунок 4.19). Фазовый портрет, приведенный на рисунке 4.19,а, имеет вид двухобходного (или двухленточного) хаотического аттрактора и соответствует динамическому режиму, в котором хаотические спайковые колебания возникают на основе подпороговых колебаний. Это ясно следует из временной реализации  $x(t)$ , показанной на рисунке 4.19,б. Расчет спектра ляпуновских характеристических показателей дает значения  $\Lambda_1 = 0.039479$ ,  $\Lambda_2 = -0.279316$ , что в случае двумерных дискретных отображений отвечает режиму строго хаотических колебаний.

Режим берстовых колебаний реализуется в отображении (4.4) при выборе следующих значений параметров системы:  $a = 0.1$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $d = 0.45$ ,  $J = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.001$  и проиллюстрирован на рисунке 4.20. Как и в предыдущем случае, фазовый портрет в виде хаотического аттрактора (рисунок 4.20,а) и временная зависимость  $x(t)$  (рисунок 4.20,б) отражают хаотический режим динамики отображения Некоркина. Этот факт также подтверждается рассчитанными значениями ляпуновских показателей:  $\Lambda_1 = 0.085258$ ,  $\Lambda_2 = -0.132280$ .

В наших исследованиях особое внимание уделяется динамическому режиму отображения (4.4), связанному со спайковыми колебаниями [172]. Этот режим наблюдается, например, для следующих значений параметров:  $a =$

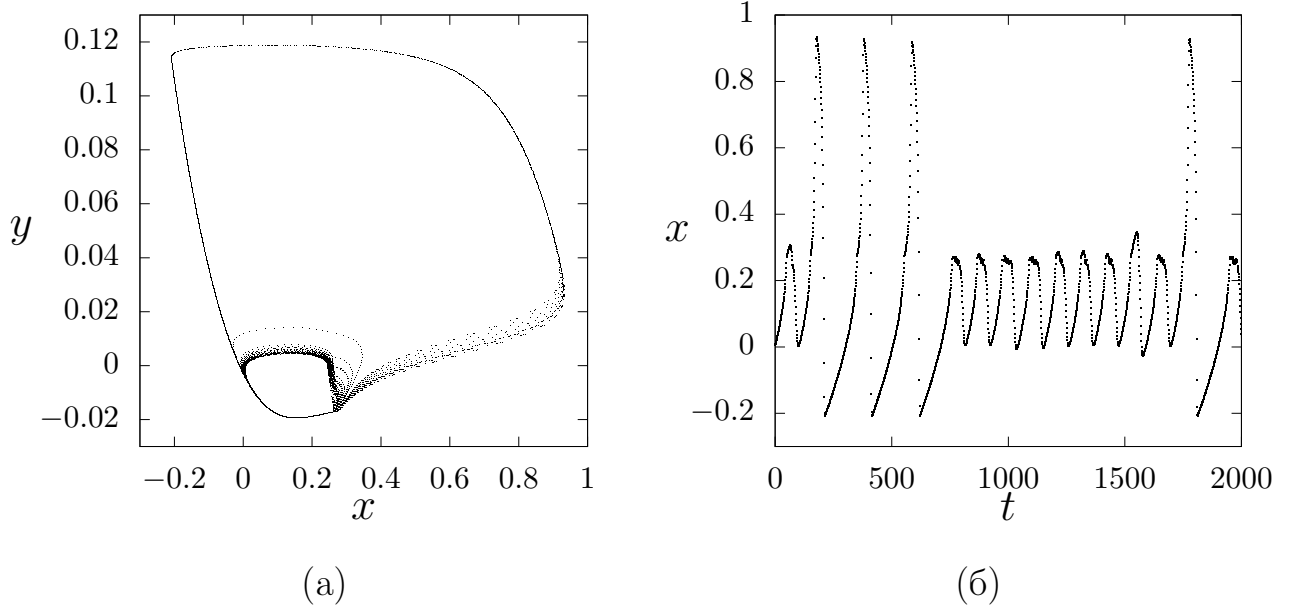


Рисунок 4.19. Фазовый портрет хаотического аттрактора (а) и временная реализация  $x(t)$  (б) для отображения (4.4) при  $a = 0.25$ ,  $\beta = 0.018$ ,  $d = 0.26$ ,  $J = 0.15$ ,  $\varepsilon = 0.005$

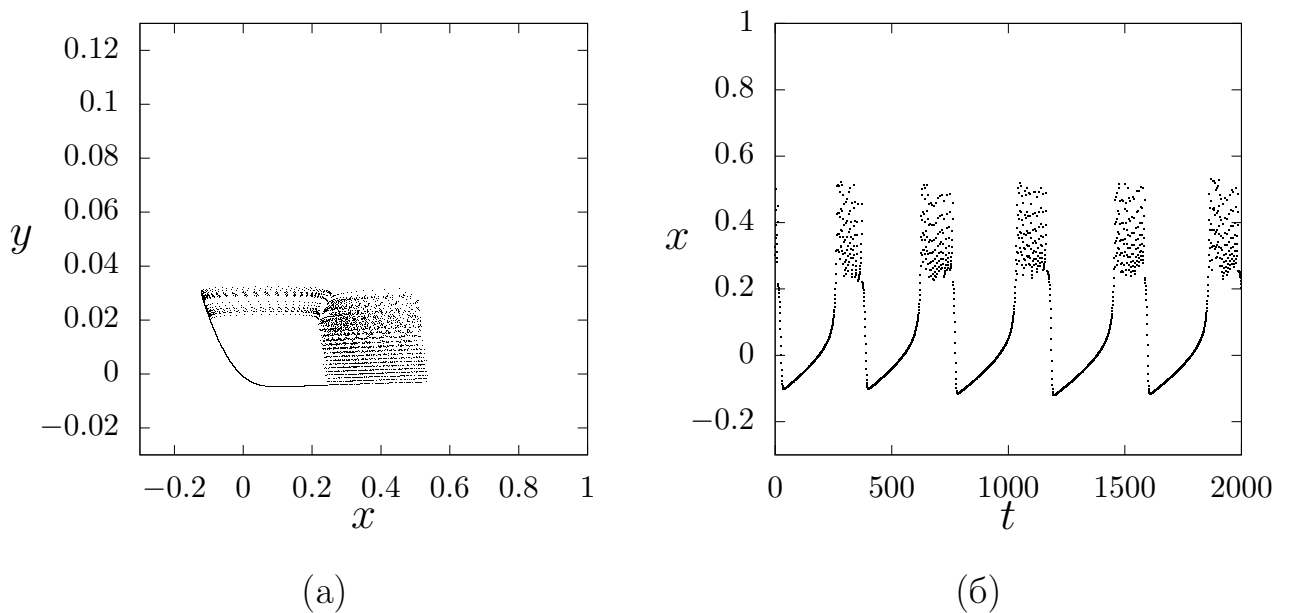
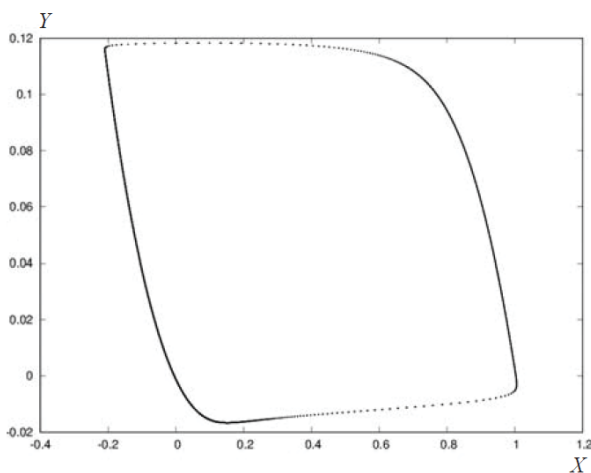
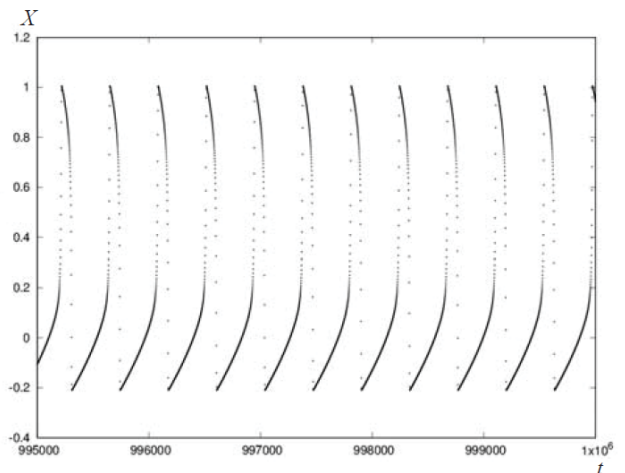


Рисунок 4.20. Фазовый портрет хаотического аттрактора (а) и временная реализация  $x(t)$  (б) для отображения (4.4) при  $a = 0.1$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $d = 0.45$ ,  $J = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.001$

$0.25, \beta = 0.04, d = 0.5, J = 0.15, \varepsilon = 0.002$  и приведен в качестве примера на рисунке 4.21. Фазовый портрет (рисунок 4.21,а) имеет вид замкнутой инвариантной кривой. Значение старшего показателя Ляпунова в этом режиме близко к 0 ( $\Lambda_1 = 0.008746, \Lambda_2 = -0.42327$ ). Таким образом, можно сделать вывод, что динамика отображения (4.4) является квазипериодической. Однако, как видно из рисунка 4.21,б, временная зависимость переменной  $x(t)$  является почти периодической. Расчет числа вращения для инвариантной кривой показывает, что это значение очень мало ( $r = 0.01395$ ). В этом случае смещение траектории на очень малый угол за каждую итерацию приводит к наблюдению почти периодических колебаний, а инвариантная кривая очень похожа на предельный цикл системы с непрерывным временем.



(а)



(б)

Рисунок 4.21. Фазовый портрет хаотического аттрактора (а) и временная реализация  $x(t)$  (б) для отображения (4.4) при  $a = 0.25, \beta = 0.04, d = 0.5, J = 0.15, \varepsilon = 0.002$

**Модель ансамбля нелокально связанных отображений Некоркина.** Уравнения исследуемого ансамбля, в котором в качестве индивидуальных

элементов выбрано отображение Некоркина (4.4), имеют следующий вид [352]:

$$\begin{aligned}x_i^{t+1} &= f(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t, y_j^t) - f(x_i^t, y_i^t)], \\y_i^{t+1} &= g(x_i^t, y_i^t),\end{aligned}\tag{4.7}$$

где функции  $f$  и  $g$  задаются в соответствии с выражениями (4.4)–(4.6).

В ансамбле (4.7)  $x$ ,  $y$  – вещественные динамические переменные,  $i = 1, 2, \dots, N$  – порядковый номер замкнутых в кольцо индивидуальных осцилляторов,  $N = 1000$  – число осцилляторов в кольце,  $t$  – дискретное время.  $\sigma$  – коэффициент или сила нелокальной связи,  $P$  – число соседних осцилляторов слева и справа от  $i$ -го осциллятора.

Для проведения численного анализа динамики ансамбля нелокально связанных отображений Некоркина зафиксируем значения параметров индивидуального элемента:  $a = 0.27$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $d = 0.5$ ,  $J = 0.15$ ,  $\varepsilon = 0.003$ , которые соответствуют режиму спайковых колебаний в отображении Некоркина (4.4) (рисунок 4.21). Значения параметров нелокальной связи выбраны следующими:  $\sigma = 0.04$ ,  $P = 320$ . Для иллюстрации наблюдаемых режимов используются мгновенные профили амплитуд  $x_i$  и пространственно-временные диаграммы динамики ансамбля. Отметим, что расчеты проводились для периодических граничных условий, а начальные условия выбирались случайно распределенными в интервалах  $x_i^0 \in [-0.2, 0.4]$  и  $y_i^0 \in [-0.02, 0.04]$ .

**Режим химеры уединенных состояний.** На рисунке 4.22,а,б представлены мгновенный профиль и пространственно-временная диаграмма ансамбля (4.7) при выбранных значениях параметров, соответственно. В данном случае в системе наблюдается химера уединенных состояний, которая характеризуется наличием кластера с когерентной динамикой ( $61 \leq i \leq 469$ ) и кластера, содержащего уединенные состояния ( $1 \leq i \leq 60$ ,  $470 \leq i \leq 1000$ ).

Как было показано в работах [345, 418] и описано выше (разделы 4.3, 4.4), рождение химеры уединенных состояний обусловлено появлением бистабиль-

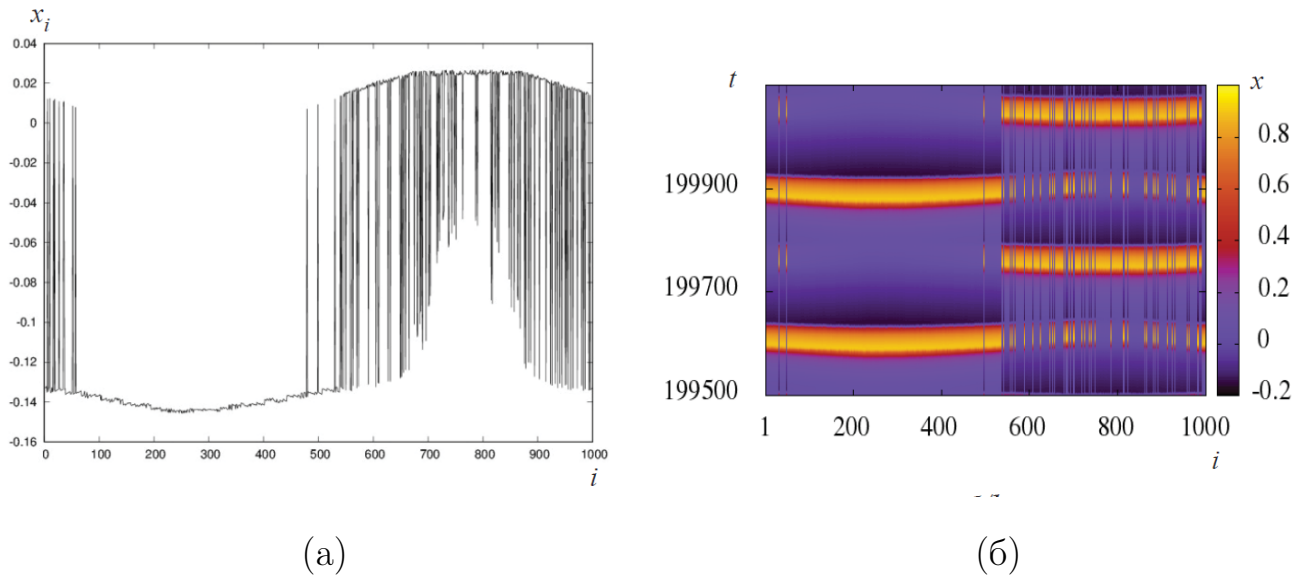


Рисунок 4.22. Мгновенный профиль амплитуд  $x_i$  (а) и пространственно-временная диаграмма (б) состояний ансамбля (4.7).

Параметры:  $a = 0.27$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $d = 0.5$ ,  $J = 0.15$ ,  $\varepsilon = 0.003$ ,  $\sigma = 0.04$ ,  $P = 320$

ности в индивидуальных осцилляторах ансамблей за счет нелокальной связи между ними. По виду мгновенного профиля, приведенного на рисунке 4.22,а, можно предположить, что и в этом случае также имеет место бистабильный режим. Проведенные расчеты подтверждают данное предположение.

Выберем два произвольных осциллятора из кластера химеры уединенных состояний: осциллятор с номером  $i = 750$ , демонстрирующий выброс, что равносильно проявлению режима уединенного состояния, и осциллятор  $i = 751$ , амплитуда которого отвечает области когерентности пространственно-временной структуры (рисунок 4.22,а). Если построить фазовые портреты аттракторов для выбранных осцилляторов, то получим две различные замкнутые инвариантные кривые, изображенные на рисунке 4.23,а. Это свидетельствует о существовании двух различных аттракторов, то есть о наличии режима бистабильности. Аттрактор 1 соответствует режиму уединенного состояния, аттрактор 2 — колебаниям в когерентной области. Временные реализации на этих аттракторах, приведенные на рисунке 4.23,б, также отличаются друг от друга.

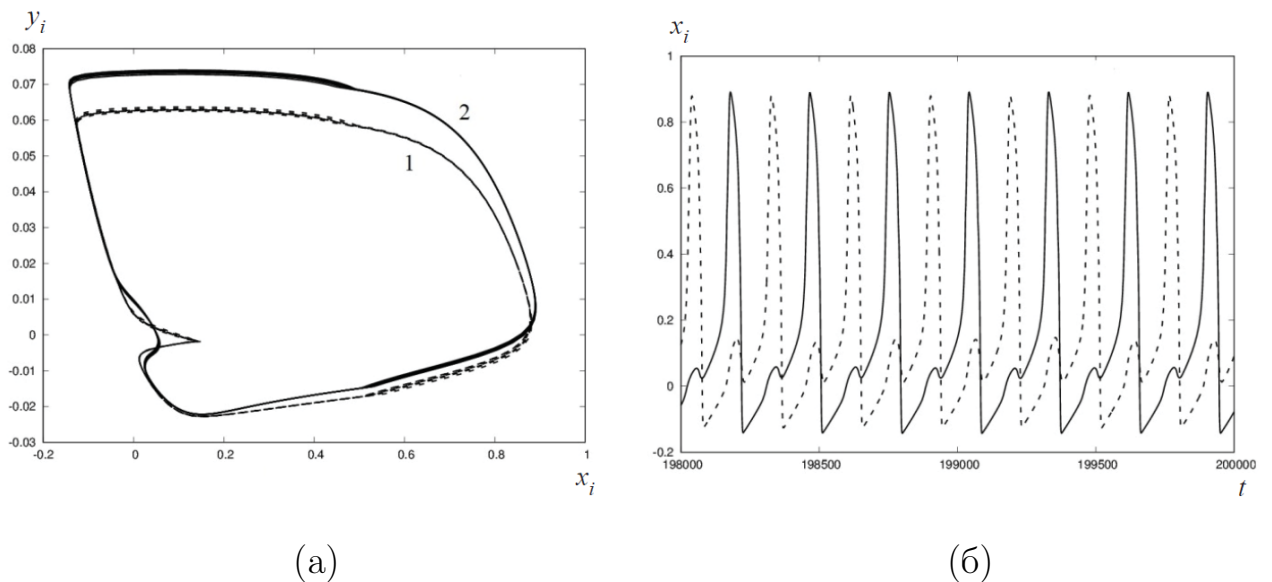


Рисунок 4.23. Фазовые портреты аттракторов (а) и временные реализации (б) для осцилляторов  $i = 750$  (сплошная линия) и  $i = 751$  (пунктир) ансамбля (4.7). Параметры как для рисунка 4.22

Построим бассейны притяжения для каждого из аттракторов, выбрав вначале осцилляторы из некогерентных кластеров химеры уединенных состояний:  $i = 60$  и  $i = 980$  (см. рисунок 4.22,а). Результаты расчетов представлены на рисунке 4.24.

Бассейн притяжения аттрактора 1 (рисунок 4.23,а), отвечающего режиму уединенного состояния, показан белым цветом, область притяжения аттрактора 2, соответствующего колебаниям в когерентной области химерной структуры, изображен серым цветом. Как видно из представленных графиков, два произвольно выбранных осциллятора из области некогерентности химеры уединенных состояний характеризуются наличием двух бассейнов притяжения, что подтверждает режим бистабильной динамики элементов ансамбля (4.7). Так как выбранные осцилляторы  $i = 60$  и  $i = 980$  принадлежат некогерентным кластерам химеры уединенных состояний, то есть находятся в режиме уединенного состояния, то их динамика во времени соответствует аттрактору 1 (рисунок 4.23,а). Сепаратрисой, разделяющей бассейны притяжения двух со-

существующих аттракторов, является границная линия (черного цвета) между серой и белой областями (рисунок 4.24).

Теперь выберем осцилляторы с номерами  $i = 100$  и  $i = 250$ , которые находятся в когерентном кластере (рисунок 4.22). Бассейны притяжения аттракторов, отвечающих динамике этих элементов, изображены на рисунке 4.25. Приведенные результаты расчетов вновь свидетельствуют о наличии бистабильности в осцилляторах ансамбля (4.7). Однако в данном случае (как и в случае осцилляторов всего когерентного кластера) осцилляторы колеблются на одном аттракторе, аттракторе 2 (рисунок 4.23,а), и не совершают переключений на другое притягивающее множество.

С целью выяснения грубости режима химеры уединенных состояний были проведены численные исследования динамики ансамбля (4.7) при вариации параметров  $a$  и  $\varepsilon$  в уравнениях (4.4) и (4.5). Расчеты показали, что режим химеры уединенных состояний сохраняется в конечной области изменения зна-

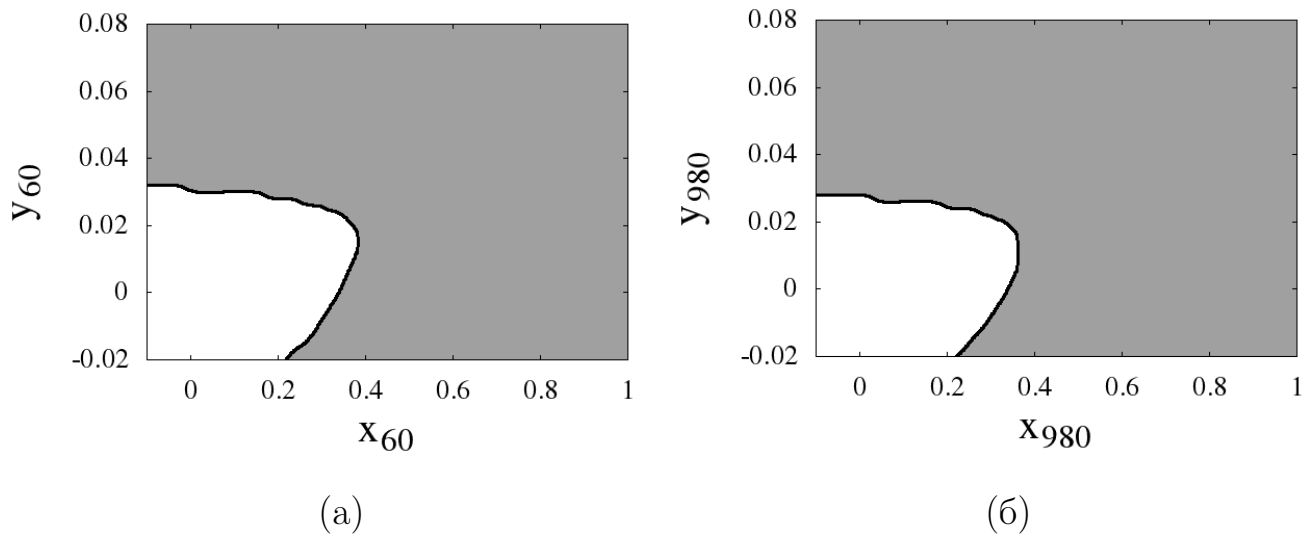


Рисунок 4.24. Бассейны притяжения аттракторов для осцилляторов  $i = 60$  (а) и  $i = 980$  (б), принадлежащих некогерентным кластерам (рисунок 4.22).

Белым цветом обозначены бассейны притяжения аттрактора 1 (рисунок 4.23,а), серым цветом — бассейн аттрактора 2. Параметры как для рисунка 4.22



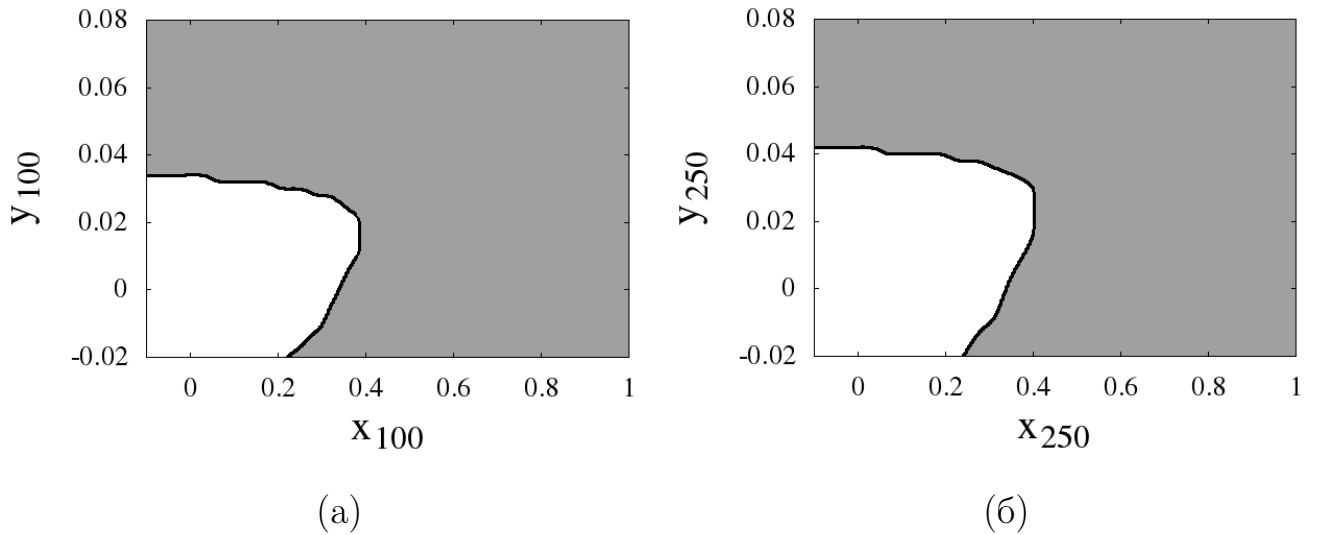
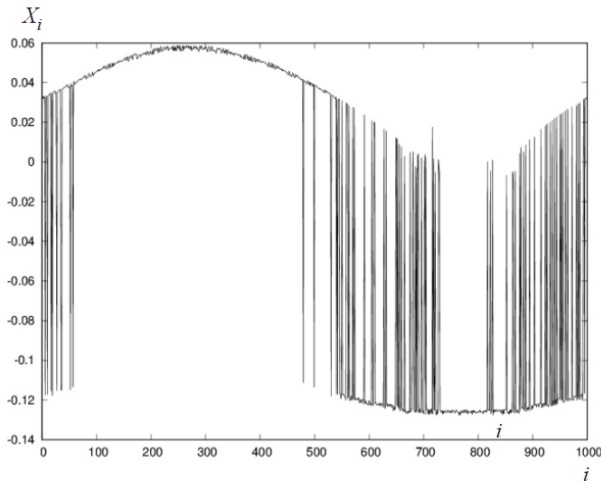


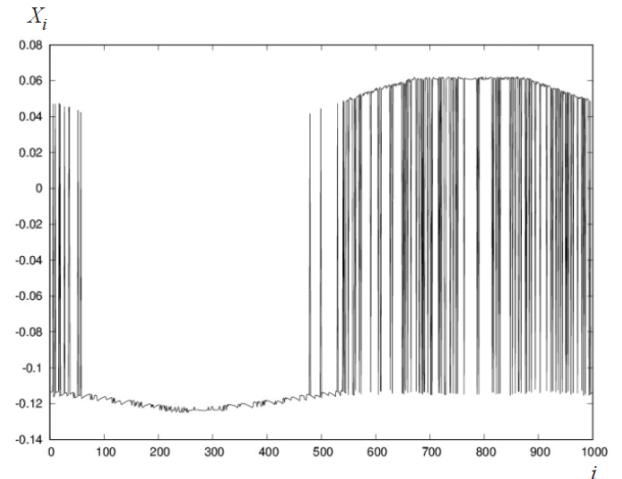
Рисунок 4.25. Бассейны притяжения аттракторов для осцилляторов  $i = 100$  (а) и  $i = 250$  (б), принадлежащих когерентному кластеру (рисунок 4.22). Белым цветом обозначены бассейны притяжения аттрактора 1 (рисунок 4.23,а), серым цветом — бассейн аттрактора 2. Параметры как для рисунка 4.22

чений параметров  $a$  и  $\varepsilon$ . Для иллюстрации сказанного на рисунке 4.26 приведены результаты расчетов мгновенных профилей амплитуд  $x_i$  элементов ансамбля (4.7) для двух различных значений параметра  $\varepsilon$ . Как следует из представленных графиков, режим химеры уединенных состояний не исчезает, хотя вид пространственно-временной структуры несколько меняется. Тем не менее, локализация когерентного и некогерентных кластеров химеры остается той же самой в пространстве ансамбля, как и в рассмотренном выше случае (рисунок 4.22).

Таким образом, в результате проведенного численного анализа показано, что в ансамбле нелокально связанных отображений Некоркина (4.7) реализуется режим химеры уединенных состояний, который обусловлен формированием бистабильной динамики во всех взаимодействующих индивидуальных осцилляторах ансамбля. При этом конечное число осцилляторов оказывается в режиме, отвечающем движению на одном из сосуществующих аттракторов, который соответствует колебаниям в области когерентности. Другая (конечная) часть ос-



(а)



(б)

Рисунок 4.26. Мгновенные профили амплитуд  $x_i$  элементов ансамбля (4.7) для двух различных значений параметра  $\varepsilon$ : (а) 0.002, (б) 0.004. Другие параметры:

$$a = 0.27, \beta = 0.04, d = 0.5, J = 0.15, \sigma = 0.04, P = 320$$

цилляторов реализует режим переключений с одного аттрактора на другой в фазовом пространстве ансамбля и формирует структуру некогерентных кластеров химеры уединенных состояний. Возникает вопрос о причине, вызывающей попадание некоторой части осцилляторов в «особые» состояния. Исследования показали, что причина кроется в случайном задании начальных условий для осцилляторов ансамбля. В зависимости от начальных условий одни осцилляторы попадают в бассейн притяжения одного аттрактора, другие — в бассейн притяжения второго аттрактора. Этот эффект и приводит к рождению режима химеры уединенных состояний. Приведенные в данном разделе результаты находятся в полном соответствии с данными, представленными в работе [345] и описанными в предыдущих разделах главы, что подтверждает общность установленного механизма рождения режима химеры уединенных состояний.

## 4.5.2 Химера уединенных состояний в ансамбле осцилляторов ФитцХью–Нагумо с нелокальной связью

**Исследуемая модель.** Двумерная дифференциальная система ФитцХью–Нагумо (ФХН) считается феноменологической моделью нейронной активности, которая широко известна и часто используется при численном моделировании сложных процессов и эффектов в области нелинейной динамики, нейродинамики, нейрофизиологии. Данная система является упрощенной версией хорошо известной модели нейрона Ходжкина–Хаксли, которая описывает главные особенности регенеративных механизмов зажигания в нервной клетке [434, 442]. С другой стороны, эта модель представляет собой так называемую систему «активатор–ингибитор». Динамика системы описывается следующими уравнениями:

$$\varepsilon \dot{u} = u - \frac{u^3}{3} - v, \quad \dot{v} = u + a, \quad (4.8)$$

где  $u$  — быстрая переменная (активатор или переменная напряжения),  $v$  — медленная переменная (ингибитор или переменная регенерации), параметр  $\varepsilon > 0$  отвечает за отношение временных масштабов активатора и ингибитора и принимает довольно малые значения. Параметр  $a$  задает порог возбуждения, а его значения определяют режим функционирования осциллятора ФХН (4.8). Если  $|a| > 1$ , то система демонстрирует режим возбудимой динамики, случай  $|a| < 1$  соответствует автоколебательному режиму в осцилляторе (4.8). Для этого случая типичный фазовый портрет аттрактора системы в виде предельного цикла (4.8) показан на рисунке 4.27.

Для численного исследования режимов уединенных состояний и химеры уединенных состояний и иллюстрации механизмов их формирования используется кольцо из нелокально связанных осцилляторов ФХН, которое описывается

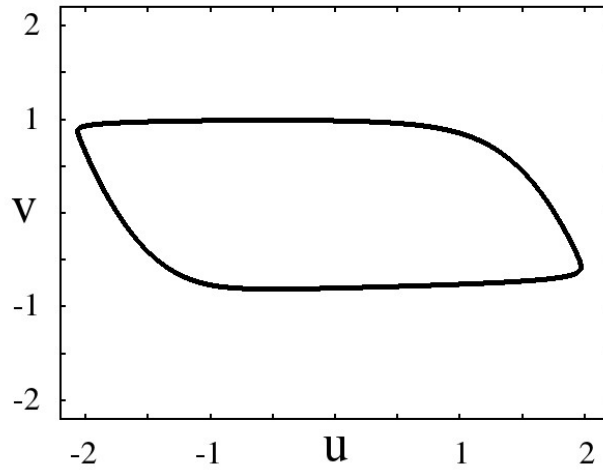


Рисунок 4.27. Фазовый портрет предельного цикла системы ФитцХью–Нагумо (4.8) на плоскости переменных  $(u, v)$  при  $\varepsilon = 0.05$  и  $a = 0.5$

следующей системой уравнений [340]:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du_i}{dt} &= u_i - \frac{u_i^3}{3} - v_i + \frac{\sigma}{P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [b_{uu}(u_j - u_i) + b_{uv}(v_j - v_i)], \\ \frac{dv_i}{dt} &= u_i + a_i + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [b_{vu}(u_j - u_i) + b_{vv}(v_j - v_i)], \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $u_i$  и  $v_i$  — переменные индивидуального осциллятора ФХН (4.8),  $i = 1, \dots, N$  — порядковый номер осциллятора,  $N = 300$  — общее число элементов в ансамбле. При проведении численных расчетов полагалось, что все осцилляторы находятся в колебательном режиме ( $a_i \equiv a = 0.5$ ), а отношение временных масштабов фиксировано  $\varepsilon = 0.05$ . Параметр  $P$  в (4.9) задает число ближайших соседей  $i$ -го осциллятора в каждом направлении по кольцу. Нормированное число ближайших соседей определяет радиус нелокальной связи  $r = P/N$ . Сила нелокальной связи характеризуется параметром  $\sigma$ . Начальные условия для всех осцилляторов ансамбля (4.9) выбирались случайно распределенными на окружности  $u^2 + v^2 \leq 2^2$ . Уравнения системы (4.9) интегрировались в течение  $t = 5000$  шагов безразмерного времени, из которых первые  $t' = 1000$  отбрасывались в качестве переходного процесса.

Особенностью взаимодействия элементов в ансамбле (4.9) является наличие не только прямых, но и перекрестных связей между переменными  $u$  и  $v$ , что моделируется следующей матрицей связей [120]:

$$B = \begin{pmatrix} b_{uu} & b_{uv} \\ b_{vu} & b_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

где  $\phi \in [-\pi; \pi)$ . Было показано, что для  $\phi = \pi/2 - 0.1$  в кольце нелокально связанных осцилляторов ФХН были обнаружены химерные состояния как в случае детерминированного колебательного [120], так и зашумленного возбудимого режимов [123, 124]. Однако, роль данного параметра для реализации уединенных состояний и химеры уединенных состояний в ансамбле осцилляторов ФХН не была исследована.

**Режим уединенных состояний.** Проведенные численные исследования показали [340], что в ансамбле нелокально связанных осцилляторов ФХН (4.9) реализуются режимы уединенных состояний в случаях слабой (рисунок 4.28,а,в) и сильной нелокальной связи (рисунок 4.28,б,г) между элементами. Как следует из мгновенных пространственных профилей значений переменной активатора  $u_i$  (рисунок 4.28,а,б) и пространственно-временных диаграмм (рисунок 4.28,в,г), уединенные состояния распределены случайным образом вдоль кольца, что является характерным знаком для режима уединенных состояний. Состояние ансамбля теперь характеризуется двумя различными группами: группой осцилляторов в режиме уединенного состояния и когерентным (синхронным) кластером.

Расчеты показали, что при слабой нелокальной связи между осцилляторами режим уединенных состояний реализуется в области изменения значений параметра  $\phi$ :  $\pi/2 - 1.36 < \phi < \pi/2 - 0.87$ . В случае же достаточно сильной связи уединенные состояния наблюдаются при вариации значений параметра  $\phi$  в интервале  $\pi/2 - 0.38 < \phi < \pi/2 - 0.093$ , то есть при значениях, близких к

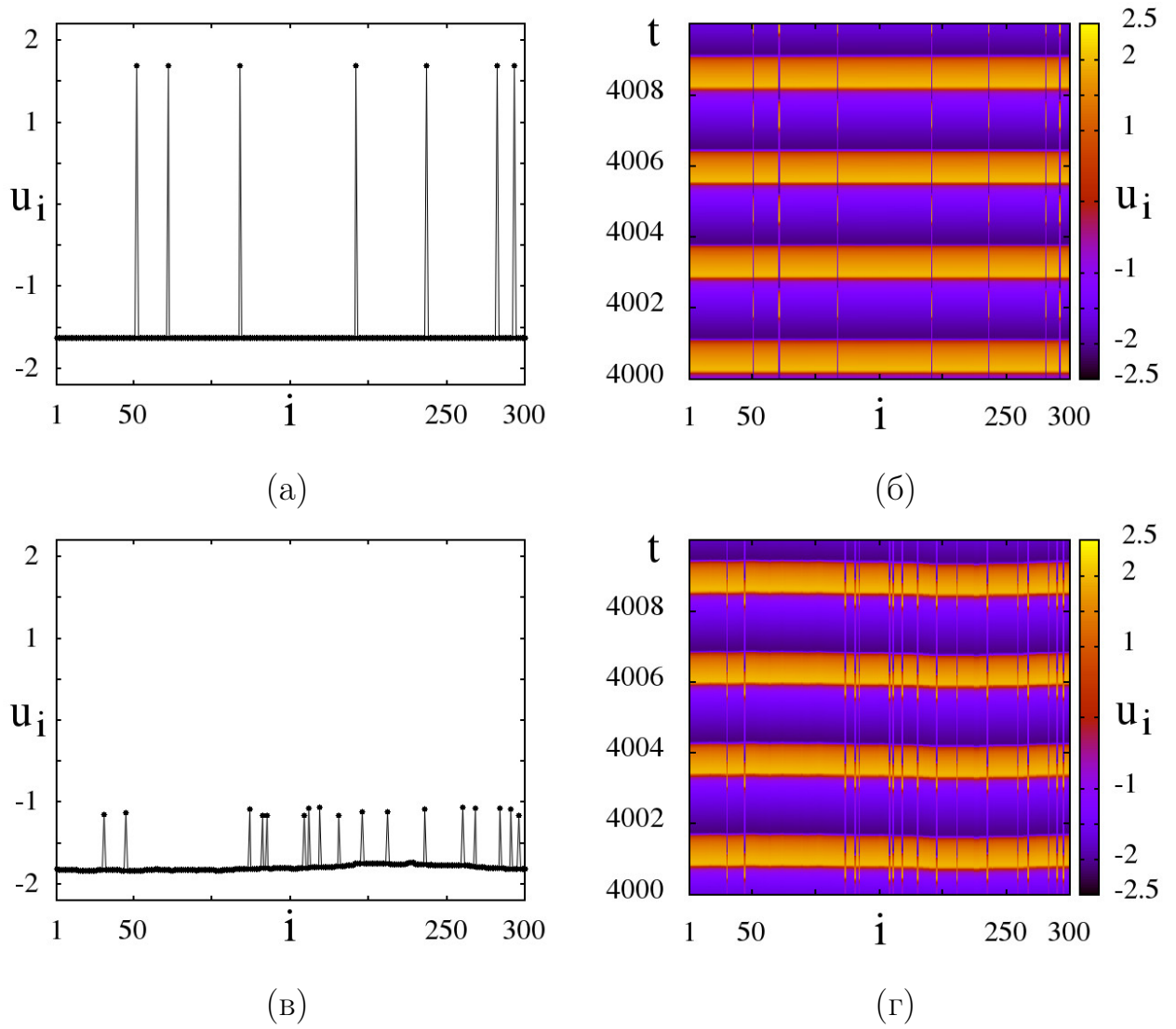


Рисунок 4.28. Режимы уединенных состояний в ансамбле осцилляторов ФитцХью-Нагумо (4.9). (а) и (б) Мгновенные пространственные профили переменных  $u_i$  в момент времени  $t = 4000$ .

(в) и (г) Пространственно-временные диаграммы переменных  $u_i$  на интервале времени  $4000 < t < 4010$ . Параметры: (а),(в)  $\sigma = 0.075$ ,  $\phi = 0.604$ , (б),(г)  $\sigma = 0.290$ ,  $\phi = 1.36$ . Другие параметры:  $r = 0.35$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $a_i = a = 0.5$ ,  
 $N = 300$

$\phi = \pi/2 - 0.1$ , при котором в кольце осцилляторов ФХН возникают химерные состояния [120].

Как и в ранее рассмотренных случаях (разделы 4.3, 4.4), индивидуальные элементы ансамбля нелокально связанных осцилляторов ФХН (4.9) характери-

зуются сосуществованием на фазовой плоскости индивидуального осциллятора  $(u_i, v_i)$  двух различных притягивающих множеств (аттракторов), что свидетельствует о наличии бистабильности. Данный факт проиллюстрирован на рисунке 4.29, на котором приведены фазовые портреты предельных циклов для осцилляторов в режиме уединенного состояния (красный цвет) и в синхронном кластере (черный цвет). Отметим, что в данном случае величина силы связи  $\sigma$  играет важную роль.

При очень слабой силе связи  $\sigma$  осцилляторы как в режиме уединенного состояния, так и в когерентном кластере совершают колебания почти на одинаковых предельных циклах. Как видно из рисунка 4.29,а, практически не наблюдается различий между данными предельными множествами. Однако, при увеличении силы связи две траектории начинают все более и более различаться (рисунок 4.29,б–г). Причем предельный цикл для когерентных осцилляторов остается тем же самым, тогда как предельный цикл для уединенных элементов становится немного меньше по амплитуде и существенно видоизменяется.

Наличие двух сосуществующих притягивающих множеств, свидетельствующих о бистабильной динамике индивидуальных осцилляторов ансамбля (4.9), приводит к сложной структуре бассейнов притяжения в двумерной проекции на плоскость координат выбранных осцилляторов. На рисунке 4.30 представлены результаты расчетов бассейнов притяжения для двух сосуществующих предельных циклов для осцилляторов в режиме уединенного состояния (для  $i = 129$  – рисунок 4.30,а и для  $i = 268$  – рисунок 4.30,б) при различных значениях силы связи  $\sigma$ . Красным цветом показан бассейн притяжения аттрактора в режиме уединенного состояния, область белого цвета соответствует бассейну притяжения предельного цикла, отвечающего синхронным колебаниям.

Из сравнения данных на рисунке 4.30,а и б следует, что при довольно малой силе связи бассейн притяжения аттрактора для уединенных состояний (красный цвет) имеет бóльший размер, чем в случае большой силы взаимодействия между элементами ансамбля. Данное различие можно объяснить следу-

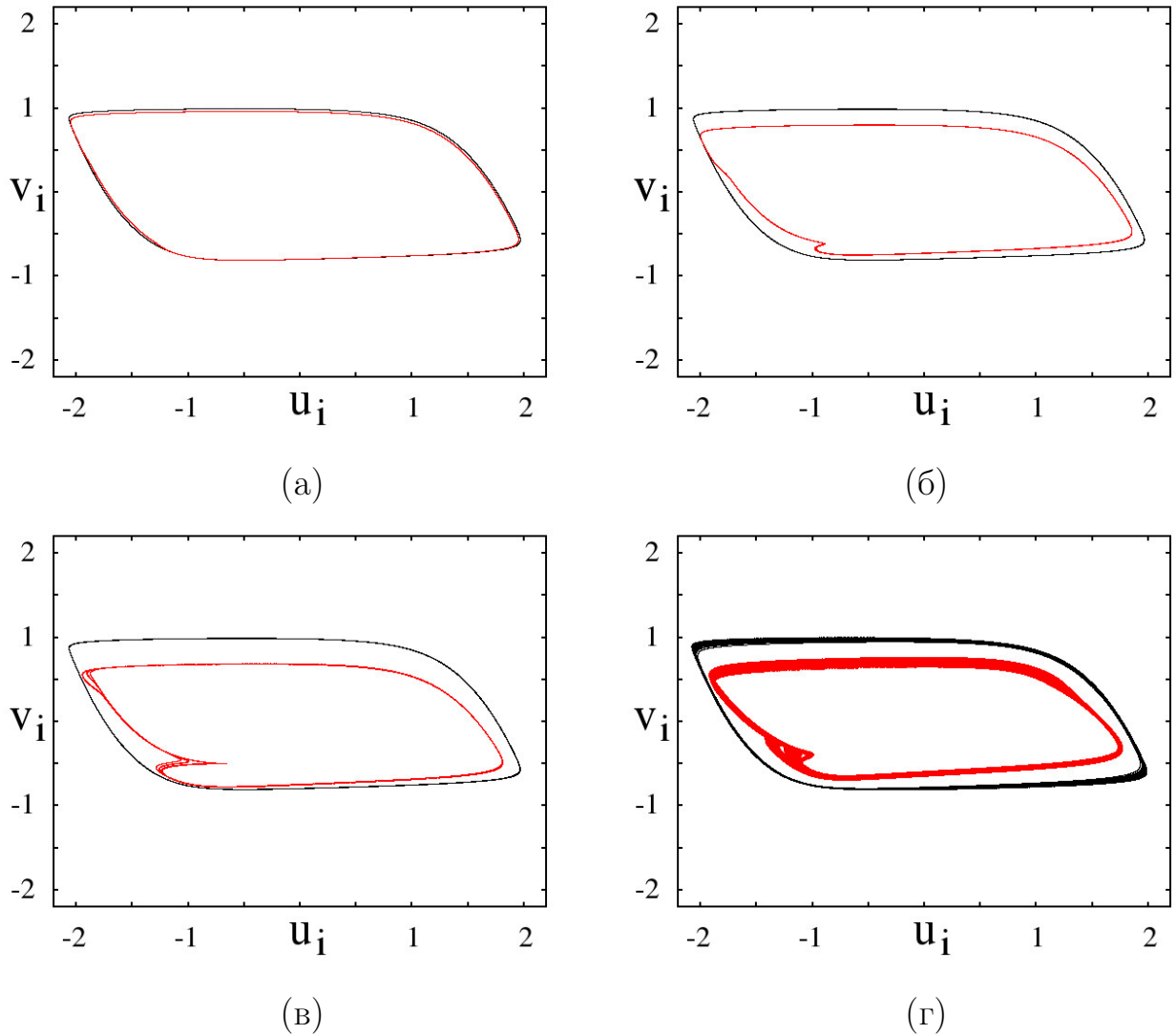


Рисунок 4.29. Фазовые портреты для всех элементов ансамбля (4.9) для различных значений параметров связи: (а)  $\sigma = 0.012$ ,  $\phi = 0.26$ , (б)  $\sigma = 0.075$ ,  $\phi = 0.604$  (см. рисунок 4.28,а,в), (в)  $\sigma = 0.129$ ,  $\phi = 0.68$ , (г)  $\sigma = 0.290$ ,  $\phi = 1.36$  (см. рисунок 4.28,б,г). Черным цветом показаны предельные циклы для когерентного кластера, красным цветом — для режима уединенного состояния. Другие параметры:  $r = 0.35$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $a_i = a = 0.5$ ,  $N = 300$



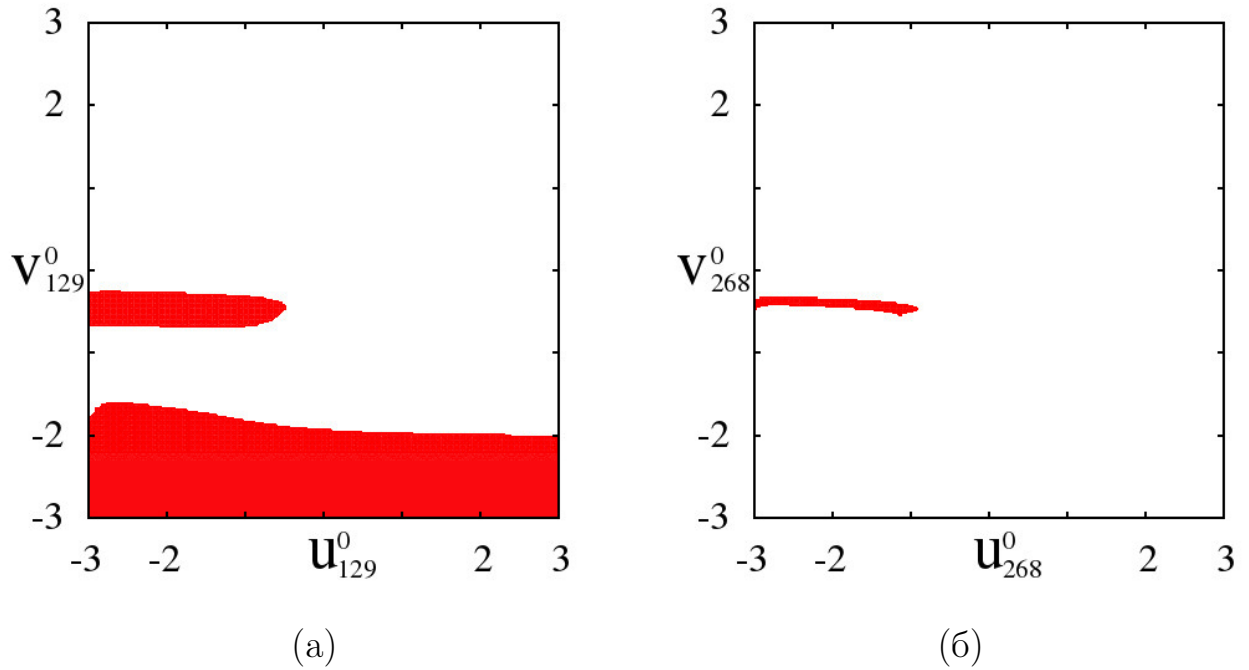


Рисунок 4.30. Бассейны притяжения аттракторов в режиме уединенных состояний (область красного цвета) и в когерентном режиме (белая область) для случаев (а) слабой связи  $\sigma = 0.057$ ,  $\phi = 0.42$  (для осциллятора  $i = 129$ ) и (б) сильной связи  $\sigma = 0.313$ ,  $\phi = 1.38$  (для осциллятора  $i = 268$ ). Другие параметры:  $r = 0.35$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $a_i = a = 0.5$ ,  $N = 300$

ющим образом. При очень сильной нелокальной связи определяющую роль в динамике элементов ансамбля играет функция связи (2-е слагаемые в уравнениях (4.9)). Она «заставляет» все осцилляторы вести себя одинаковым образом и, следовательно, вероятность уединенного выброса ничтожно мала. Кроме того, как видно из рисунка 4.30,б, в этом случае бассейн притяжения аттрактора для уединенного состояния очень и очень узкий и при случайном задании начальных условий попасть в эту область довольно сложно. Напротив, при слабой силе взаимодействия уже собственная динамика индивидуальных осцилляторов становится доминирующей и в этом случае повышается вероятность реализации уединенных состояний. Этому также способствует и увеличение размера области притяжения аттрактора для режима уединенного состояния с уменьшением силы связи (см. рисунок 4.30,а).

**Химера уединенных состояний.** В результате численных расчетов было установлено, что в случае достаточно сильной связи  $\sigma$  и при значении параметра  $\phi \approx \pi/2 - 0.1$  в кольце осцилляторов ФХН с нелокальной связью (4.9) реализуется режим химеры уединенных состояний. Если зафиксировать  $\sigma$  и увеличивать значение  $\phi$ , то можно наблюдать два различных типа данной структуры. Вначале, при меньших значениях  $\phi$ , имеет место химера уединенных состояний, характеристики которой представлены на рисунке 4.31,а,б. Как видно из мгновенного профиля значений переменной  $u_i$  (рисунок 4.31,а), данная структура включает локализованный некогерентный кластер, состоящий из конечного числа уединенных состояний, и достаточно большой когерентный кластер. Наличие бистабильной динамики во всех элементах ансамбля в этом случае доказывает рисунок 4.31,б, на котором приведены фазовые портреты двух сосуществующих предельных циклов, отвечающих двум различным режимам динамики осцилляторов ансамбля (4.9). Назовем данную пространственно-временную структуру химерой уединенных состояний 1-го типа.

Увеличение значения параметра  $\phi$  приводит к появлению химеры уединенных состояний другого типа (рисунок 4.31,в,г). В отличие от 1-й химеры, локализованный кластер, содержащий уединенные состояния, имеет четкие границы с синхронным кластером в форме «ступенек» (рисунок 4.31,в). Эти «ступеньки» представляют собой малые группы синхронных осцилляторов, колебания которых сдвинуты по фазе по сравнению с осцилляторами из больших когерентных кластеров. Однако осцилляторы на «ступеньках» принадлежат кластеру уединенных состояний, так как их динамика соответствует предельному циклу для режима уединенного состояния (цикл красного цвета на рисунке 4.31,г). Описанная структура может быть названа химерой уединенных состояний 2-го типа.

