

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»



На правах рукописи

Фан Тхань Чунг

**АНАЛИЗ УДАРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ВЯЗКОУПРУГИЕ
ПЛАСТИНКИ ПРИ ПОМОЩИ МОДЕЛЕЙ С ДРОБНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук,
профессор М.В. Шитикова

Воронеж – 2018

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Обзор литературы, посвященной анализу ударного воздействия на тонкие вязкоупругие пластинки	14
Глава 2. Ударное воздействие вязкоупругого шара по упругой пластинке Кирхгофа-Лява, находящейся в вязкоупругой среде Кельвина-Фойгта с дробными производными	22
2.1. Предварительные замечания.....	22
2.2. Постановка задачи.....	24
2.3. Функция Грина для модели Кельвина-Фойгта с дробными производными.....	26
2.4. Определение контактной силы.....	28
2.5. Определение местного смятия.....	31
2.6. Приближенное решение и частные случаи.....	33
2.7. Численные исследования.....	36
Глава 3. Анализ вязкоупругих пластин Уфлянда-Миндлина на ударные воздействия	56
3.1. Постановка задачи и разрешающие уравнения.....	56
3.2. Расшифровка операторов дробного порядка.....	60
3.3. Уравнения движения зоны контакта и ударника.....	73

3.4. Приближенное аналитическое решение определяющей системы уравнений.....	78
3.5 Численные исследования.....	82
Глава 4. Низкоскоростное ударное взаимодействие предварительно напряженной изотропной пластинки Уфлянда-Миндлина.....	95
4.1. Постановка задачи и методы решения.....	95
4.1.1. Динамическое поведение круглой упругой пластины.....	96
4.1.2. Уравнения движения контактной области и ударника.....	98
4.2. Решение разрешающих уравнений.....	101
4.2.1. Анализ критического состояния системы.....	102
4.3. Численные исследования.....	105
Заключение.....	119
Список литературы.....	122

Введение

Данная диссертационная работа посвящена анализу динамического поведения вязкоупругих пластинок при ударных воздействиях с использованием моделей, содержащих дробные операторы.

Актуальность темы. Элементы строительных конструкций (балки, пластинки, оболочки) часто подвергаются ударным воздействиям при погрузке и разгрузке, транспортировке, монтаже и в процессе эксплуатации. Натурные наблюдения и экспериментальные исследования свидетельствуют о том, что ударные воздействия могут вызывать появление трещин и даже разрушение этих элементов, что может привести в конечном счёте к повреждению конструкции в целом.

Поскольку пластинки часто используются в качестве конструктивных элементов во многих отраслях промышленности и техники, то изучение их динамического поведения при ударных воздействиях является весьма актуальным, особенно в тех случаях, когда свойства соударяющихся тел изменяются в области контакта в процессе ударного взаимодействия.

Основной целью диссертационной работы является разработка метода, позволяющего получать определяющие интегро-дифференциальные уравнения, учитывающие вязкоупругие свойства соударяющихся тел, ударника в виде шара и мишени в виде пластинки, которые задаются соотношениями Больцмана-Вольтерра с наследственным ядром Ю.Н. Работнова, а также получение их приближенных аналитических решений с последующим численным анализом.

Научная новизна. Решена задача об ударе вязкоупругого шара по упругой шарнирно опертой пластинке Кирхгофа-Лява, находящейся в вязкой среде. Вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного

линейного тела с дробной производной, а демпфирующие свойства среды – моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, при этом параметры дробности ударника и среды могут иметь разные значения. Решение задачи вне области контакта строится при помощи функции Грина, а в зоне контакта – с использованием обобщенной теории Герца.

Волновая теория удара, разработанная ранее Ю.А. Россихиным и М.В. Шитиковой для анализа ударного взаимодействия упругих тел, была обобщена на случай растяжения срединной поверхности вязкоупругой мишени в виде тонкой пластинки типа Уфлянда-Миндлина.

Решена задача об ударе упругого шара по вязкоупругой пластинке типа Уфлянда-Миндлина, вязкоупругие свойства которой вне области контакта описываются классической моделью стандартного линейного тела, а в зоне контакта - моделью стандартного линейного тела с дробными производными. Введение параметра дробности позволяет варьировать вязкостью в контактной зоне, так как в процессе ударного взаимодействия могут рваться поперечные связи между длинными молекулами, что может привести к изменению вязкости в системе «мишень-ударник». В процессе удара учитывается также растяжение срединной поверхности балки. Поскольку в момент удара в зоне контакта происходит зарождение продольной и поперечной ударных волн в виде поверхностей сильного разрыва, которые затем распространяются вдоль вязкоупругой пластинки с упругими скоростями, то решение за фронтами ударных волн, т.е. вне области контакта, строится при помощи лучевых рядов, коэффициенты которых находятся из определяющей системы уравнений при помощи кинематических и геометрических условий совместности. В контактной зоне решение строится при помощи обобщенной теории Герца, что требует расшифровки сложных операторных выражений, которые приводят к линейным комбинациям дробных операторов Ю.Н. Работнова.