Таким образом, численное моделирование динамики ансамбля нелокально связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо (4.9) показало, что в нем возможна реализация как режимов только уединенных состояний, так и химеры

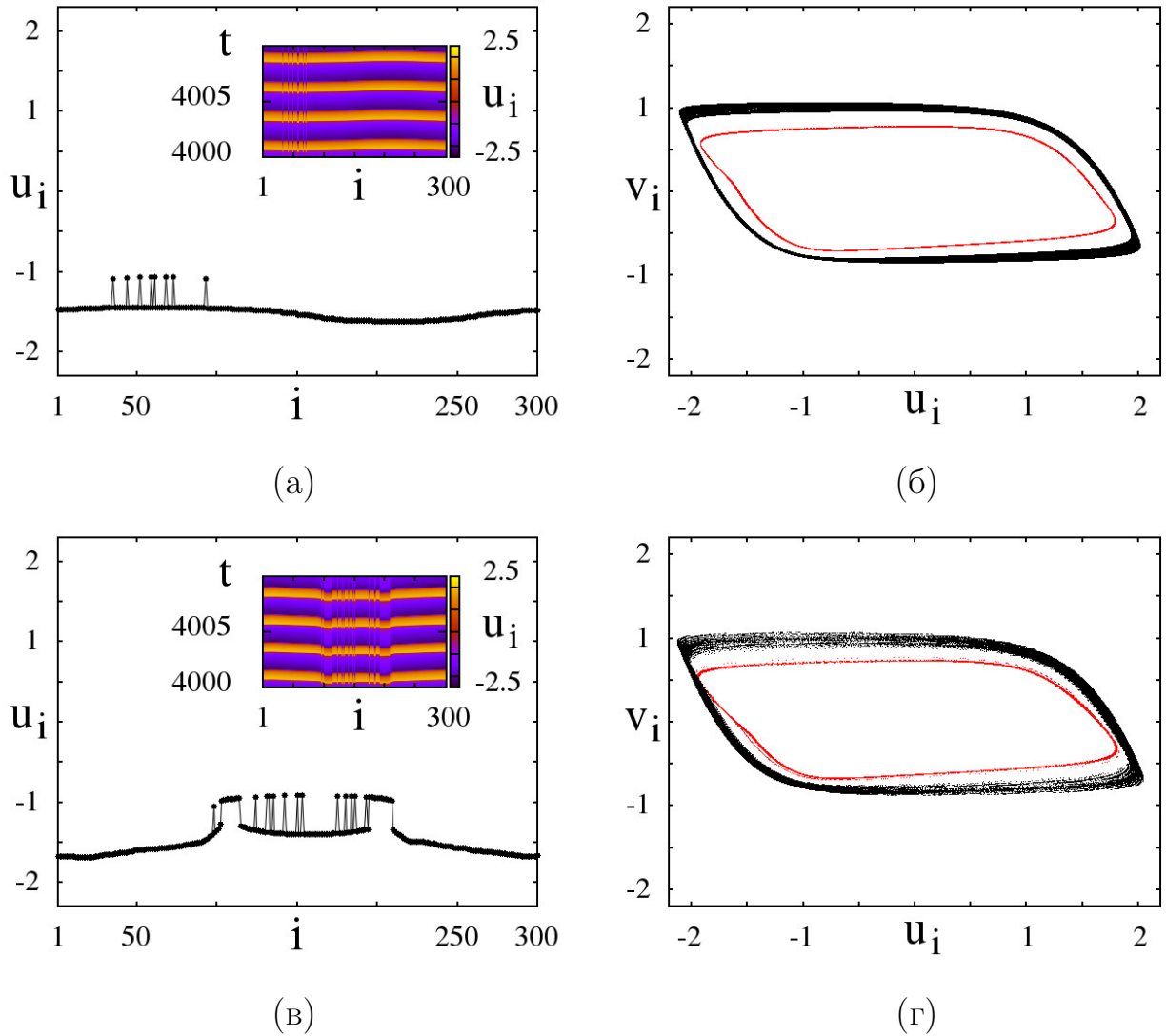


Рисунок 4.31. Иллюстрация режимов химеры уединенных состояний в ансамбле (4.9) для  $\sigma = 0.4$  и различных значений параметра связи  $\phi$  (4.10):

(а),(б)  $\phi = 1.51$ , (в),(г)  $\phi = 1.54$ .

(а),(в) Мгновенные профили и пространственно-временные диаграммы (вставки) переменных  $u_i$ ; (б),(г) фазовые портреты аттракторов для всех элементов ансамбля в когерентном режиме (черные линии) и в режиме уединенных состояний (красные линии). Другие параметры:  $r = 0.35$ ,

$$\varepsilon = 0.05, a_i = a = 0.5, N = 300$$

уединенных состояний. Механизмом возникновения данных режимов является появление бистабильности во всех индивидуальных элементах ансамбля, обусловленной нелокальной связью. Причем, как свидетельствуют полученные результаты, в этом случае наблюдается довольно существенная зависимость наблюдаемых режимов от значений параметров связи, силы нелокальной связи  $\sigma$  и параметра  $\phi$  в матрице связи (4.10) [340].

## 4.6 Выводы по четвертой главе

Полученные и представленные в данной главе результаты численных исследований пространственно-временной динамики системы двух связанных ансамблей отображений Эно и Лози с нелокальной связью, а также изолированных ансамблей нелокально связанных отображений Эно, отображений Некоркина и осцилляторов ФитцХью—Нагумо позволяют сформулировать следующие основные выводы.

1. Впервые показано, что наличие симметричной связи между двумя ансамблями, каждый из которых состоит из определенного типа хаотических отображений с нелокальной связью и демонстрирует принципиально отличные друг от друга пространственно-временные структуры без связи, может индуцировать возникновение структур и режимов, которые не могут наблюдаться в данных ансамблях в отсутствие связи между ними. Так, в результате введения взаимной диссипативной или инерционной межслойной связи в ансамбле нелокально связанных отображений Эно возможна реализация режимов уединенных состояний и бегущих волн, а в ансамбле отображений Лози — режимов фазовой и амплитудной химерных состояний.

2. При исследовании динамики системы связанных одномерных ансамблей из осцилляторов Эно и Лози впервые обнаружен и описан новый тип химерной структуры: химеры уединенных состояний. Найденная пространственно-временная структура характеризуется сосуществованием в пространстве ансамбля некогерентного кластера (кластеров) осцилляторов в режиме уединенных состояний и когерентного кластера (кластеров) осцилляторов в режиме синхронных колебаний. Показано, что найденная химерная структура является одной из типичных для ансамблей нелокально связанных осцилляторов и может быть реализована не только в системах двух взаимосвязанных ансамблей, но и в изолированных ансамблях отображений Лози, Эно, отображений Некоркина и в ансамбле осцилляторов ФитцХью—Нагумо.
3. Детально исследован и экспериментально обоснован механизм рождения уединенных состояний и химерных структур на их основе. Показано, что их рождение обусловлено появлением бистабильности в динамике индивидуальных осцилляторов ансамбля. Причиной возникновения бистабильности является нелокальная связь индивидуальных осцилляторов с конечным числом соседей. В результате каждый из осцилляторов ансамбля находится под воздействием «внешних» сигналов, что может приводить к рождению бистабильности. Бистабильность характеризуется сосуществованием двух притягивающих областей в пространстве состояний индивидуальных осцилляторов (условно называемых аттракторами) со своими бассейнами притяжения. Один из аттракторов отвечает режиму уединенных состояний, другой — когерентной динамике. При случайном характере задания начальных условий часть осцилляторов попадает в бассейн притяжения одного аттрактора, а часть — в область притяжения второго, что и приводит к возможности возникновения как уединенных состояний, так и соответствующих химерных структур.

# Глава 5. Синхронизация химерных структур в двух связанных ансамблях хаотических отображений

## 5.1 Введение

Со времени открытия эффекта синхронизации Х. Гюйгенсом [443], вот уже на протяжении более 300 лет нелинейный эффект синхронизации в живой и неживой природе остается в центре внимания исследователей в различных областях естествознания. Подавляющее большинство работ посвящено анализу эффекта синхронизации различного типа взаимодействующих автоколебательных систем [10, 11, 16, 60, 61, 359, 360, 366, 444–451, 453], для которых разработана классическая теории синхронизации [10, 444–450]. В последние годы внимание исследователей все более привлекает проблема синхронизации сложных систем, реализующих пространственно-временные структуры [10, 12, 15, 16, 18, 33, 34, 39, 44, 45, 49–51, 272, 286, 288, 289, 292, 293, 296, 302, 303]. Общая теория синхронизации пространственно-временных структур для взаимодействующих распределенных систем пока не создана, и эта проблема, как правило, изучается методами численного моделирования.

В рамках указанной проблемы в пятой главе диссертационной работы рассматриваются эффекты синхронизации химерных пространственно-временных структур в системе двух взаимодействующих ансамблей связанных нелинейных осцилляторов. Приводятся результаты численных исследований эффектов вынужденной и взаимной синхронизации пространственно-временных структур, включая химерные структуры различного типа, в двух связанных одномер-

ных ансамблях хаотических отображений с нелокальной связью и показывается возможность их синхронизации при вариации коэффициента межслойной связи и параметров ансамблей. Для количественной оценки степени идентичности структур в режиме синхронизации и расчета областей синхронизации на плоскости управляющих параметров системы использовались коэффициент взаимной корреляции между симметричными осцилляторами взаимодействующих ансамблей и среднеквадратичное отклонение (девиация) значений переменных состояния соответствующих осцилляторов с использованием усреднения по времени и множеству элементов ансамбля. Исследованы эффекты вынужденной и взаимной синхронизации в случае идентичных ансамблей, при введении расстройки по управляющим параметрам и параметрам нелокальной связи, а также для различных типов связи между ансамблями: диссипативной и инерционной. Выводы о реализации эффектов синхронизации подтверждаются выполнением двух условий: идентичности колебательных процессов соответствующих осцилляторов ансамбля и наличием конечной области (области синхронизации) на плоскости параметров системы, в которой первое условие выполняется.

Материалы пятой главы основываются на результатах численных исследований, опубликованных в работах [338, 344, 351, 373, 454, 455].

## 5.2 Исследуемая модель

Исследуемая модель представляет собой двухслойную мультиплексную сеть. Каждый из слоев имеет форму кольца и состоит из одинакового числа элементов, которые описываются логистическими отображениями и связаны между собой нелокальной связью. Исследуемая модель схематично изображена

на рисунке 5.1 и описывается следующей системой уравнений [351, 454, 455]:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f_i^t + \frac{\sigma_1}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [f_j^t - f_i^t] + \gamma_{21} F_i^t, \\ y_i^{t+1} &= g_i^t + \frac{\sigma_2}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [g_j^t - g_i^t] + \gamma_{12} G_i^t, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $x_i$  и  $y_i$  – динамические переменные осцилляторов связанных ансамблей,  $i = 1, 2, \dots, N$  – номер элемента,  $N = 1000$  – общее число осцилляторов в каждом из взаимодействующих ансамблей,  $t$  – дискретное время. Поведение индивидуальных элементов ансамблей задается логистическими отображениями  $f_i^t = \alpha_1 x_i^t(1 - x_i^t)$  и  $g_i^t = \alpha_2 y_i^t(1 - y_i^t)$  с различными управляющими (бифуркационными) параметрами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Параметры  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  определяют силу нелокальной связи в каждом из ансамблей. Величины  $R$  и  $P$  обозначают количество соседей  $i$ -го элемента с каждой стороны в первом ( $x$ ) и втором ( $y$ ) ансамблях, соответственно. Эти параметры также выступают в качестве меры нелокального взаимодействия элементов в изолированных ансамблях и определяют радиусы связи для соответствующих ансамблей.

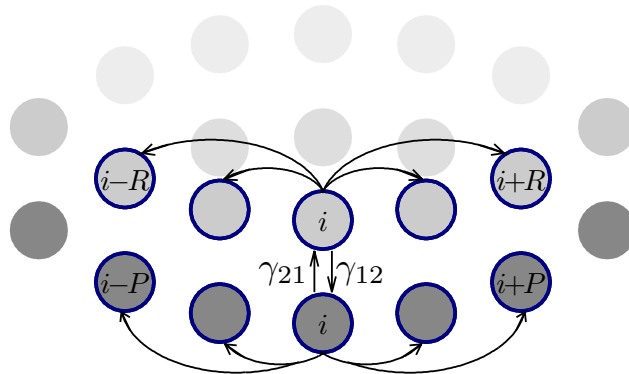


Рисунок 5.1. Схема исследуемой модели (5.1), состоящей из двух связанных колец нелинейных осцилляторов с нелокальной связью.  $i$ -е осцилляторы ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) ансамблей связаны между собой с коэффициентами связи  $\gamma_{21}$

и  $\gamma_{12}$



Подсистемы (кольца) в (5.1) связаны между собой через функции связи  $F_i^t$  и  $G_i^t$ , которые могут задавать диссипативный

$$F_i^t = (g_i^t - f_i^t), \quad G_i^t = (f_i^t - g_i^t) \quad (5.2)$$

или инерционный типы связи

$$F_i^t = (y_i^t - x_i^t), \quad G_i^t = (x_i^t - y_i^t). \quad (5.3)$$

Коэффициенты  $\gamma_{21}$  и  $\gamma_{12}$  характеризуют силу связи между кольцами или межслойную связь. В случае вынужденной синхронизации в зависимости от того, какое кольцо является управляющим, а какое управляемым, один из коэффициентов отличен от нуля, а другой равен нулю. При взаимной синхронизации оба коэффициента равны и отличны от нуля:  $\gamma_{21} = \gamma_{12} = \gamma \neq 0$ .

Уравнения (5.1) решаются численно для периодических граничных условий и начальных условий  $(x_i^0, y_i^0)$ , случайно распределенных в интервале  $[0; 1]$  для всех элементов ансамблей  $i = 1, \dots, N$ . Общее время расчета составляет  $6 \times 10^5$ , из которых первые  $5 \times 10^5$  не учитываются и составляют время установления пространственно-временных структур в каждом ансамбле. Вначале, в отсутствие межслойной связи по истечении указанного периода установления в каждом ансамбле устанавливаются различные пространственно-временные структуры. После этого вводится межслойная связь и вновь выполняется установление (в течение  $5 \times 10^5$  итераций) структур во взаимодействующих ансамблях. Реализуемые пространственно-временные структуры иллюстрируются графически с помощью пространственно-временных профилей для переменных  $x_i$  и  $y_i$  системы (5.1), которые представляют собой набор из 100 мгновенных пространственных профилей, соответствующих 100 первым итерациям после периода установления.

Для исследования эффектов синхронизации обычно рассматриваются неидентичные ансамбли, то есть когда вводится расстройка по управляющим параметрам индивидуальных подсистем. В этом случае в отсутствие межслой-

ной связи в каждом изолированном ансамбле системы (5.1) реализуются различные пространственно-временные структуры, включая химерные. Подобную ситуацию можно получить и для случая идентичных взаимодействующих ансамблей в силу задания случайных начальных условий. Эти два случая будут рассмотрены в данной главе.

### 5.3 Характеристики степени синхронизации

Для обоснования идентичности синхронных структур необходимо убедиться в том, что элементы с номерами  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )  $x_i$  и  $y_i$  ансамблей осциллируют синхронно во времени. С этой целью в работе использован ряд статистических характеристик степени синхронизации динамики двух взаимодействующих ансамблей. Как и в предыдущих главах, рассчитывался коэффициент взаимной корреляции  $R_i$  между соответствующими элементами (с номером  $i$ ) связанных ансамблей. Для его расчетов применяется следующая формула:

$$R_i = \frac{\langle \tilde{x}_i^t \tilde{y}_i^t \rangle}{\sqrt{\langle (\tilde{x}_i^t)^2 \rangle \langle (\tilde{y}_i^t)^2 \rangle}}, \quad \begin{aligned} \tilde{x}_i^t &= x_i^t - \langle x_i^t \rangle, \\ \tilde{y}_i^t &= y_i^t - \langle y_i^t \rangle, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где угловые скобки  $\langle \cdot \rangle$  означают усреднение по времени. Величина  $R_i$  будет равна единице для всех элементов  $i = 1, 2, \dots, N$  системы (5.1) в случае полной синхронизации (полной идентичности пространственно-временных структур ансамблей) и будет стремиться к нулю при потере  $x_i^t$  и  $y_i^t$  статистической взаимосвязи. Случай, когда  $R_i = 1$  для конечного числа осцилляторов  $i_1 \leq i \leq i_2$ , соответствует синхронизации конкретного кластера осцилляторов системы.

Оценка степени синхронизации структур также проводилась с помощью расчетов квадрата разности (девиации) между значениями переменных  $x_i^t$  и

$y_i^t$ , усредненного по времени и по элементам ансамбля. Среднеквадратичное отклонение, усредненное по времени, определяется следующим образом:

$$d_i = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_i^t - x_i^t)^2}, \quad (5.5)$$

где  $n$  — время усреднения, которое в проводимых расчетах выбиралось равным  $10^5$ . Величина  $d_i$  рассчитывается для каждого элемента  $i = 1, 2, \dots, N$  взаимодействующих ансамблей при вариации силы межслойной связи между ними. При полной синхронности пространственно-временных структур во времени значение  $d_i$  обращается в ноль для всех  $i = 1, 2, \dots, N$ . Случай, когда  $d_i \approx 0$  для конечной группы осцилляторов взаимодействующих ансамблей, соответствует кластерной синхронизации пространственно-временной структуры. Данная характеристика также позволяет определить, какие области или кластеры элементов в пространстве ансамблей быстрее и эффективнее синхронизируются при изменении коэффициента межслойной связи. Подобная оценка оказывается особенно показательной при исследовании синхронизации фазовых и амплитудных химерных структур.

Расчет среднеквадратичного отклонения по времени и по элементам ансамбля дает общую оценку степени синхронизации пространственно-временных структур, включая химерные, при вариации силы связи между ансамблями. Эта характеристика вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_i^t - x_i^t)^2}, \quad (5.6)$$

где  $N$  — количество элементов в каждом ансамбле,  $n$  — время усреднения ( $n = 10^5$ ), Как и для среднеквадратичного отклонения по времени (5.5), величина  $\Delta$  стремится к нулю в случае полной идентичности синхронных структур в связанных ансамблях.

## 5.4 Синхронизация ансамблей при однонаправленном диссипативном взаимодействии

Рассмотрим эффект вынужденной синхронизации сложных пространственно-временных структур в системе (5.1) в случае однонаправленной диссипативной связи между ансамблями логистических отображений (5.2), причем  $\gamma_{21} = 0$  и  $\gamma_{12} = \gamma > 0$ . Это означает, что элементы первого ансамбля, который является управляющим, влияют на элементы второго ансамбля, который выступает в качестве управляемого.

### 5.4.1 Случай идентичных ансамблей

В случае идентичных ансамблей (5.1) значения управляющих параметров и параметров нелокальной связи выбираются равными и фиксируются:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 3.8$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.32$ ,  $R = P = 320$ . Данные значения соответствуют хаотической динамике индивидуальных осцилляторов и наличию химерных структур в каждом из ансамблей в отсутствие связи между ними. Случайно распределенные начальные условия для всех элементов системы (5.1) обеспечивают реализацию различных пространственно-временных структур в изолированных ансамблях, включая химерные. Соответствующие пространственно-временные профили для переменных  $x_i$  и  $y_i$  системы (5.1) при  $\gamma_{21} = \gamma_{12} = 0$  представлены на рисунке 5.2,а и б, соответственно.

Как видно из приведенных графиков, в отсутствие межслойной связи в первом кольце наблюдается сосуществование амплитудной (кластер осцилляторов  $450 \leq i \leq 550$ ) и фазовой химер (кластеры с элементами  $0 \leq i \leq 10$ ,  $780 \leq i \leq 800$  и  $980 \leq i \leq 1000$ ) (рисунок 5.2,а), а во втором кольце реализуется

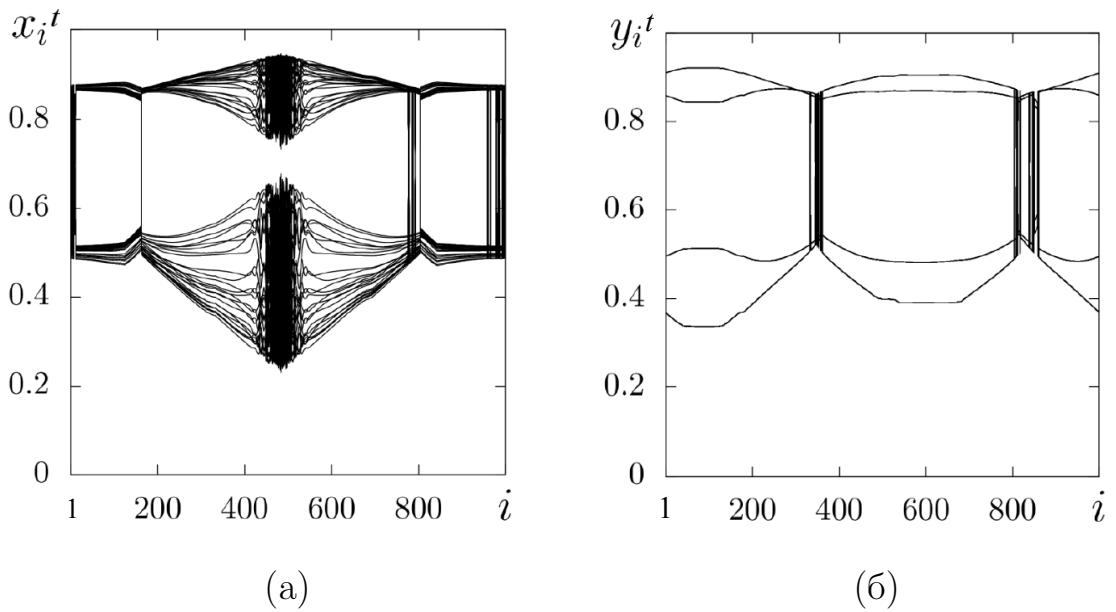


Рисунок 5.2. Пространственно-временные профили амплитуд  $x_i^t$  (а) и  $y_i^t$  (б) системы (5.1) в отсутствие связи между ансамблями  $\gamma_{21} = \gamma_{12} = 0$ .

Параметры:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 3.8$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.32$ ,  $R = P = 320$

пространственно-временной режим фазовой химеры (кластеры осцилляторов с номерами  $360 \leq i \leq 380$  и  $800 \leq i \leq 830$ ) (рисунок 5.2,б).

При введении однонаправленной диссипативной связи  $\gamma_{12} = \gamma > 0$  первое (управляющее) кольцо начинает влиять на второе (управляемое) кольцо, в результате чего пространственно-временная структура во втором кольце начинает видоизменяться (рисунок 5.3,а) и при  $\gamma \geq 0.2$  становится идентичной химерной структуре первого кольца (рисунок 5.3,б).

Идентичность пространственно-временных структур, а, следовательно, и реализация эффекта вынужденной синхронизации подтверждается расчетом зависимости среднеквадратичного отклонения  $\Delta$  (5.6) от силы межслойной связи  $\gamma$ , приведенной на рисунке 5.4.

Как следует из рисунка 5.4, значения  $\Delta$  обращаются строго в ноль при  $\gamma \geq 0.2$ , что ясно свидетельствует о полной синхронности наблюдаемых пространственно-временных структур в связанных ансамблях (рисунок 5.3,б).

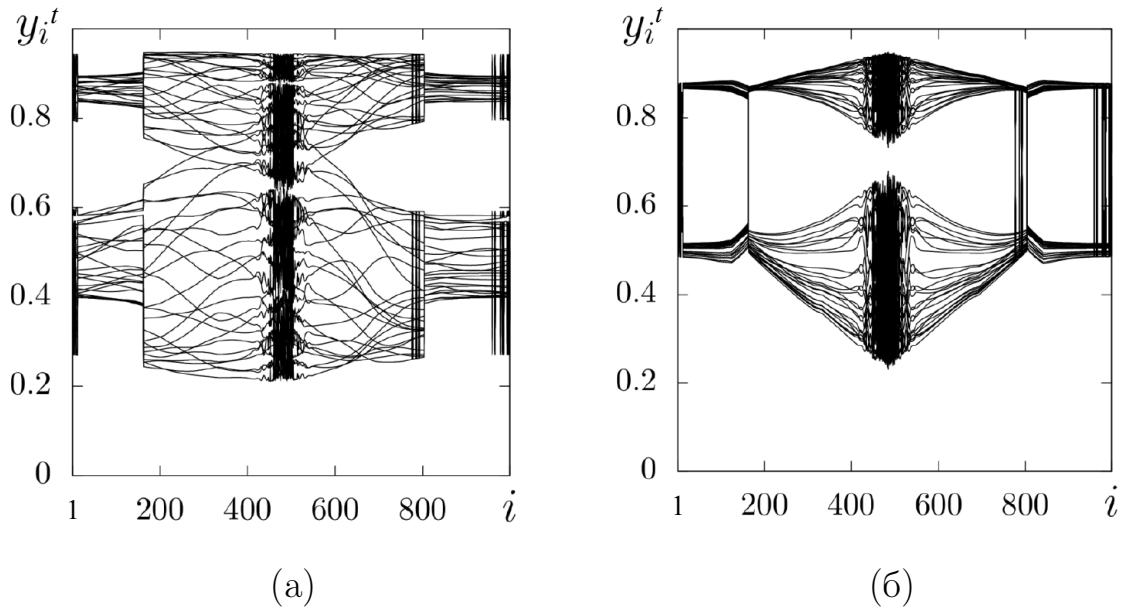


Рисунок 5.3. Пространственно-временные профили амплитуд  $y_i^t$  второго кольца системы (5.1) в случае однонаправленной диссипативной связи (5.2) для различных значений параметра связи  $\gamma$ : (а) 0.1, (б) 0.2. Другие параметры как для рисунка 5.2

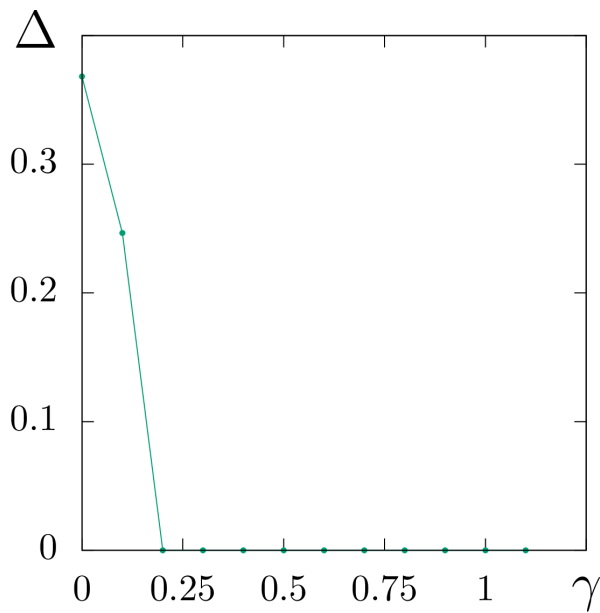


Рисунок 5.4. Зависимость величины  $\Delta$  (5.6) от силы однонаправленной диссипативной связи  $\gamma$  в случае идентичных ансамблей (5.1). Параметры как для рисунка 5.2

Абсолютно очевидно, что в этом случае значения коэффициента взаимной корреляции  $R_i$  будут точно равны 1 для всех  $i = 1, 2, \dots, N$ .

### 5.4.2 Случай неидентичных ансамблей

С целью более детального изучения эффекта вынужденной синхронизации рассмотрим случай неидентичных ансамблей (5.1). Для этого введем расстройку по параметрам в первом и втором ансамблях, положив  $\alpha_1 = 3.7$ ,  $\sigma_1 = 0.23$ ,  $\alpha_2 = 3.85$ ,  $\sigma_2 = 0.15$ . Значения радиуса связи (количества соседей) остаются одинаковыми и фиксированными  $R = P = 320$ .

В силу наличия расстройки по параметрам, в отсутствие связи в ансамблях реализуются различные пространственно-временные структуры, проиллюстрированные на рисунке 5.5 пространственно-временными профилями.

Из данного рисунка видно, что в первом ансамбле реализуется режим существующих кластеров некогерентности амплитудной (элементы  $420 \leq i \leq$

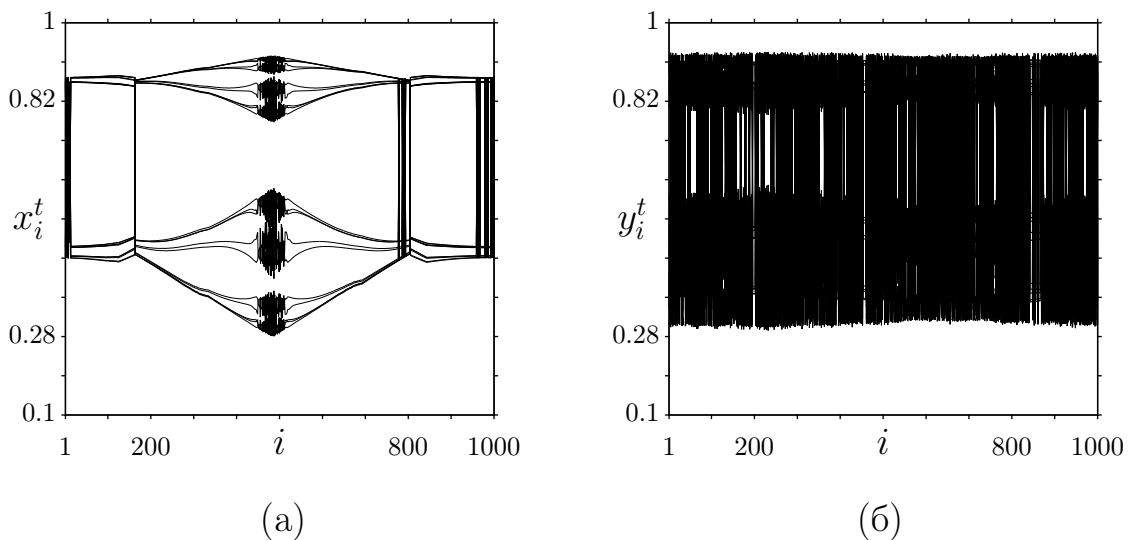


Рисунок 5.5. Пространственно-временные профили амплитуд  $x_i^t$  (а) и  $y_i^t$  (б)

системы (5.1) в отсутствие связи между ансамблями  $\gamma_{21} = \gamma_{12} = 0$ .

Параметры:  $\alpha_1 = 3.7$ ,  $\alpha_2 = 3.85$ ,  $\sigma_1 = 0.23$ ,  $\sigma_2 = 0.15$ ,  $R = P = 320$

500) и фазовой химер (элементы  $0 \leq i \leq 10$ ,  $780 \leq i \leq 800$  и  $980 \leq i \leq 1000$ ) (рисунок 5.5,а), а во втором ансамбле — режим пространственно-временного хаоса (рисунок 5.5,б). В результате однонаправленного воздействия со стороны первого ансамбля ( $\gamma_{12} = \gamma > 0$ ) во втором ансамбле возникают амплитудная и фазовая химеры. Однако, при небольшой силе связи, например,  $\gamma \leq 0.3$ , пространственно-временной профиль в этом ансамбле еще не совпадает с исходным установившимся профилем в первом ансамбле при  $\gamma = 0$  (рисунок 5.5,а). Соответствующие результаты для динамики управляемого ансамбля показаны на рисунке 5.6 для двух различных значений силы связи  $\gamma$ .

При увеличении силы однонаправленной межслойной связи  $\gamma \geq 0.4$  структуры в обоих кольцах становятся практически идентичными (рисунок 5.7). Имеется лишь небольшое отличие амплитуд  $x_i^t$  и  $y_i^t$ . Данный факт иллюстрируют временные реализации  $x_i(t)$  и  $y_i(t)$  для симметричных осцилляторов ансамблей с номером  $i = 300$ , приведенные на рисунке 5.8. Как видно из графиков, реализации отражают синхронность колебаний и характеризуются лишь незначи-

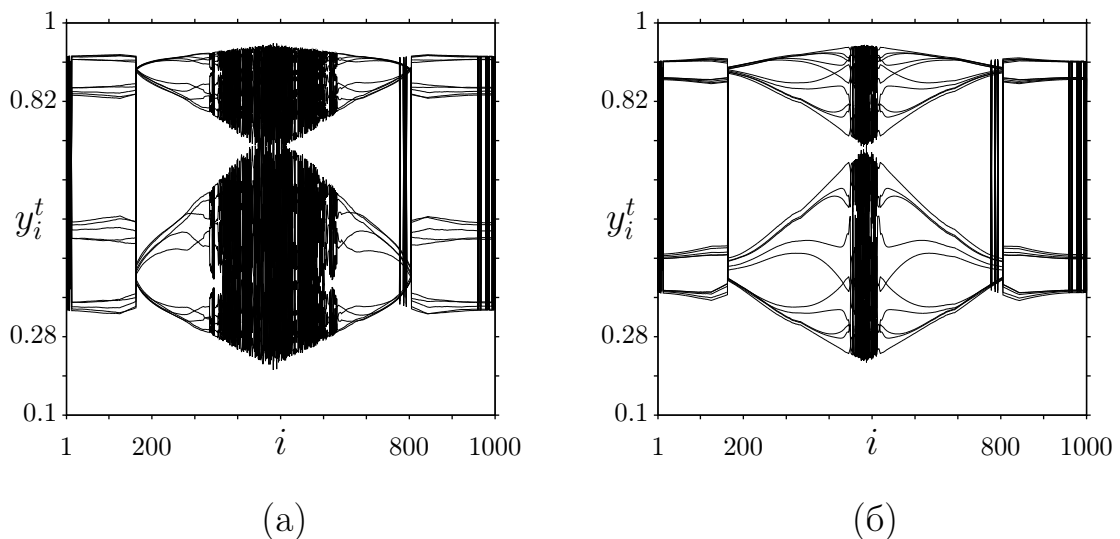


Рисунок 5.6. Пространственно-временные профили динамики второго ансамбля для двух различных значений однонаправленной связи  $\gamma$ : (а) 0.15, (б) 0.3. Другие параметры как для рисунка 5.5



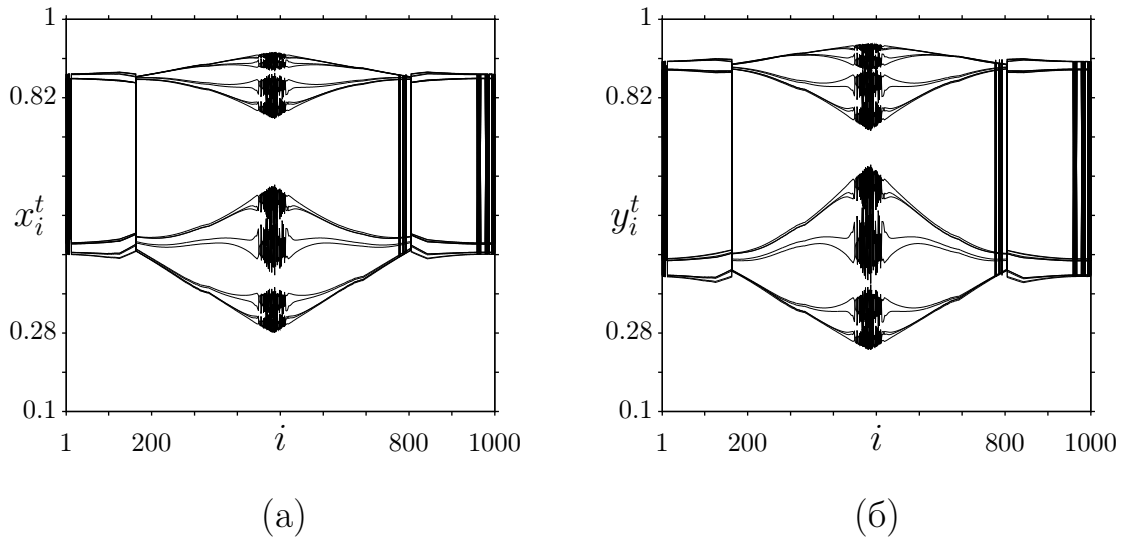


Рисунок 5.7. Пространственно-временные профили амплитуд  $x_i^t$  (а) и  $y_i^t$  (б) в режиме синхронизации при  $\gamma = 0.45$ . Другие параметры как для рисунка 5.5

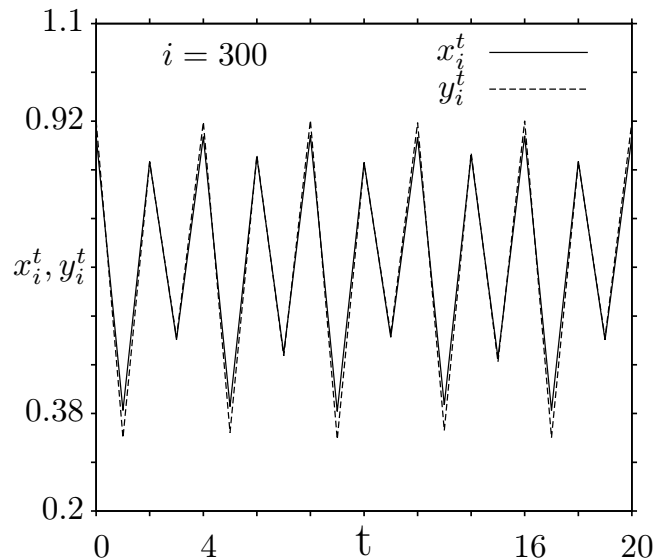


Рисунок 5.8. Временные реализации  $x_i^t$  и  $y_i^t$  для осцилляторов с номером  $i = 300$  при  $\gamma = 0.45$ . Другие параметры как для рисунка 5.5

тельным различием значений переменных, что является допустимым для синхронных режимов в случае сильно неидентичных взаимодействующих систем.

Для обоснования наблюдения эффекта вынужденной синхронизации неидентичных ансамблей необходимо выполнить два важных условия. Во-первых, представить количественную оценку степени идентичности или синхронности структур с использованием статистических характеристик

(5.4)–(5.6) и, во-вторых, необходимо показать наличие конечной области синхронизации в пространстве управляющих параметров системы (5.1).

На рисунке 5.9,а приведены результаты расчета коэффициента взаимной корреляции  $R_i$  (5.4) для синхронных структур при  $\gamma = 0.45$  (рисунок 5.7). Как видно из графика (рисунок 5.9,а), в данном режиме значения  $R_i$  для всех осцилляторов системы (5.1) практически равны 1,  $0.98 < R_i \leq 1.0$ . Таким образом, можно утверждать, что наблюдаемые пространственно-временные структуры (рисунок 5.7) практически идентичны или синхронны.

Очень интересную количественную оценку степени синхронизации пространственно-временных структур дают расчеты среднеквадратичного по времени отклонения  $d_i$  (5.5). Графики зависимости  $d_i$  от номера осциллятора  $i$  системы (5.1) представлены на рисунке 5.9,б для различных значений силы межслойной связи  $\gamma$ . Как видно из рисунка, некогерентные кластеры химерной структуры по-разному реагируют на увеличение силы связи. Так, например,

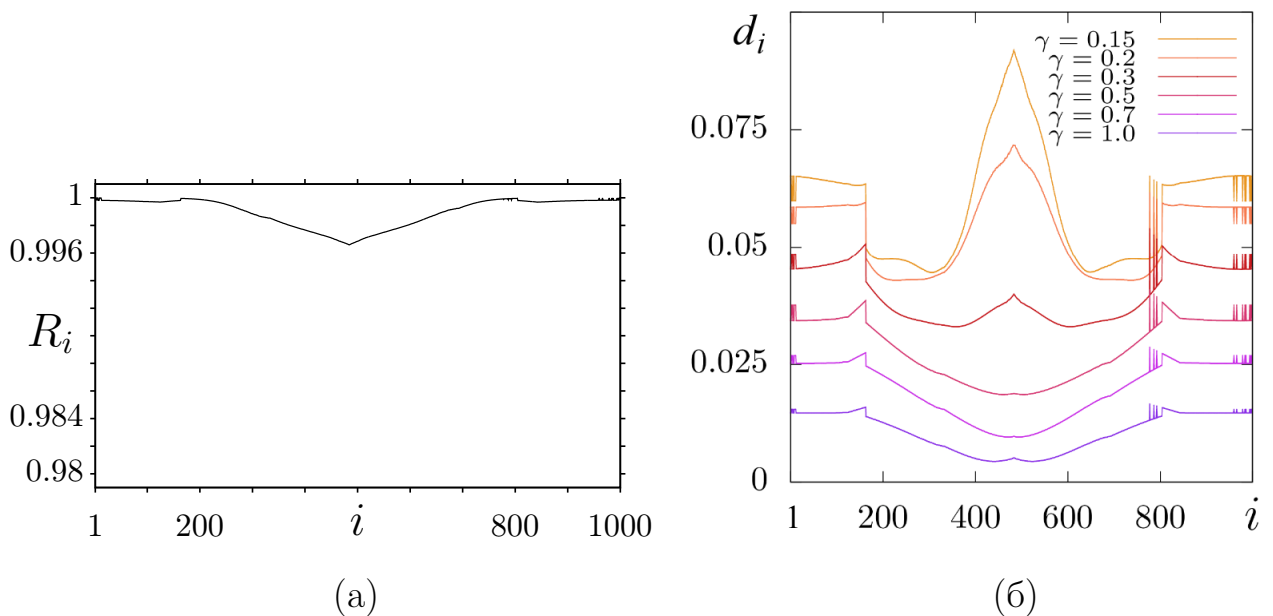


Рисунок 5.9. Зависимости коэффициента взаимной корреляции  $R_i$  (5.4) при  $\gamma = 0.45$  (а) и среднеквадратичного по времени отклонения  $d_i$  (5.5) для различных значений  $\gamma$  (б) от номера осциллятора  $i$  системы (5.1). Другие параметры как для рисунка 5.5

при  $\gamma = 0.15$  и  $\gamma = 0.2$ , элементы, принадлежащие кластеру некогерентности амплитудной химеры ( $420 \leq i \leq 500$ ) и находящиеся в близкой окрестности к нему, хуже (слабее) поддаются синхронизации, для них значения  $d_i \geq 0.06$ . Практически одинаковую степень синхронности и малые значения  $d_i$  при увеличении силы связи  $\gamma$  демонстрируют элементы некогерентных кластеров фазовой химеры и осцилляторы в когерентной области. Однако, стоит заметить, что, начиная с  $\gamma \geq 0.3$ , элементам некогерентного кластера амплитудной химеры и ее окрестности соответствуют существенно меньшие значения среднеквадратичного отклонения  $d_i$  по сравнению с другими элементами системы (5.1). Таким образом, увеличение силы межслойной связи приводит к более эффективной синхронизации некогерентного кластера амплитудной химеры, как следует из существенного уменьшения значения величины  $d_i$ , которая для данной области  $d_i \leq 0.02$  при  $\gamma \geq 0.5$  (рисунок 5.9,б).

Для полноты количественной картины и выполнения первого условия в контексте обоснования эффекта вынужденной синхронизации, проведем вычисления среднеквадратичного отклонения значений  $x_i^t$  и  $y_i^t$  по времени и по ансамблю элементов второго слоя  $\Delta$  (5.6) при вариации значений силы межслойной связи  $\gamma$ . Соответствующий график зависимости приведен на рисунке 5.10.

Как видно из данного рисунка, ни для одного значения силы связи  $\gamma$  среднеквадратичное отклонение  $\Delta$  не обращается строго в ноль. Резкое уменьшение величины  $\Delta$  до значения 0.05 наблюдается при  $\gamma \simeq 0.18$ . При дальнейшем увеличении силы межслойной связи значение  $\Delta$  уменьшается плавно и незначительно, достигая своего минимума  $\Delta \simeq 0.0098$  при  $\gamma = 1.15$ . Таким образом, можно сказать, что в случае сильно неидентичных ансамблей (5.1) имеет место так называемая «эффективная» вынужденная синхронизация пространственно-временных структур.

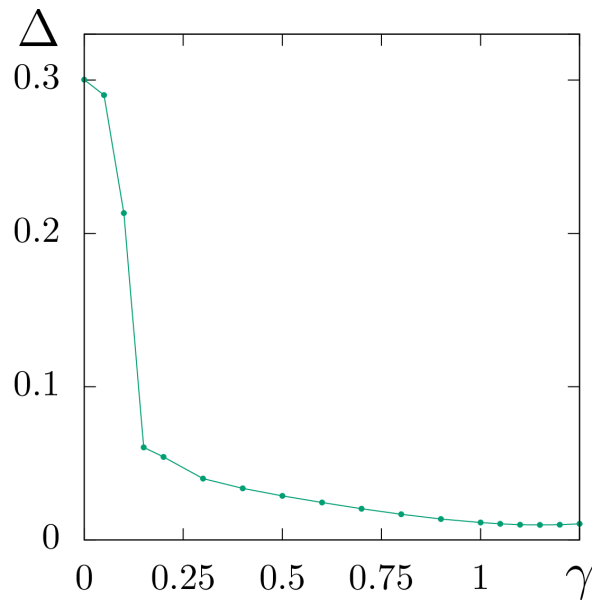


Рисунок 5.10. Зависимость величины  $\Delta$  (5.6) от силы однонаправленной диссипативной связи  $\gamma$  для системы неидентичных ансамблей (5.1).

Параметры как для рисунка 5.5

### 5.4.3 Области вынужденной синхронизации

Перейдем к численному обоснованию второго необходимого условия наблюдения эффекта вынужденной синхронизации, а именно к построению областей синхронизации пространственно-временных структур при вариации управляющих параметров и параметров нелокальной и межслойной связи в системе (5.1).

Начнем с рассмотрения случая, когда значение управляющего параметра индивидуальных элементов первого кольца фиксировано как и прежде  $\alpha_1 = 3.7$ , а управляющий параметр  $\alpha_2$  во втором ансамбле изменяется. При этом во втором кольце при отсутствии взаимодействия с первым кольцом ( $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$ ) в зависимости от начальных условий могут быть реализованы различные пространственно-временные структуры, включающие как химерные, так и периодические.

Что будет происходить с указанными структурами в присутствии воздействия на второй (управляемый) ансамбль со стороны первого (управляющего) ансамбля при  $\gamma > 0$ ? Расчеты показали, что, начиная с  $\gamma \simeq 0.4$ , первый ансамбль индуцирует во втором ансамбле синхронную структуру, которая с большой точностью совпадает с начальной структурой в первом ансамбле, приведенной на рисунке 5.5,а. Синхронный режим во втором кольце является устойчивым и сохраняется неизменным в конечной области синхронизации при вариации параметра  $\alpha_2$ . Результаты расчета области синхронизации для рассматриваемого случая представлены на рисунке 5.11,а при  $\gamma = 0.4$ . В качестве количественного критерия для построения областей синхронизации используется коэффициент взаимной корреляции  $R_i$  (5.4). Границы области синхронизации определялись условием  $R_i > 0.99$ , которое выполняется для всех осцилляторов системы (5.1). Если хотя бы для одного или группы осцилляторов системы справедливо неравенство  $R_i < 0.99$ , то констатируется потеря полной синхронизации и, следовательно, выход из области синхронизации. В

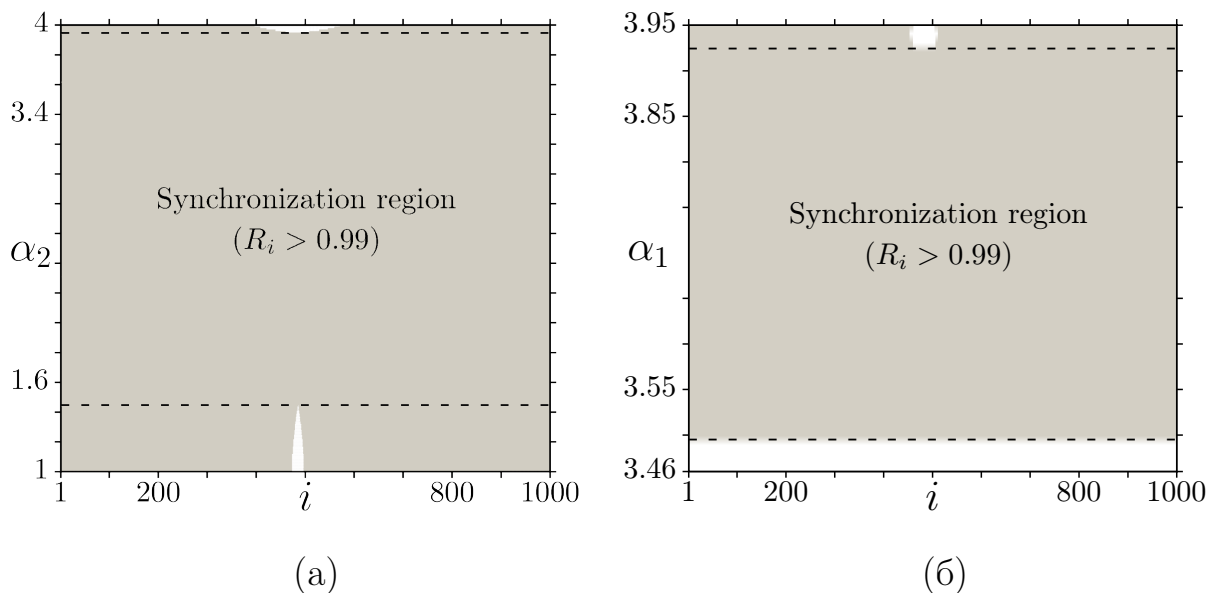


Рисунок 5.11. Области вынужденной синхронизации (ограниченные пунктиром) в пространстве системы (5.1) при изменении параметра  $\alpha_2$  при фиксированном  $\alpha_1 = 3.7$  (а) и при вариации параметра  $\alpha_1$  при фиксированном  $\alpha_2 = 3.85$  (б). Другие параметры:  $\gamma = 0.4$ ,  $\sigma_1 = 0.23$ ,  $\sigma_2 = 0.15$ ,  $R = P = 320$

этом случае можно говорить о кластерной синхронизации взаимодействующих ансамблей.

Как следует из рисунка 5.11,а, при  $\gamma = 0.4$  существует конечная область значений параметра  $\alpha_2$ ,  $1.45 \lesssim \alpha_2 \lesssim 3.9$ , ограниченная пунктирными линиями, в которой коэффициент взаимной корреляции  $R_i > 0.99$  для всех элементов системы (5.1). Таким образом, можно утверждать, что имеет место эффект вынужденной синхронизации. В области синхронизации (рисунок 5.11,а) первый ансамбль индуцирует во втором ансамбле синхронную структуру, которая идентична структуре в управляющем ансамбле. Состояние управляемого ансамбля полностью определяется динамикой управляющей системы, то есть ясно наблюдается вынужденная синхронизация. Области, находящиеся выше и ниже ограниченной пунктиром области на рисунке 5.11,а, соответствуют потере синхронизации частью элементов системы (5.1), для них коэффициент  $R_i < 0.99$ . В этом случае имеет место кластерная синхронизация элементов системы.

Обратимся теперь к другому случаю. Зафиксируем значение управляющего параметра второго ансамбля  $\alpha_2 = 3.85$  и будем изменять значение параметра  $\alpha_1$  первого (управляющего) ансамбля при силе однонаправленной межслойной связи  $\gamma = 0.4$ , соответствующей синхронному режиму в системе (5.1). В этом случае с изменением величины  $\alpha_1$  в первом кольце будут наблюдаться пространственно-временные структуры, которые заметно отличаются от вида структуры во втором кольце при  $\gamma = 0$ . Как показали расчеты, наличие однонаправленной связи со стороны первого ансамбля приводит к возникновению во втором ансамбле структур, синхронных с теми, которые реализуются в первом ансамбле при заданном значении параметра  $\alpha_1$ . Другими словами, однонаправленная межслойная связь заставляет управляемый ансамбль полностью следовать и повторять поведение управляющего ансамбля. Поясним этот эффект более детально.

На рисунке 5.11,б приведены данные расчетов области синхронизации при вариации параметра  $\alpha_1$  и при фиксированном  $\alpha_2 = 3.85$  для значения коэффи-

циента связи  $\gamma = 0.4$ . Область синхронизации ограничена пунктирными линиями при  $\alpha_1 = 3.5$  и  $\alpha_1 = 3.9$ , внутри которой коэффициент взаимной корреляции  $R_i > 0.99$  для всех осцилляторов системы, что четко свидетельствует о реализации эффекта вынужденной синхронизации. Вне области синхронизации (рисунок 5.11,б) пространственно-временные структуры рассинхронизованы и  $R_i < 0.99$ . Отметим, что  $\alpha_1 \simeq 3.5$  является критическим значением параметра первого (управляющего) ансамбля, ниже которого синхронизация между связанными ансамблями полностью отсутствует. При  $\alpha_1 > 3.9$  имеет место кластерная синхронизация: существует небольшая группа осцилляторов, для которых условие  $R_i > 0.99$  не выполняется (рисунок 5.11,б). Действительно, изменение параметра  $\alpha_1$  приводит к изменению характера пространственно-временных структур, но они остаются близкими к идентичным и синхронным в области синхронизации. В этом случае пространственно-временная структура во втором (управляемом) ансамбле как бы «захватывается» структурами первого (управляющего) ансамбля. Результирующие структуры являются синхронными, так как для этих режимов коэффициент взаимной корреляции  $R_i > 0.99$  для всех элементов системы (5.1).

Как уже упоминалось, различным значениям  $\alpha_1$  в первом ансамбле отвечают различные структуры, которые индуцируют идентичные синхронные структуры во втором ансамбле. В качестве примера на рисунке 5.12 приведены пространственно-временные профили структур во взаимодействующих ансамблях для различных значений параметра  $\alpha_1$  управляющего ансамбля.

Проведенные численные расчеты показали, что размер области синхронизации по параметру  $\alpha_1$  зависит от величины силы связи  $\gamma$ . Для иллюстрации этой зависимости на рисунке 5.13 показана область вынужденной синхронизации пространственно-временных структур в системе (5.1), построенная на плоскости параметров  $(\alpha_1, \gamma)$ . В заштрихованной области А коэффициент взаимной корреляции  $R_i > 0.99$  для всех осцилляторов взаимодействующих ансамблей. Это означает, что в области А реализуются синхронные структуры, почти иден-

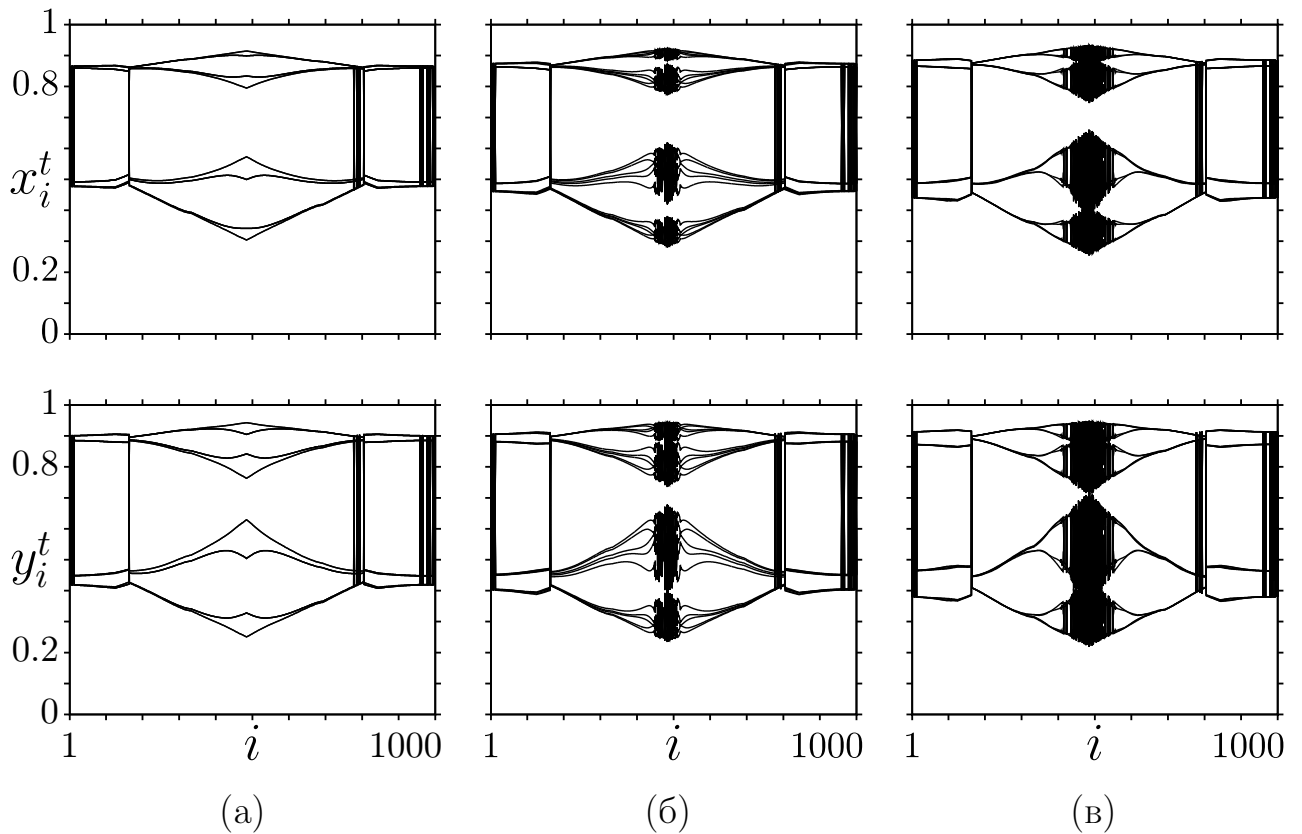


Рисунок 5.12. Пространственно-временные профили синхронных структур в первом (верхний ряд) и втором (нижний ряд) ансамблях для различных значений параметра  $\alpha_1$ : (а) 3.66, (б) 3.7, (в) 3.75. Другие параметры:  $\gamma = 0.4$ ,  $\alpha_2 = 3.85$ ,  $\sigma_1 = 0.23$ ,  $\sigma_2 = 0.15$ ,  $R = P = 320$

тичные структурам в первом кольце. Необходимо отметить следующее. При вариации параметров  $\alpha_1$  и  $\gamma$  внутри области А на рисунке 5.13 будут наблюдаться различные пространственно-временные структуры в силу изменения параметра  $\alpha_1$  в первом кольце. Однако, независимо от этого, всюду в области А структуры в первом и втором кольцах будут идентичны и синхронны.

Из рисунка 5.13 также хорошо видно, что область синхронизации имеет форму «языка», характеризуется некоторым пороговым значением (в данном случае  $\gamma_{th} \approx 0.333$ ) и расширяется по параметру  $\alpha_1$  при увеличении силы связи  $\gamma$ . Исследования показали, что наличие порога синхронизации по параметру  $\gamma$  обусловлено сложностью и различием пространственно-временных структур, устанавливающихся в ансамблях в отсутствие взаимодействия. Вид установив-



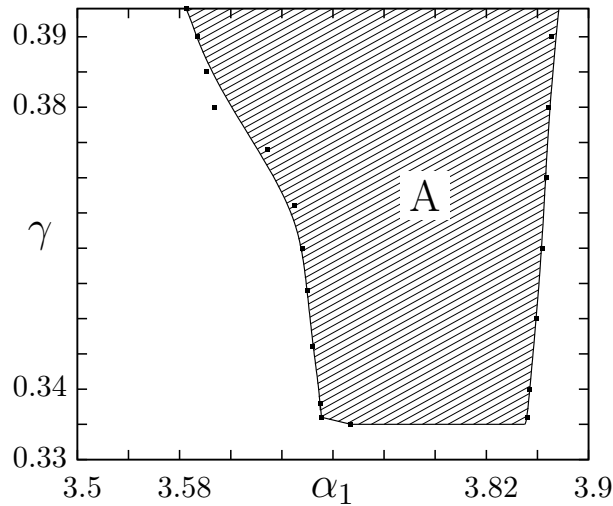


Рисунок 5.13. Область вынужденной синхронизации пространственно-временных структур в системе (5.1) на плоскости параметров  $(\alpha_1, \gamma)$ . Параметры:  $\alpha_2 = 3.85$ ,  $\sigma_1 = 0.23$ ,  $\sigma_2 = 0.15$ ,  $R = P = 320$

шихся режимов зависит от начальных условий, значений управляющих параметров индивидуальных элементов ансамблей и от значений параметров нелокальной связи каждого ансамбля ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $R$  и  $P$ ). В качестве примера и иллюстрации сказанного на рисунке 5.14 приведена зависимость величины порого-

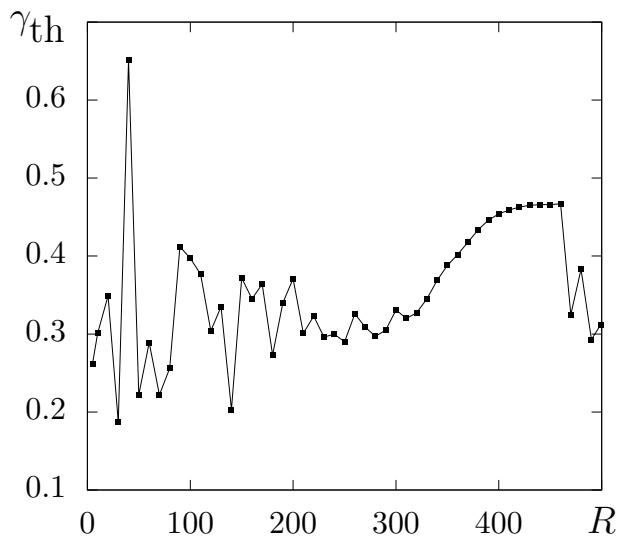


Рисунок 5.14. Зависимость порогового значения  $\gamma_{th}$  области вынужденной синхронизации от параметра  $R$  первого кольца. Другие параметры:  $\alpha_1 = 3.7$ ,  $\alpha_2 = 3.85$ ,  $\sigma_1 = 0.23$ ,  $\sigma_2 = 0.15$ ,  $P = 320$

го значения  $\gamma_{th}$  области вынужденной синхронизации от изменения значений радиуса нелокальной связи  $R$  в первом (управляющем) кольце.

Как видно из приведенного графика (рисунок 5.14), характер зависимости является достаточно сложным и нелинейным, что объясняется сложностью и разнообразием пространственно-временных структур, реализуемых в первом кольце при изменении параметра нелокальной связи  $R$ .

#### 5.4.4 Двупараметрические диаграммы режимов

С целью более полного и детального анализа эффекта вынужденной синхронизации в системе связанных ансамблей логистических отображений (5.1) с однонаправленной диссипативной связью были рассчитаны и построены двупараметрические диаграммы, отражающие наличие синхронных и несинхронных режимов при изменении значений различных параметров системы и силы межслойной связи  $\gamma$ . В этом случае количественная оценка степени синхронности пространственно-временных структур проводилась с помощью среднеквадратичного отклонения значений  $x_i$  и  $y_i$  симметричных элементов взаимодействующих ансамблей с использованием усреднения как по времени, так и по элементам ансамбля  $\Delta$  (5.6). На всех построенных диаграммах различные цветовые оттенки соответствуют разным значениям величины  $\Delta$ .

На рисунке 5.15 приведены двупараметрические диаграммы режимов в системе (5.1) в зависимости от управляющих параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и силы связи  $\gamma$ . Как видно из рисунка 5.15,а, для всего диапазона изменения параметра  $\alpha_1$  ( $3.5 \leq \alpha_1 \leq 3.9$ ) вынужденная синхронизация пространственно-временных структур реализуется в интервале изменения силы связи  $\gamma \in [0.18, 1.2]$ . В данной области синхронизации значения характеристики  $\Delta < 0.1$ . В области малых значений  $\gamma < 0.18$  синхронизация структур не достигается. В этом случае значения девиации  $\Delta$  довольно существенные и лежат в интервале  $0.18 \leq \Delta \leq 0.4$ .

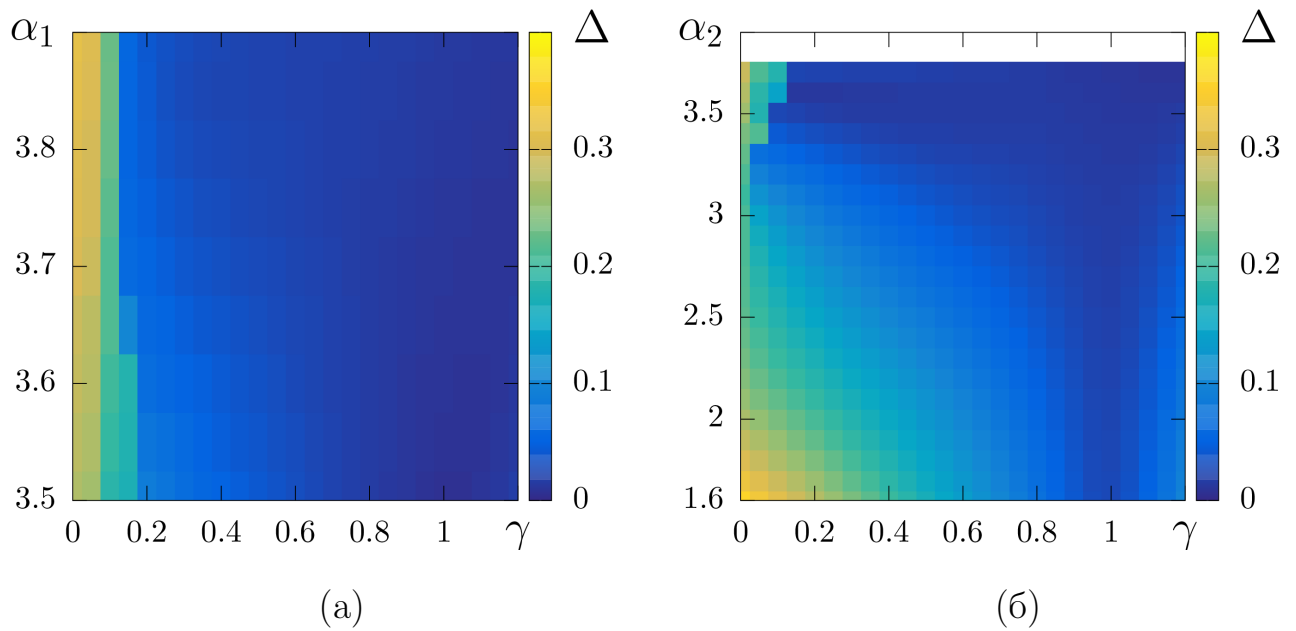


Рисунок 5.15. Двупараметрические диаграммы синхронных и несинхронных режимов в системе (5.1) при изменении параметра  $\alpha_1$  при  $\alpha_2 = 3.85$  (а) и параметра  $\alpha_2$  при  $\alpha_1 = 3.7$  (б) и вариации силы связи  $\gamma$ . Другие параметры:  $\sigma_1 = 0.23$ ,  $\sigma_2 = 0.15$ ,  $R = P = 320$

Как видно из диаграммы, при небольших значениях параметра  $\alpha_1$ , например,  $\alpha_1 = 3.5$ , требуется значительная сила связи ( $\gamma > 0.5$ ) для наблюдения эффективной синхронизации структур, для которой  $\Delta < 0.02$ . Как показали расчеты, в отсутствие связи при  $\alpha_1 = 3.5$ ,  $\sigma_1 = 0.23$  и  $R = 320$  в первом кольце реализуется пространственно-однородный режим, соответствующий периодической динамике во времени всех элементов ансамбля. Очевидно, что для воспроизведения этой структуры во втором кольце, находящемся в режиме пространственно-временного хаоса, требуется значительно увеличить силу однонаправленной связи. При увеличении значений параметра  $\alpha_1$  в первом ансамбле возникают фазовые и амплитудные химерные структуры (рисунок 5.5,а). В этом случае эффект синхронизации проявляется, уже начиная с достаточно небольших значений межслойной связи  $\gamma \geq 0.18$  для значений параметра  $\alpha_1 \in [3.61, 3.9]$  (рисунок 5.15,а). С увеличением параметра  $\alpha_1$  и усилением силы связи  $\gamma$  значения характеристики  $\Delta < 0.02$ . Данный факт можно также объяснить тем, что при

увеличении значения  $\alpha_1$  уменьшается степень неидентичности взаимодействующих ансамблей по управляющим параметрам ( $\alpha_2 = 3.85$ ), что способствует более быстрому достижению синхронизации структур.

Если зафиксировать  $\alpha_1 = 3.7$  и изменять параметры  $\alpha_2$  и  $\gamma$ , то в результате расчетов значений величины  $\Delta$  (5.6) получим диаграмму режимов, приведенную на рисунке 5.15,б. В отличие от предыдущего случая (рисунок 5.15,а), здесь наблюдается достаточно сильная зависимость реализации синхронных структур от вариации параметра  $\alpha_2$  во втором кольце. При значениях  $\alpha_2$ ,  $1.6 \leq \alpha_2 \leq 2.5$  вынужденная синхронизация имеет место только при довольно большой силе связи  $\gamma > 0.7$ , и в этом случае  $\Delta < 0.02$ . С увеличением  $\alpha_2$  интервал значений  $\gamma$ , при которых  $\Delta < 0.02$ , существенно расширяется и синхронизация структур может наблюдаться уже при  $\gamma \approx 0.16$  для  $\alpha_2 > 3.3$ . Данный результат обусловлен, как и в предыдущем случае, фактом уменьшения неидентичности связанных ансамблей по управляющим параметрам. Таким образом, на диаграмме рисунка 5.15,б можно выделить область вынужденной синхронизации (темно-синего цвета), в которой  $\Delta < 0.02$ . Данная область по форме напоминает клюв, расширяющийся по мере увеличения значения параметра  $\alpha_2$ .

Аналогичные расчеты были проведены при вариации значений параметров нелокальной связи взаимодействующих ансамблей и построены двухпараметрические диаграммы режимов в системе (5.1) при изменении силы связи  $\gamma$ . Соответствующие диаграммы приведены на рисунке 5.16 для различных значений радиуса связи  $R$  и  $P$  и на рисунке 5.17 при изменении силы нелокальной связи  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Как видно из рисунка 5.16, диаграммы синхронных и несинхронных режимов в обоих случаях выглядят практически одинаково. Для всего диапазона изменения значений радиуса связи как в первом кольце  $R$  (рисунок 5.16,а), так и во втором кольце  $P$  (рисунок 5.16,б) вынужденная синхронизация наблюдает-

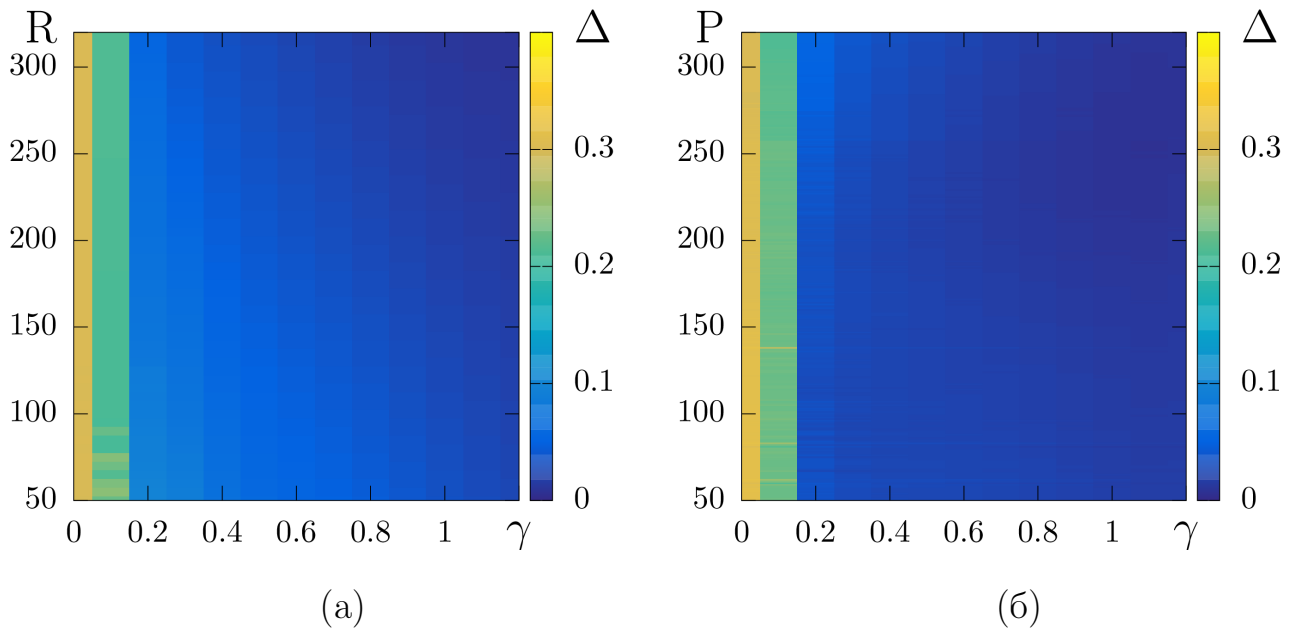


Рисунок 5.16. Двупараметрические диаграммы синхронных и несинхронных режимов в системе (5.1) при изменении параметра  $R$  при  $P = 320$  (а) и параметра  $P$  при  $R = 320$  (б) и вариации силы связи  $\gamma$ . Другие параметры:  $\alpha_1 = 3.7$ ,  $\alpha_2 = 3.85$ ,  $\sigma_1 = 0.23$ ,  $\sigma_2 = 0.15$

ся при изменении силы межслойной связи в интервале  $\gamma \in [0.18, 1.2]$ , в котором значения характеристики  $\Delta < 0.02$ .

На диаграмме режимов при изменении силы нелокальной связи в первом кольце  $\sigma_1$  (рисунок 5.17,а) при фиксированном  $\sigma_2 = 0.15$  можно выделить две области синхронизации, отвечающих условию  $\Delta < 0.02$ . Первая область имеет место при малых значениях  $0.1 < \sigma_1 < 0.22$  и достаточно большой силе межслойной связи  $\gamma > 0.4$ . Данная ситуация соответствует случаю практически идентичных по параметрам нелокальной связи взаимосвязанных ансамблей. Вторая область синхронизации на диаграмме соответствует достаточно сильной силе нелокальной связи в первом ансамбле  $\sigma_1 \geq 0.32$ . В этой области синхронные структуры в кольцах реализуются при силе связи  $\gamma \in [0.38, 1.2]$ . При этом среднеквадратичное отклонение значений переменных  $x_i$  и  $y_i$   $\Delta < 0.02$  (рисунок 5.17,а).

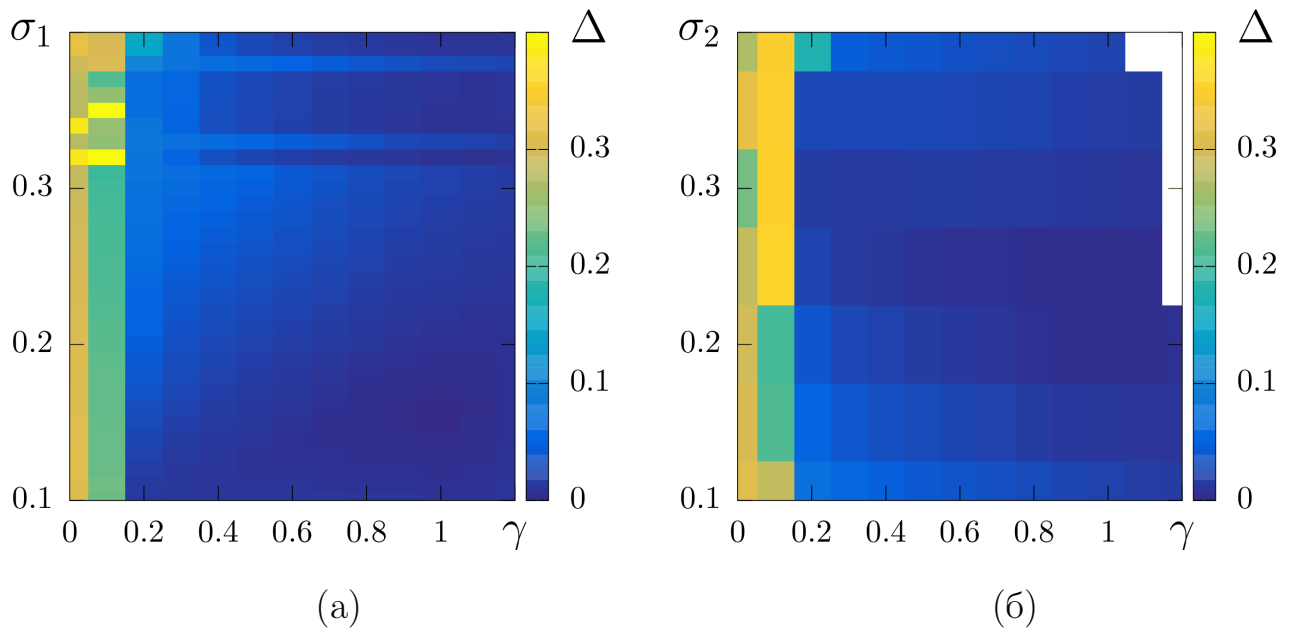


Рисунок 5.17. Двупараметрические диаграммы синхронных и несинхронных режимов в системе (5.1) при изменении параметра  $\sigma_1$  при  $\sigma_2 = 0.15$  (а) и параметра  $\sigma_2$  при  $\sigma_1 = 0.23$  (б) и вариации силы связи  $\gamma$ . Другие параметры:

$$\alpha_1 = 3.7, \alpha_2 = 3.85, R = P = 320$$

Немного отличается от предыдущего случай реализации режима вынужденной синхронизации в системе (5.1) при вариации значений силы нелокальной связи во втором (управляемом) кольце  $\sigma_2$  при фиксированном  $\sigma_1 = 0.23$ . Соответствующая диаграмма режимов на плоскости параметров  $(\gamma, \sigma_2)$  представлена на рисунке 5.17,б. Эффект вынужденной синхронизации, при котором  $\Delta \lesssim 0.02$ , имеет место для  $\sigma_2 \in [0.18, 0.3]$  и  $\gamma \in [0.18, 1.1]$ . Кроме того, как видно из приведенной диаграммы, при сильной силе межслойной связи  $\gamma > 1.1$  и больших значениях силы нелокальной связи  $\sigma_2 > 0.37$  (белая область на рисунке 5.17,б) вынужденная синхронизация не достигается, траектории в этом случае уходят на бесконечность.

Если сопоставить двупараметрические диаграммы, приведенные на рисунках 5.15,а, 5.16, 5.17, то можно отметить определенное сходство, которое во всех случаях проявляется в достаточно резком переходе к режиму эффективной синхронизации, характеризующийся значениями  $\Delta \lesssim 0.02$ . Данный переход

наблюдается при  $\gamma \simeq 0.18$  и согласуется с зависимостью  $\Delta(\gamma)$ , показанной на рисунке 5.10.

## 5.5 Взаимная синхронизация диссипативно связанных ансамблей

Обратимся теперь к анализу эффекта взаимной синхронизации пространственно-временных структур, включая химерные, в системе диссипативно связанных ансамблей (5.1). В этом случае межслойная связь является взаимной и симметричной  $\gamma_{21} = \gamma_{12} = \gamma > 0$ , а функции связи задаются соотношениями (5.2).

### 5.5.1 Случай идентичных ансамблей

Рассмотрим сначала взаимную синхронизацию структур в случае идентичных ансамблей. При выбранных значениях параметров  $\alpha_1 = \alpha_2 = 3.8$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.32$ ,  $R = P = 320$ , случайно распределенных начальных условиях и в отсутствие связи  $\gamma = 0$  ансамбли демонстрируют различные пространственно-временные структуры, как показано на рисунке 5.2 и описано в разделе 5.4.1.

Как показывают численные расчеты, при введении симметричной связи  $\gamma \neq 0$  относительно малой интенсивности уже наблюдается эффект взаимной синхронизации пространственно-временных структур. Результаты расчетов зависимости среднеквадратичного отклонения  $\Delta$  (5.6) от  $\gamma$  приведены на рисунке 5.18. Как следует из данного графика, существует некоторая конечная область значений коэффициента связи  $\gamma \in [0.1, 0.6]$ , в которой величина  $\Delta$  строго равна нулю. Это говорит о том, что структуры, реализуемые в этом случае во

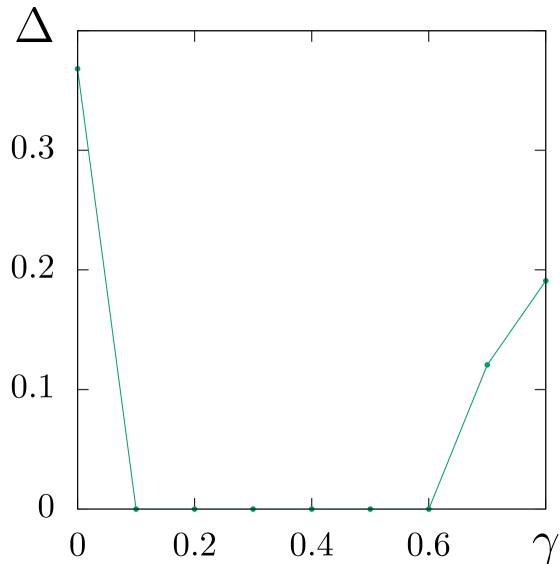


Рисунок 5.18. Зависимость величины  $\Delta$  (5.6) от силы симметричной связи  $\gamma$  в системе идентичных диссипативно связанных ансамблей (5.1) при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 3.8, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.32, R = P = 320$$

взаимодействующих ансамблях, являются идентичными и синхронными, что четко свидетельствует о наличии эффекта взаимной синхронизации. В областях слабой ( $0 < \gamma < 0.1$ ) и сильной ( $\gamma > 0.6$ ) межслойной связи,  $\Delta$  отлично от нуля и, следовательно, эффекта взаимной синхронизации не наблюдается.

На рисунке 5.19 в качестве примера приведены пространственно-временные профили структур в каждом из ансамблей для различных значений силы связи  $\gamma$ . Из рисунка следует, что в результате взаимодействия в ансамблях устанавливается синхронный пространственно-временной режим, кардинально отличающийся от начальных структур (см. рисунок 5.2). Взаимосвязанные системы как бы подстраиваются друг под друга и взаимно выбирают определенный синхронный режим. Подобный эффект является характерным и типичным для явления взаимной синхронизации. Стоит также отметить, что с изменением силы межслойной связи  $\gamma$  результирующие синхронные структуры в кольцах видоизменяются (рисунок 5.19). Однако при этом значение  $\Delta$  всегда остается равным нулю (рисунок 5.18).



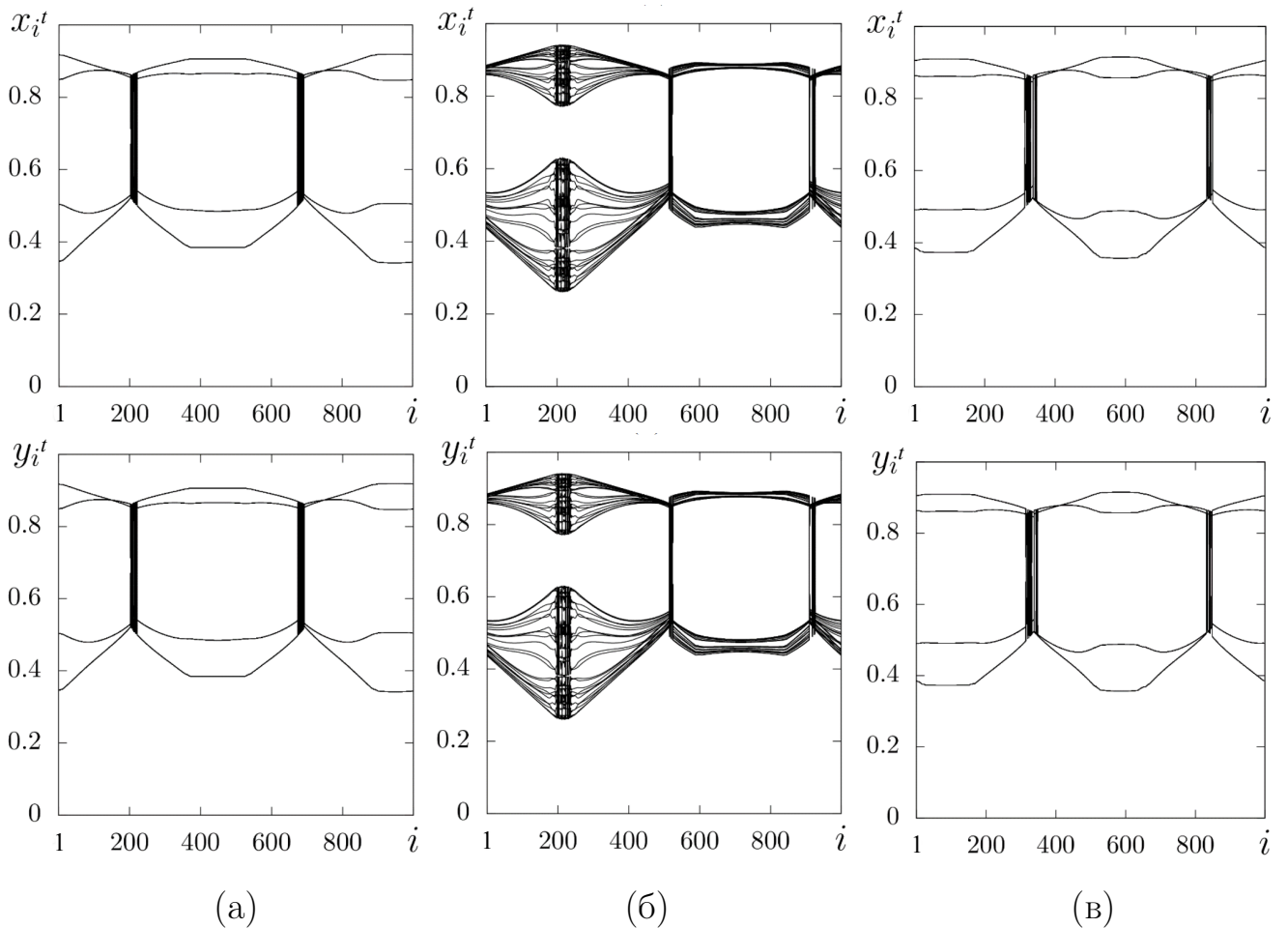


Рисунок 5.19. Пространственно-временные профили синхронных структур в ансамблях  $x_i$  (верхний ряд) и  $y_i$  (нижний ряд) для различных значений силы связи  $\gamma$ : (а) 0.1, (б) 0.3, (в) 0.5. Другие параметры как для рисунка 5.18

### 5.5.2 Случай неидентичных систем

Введем в рассматриваемые взаимодействующие ансамбли расстройку (5.1) по управляющим параметрам:  $\alpha_1 = 3.7$ ,  $\alpha_2 = 3.85$ . Остальные параметры ансамблей полагаются одинаковыми и фиксированными:  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.28$ ,  $R = P = 320$ . При данных выбранных значениях параметров и в отсутствие взаимодействия ( $\gamma = 0$ ) первое кольцо находится в пространственно-однородном (периодическом) режиме, а во втором кольце реализуется химерная структура, включающая 1 некогерентный кластер амплитудной химеры (осцилляторы с номерами  $150 \leq i \leq 230$ ) и 2 некогерентных кластера ( $400 \leq i \leq 500$  и

850  $\leq i \leq 950$ ). Соответствующие пространственно-временные профили динамики колец  $x_i^t$  и  $y_i^t$  приведены на рисунке 5.20,а.

Введем взаимную симметричную связь  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$  и проведем численный анализ эволюции пространственно-временных структур в системе (5.1) при изменении силы межслойной связи в интервале  $[0, 0.8]$ . В данном случае система (5.1) итерруется в течение  $1.2 \times 10^6$  раз и первые  $10^6$  итераций отбрасываются в качестве периода установления.

Как видно из рисунка 5.20,б,в, при введении взаимной симметричной связи пространственно-временные структуры в кольцах начинают сближаться и при  $\gamma > 0.07$  происходит синхронизация химерных структур. Это также подтверждается расчетом коэффициента взаимной корреляции  $R_i$ , который в этом

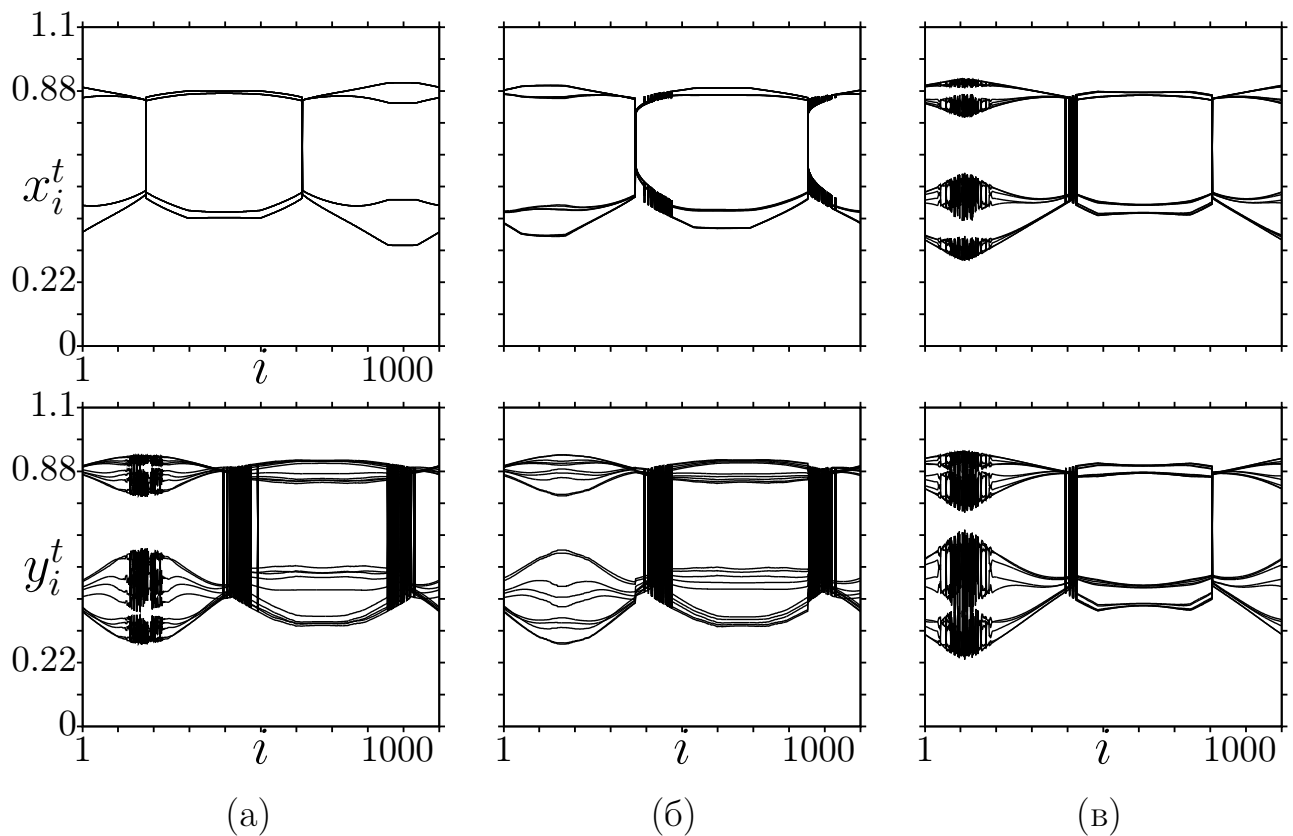


Рисунок 5.20. Пространственно-временные профили динамики первого кольца  $x_i^t$  (верхний ряд) и второго кольца  $y_i^t$  (нижний ряд) для различных значений силы взаимной межслойной связи  $\gamma$ : (а) 0.0, (б) 0.025, (в) 0.075. Параметры системы (5.1):  $\alpha_1 = 3.7$ ,  $\alpha_2 = 3.85$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.28$ ,  $R = P = 320$

случае больше 0.99. Таким образом, можно говорить о реализации эффекта взаимной синхронизации в системе (5.1). Как и в случае идентичных ансамблей, рассмотренном в разделе 5.5.1, синхронная структура, установившаяся во взаимодействующих ансамблях при  $\gamma = 0.075$  (рисунок 5.20,в), отличается от соответствующих структур, реализуемых в данных ансамблях в отсутствие связи между ними (рисунок 5.20,а). Подобная ситуация сохраняется и наблюдается при увеличении силы взаимной связи. В качестве иллюстрации на рисунке 5.21 показаны пространственно-временные профили синхронных структур во взаимодействующих ансамблях для  $\gamma = 0.2$  и  $\gamma = 0.5$ .

Как видно из рисунка, профили реализуемых во взаимодействующих ансамблях структур существенно изменяются при увеличении силы связи, но остаются синхронными. Данное наблюдение подтверждается расчетами среднеквадратичного отклонения по времени  $d_i$  (5.5) и по элементами ансамбля  $\Delta$  (5.6) при изменении силы межслойной связи  $\gamma$ . Соответствующие численные результаты приведены на рисунке 5.22.

Из рисунка 5.22,а ясно видно, что каждому значению силы связи  $\gamma$  соответствует определенная зависимость значений  $d_i$  в пространстве системы (5.1). Причем эти распределения отличны друг от друга. Это объясняется тем, что при изменении силы межслойной связи в результате взаимной синхронизации в ансамблях устанавливаются каждый раз абсолютно другие синхронные пространственно-временные структуры. Эти режимы могут быть довольно сложными и представлять собой химерные структуры, состоящие из нескольких некогерентных кластеров, как показано на рисунках 5.20,в и 5.21,а. При других значениях  $\gamma$ , наоборот, результирующая синхронная структура является довольно простой и может соответствовать пространственно-однородному режиму, как, например, на рисунке 5.21,б для  $\gamma = 0.5$ .

Тем не менее, во всех случаях, приведенных на рисунке 5.22,а, значения  $d_i < 0.027$ , что определенно может свидетельствовать о реализации эффекта частичной (или нестрогой) взаимной синхронизации в случае неидентич-

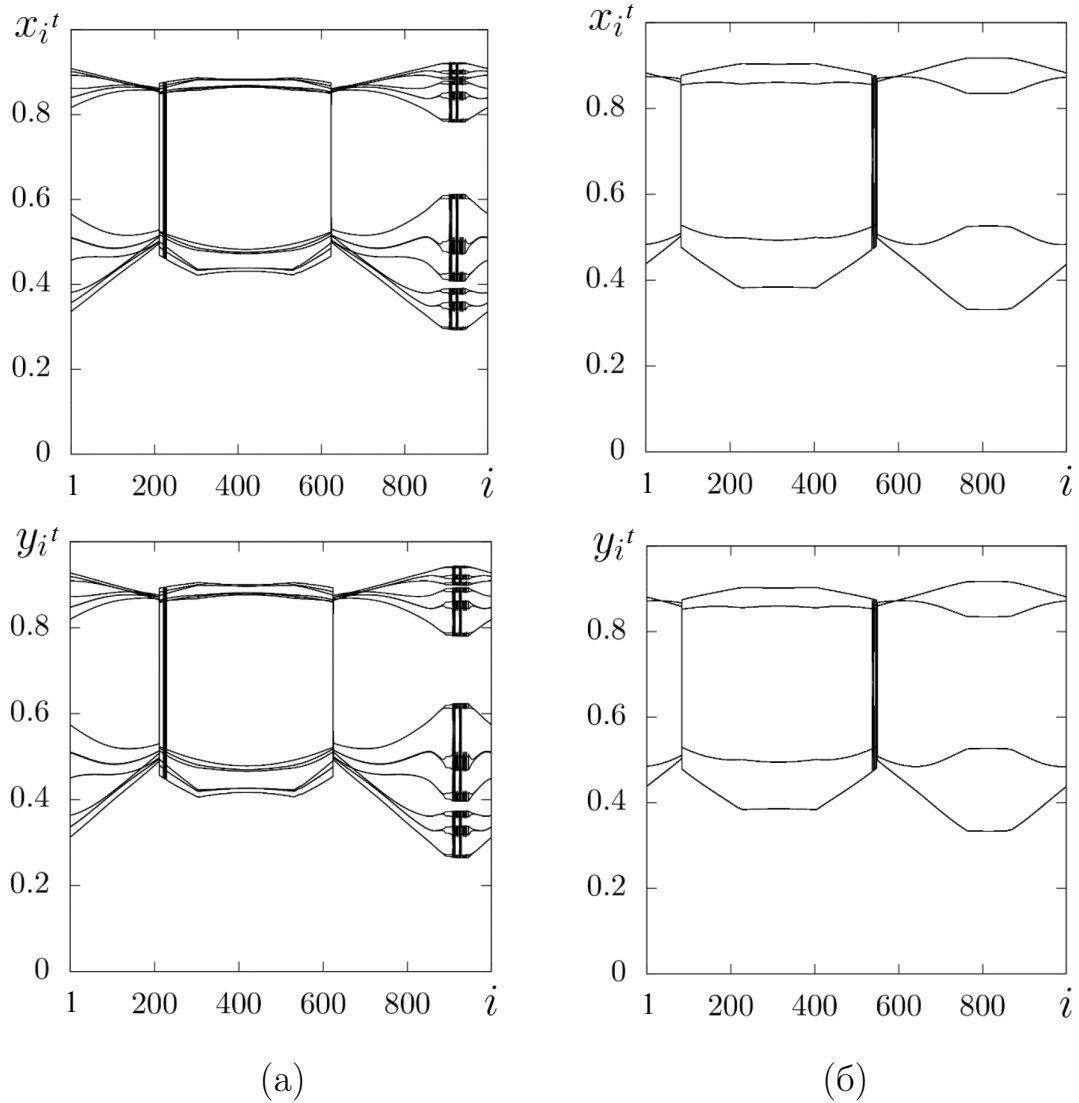


Рисунок 5.21. Пространственно-временные профили динамики первого кольца (верхний ряд) и второго кольца (нижний ряд) в случае взаимной синхронизации при различных значениях  $\gamma$ : (а) 0.2, (б) 0.5. Параметры системы (5.1) как для рисунка 5.20

ных взаимодействующих ансамблей. Как видно из рисунка 5.22,а,б, обе величины  $d_i$  и  $\Delta$  принимают минимальные, близкие к нулю значения при  $\gamma = 0.5$ :  $d_i = \Delta = 0.0015$ . Если в качестве критерия взаимной синхронизации принять выполнение условия  $\Delta < 0.02$ , то на графике зависимости  $\Delta(\gamma)$  (рисунок 5.22,б) можно выделить конечную область значений параметра связи  $\gamma \in [0.1, 0.6]$ , отвечающую конечной области взаимной синхронизации.

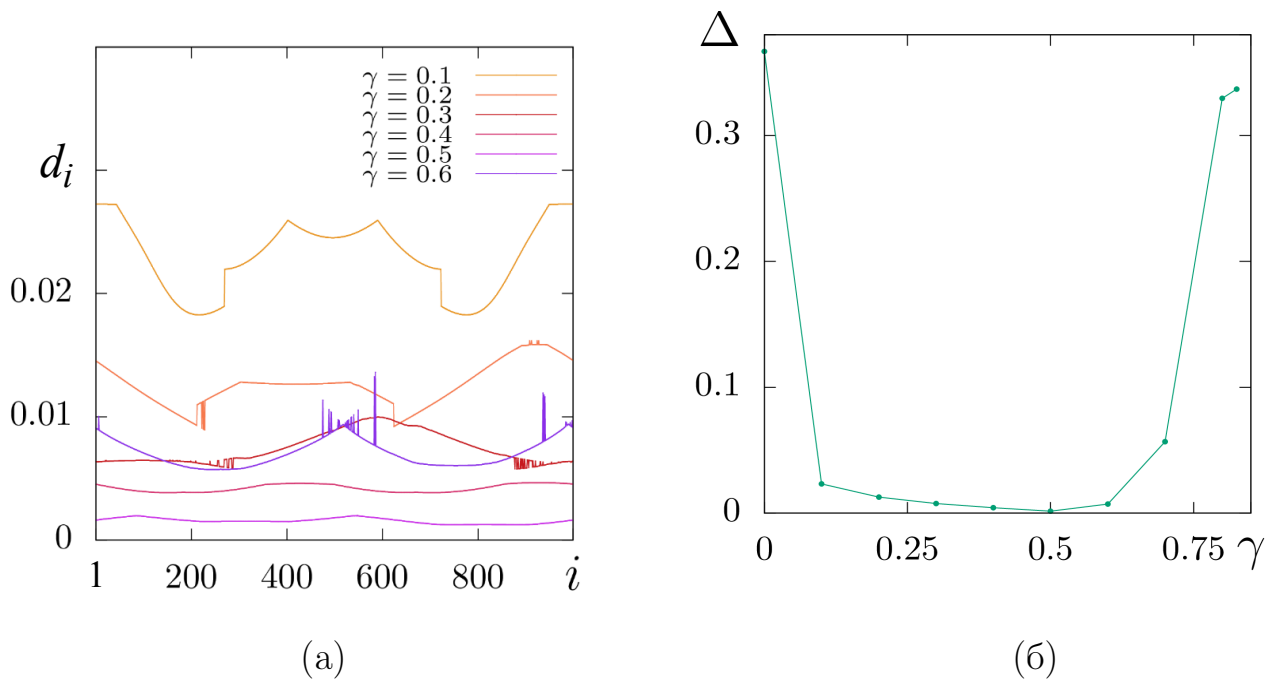


Рисунок 5.22. Зависимости величин  $d_i$  (5.5) от номера элемента  $i$  (а) и  $\Delta$  (5.6) от силы межслойной связи  $\gamma$  (б) в случае взаимной синхронизации структур в системе (5.1). Параметры как для рисунка 5.20

Наличие конечной области взаимной синхронизации можно также оценить на основе расчетов значения коэффициента взаимной корреляции  $R_i$  (5.4) для элементов системы (5.1). Как было показано, в случае синхронизации  $R_i \geq 0.99$  для всех  $i = 1, 2, \dots, N$ . Используя данный критерий, была построена область синхронизации по силе связи между кольцами  $\gamma$ , показанная на рисунке 5.23.

Эффект взаимной синхронизации имеет место в конечной области, ограниченной на рисунке 5.23 горизонтальными пунктирными линиями и соответствующей интервалу изменения силы связи  $0.08 \leq \gamma \leq 0.72$ . Внутри этой области  $R_i \geq 0.99$  для всех элементов взаимодействующих ансамблей (5.1).

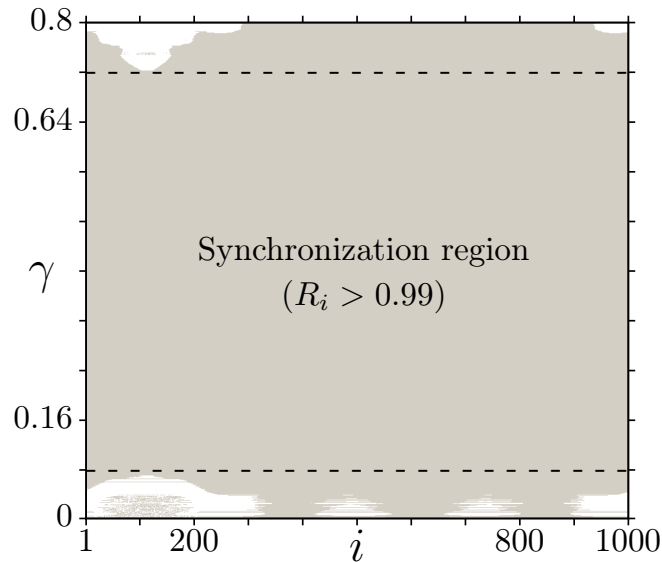


Рисунок 5.23. Область взаимной синхронизации (ограниченная горизонтальными пунктирными линиями) пространственно-временных структур в системе (5.1) по силе связи между кольцами  $\gamma$ . Параметры системы как для рисунка 5.20

## 5.6 Сравнение с классическими эффектами синхронизации периодических автоколебаний

Качественно эффекты синхронизации пространственно-временных структур, включая химерные, описанные выше, можно сравнить с классическим эффектом синхронизации периодических автоколебаний. Действительно, в этом случае в качестве простейшей структуры мы можем рассматривать спектральную линию колебаний на частоте  $\omega$ . Тогда при вынужденной синхронизации поведение управляющего генератора будет характеризоваться спектральной линией на частоте  $\omega_1$ , а структура управляемого генератора — спектральной линией на частоте  $\omega_0$ . В области синхронизации осуществляется эффект захвата частоты: частота управляемого генератора  $\omega_0$  смещается и совпадает с частотой управляющего генератора  $\omega_0 = \omega_1$ . Это равенство сохраняется в области синхронизации. Изменение частоты  $\omega_1$  приводит к изменению  $\omega_0$  так, что в области

синхронизации равенство  $\omega_0 = \omega_1$  сохраняется. В случае взаимной синхронизации двух генераторов с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  происходит аналогичное явление с той лишь разницей, что в области синхронизации может установиться либо частота  $\omega_1$ , либо  $\omega_2$ , либо некоторое промежуточное значение частоты  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ .

Как следует из приведенных результатов численных исследований динамики ансамблей (5.1), представленных выше, в случае взаимодействия двух ансамблей из нелинейных дискретных систем мы имеем качественно эквивалентную картину. При вынужденной синхронизации пространственно-временная структура управляющего ансамбля «захватывает» структуру управляемого ансамбля и идентичные структуры сохраняются в области синхронизации (см. рисунки 5.3, 5.7, 5.11–5.13). При взаимной синхронизации реализуется взаимозахват структур во взаимодействующих ансамблях. При этом синхронные структуры отличаются от исходных структур при отсутствии связи (см. рисунки 5.19–5.21), что также характерно для взаимной синхронизации связанных периодических автогенераторов.