Найдены приближенные решения полученных систем уравнений с использованием малого параметра, которым является время протекания ударного процесса. Проведенные численные исследования показали, что при увеличении параметра дробности от нуля до единицы, что соответствует увеличению вязкости ударника, максимальное значение контактной силы уменьшается, а время контакта ударника и мишени увеличивается.

Проведен сравнительный анализ результатов ударного взаимодействия сферического ударника с вязкоупругой пластинкой типа Уфлянда-Миндлина без учета и с учетом растяжения ее срединной поверхности. Показано, что учет растяжения делает механическую систему «мишень-ударник» более гибкой, что приводит к увеличению максимальных значений локального смятия материалов балки и шара в зоне контакта и к увеличению продолжительности контактного взаимодействия при одних и тех же значениях параметра дробности.

Исследована реакция на низкоскоростной удар предварительно напряженной круглой изотропной упругой пластинки в случае, когда ее динамическое поведение описывается уравнениями, учитывающими инерцию вращения и деформации поперечного сдвига. При этом контактное взаимодействие между жестким ударником и мишенью моделируется обобщенной контактной силой Герца, так как предполагается, что вязкоупругие свойства пластины проявляются только внутри зоны контакта и описываются при помощи модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными ввиду того факта, что в процессе удара происходит разрушение межмолекулярных связей внутри зоны контакта пластины и сферы, в результате чего возникают более свободные перемещения молекул относительно друг друга и в конечном итоге происходит уменьшение вязкости материала пластины внутри области контакта.

Показано, что если круглая пластина подвержена действию постоянной сжимающей силы, равномерно распределенной по ее срединной плоскости вдоль граничной окружности, то в процессе удара по такой предварительно напряженной пластинке возбуждается нестационарная волна поперечного сдвига (поверхность сильного разрыва), которая затем распространяется со скоростью, зависящей от сжимающей силы. При определенной критической величине сжимающей силы, скорость нестационарной волны равна нулю, в результате чего происходит «запирание» этой волны внутри зоны контакта, что, в свою очередь, ведет к тому, что энергия в процессе удара не рассеивается (как это происходит в случае возникновения и распространения поперечной волны сдвига), а остается внутри зоны контакта, что может привести к разрушению контактной области.

Показано, что для упругой пластины критическая сжимающая сила ведет к увеличению скорости контактного пятна с течением времени, в результате чего происходит отделение жесткой шайбы (зоны контакта) с дальнейшим выталкиванием ее из пластины.

Если внутри зоны контакта начинает проявляться вязкость материала пластинки, то она смягчает удар, и в этом случае скорость контактного пятна последовательно растет от нуля до определенной максимальной величины и затем снова уменьшается до нуля.

Достоверность базируется на корректной математической постановке задач. Полученные в работе результаты согласуются с общими физическими представлениями. Правильность полученных результатов определяется корректностью математических выкладок и сопоставлением с известными результатами других авторов. Полученные решения переходят в известные решения для производных целого порядка при устремлении параметра дробности к единице.

Практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы проектными и научно-исследовательскими организациями в процессе проектирования конструкций, которые в процессе эксплуатации могут подвергаться различным ударным воздействиям, приводящим к изменению свойств соударяющихся тел в зоне контакта.

Данные научные исследования выполнялись в соответствии с планом научно-исследовательских работ международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук ФГБОУ ВО «ВГТУ» в рамках проекта РФФИ «Анализ ударного взаимодействия вязкоупругих балок, пластин и оболочек с учетом сдвиговой и объемной релаксации на основе дробных операторов Ю.Н. Работнова» (проект № 17-01-00490).