Наконец, показательным является результат, представленный на рисунке 5.13, характеризующий область вынужденной синхронизации пространственно-временных структур. График рисунка 5.13 можно качественно сопоставить с классической теорией вынужденной синхронизации периодических автоколебаний. На основе указанной теории область вынужденной синхронизации изображается в виде треугольной области на плоскости «амплитуда внешнего сигнала — частотная расстройка». При этом ширина области синхронизации сужается с уменьшением амплитуды и обращается в нуль при нулевом значении амплитуды воздействия. В нашем случае роль «амплитуды воздействия» играет коэффициент связи  $\gamma$ , который определяет амплитуду колебаний во втором ансамбле. Параметр  $\alpha_1$  при фиксированном  $\alpha_2 = \text{const}$  определяет «расстройку» структур  $\Delta\alpha = |\alpha_1 - \alpha_2|$ . В отличие от синхронизации периодических автоколебаний в случае взаимодействия ансамблей имеет место порог синхронизации по коэффициенту  $\gamma$  (см. рисунок 5.13).

Наличие порога является следствием неидентичности взаимодействующих ансамблей (5.1), а его высота зависит от параметров нелокальной связи каждого ансамбля.

## 5.7 Эффекты синхронизации в системе ансамблей с инерционной связью

В разделах 5.4 и 5.5 были исследованы и установлены эффекты выеужденной и взаимной синхронизации пространственно-временных структур, включая химерные структуры различных типов, при диссипативной связи (5.2) между идентичными и неидентичными ансамблями нелокально связанных логистических отображений (5.1). Рассмотрим в качестве иллюстрации и сравнения случай инерционной связи между ансамблями, которая задается выражениями (5.3).

Обратимся вначале к системе идентичных ансамблей нелокально связанных логистических отображений. Все значения параметров соответствуют случаю идентичных ансамблей с диссипативным типом связи:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 3.8$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.32$ ,  $R = P = 320$ . Начальные условия являются также случайно распределенными в интервале  $[0, 1]$  для всех элементов системы (5.1), но их реализация выбрана той же самой, что и в предыдущем случае. Таким образом, исходные пространственно-временные структуры, установившиеся в идентичных ансамблях в отсутствие связи между ними, аналогичны рассмотренным выше (раздел 5.4.1) и показаны на рисунке 5.2.

**Однонаправленная связь.** Рассмотрим случай, когда инерционная связь является однонаправленной. При этом второе кольцо находится под влиянием первого кольца. Сила межслойной связи определяется коэффициентом  $\gamma_{12} = \gamma > 0$ , при этом  $\gamma_{21} = 0$ . При увеличении силы связи структура во



втором (управляемом) кольце под воздействием со стороны первого (управляющего) кольца начинает сильно видоизменяться по сравнению с начально установленной структурой. Соответствующие пространственно-временные профили структур во втором ансамбле приведены на рисунке 5.24 для различных значений силы связи  $\gamma$ .

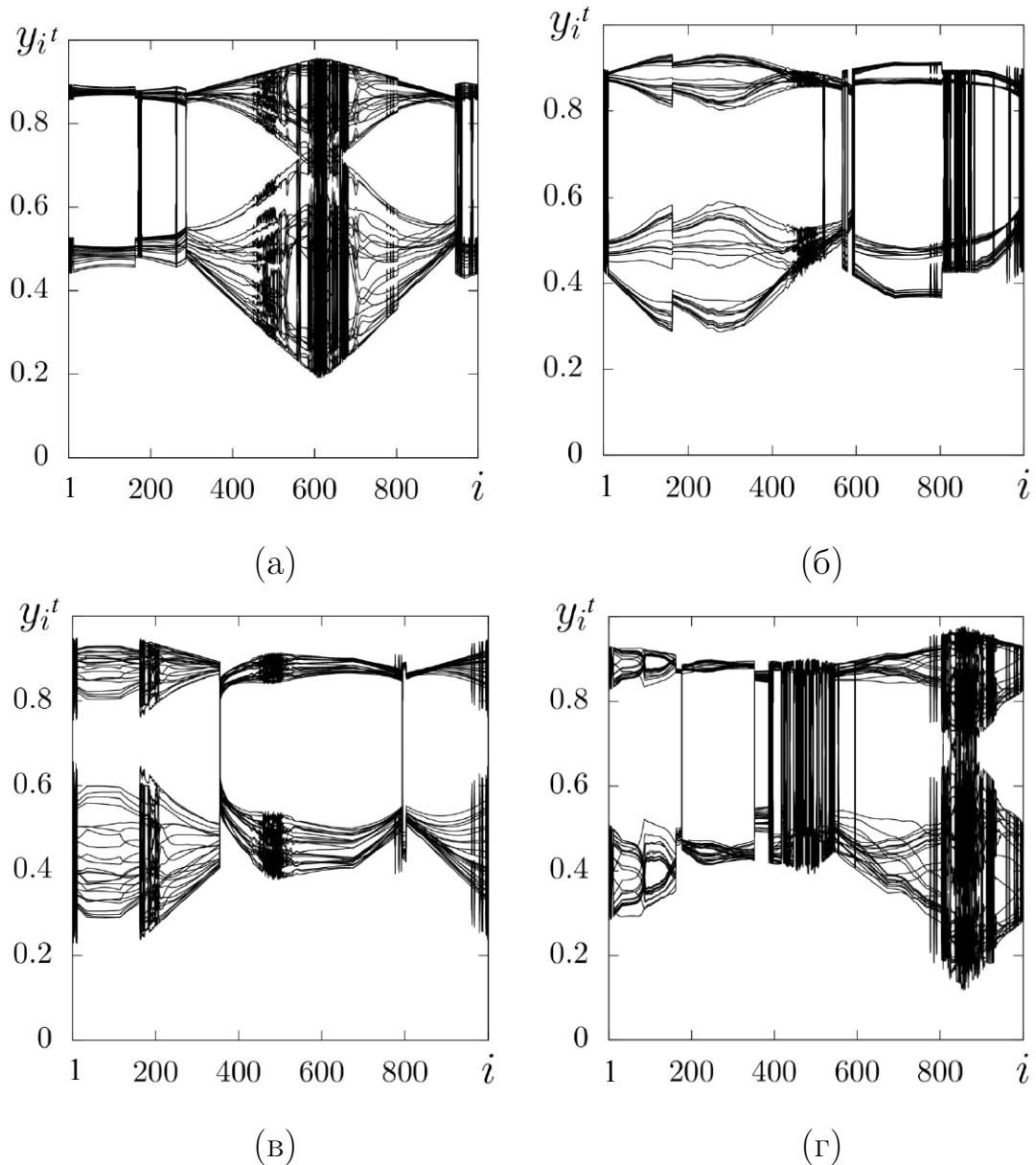


Рисунок 5.24. Пространственно-временные профили динамики второго ансамбля  $y_i$  в случае однонаправленно связанных ансамблей (5.1) с инерционной связью (5.3) для различных значений силы связи  $\gamma$ : (а) 0.02, (б) 0.06, (в) 0.08, (г) 0.1. Параметры:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 3.8$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.32$ ,  $R = P = 320$

Как видно из приведенных профилей, с увеличением силы однонаправленной связи пространственно-временные структуры во втором кольце остаются достаточно сложными, а иногда даже существенно усложняются по сравнению с начальным режимом. Однако, из сравнения рисунков 5.2,а и 5.24 следует, что при всех указанных значениях  $\gamma$  структура, реализуемая во втором кольце, сильно отличается от структуры в первом кольце. Данное обстоятельство подтверждается расчетами среднеквадратичного отклонения  $\Delta$  (5.6) при изменении значения силы связи  $\gamma$ . График зависимости  $\Delta(\gamma)$  приведен на рисунке 5.25,а. Как видно из рисунка, значение величины  $\Delta > 0.22$  для всех значений  $\gamma$  в диапазоне его изменения  $[0, 0.1]$ . Минимальное значение  $\Delta \approx 0.22$  достигается только при  $\gamma = 0.08$ .

Таким образом, на основе анализа пространственно-временных профилей структур в управляемом ансамбле  $y_i$  (рисунок 5.24) и зависимости  $\Delta(\gamma)$  (рисунок 5.25,а) можно заключить, что эффект вынужденной синхронизации структур в случае инерционно связанных идентичных ансамблей не реализуется.

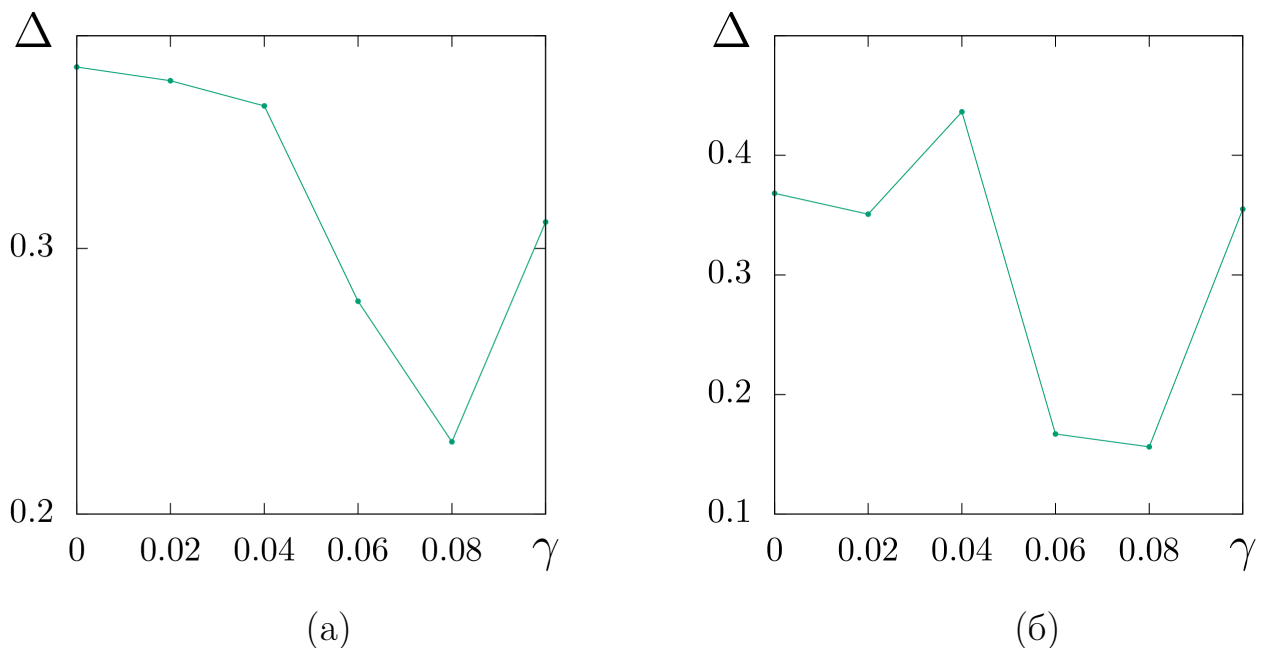


Рисунок 5.25. Зависимости величины  $\Delta$  (5.6) от силы межслойной связи  $\gamma$  при однонаправленной (а) и взаимной (б) инерционной связи между ансамблями (5.1). Параметры как для рисунка 5.24



не могут взаимоподстроиться друг к другу. Установившиеся пространственно-временные режимы хотя и отличаются от начальных структур, но абсолютно не совпадают ни для одного значения  $\gamma$ . Среднеквадратичное отклонение значений  $x_i$  и  $y_i$  по времени и по элементам ансамбля  $\Delta$  довольно значительное, как видно из графика зависимости  $\Delta(\gamma)$  на рисунке 5.25,б. Минимальные значения  $\Delta = 0.15$  и  $\Delta = 0.14$  достигаются при  $\gamma = 0.06$  и  $\gamma = 0.08$ , соответственно, для структур, изображенных на рисунке 5.26,б,в.

Таким образом, и для случая взаимной и симметричной инерционной связи между идентичными ансамблями эффекта синхронизации также не наблюдается.

Проведенные численные расчеты динамики неидентичных ансамблей логистических отображений (5.1) с инерционным типом взаимосвязи (5.3) показали невозможность достичь эффектов вынужденной и взаимной синхронизации пространственно-временных структур. Таким образом, в рассмотренном случае двухслойной мультиплексной сети нелокально связанных логистических отображений только диссипативная связь между ансамблями способствует реализации эффектов вынужденной и взаимной синхронизации сложных пространственно-временных структур, включая химерные, как в случае идентичных, так и неидентичных взаимодействующих ансамблей.

## 5.8 Взаимная синхронизация сложных структур в системе связанных ансамблей Эно и Лози

В четвертой главе было показано, что введение взаимной и симметричной связи между ансамблями, состоящими из нелокально связанных отображений Эно и Лози (4.1), приводит к возникновению принципиально новых пространственно-временных структур, которые в отсутствие взаимодействия в

ансамблях не наблюдались. Численные исследования показали, что типичным явлением в связанных ансамблях (4.1) является также реализация эффекта взаимной синхронизации пространственно-временной динамики [338]. Изменение взаимной межслойной связи  $\gamma$  между кольцами с различными типами элементов приводит к идентичности пространственно-временных структур, наблюдаемых в ансамбле отображений Эно и в ансамбле отображений Лози. Проиллюстрируем данный эффект более подробно.

На рисунке 5.27 представлены характерные примеры реализации различных идентичных структур в системе связанных ансамблей (4.1) в случае диссипативной связи (4.2). В зависимости от значений параметра нелокальной связи ансамбля отображений Эно  $\sigma_1$ , силы межслойной связи  $\gamma$  и случайных начальных условий для всех элементов взаимодействующих колец синхронные структуры могут характеризоваться режимом сосуществования амплитудной и фазовой химерных состояний (рисунок 5.27,а), наличием некогерентных кластеров фазовой химеры (рисунок 5.27,б), либо представлять собой достаточно сложную пространственно-временную структуру, мгновенный профиль которой в ансамблях Эно и Лози приведен на рисунке 5.27,в. Для доказательства идентичности реализуемых синхронных структур необходимо провести количественную оценку степени синхронизации колебательных процессов элементов связанных ансамблей. С этой целью используется коэффициент взаимной корреляции  $R_i$ , который для случая системы (4.1) определяется следующей формулой:

$$R_i = \frac{\langle \tilde{x}_i^t \tilde{u}_i^t \rangle}{\sqrt{\langle (\tilde{x}_i^t)^2 \rangle \langle (\tilde{u}_i^t)^2 \rangle}}, \quad (5.7)$$

$$\tilde{x}_i = x_i - \langle x_i \rangle, \quad \tilde{u}_i = u_i - \langle u_i \rangle.$$

Результаты расчетов  $R_i$  для структур, приведенных на рисунке 5.27 (верхний и средний ряд), представлены на том же рисунке в нижнем ряду. Как видно из графиков, во всех трех случаях коэффициенты взаимной корреляции элементов  $R_i$  очень близки к единице:  $0.99 \leq R_i \leq 1.0$ . Этот результат свидетельствует о близости колебаний элементов ансамбля Эно и Лози к идентичным для

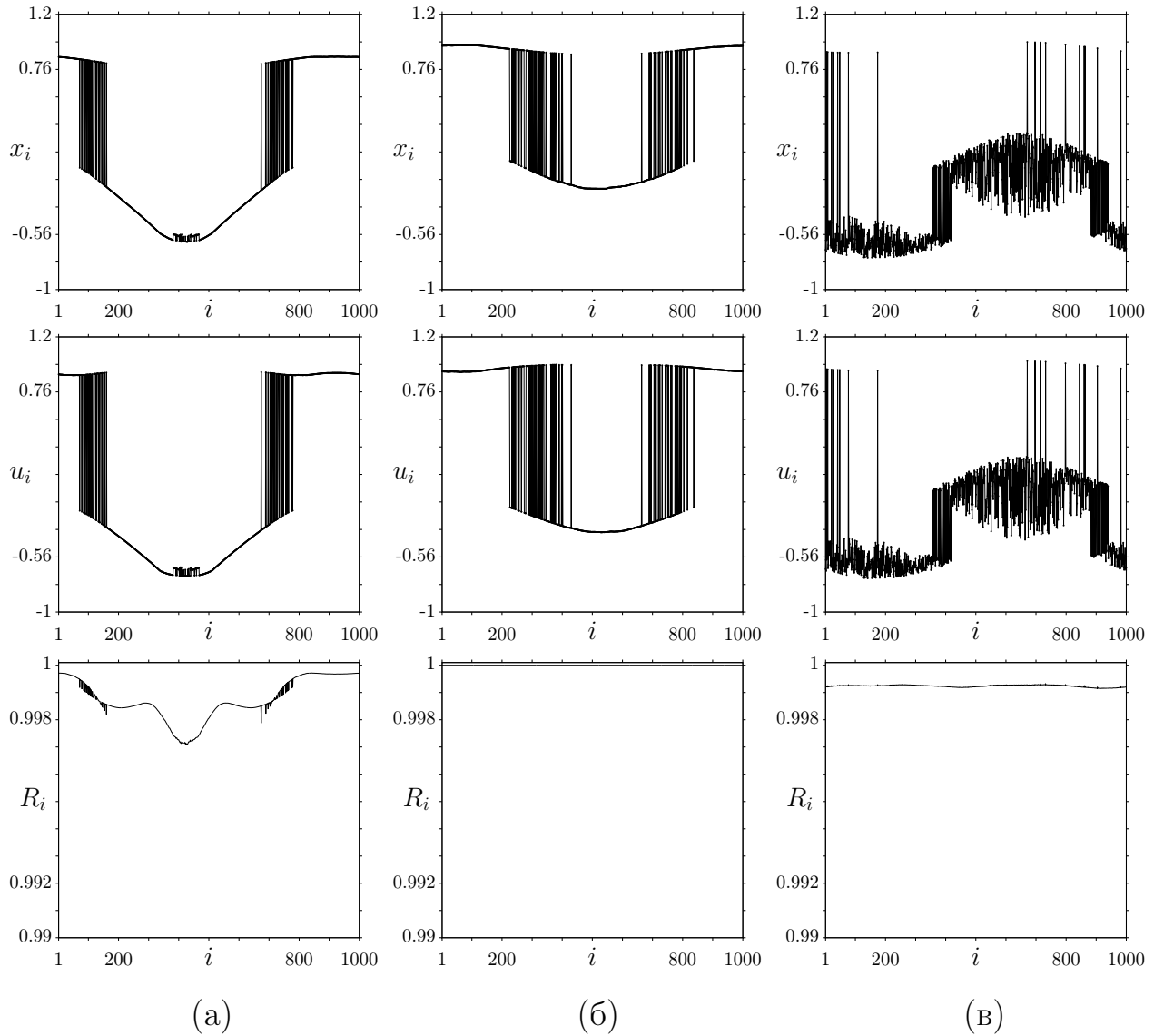


Рисунок 5.27. Синхронные пространственно-временные структуры в системе (4.1) в случае диссипативной связи (4.2): (а) амплитудное и фазовое химерные состояния и (б) фазовая химера при  $\sigma_1 = 0.32$ ,  $\gamma = 0.375$ , (в) сложная пространственно-временная структура при  $\sigma_1 = 0.18$ ,  $\gamma = 0.375$ . Мгновенные профили динамики ансамбля отображений Эно — верхний ряд, ансамбля отображений Лози — средний ряд, распределения значений коэффициента взаимной корреляции  $R_i$  (5.7) — нижний ряд. Другие параметры системы (4.1):  $\sigma_2 = 0.15$ ,  $P = 320$ ,  $R = 190$

приведенных на рисунке 5.27 пространственно-временных структур. Значение коэффициента взаимной корреляции  $R_i$  близко, но не равно единице. Как известно, равенство единице характеризует эффект полной синхронизации, которая возможна лишь в случае идентичности взаимодействующих осцилляторов. В нашем случае осцилляторы различны и близость  $R_i$  к единице позволяет говорить о практически идентичных процессах в соответствующих осцилляторах.

С целью обосновать реализацию эффекта синхронизации в конечной области значений параметров системы (4.1) была построена область синхронизации на плоскости параметров исследуемой системы. Область синхронизации для структуры, изображенной на рисунке 5.27,а, приведена на рисунке 5.28 на плоскости параметров  $(\gamma, \sigma_1)$ . Как можно видеть, эффект взаимной синхронизации реализуется в достаточно широкой области изменения параметров связи:  $\gamma \in [0.21, 0.48]$ ,  $\sigma_1 \in [0.22, 0.38]$ . Аналогичные результаты были получены и для области синхронизации на плоскости других параметров связи.

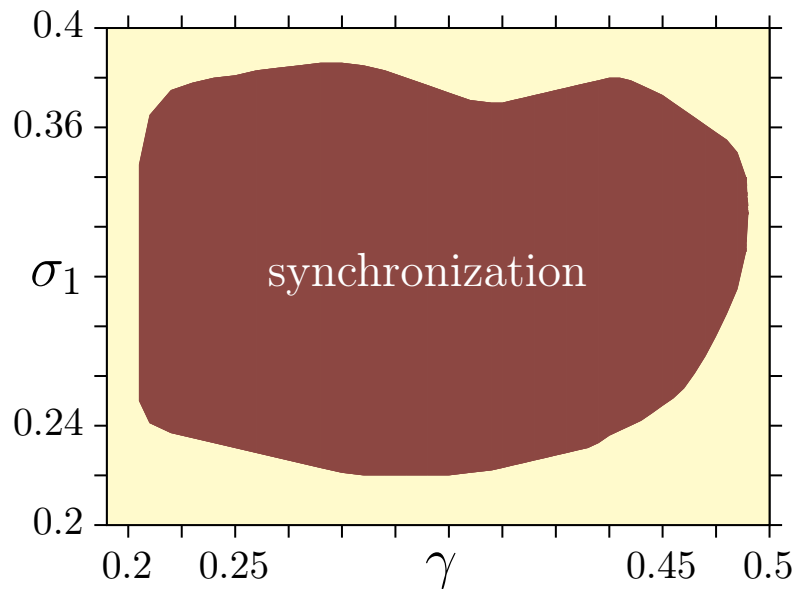


Рисунок 5.28. Область синхронизации на плоскости параметров  $(\gamma, \sigma_1)$  для структуры, представленной на рисунке 5.27,а. Параметры системы (4.1):

$$\sigma_2 = 0.15, P = 320, R = 190$$

Таким образом, можно говорить о реализации эффекта синхронизации сложных пространственно-временных структур во взаимодействующих гетерогенных ансамблях, составленных из элементов с качественно разным поведением.

## 5.9 Выводы по пятой главе

В данной главе представлены результаты численных исследований эффектов вынужденной и взаимной синхронизации в двухслойной мультиплексной сети, состоящей из ансамблей нелокально связанных логистических отображений, отображений Эно и Лози. Полученные данные позволяют сделать следующие основные выводы.

1. В результате исследования динамики системы связанных ансамблей логистических отображений, отображений Эно и Лози впервые установлены и подробно описаны эффекты вынужденной и взаимной синхронизации сложных пространственно-временных структур, включая химерные, в случае диссипативной связи между ансамблями. Синхронность колебаний осцилляторов реализуемых структур подтверждена расчетами коэффициента взаимной корреляции  $R_i$ , значения которого в режиме синхронизации близки к единице для всех элементов системы, среднеквадратичных отклонений по времени  $d_i$  и по элементам ансамбля  $\Delta$ , которые обращаются в ноль в режиме синхронизации.
2. Показано, что эффекты вынужденной и взаимной синхронизации в исследуемых ансамблях наблюдаются в конечных областях синхронизации, что подтверждено и проиллюстрировано расчетами областей синхронизации на плоскости различных параметров рассматриваемых систем с использованием количественных характеристик степени синхронизации.



3. Проведены исследования эффектов синхронизации химерных структур для случая инерционной связи между ансамблями хаотических осцилляторов. Сравнительный анализ полученных результатов показал, что диссипативный тип связи между ансамблями хаотических осцилляторов в большей степени способствует реализации эффекта синхронизации химерных структур.
4. Проведено сопоставление и показана аналогия полученных результатов с выводами классической теории синхронизации периодических автоколебаний. Это позволяет считать, что результаты настоящей работы можно рассматривать как обобщение представлений о классическом явлении синхронизации периодических автоколебаний на случай синхронизации пространственно-временных структур в системах связанных ансамблей нелокально взаимодействующих нелинейных осцилляторов.

# Глава 6. Вынужденная синхронизация химерных структур в многослойных сетях хаотических отображений

## 6.1 Введение

Большой интерес представляют эффекты синхронизации, касающиеся не только изолированного ансамбля, а процессов и структур во взаимодействующих ансамблях [18, 34, 290, 338, 351, 456, 457], распределенных системах [458–463], малых мирах [464], и многослойных сетях [18, 271, 272, 286–289, 292, 293, 295, 296, 299, 300, 302, 306–308]. В целом, проблема синхронизации сложных многокомпонентных систем еще сравнительно мало изучена. Исследование эффектов синхронизации пространственных структур и кластеров, формирующихся в сложных системах, является важной задачей с точки зрения моделирования и понимания процессов, протекающих в реальных сложных системах, таких как нейронные сети, клеточные ткани, сообщества живых организмов, транспортные системы, информационные и энергетические сети и т. д., в которых можно выделить отдельные сложные подсистемы, взаимодействующие между собой.

В связи с вышесказанным одной из важных в указанном направлении является задача о взаимодействии и синхронизации химерных структур в многослойных и мультиплексных сетях. Многослойные сети состоят из множества подсистем (слоев), имеющих, в общем случае, различное количество узлов, соединенных произвольными связями как внутри каждого слоя, так и между слоями [271–274]. Мультиплексные сети являются частным случаем многослойных

сетей, когда каждый слой включает одно и то же количество узлов, связанных только с соответствующими узлами соседних слоев [275, 276].

В шестой главе диссертационной работы представлены результаты численных исследований динамики мультиплексной сети хаотических осцилляторов с целью анализа возможности передачи некоторой выбранной сложной пространственной структуры в сети от одного слоя к другому и установления условий такой передачи с минимальными изменениями данной структуры. Каждый из слоев представлял собой ансамбль (кольцо) хаотических элементов с нелокальными связями и при соответствующем выборе параметров мог демонстрировать химерные состояния. Исследованы примеры сетей, состоящих из элементов, описываемых логистическим и кубическим отображениями. В качестве передаваемой (задающей) структуры в первом слое выбиралась сложная пространственная структура, соответствующая химерному состоянию. Для случая логистических и кубических отображений эти структуры представляли собой химеры различных типов: фазовую, амплитудную и двухъямную химеры. Рассмотрено однонаправленное взаимодействие слоев в случае их идентичности и слабой неоднородности, а также взаимодействие слоев при наличии несимметричной взаимной связи. Детально исследовано и проанализировано влияние степени неоднородности слоев и величины обратной связи на вынужденную синхронизацию мультиплексной сети в режимах химерных состояний.

Данная глава базируется на материалах и результатах, опубликованных в работах [341, 349].

## 6.2 Вынужденная синхронизация химерных структур в однородной мультиплексной сети

### 6.2.1 Исследуемая модель и оценка степени синхронности структур

В качестве объекта исследования выбрана многослойная (мультиплексная) сеть одномерных отображений, схематически представленная на рисунке 6.1. Каждый из слоев представляет собой кольцо нелокально связанных хаотических осцилляторов.

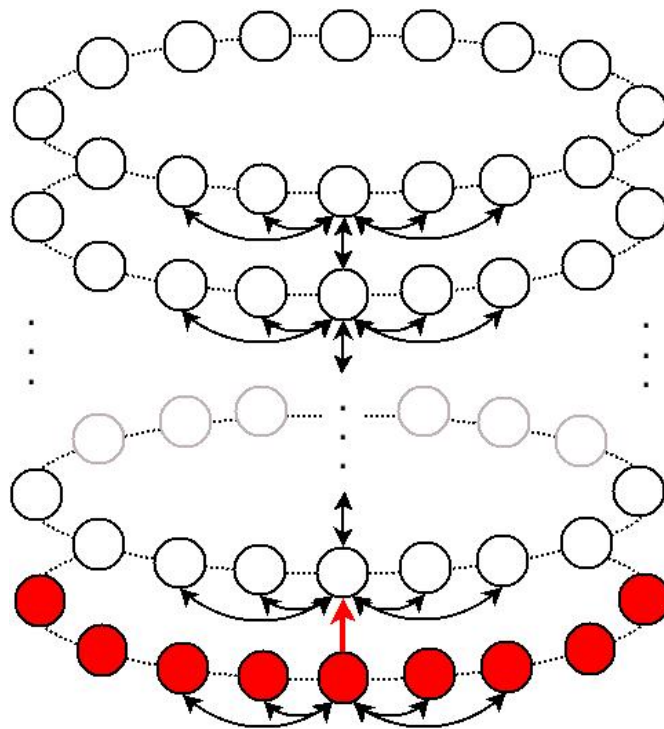


Рисунок 6.1. Схематическое представление исследуемой сети нелокально связанных осцилляторов

Данная сеть описывается следующей системой уравнений [341, 349]:

$$\begin{aligned}
 x_{ji}(n+1) = f_{ji}(n) &+ \frac{\sigma_i}{2P_i} \sum_{k=j-P_i}^{j+P_i} [f_{ki}(n) - f_{ji}(n)] + \\
 &+ \gamma_i [f_{j_{i-1}}(n) - f_{ji}(n)] + g_i [f_{j_{i+1}}(n) - f_{ji}(n)], \quad (6.1) \\
 f_{ji}(n) = f(x_{ji}(n), \alpha_i), \quad x_{j \pm N_i}(n) = x_{ji}(n), \quad x_{j0} = x_{j1}, \quad x_{j, M+1} = x_{j, M}, \\
 j = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M,
 \end{aligned}$$

Здесь  $j$  – номер элемента в слое (кольце),  $i$  – номер слоя,  $n$  – дискретное время (номер итерации отображения). Сеть (6.1) состоит из  $M = 20$  слоев, каждый из которых содержит  $N = 1000$  элементов. Нелокальная связь в каждом кольце характеризуется коэффициентом или силой связи  $\sigma_i$  (для  $i$ -го слоя) и числом соседей  $P_i$  с каждой стороны  $j$ -го элемента ансамбля. Степень нелокальности взаимодействия элементов  $i$ -го слоя также задается радиусом связи  $r_i = P_i/N$ .

Предполагается, что все соседние слои, кроме первого, могут взаимно влиять друг на друга. Элементы соседних слоев попарно соединены локальной связью, то есть взаимодействуют только соответствующие элементы (с одним номером  $j$ ) соседних слоев. При этом коэффициенты связи в разном направлении могут быть различны:  $\gamma_i$  определяет силу воздействия на  $i$ -й слой со стороны элементов предыдущего,  $(i-1)$ -го слоя, а  $g_i$  – силу воздействия на  $i$ -й слой последующего,  $(i+1)$ -го слоя. Первый (задающий) слой воздействует на второй слой однонаправленно и последний,  $M$ -й слой оказывает воздействие только на предыдущий,  $(M-1)$  слой. Таким образом, в системе (6.1) полагается, что

$$\gamma_1 = 0, \quad g_1 = 0, \quad g_M = 0. \quad (6.2)$$

Следует заметить, что связь элементов внутри отдельных слоев и связь между элементами разных слоев (межслойная связь) имеет один и тот же характер. Она производится через разность функций, задающих динамику элементов, и является диссипативной. Такой характер связи наиболее способствует

синхронизации динамики элементов, как было показано в главе 5 для случая системы двух связанных ансамблей логистических отображений.

Динамика отдельно взятого элемента сети (6.1) в отсутствие связи между кольцами описывается одномерным отображением, задаваемым функцией последования одного вида  $f(x_{ji}(n), \alpha_i)$ , где  $\alpha_i$  — значение управляющего параметра в  $i$ -м слое. В проводимых численных исследованиях используются два типа отображений с хаотической динамикой: логистическое отображение в виде:

$$f(x, \alpha) = \alpha - x^2, \quad (6.3)$$

и одномерное кубическое отображение:

$$f(x, \alpha) = (\alpha - x^3) \exp\left(-\frac{x^2}{10}\right). \quad (6.4)$$

Первый слой, являющийся задающим, может иметь параметры, отличные от других слоев. Выберем параметры слоев в соответствии с желаемым типом динамического режима. Интерес представляет область параметров, которая соответствует переходу от несинхронного хаоса к полной пространственной когерентности, в которой реализуются химерные состояния. Кроме параметров, пространственная структура в каждом слое определяется начальными условиями. Выберем случайным образом начальные состояния элементов всех слоев с равномерным распределением значений  $x_{ji}(0)$  в определенном интервале. Эти начальные значения в дальнейшем фиксируются и остаются неизменными в процессе всех вычислений. Для первого слоя выбирается и фиксируется такое начальное распределение, которое приводит к установлению в этом слое достаточно четко выраженной химерной структуры, отличной от пространственно-временных структур в других слоях. Данная структура также оставалась неизменной при всех вычислениях. Взаимодействие между слоями осуществляется спустя определенное время, достаточное для установления динамических режимов и пространственных структур во всех слоях сети. В проводимых численных исследованиях время установления выбиралось равным  $n_0 = 2 \times 10^4$ ,

время расчета при взаимодействии слоев также составляло  $n_1 = 2 \times 10^4$ . Воздействие первого слоя с заданной химерной структурой (или мастер-структурой) на установившиеся структуры в других слоях вызывает их изменение и при определенной силе связи между слоями должно приводить к эффектам синхронизации структур, описанным в главе 5 и работах [338, 351].

Для количественной оценки степени близости (синхронности) структур в различных слоях к задающей структуре в первом слое, использована следующая характеристика, которую будем называть средним квадратом отклонения структуры  $i$ -го слоя:

$$\delta_i = \langle (x_{ji}(n) - x_{j1}(n))^2 \rangle_{j,\nu} = \frac{1}{\nu} \sum_{n=1}^{\nu} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_{ji}(n) - x_{j1}(n))^2, \quad (6.5)$$

$$i = 2, 3, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение значений квадрата отклонения по  $N$  элементам  $i$ -го слоя, а также по времени на  $\nu$  итерациях в установившемся режиме. Значение  $\delta_i$  характеризует ошибку воспроизведения задающей структуры в  $i$ -м слое или, другими словами, степень синхронизации мастер-структуры. В случае однородной сети, когда все слои полностью идентичны, значения величин  $\delta_i$  с ростом силы межслойной связи устанавливаются равными нулю с точностью до погрешности вычислений. Подобная величина  $\Delta$  (5.6) была уже введена в главе 5 и использовалась для количественной оценки степени синхронности пространственно-временных структур в системе двух связанных ансамблей логистических отображений (5.1). В данном случае можно рассматривать величину  $\delta_i = \Delta^2$ , где нижний индекс  $i$  соответствует  $i$ -му слою сети (6.1).

## 6.2.2 Сеть логистических отображений

Рассмотрим систему (6.1) в случае, когда динамика индивидуального элемента описывается логистическим отображением (6.3). Как было показано в главе 1, для ансамблей нелокально связанных хаотических систем с переходом к хаосу через последовательность удвоений периода характерны два типа химерных структур, названные фазовыми и амплитудными химерами [342, 346]. Данные режимы были подробно исследованы и описаны в главе 1 диссертационной работы.

Выберем и зафиксируем параметры первого слоя:  $\alpha_1 = 1.7$ ,  $\sigma_1 = 0.3$ ,  $r_1 = 0.32$ . Начальные условия выбраны случайным образом для всех слоев сети и равномерно распределены в интервале  $[0, 1]$ . В этом случае в первом слое устанавливается режим фазовой химеры, состоящий из двух когерентных и двух некогерентных кластеров. Во всех проводимых расчетах сети логистических отображений состояние первого слоя предполагалось одним и тем же. Рассмотрим, как влияет однонаправленное взаимодействие слоев на пространственные структуры в случае идентичных слоев и в случае расстройки параметров первого слоя и всех остальных, которые полагаются одинаковыми. При этом  $\gamma_i \neq 0$  и  $g_i = 0$  для любого  $i = 2, 3, \dots, M$ .

**Случай идентичных слоев.** В этом случае параметры всех слоев, включая первый, имеют одинаковые значения:  $\alpha_i = \alpha_2 = \alpha_1 = 1.7$ ,  $\sigma_i = \sigma_2 = \sigma_1 = 0.3$ ,  $r_i = r_2 = r_1 = 0.32$ ,  $\gamma_i = \gamma_2 = \gamma$  для  $i = 3, 4, \dots, M$ . Различия пространственных структур в различных слоях сети определяются только начальными условиями. Примеры полученных в этом случае установившихся пространственных структур в различных слоях без взаимодействия ( $\gamma = 0$ ) и при наличии однонаправленной связи приведены на рисунке 6.2.



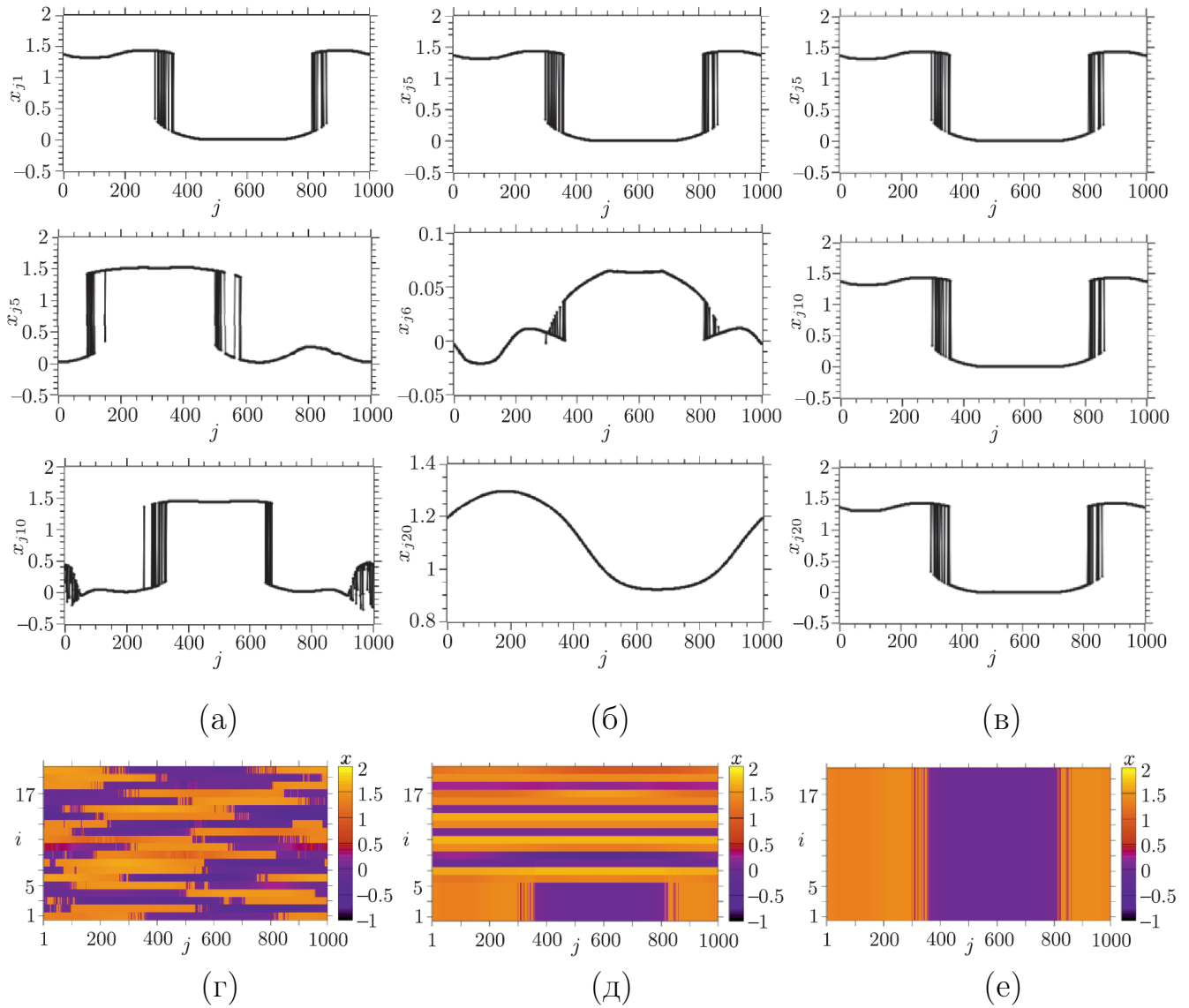


Рисунок 6.2. Иллюстрация пространственных структур в различных идентичных слоях сети логистических отображений (6.1). На фрагментах (а)–(в) приведены мгновенные пространственные профили в выбранных слоях в отсутствие межслойной связи (а) и при однонаправленной связи  $\gamma = 0.16$  (б) и  $\gamma = 0.2$  (в). Соответствующие мгновенные пространственные диаграммы показаны на фрагментах (г)–(е), на которых различные тона соответствуют мгновенным значениям переменных  $x_{ji}$ . Другие параметры сети:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1.7, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.3, r_1 = r_2 = 0.32$$

Верхний фрагмент на рисунке 6.2,а показывает задающую структуру в первом слое, соответствующую фазовой химере. Как видно из мгновенного пространственного профиля, данная структура включает два некогерентных (элементы с номерами  $280 \leq i \leq 360$  и  $820 \leq i \leq 875$ ) и два когерентных кластера. Другие фрагменты на рисунке 6.2,а соответствуют мгновенным профилям различных пространственных структур, устанавливающихся в разных слоях сети в отсутствие связи. Можно видеть фазовую химеру (кластеры элементов  $90 \leq i \leq 125$  и  $490 \leq i \leq 790$ ) в 5-м слое (рисунок 6.2,а, средний фрагмент) и комбинированную химеру с кластерами некогерентности фазового (элементы с номерами  $280 \leq i \leq 340$  и  $650 \leq i \leq 675$ ) и амплитудного (кластер с элементами  $0 \leq i \leq 50$  и  $925 \leq i \leq 1000$ ) типа в слое 10 (рисунок 6.2,а, нижний фрагмент). В силу задания случайных начальных условий установившиеся пространственные структуры во всех слоях сети логистических отображений являются абсолютно различными. Это нагляднее всего можно представить с помощью двумерных диаграмм мгновенных состояний сети, где по координатным осям отложены индексы  $j$  и  $i$  (дискретные координаты элемента сети), а градации цвета соответствуют различным уровням значений переменных  $x_{ji}$ . Подобная мгновенная пространственная диаграмма сети приведена на рисунке 6.2,г в отсутствие связи между кольцами.

При введении однонаправленной связи с интенсивностью  $\gamma = 0.16$  в первых пяти слоях возникает одинаковая структура (рисунок 6.2,б, верхний фрагмент), совпадающая с задающей. В следующем, 6-м слое еще можно видеть остатки химерной структуры с малым диапазоном изменений динамических переменных в кластерах некогерентности (рисунок 6.2,б, средний фрагмент). В других же слоях, в результате влияния предыдущих слоев на последующие, вместо химерных структур устанавливаются режимы частичной когерентности, которые характеризуются гладкими пространственными профилями, различными для различных слоев. В качестве примера на нижнем фрагменте рисунка 6.2,б приведен мгновенный профиль пространственной структуры в послед-

нем, 20-м слое сети (6.1). Реализация эффекта вынужденной синхронизации в первых пяти слоях и изменения, произошедшие в пространственных структурах остальных слоев сети при их взаимодействии, хорошо видны на мгновенной пространственной диаграмме, изображенной на рисунке 6.2,д.

При более сильной связи,  $\gamma = 0.2$ , происходит вынужденная синхронизация всех слоев. Задающая структура повторяется в каждом слое без заметных изменений. Это следует из мгновенных пространственных профилей структур для 5-го, 10-го и 20-го слоев сети, приведенных на рисунке 6.2,в, и мгновенной пространственной диаграммы на рисунке 6.2,е.

Рассмотрим поведение элементов сети во времени. Динамика отдельного логистического отображения (6.3) при выбранном значении параметра  $\alpha = 1.7$  является хаотической. В результате нелокального взаимодействия, колебания элементов в первом слое сети (6.1) при выбранных начальных условиях становятся периодическими с периодом 4. Колебания элементов в других слоях при  $\gamma = 0$  зависят от начальных условий и могут быть как периодическими, так и хаотическими. На рисунке 6.3 проиллюстрирована характерная динамика выбранных элементов сети во времени. В этом случае время установления структур без связи составило  $n_0 = 2 \times 10^4$ , время расчета взаимодействия слоев —  $n_1 = 20500$ .

Периодические колебания периода 4 элемента с номером  $i = 250$  из кластера когерентности задающей фазовой химеры (рисунок 6.2,а, верхняя панель) показаны на рисунке 6.3,а. Фрагмент колебаний двух соседних элементов из некогерентного кластера той же химеры на более коротком интервале времени приведен на рисунке 6.3,б. Элементы выбраны в соответствии с разными мгновенными состояниями: осциллятор с номером  $j = 308$  находится на верхнем уровне, другой осциллятор, с номером  $j = 309$  — на нижнем). Как следует из рисунка, колебания являются противофазными, то есть сдвинуты на 1 итерацию друг относительно друга. Как уже отмечалось в 1-й главе, подобная динамика во времени характерна для фазовой химеры в кольце элементов с

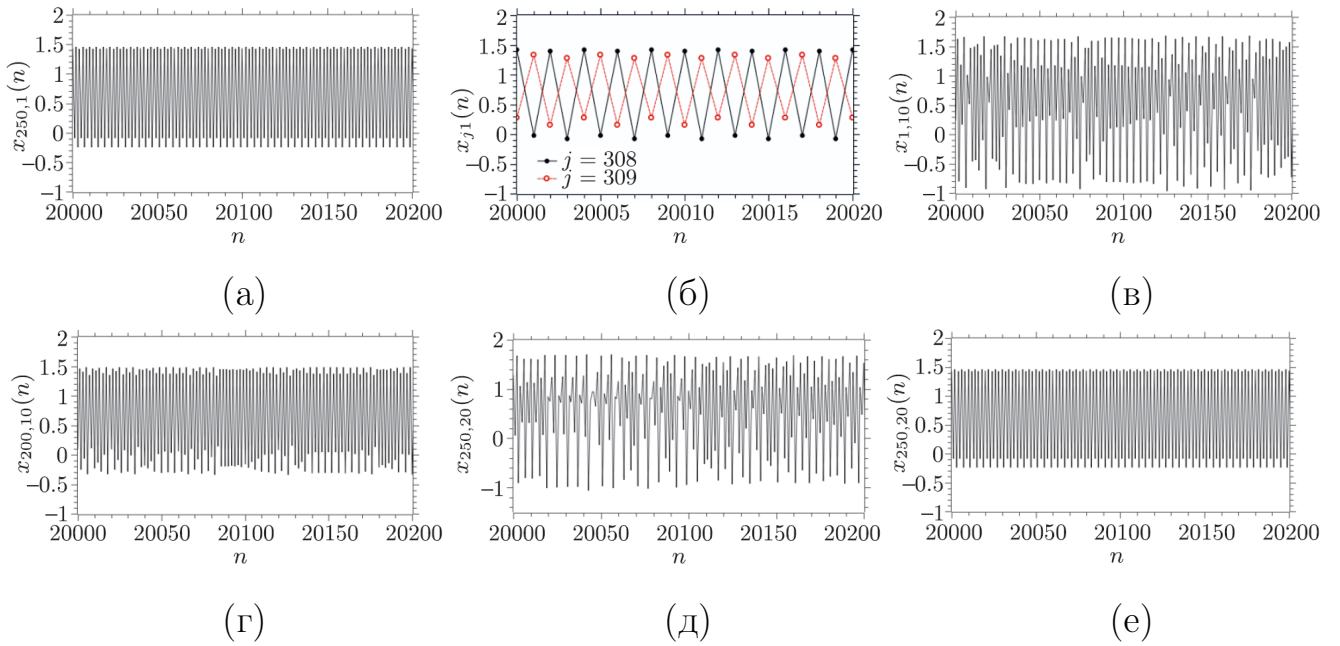


Рисунок 6.3. Динамика выбранных элементов сети (6.1) во времени. (а) Вид установившихся колебаний элемента  $j = 250$  в слое  $i = 1$ , (б) колебания элементов  $j = 308$  и  $j = 309$ , принадлежащих кластеру некогерентности в 1-м слое, на малом интервале времени, (в) установившиеся колебания в 1-м элементе некогерентного кластера амплитудной химеры в слое  $i = 10$  при  $\gamma = 0$ , (г) установившиеся колебания в кластере когерентности ( $j = 200$ ) той же пространственной структуры в слое  $i = 10$  при  $\gamma = 0$ , (д, е) установившиеся колебания элемента  $j = 250$  в кольце  $i = 20$  при  $\gamma = 0.16$  и  $\gamma = 0.2$ , соответственно. Другие параметры сети как для рисунка 6.2

удвоениями периода [342, 346]. В области амплитудной химеры, существующей в слое  $i = 10$  при  $\gamma = 0$  (рисунок 6.2,а, нижняя панель), колебания являются существенно хаотическими (рисунок 6.3,в), что типично для амплитудной химеры в ансамбле хаотических элементов [342, 346]. В кластере когерентности в том же режиме колебания также являются хаотическими, но разброс значений амплитуды (степень хаотичности) гораздо меньше (рисунок 6.3,г). Наконец, колебания одного и того же элемента  $j = 250$  в слое  $i = 20$  при двух различных значениях силы межслойной связи  $\gamma = 0.16$  и  $\gamma = 0.2$  приведены на рисунке 6.3,д,е, соответственно. В первом случае (рисунок 6.3,д) наблюдается хаоти-

ческая динамика, соответствующая режиму частичной пространственной когерентности (мгновенный профиль показан на нижнем фрагменте рисунка 6.2,б). Во втором случае, при  $\gamma = 0.2$ , (рисунок 6.3,е), реализуются периодические колебания, полностью совпадающие с колебаниями того же элемента в первом слое (для сравнения см. рисунок 6.3,а).

Для количественной оценки степени идентичности (синхронности) пространственных структур, устанавливающихся в слоях сети (6.1) в результате их взаимодействия, были проведены расчеты значений величины  $\delta_i$  (6.6) для выбранных слоев сети при изменении силы межслойной связи  $\gamma$ . Полученные численные результаты приведены на рисунке 6.4 в виде графиков зависимости  $\delta_i(\gamma)$  для слоев  $i = 2, 3, 5, 10, 20$ .

Из приведенных графиков видно, как с ростом однонаправленной связи  $\gamma$  структура первого слоя последовательно воспроизводится во всё более отдаленных слоях. В этом случае величина  $\delta_i = 0$ . Однако, для ряда слоев сети вынужденная синхронизация происходит при определенных значениях силы

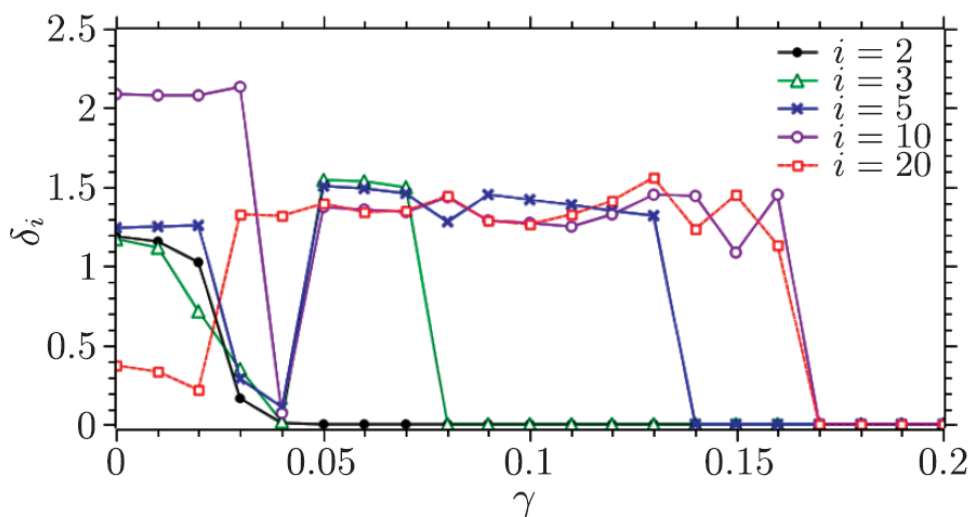


Рисунок 6.4. Зависимость величины  $\delta_i$  (6.6) в выбранных слоях от параметра связи  $\gamma$  в случае идентичных слоев в сети логистических отображений (6.1).

Время установления структур без связи  $n_0 = 10^4$ , время установления при взаимодействии слоев  $n_1 = 10^4$ , время усреднения  $\nu = 5 \times 10^3$ . Другие параметры сети как для рисунка 6.2

межслойной связи  $\gamma$ . Так, например, для слоев  $i = 2, 3$  синхронизация имеет место при очень слабой силе связи,  $\gamma = 0.04$  (рисунок 6.4), тогда как для воспроизведения задающей структуры 1-го слоя в 10-м и дальнейших слоях требуется более существенное воздействие,  $\gamma = 0.17$ .

Коэффициент однонаправленной связи должен превышать некоторый порог синхронизации, свой для каждой пары соседних слоев, так как он зависит от степени различия пространственно-временных режимов, установившихся в этих слоях в момент введения связи между ними. Когда значение параметра  $\gamma$  становится больше соответствующего порога, происходит синхронизация режима во втором слое, который становится полностью идентичным режиму задающего слоя. Поведение других слоев также меняется, наблюдается синхронизация некоторых слоев между собой, второй слой стремится синхронизовать третий и т. д. При этом, в силу изменения динамических режимов в слоях, меняются и пороги синхронизации. Когда значение силы связи  $\gamma$  превысит значение наибольшего установившегося порога, произойдет синхронизация всех слоев рассматриваемой сети. Конкретные значения коэффициента связи  $\gamma$ , соответствующие синхронизации второго, третьего, и т.д.,  $i$ -го слоя, зависят от выбора начальных условий. Но поскольку максимальное значение порога синхронизации на множестве всевозможных режимов ограничено, то с ростом  $\gamma$ , после синхронизации нескольких первых слоев, происходит скачкообразная синхронизация всех последующих слоев многослойного ансамбля. Так, из приведенных на рисунке 6.4 графиков видно, что синхронизация слоев  $i = 10$  и  $i = 20$  происходит при одном и том же значении  $\gamma = 0.17$ . По этой причине нет смысла в рассмотрении большого количества слоев в сети с однонаправленным взаимодействием.

Таким образом, разнообразные пространственные структуры и колебания элементов во времени, устанавливающиеся в слоях однородной сети при случайном выборе начальных состояний, начиная с некоторого значения однонаправленной связи, синхронизируются в режиме первого слоя. В случае

идентичности всех слоев химерная пространственная структура, существующая в первом слое, передается другим слоям без изменения.

**Случай отличия радиуса взаимодействия в задающем слое.** Рассмотрим, как повлияет на синхронизацию структур отличие первого слоя от всех остальных. Выберем в качестве такого отличия разные значения радиусов связи, положив  $r_i = r_2 \neq r_1 = 0.32$  для  $i = 2, 3, \dots, M = 20$ . Остальные параметры и начальные условия оставим прежними. Соответственно химерное состояние в первом слое (мастер-структура) не изменится. На рисунке 6.5 приведены мгновенные пространственные диаграммы сети логистических отображений (верхний ряд) в случае радиуса связи  $r_2 = 0.2$  и соответствующие мгновенные пространственные профили динамики последнего слоя  $i = 20$  (нижний ряд) при различных значениях однонаправленной связи  $\gamma$ . Как вид-

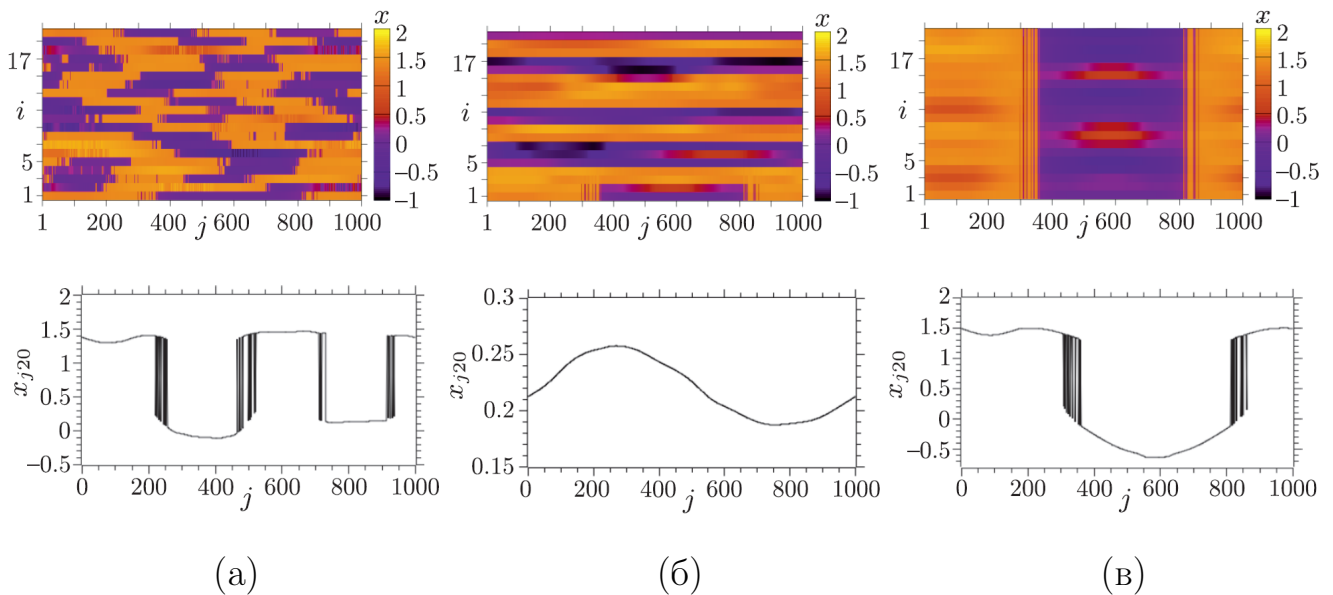


Рисунок 6.5. Эффект синхронизации структур в сети логистических отображений (6.1) при различных радиусах связи:  $r_1 = 0.32$ ,  $r_2 = 0.2$ . Мгновенные пространственные диаграммы (верхний ряд) и пространственные профили в последнем слое (нижний ряд) при различных значениях коэффициента однонаправленной связи  $\gamma$ : (а) 0, (б) 0.16, (в) 0.3. Другие параметры сети как для рисунка 6.2

но из рисунка 6.5,а, в отсутствие межслойной связи все слои сети демонстрируют различные пространственно-временные структуры, отличные от мастер-структуры. Так, например, в 20-м слое реализуется фазовая химерная структура, состоящая из 4 некогерентных кластеров 4 областей когерентности (рисунок 6.5,а, нижний фрагмент). Введение однонаправленной связи относительно небольшой силы,  $\gamma = 0.16$ , приводит к синхронизации первых двух слоев (рисунок 6.5,б, верхний фрагмент) и существенному изменению пространственно-временной динамики остальных слоев. Например, в последнем 20-м слое сети реализуется пространственно-однородный режим, характеризующийся гладким когерентным мгновенным профилем состояний элементов слоя (рисунок 6.5,б, нижний фрагмент). При увеличении силы межслойной связи ( $\gamma = 0.3$ ) наблюдается вынужденная синхронизация всех слоев сети (рисунок 6.5,в). Однако, как можно заметить из отличий в окраске слоев на мгновенной пространственной диаграмме, приведенной на рисунке 6.5,в (верхний фрагмент) и из сравнения мгновенного профиля на рисунке 6.5,в (нижний фрагмент) и на рисунке 6.2,а (верхний фрагмент) синхронизация структуры различных слоев не является полной. Имеются некоторые количественные отличия мгновенных состояний соответствующих элементов, хотя в целом при  $\gamma = 0.3$  тип фазовой химеры качественно повторяется во всех слоях.

Проведем численные исследования зависимости величины  $\delta_i$  (6.6) в различных слоях от радиуса связи  $r_2$  при фиксированном радиусе первого слоя  $r_1 = 0.32$ . Результаты расчетов приведены на рисунке 6.6 для двух различных значений силы связи  $\gamma$ . Для того, чтобы кривые на графиках не «перепутывались», значки, соответствующие значениям  $\delta_i$ , не везде соединены линиями. Будем полагать, что задающая структура воспроизводится в слое  $i$  удовлетворительно, если выполняется требование:

$$\delta_i < 0.01. \quad (6.6)$$



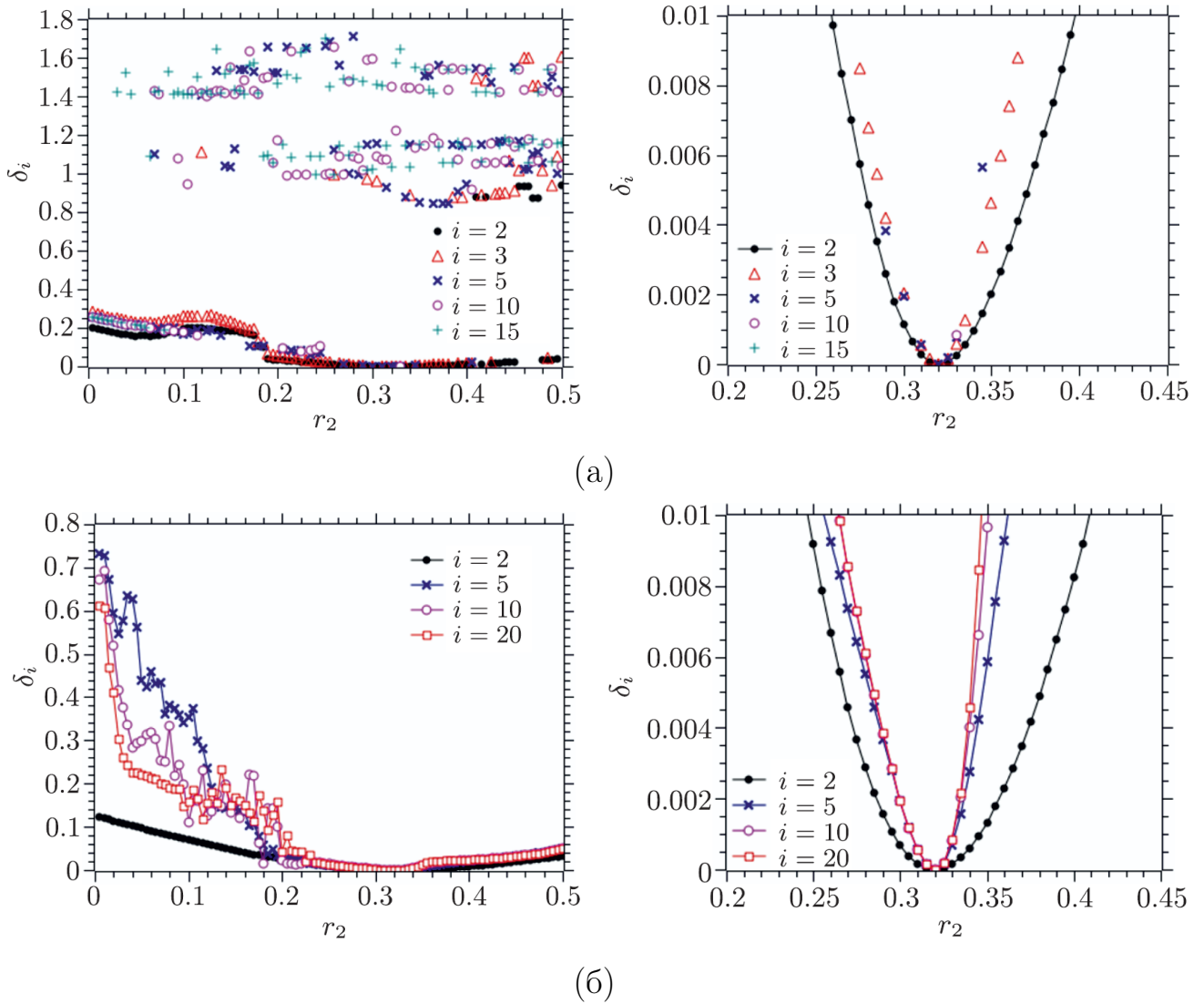


Рисунок 6.6. Зависимости величины  $\delta_i$  (6.6) в выбранных слоях от радиуса связи  $r_2$  при фиксированном  $r_1 = 0.32$  для двух значений силы связи  $\gamma$ : (а) 0.16, (б) 0.3. На фрагментах слева приведено всё множество значений  $\delta_i$ , справа – только значения  $\delta_i < 0.01$ . Время установления структур без связи  $n_0 = 10^4$ , время установления при взаимодействии слоев  $n_1 = 10^4$ , время усреднения  $\nu = 5 \times 10^3$ . Другие параметры сети как для рисунка 6.2

Это условие можно рассматривать как критерий «эффективной синхронизации» структуры в  $i$ -м слое. Разумеется, он является условным и в качестве порогового можно выбрать любое другое, достаточно малое значение величины  $\delta_i$ . На рисунке 6.6,а приведены результаты расчетов зависимостей  $\delta_i(r_2)$  для пяти выбранных слоев сети, полученные при  $\gamma = 0.16$ , когда задающая структура в

определенной степени воспроизводится в нескольких первых слоях. Насколько точным будет воспроизведение и для какого количества слоев оно имеет место, зависит от соотношения радиусов связи  $r_1$  и  $r_2$ . Как видно из рисунка 6.6,а (слева), при  $\gamma = 0.16$  минимальные значения  $\delta_i$  соответствуют только 2-му и 3-му слоям сети для значений радиуса связи  $r_2 \geq 0.2$ . Для остальных слоев  $i = 5, 10, 15$  в этом случае  $\delta_i > 1$ , то есть синхронизации задающей структуры не наблюдается. Распределение значений  $\delta_i < 0.01$  для выбранных слоев сети при вариации радиуса связи  $r_2 > 0.2$  представлено на рисунке 6.6,а (справа). Как видно из приведенных данных, минимальное значение  $\delta_i \approx 0$  для всех номеров  $i$  наблюдается в окрестности значения  $r_2 = r_1 = 0.32$ , то есть в случае совпадения параметров всех слоев. Однако, для слоев с номерами  $i > 3$  условие (6.6) выполняется только для отдельных значений  $r_2$  или не выполняется вовсе. Так, для слоя  $i = 10$  оно выполняется только в одной точке, а для слоя  $i = 15$  таких значений  $r_2$  не существует (рисунок 6.6,а, справа).

При увеличении силы однонаправленной связи,  $\gamma = 0.3$ , как можно видеть из рисунка 6.6,б (слева), все слои сети демонстрируют эффект вынужденной синхронизации для значений радиуса связи  $r_2 > 0.2$ . Вблизи значения  $r_2 = r_1 = 0.32$  существует область, в которой все слои удовлетворяют условию синхронизации (6.6) (рисунок 6.6,б, справа). Таким образом, можно выделить конечный интервал значений радиуса связи  $0.265 < r_2 < 0.345$ , для которого выполняется критерий (6.6), а, следовательно, имеет место эффект вынужденной синхронизации задающей химерной структуры 1-го слоя во всех слоях сети логистических отображений.

**Случай отличия силы нелокальной связи в задающем слое.** Перейдем к исследованию влияния различия значения силы нелокальной связи элементов в задающем слое от всех остальных на синхронизацию слоев сети логистических отображений. Пусть коэффициент нелокальной связи в первом слое остается таким же, как и раньше,  $\sigma_1 = 0.3$ , а сила нелокаль-

ной связи во всех других слоях будет отличаться от  $\sigma_1$ . Рассмотрим случай  $\sigma_i = \sigma_2 = 0.2$  для  $i = 2, 3, \dots, M$ . Остальные фиксированные параметры всех слоев будут одинаковы и их значения остаются прежними. Реализации случайных начальных условий также остаются прежними. В этом случае в задающем слое существует та же самая химерная структура, что и ранее (рисунок 6.2,а, верхний фрагмент). При выбранном значении  $\sigma_2 = 0.2$ , в остальных слоях сети в отсутствие взаимодействия между ними устанавливаются различные пространственно-некогерентные структуры. Их можно видеть на мгновенной пространственной диаграмме, приведенной на рисунке 6.7,а (верхний фрагмент). Мгновенный пространственный профиль такой структуры в слое  $i = 20$  изображен на рисунке 6.7,а (нижний фрагмент).

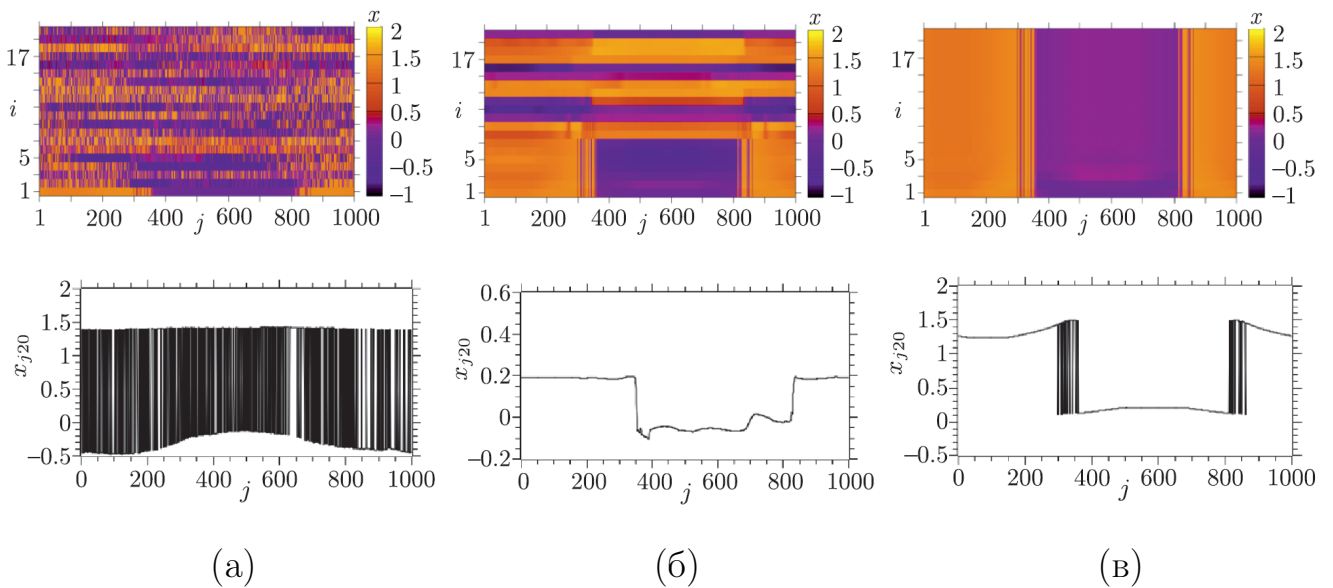


Рисунок 6.7. Эффект синхронизации структур в сети логистических отображений (6.1) при различных значениях силы нелокальной связи в 1-м слое и всех остальных слоях:  $\sigma_1 = 0.3$ ,  $\sigma_2 = 0.2$ . Мгновенные пространственные диаграммы (верхний ряд) и пространственные профили в последнем слое (нижний ряд) при различных значениях коэффициента однонаправленной связи  $\gamma$ : (а) 0, (б) 0.16, (в) 0.3. Другие параметры сети:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1.7, r_1 = r_2 = 0.32$$

Как следует из рисунка 6.7,б (верхний фрагмент), введение однонаправленной связи с коэффициентом  $\gamma = 0.16$  приводит к частичному воспроизведению мастер-структуры в первых семи слоях. В остальных слоях при этом устанавливаются структуры с кусочно-гладким профилем, пример реализации которого в 20-м слое приведен на рисунке 6.7,б (нижний фрагмент). При  $\gamma = 0.3$  «эффективная» синхронизация структур наблюдается во всех слоях (рисунок 6.7,в, верхний фрагмент). Мгновенные пространственные профили динамики 2-го и последующих слоев отражают режим фазовой химеры (рисунок 6.7,в, нижний фрагмент) и достаточно хорошо соответствуют мгновенному профилю мастер-структуры (6.2,а, верхний фрагмент).

Проведенные вычисления значений характеристики  $\delta_i$  при изменении силы нелокальной связи  $\sigma_2$  для двух значений коэффициента однонаправленной связи  $\gamma = 0.16$  и  $\gamma = 0.3$  показали схожий характер зависимостей, как и в случае неидентичности слоев сети по значениям радиуса связи. В этом случае также существует конечная область значений параметра  $\sigma_2$ , внутри которой выполняется условие эффективной синхронизации (6.6) для всех слоев сети логистических отображений (6.1).

### 6.2.3 Сеть кубических отображений

Рассмотрим сеть (6.1) в случае, когда динамика индивидуального элемента описывается кубическим отображением (6.4) [349]. В отличие от логистического отображения (6.3), кубическое отображение характеризуется бистабильностью как в периодических, так и хаотических динамических режимах. Эта особенность приводит к формированию особого типа химерного состояния, так называемой *двухъямной химеры*, в ансамблях нелокально связанных бистабильных осцилляторов [92, 98]. Начальные условия для элементов всех слоев сети (6.1) выбираются случайным образом с равномерным

распределением значений  $x_{ji}(0)$  в интервале  $[-1, 1]$  и фиксируются для всех последующих вычислений. Мультиплексная сеть (6.1) исследуется при наличии только однонаправленного взаимодействия слоев, то есть  $g_i = 0$  для любого  $i = 1, 2, \dots, M$ .

**Случай идентичных слоев.** Пусть все слои, включая первый, являются идентичными, то есть  $\alpha_i = \alpha_2 = \alpha_1 = 2.4$ ,  $\sigma_i = \sigma_2 = \sigma_1 = 0.42$ ,  $r_i = r_2 = r_1 = 0.1$  для  $i = 2, 3, \dots, M$ . В этом случае тип пространственно-временных структур в различных слоях сети определяется только начальными условиями. При выбранном значении управляющего параметра отображения  $\alpha_2 = \alpha_1 = 2.4$  динамика отдельно взятого кубического отображения (6.4) является бистабильной с двумя сосуществующими устойчивыми предельными циклами периода 4.

Установившееся пространственно-временное состояние первого слоя соответствует режиму двухъямной химеры с двумя кластерами некогерентности (элементы с номерами  $574 \leq i \leq 625$  и  $800 \leq i \leq 850$ ) и двумя когерентными кластерами (рисунок 6.8,а). Элементы некогерентных кластеров нерегулярно распределены между двумя аттракторами, характерными для отдельного элемента, тогда как элементы в кластерах когерентности находятся на одном из двух сосуществующих аттракторов [92, 98]. Колебания всех элементов первого слоя остаются периодическими, но уже с периодом 2 (рисунок 6.8,б). Хотя по внешнему виду мгновенного пространственного профиля двухъямная химера похожа на фазовую химеру, колебания элементов, расположенных на верхнем и нижнем уровнях, происходят в одной фазе (рисунок 6.8,в). При этом каждый элемент постоянно находится «в одной ямке», то есть вблизи одного из исходных циклов периода 4, и не переключается в окрестность другого цикла. Двухъямная химерная структура, установившаяся в 1-м слое (рисунок 6.8,а), будет фиксированной и неизменной во всех проводимых численных исследованиях.

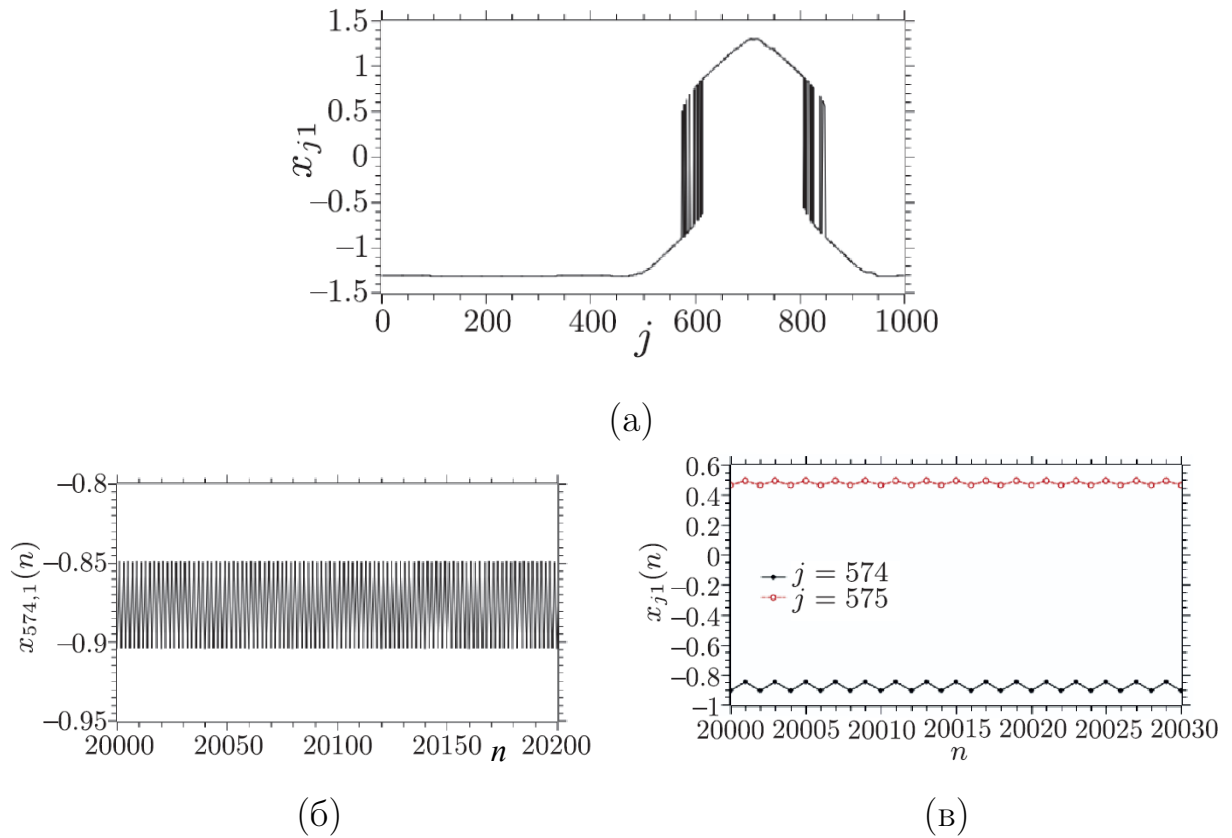


Рисунок 6.8. Двухъямная химерная структура в первом слое сети кубических отображений (6.1). (а) Мгновенный пространственный профиль, (б) вид установившихся колебаний элемента  $j = 574$ , (в) колебания элементов  $j = 574$  и  $j = 575$ , принадлежащих кластеру некогерентности, на малом интервале времени. Параметры первого слоя сети:  $\alpha_1 = 2.4$ ,  $\sigma_1 = 0.42$ ,  $r_1 = 0.1$

Установившиеся пространственно-временные структуры в различных слоях сети кубических отображений в случае полной идентичности всех слоев приведены на рисунке 6.9. В отсутствие взаимодействия ( $\gamma = 0$ ) в разных слоях образуются различные двухъямные химерные структуры (рисунок 6.9,а, верхний фрагмент), что обусловлено заданием случайно распределенных начальных условий для каждого слоя. Так, профиль двухъямной химеры в слое  $i = 20$ , хотя и имеет два кластера некогерентности, как и профиль в первом слое, но их расположение совершенно иное (рисунок 6.9,а, нижний фрагмент). В некоторых слоях наблюдаются структуры с гладким профилем, например, в слоях с номерами  $i = 4, 5, 10$ , как это видно на мгновенной

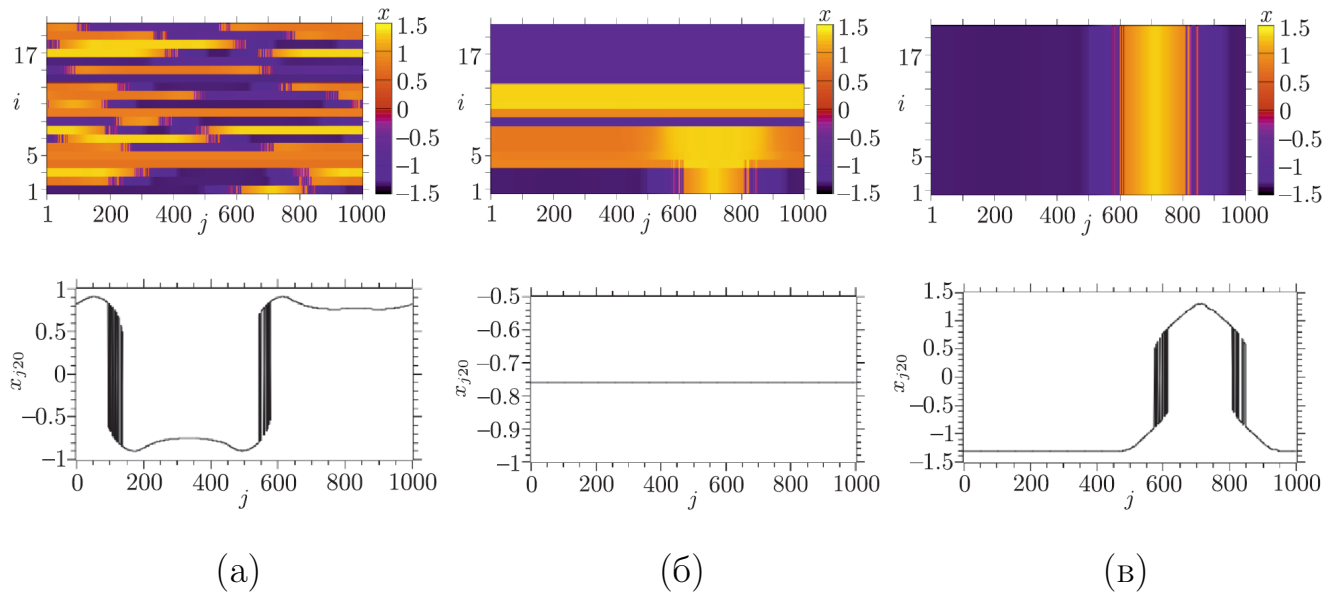


Рисунок 6.9. Иллюстрация пространственных структур в сети кубических отображений (6.1) в случае идентичности слоев. Мгновенные пространственные диаграммы сети (верхний ряд) и соответствующие мгновенные пространственные профили в слое  $i = 20$  (нижний ряд) при различных значениях однонаправленной связи  $\gamma$ : (а) 0, (б) 0.16, (в) 0.3.

Другие параметры сети:  $\alpha_2 = \alpha_1 = 2.4$ ,  $\sigma_2 = \sigma_1 = 0.42$ ,  $r_2 = r_1 = 0.1$

пространственной диаграмме, приведенной на рисунке 6.9,а (верхний фрагмент). С введением однонаправленной связи в многослойной сети кубических отображений наблюдаются те же эффекты вынужденной синхронизации, что и в аналогичной сети логистических отображений. При  $\gamma = 0.16$  имеет место вынужденная синхронизация пространственных структур трех первых слоев, в которых устанавливаются двухъямные химеры, совпадающие с химерой в первом слое (рисунок 6.9,б, верхний фрагмент). В последующих слоях  $i = 4, 5, \dots, 20$  наблюдается разрушение исходных химерных состояний с переходом к структурам с гладким профилем и однородным структурам. Пример такой структуры показан на рисунке 6.9,б (нижний фрагмент) для 20-го слоя сети. Подобные мгновенные пространственные профили отвечают режиму полной синхронизации колебаний в отдельном ансамбле нелокально связанных осцилляторов. При достаточно сильной связи  $\gamma = 0.3$  наблюдается

синхронизация всех слоев (рисунок 6.9,в, верхний фрагмент), причем ошибка воспроизведения структуры первого слоя  $\delta_i$  в пределах точности вычислений равна нулю (см. рисунки 6.9,в, нижний фрагмент и 6.8,а).

### **Случай отличия радиуса нелокальной связи в задающем слое.**

Проведенные численные исследования показали, что в случае отличия первого слоя в сети кубических отображений от всех остальных слоев, общая картина вынужденной синхронизации полностью аналогична и согласуется с представленными выше результатами, полученными для сети логистических отображений (раздел 6.2.2). Проиллюстрируем сказанное, выбрав различные значения радиусов нелокальной связи в первом и последующих слоях  $r_2 \neq r_1$  в сети кубических отображений.

На рисунке 6.10 приведены мгновенные пространственные диаграммы динамики сети (6.1) (верхний ряд) и соответствующие мгновенные пространственные профили состояний  $x_{j20}$  20-го слоя (нижний ряд) в случае  $r_2 = 0.2$  и при различных значениях однонаправленной связи  $\gamma$ . Как видно из рисунка 6.10,а, при выбранном значении радиуса связи  $r_2$ , без взаимодействия в большинстве слоев устанавливается пространственно-однородный режим. Слабая связь ( $\gamma = 0.16$ ) приводит к частичной синхронизации первых четырех слоев (рисунок 6.10,б), в то время как в остальных слоях по-прежнему наблюдается режим полной синхронизации колебаний. Вынужденная синхронизация (в «эффективном смысле») всех слоев достигается при достаточно сильной связи,  $\gamma = 0.3$  (рисунок 6.10,в). В этом случае, как и для сети логистических отображений, задающая структура первого слоя воспроизводится во всех слоях сети кубических отображений с конечной точностью (рисунок 6.10,в, нижний фрагмент).

Как и в случае сети логистических отображений, проведем расчеты величины  $\delta_i$  (6.6) для выбранных слоев сети кубических отображений при изменении радиуса связи  $r_2$  и при фиксированном радиусе связи первого слоя  $r_1 = 0.1$ . По-



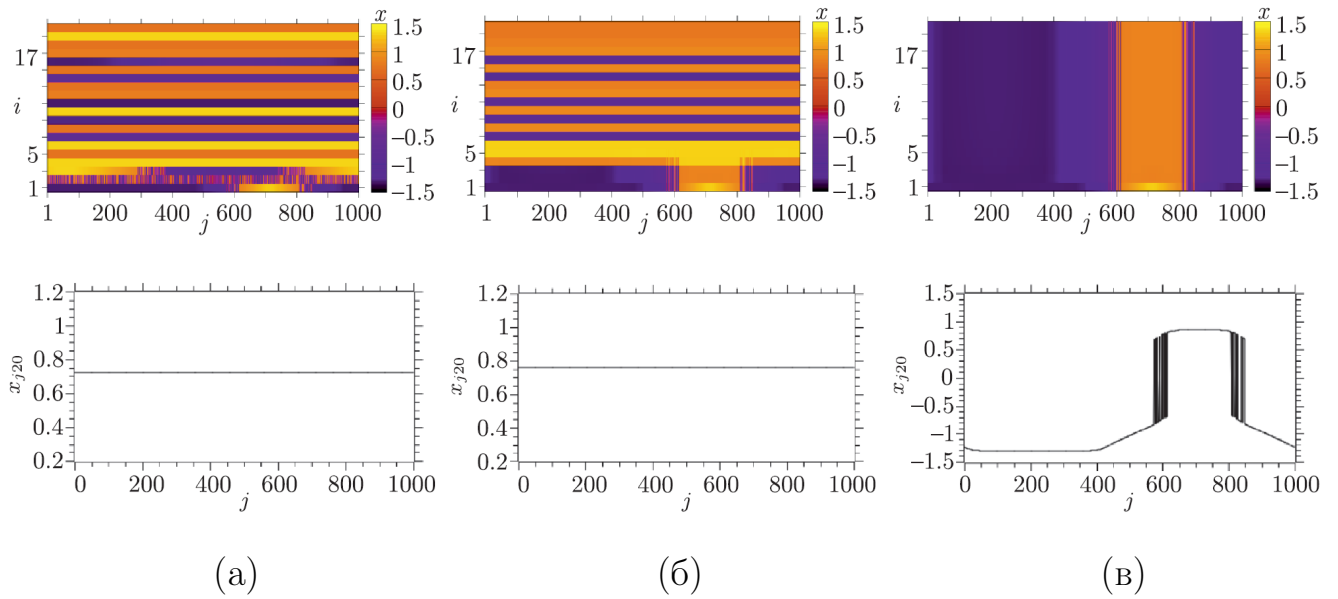


Рисунок 6.10. Пространственные структуры в сети кубических отображений (6.1) при различных радиусах связи в первом слое и всех остальных слоях:  $r_1 = 0.1$ ,  $r_2 = 0.2$ . Мгновенные пространственные диаграммы сети (верхний ряд) и мгновенные пространственные профили в 20-м слое при различных значениях коэффициента однонаправленной связи  $\gamma$ : (а) 0, (б) 0.16, (в) 0.3.

Другие параметры сети:  $\alpha_2 = \alpha_1 = 2.4$ ,  $\sigma_2 = \sigma_1 = 0.42$

лученные графики зависимостей приведены на рисунке 6.11 для двух значений коэффициента однонаправленной связи  $\gamma$ .

Можно видеть, что при слабой межслойной связи  $\gamma = 0.16$  в область «эффективной» синхронизации, определяемую условием (6.6), попадают только второй и третий слои при условии близости значений  $r_2$  и  $r_1$  ( $0.062 < r_2 < 0.11$ ) (рисунок 6.11,а). Если однонаправленная связь достаточно сильная ( $\gamma = 0.3$ ), то критерий «эффективной» синхронизации  $\delta_i < 0.01$  выполняется для всех слоев сети в достаточно широкой области значений радиуса связи  $0.08 < r_2 < 0.18$  (рисунок 6.11,б). Численные исследования показали, что аналогичным образом сеть кубических отображений ведет себя и при расстройке параметров нелокальной связи  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

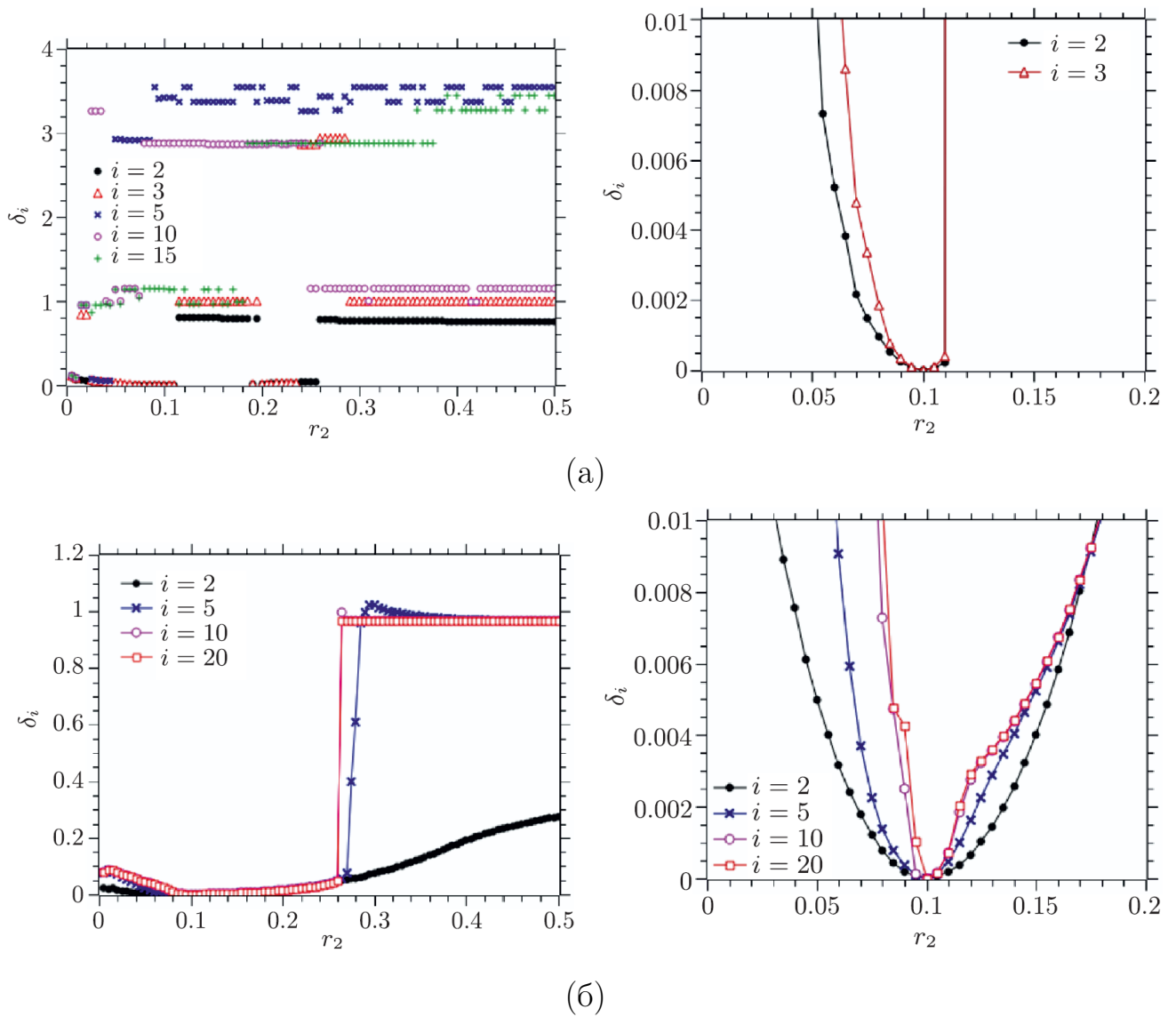


Рисунок 6.11. Зависимости величины  $\delta_i$  (6.6) в выбранных слоях сети кубических отображений от радиуса связи  $r_2$  при фиксированном  $r_1 = 0.1$  для двух значений силы связи  $\gamma$ : (а) 0.16, (б) 0.3. На фрагментах слева приведено всё множество значений  $\delta_i$ , справа – только значения  $\delta_i < 0.01$ . Время установления структур без связи  $n_0 = 10^4$ , время установления при взаимодействии слоев  $n_1 = 10^4$ , время усреднения  $\nu = 5 \times 10^3$ . Другие параметры сети как для рисунка 6.10

## 6.3 Вынужденная синхронизация неоднородной мультиплексной сети хаотических осцилляторов в режиме химерного состояния

### 6.3.1 Исследуемая модель

В данном разделе исследуется неоднородная мультиплексная сеть хаотических осцилляторов (6.1) [341], состоящая из неидентичных слоев, каждый из которых характеризуется различными управляющими параметрами, определяющими динамику индивидуальных элементов, и параметрами нелокальной (внутренней) связи между элементами каждого слоя. Кроме того, рассматриваются случаи неоднородной и несимметричной межслойной связи между слоями исследуемой сети (6.1). Она содержит как неоднородную однонаправленную компоненту с коэффициентом  $\gamma_i$ , так и компоненту неоднородной обратной связи с интенсивностью  $g_i$ , которые не равны между собой. Напомним, что под обратной связью в данном случае понимается воздействие последующего слоя сети на предыдущий.

Локальная динамика индивидуального осциллятора сети (6.1) задается логистическим отображением с управляющим параметром  $\alpha_i$ :

$$x_{ji}(n+1) = f(x_{ji}(n), \alpha_i), \quad f(x, \alpha) = \alpha x(1-x). \quad (6.7)$$

Важную роль в настоящем исследовании играет неоднородность исследуемой сети. Неоднородность различных слоев сети (6.1) вводится следующим образом. Параметры  $\alpha_i$ ,  $\sigma_i$ ,  $\gamma_i$  и  $g_i$  имеют переменную (от слоя к слою) компоненту, которая выбирается случайным образом в пределах некоторого заданного

интервала:

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= \alpha_1 + \xi_{\alpha i} \Delta \alpha, \quad i = 2, \dots, M, \\
 \sigma_i &= \sigma_1 + \xi_{\sigma i} \Delta \sigma, \quad i = 2, \dots, M, \\
 g_i &= g_2 + \xi_{g i} \Delta g, \quad i = 3, \dots, M - 1, \\
 \gamma_i &= \begin{cases} \gamma_2, & i = 2, \\ \gamma_3, & i = 3, \\ \gamma_3 + \xi_{\gamma i} \Delta \gamma, & i = 4, \dots, M. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Здесь  $\xi_{\alpha i}$ ,  $\xi_{\sigma i}$ ,  $\xi_{g i}$ ,  $\xi_{\gamma i}$  – некоррелированные случайные числа, равномерно распределенные в интервале  $[-0.5, 0.5]$ . Величины  $\Delta \alpha$ ,  $\Delta \sigma$ ,  $\Delta g$ ,  $\Delta \gamma$  задают разброс параметров (среднеквадратичное отклонение) в различных слоях сети. Все выборки случайных чисел  $\xi_{\alpha i}$ ,  $\xi_{\sigma i}$ ,  $\xi_{g i}$ ,  $\xi_{\gamma i}$  фиксировались и при проведении численных экспериментов не менялись.

Чтобы обеспечить существование сложных режимов поведения в слоях сети, были выбраны значение параметра  $\alpha_1 = 3.8$ , отвечающее режиму хаотической динамики в отдельно взятом логистическом отображении (6.7), и значения параметров нелокальной связи  $\sigma_1 = 0.32$ ,  $r_1 = 0.32$ , соответствующие возможности реализации химерных состояний в несвязанных слоях. Начальные состояния всех слоев многослойной сети были выбраны случайным образом в интервале  $[0; 1]$  и затем не менялись в ходе проведения всех расчетов. Для установления пространственно-временных режимов в слоях сети в отсутствие взаимодействия выбиралось время  $10^4$  итераций. После указанного переходного процесса вводилась межслойная связь и расчеты проводились в течение  $5 \times 10^3$  итераций.

Для первого (задающего) слоя были выбраны и зафиксированы начальные условия, соответствующие установлению в этом слое комбинированного химерного состояния, содержащего кластеры некогерентности как фазового, так и амплитудного типа. Характер соответствующей пространственной структуры

(мгновенный профиль) и ее изменений во времени (пространственно-временной профиль) приведены на рисунке 6.12. Колебания элементов задающего слоя во времени являются хаотическими.

Приведенные на рисунке 6.12 профили отражают сложную пространственно-временную динамику задающего ( $i = 1$ ) слоя сети, соответствующую режиму сосуществования амплитудной (кластер некогерентности с элементами  $50 \leq j \leq 190$ ) и фазовой химеры (некогерентные кластеры с элементами  $410 \leq j \leq 500$  и  $770 \leq j \leq 835$ ).

В силу задания случайно распределенных начальных условий, в отсутствие взаимодействия другие слои сети (6.1) демонстрируют различные пространственно-временные структуры, включая химерные. Различия в этих режимах хорошо видны на мгновенной пространственной диаграмме, приведенной на рисунке 6.13,а. В качестве иллюстрации на этом же рисунке показаны характерные мгновенные пространственные профили структур (рису-

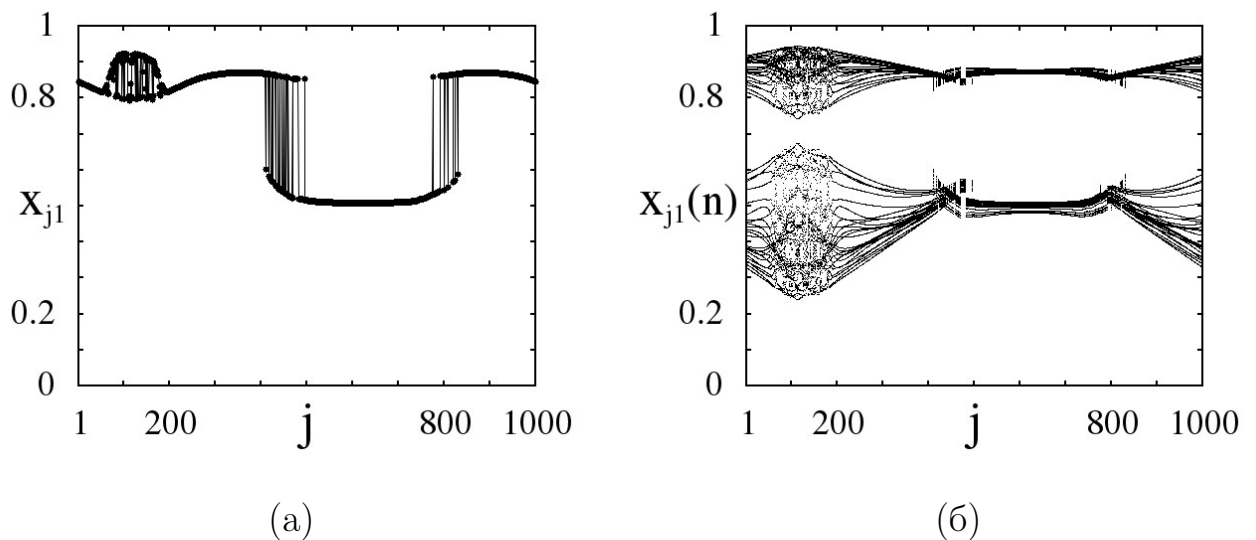


Рисунок 6.12. Мгновенный профиль (а) и пространственно-временной профиль (б) динамики 1-го слоя сети (6.1). Элементы  $50 \leq j \leq 190$  формируют некогерентный кластер амплитудной химеры и элементы  $410 \leq j \leq 500$  и  $770 \leq j \leq 835$  соответствуют двум кластерам некогерентности фазовой химеры. Параметры:  $\alpha_1 = 3.8$ ,  $\sigma_1 = 0.32$ ,  $r_1 = 0.32$

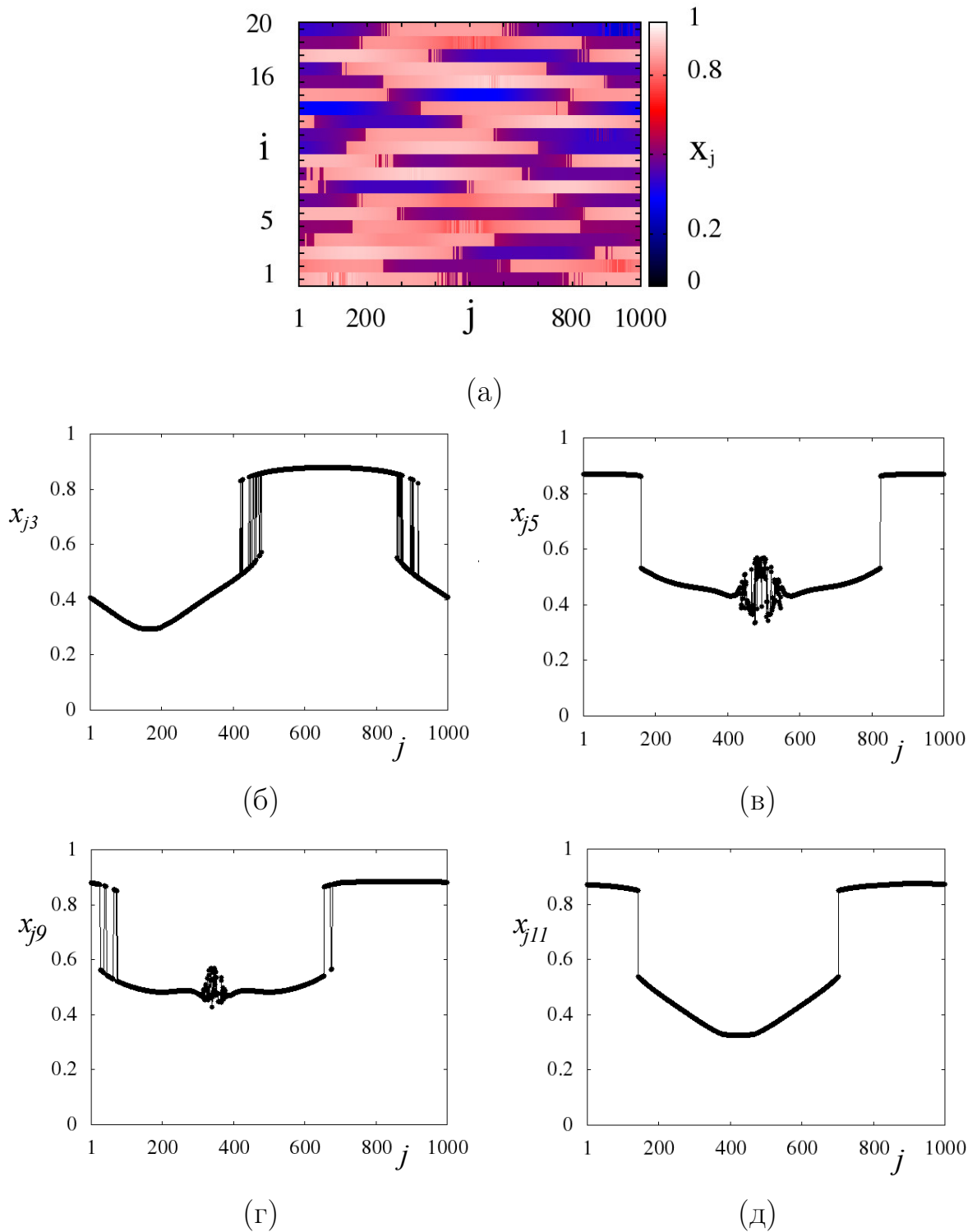


Рисунок 6.13. Мгновенная пространственная диаграмма состояний сети (6.1) (а) и мгновенные пространственные профили (б)–(д) для выбранных слоев сети:  $i = 3$  (б),  $i = 5$  (в),  $i = 9$  (г),  $i = 11$  (д), в отсутствие межслойной связи

$\gamma_i = 0$ ,  $g_i = 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, M$ . Другие параметры:  $\alpha_1 = 3.8$ ,  $\sigma_1 = 0.32$ ,

$$r_1 = 0.32, \Delta\alpha = \Delta\sigma = \Delta g = \Delta\gamma = 0$$

нок 6.13,б–д), устанавливающиеся в выбранных слоях сети в отсутствие межслойной связи.