На защиту выносятся следующие основные результаты работы:

- обобщение волновой теории удара, разработанной ранее Ю.А. Россихиным и М.В. Шитиковой для анализа ударного взаимодействия упругих тел, на случай ударного взаимодействия шара с вязкоупругой мишенью в виде пластинки Уфлянда-Миндлина с учетом растяжения ее срединной поверхности;
- анализ динамического поведения упругой пластинки Кирхгофа-Лява под действием контактной силы в вязкой среде при помощи введения в рассмотрение нового структурного параметра для описания демпфирующих свойств среды за счет использования производной дробного порядка;
- приближенное аналитическое решение задач ударного взаимодействия вязкоупругих, упругих или жестких ударников с вязкоупругими пластинками с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса;

- решение задачи о низкоскоростном ударе по предварительно напряженной круглой изотропной упругой пластинке Уфлянда-Миндлина с использованием обобщенного контактного закона Герца в предположении, что вязкоупругие свойства пластины проявляются только внутри зоны контакта и описываются при помощи модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались: 1) на научных конференциях профессорско-преподавательского состава Воронежского государственного технического университета в 2015-2017 годах; 2) на семинарах международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук ВГТУ; 3) на 7й международной конференции по математическому моделированию в инженерных науках (7th International Conference on Mathematical Models for Engineering Science MMES'16), в Дубровнике, Хорватия, 28-30 сентября 2016 года; 4) на международной конференции по прикладной математике, вычислительным и инженерным наукам (2016 International Conference on Applied Mathematics, Computational Science and Systems Engineering) в Риме, Италия, 5-7 ноября 2016 года.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 научных работах, 3 из которых в международных научных изданиях, проиндексированных в базах данных Web of Science и Scopus.

Личное участие автора. Основные результаты исследований, изложенные в диссертационной работе, были получены лично соискателем и опубликованы совместно с научным руководителем, который определил основные направления исследования в процессе выполнения научного проекта РФФИ. В совместных публикациях диссертант участвовал в решении задач,

поставленных перед ним руководителем, лично проводил все численные исследования и их анализ.

В диссертации отсутствует заимствованный материал без ссылок на авторов и источник заимствования.

Структура и объём работы Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 142 страницах машинописного текста, содержит 46 рисунков и список использованных источников из 188 наименований.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ДИССЕТАЦИИ

В первой главе приводится анализ научной литературы, посвященной исследованию задач ударного взаимодействия вязкоупругих пластинок и методов их решения.

Вторая глава посвящена анализу пластинок Кирхгоффа-Лява на ударные воздействия. Рассмотрена задача о низко скоростном поперечном удара вязкоупругого шара по шарнирно опертой упругой пластинке Кирхгофа-Лява в вязкоупругой среде. Вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного тела с дробной производной, а демпфирующие свойства среды – моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, при этом параметры дробности ударника и среды имеют разные значения. Внутри контактной зоны контактная сила определяется при помощи обобщенной теории Герца. Для мишени построена функция Грина, что позволило получить интегральное уравнение для контактной силы и местного смятия при помощи алгебры безразмерных дробных операторов Ю.Н. Работнова. Найдено

приближенное аналитическое решение с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса.

Проведены численные исследования, которые показывают, что при изменении параметра дробности шара от нуля до единицы, что соответствует увеличению вязкости ударника, максимум контактной силы уменьшается, а время контакта ударника и мишени увеличивается. Кроме зависимости контактной силы от времени построены временные зависимости смятия материала ударника и мишени, а также исследовано влияние массы ударника, его начальной скорости и размеров поперечного сечения мишени на основные характеристики ударного взаимодействия шара и пластинки.

Третья глава посвящена анализу вязкоупругих пластинок типа Уфлянда-Миндлина, демпфирующие свойства которых описываются моделью стандартного линейного тела, на ударные воздействия. С этой целью волновая теория удара, разработанная Ю.А. Россихиным и М.В. Шитиковой для анализа ударного взаимодействия упругих тел, была обобщена на случай ударного взаимодействия шара с вязкоупругой мишенью в виде пластинки с учетом растяжения ее срединной поверхности.

Решена задача об ударе упругого шара по вязкоупругой пластинке типа Уфлянда-Миндлина, уравнения динамического поведения которой учитывают инерцию вращения и деформации поперечного сдвига. Вязкоупругие свойства пластинки вне области контакта описываются классической моделью стандартного линейного тела, а в зоне контакта используется модель стандартного линейного тела с дробными производными. Введение параметра дробности позволяет управлять вязкостью в зоне контакта, поскольку в процессе удара могут рваться поперечные связи между длинными молекулами, что может привести к изменению вязкости в системе «мишень-ударник». В процессе удара учитывается также растяжение срединной поверхности пластинки. Поскольку в момент удара в зоне контакта происходит зарождение