Численные расчеты показали, что наиболее типичными пространственно-временными структурами в несвязанных слоях сети являются режимы только фазовой химеры (как для 3-го слоя на рисунке 6.13,б), только амплитудной химеры (как для 5-го слоя на рисунке 6.13,в), комбинированной химерной структуры (как для 9-го слоя на рисунке 6.13,г) и пространственно-однородной динамики (как в 11-м слое на рисунке 6.13,д). Во всех случаях пространственно-временные структуры, реализуемые в слоях сети (6.1) в отсутствие межслойной связи, полностью отличны от химерной структуры, наблюдаемой в задающем слое (рисунок 6.12).

Степень синхронизации структур в различных слоях по отношению к задающему слою определяется по максимальному среднему (по времени) квадрату отклонения мгновенных состояний элементов в рассматриваемом слое относительно состояний соответствующих элементов первого слоя. Для этого используется следующая количественная характеристика:

$$\eta_i = \max_j \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_{ji}(k) - x_{j1}(k))^2 \right), \quad i = 2, \dots, M, \quad (6.9)$$

где  $n = 5 \times 10^3$  – время усреднения после периода установления пространственно-временного режима после введения межслойной связи. Так как различные слои системы не идентичны задающему слою, то нельзя в строгом смысле говорить о полной синхронизации пространственно-временной динамики в различных слоях. В этом случае требуется задать некоторый количественный критерий, определяющий границу синхронизации. Будем полагать, что  $i$ -й слой синхронизован с задающим слоем в некотором эффективном смысле, если выполняется условие:

$$\eta_i \leq 0.001. \quad (6.10)$$

Если данное условие выполняется, то можно считать, что имеет место эффективная полная синхронизация соответствующих слоев с точностью  $\eta_i$ . Если условие (6.10) выполняется только для определенных кластеров слоя (максимум по  $j$  в (6.9) рассчитывается в пределах отдельных кластеров), то можно говорить об эффективной частичной (кластерной) синхронизации. Похожая характеристика  $\delta_i$  (5.5) была использована в главе 5 для диагностики эффектов синхронизации при исследовании системы двух связанных ансамблей логистических отображений и показала свою результативность при оценке локальных отклонений структуры ансамблей.

### 6.3.2 Случай слабой неоднородности при однонаправленном взаимодействии всех слоев

Сначала рассмотрим мультиплексную сеть (6.1) при наличии только однонаправленного взаимодействия слоев, то есть  $g_i = 0$  для любого  $i = 1, 2, \dots, M$ . Кроме того, будем считать, что коэффициент однонаправленного воздействия задающего слоя на второй  $\gamma_2$  и второго слоя на третий  $\gamma_3$  одинаковы:  $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$ . Исследуем слабо неоднородную сеть, положив  $\Delta\alpha = \Delta\gamma = \Delta\sigma = 0.001$ .

Исследования поведения сети при различных значениях  $\gamma$  показывают, что задающая химерная структура в 1-м слое по-разному воспроизводится в слоях сети при вариации силы однонаправленной связи. На рисунке 6.14 приведены мгновенные пространственные диаграммы состояний сети (6.1) при увеличении силы однонаправленной связи  $\gamma$ . При слабой силе связи  $\gamma = 0.16$  (рисунок 6.14,а) химерная структура задающего слоя полностью (в пределах заданной точности (6.10)) воспроизводится только в небольшом числе слоев сети. При этом в большинстве других слоев устанавливаются либо пространственно-однородные структуры, либо режимы полной синхронизации элементов слоя



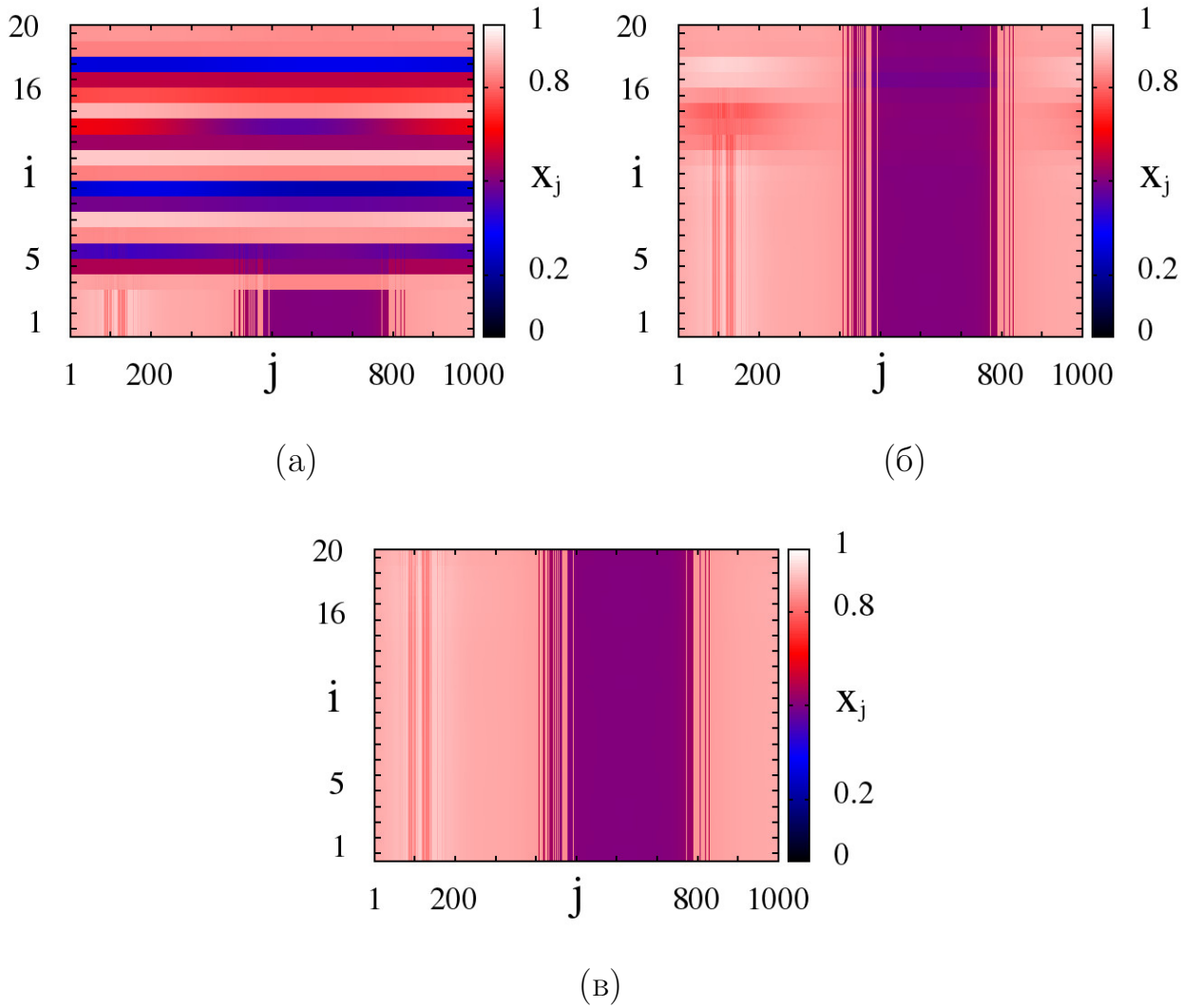


Рисунок 6.14. Пространственные диаграммы мгновенных состояний сети (6.1) для различных значений силы однонаправленной связи  $\gamma$ : (а) 0.16, (б) 0.2, (в)

0.43. Другие параметры:  $\alpha_1 = 3.8$ ,  $\sigma_1 = 0.32$ ,  $r_1 = 0.32$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$ ,

$$\Delta\alpha = \Delta\gamma = \Delta\sigma = 0.001, g_i = 0, i = 1, \dots, M$$

между собой. При небольшом увеличении коэффициента межслойной связи,  $\gamma = 0.2$ , все больше слоев синхронизируются в режиме задающей химерной структуры (рисунок 6.14,б). Однако, как видно из данного рисунка, когерентные кластеры и кластеры некогерентности фазовой химеры синхронизируются быстрее и во всех слоях сети, тогда как элементы, расположенные в области существования в задающем слое амплитудной химеры, синхронизируются только до 13-го слоя (рисунок 6.14,б). Данный факт иллюстрирует рисунок 6.15,а, на котором

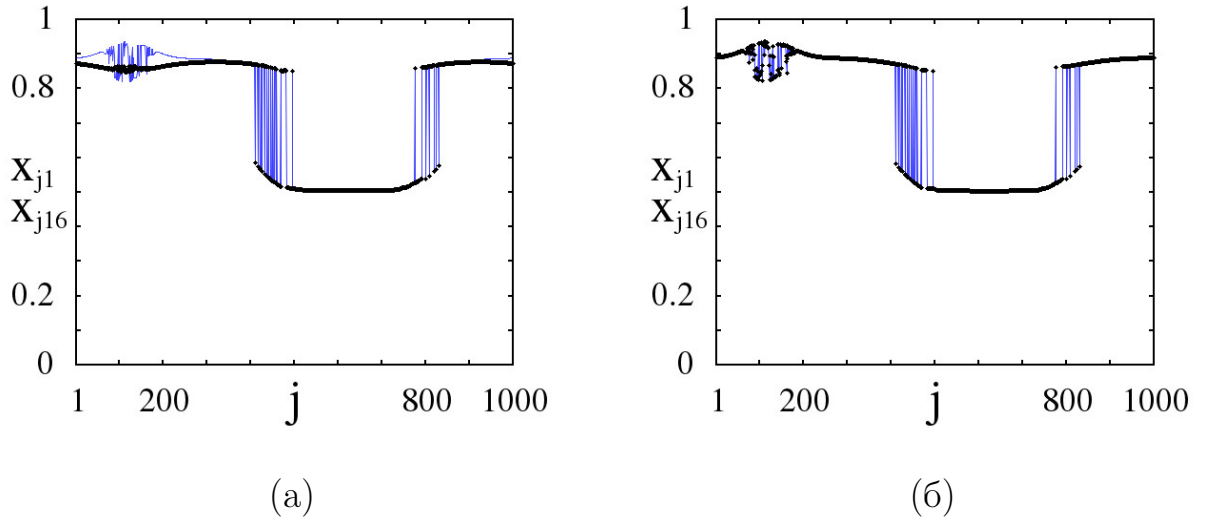


Рисунок 6.15. Мгновенные пространственные профили состояний осцилляторов  $x_{j1}$  1-го (синяя кривая) и  $x_{j16}$  16-го (черная кривая) слоев сети (6.1) для двух значений силы однонаправленной связи  $\gamma$ : (а) 0.2 и (б) 0.43, иллюстрирующие различие в синхронизации амплитудной и фазовой химер.

Другие параметры как для рисунка 6.14

приведены мгновенные пространственные профили динамики элементов 1-го (синяя кривая) и 16-го (черная кривая) слоев при  $\gamma = 0.2$ . Из данного рисунка хорошо видно, что различия в мгновенных профилях наблюдаются только в области некогерентного кластера амплитудной химеры (элементы  $1 \leq j \leq 260$ ). Можно сказать, что в слоях  $i > 12$  имеет место частичная синхронизация.

При силе связи  $\gamma > 0.42$  наблюдается эффективная полная синхронизация слоев, что проиллюстрировано на рисунке 6.14,в. В этом случае мгновенные пространственные профили всех слоев полностью (в пределах заданной погрешности (6.10)) совпадают (рисунок 6.15,б).

Для более точной диагностики синхронизации различных слоев по формуле (6.9) рассчитывался максимальный средний квадрат разности состояний  $\eta_i$ . На основании этих расчетов была построена диаграмма синхронных и несинхронных режимов в разных слоях сети при изменении коэффициента однонаправленной связи  $\gamma$ . Она приведена на рисунке 6.16. На диаграмме выделе-

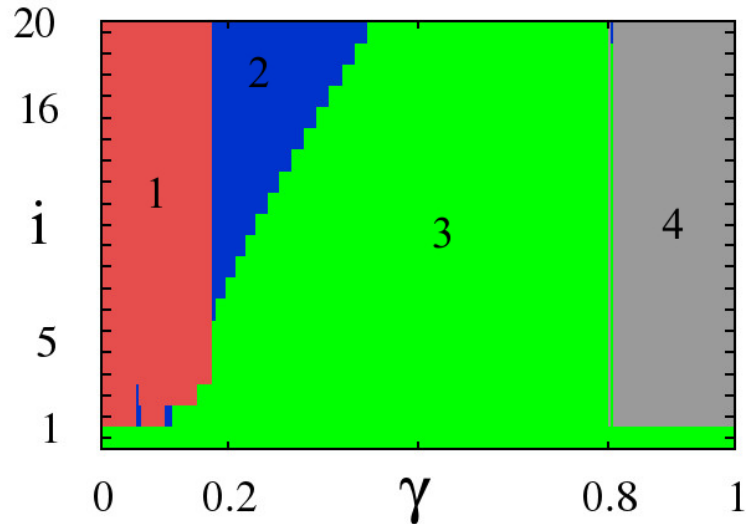


Рисунок 6.16. Диаграмма синхронных и несинхронных режимов в однонаправленно связанной мультиплексной сети (6.1) при изменении силы межслойной связи  $\gamma$ . Область 1 – отсутствие синхронизации слоев, область 2 – частичная синхронизация, область 3 – вынужденная синхронизация всех элементов слоя с задающей структурой и область 4 – уход траектории на бесконечность. Параметры сети как для рисунка 6.14

ны области, в которых значения  $\eta_i$  больше или меньше 0.001. Согласно принятому критерию (6.10) эти области соответствуют несинхронным и синхронным состояниям слоев. Для того чтобы можно было отобразить различия порогов синхронизации в области амплитудной и фазовой химеры, на мгновенных профилях были выделены два интервала по номеру элемента в слое  $j$ :  $j \in [1; 399] \cup [841; 1000]$  и  $j \in [400; 840]$ , соответствующие существованию кластеров амплитудной и фазовой химеры в задающем слое, соответственно (рисунок 6.12). В них по отдельности были рассчитаны значения величины  $\eta_i$ .

На диаграмме режимов (рисунок 6.16) выделены четыре области. В области 1 значения величины  $\eta_i > 0.001$  для всех слоев сети и, следовательно, вынужденная синхронизация слоев с задающим слоем отсутствует. Область 2 соответствует режиму частичной синхронизации мастер-структуры в слоях

сети и характеризуется пороговым значением силы связи  $\gamma \simeq 0.18$ . В этой области элементы слоев, находящиеся под воздействием кластеров фазовой химеры, синхронизируются, то есть условие (6.10) выполняется для элементов в интервале  $j \in [400; 840]$ . В то же время, элементы, соответствующие амплитудной химере мастер-структуры, остаются несинхронизованными, для них ( $j \in [1; 399] \cup [841; 1000]$ ) критерий (6.10) не выполняется. Стоит отметить, что режим частичной синхронизации не наблюдается для первых шести слоев сети, которые полностью (в смысле выполнения 6.10)) синхронизируются, начиная с  $\gamma \simeq 0.18$  (рисунок 6.16). Вынужденная эффективная синхронизация всех слоев сети (6.1) с задающей структурой первого слоя реализуется при изменении силы однонаправленной связи в интервале  $[0.42, 0.8]$ , что соответствует области 3 на диаграмме режимов. В указанной области критерий (6.10) имеет место для всех элементов  $i$ -го слоя. Из диаграммы режимов также следует, что пороговое значение  $\gamma$  для синхронизации всех элементов слоев растет почти линейно с номером слоя  $i$  и, следовательно, ширина области частичной синхронизации (область 2 на рисунке 6.16) также увеличивается от слоя к слою. Наконец, в области 4 диаграммы режимов, когда  $\gamma > 0.8$ , имеет место уход траектории на бесконечность.

Таким образом, диаграмма режимов (рисунок 6.16) четко отражает разницу между поведением элементов в областях, соответствующих фазовой и амплитудной химерам в задающем слое. Видно, что воздействие группы элементов задающего слоя, находящихся в режиме фазовой химеры, при усилении однонаправленной связи приводит к воспроизведению синхронной фазовой химеры сначала в нескольких первых слоях, а затем почти сразу же во всех слоях рассматриваемой сети. Амплитудная химера, напротив, распространяется на последующие слои постепенно. Стоит отметить также присутствие на диаграмме (рисунок 6.16) внутри области 1 маленького изолированного участка области 2, расположенного в окрестности значения  $\gamma \simeq 0.03$ . Данная область соответствует динамике элементов второго и третьего слоев сети в случае очень слабой

межслойной связи. Синхронизация, имеющая место при изменении силы связи в интервале  $\gamma \in [0.02, 0.06]$  на диаграмме рисунка 6.16, соответствует эффекту так называемой «первоначальной» синхронизации, который будет описан далее.

### 6.3.3 Эффект «первоначальной» синхронизации

При проведении численных исследований было замечено, что при введении очень слабой однонаправленной связи между слоями, наблюдается частичная синхронизация. Однако, этот тип синхронизации отличается от режима частичной синхронизации, который имеет место в области 2 диаграммы режимов (рисунок 6.16), когда синхронизируются только кластеры фазовой химеры. При изменении силы однонаправленной связи в интервале  $\gamma \in [0.02, 0.06]$  вначале во всех слоях наблюдаются мгновенные пространственные профили, близкие к задающему ( $i = 1$ ), но со сдвигом в пространстве, как показано на рисунке 6.17,а. Далее они выравниваются, и почти во всех слоях сети (в некоторых случаях за исключением последних) образуются кластеры со сходными мгновенными состояниями, границы которых близки к границам кластеров в задающем слое. При этом фазовая химера либо отсутствует полностью, либо только частично совпадает с фазовой химерой в первом слое. Соответствующая такому случаю пространственная диаграмма мгновенных состояний элементов слоев сети приведена на рисунке 6.17,б. Примеры мгновенных пространственных профилей для 3-го и 11-го слоев в данном режиме показаны на рисунке 6.18. Можно видеть, что пространственные структуры в слоях, находящихся под воздействием, лишь в общих чертах повторяют структуру в задающем слое. Так, например, на приведенных профилях (рисунок 6.18) отсутствует кластер некогерентности амплитудной химеры, а кластеры некогерентности фазовой химеры значительно уже.

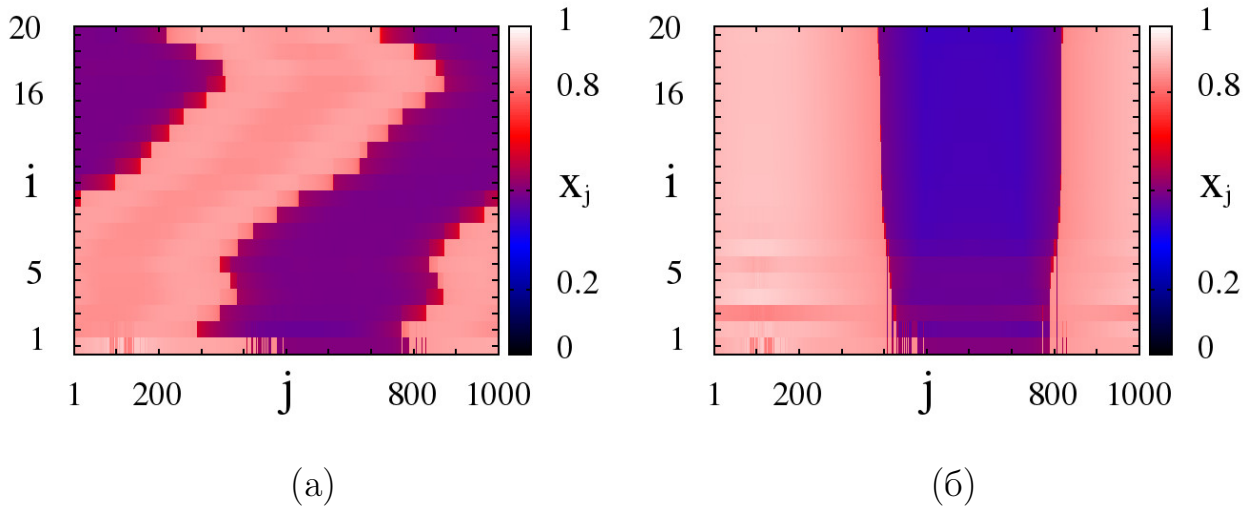


Рисунок 6.17. Иллюстрация эффекта «первоначальной» синхронизации. Пространственная диаграмма мгновенных состояний сети (6.1) для двух различных значений силы межслойной связи  $\gamma$ : (а) 0.023, (б) 0.036.

Параметры сети как для рисунка 6.14

Описанный эффект «первоначальной» синхронизации наблюдается в очень узком интервале значений параметра  $\gamma \in [0.02, 0.06]$  и при его дальней-

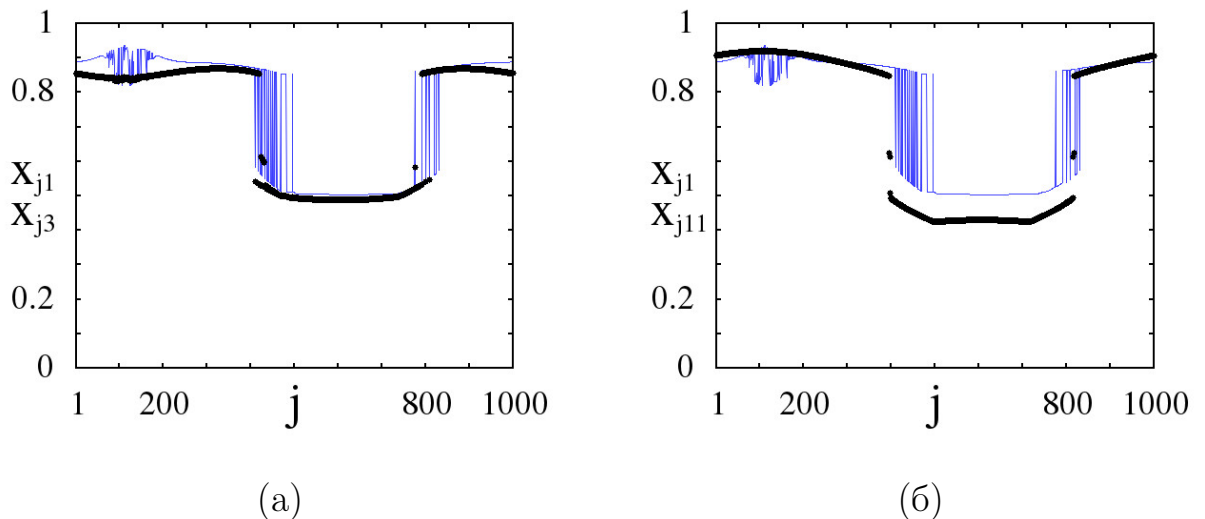


Рисунок 6.18. Мгновенные пространственные профили состояний элементов 3-го (а) и 11-го (б) слоев сети (6.1) в режиме «первоначальной» синхронизации при слабой однонаправленной связи  $\gamma = 0.032$ . Сплошной синей кривой изображена задающая структура в 1-м слое, черные точки соответствуют структурам в 3-м (а) и 11-м (б) слоях. Параметры сети как для рисунка 6.14

шем увеличении резко исчезает. Все слои, кроме задающего, динамика которого остается неизменной, переходят в режим частичной пространственной когерентности, характеризующейся гладким мгновенным пространственным профилем. Далее с ростом связи на диаграммах мгновенных состояний вновь становится заметен эффект вынужденной синхронизации. Сначала синхронизация происходит в нескольких первых слоях (рисунок 6.14,а), затем во всей сети (рисунок 6.14,в). На рисунке 6.19 представлена пространственная диаграмма, иллюстрирующая степень синхронизации слоев с задающим слоем и построенная с использованием среднего квадрата отклонения структуры  $i$ -го слоя, усредненного по ансамблю и по времени (6.6).

На данной диаграмме можно ясно видеть, как появляется и исчезает эффект «первоначальной» синхронизации в слоях, которому соответствует область темно-синего цвета. Наиболее заметно данный эффект проявляется в первых нескольких слоях сети в интервале изменений значения коэффициента

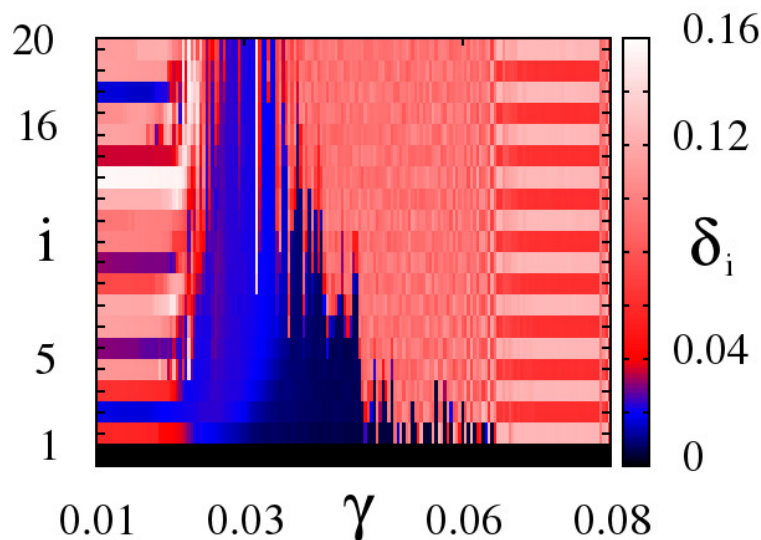


Рисунок 6.19. Диаграмма, отражающая степень синхронизации слоев сети (6.1) при изменении силы однонаправленной связи  $\gamma$  и построенная с использованием характеристики (6.6). Разные цвета соответствуют разным значениям величины  $\delta_i$ . Параметры сети как для рисунка 6.14

связи  $\gamma \in [0.02, 0.05]$ . В этой области значение величины  $\delta_i < 0.01$ , что отвечает критерию синхронизации (6.6).

Можно предположить, что причина появления и исчезновения «первоначальной синхронизации» при слабом взаимодействии слоев определенным образом связана со сдвигом эффективных значений параметров  $\alpha_i$ . Действительно, уравнения сети в случае однонаправленной связи можно переписать в виде:

$$x_{ji}(n+1) = [(1 - \sigma_i - \gamma_i)\alpha_i]x_{ji}(n)(1 - x_{ji}(n)) + \frac{\sigma_i}{2P_i} \sum_{k=j-P_i, k \neq j}^{j+P_i} f_{ki}(n) + \gamma_i[f_{j-1}(n)], \quad (6.11)$$

$$f_{ji}(n) = f(x_{ji}(n), \alpha_i) = \alpha_i x_{ji}(n)(1 - x_{ji}(n)).$$

Можно видеть, что динамика элементов ансамбля управляется эффективным параметром  $\alpha_i^* = \alpha_i(1 - \sigma_i - \gamma_i)$ , который зависит от коэффициентов как нелокальной связи слоев  $\sigma_i$ , так и однонаправленной связи  $\gamma_i$ .

В исследуемом случае слабой неоднородности сети при малых  $\gamma$  значения  $\alpha_i^*$  мало отличаются от значения  $\alpha_1$ , и элементы всех слоев сети почти идентичны. По этой причине каждый последующий слой частично синхронизируется уже при слабом воздействии со стороны элементов предыдущего слоя. Этим объясняется эффект «первоначальной» синхронизации при слабой связи. С ростом  $\gamma$  эффективные значения  $\alpha_i^*$  остаются близки между собой для второго и последующих слоев, однако они всё больше отличаются от параметра  $\alpha_1$ , определяющего динамику элементов задающего слоя. Таким образом, с ростом  $\gamma$ , с одной стороны, возрастает неидентичность задающего слоя и всех остальных слоев, что препятствует вынужденной синхронизации, а с другой стороны, растет сила воздействия задающего слоя, что в итоге при однонаправленной связи должно привести к синхронизации всей сети. Действительно, как уже отмечалось, с ростом  $\gamma$  «первоначальная» синхронизация разрушается, но затем, при значительно большей связи, все слои сети постепенно оказываются синхронизованными.

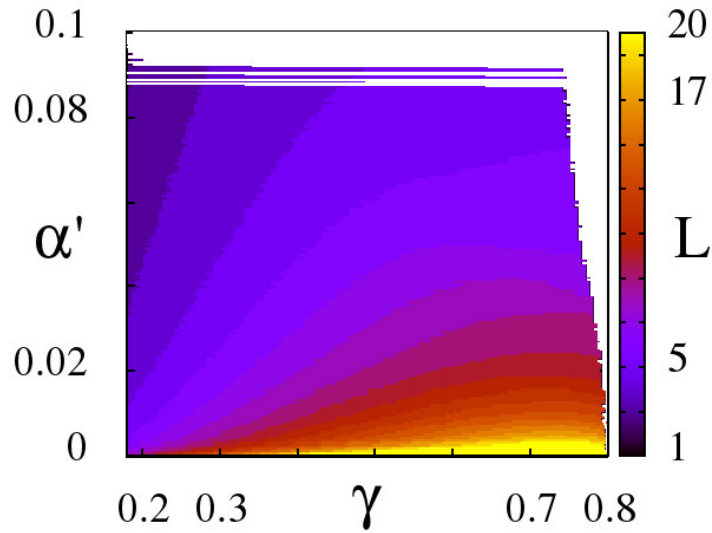


### 6.3.4 Влияние степени неоднородности слоев

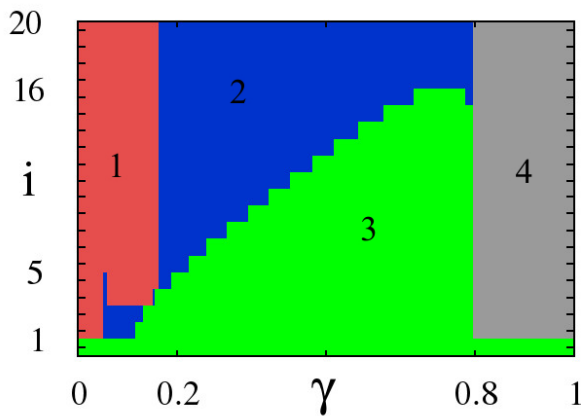
Теперь рассмотрим как степень и характер неоднородности однонаправленно связанных слоев сети влияет на эффект вынужденной синхронизации. Количественная оценка степени синхронизации слоев с задающей структурой проводится с использованием характеристики (6.9) и условия (6.10). Неоднородность или расстройка по параметрам слоев сети определяется согласно выражениям (6.8).

**Неоднородность по параметрам  $\alpha_i$ .** Сначала исследуем поведение сети (6.1) в случае, когда неоднородность вводится по параметрам  $\alpha_i$ , управляющих динамикой индивидуальных элементов  $i$ -го слоя. Для оценки влияния этого типа неоднородности используется величина, характеризующая относительную неоднородность слоев по параметру  $\alpha$ ,  $\alpha' = \Delta\alpha/\alpha_1$ , где  $\alpha_1$  – управляющий параметр в задающем (1-м) слое. Затем, при изменении силы однонаправленной связи  $\gamma$  и параметра  $\alpha'$ , определяется число слоев  $L$  сети, полностью синхронизованных (в смысле выполнения условия (6.10)) с задающим слоем. Результаты расчетов представлены в виде двумерной диаграммы на плоскости параметров  $(\gamma, \alpha')$ , приведенной на рисунке 6.20,а. Можно видеть, что эффективная полная синхронизация всех слоев (в смысле выполнения условия (6.10) для всех элементов  $i$ -го слоя) наблюдается только при очень малой относительной неоднородности.

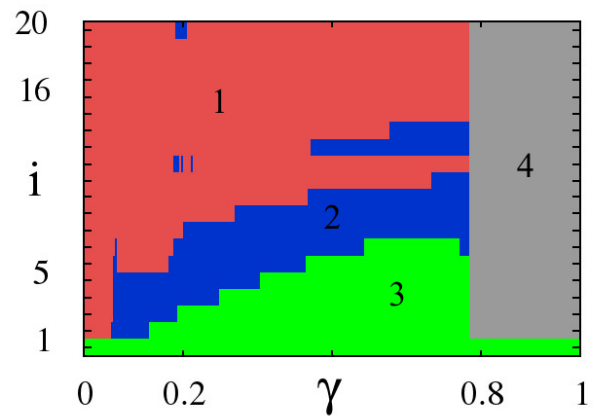
На рисунке 6.20,б,в приведены диаграммы режимов в сети при вариации коэффициента однонаправленной связи  $\gamma$ , построенные для двух величин неоднородности  $\Delta\alpha$ . Вначале, когда  $\Delta\alpha$  принимает не очень большие значения (рисунок 6.20,б), левая граница частичной синхронизации в области фазовой химеры почти не изменяется (сравним с рисунком 6.16). Для воспроизведения амплитудной химеры в последующих слоях (а, следовательно, и для эффективной полной синхронизации слоев) требуется всё более сильная однонаправ-



(a)



(б)



(в)

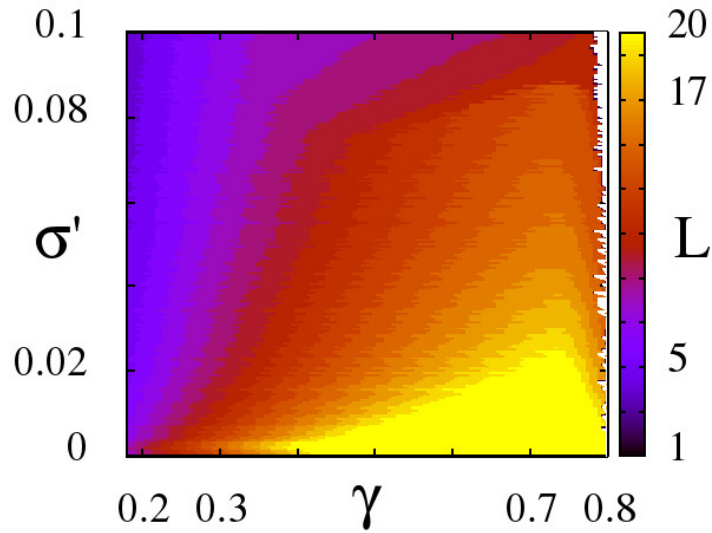
Рисунок 6.20. (а) Двумерная диаграмма, показывающая цветом максимальное количество полностью синхронизованных (в смысле (6.10)) слоев  $L$  в зависимости от степени неоднородности  $\alpha' = \Delta\alpha/\alpha_1$  и силы связи между слоями  $\gamma$ . Белым выделена область ухода на бесконечность системы. (б), (в) Диаграммы режимов в сети (6.1) при вариации параметра  $\gamma$ , полученные при двух значениях неоднородности: (б)  $\Delta\alpha = 0.02$  ( $\alpha' = 0.005263$ ), (в)  $\Delta\alpha = 0.145$  ( $\alpha' = 0.038158$ ). Обозначения областей 1–4 соответствуют рисунку 6.16. Параметры сети:  $\alpha_1 = 3.8$ ,  $\sigma_1 = 0.32$ ,  $r_1 = 0.32$ ,  $\Delta\gamma = \Delta\sigma = 0.001$ ,  $g_i = 0$  для всех  $i$

ленная связь. Тем не менее, при малой степени неоднородности по параметру  $\alpha$ , достичь вынужденной эффективной синхронизации всех слоев так и не удастся (рисунок 6.20,б). Самые удаленные слои ( $i > 16$ ) остаются в режиме частичной синхронизации в диапазоне изменения силы однонаправленной связи  $\gamma \in [0.18, 0.8]$ .

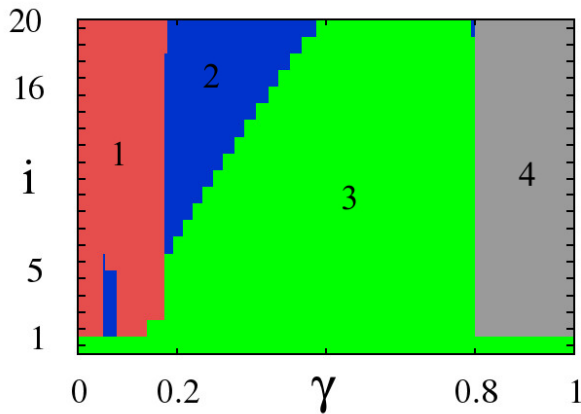
Рост неоднородности  $\Delta\alpha$  сильно влияет на синхронизацию слоев в сети. Так, при  $\Delta\alpha = 0.145$  (рисунок 6.20,в), область частичной синхронизации (воспроизведение фазовой химеры в области 2 на диаграмме) становится существенно уже по сравнению с предыдущим случаем (рисунок 6.20,б). С удалением от середины сети данная область исчезает, уступая место несинхронным режимам (область 1). Исключение составляют только два слоя ( $i = 13$  и  $i = 14$ ), для которых частичная синхронизация (область 2) имеет место в интервале значений межслойной связи  $\gamma \in [0.45, 0.78]$ . Эффективная полная синхронизация с задающей структурой наблюдается максимум до 7-го слоя сети, в то время как слои  $i \geq 15$  остаются несинхронизованными во всем интервале значений  $\gamma \in [0, 0.78]$ . Кроме того, все более высокий уровень однонаправленной связи требуется для достижения вынужденной синхронизации даже самых первых слоев сети (рисунок 6.20,в).

**Неоднородность по параметрам  $\sigma_i$ .** Предположим теперь идентичность всех элементов сети ( $\alpha_i = \alpha_1$ ) и введем неоднородность в коэффициенты нелокальной (внутрислойной) связи  $\sigma_i$  в соответствии с соотношениями (6.8). Чтобы можно было сравнивать результаты при анализе влияния различных неоднородностей, также как и в предыдущем случае, будем анализировать динамику сети (6.1) с использованием величины относительной неоднородности в слоях по параметру  $\sigma$ :  $\sigma' = \Delta\sigma/\sigma_1$ , где  $\sigma_1$  — силы нелокальной связи в 1-м, задающем слое.

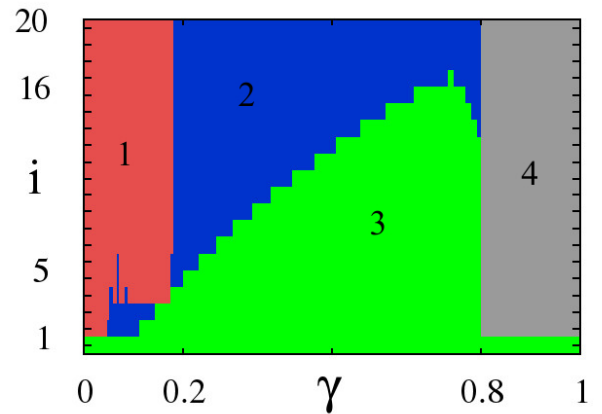
На рисунке 6.21,а приведена двумерная диаграмма зависимости числа слоев, полностью синхронизованных (в смысле выполнения (6.10)) с задающим



(a)



(б)



(в)

Рисунок 6.21. (а) Двумерная диаграмма, показывающая цветом максимальное количество полностью синхронизованных (в смысле (6.10)) слоев  $L$  в зависимости от степени неоднородности  $\sigma' = \Delta\sigma/\sigma_1$  и силы однонаправленной связи  $\gamma$ . Белым выделена область ухода на бесконечность системы. (б), (в) Диаграммы режимов в сети (6.1) при вариации параметра  $\gamma$ , полученные при двух значениях неоднородности: (б)  $\Delta\sigma = 0.001684$  ( $\sigma' = 0.005263$ ), (в)  $\Delta\sigma = 0.012211$  ( $\sigma' = 0.038158$ ). Обозначения областей 1–4 соответствуют рисунку 6.16. Параметры сети:  $\alpha_1 = 3.8$ ,  $\sigma_1 = 0.32$ ,  $r_1 = 0.32$ ,

$$\Delta\alpha = \Delta\gamma = 0.001, g_i = 0 \text{ для всех } i$$

слоем, от силы связи между слоями  $\gamma$  и относительной неоднородности  $\sigma'$  в тех же пределах, что и диаграмма на рисунке 6.20,а. Как видно из рисунка 6.21,а, существует конечная область по параметрам  $\gamma$  и  $\sigma'$ , в которой имеет место эффективная полная синхронизация всех 20 слоев сети в смысле выполнения условия (6.10). Данная область ограничена значением  $\gamma \approx 0.37$  слева и значением  $\gamma \approx 0.8$  справа, а максимальное значение относительной неоднородности, при котором наблюдается эффективная полная синхронизация всех слоев, есть  $\sigma'_{\max} \approx 0.02$ . Данное значение существенно больше, чем в случае наличия неоднородности по параметрам  $\alpha_i$ , для которого  $\alpha'_{\max} \approx 0.0025$  (рисунок 6.20,а). На рисунке 6.21,б,в представлены диаграммы режимов в сети (6.1) для двух значений неоднородности  $\Delta\sigma$  при вариации силы однонаправленной связи. При очень слабой неоднородности,  $\Delta\sigma = 0.001684$  (рисунок 6.21,б), расположение областей синхронных и несинхронных режимов полностью совпадает с диаграммой на рисунке 6.16. Увеличение уровня неоднородности,  $\Delta\sigma = 0.012211$  (рисунок 6.21,в), приводит к заметному увеличению области частичной синхронизации (воспроизведение кластеров фазовой химеры) и уменьшению числа слоев сети, для которых имеет место эффективная полная синхронизация. Подобный эффект наблюдался в случае довольно малой расстройки по параметрам  $\alpha_i$  (см. рисунок 6.20,б).

Сравнивая рисунки 6.20 и 6.21, можно заметить, что неоднородность параметров  $\sigma_i$  слабее влияет на размер и расположение области полной синхронизации слоев. Режим эффективной полной синхронизации всех 20 слоев разрушается при значениях  $\Delta\sigma = 0.00624$ , для которого значение относительной неоднородности  $\sigma' = 0.0195$ . Относительная неоднородность по параметрам  $\alpha_i$ , приводящая к тому же эффекту, существенно меньше и составляет  $\alpha' = 0.0025$  ( $\Delta\alpha = 0.0095$ ). Отметим, что абсолютные значения соответствующих разбросов одного порядка.

Эффекты синхронизации сохраняются и при гораздо более значительных относительных разбросах  $\sigma'$ , когда в случае неоднородности значений  $\alpha_i$  разру-

шается синхронизация даже первых слоев. Диаграммы режимов, построенные для больших значений неоднородности  $\Delta\sigma$ , приведены на рисунке 6.22. Хорошо видно, во всех случаях область несинхронных режимов (область 1) занимает

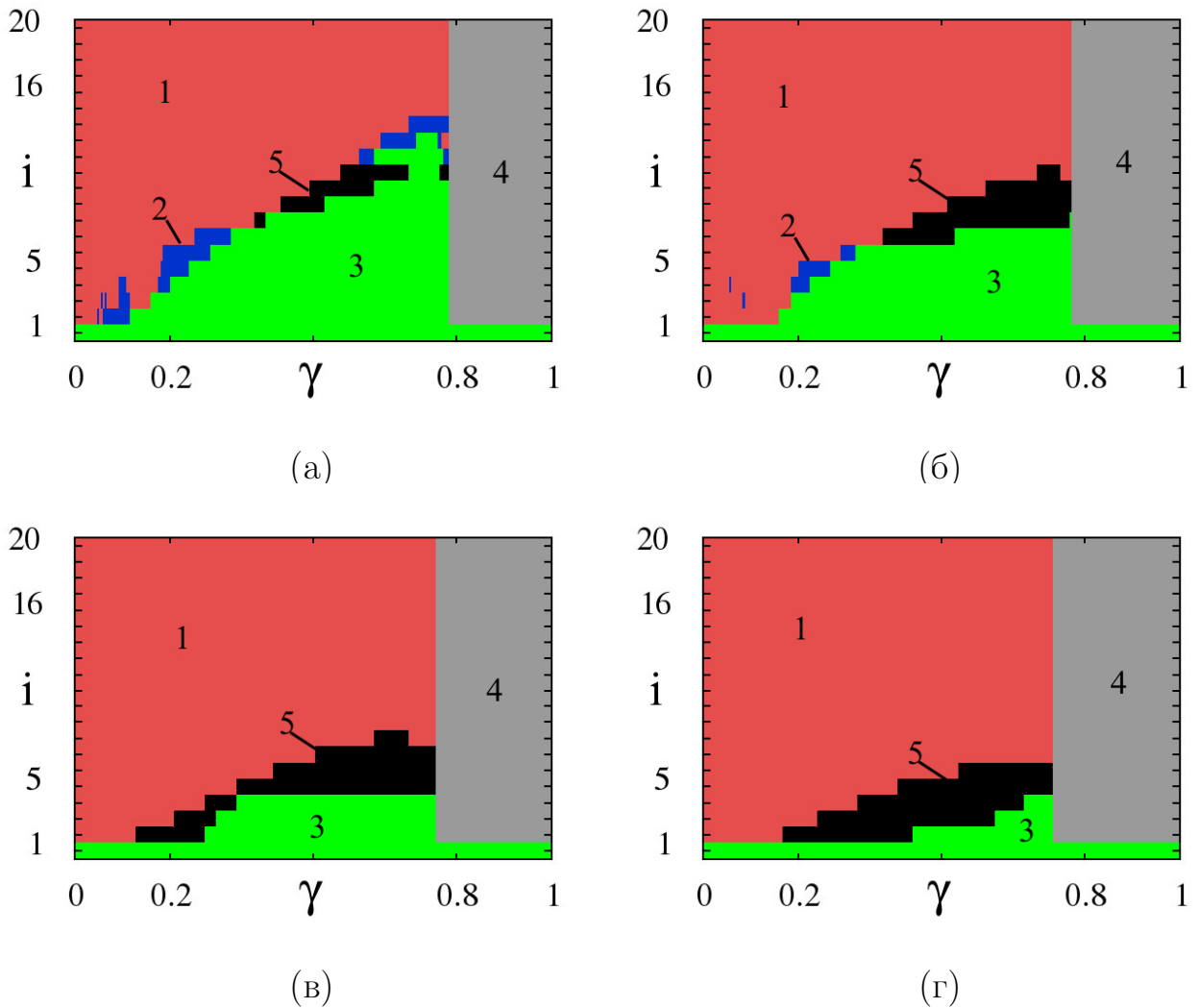


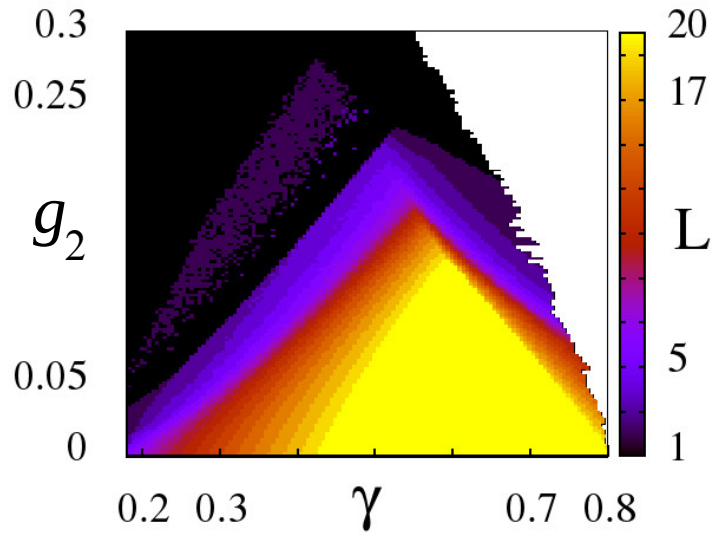
Рисунок 6.22. Диаграммы режимов в сети (6.1) при вариации силы однонаправленной связи  $\gamma$ , полученные при различных значениях неоднородности по параметрам  $\sigma_i$ : (а)  $\Delta\sigma = 0.028$  ( $\sigma' = 0.0875$ ), (б)  $\Delta\sigma = 0.044$  ( $\sigma' = 0.1375$ ), (в)  $\Delta\sigma = 0.09$  ( $\sigma' = 0.28125$ ), (г)  $\Delta\sigma = 0.140$  ( $\sigma' = 0.4375$ ). Обозначения областей 1–4 соответствуют рисунку 6.16. В области 5 имеет место синхронизация только в кластере с амплитудной химерой. Параметры сети:  $\alpha_1 = 3.8$ ,  $\sigma_1 = 0.32$ ,  $r_1 = 0.32$ ,  $\Delta\alpha = \Delta\gamma = 0.001$ ,  $g_i = 0$  для всех  $i$

большую часть диаграмм и ее размер увеличивается с ростом  $\Delta\sigma$ , в то время как область эффективной полной синхронизации (область 3) заметно уменьшается. Кроме того, интересно отметить, что при больших  $\Delta\sigma$  на диаграммах возникает довольно значительная область 5, в которой имеет место синхронизация в режиме амплитудной химеры (то есть условие (6.10) выполняется только для осцилляторов  $j \in [1, 399]$ , рисунок 6.12) и отсутствует фазовая химера. Такая ситуация не типична для рассмотренных выше режимов сети. Более того, начиная с  $\Delta\sigma = 0.078$ , область 2, соответствующая синхронизации в режиме только фазовой химеры, полностью исчезает (рисунок 6.22, в, г), а область 5, наоборот, увеличивается.

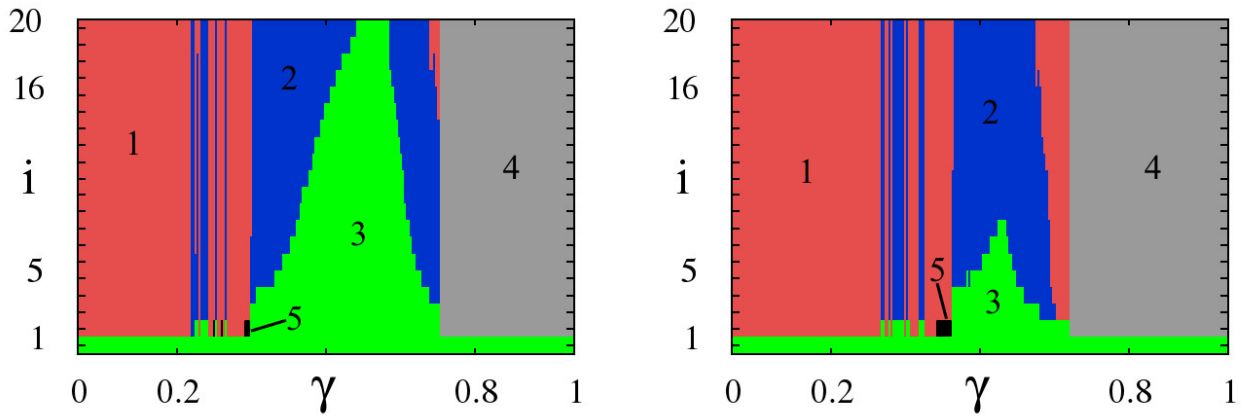
### 6.3.5 Влияние обратной связи

Выясним влияние обратной связи, то есть влияния верхних слоев на нижние, в сети (6.1) со слабой неоднородностью слоев. В этом случае, для более понятного изложения, будем называть однонаправленную связь, характеризующуюся коэффициентом  $\gamma$ , *прямой связью*. Оставим прежними все значения параметров:  $\alpha_1 = 3.8$ ,  $\sigma_1 = 0.32$ ,  $r_1 = 0.32$ ,  $\Delta\alpha = \Delta\gamma = \Delta\sigma = 0.001$ , но будем полагать, что  $g_i \neq 0$  для  $i = 2, 3, \dots, M - 1$ . Коэффициенты обратной связи задаются в соответствии с соотношениями (6.2) и (6.8) с фиксированным малым разбросом  $\Delta g = 0.001$  относительно значения  $g_2$ .

Двупараметрическая диаграмма, представленная на рисунке 6.23, а, демонстрирует, как изменяется число слоев  $L$ , синхронизованных с задающим слоем, при изменении силы прямой  $\gamma$  и обратной  $g_2$  связи между слоями. Из рисунка видно, что с увеличением обратной связи не только уменьшается область по параметру  $\gamma$ , в которой наблюдается максимально возможное количество синхронизованных слоев, но и увеличивается область ухода траектории на бесконечность. Тем не менее, существует некоторый интервал оптимальных



(a)



(б)

(в)

Рисунок 6.23. (а) Двумерная диаграмма, показывающая цветом максимальное количество полностью синхронизованных (в смысле (6.10)) слоев  $L$  в зависимости от силы прямой  $\gamma$  и обратной  $g_2$  связи. Белым выделена область ухода на бесконечность системы. (б), (в) Диаграммы режимов в сети (6.1) при вариации параметра  $\gamma$  для двух значений  $g_2$ : (б) 0.12, (в) 0.18. Обозначения областей 1–5 соответствуют рисункам 6.16 и 6.22. Параметры сети:  $\alpha_1 = 3.8$ ,  $\sigma_1 = 0.32$ ,  $r_1 = 0.32$ ,  $\Delta\alpha = \Delta\gamma = \Delta\sigma = \Delta g = 0.001$

значений коэффициента прямой связи  $\gamma$ , для которых эффективная полная синхронизация наблюдается в максимальном числе слоев. Эта область сужается с ростом силы обратной связи  $g_2$  и ограничена не только в направлении уменьше-



ния значений  $\gamma$ , но и их увеличения (рисунок 6.23,а). Максимальная величина силы обратной связи, при которой еще имеет место эффективная полная синхронизация всех слоев сети, составляет  $g_2 \approx 0.12$  при силе однонаправленной связи  $\gamma \approx 0.6$ . Описанный эффект не является очевидным фактом и может быть связан с влиянием параметра  $\gamma$  на эффективные значения параметров  $\alpha_i$  во втором и последующих слоях сети (см. систему уравнений (6.11)).

Рассмотрим теперь, как изменится диаграмма режимов в системе с однонаправленной связью, приведенная на рисунке 6.16, с ростом параметра обратной связи  $g_2$ . Соответствующие результаты расчетов приведены на рисунке 6.23,б,в для двух различных значений силы обратной связи  $g_2$ . На полученных диаграммах режимов выделены те же области, что и на рисунках 6.16 и 6.22. Диаграмма режимов при слабой обратной связи, приведенная на рисунке 6.23,б, мало отличается от диаграммы, представленной на рисунке 6.16. Наличие слабой обратной связи приводит только к исчезновению эффекта «первоначальной» синхронизации и некоторому увеличению области 2. Причем эта область появляется и при больших значениях  $\gamma$ , где порог эффективной полной синхронизации слоя убывает с номером слоя. С ростом параметра обратной связи  $g_2$  (рисунок 6.23,в) происходит увеличение области несинхронных режимов 1 и области ухода траектории на бесконечность (область 4). В первых слоях сети появляется маленькая область 5, соответствующая синхронизации только кластера с амплитудной химерой. Область эффективной полной синхронизации 3 заметно уменьшается (сравним рисунок 6.23,б и в), а затем ограничивается только первыми слоями сети. Уже при  $g_2 \geq 0.14$  эффективная полная синхронизация всех слоев с задающим слоем становится невозможной (рисунок 6.23,а,в). При  $g_2 > 0.29$  эффективная полная синхронизация не наблюдается даже в первом слое.

На рисунке 6.24 приведены примеры мгновенных пространственных профилей состояний элементов слоев сети в области 5, где синхронизация наблюдается только в режиме амплитудной химеры, а кластеры некогерентности фа-

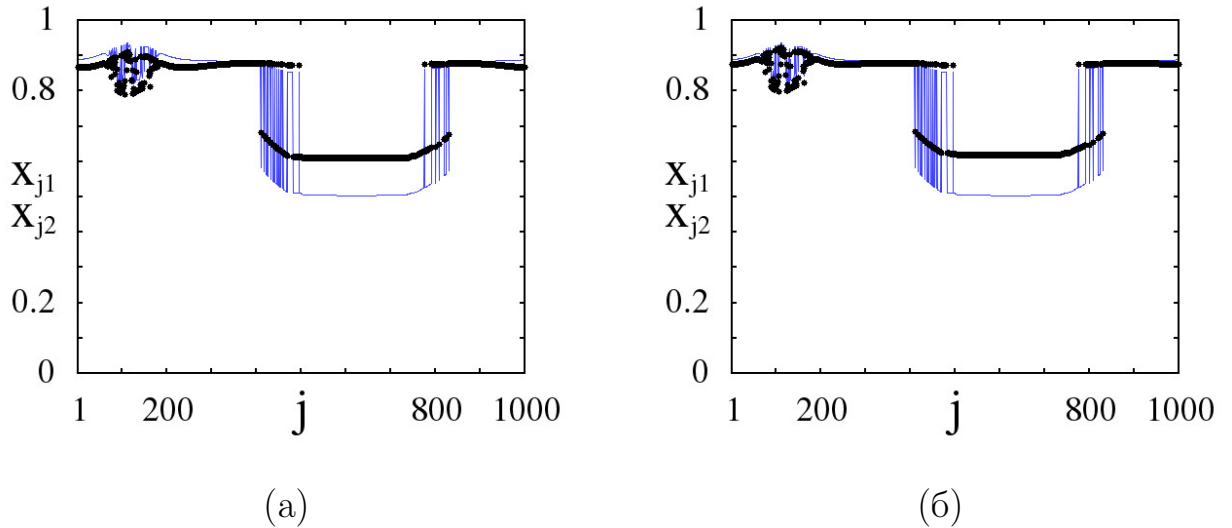


Рисунок 6.24. Мгновенные пространственные профили динамики 2-го ( $i = 2$ ) слоя в области 5 для различных значений силы прямой и обратной межслойной связи: (а)  $\gamma = 0.34$ ,  $g_2 = 0.12$ , (б)  $\gamma = 0.42$ ,  $g_2 = 0.18$ . Сплошной голубой линией изображен мгновенный профиль задающей структуры в 1-м слое, черными точками показан мгновенный профиль структуры в слое  $i = 2$ .

Параметры сети (6.1) как для рисунка 6.23

зовой химеры в синхронизируемых слоях отсутствуют. Отметим, что область 5 возникает только при наличии сильной неоднородности по параметрам  $\sigma_i$  (рисунок 6.22) и обратной связи (рисунок 6.23).

Достаточно очевидно, что наличие обратной связи между слоями сети препятствует вынужденной синхронизации, поскольку приводит к взаимной синхронизации второго и последующих слоев, структуры которых будут одинаковы и отличны от структуры в задающем слое. Если взаимная связь велика, то воздействие со стороны задающего слоя будет стремиться синхронизовать все остальные слои одновременно, как единое целое. При достаточно большом количестве слоев, для их вынужденной синхронизации потребуется довольно сильное воздействие. В рассматриваемой модели на базе логистических отображений такое воздействие приводит к уходу траекторий на бесконечность и наблюдать синхронизацию всех  $M = 20$  слоев сети невозможно. Если взаимная

связь не слишком велика, то воздействие может разрушить режим взаимной синхронизации в нескольких первых слоях и навязать им состояние, синхронное со вторым слоем. В этом отношении поведение сети из нескольких слоев аналогично поведению взаимно связанных автогенераторов, на один из которых действует внешняя сила (см., например, работу [465]). В то же время, как показывают результаты проведенных исследований, в случае сильно асимметричной связи слоев сети, когда обратная связь мала, возможно получить режим полной (в смысле неравенства (6.10)) вынужденной синхронизации достаточно большого количества слоев.

## 6.4 Выводы по шестой главе

Представленные в данной главе численные результаты исследований эффекта вынужденной синхронизации однородной и неоднородной мультиплексных сетей хаотических осцилляторов в режиме химерного состояния позволяют сделать следующие основные выводы.

- Впервые показано, что результаты анализа синхронизации химерных структур в двух и трех взаимодействующих слоях, можно обобщить на случай многослойной структуры. Установлено, что при увеличении силы однонаправленной связи при слабой расстройке параметров первого (задающего) слоя от параметров остальных слоев, которые являются идентичными, наблюдается вынужденная синхронизация пространственных структур во всех слоях. При этом химерная структура, устанавливающаяся в первом слое, передается от слоя к слою с малыми искажениями, величина которых определяется величиной расстройки параметров.
- Впервые продемонстрирована возможность ретрансляции сложной пространственной структуры в многослойной сети в присутствии неоднород-

ностей во всех слоях по различным параметрам и наличии обратной связи. При условии малой неоднородности и слабой обратной связи имеет место эффективная вынужденная близкая к полной синхронизация.

- Установлено, что одинаковая по величине неоднородность различных параметров сети по-разному влияет на возможности вынужденной синхронизации. Показано, что расстройка значений параметров, управляющих динамикой индивидуальных элементов, оказывается гораздо разрушительнее для синхронизации, чем аналогичная расстройка по силе нелокальной связи внутри слоев.
- Впервые установлено, что наиболее существенным препятствием для глобальной синхронизации всех слоев сети является наличие обратной компоненты взаимодействия между слоями. В случае сильной взаимной связи слоев вся сеть становится единой системой, и ее вынужденная синхронизация требует довольно сильного воздействия. Если взаимная связь не так велика, то возможна вынужденная синхронизация некоторого кластера из определенного числа слоев сети.
- Впервые показано, что эффект вынужденной синхронизации многослойной сети в режиме комбинированной химерной структуры характеризуется различием в порогах эффективной синхронизации для кластеров некогерентности фазовой и амплитудной химер. Этот эффект существенно зависит от характера и степени неоднородности слоев, а также от наличия обратной связи между слоями.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей диссертационной работе решена важная и принципиально новая научная задача в области радиофизики и нелинейной динамики, связанная с исследованием механизмов формирования, эволюции и свойств сложных пространственно-временных структур (химерных и уединенных состояний) в ансамблях хаотических осцилляторов с нелокальной связью. Выявленные характерные особенности химерных структур и эффектов их синхронизации могут трактоваться как приоритетные результаты. Получены следующие основные результаты:

1. Детально исследован переход от режима полной хаотической синхронизации к пространственно-временному хаосу в одномерных ансамблях дискретных и дифференциальных систем с хаотическими аттракторами негиперболического типа при условии нелокальной связи. Впервые установлено, что данный переход характеризуется возникновением химерных структур двух типов — фазовой и амплитудной химер, которые впервые рассматриваются в работе.
2. Выявлены и описаны бифуркационные механизмы формирования фазовых и амплитудных химерных структур в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов с негиперболическим типом хаотического аттрактора. Установлено, что бифуркационный переход «когерентность—некогерентность» является общим для ансамблей нелокально связанных хаотических систем с удвоениями периода.
3. При изучении перехода «когерентность—некогерентность» впервые применен корреляционный подход, основанный на расчетах коэффициента взаимной корреляции между элементами ансамбля, получена количественная

оценка статистических характеристик рассматриваемых динамических режимов, а также проанализированы и выявлены принципиальные различия в статических свойствах фазовых и амплитудных химерных состояний.

4. Детально исследованы переходы от режима полной хаотической синхронизации к режиму пространственно-временного хаоса в ряде ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов с квазигиперболическим типом аттрактора индивидуальных осцилляторов. Установлено, что указанный переход осуществляется, как правило, через режим уединенных состояний и является типичным при переходе «когерентность—некогерентность» в ансамблях нелокально связанных хаотических систем, индивидуальные элементы которых характеризуются хаотическими аттракторами квазигиперболического типа. Уединенные состояния характеризуются временной динамикой, полностью отличной от поведения во времени остальных элементов ансамбля. Установлено, что уединенные состояния возникают при случайном задании начальных условий и не формируют устойчивых кластеров некогерентности с определенными границами в пространстве ансамбля. С уменьшением величины коэффициента нелокальной связи имеет место монотонное возрастание числа осцилляторов в режиме уединенных состояний и при стремлении силы связи к нулю реализуется режим пространственно-временного хаоса.
5. На примере ансамбля из нелокально связанных систем Лоренца впервые проведен теоретический и численный анализ влияния свойства гиперболичности хаотического аттрактора на возможность реализации режимов химерных структур. Показано, что при вариации силы связи параметры индивидуального осциллятора изменяют свои эффективные значения, которые могут соответствовать как режимам квазигиперболического, так и негиперболического аттракторов. В результате в первом случае рождение химерных структур исключено. Если изменения управляющих параметров

системы вызывают потерю гиперболичности хаотическим аттрактором, то в ансамбле возможна реализация химерных состояний.

6. Впервые обнаружен и исследован эффект перемежаемости в динамике осцилляторов некогерентного кластера амплитудной химеры, проявляющийся в нерегулярных во времени переключениях режимов колебаний от хаотических к периодическим и наоборот. Установлен факт конечности времени жизни амплитудной химеры, которая представляет собой переходный процесс. По истечении этого времени перемежаемость исчезает и происходит переход к периодическим колебаниям в режиме фазовой химеры. Установлено, что фазовая химера представляет собой стационарную (установившуюся во времени и пространстве) и долгоживущую структуру.
7. Впервые проведен статистический анализ влияния локализованного (только на элементы амплитудных химер) и глобального (на все элементы ансамбля) аддитивного шумового воздействия на эффект перемежаемости и время жизни «восстановленных» с помощью шума амплитудных химер. Впервые установлена возможность управления временем жизни амплитудной химеры в широких пределах путем внешнего аддитивного шумового воздействия, как на отдельные осцилляторы, так и на все осцилляторы ансамбля. Установлено также, что стационарный режим фазовой химеры устойчив по отношению к шумовому возмущению, постоянно действующему на все элементы ансамбля.
8. Впервые показано, что наличие симметричной связи между двумя ансамблями, каждый из которых состоит из различных хаотических отображений с нелокальной связью и в отсутствие связи демонстрирует принципиально отличные друг от друга пространственно-временные структуры, может индуцировать возникновение структур и режимов, которые не могут наблюдаться в данных ансамблях в отсутствие связи между ними. Так,

в результате введения взаимной диссипативной или инерционной межслойной связи в ансамбле нелокально связанных отображений Эно возможна реализация режимов уединенных состояний и бегущих волн, а в ансамбле отображений Лози — режимов фазовой и амплитудной химерных состояний.

9. Обнаружен и описан новый тип химерной структуры — «химеры уединенных состояний», найденный при моделировании динамики системы двух связанных ансамблей из хаотических осцилляторов Лози и Эно. Эта химерная структура характеризуется сосуществованием в пространстве ансамбля некогерентного кластера (кластеров) осцилляторов в режиме уединенных состояний и когерентного кластера (кластеров) осцилляторов в режиме синхронных колебаний. Показано, что химера уединенных состояний является одной из типичных для ансамблей нелокально связанных осцилляторов и может быть реализована не только в системах двух взаимосвязанных ансамблей, но и в изолированных ансамблях отображений Лози, Эно, отображений Некоркина и в ансамбле осцилляторов ФитцХью—Нагумо.
10. Впервые установлен и описан механизм рождения уединенных состояний и химерных структур на их основе. Рождение указанных пространственно-временных структур обусловлено появлением бистабильности в динамике индивидуальных осцилляторов ансамбля. Показано, что причиной возникновения бистабильности является нелокальная связь индивидуальных осцилляторов с конечным числом соседей. В результате каждый из осцилляторов ансамбля находится под воздействием «внешних» сигналов, что может приводить к рождению бистабильности. Бистабильность характеризуется сосуществованием двух притягивающих областей в пространстве состояний индивидуальных осцилляторов (условно называемых аттракторами) со своими бассейнами притяжения. Один из аттракторов отвечает режиму уединенных состояний, другой — когерентной динамике. При слу-



чайном характере задания начальных условий часть осцилляторов попадает в бассейн притяжения одного аттрактора, а часть — в область притяжения второго, что и приводит к возможности возникновения как уединенных состояний, так и соответствующих химерных структур.

11. Установлены и исследованы эффекты вынужденной и взаимной синхронизации сложных пространственно-временных структур, включая химерные, в случае диссипативной и инерционной взаимосвязи между ансамблями хаотических осцилляторов с нелокальной связью. Показано, что с ростом коэффициента связи между ансамблями осуществляется переход к синхронной динамике, близкой к режиму полной синхронизации, соответствующих осцилляторов ансамбля, которая сохраняется в конечной области синхронизации в пространстве управляющих параметров системы. Проведена количественная оценка степени синхронности структур с использованием расчетов коэффициента взаимной корреляции и среднеквадратичных отклонений значений по времени и по ансамблю. Сравнительный анализ показал, что диссипативный тип связи между ансамблями хаотических осцилляторов в большей степени способствует реализации эффекта синхронизации химерных структур.
12. Проведено сопоставление и установлено качественное соответствие эффекта синхронизации пространственно-временных структур с выводами классической теории синхронизации периодических автоколебаний. Это позволяет рассматривать результаты настоящей работы как обобщение представлений о классическом явлении синхронизации периодических автоколебаний на случай синхронизации пространственно-временных структур в системах связанных ансамблей нелокально взаимодействующих нелинейных осцилляторов.

13. Проведено обобщение концепции вынужденной синхронизации двух взаимосвязанных ансамблей (слоев) на случай многослойных систем. Показано, что химерная структура, заданная в первом слое, передается (ретранслируется) от слоя к слою с малыми искажениями, величина которых определяется величиной расстройки параметров. Эффективная синхронизация структур во всех слоях многослойного ансамбля осцилляторов реализуется при достижении величиной параметра однонаправленной связи определенного порогового значения. Показано, что расстройка значений параметров, управляющих динамикой индивидуальных элементов, оказывается гораздо разрушительнее для синхронизации, чем аналогичная расстройка по силе нелокальной связи внутри слоев.
14. Впервые установлено, что наиболее существенным препятствием для глобальной синхронизации всех слоев сети является наличие обратной компоненты взаимодействия между слоями. В случае сильной взаимной связи слоев вся сеть становится единой системой, и ее вынужденная синхронизация требует довольно сильного воздействия.

## БЛАГОДАРНОСТИ

В завершение настоящей диссертационной работы хочу выразить искреннюю благодарность и глубокую признательность своему научному консультанту – Заслуженному деятелю науки РФ, д.ф.-м.н., профессору Вадиму Семеновичу Анищенко за многолетнюю плодотворную совместную работу, всестороннюю поддержку, понимание и неоценимую помощь в подготовке данной работы.

Особо хочу поблагодарить д.ф.-м.н., профессора Татьяну Евгеньевну Вадивасову за огромную помощь в подготовке данной работы, за ценные советы и критические замечания, которые способствовали существенному улучшению диссертационной работы.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить всех своих коллег по кафедре радиофизики и нелинейной динамики к.ф.-м.н., доцента Андрея Вячеславовича Слепнева, к.ф.-м.н., старшего преподавателя Игоря Александровича Шепелева, к.ф.-м.н. Надежду Игоревну Семенову, аспиранта Андрея Владимировича Буха, магистрантку Елену Владиславовну Рыбалову за совместную научную работу, за огромную помощь и поддержку на всех этапах выполнения и подготовки диссертационной работы.

Выражаю большую благодарность и признательность моим коллегам профессорам Eскеhard Schöll и Анне Захаровой за плодотворное сотрудничество, полезные обсуждения, большую помощь и поддержку.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. Николис, И. Пригожин, *Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации*. М.: Мир, 1979.
2. П.С. Ланда, *Автоколебания в распределенных системах*. М.: Наука, 1982.
3. Г. Хакен, *Синергетика*. М.: Мир, 1980.
4. Л.С. Полак, А.С. Михайлов, *Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах*. М.: Наука, 1983.
5. Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Berlin: Springer, 1984.
6. В.А. Васильев, Ю.М. Романовский, В.Г. Яхно, *Автоволновые процессы*. М.: Наука, 1987.
7. V.S. Afraimovich, V.I. Nekorkin, G.V. Osipov, V.D. Shalfeev, *Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks*. Singapore: World Scientific, 1995.
8. I.R. Epstein, J.A. Pojman, *An introduction to nonlinear chemical dynamics: oscillations, waves, patterns, and chaos*. Oxford: Oxford University Press, 1998.
9. A.T. Winfree, *The geometry of biological time*. Berlin: Springer, 2001.
10. А.С. Пиковский, М.Г. Розенблюм, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление*. М.: Техносфера, 2003.
11. E. Mosekilde, Y. Maistrenko, D. Postnov, *Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems*. Singapore: World Scientific, 2002.
12. V.I. Nekorkin, M.G. Velarde, *Synergetic phenomena in active lattices*. Berlin: Springer, 2002.

13. А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов, *Основы теории сложных систем*. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007.
14. H. Malchow, S.V. Petrovskii, E. Venturino, *Spatiotemporal patterns in ecology and epidemiology: theory, models, and simulation*. London: Chapman and Hall/CRC Press, 2007.
15. G. Osipov, J. Kurths, C. Zhou, *Synchronization in Oscillator Networks*. Berlin: Springer 2007.
16. A.G. Balanov, N.B. Janson, D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva, *Synchronization: From Simple to Complex*. Berlin: Springer, 2009.
17. E. Schöll, S.H.L. Klapp, P. Hövel, *Control of self-organizing nonlinear systems*. Berlin: Springer, 2016.
18. S. Boccaletti, A.N. Pisarchik, C.I. del Genio, A. Amann, *Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks*. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
19. C. Jones, Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh-Nagumo system. *Trans. of the American Math. Soc.*, 1984. Vol. 286. P. 431.
20. I. Waller, R. Kapral, Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators. *Phys. Rev. A*, 1984. Vol. 30. P. 2047.
21. A.M. Pertsov, E.A. Ermakova, A.V. Panfilov, Rotating spiral waves in a modified FitzHugh-Nagumo model. *Physica D*, 1984. Vol. 14. P. 117.
22. G.B. Ermentrout, W.C. Troy, Phase locking in a reaction-diffusion system with a linear frequency gradient. *SIAM J. of Applied Math.*, 1986. Vol. 39. P. 623.
23. А.В. Гапонов-Грехов, М.И. Рабинович, Уравнение Гинзбурга-Ландау и нелинейная динамика неравновесных сред. *Изв. вузов. Радиофизика*, 1987. Т. 32.

24. H. Sakaguchi, S. Shinomoto, Y. Kuramoto, Local and global self-entrainments in oscillator lattices. *Progress of Theor. Physics*, 1987. Vol. 77. P. 1005.
25. S.H. Strogatz, R.E. Mirollo, Collective synchronization in lattices of nonlinear oscillators with randomness. *J. of Physics A*, 1988. Vol. 21. P. L699.
26. S.H. Strogatz, R.E. Mirollo, Phase-locking and critical phenomena in lattices of coupled nonlinear oscillators with random intrinsic frequencies. *Physica D*, 1988. Vol. 31. P. 143.
27. K. Kaneko, Spatiotemporal chaos in one- and two-dimensional coupled map lattices. *Physica D*, 1989. Vol. 37. P. 60.
28. K. Kaneko, Pattern dynamics in spatiotemporal chaos: Pattern selection, diffusion defects and pattern competition intermittency. *Physica D*, 1989. Vol. 34. P. 1.
29. А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса. *Изв. вузов. Радиофизика*, 1991. Т. 34. С. 1079.
30. В.В. Астахов, Б.П. Безручко, В.И. Пономаренко, Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах. *Изв. вузов. Радиофизика*, 1991. Т. 34. С. 35.
31. M.C. Cross, P.C. Hohenberg, Pattern formation outside of equilibrium. *Reviews of Modern Physics*, 1993. Vol. 65. P. 851.
32. V.I. Nekorkin, V.A. Makarov, Spatial chaos in a chain of coupled bistable oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 1995. Vol. 74. P. 4819.
33. Г.Д. Абарбанель, М.И. Рабинович, А. Селверстон, М.В. Баженов, Р. Хуэрта, М.М. Сущик, Л.Л. Рубчинский, Синхронизация в нейронных ансамблях. *УФН*, 1996. Т. 166. С. 363–390.
34. V.I. Nekorkin, V.B. Kazantsev, M.G. Velarde, Mutual synchronization of two lattices of bistable elements. *Phys. Lett. A*, 1997. Vol. 236. P. 505.

35. V.I. Nekorkin, M.L. Voronin, M.G. Velarde, Clusters in an ensemble of globally coupled bistable oscillators. *Eur. Phys. J. B*, 1999. Vol. 9. P. 533.
36. V.N. Belykh, I.V. Belykh, M. Hasler, Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems. *Phys. Rev. E*, 2000. Vol. 62. P. 6332.
37. Y. Nagai, H. González, A. Shrier, L. Glass, Paroxysmal starting and stopping of circulating waves in excitable media. *Phys. Rev. Lett.*, 2000. Vol. 84. p. 4248.
38. V.N. Belykh, I.V. Belykh, E. Mosekilde, Cluster synchronization modes in an ensemble of coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. E*, 2001. Vol. 63. P. 036216.
39. S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D.L. Valladares, C.S. Zhou, The synchronization of chaotic systems. *Phys. Rep.*, 2002. Vol. 366 (1) P. 101.
40. R.M. Zaritski, A.M. Pertsov, Stable spiral structures and their interaction in two-dimensional excitable media. *Phys. Rev. E*, 2002. Vol. 66. P. 066120.
41. Р.М. Борисюк, Я.Б. Казанович, Г.Р. Иваницкий, Модели динамики нейронной активности при обработке информации мозгом — итоги «десятилетия». *УФН*, 2002. Т. 172. С. 1189—1214.
42. Ю.А. Елькин, Автоволновые процессы. *Матем. биология и биоинформ.*, 2006. Т. 1. С. 27.
43. V.S. Anishchenko, A.A. Akopov, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, Mechanisms of chaos onset in an inhomogeneous medium under cluster synchronization destruction. *New J. of Physics*, 2006. Vol. 8. P. 84.
44. A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, C. Zhou, Synchronization in complex networks. *Phys. Rep.*, 2008. Vol. 469. P. 93—153.
45. V.N. Belykh, G.V. Osipov, V.S. Petrov, J.A.K. Suykens, J. Vandewalle, Cluster synchronization in oscillatory networks. *Chaos*, 2008. Vol. 18. P. 037106.

46. A.V. Shabunin, U. Feudel, V.V. Astakhov, Phase multistability and phase synchronization in an array of locally coupled period-doubling oscillators. *Phys. Rev. E*, 2009. Vol. 80. P. 026211.
47. D.P. Rosin, D. Rontani, D.J. Gauthier, E. Schöll, Control of synchronization patterns in neural-like boolean networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2013. Vol. 110. P. 104102.
48. A.E. Motter, S.A. Myers, M. Anghel, T. Nishikawa, Spontaneous synchrony in power-grid networks. *Nature Phys.*, 2013. Vol. 9. P. 191.
49. В.В. Клиньшов, В.И. Некоркин, Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями. *УФН*, 2013. Т. 183. С. 1323–1336.
50. А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов, С.А. Шурыгина, Обобщенная синхронизация в сетях со сложной топологией межэлементных связей. *Радиотехника и электроника*, 2013. Т. 58, №5. С. 507–517.
51. L.M. Pecora, F. Sorrentino, A.M. Hagerstrom, T.E. Murphy, R. Roy, Cluster synchronization and isolated desynchronization in complex networks with symmetries. *Nature Commun.*, 2014. Vol. 5. P. 4079.
52. О.В. Масленников, В.И. Некоркин, Адаптивные динамические сети. *УФН*, 2017. Т. 187. С. 745–756.
53. Y. Zou, R.V. Donner, N. Marwan, J.F. Donges, J. Kurths, Complex network approaches to nonlinear time series analysis. *Phys. Rep.*, 2019. V. 787. P. 1–97.
54. Y. Kuramoto, D. Battogtokh, Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators. *Nonlin. Phen. in Complex Sys.*, 2002. Vol. 5. P. 380.
55. D.M. Abrams, S.H. Strogatz, Chimera States for Coupled Oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2004. Vol. 93. P. 174102.



56. M.J. Panaggio, D.M. Abrams, Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*, 2015. Vol. 28. P. R67.
57. E. Schöll, Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2016. Vol. 225. P. 891.
58. A. Zakharova, *Chimera patterns in complex networks*. Berlin: Springer, 2020.
59. V.V. Astakhov, V.S. Anishchenko, A.V. Shabunin, Controlling Spatiotemporal Chaos in a Chain of the Coupled Logistic Maps, *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 1995. Vol. 42, no. 6. P. 352–357.
60. V.S. Anishchenko, V.V. Astakhov, A.B. Neiman, T.E. Vadivasova, L. Schimansky-Geier, *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Developments*. Berlin: Springer, 1st ed. — 2000, 2nd ed. — 2007.
61. В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, А.Б. Нейман, Г.И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер, *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах*. М.-Ижевск: Институт комп. исследований, 2003, 544 стр.
62. Y. Maistrenko, B. Penkovsky, M. Rosenblum. Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions. *Phys. Rev. E*, 2014. Vol. 89. P. 060901.
63. P. Jaros, Y. Maistrenko, T. Kapitaniak. Chimera states on the route from coherence to rotating waves. *Phys. Rev. E*, 2015. Vol. 91. P. 022907.
64. И.А. Шепелев, Т. Е. Вадивасова, Уединенные состояния в 2D-решетке бистабильных элементов при глобальном и близком к глобальному характере взаимодействия. *Нелинейная динамика (Russ. J. of Nonl. Dyn.)*, 2017. Т. 13, №3. С. 317–329.

65. P. Jaros, S. Brezetsky, R. Levchenko, D. Dudkowski, T. Kapitaniak, Y. Maistrenko, Solitary states for coupled oscillators with inertia. *Chaos*, 2018. Vol. 28. P. 011103.
66. S. Majhi, T. Kapitaniak, D. Ghosh, Solitary states in multiplex networks owing to competing interactions. *Chaos*, 2019. Vol. 29. P. 013108.
67. E. Teichmann, M. Rosenblum, Solitary states and partial synchrony in oscillatory ensembles with attractive and repulsive interactions. *Chaos*, 2019. Vol. 29. P. 093124.
68. O.E. Omel'chenko, M. Wolfrum, Y. Maistrenko, Chimera states as chaotic spatiotemporal patterns. *Phys. Rev. E*, 2010. Vol. 81 (6). P. 065201(R).
69. M. Wolfrum and O.E. Omel'chenko, Chimera states are chaotic transients. *Phys. Rev. E*, 2011. Vol. 84 (1). P. 015201.
70. M. Wolfrum, O.E. Omel'chenko, S. Yanchuk, Y. Maistrenko, Spectral properties of chimera states. *Chaos*, 2011. Vol. 21. P. 013112.
71. D.M. Abrams, R.E. Mirollo, S.H. Strogatz, D.A. Wiley, Solvable model for chimera states of coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2008. Vol. 101 (8). P. 084103.
72. C.R. Laing, The dynamics of chimera states in heterogeneous Kuramoto networks. *Physica D*, 2009. Vol. 238 (16). P. 1569–1588.
73. C.R. Laing, Chimera states in heterogeneous networks. *Chaos*, 2009. Vol. 19 (1). P. 013113.
74. P. Ashwin, O. Burylko, Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators. *Chaos*, 2015. Vol. 25. P. 013106.
75. J. Xie, E. Knobloch, H.C. Kao, Multicluster and traveling chimera states in nonlocal phase-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 2014. Vol. 90. P. 022919.
76. J. Xie, H.C. Kao, E. Knobloch, Chimera states in systems of nonlocal nonidentical phase-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 2015. Vol. 91. P. 032918.

77. O.E. Omel'chenko, M. Wolfrum, S. Yanchuk, Y. Maistrenko, O. Sudakov, Stationary patterns of coherence and incoherence in two-dimensional arrays of non-locally-coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E*, 2012. Vol. 85. P. 036210.
78. O.E. Omel'chenko, Coherence-incoherence patterns in a ring of non-locally coupled phase oscillators. *Nonlinearity*, 2013. Vol. 26 (9). P. 2469.
79. O.E. Omel'chenko, M. Wolfrum, C.R. Laing, Partially coherent twisted states in arrays of coupled phase oscillators. *Chaos*, 2014. Vol. 24 (2). P. 023102.
80. O.E. Omel'chenko and M. Wolfrum, Is there an impact of small phase lags in the kuramoto model? *Chaos*, 2016. Vol. 26. P. 094806.
81. O.E. Omel'chenko, M. Sebek, I.Z. Kiss, Universal relations of local order parameters for partially synchronized oscillators. *Phys. Rev. E*, 2018. Vol. 97. P. 062207.
82. M. Wolfrum, O.E. Omel'chenko, J. Sieber, Regular and irregular patterns of selflocalized excitation in arrays of coupled phase oscillators. *Chaos*, 2015. Vol. 25. P. 053113.
83. M.J. Panaggio, D.M. Abrams, P. Ashwin, C.R. Laing, Chimera states in networks of phase oscillators: the case of two small populations. *Phys. Rev. E*, 2016. Vol. 93. P. 012218.
84. M.J. Panaggio and D.M. Abrams, Chimera states on a flat torus. *Phys. Rev. Lett.*, 2013. Vol. 110. P. 094102.
85. V.N. Belykh, V.S. Petrov, G.V. Osipov, Dynamics of the Finite-dimensional Kuramoto Model: Global and Cluster Synchronization. *Reg. and Chaot. Dyn.*, 2015. Vol. 20, No. 1. P. 37–48.
86. М.И. Болотов, Л.А. Смирнов, Г.В. Осипов, А.С. Пиковский, Бризерные химеры в системе фазовых осцилляторов. *Письма в ЖЭТФ*, 2017. Т. 106, вып. 6. С. 368–374.

87. M. Bolotov, L. Smirnov, G. Osipov, A. Pikovsky. Simple and complex chimera states in a nonlinearly coupled oscillatory medium. *Chaos*, 2018. Vol. 28. P. 045101.
88. I. Omelchenko, Y. Maistrenko, P. Hövel, E. Schöll, Loss of coherence in dynamical networks: spatial chaos and chimera states. *Phys. Rev. Lett.*, 2011. Vol. 106. P. 234102.
89. D. Dudkowski, Y. Maistrenko, T. Kapitaniak, Different types of chimera states: An interplay between spatial and dynamical chaos. *Phys. Rev. E*, 2014. Vol. 90. P. 032920.
90. N. Semenova, A. Zakharova, E. Schöll, V.S. Anishchenko, Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of nonlocally coupled chaotic oscillators? *Europhys. Lett.*, 2015. Vol. 112. P. 40002.
91. L.A. Smirnov, G.V. Osipov, A. Pikovsky, Chimera patterns in the Kuramoto-Battogtokh model. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2017. V. 50 (8). P. 08LT01 (10 pp).
92. I.A. Shepelev, A.V. Bukh, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko, A. Zakharova, Double-well chimeras in 2D lattice of chaotic bistable elements. *Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simul.*, 2018. Vol. 54. P. 50–61.
93. A. zur Bosen, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll, Chimera states in networks of logistic maps with hierarchical connectivities. *Eur. Phys. J. B*, 2018. Vol. 91. P. 65.
94. A.K. Malchow, I. Omelchenko, E. Schöll, P. Hövel, Robustness of chimera states in nonlocally coupled networks of nonidentical logistic maps. *Phys. Rev. E*, 2018. Vol. 98. P. 012217.
95. А.М. Пузанов, В.С. Анищенко, Г.И. Стрелкова, Химерные состояния в ансамблях нелокально связанных отображений Спротта. *Изв. Саратов. ун-та. Нов. серия. Сер. Физика*, 2019. Т. 19, вып. 4. С. 246–257.

96. I. Omelchenko, B. Riemenschneider, P. Hövel, Y. Maistrenko, E. Schöll, Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 2012. Vol. 85. P. 026212.
97. A.V. Slepnev, A.V. Bukh, T.E. Vadivasova, Stationary and non-stationary chimeras in an ensemble of chaotic self-sustained oscillators with inertial nonlinearity. *Nonlinear Dyn.*, 2017. Vol. 88, I. 4. P. 2983–2992.
98. I.A. Shepelev, A.V. Bukh, G.I. Strelkova, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko, Chimera states in ensembles of bistable elements with regular and chaotic dynamics. *Nonlinear Dyn.*, 2017. Vol. 90. P. 2317.
99. D.P. Rosin, D. Rontani, N. Haynes, E. Schöll, D.J. Gauthier, Transient scaling and resurgence of chimera states in coupled Boolean phase oscillators. *Phys. Rev. E*, 2014. Vol. 90. P. 030902(R).
100. A. Zakharova, M. Kapeller, E. Schöll, Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2014. Vol. 112. P. 154101.
101. A. Zakharova, M. Kapeller, E. Schöll, Amplitude chimeras and chimera death in dynamical networks. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2016. Vol. 727. P. 012018.
102. A. Zakharova, S. Loos, J. Siebert, A. Gjurchinovski, J.C. Claussen, E. Schöll, Controlling chimera patterns in networks: interplay of structure, noise, and delay. In book: *Control of Self-Organ. Nonlinear Systems*. E. Schöll, S.H.L. Klapp, P. Hövel (Eds.). Berlin: Springer, 2016.
103. S. Loos, J.C. Claussen, E. Schöll, A. Zakharova, Chimera patterns under the impact of noise. *Phys. Rev. E*, 2016. Vol. 93. P. 012209.
104. L. Tumash, A. Zakharova, J. Lehnert, W. Just, E. Schöll, Stability of amplitude chimeras in oscillator networks. *Europhys. Lett.*, 2017. Vol. 117. P. 20001.
105. A. Gjurchinovski, E. Schöll, A. Zakharova, Control of amplitude chimeras by time delay in dynamical networks. *Phys. Rev. E*, 2017. Vol. 95(4). P. 042218.

106. T. Banerjee, B. Bandyopadhyay, A. Zakharova, E. Schöll, Filtering suppresses amplitude chimeras. *Front. Appl. Math. Stat.*, 2019. Vol. 5. P. 8.
107. O.E. Omel'chenko, Y. Maistrenko, P. Tass, Chimera states: The natural link between coherence and incoherence. *Phys. Rev. Lett.*, 2008. Vol. 100(4). P. 044105.
108. O.E. Omel'chenko, Y. Maistrenko, P. Tass, Chimera states induced by spatially modulated delayed feedback. *Phys. Rev. E*, 2010. Vol. 82. P. 066201.
109. G. Bordyugov, A. Pikovsky, M. Rosenblum, Self-emerging and turbulent chimeras in oscillator chains. *Phys. Rev. E*, 2010. Vol. 82(3). P. 035205.
110. T. Banerjee, Mean-field-diffusion-induced chimera death state. *Europhys. Lett.*, 2015. Vol. 110. P. 60003.
111. S. Olmi, E.A. Martens, S. Thutupalli, and A. Torcini, Intermittent chaotic chimeras for coupled rotators. *Phys. Rev. E*, 2015. Vol. 92. P. 030901(R).
112. S. Olmi, Chimera states in coupled Kuramoto oscillators with inertia. *Chaos*, 2015. Vol. 25. P. 123125.
113. I. Omelchenko, A. Zakharova, P. Hövel, J. Siebert, and E. Schöll, Nonlinearity of local dynamics promotes multi-chimeras. *Chaos*, 2015. Vol. 25. P. 083104.
114. V.M. Bastidas, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll, T. Brandes, Quantum signatures of chimera states. *Phys. Rev. E*, 2015. Vol. 92. P. 062924.
115. V.M. Bastidas, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll, T. Brandes, Chimera states in quantum mechanics. In book: *Control of Self-Organizing Nonlinear Systems*, E. Schöll, S.H.L. Klapp, and P. Hövel (Eds.). Berlin: Springer, 2016. P. 315–336.
116. S. Ulonska, I. Omelchenko, A. Zakharova, and E. Schöll, Chimera states in networks of Van der Pol oscillators with hierarchical connectivities. *Chaos*, 2016. Vol. 26. P. 094825.

117. I. Omelchenko, O. E. Omel'chenko, A. Zakharova, M. Wolfrum, and E. Schöll, Tweezers for Chimeras in Small Networks, *Phys. Rev. Lett.* 116, 114101 (2016).
118. J. Sawicki, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll, Chimera states in complex networks: interplay of fractal topology and delay. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2017. Vol. 226(9). P. 1883~1892.
119. L. Larger, B. Penkovsky, Y. Maistrenko, Virtual chimera states for delayed-feedback systems. *Phys. Rev. Lett.*, 2013. Vol. 111. P. 054103.
120. I. Omelchenko, O.E. Omel'chenko, P. Hövel, E. Schöll, When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: patched synchrony or multichimera states. *Phys. Rev. Lett.*, 2013. Vol. 110. P. 224101.
121. I. Omelchenko, A. Provata, J. Hizanidis, E. Schöll, P. Hövel, Robustness of chimera states for coupled FitzHugh-Nagumo oscillators. *Phys. Rev. E*, 2015. Vol. 91. P. 022917.
122. M. Mikhaylenko, L. Ramlow, S. Jalan, A. Zakharova, Weak multiplexing in neural networks: Switching between chimera and solitary states. *Chaos*, 2019. Vol. 29. P. 023122.
123. N. Semenova, A. Zakharova, V.S. Anishchenko, E. Schöll, Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements. *Phys. Rev. Lett.*, 2016. Vol. 117. P. 014102.
124. A. Zakharova, N. Semenova, V.S. Anishchenko, E. Schöll, Noise-induced chimera states in a neural network. In book: *Patterns of Dynamics*, P. Gurevich, J. Hell, B. Sandstede (Eds.), Vol. 205 of Springer Proc. in Mathematics & Statistics. P. 44. Berlin: Springer, 2018.
125. M.I. Bolotov, G.V. Osipov, A. Pikovsky, Marginal chimera state at cross-frequency locking of pulse-coupled neural networks. *Phys. Rev. E*, 2016. Vol. 93(3). P. 032202.
126. N.D. Tsigkri-DeSmedt, J. Hizanidis, P. Hövel, A. Provata, Multi-chimera states and transitions in the leaky integrate-and-fire model with excitatory

- coupling and hierarchical connectivity. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 2016. Vol. 225(6). P. 1149.
127. A. Schmidt, T. Kasimatis, J. Hizanidis, A. Provata, P. Hövel, Chimera patterns in two-dimensional networks of coupled neurons. *Phys. Rev. E*, 2017. Vol. 95(3). P. 032224.
128. I.A. Shepelev, T.E. Vadivasova, A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction. *Phys. Lett. A*, 2017. Vol. 381, I. 16. P. 1398–1404.
129. T.A. Glaze, S. Lewis, S. Bahar. Chimera states in a Hodgkin-Huxley model of thermally sensitive neurons. *Chaos*, 2016. Vol. 26. P. 083119.
130. A. Mishra, S. Saha, D. Ghosh, G.V. Osipov, S.K. Dana, Traveling Chimera Pattern in a Neuronal Network under Local Gap Junctional and Nonlocal Chemical Synaptic Interactions. *Opera Medica et Physiologica*, 2017. Vol. 3(1). P. 14–18.
131. A. Calim, P. Hövel, M. Ozer, M. Uzuntarla, Chimera states in networks of type-I Morris-Lecar neurons. *Phys. Rev. E*, 2018. Vol. 98. P. 062217.
132. G. Argyropoulos, T. Kasimatis, A. Provata, Chimera patterns and subthreshold oscillations in two dimensional networks of fractally coupled Leaky Integrate-and-Fire neurons. *Phys. Rev. E*, 2019. Vol. 99. P. 022208.
133. J. Hizanidis, V. Kanas, A. Bezerianos, T. Bountis, Chimera states in networks of nonlocally coupled Hindmarsh-Rose neuron models. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2014. Vol. 24(03). P. 1450030.
134. J. Hizanidis, N. E. Kouvaris, and C. Antonopoulos. Metastable and chimera-like states in the *c. elegans* brain network. *Cybernetics and Physics*, 4(1):17–20, 2015.



135. J. Hizanidis, N.E. Kouvaris, G. Zamora-López, A. Díaz-Guilera, C. Antonopoulos, Chimera-like states in modular neural networks. *Sci. Rep.*, 2016. Vol. 6. P. 19845.
136. A. Vüllings, J. Hizanidis, I. Omelchenko, P. Hövel, Clustered chimera states in systems of type-I excitability. *New J. Phys.*, 2014. Vol. 16. P. 123039.
137. T. Banerjee, P.S. Dutta, A. Zakharova, E. Schöll, Chimera patterns induced by distance-dependent power-law coupling in ecological networks. *Phys. Rev. E*, 2016. Vol. 94. P. 032206.
138. P.S. Dutta and T. Banerjee, Spatial coexistence of synchronized oscillation and death: A chimeralike state. *Phys. Rev. E*, 2015. Vol. 92. P. 042919.
139. T. Banerjee, D. Ghosh, D. Biswas, E. Schöll, A. Zakharova, Networks of coupled oscillators: from phase to amplitude chimeras. *Chaos*, 2018. Vol. 28. P. 113124–1.
140. M.G. Clerc, S. Coulibaly, A.M. Ferreira, R. Rojas, Chimera states in a duffing oscillators chain coupled to nearest neighbors. *Chaos*, 2018. Vol. 28. P. 083126.
141. C.R. Laing, Chimeras in networks of planar oscillators. *Phys. Rev. E*, 2010. Vol. 81(6). P. 066221.
142. Z.G. Nicolaou, H. Riecke, A.E. Motter, Chimera States in Continuous Media: Existence and Distinctness. *Phys. Rev. Lett.*, 2017. Vol. 119. P. 244101.
143. M.R. Tinsley, S. Nkomo, K. Showalter, Chimera and phase cluster states in populations of coupled chemical oscillators. *Nat. Phys.*, 2012. Vol. 8. P. 662–665.
144. S. Nkomo, M.R. Tinsley, K. Showalter, Chimera states in populations of nonlocally coupled chemical oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2013. vol. 110. P. 244102.

145. M. Wickramasinghe, I.Z. Kiss, Spatially organized dynamical states in chemical oscillator networks: Synchronization, dynamical differentiation, and chimera patterns. *PLoS ONE*, 2013. Vol. 8(11). P. e80586.
146. J.F. Tetz, J. Rode, M.R. Tinsley, K. Showalter, H. Engel, Spiral wave chimera states in large populations of coupled chemical oscillators. *Nat. Phys.*, 2017. Vol. 14. P. 282–285.
147. E.A. Martens, S. Thutupalli, A. Fourriere, O. Hallatschek, Chimera states in mechanical oscillator networks. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2013. Vol. 110. P. 10563.
148. T. Kapitaniak, P. Kuzma, J. Wojewoda, K. Czolczynski, Y. Maistrenko, Imperfect chimera states for coupled pendula. *Sci. Rep.*, 2014. Vol. 4. P. 6379.
149. T. Bountis, V. Kanas, J. Hizanidis, A. Bezerianos, Chimera states in a two-population network of coupled pendulum-like elements. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2014. Vol. 223(4). P. 721–728.
150. L. Larger, B. Penkovsky, Y. Maistrenko, Laser chimeras as a paradigm for multistable patterns in complex systems. *Nat. Commun.*, 2015. Vol. 6. P. 7752.
151. F. Böhm, A. Zakharova, E. Schöll, K. Lüdge, Amplitude-phase coupling drives chimera states in globally coupled laser networks. *Phys. Rev. E*, 2015. Vol. 91(4). P. 040901(R).
152. D. Brunner, B. Penkovsky, R. Levchenko, E. Schöll, L. Larger, Y. Maistrenko, Two-dimensional spatiotemporal complexity in dual-delayed nonlinear feedback systems: Chimeras and dissipative solitons. *Chaos*, 2018. Vol. 28. P. 103106.
153. L.V. Gambuzza, A. Buscarino, S. Chessari, L. Fortuna, R. Meucci, M. Frasca, Experimental investigation of chimera states with quiescent and synchronous domains in coupled electronic oscillators. *Phys. Rev. E*, 2014. Vol. 90. P. 032905.

154. J.D. Hart, K. Bansal, T.E. Murphy, R. Roy. Experimental observation of chimera and cluster states in a minimal globally coupled network. *Chaos*, 2016. Vol. 26. P. 094801.
155. O.E. Omel'chenko, The mathematics behind chimera states. *Nonlinearity*, 2018. Vol. 31(5). P. R121.
156. F.P. Kemeth, S.W. Haugland, L. Schmidt, Y.G. Kevrekidis, K. Krischer, A classification scheme for chimera states. *Chaos*, 2016. Vol. 26. P. 094815.
157. S. Majhi, B.K. Bera, D. Ghosh, M. Perc, Chimera states in neuronal networks: A review. *Phys. Life Rev.*, 2018. Vol. 28. P. 100–121.
158. A. Zakharova, N. Semenova, V.S. Anishchenko, E. Schöll. Time-delayed feedback control of coherence resonance chimeras. *Chaos*, 2017. Vol. 27. P. 114320.
159. M.J. Panaggio, D.M. Abrams, Chimera states on the surface of a sphere. *Phys. Rev. E*, 2015. Vol. 91. P. 022909.
160. Y. Maistrenko, O. Sudakov, O. Osiv, V.L. Maistrenko, Chimera states in three dimensions. *New J. Phys.*, 2015. Vol. 17. P. 073037.
161. V. Maistrenko, O. Sudakov, O. Osiv, Y. Maistrenko, Multiple scroll wave chimera states. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2017. Vol. 226. P. 1867–1881.
162. T. Kasimatis, J. Hizanidis, A. Provata, Three-dimensional chimera patterns in networks of spiking neuron oscillators, *Phys. Rev. E*, 2018. Vol. 97. P. 052213.
163. S. Shima, Y. Kuramoto, Rotating spiral waves with phase-randomized core in nonlocally coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 2004. Vol. 69(3). P. 036213.
164. E.A. Martens, C.R. Laing, S.H. Strogatz, Solvable model of spiral wave chimeras. *Phys. Rev. Lett.*, 2010. Vol. 104(4). P. 044101.
165. C. Gu, G. St-Yves, J. Davidsen, Spiral wave chimeras in complex oscillatory and chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 2013. Vol. 111. P. 134101.

166. G. Tanaka, K. Morino, H. Daido, K. Aihara, Dynamical robustness of coupled heterogeneous oscillators. *Phys. Rev. E*, 2014. Vol. 89. P. 052906.
167. J. Xie, E. Knobloch, H.C. Kao, Twisted chimera states and multicore spiral chimera states on a two-dimensional torus. *Phys. Rev. E*, 2015. Vol. 92. P. 042921.
168. B.-W. Li, H. Dierckx, Spiral wave chimeras in locally coupled oscillator systems. *Phys. Rev. E*, 2016. Vol. 93(2). P. 020202.
169. C.-H. Tian, X.-Y. Zhang, Z.-H. Wang, Z.-H. Liu, Diversity of chimera-like patterns from a model of 2d arrays of neurons with nonlocal coupling. *Front. Phys.*, 2017. Vol. 12(3). P. 128904.
170. O.E. Omel'chenko, M. Wolfrum, E. Knobloch, Stability of spiral chimera states on a torus. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2018. Vol. 17(1). P. 97–127.
171. S. Guo, Q. Dai, H. Cheng, H. Li, F. Xie, J. Yang, Spiral wave chimera in two-dimensional nonlocally coupled FitzHugh-Nagumo systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2018. Vol. 114. P. 394–399.
172. A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, Spiral wave patterns in a two-dimensional lattice of nonlocally coupled maps modeling neural activity. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2019. Vol. 120. P. 75–82.
173. A.V. Bukh, E. Schöll, V.S. Anishchenko, Synchronization of spiral wave patterns in two-layer 2D lattices of nonlocally coupled discrete oscillators. *Chaos*, 2019. Vol. 29. P. 053105.
174. A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, Spiral Wave Patterns in Two-Layer 2D Lattices of Nonlocally Coupled Discrete Oscillators. Synchronization of Spiral Wave Chimeras. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2019. Vol. 19, iss. 3. P. 166–177.
175. I.A. Shepelev, T.E. Vadivasova, Variety of spatio-temporal regimes in a 2D lattice of coupled bistable FitzHugh-Nagumo oscillators.

- Formation mechanisms of spiral and double-well chimeras. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2019. Vol. 79. P. 104925.
176. А.В. Бух, В.С. Анищенко, Спиральные, концентрические и химерные волновые структуры в двумерном ансамбле нелокально связанных генераторов Ван дер Поля. *Письма в ЖТФ*, 2019. Т. 45, вып. 13. С. 40–43.
177. E.V. Rybalova, A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, Spiral and Target Wave Chimeras in a 2D Lattice of Map-Based Neuron Models. *Chaos*, 2019. Vol. 29. P. 101104.
178. E.A. Martens, M.J. Panaggio, D.M. Abrams, Basins of attraction for chimera states. *New J. Phys.*, 2016. Vol. 18. P. 022002.
179. P. Kalle, J. Sawicki, A. Zakharova, E. Schöll, Chimera states and the interplay between initial conditions and non-local coupling. *Chaos*, 2017. Vol. 27. P. 033110.
180. G.C. Sethia, A. Sen, G.L. Johnston, Amplitude-mediated chimera states. *Phys. Rev. E*, 2013. Vol. 88(4). P. 042917.
181. G.C. Sethia and A. Sen, Chimera states: The existence criteria revisited. *Phys. Rev. Lett.*, 2014. Vol. 112. P. 144101.
182. A. Yeldesbay, A. Pikovsky, M. Rosenblum, Chimeralike states in an ensemble of globally coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2014. Vol. 112. P. 144103.
183. L. Schmidt, K. Schönleber, K. Krischer, V. García-Morales, Coexistence of synchrony and incoherence in oscillatory media under nonlinear global coupling. *Chaos*, 2014. Vol. 24(1). P. 013102.
184. L. Schmidt, K. Krischer, Clustering as a prerequisite for chimera states in globally coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 2015. Vol. 114. P. 034101.
185. R. Ma, J. Wang, Z. Liu, Robust features of chimera states and the implementation of alternating chimera states. *Europhys. Lett.*, 2010. Vol. 91(4). P. 40006.

186. G.C. Sethia, A. Sen, F.M. Atay, Clustered chimera states in delay-coupled oscillator systems. *Phys. Rev. Lett.*, 2008. Vol. 100(14). P. 144102.
187. L. Schmidt, K. Krischer, Chimeras in globally coupled oscillatory systems: From ensembles of oscillators to spatially continuous media. *Chaos*, 2015. Vol. 25. P. 064401.
188. B.K. Bera, S. Majhi, D. Ghosh, M. Perc, Chimera states: Effects of different coupling topologies. *Europhys. Lett.*, 2017. Vol. 118(1). P. 10001.
189. C.R. Laing, Chimeras in networks with purely local coupling. *Phys. Rev. E*, 2015. Vol. 92. P. 050904(R).
190. I.A. Shepelev, A. Zakharova, T. Vadivasova, Chimera regimes in a ring of oscillators with local nonlinear interaction. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2017. Vol. 44. P. 277–283.
191. I.A. Shepelev, T.E. Vadivasova. Chimera regimes in a ring of elements with local unidirectional interaction *Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]*, 2016. Vol. 12(2). P. 197–209.
192. S. Kundu, S. Majhi, B.K. Bera, D. Ghosh, M. Lakshmanan, Chimera states in two-dimensional networks of locally coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 2018. Vol. 97. P. 022201.
193. T.W. Ko, G.B. Ermentrout, Partially locked states in coupled oscillators due to inhomogeneous coupling. *Phys. Rev. E*, 2008. Vol. 78. P. 016203.
194. M. Shanahan, Metastable chimera states in community-structured oscillator networks. *Chaos*, 2010. Vol. 20(1). P. 013108.
195. C.R. Laing, K. Rajendran, Y.G. Kevrekidis, Chimeras in random non-complete networks of phase oscillators. *Chaos*, 2012. Vol. 22(1). P. 043104.
196. N. Yao, Z.G. Huang, Y.C. Lai, Z. Zheng, Robustness of chimera states in complex dynamical systems. *Sci. Rep.*, 2013. Vol. 3. P. 3522.

197. Y. Zhu, Z. Zheng, J. Yang, Chimera states on complex networks. *Phys. Rev. E*, 2014. Vol. 89. P. 022914.
198. J. Hizanidis, E. Panagakou, I. Omelchenko, E. Schöll, P. Hövel, A. Provata, Chimera states in population dynamics: networks with fragmented and hierarchical connectivities. *Phys. Rev. E*, 2015. Vol. 92. P. 012915.
199. T. Chouzouris, I. Omelchenko, A. Zakharova, J. Hlinka, P. Jiruska, E. Schöll, Chimera states in brain networks: empirical neural vs. modular fractal connectivity. *Chaos*, 2018. Vol. 28(4). P. 045112.
200. J. Sawicki, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll, Delay-induced chimeras in neural networks with fractal topology. *Eur. Phys. J. B*, 2019. Vol. 92. P. 54.
201. G. Argyropoulos, A. Provata, Chimera States With 2D Deterministic and Random Fractal Connectivity. *Front. Appl. Math. Stat.*, 2019. Vol. 5. P. 35.
202. A. Buscarino, M. Frasca, L.V. Gambuzza, P. Hövel, Chimera states in time-varying complex networks. *Phys. Rev. E*, 2015. Vol. 91(2). P. 022817.
203. D.V. Kasatkin, S. Yanchuk, E. Schöll, V.I. Nekorkin, Self-organized emergence of multi-layer structure and chimera states in dynamical networks with adaptive couplings. *Phys. Rev. E*, 2017. Vol. 96(6). P. 062211.
204. D.V. Kasatkin, V.I. Nekorkin, Synchronization of chimera states in a multiplex system of phase oscillators with adaptive couplings. *Chaos*, 2018. Vol. 28. P. 1054, 2018.
205. D.V. Kasatkin, V. Klinshov, V.I. Nekorkin, Itinerant chimeras in an adaptive network of pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 2019. Vol. 99. P. 022203.
206. S. Jalan, S. Ghosh, B. Patra, Is repulsion good for the health of chimeras? *Chaos*, 2017. Vol. 27. P. 101104.
207. N.D. Tsigkri-DeSmedt, J. Hizanidis, E. Schöll, P. Hövel, A. Provata, Chimeras in leaky integrate-and-fire neural networks: effects of reflecting connectivities. *Eur. Phys. J. B*, 2017. Vol. 90. P. 139.

208. N.D. Tsigkri-DeSmedt, I. Koulterakis, G. Karakos, A. Provata, Synchronization patterns in LIF neuron networks: merging nonlocal and diagonal connectivity. *Eur. Phys. J. B*, 2018. Vol. 91. P. 305.
209. P.V. Kuptsov, A.V. Kuptsova, Variety of regimes of starlike networks of Hénon maps. *Phys. Rev. E*, 2015. Vol. 92(4). P. 042912.
210. P.V. Kuptsov, A.V. Kuptsova, Radial and circular synchronization clusters in extended starlike network of van der Pol oscillators. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2017. Vol. 50. C. 115–127.
211. P.V. Kuptsov, A.V. Kuptsova, Indirect synchronization control in a starlike network of phase oscillators. *Proc. of SPIE*, 2018. Vol. 10717.
212. I.A. Shepelev, A.V. Bukh, S. Ruschel, S. Yanchuk, T.E. Vadivasova, Local sensitivity of spatiotemporal structures. *Nonl. Dynamics*, 2018. Vol. 94 (2). P. 1019–1027.
213. A.M. Hagerstrom, T.E. Murphy, R. Roy, P. Hövel, I. Omelchenko, E. Schöll, Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices. *Nat. Phys.*, 2012. Vol. 8. P. 658–661.
214. M. Wickramasinghe, I.Z. Kiss, Spatially organized partial synchronization through the chimera mechanism in a network of electrochemical reactions. *Phys. Chem. Phys.*, 2014. Vol. 16. P. 18360–18369.
215. E.A. Viktorov, T. Habruseva, S.P. Hegarty, G. Huyet, B. Kelleher, Coherence and incoherence in an optical comb. *Phys. Rev. Lett.*, 2014. Vol. 112(22). P. 224101.
216. V.I. Ponomarenko, D.D. Kulminskiy, M.D. Prokhorov, Chimeralike states in networks of bistable time-delayed feedback oscillators coupled via the mean field. *Phys. Rev. E*, 2017. Vol. 96. P. 022209.
217. J. Garcia-Ojalvo, J.M. Sancho, *Noise in spatially extended systems*. New York: Springer, 1999.



218. J.F. Lindner, B.K. Meadows, W.L. Ditto, Array enhanced stochastic resonance and spatiotemporal synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 1995. Vol. 75. P. 3–6.
219. A. Neiman, L. Schimansky-Geier, A. Cornell-Bell, F. Moss, Noise-Enhanced Phase Synchronization in Excitable Media. *Phys. Rev. Lett.*, 1999. Vol. 83. P. 4896–4899.
220. В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер, Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка. *Успехи Физических Наук*, 1999. Т. 169. С. 7–38.
221. A. Pikovsky, J. Kurths, Coherence Resonance in a Noise-Driven Excitable System, *Phys. Rev. Lett.*, 1997. Vol. 78. P. 775–778.
222. C. Masoller, Noise-induced resonance in delayed feedback systems. *Phys. Rev. Lett.*, 2002. Vol. 88. P. 034102.
223. B. Lindner, J. García-Ojalvo, A.B. Neiman, L. Schimansky-Geier, Effects of noise in excitable systems. *Phys. Rep.*, 2004. Vol. 392. P. 321–424.
224. A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, O.I. Moskalenko, Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? *Phys. Lett. A*, 2006. Vol. 354 (5–6). P. 423–427.
225. B. Hauschildt, N.B. Janson, A.G. Balanov, E. Schöll, Noise-induced cooperative dynamics and its control in coupled neuron models. *Phys. Rev. E*, 2006. Vol. 74. P. 051906.
226. A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, P.V. Popov, Incomplete noise-induced synchronization of spatially extended systems. *Phys. Rev. E*, 2008. Vol. 77. P. 036215.
227. D.A. Smirnov, B.P. Bezruchko, Detection of couplings in ensembles of stochastic oscillators. *Phys. Rev. E*, 2009. V. 79. P. 046204.

228. O.I. Moskalenko, A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, A.A. Ovchinnikov, Effect of noise on generalized synchronization of chaos: theory and experiment. *Europhys. J. B*, 2011. Vol. 82 (1). P. 69–82.
229. О.И. Москаленко, А.А. Короновский, А.Е. Храмов, М.О. Журавлев, Пережаемость пережаемостей на границе фазовой синхронизации в присутствии шума. *ЖТФ*, 2015. Т. 85, вып. 6. С. 148–151.
230. B. Sonnenschein, T.K.D.M. Peron, F.A. Rodrigues, J. Kurths, L. Schimansky-Geier, Collective dynamics in two populations of noisy oscillators with asymmetric interactions. *Phys. Rev. E*, 2015. Vol. 91(6). P. 062910.
231. О.И. Москаленко, А.А. Короновский, А.Е. Храмов, Индуцированная шумом бинарная синхронизация в нелинейных системах. *Письма в ЖТФ*, 2016. Т. 42, вып. 14. С. 45–51.
232. A.V. Bukh, A.V. Slepnev, V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, Stability and Noise-induced Transitions in an Ensemble of Nonlocally Coupled Chaotic Maps. *Regular and Chaot. Dyn.*, 2018. Vol. 23. P. 326–339.
233. J. Gao, S.V. Buldyrev, H.E. Stanley, S. Havlin, Networks formed from interdependent networks. *Nature Phys.*, 2012. Vol. 8. P. 40–48.
234. S.H. Strogatz, *Exploring Complex Networks*. *Nature*, 2001. V. 410(6825). P. 268–76.
235. A.-L. Barabási, *Linked: The New Science of Networks*. Cambridge: Perseus, 2002.
236. E. Ben-Naim, H. Frauenfelder, Z. Toroczkai (Eds.), *Complex Networks*. Berlin: Springer, 2004.
237. Y. Bar-Yam, *Dynamics of Complex Systems*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1997.

238. S. Boccaletti, V. Latorab, Y. Moreno, M. Chavez, D.-U. Hwang, Complex networks: Structure and dynamics. *Phys. Rep.*, 2006. V. 424, iss. 4–5. P. 175–308.
239. D. Meunier, R. Lambiotte, E.T. Bullmore, Modular and hierarchically modular organization of brain networks. *Front. Neurosci.*, 2010. Vol. 4. P. 200.
240. E. Tang, D.S. Bassett, Control of Dynamics in Brain Networks. *Rev. Mod. Phys.*, 2018. Vol. 90(3). P. 031003.
241. A. Avena-Koenigsberger, B. Misic, O. Sporns, Communication dynamics in complex brain networks. *Nature Rev. Neurosci.*, 2018. V. 19. P. 17–33.
242. D. Vidaurre, R. Abeysuriya, R. Becker, A. J.Quinn, F. Alfaro-Almagro, S.M. Smith, M.W. Woolrich, Discovering dynamic brain networks from big data in rest and task. *NeuroImage*, 2018. V. 180, Part B. P. 646–656.
243. B. Silston, D.S. Bassett, D. Mobbs, How Dynamic Brain Networks Tune Social Behavior in Real Time. *Current Directions in Psychological Science*, 2018, Vol. 27(6). P. 413–421.
244. U. Lee, M. Kim, K. Lee, C.M. Kaplan, D.J. Clauw, S. Kim, G.A. Mashour, R.E. Harris, Functional Brain Network Mechanism of Hypersensitivity in Chronic Pain. *Sci. Rep.*, 2018. Vol. 8. P. 243
245. N. Cooper, J.O. Garcia, S.H. Tompson, M.B. O’Donnell, E.B. Falk, J.M. Vettel, Time-evolving dynamics in brain networks forecast responses to health messaging. *Network Neuroscience*, 2019. Vol. 3, iss. 1. P. 138–156.
246. J.D. Yeakel, J.W. Moor, P.R. Guimarães, M.A.M. de Aguiar, Synchronisation and stability in river metapopulation networks. *Ecology Lett.*, 201. Vol. 17. P. 273–283.
247. И.И. Мохов, Д.А. Смирнов, Взаимосвязь вариаций глобальной приповерхностной температуры с процессами Эль-Ниньо/Ла-Нинья и Атлантическим долгопериодным колебанием. *Доклады академии наук*, 2016. Т. 467, №5. С. 580–584.

248. S. Pilosof, M.A. Porter, M. Pascua, S. Kéfi, The multilayer nature of ecological networks. *Nat. Ecol. Evol.*, 2017. Vol. 1. P. 0101.
249. D.A. Smirnov, S.F.M. Breitenbach, G. Feulner, F.A. Lechleitner, K.M. Prufer, J.U.L. Baldini, N. Marwan, J. Kurths, A regime shift in the Sun-Climate connection with the end of the Medieval Climate Anomaly. *Sci. Rep.*, 2017. Vol. 7. P. 11131.
250. U. Ozturk, N. Marwan, O. Korup, H. Saito, A. Agarwal, M. J. Grossman, M. Zaiki, J. Kurths, Complex networks for tracking extreme rainfall during typhoons. *Chaos*, 2018. Vol. 28. P. 075301.
251. N.. Boers, B. Goswami, A. Rheinwalt, B. Bookhagen, B. Hoskins, J. Kurths, Complex networks reveal global pattern of extreme-rainfall teleconnections. *Nature*, 2019. V. 566. P. 373–377.
252. R. Pastor-Satorras, C. Castellano, P. Van Mieghem, A. Vespignani, *Rev. Mod. Phys.*, 2015. Vol. 87. P. 925–979.
253. E. Barter, T. Gross, Meta-food-chains as a many-layer epidemic process on networks. *Phys. Rev. E*, 2016. Vol. 93(2). P. 022303.
254. J. Scott, *Social network analysis: A Handbook*. 2nd ed.. London: Sage, 2000.
255. M. Jackson, *Social and Economic Networks*. Princeton: Princeton University Press, 2010.
256. M. Newman, Detecting community structure in networks. *European Phys. J. B*, 2004. Vol. 38. P. 321.
257. M. Boguña, R. Pastor-Satorras, A. Díaz-Guilera, A. Arenas, Emergence of clustering, correlations, and communities in a social network model. *Phys. Rev. E*, 2004. Vol. 70. P. 056122.
258. G. Palla, I. Derényi, I. Farkas, T. Vicsek, Uncovering the overlapping community structure of complex networks in nature and society. *Nature*, 2005. Vol. 435. P. 814.

259. G. Palla, A.-L. Barabási, and T. Vicsek, Quantifying social group evolution. *Nature*, 2007. Vol. 446. P. 664.
260. M. Starnini, A. Baronchelli, R. Pastor-Satorras, Effects of temporal correlations in social multiplex networks. *Sci. Rep.*, 2007. Vol. 7. P. 8597.
261. Berche, B., von Ferber, Ch., Holovatch, T., and Holovatch, Yu., Transportation Network Stability: A Case Study of City Transit, *Adv. Complex Syst.*, 2012, vol. 15, suppl. 1, 1250063, 19 pp.
262. A. Cardillo, M. Zanin, J. Gómez-Gardeñes, M. Romance, A.J. García del Amo, S. Boccaletti, Modeling the multi-layer nature of the European Air Transport Network: Resilience and passengers re-scheduling under random failures. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2013. Vol. 215. P. 23–33.
263. G. Como, K. Savla, D. Acemoglu, M.A. Dahleh, E. Frazzoli, Stability Analysis of Transportation Networks with Multiscale Driver Decisions. *SIAM J. Control Optim.*, 2013. Vol. 51, no. 1. P. 230–252.
264. I. Karafyllis, M. Papageorgiou, Global Exponential Stability for Discrete-Time Networks with Applications to Traffic Networks, *IEEE Trans. Control Netw. Syst.*, 2015. Vol. 2, no. 1. P. 68–77.
265. P.J. Menck, J. Heitzig, J. Kurths, H.J. Schellnhuber, How dead ends undermine power grid stability. *Nat. Comm.*, 2014. Vol. 5. P. 3969.
266. T. Nishikawa, A.E. Motter, Comparative Analysis of Existing Models for Power-grid Synchronization. *New J. Phys.*, 2015. Vol. 17, no. 1. P. 015012 (36 pp).
267. B. Wang, H. Suzuki, K. Aihara, Enhancing Synchronization Stability in a Multi-Area Power Grid. *Sci. Rep.*, 2016. Vol. 6. P. 26596 (11 pp).
268. J.W. Simpson-Porco, F. Dörfler, F. Bullo, Voltage collapse in complex power grids. *Nat. Comm.*, 2016. Vol. 7. P. 10790.

269. B. Dutta, M.O. Jackson, The Stability and Efficiency of Directed Communication Networks. *Rev. Econ. Des.*, 2000. Vol. 5, no. 3. P. 251–272.
270. S. Hong, C. Chun, Efficiency and Stability in a Model of Wireless Communication Networks. *Soc. Choice Welf.*, 2010. Vol. 34, no. 3. P. 441–454.
271. M. De Domenico, A. Solé-Ribalta, E. Cozzo, M. Kivelä, Y. Moreno, M.A. Porter, S. Gómez, A. Arenas, Mathematical Formulation of Multilayer Networks. *Phys. Rev. X*, 2013. Vol. 3. P. 041022.
272. S. Boccaletti, G. Bianconi, R. Criado, C.I. del Genio, J. Gómez-Gardeñes, M. Romance, I. Sendiña-Nadal, Z. Wang, M. Zanin, The structure and dynamics of multilayer networks. *Phys. Rep.*, 2014. Vol. 544. P. 1–122.
273. M. Kivelä, A. Arenas, M. Barthélemy, J.P. Gleeson, Y. Moreno, M.A. Porter, Multilayer Networks. *J. Complex Netw.*, 2014. Vol. 2. P. 203–271.
274. G. Bianconi. Multilayer networks: Dangerous liaisons? *Nat. Phys.*, 2014. Vol. 10(10). P. 712–714.
275. K.-M. Lee, B. Min, K.-I. Goh, Towards real-world complexity: an introduction to multiplex networks. *Eur. Phys. J. B*, 2015. Vol. 88. P. 48.
276. V.V. Makarov, A.A. Koronovskii, V.A. Maksimenko, A.E. Hramov, O.I. Moskalenko, J.M. Buldu, S. Boccaletti, Emergence of a multiplex structure in adaptive networks of phase oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2016. Vol. 84. P. 23–30.
277. D. Eroglu, N. Marwan, M. Stebich, J. Kurths, Multiplex recurrence networks. *Phys. Rev. E*, 2018. Vol. 97. P. 012312.
278. N.E. Kouvaris, S. Hata, A. Díaz-Guilera, Pattern formation in multiplex networks. *Sci. Rep.*, 2015. Vol. 5. P. 10840.
279. S. Ghosh and S. Jalan, Emergence of chimera in multiplex network. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 2016. Vol. 26(07). P. 1650120.

280. S. Ghosh, A. Kumar, A. Zakharova, S. Jalan, Birth and death of chimera: Interplay of delay and multiplexing. *Europhys. Lett.*, 2016. Vol. 115. P. 60005.
281. S. Majhi, M. Perc, D. Ghosh, Chimera states in uncoupled neurons induced by a multilayer structure. *Sci. Rep.*, 2016. Vol. 6. P. 39033.
282. V.A. Maksimenko, V.V. Makarov, B.K. Bera, D. Ghosh, S.K. Dana, M.V. Goremyko, N. S. Frolov, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov, Excitation and suppression of chimera states by multiplexing. *Phys. Rev. E*, 2016. Vol. 94. P. 052205.
283. М.В. Горемыко, В.А. Максименко, В.В. Макаров, Д. Гош, Б. Бера, С.К. Дана, А.Е. Храмов, Взаимодействие химерных состояний в многослойной сети нелокально связанных осцилляторов. *Письма в ЖТФ*, 2017. Т. 43, вып. 15. С. 57–64.
284. S. Majhi, M. Perc, D. Ghosh, Chimera states in a multilayer network of coupled and uncoupled neurons. *Chaos*, 2017. Vol. 27. P. 073109.
285. S. Ghosh, A. Zakharova, S. Jalan, Non-identical multiplexing promotes chimera states. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2018. Vol. 106. P. 56–60.
286. O.I. Kanakov, G.V. Osipov, C.-K. Chan, J. Kurths, Cluster synchronization and spatio-temporal dynamics in networks of oscillatory and excitable Luo-Rudy cells. *Chaos*, 2007. Vol. 17. P. 015111.
287. A. Singh, S. Ghosh, S. Jalan, J. Kurths, Synchronization in delayed multiplex networks. *Europhys. Lett.*, 2015. Vol. 111(3). P. 30010.
288. S. Jalan, A. Singh. Cluster synchronization in multiplex networks. *Europhys. Lett.*, 2016. Vol. 113(3). P. 30002.
289. А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.А. Пивоваров, А.Е. Храмов, Установление обобщенной синхронизации в сети осцилляторов Ресслера. *Известия РАН. Серия физическая*, 2016. Т. 80 (2). С. 208–211.

290. R.G. Andrzejak, G. Ruzzene, I. Malvestio, Generalized synchronization between chimera states. *Chaos*, 2017. Vol. 27. P. 053114.
291. R.G. Andrzejak, G. Ruzzene, I. Malvestio, K. Schindler, E. Schöll, A. Zakharova, Mean field phase synchronization between chimera states. *Chaos*, 2018. Vol. 28(9). P. 091101.
292. R. Sevilla-Escoboza, I. Sendiña-Nadal, I. Leyva, R. Gutiérrez, J. M. Buldú, S. Boccaletti, Inter-layer synchronization in multiplex networks of identical layers. *Chaos*, 2016. Vol. 26. P. 065304.
293. I. Leyva, R. Sevilla-Escoboza, I. Sendiña-Nadal, R. Gutiérrez, J.M. Buldú, S. Boccaletti, Inter-layer synchronization in non-identical multi-layer networks. *Sci. Rep.*, 2017. Vol. 7. P. 45475.
294. L. Zhang, A. E. Motter, T. Nishikawa, Incoherence-Mediated Remote Synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 2017. Vol. 118(17). P. 174102.
295. I. Leyva, I. Sendiña-Nadal, R. Sevilla-Escoboza, V. P. Vera-Avila, P. Chholak, S. Boccaletti, Relay synchronization in multiplex networks. *Sci. Rep.*, 2018. Vol. 8. P. 8629.
296. J. Sawicki, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll, Synchronization scenarios of chimeras in multiplex networks. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2018. Vol. 227. P. 1161.
297. J. Sawicki, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll, Delay controls chimera relay synchronization in multiplex networks. *Phys. Rev. E*, 98:062224, 2018.
298. J. Sawicki, S. Ghosh, S. Jalan, A. Zakharova. Chimeras in multiplex networks: interplay of inter- and intra-layer delays. *Front. Appl. Math. Stat.*, 2019, Vol. 5. P. 19.
299. M. Winkler, J. Sawicki, I. Omelchenko, A. Zakharova, V. Anishchenko, E. Schöll, Relay synchronization in multiplex networks of discrete maps. *Europhys. Lett.*, 2019. Vol. 126. P. 50004.



300. I. Leyva, I. Sendiña-Nadal, J. A. Almendral, A. Navas, S. Olmi, S. Boccaletti, Explosive synchronization in weighted complex networks. *Phys. Rev. E*, 2013. Vol. 88. P. 042808.
301. P.S. Skardal, A. Arenas, Disorder induces explosive synchronization. *Phys. Rev. E*, 2014. Vol. 89. P. 062811.
302. X. Zhang, S. Boccaletti, S. Guan, Z. Liu, Explosive Synchronization in Adaptive and Multilayer Networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2015. Vol. 114. P. 038701.
303. M. Danziger, O.I. Moskalenko, S.A. Kurkin, X. Zhang, S. Havlin, S. Boccaletti, Explosive synchronization coexists with classical synchronization in the Kuramoto model. *Chaos*, 2016. Vol. 26(6). P. 065307.
304. X. Huang, J. Gao, Y.-T. Sun, Z.-G. Zheng, C. Xu, Effects of frustration on explosive synchronization. *Frontiers of Physics*, 2016. Vol. 11. P. 110504.
305. Z. Wang, C. Tian, M. Dhamala, Z. Liu, A small change in neuronal network topology can induce explosive synchronization transition and activity propagation in the entire network. *Sci. Rep.*, 2017. Vol. 7. P. 561.
306. А.А. Короновский, М.К. Куровская, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов, Самоподобие процесса десинхронизации в сети обобщенных осцилляторов Курамото. *Письма в ЖТФ*, 2017. Т. 43, вып. 19. С. 51–56.
307. А.А. Koronovskii, М.К. Kurovskaya, О.И. Moskalenko, А. Hramov, S. Boccaletti, Self-similarity in explosive synchronization of complex networks. *Phys. Rev. E*, 2017. Vol. 96. P. 062312.
308. I. Leyva, I. Sendiña-Nadal, S. Boccaletti, Explosive synchronization in mono and multilayer networks. *Discrete & Continuous Dynamical Systems – B*, 2018. Vol. 23(5). P. 1931–1944.
309. A. Sharma, Explosive synchronization through dynamical environment. *Phys. Lett. A*, 2019. Vol. 383(17). P. 2051–2055.

310. A. Dmitrichev, D. Shchapin, V. Nekorkin, Cloning of Chimera States in a Large Short-term Coupled Multiplex Network of Relaxation Oscillators. *Front. Appl. Math. Stat.*, 2019. Vol. 5. P. 9.
311. C.C. Chow and S. Coombes, Existence and wandering of bumps in a spiking neural network model. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2006. Vol. 5. P. 552–574.
312. C.R. Laing, Fronts and bumps in spatially extended Kuramoto networks. *Physica D*, 2011. Vol. 240. P. 1960.
313. L. Mukhametov, A. Supin, I. Polyakova, Interhemispheric asymmetry of the electroencephalographic sleep patterns in dolphins. *Brain Research*, 1977. Vol. 134. P. 581–584.
314. N.C. Rattenborg, C.J. Amlaner, S.L. Lima, Behavioral, neurophysiological and evolutionary perspectives on unihemispheric sleep. *Neurosci. Biobehav. Rev.*, 2000. Vol. 24. P. 817–842.
315. N.C. Rattenborg. Do birds sleep in flight? *Naturwissenschaften* 2006;93:413–25
316. N.C. Rattenborg, B. Voirin, S.M. Cruz, R. Tisdale, G. Dell’Omo, H.P. Lipp, M. Wikelski, A.L. Vyssotski, Evidence that birds sleep in mid-flight. *Nat. Commun.*, 2016. Vol. 7. P. 12468.
317. M. Tamaki, J. W. Bang, T. Watanabe, Y. Sasaki. Night watch in one brain hemisphere during sleep associated with the first-night effect in humans. *Curr. Biol.*, 2016. Vol. 26(9). P. 1190–1194.
318. M.S. Santos, J.D. Szezech, F.S. Borges, K.C. Iarosz, I.L. Caldas, A.M. Batista, R.L. Viana, J. Kurths, Chimera-like states in a neuronal network model of the cat brain. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2017. Vol. 101. P. 86.
319. P.J. Uhlhaas, W. Singer, Neural synchrony in brain disorders: relevance for cognitive dysfunctions and pathophysiology. *Neuron*, 2006. Vol. 52. P. 155–168.

320. P. Brown, Oscillatory nature of human basal ganglia activity: relationship to the pathophysiology of Parkinson's disease. *Mov. Disord.*, 2003. Vol. 18. P. 357–363.
321. G. Heimer, M. Rivlin, Z. Israel, H. Bergman, Synchronizing activity of basal ganglia and pathophysiology of Parkinson's disease. *J. Neural Transm.*, 2006 Vol. 70(Suppl). P. 17–20.
322. P.L. Carlen, F. Skinner, L. Zhang, C. Naus, M. Kushnir, J.L.P. Velazquez, The role of gap junctions in seizures. *Brains Res. Rev.*, 2000. Vol. 32. P. 235–241.
323. F. Mormann, K. Lehnertz, P. David, C.E. Elger, Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients. *Physica D*, 2000. Vol. 144, iss. 3–4. P. 358–369.
324. F. Mormann, T. Kreuz, R.G. Andrzejak, P. David, K. Lehnertz, C.E. Elger, Epileptic seizures are preceded by a decrease in synchronization. *Epilepsy Res.*, 2003. Vol. 53. P. 173.
325. L.G. Dominguez, R.A. Wennberg, W. Gaetz, D. Cheyne, O.C. Snead, J.L.P. Velazquez, Enhanced synchrony in epileptiform activity? local versus distant phase synchronization in generalized seizures. *J. Neurosci.*, 2005. Vol. 25. P. 8077–84.
326. P. Jiruska, M. de Curtis, J.G.R. Jefferys, C.A. Schevon, S.J. Schiff, K. Schindler, Synchronization and desynchronization in epilepsy: controversies and hypotheses. *J. Physiol.*, 2013. Vol. 591(4). P. 787–797.
327. V.K. Jirsa, W.C. Stacey, P.P. Quilichini, A.I. Ivanov, C. Bernard, On the nature of seizure dynamics. *Brain*, 2014. Voll. 137. P. 2210.
328. R.G. Andrzejak, C. Rummel, F. Mormann, K. Schindler, All together now: Analogies between chimera state collapses and epileptic seizures. *Sci. Rep.*, 2016. Vol. 6. P. 23000.

329. T. König, L. Prichep, T. Dierks, D. Hubl, L. Wahlund, E. John, Decreased eeg synchronization in Alzheimer's disease and mild cognitive impairment. *Neurobiol. Aging*, 2005. Vol. 26. P. 165–171.
330. P.J. Uhlhaas, D.E. Linden, W. Singer, C. Haenschel, M. Lindner, K. Maurer, et al., Dysfunctional long-range coordination of neural activity during gestalt perception in schizophrenia. *J. Neurosci.*, 2006. Vol. 26. P. 8168–8175.
331. E. Tognoli, J.S. Kelso, The metastable brain. *Neuron*, 2014. Vol. 81. P. 35–48.
332. A.R. Nikolaev, S. Gepshtein, P. Gong, C. van Leeuwen, Duration of coherence intervals in electrical brain activity in perceptual organization. *Cerebral Cortex*, 2010. Vol. 20. P. 365.
333. S. Ahn and L. L. Rubchinsky, Short desynchronization episodes prevail in synchronous dynamics of human brain rhythms. *Chaos*, 2013. Vol. 23. P. 013138.
334. S. Ahn, L.L. Rubchinsky, C.C. Lapish, Dynamical reorganization of synchronous activity patterns in prefrontal cortex-hippocampus networks during behavioral sensitization. *Cerebral Cortex*, 2014. Vol. 24. P. 2553–2561.
335. J.C. Gonzalez-Avella, M.G. Cosenza, M.S. Miguel, Localized coherence in two interacting populations of social agents. *Physica A*, 2014. Vol. 399(0). P. 24–30.
336. T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, S.A. Bogomolov, V.S. Anishchenko, Correlation analysis of the coherence-incoherence transition in a ring of nonlocally coupled logistic maps. *Chaos*, 2016. Vol. 26. P. 093108.
337. N.I. Semenova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, A. Zakharova, Temporal intermittency and the lifetime of chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators. *Chaos*, 2017. Vol. 27, I. 6. P. 061102.
338. A. Bukh, E. Rybalova, N. Semenova, G. Strelkova, V. Anishchenko, New type of chimera and mutual synchronization of spatiotemporal structures in

- two coupled ensembles of nonlocally interacting chaotic maps. *Chaos*, 2017. Vol. 27, I. 11. P. 111102.
339. I.A. Shepelev, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, Chimera states and intermittency in an ensemble of nonlocally coupled Lorenz systems. *Chaos*, 2018. V. 28, I. 6. P. 063119.
340. E. Rybalova, V.S. Anishchenko, G.I. Strelkova, A. Zakharova, Solitary states and solitary state chimera in neural networks. *Chaos*, 2019. Vol. 29. P. 071106.
341. E.V. Rybalova, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, A.S. Zakharova, Forced synchronization of a multilayer heterogeneous network of chaotic maps in the chimera state mode. *Chaos*, 2019. Vol. 29. P. 033134.
342. С.А. Богомолов, Г.И. Стрелкова, Е. Schöll, В.С. Анищенко, Амплитудные и фазовые химеры в ансамбле хаотических осцилляторов. *Письма в ЖТФ*, 2016. Т. 42, вып. 14. С. 103–110.
343. Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова, С.А. Богомолов, В.С. Анищенко, Корреляционные характеристики фазовых и амплитудных химерных состояний в ансамбле нелокально связанных отображений. *Письма в ЖТФ*, 2017. Т. 43, вып. 2. С. 68–75.
344. В.С. Анищенко, Г.И. Стрелкова, Химерные структуры в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов. *Изв. вузов. Радиофизика*, 2018. Т. 61, № 8. С. 739–753. [V.S. Anishchenko, G.I. Strelkova, Chimera Structures in the Ensembles of Nonlocally Coupled Chaotic Oscillators. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2019. Vol. 61, Iss. 8-9. P. 659–671.].
345. E.V. Rybalova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, Mechanism of realizing a solitary state chimera in a ring of nonlocally coupled chaotic maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018. V. 115. P. 300–305.
346. S.A. Bogomolov, A.V. Slepnev, G.I. Strelkova, E. Schöll, V.S. Anishchenko, Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in

- ensembles of nonlocally coupled chaotic systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2017. Vol. 43. P. 25–36.
347. E. Rybalova, N. Semenova, G. Strelkova, V. Anishchenko, Transition from complete synchronization to spatio-temporal chaos in coupled chaotic systems with nonhyperbolic and hyperbolic attractors. *The European Phys. J. Sp. Top.*, 2017. Vol. 226, I. 9. P. 1857–1866.
348. N.I. Semenova, E.V. Rybalova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, “Coherence–incoherence” transition in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators with nonhyperbolic and hyperbolic attractors. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017. Vol. 22, I. 2. P. 148–162.
349. G.I. Strelkova, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko. Synchronization of chimera states in a network of many unidirectionally coupled layers of discrete maps. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018. V. 23, I. 7-8. P. 948–960.
350. E.V. Rybalova, D.Y. Klyushina, V.S. Anishchenko, G.I. Strelkova, Impact of noise on the amplitude chimera lifetime in an ensemble of nonlocally coupled chaotic maps. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019. Vol. 24, no. 4. P. 432–445.
351. A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko. Synchronization of chimera states in coupled networks of nonlinear chaotic oscillators. *Russ. J. of Nonlinear Dynamics*, 2018. V. 14, I. 4. P. 419–433.
352. С.А. Богомолов, Е.В. Рыбалова, Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко, Пространственно-временные структуры в ансамбле нелокально связанных отображений Некоркина. *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика*. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 86–94.
353. G. Strelkova, E. Rybalova, V. Anishchenko, A. Zakharova, Effect of switchings and the lifetime of chimeras in an ensemble of nonlocally coupled chaotic maps. *AIP Conference Proceedings*, 2018. Vol. 1978. P. 470014.

354. E.V. Rybalova, G.I. Strelkova, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko. Bistability promotes solitary states in ensembles of nonlocally coupled maps. Proc. SPIE, 2019. P. 11067.
355. Е.В. Рыбалова, Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко, Программный комплекс для моделирования влияния шума на устойчивость и время жизни химерных состояний в ансамблях хаотических систем с нелокальной связью. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2019618219. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 26.06.2019.
356. Е.В. Рыбалова, Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко, Программа для исследования удаленной синхронизации в системе трех связанных колец хаотических систем. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019664054. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 30.10.2019.
357. Е.В. Рыбалова, Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, Программа для исследования формирования пространственно-временных структур в ансамблях связанных хаотических систем. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019664055. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 30.10.2019.
358. Е.В. Рыбалова, Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко, Программный комплекс для исследований вынужденной синхронизации многослойных неоднородных сетей связанных нелинейных систем. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019664480. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 07.11.2019.
359. В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова, *Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний*. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008.

360. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, *Deterministic Nonlinear Systems. A Short Course*. Springer Series in Synergetics. Berlin: Springer, 2014. 294 p.
361. F. Mormann, R.G. Andrzejak, A. Kraskov, K. Lehnertz, P. Grassberger, Measuring synchronization in coupled model systems: A comparison of different approaches. *Physica D*, 2007. Vol. 225. P. 29.
362. M.J. Feigenbaum, Quantitative universality for a class of non-linear transformations. *J. Stat. Phys.*, 1978. Vol. 19. P. 25–52.
363. В.С. Анищенко, *Сложные колебания в простых системах*. М.: Наука, 1990.
364. В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астахов, *Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем*. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.
365. С.П. Кузнецов, *Динамический хаос*. М.: Физматлит, 2006.
366. В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, *Лекции по нелинейной динамике*. Учебное пособие. Москва-Ижевск: Изд-во РХД, 2011, 498 с.
367. V.S. Afraimovich, L.P. Shil'nikov, Strange Attractors and Quasiattractors. In book: *Nonlinear Dynamics and Turbulence*. Ed. by G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph. Interaction Mech. Math. Ser., Boston, Mass.: Pitman, 1983. P. 1–34.
368. V.S. Afraimovich, Attractors. In book: *Nonlinear Waves - 1*. Ed. by A.V. Gaponov, M.I. Rabinovich, J. Engelbrechet. Berlin: Springer, 1989. P. 6–28.
369. L.P. Shilnikov, Strange Attractors and Dynamical Models. *J. of Circuits, Systems, and Computers*, 1993. Vol. 3, No. 1. P. 1–10.
370. В.С. Анищенко, С.А. Богомолов, Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова, Механизмы рождения и свойства химерных состояний в ансамбле нелокально



- связанных дискретных отображений. Компьютерные науки и информационные технологии. Материалы Международной научной конференции, 2016. С. 48–51.
371. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, Coherence–incoherence transition and properties of different types of chimeras in a network of nonlocally coupled chaotic maps. In book: *Advances in Dynamics, Patterns, Cognition*. I.S. Aranson, A. Pikovsky, N.F. Rulkov (Eds.). 2017. P. 79–98.
372. В.С. Анищенко, Г.И. Стрелкова, Химерные состояния в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов. Компьютерные науки и информационные технологии. Материалы Международной научной конференции, 2018. P. 34–39.
373. Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко, Пространственно-временные структуры в ансамблях связанных хаотических систем. *Успехи Физических Наук*, 2020. Т. 190, вып. 2. DOI: 10.3367/UFNr.2019.01.038518.
374. A.S. Pikovsky and P. Grassberger, Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors. *J. Phys. A*, 1991. Vol. 24. P. 4587–4597.
375. P. Ashwin, J. Buescu, I. Stewart, Bubbling of attractors and synchronization of oscillators. *Phys. Lett. A*, 1994. Vol. 193. P. 126–139.
376. E. Ott and J. C. Sommerer, Blowout bifurcations: The occurrence of riddled basins and on-off intermittency. *Phys. Lett. A*, 1994. Vol. 188. P. 39–47.
377. Yu. Maistrenko and T. Kapitaniak, Different types of chaos synchronization in two coupled piecewise linear maps. *Phys. Rev. E*, 1996. Vol. 54. P. 3285–3292.
378. Y. Nagai and Y. Ch. Lai, Characterization of blowout bifurcation by unstable periodic orbits. *Phys. Rev. E*, 1997. Vol. 55. P. R1251–R1254.
379. V. Astakhov, A. Shabunin, T. Kapitaniak, V. Anishchenko, Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits. *Phys. Rev. Lett.*, 1997. Vol. 79. P. 1014–1017.

380. Семенова Н.И., Анищенко В.С. Переход «когерентность-некогерентность» с образованием химерных состояний в одномерном ансамбле. *Нелинейная динамика*, 2016. Т. 12, №3. С. 295–309.
381. M. Hénon, Numerical study of quadratic area-preserving mappings. *Quart. Appl. Math.*, 1969. Vol. 27. P. 291.
382. М. Хенон, Двумерное отображение со странным аттрактором. В кн. *Странные аттракторы*. М.: Мир, 1981. С. 152–163.
383. Л.П. Шильников, К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокуса. *Мат. сб.*, 1970. Т. 81 (123). С. 92–103.
384. Ю.И. Кифер, Некоторые теоремы о малых случайных возмущениях динамических систем. *УМН*, 1974. Т. 29, вып. 3. С. 205.
385. Г. Шустер, *Детерминированный хаос. Введение*. М.: Мир, 1988. Гл. 1,5.
386. S. Smale, Differential Dynamical Systems. *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967. Vol. 73. P. 747–817.
387. Р.В. Плыкин, О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов. *УМН*, 1980. Т. 35, №3. С. 94–104.
388. Р.В. Плыкин, О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов. *УМН*, 1984. Т. 39, №6. С. 75–113.
389. С.П. Кузнецов, Е.П. Селезнев, Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса. *ЖЭТФ*, 2006. Т. 129, №2. С. 400–412.
390. S.P. Kuznetsov, A. Pikovsky, Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors. *Physica D*, 2007. Vol. 232 (2). P. 87–102.
391. С.П. Кузнецов, Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике. *УФН*, 2011. Vol. 181. С. 121–149.

392. С.П. Кузнецов, *Динамический хаос и гиперболические аттракторы. От математики к физике*. М.-Ижевск, Инст. комп. иссл., 2013.
393. V.P. Kruglov, S.P. Kuznetsov, Hyperbolic chaos in a system of two Froude pendulums with alternating periodic braking. *Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simulat.*, 2019. Vol. 67. P. 152–161.
394. S. Smale, M.W. Hirsch, R.L. Devaney, *Discrete dynamical systems*. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Vol. 60. Academic Press, 2003. P. 327–357.
395. R. Lozi, Un Attracteur Entrahge du Type Attracteur de Henon. *J. de Physique*, 1978. Vol. 39 (C5). P. 9–10.
396. В.Н. Белых, Модели дискретных систем фазовой синхронизации и их исследование. В кн. *Системы фазовой синхронизации*. Под ред В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. С. 161–162.
397. В.Н. Белых, Хаотические и странные аттракторы двумерного отображения. *Мат. сб.*, 1985. Т. 186, № 3. С. 35.
398. E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow. *J. of the Atmospheric Sciences*, 1983. Vol. 20. P. 130–141.
399. Е. Лоренц, Детерминированное непериодическое течение. В кн. *Странные аттракторы* (Пер. под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова). М.: Мир, 1981. С. 88.
400. R.F. Williams, The structure of Lorenz attractors. *Lect. Notes in Math*. Berlin: Springer, 1977. V. 615. P. 94–112.
401. В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, О возникновении и структуре аттрактора Лоренца. *ДАН СССР*, 1977. Т. 234, № 2. С. 336–339.
402. Л.П. Шильников, Теория бифуркаций и модель Лоренца. В кн. Дж. Марсден, М. Мак-Кракен, *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*. М.: Мир, 1980. С. 317–335.

403. В.В. Быков, Л.П. Шильников, О границах области существования аттрактора Лоренца. Методы качественной теории и теории бифуркаций: Межвуз. темат. сб. науч. тр. Под ред. Д.П. Шильникова. Горький, 1989. С. 151–159.
404. Ya.B. Pesin, Dynamical systems with generalized hyperbolic attractors: hyperbolic, ergodic and topological properties. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 1992. Vol. 12. P. 123–151.
405. Д.В. Тураев, Л.П. Шильников, Пример дикого странного аттрактора. *Матем. сб.*, 1998. Т. 189 (2). С. 137–160.
406. A.E. Cook, P.H. Roberts, The Rikitake Two-disc Dynamo System. *Proc. of Cambridge Philosophical Society*, 1970. Vol. 68. P. 547–569.
407. A.S. Elwakil, S. Ozoguz, M.P. Kennedy, Creation of a complex butterfly attractor using a novel Lorenz-Type system. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I*, 2002. Vol. 49, iss. 4. P. 527–530.
408. А.С. Гонченко, С.В. Гонченко, О существовании аттракторов лоренцевского типа в неавтономной модели «кельтского камня». *Нелинейная динамика*, 2013. Т. 9, № 1. С. 77–89.
409. S.V. Gonchenko, I.I. Ovsyannikov, On global bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms leading to Lorenz-like attractors. *Mat. Model. of Nat. Phenom.*, 2013. Vol. 8. P. 71–83.
410. S.V. Gonchenko, I.I. Ovsyannikov, J.C. Tatjer, Birth of Discrete Lorenz Attractors at the Bifurcations of 3D Maps with Homoclinic Tangencies to Saddle Points. *Regul. Chaotic Dyn.*, 2014. Vol. 19. P. 495–505.
411. С.П. Кузнецов, Аттрактор типа Лоренца в электронном параметрическом генераторе и его трансформация при нарушении точных условий параметрического резонанса. *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2016. Т. 24, №3. С. 68–87.

412. С.П. Кузнецов, П.В. Купцов, Аттрактор Лоренца в системе с запаздыванием: пример псевдогиперболического хаоса. Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Сер. Физика, 2018. Т. 18. №3. С. 162–176.
413. V.N. Belykh, N.V. Barabash, I.V. Belykh, A Lorenz-type attractor in a piecewise-smooth system: Rigorous results. *Chaos*, 2019. Vol. 29. P. 103108.
414. И.А. Шепелев, Г.И. Стрелкова, Т.Е. Вадивасова, Химерные состояния и перемежающиеся структуры в ансамбле нелокально связанных осцилляторов Лоренца. Компьютерные науки и информационные технологии. Материалы Международной научной конференции. 2018. P. 444–448.
415. V. Semenov, A. Zakharova, Y. Maistrenko, E. Schöll, Delayed-feedback chimera states: Forced multiclusters and stochastic resonance. *Eur. Phys. Lett.*, 2016. Vol. 115. P. 10005.
416. K. Premalatha, V. K. Chandrasekar, M. Senthilvelan, M. Lakshmanan, Imperfectly synchronized states and chimera states in two interacting populations of nonlocally coupled Stuart-Landau oscillators. *Phys. Rev. E*, 2016. Vol. 94. P. 012311.
417. K. Premalatha, V. K. Chandrasekar, M. Senthilvelan, M. Lakshmanan, Chimeralike states in two distinct groups of identical populations of coupled Stuart-Landau oscillators. *Phys. Rev. E*, 2017. Vol. 95. P. 022208.
418. N. Semenova, T. Vadivasova, V. Anishchenko, Mechanism of solitary state appearance in an ensemble of nonlocally coupled Lozi maps. *Eur. Phys. J. Sp. Topics*, 2018. Vol. 227. P. 1173–1183.
419. V. Dziubak, Y. Maistrenko, E. Schöll, Coherent traveling waves in nonlocally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 2013. Vol. 87. P. 032907.
420. M. Massimini, F. Ferrarelli, R. Huber, S. K. Esser, H. Singh, G. Tononi, Breakdown of cortical effective connectivity during sleep. *Science*, 2005. Vol. 309. P. 2228.

421. Р.Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике*. М.: Сов. Радио, 1961.
422. С.М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. Случайные процессы*. М.: Наука, 1976.
423. А.Н. Малахов, *Флуктуации в автоколебательных системах*. М.: Наука, 1968.
424. R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, The Mechanism of Stochastic Resonance. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1981. Vol. 14. P. L453.
425. L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, Stochastic Resonance. *Rev. Mod. Phys.*, 1998. Vol. 70 P. 223–287.
426. В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индукцированные шумом переходы*. М.: Мир, 1987.
427. I.A. Shepelev, T.E. Vadivasova, Inducing and destruction of chimeras and chimera-like states by an external harmonic force. *Phys. Lett. A*, 2018. Vol. 382. P. 690–696.
428. Y. Pomeau, P. Manneville, Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Comm. Math. Phys.* 1980. Vol. 74, №2. P. 189–197.
429. P. Manneville, Y. Pomeau, Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems. *Physica D*, 1980. Vol. 1, iss. 2. P. 219–226.
430. G. Benettin, L. Galgani, and J. Strelcyn, Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Phys. Rev. A*, 1976. Vol. 14. P. 2338–2345.
431. Median (in Statistics), in *Encyclopaedia of Mathematics: Vol. 6*, M. Hazewinkel (Ed.), Dordrecht: Kluwer, 1990.
432. D.J. Sheskin, *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures*. 3rd ed., Boca Raton, Fla.: CRC, 2003.
433. В.И. Некоркин, Л.В. Вдовин, Дискретная модель нейронной активности. *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2007. Т. 15, №5. С. 36–60.

434. R.A. FitzHugh, Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophys. J.*, 1961. Vol. 1. P. 445–466.
435. А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. *Нелинейные колебания*. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006.
436. J.C. Alexander, J.A. Yorke, Z. You, I. Kan, Riddled basins. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 1992. Vol. 2. P. 795.
437. E. Ott, J.C. Sommerer, J.C. Alexander, I. Kan, J.A. Yorke, Scaling behavior of chaotic systems with riddled basins. *Phys. Rev. Lett.*, 1993. Vol. 71. P. 4134.
438. P. Ashwin, J. Buescu, I. Stewart, Bubbling of attractors and synchronisation of chaotic oscillators. *Phys. Lett. A*, 1994. Vol. 193. P. 126.
439. J.F. Heagy, T.L. Carrol, L.M. Pecora, Experimental and numerical evidence for riddled basins in coupled chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1994. Vol. 73. P. 3528.
440. M. Woltering, M. Markus, Riddled basins in a model for the Belousov-Zhabotinsky reaction. *Chem. Phys. Lett.*, 2000. Vol. 321. P. 473.
441. V. Santos, J.D. Szezech, Jr., A.M. Batista, K.C. Iarosz, M.S. Baptista, H.P. Ren, C. Grebogi, R.L. Viana, I.L. Caldas, Y.L. Maistrenko, J. Kurths, Riddling: Chimera's dilemma. *Chaos*, 2018. Vol. 28. P. 081105.
442. A.C. Scott, The electrophysics of a nerve fiber. *Rev. Mod. Phys.*, 1975. Vol. 47. P. 487.
443. Ch. Huygens (Hugenii). *Horologium Oscillatorium*. Parisiis, France, 1673. English translation: *The Pendulum Clock*, Ames: Iowa State Univ. Press, 1986.
444. B. Van-der-Pol, Theory of the amplitude of free and forced triod vibration. *Radio. Rev.*, 1920. Vol. 1. P. 701-710.
445. А.А. Андронов, *Собрание трудов*. М.: Изд-во АН СССР, 1956.
446. К.Ф. Теодорчик, *Автоколебательные системы*. М.: Гостехиздат, 1952.
447. Т. Хаяси, *Нелинейные колебания в физических системах*. М.: Мир, 1968.

448. И.И. Блехман, *Синхронизация динамических систем*. М.: Наука, 1971.
449. П.С. Ланда, *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы*. М.: Наука, 1980.
450. И.И. Блехман, *Синхронизация в природе и технике*. М.: Наука, 1981.
451. А.Г. Демьянченко, *Синхронизация генераторов гармонических колебаний*. М.: Энергия, 1976.
452. П.С. Ланда, *Нелинейные колебания и волны*. М.: Наука, 1997.
453. В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, *Регулярные и хаотические колебания. Синхронизация и влияние флуктуаций*. Долгопрудный: Изд. Дом “Интеллект”, 2009.
454. A. Bukh, G. Strelkova, V. Anishchenko, Synchronization of chimera states in two coupled ensembles of nonlinear chaotic oscillators. Proc. of 2018 Int. Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA2018). 2018. P. 605–608.
455. А.В. Бух, Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко, Синхронизация химерных состояний в двух связанных ансамблях нелинейных хаотических осцилляторов. Компьютерные науки и информационные технологии. Материалы Международной научной конференции. 2018. P. 71–75.
456. M. Komarov, A. Pikovsky, Effects of Nonresonant Interaction in Ensembles of Phase Oscillators. Phys. Rev. E, 2011. Vol. 84, no. 1. P. 016210 (12 pp.).
457. M. Komarov, A. Pikovsky, Dynamics of Multifrequency Oscillator Communities. Phys. Rev. Lett., 2013. Vol. 110, no. 13. P. 134101 (5 pp.).
458. A. Amengual, E. Hernández-García, R. Montagne, M. San Miguel, Synchronization of Spatiotemporal Chaos: The Regime of Coupled Spatiotemporal Intermittency. Phys. Rev. Lett., 1997. Vol. 78, no. 23. P. 4379–4382.



459. L. Kocarev, Z. Tasev, U. Parlitz, Synchronizing Spatiotemporal Chaos of Partial Differential Equations. *Phys. Rev. Lett.*, 1997. Vol. 79, no. 1. P. 51–54.
460. S. Boccaletti, J. Bragard, F.T. Arecchi, H. Mancini, Synchronization in Nonidentical Extended Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1999. Vol. 83, no. 3. P. 536–539.
461. J. Bragard, S. Boccaletti, Integral Behavior for Localized Synchronization in Nonidentical Extended Systems. *Phys. Rev. E*, 2000. Vol. 62, no. 5. P. 6346–6351.
462. V.B. Kazantsev, V.I. Nekorkin, D.V. Artyuhin, and M.G. Velarde, Synchronization, Re-Entry, and Failure of Spiral Waves in a Two-Layer Discrete Excitable System. *Phys. Rev. E*, 2001. Vol. 63, no. 1. P. 016212.
463. A. Akopov, V. Astakhov, T. Vadivasova, A. Shabunin, T. Kapitaniak, Frequency Synchronization of Clusters in Coupled Extended Systems. *Phys. Lett. A*, 2005. Vol. 334, nos. 2–3. P. 169–172.
464. D.J. Watts, S.H. Strogatz, Collective Dynamics of Small-World Networks. *Nature*, 1998. Vol. 393, no. 6684. P. 440–442.
465. V. Anishchenko, S. Astakhov, T. Vadivasova, Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force, *Europhys. Lett.*, 2009. Vol. 86(3). P. 30003.