продольной и поперечной ударных волн (поверхностей сильного разрыва), которые затем распространяются в вязкоупругой пластинке с упругими скоростями, то решение за фронтами ударных волн, т.е. вне области контакта, строится при помощи лучевых рядов, коэффициенты которых находятся из определяющей системы уравнений при помощи кинематических и геометрических условий совместности. В зоне контакта решение строится при помощи обобщенной теории Герца, при этом приходится расшифровывать сложные операторные выражения, которые приводят к линейным комбинациям из дробных операторов Ю.Н. Работнова. Такой подход позволяет получить определяющую систему интегро-дифференциальных уравнений относительно перемещения пластинки в зоне контакта и местного смятия материалов пластинки и шара. Полученная система решена приближенно с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса.

Проведен сравнительный анализ результатов ударного взаимодействия шара с вязкоупругой пластинкой типа Уфлянда-Миндлина с учетом и без учета растяжения ее срединной поверхности. Показано, что учет растяжения делает механическую систему «мишень-ударник» более гибкой, что приводит к увеличению максимальных значений локального смятия материалов пластинки и шара в зоне контакта и к увеличению продолжительности контактного взаимодействия при одних и тех же значениях параметра дробности.

В четвертой главе исследуется реакция на низкоскоростной удар предварительно напряженной круглой изотропной упругой пластинки в случае, когда ее динамическое поведение описывается уравнениями, учитывающими инерцию вращения и деформации поперчного сдвига.

Контактное взаимодействие между жестким ударником и мишенью моделируется при помощи обобщенного контактного закона Герца с учетом

зависящих от времени операторов, описывающих жесткость и коэффициент Пуассона материала пластинки, так как предполагается, что вязкоупругие свойства пластины проявляются только внутри зоны контакта и описываются при помощи модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными ввиду того факта, что в процессе удара происходит разрушение межмолекулярных связей внутри зоны контакта пластины и шара, в результате чего возникают более свободные перемещения молекул относительно друг друга и в конечном итоге происходит уменьшение вязкости материала пластины внутри области контакта.

Показано, что при определенной критической величине сжимающей силы скорость нестационарной волны поперечного сдвига равна нулю, в результате чего происходит «запирание» этой волны внутри зоны контакта, что, в свою очередь, ведет к тому, что энергия в процессе удара не рассеивается (как это происходит в случае возникновения и распространения поперечной волны сдвига), а остается внутри зоны контакта, что может привести к разрушению контактной области. Найдено, что для упругой пластины критическая сжимающая сила ведет к увеличению скорости контактного пятна с течением времени, в результате чего происходит отделение жесткой шайбы (зоны контакта) с дальнейшим выталкиванием ее из пластины.

Если внутри зоны контакта проявляется вязкость материала пластины, то она смягчает удар, и в этом случае скорость контактного пятна последовательно растет от нуля до определенной максимальной величины и затем снова уменьшается до нуля. Показано, что при дробном порядке вязкости, максимальную скорость контактной области можно контролировать выбором значением параметра дробности.

В заключении приведены основные результаты диссертационного исследования.

Глава 1. Обзор литературы, посвященной анализу ударных воздействий на тонкие вязкоупругие пластинки

Анализ динамического поведения конструкций при нестационарных воздействиях, к которым в первую очередь относятся удары, имеет важное значение, как с точки зрения фундаментальных исследований, так и инженерных приложений, потому что им подвергаются практически все конструкции и их элементы на различных этапах жизненного цикла: при изготовлении и монтаже, при эксплуатации в нормальных и экстремальных условиях. Физические явления, возникающие в случае ударного воздействия, многообразны и включают в себя структурные изменения материалов, контактные эффекты и распространение нестационарных волн.

Для решения задач динамического контактного взаимодействия в научной литературе предложены разнообразные подходы и методы, обзор которых можно найти в работах [3,8,11,14,16,19,27,25,35,43,58,59,61,62,67-69,73,74,77,78-83,94-96,100-102,104,111-115,119,122,126,127,131,133,135,137,139-141,143,147,149,151,152,159,163,171,174,17,181,183,187]. Анализ этих обзоров и статей позволяет сделать вывод о том, что большинство статей посвящено изучению ударных воздействий по упругим балкам и пластинкам, и только совсем незначительная часть работ освещает вопросы ударного взаимодействия с учетом вязкоупругих свойств соударяющихся тел [35,111,112,127,133,135,171].

В обзоре Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В. [152] отмечается, что постановка задачи ударного взаимодействия включает в себя несколько ключевых аспектов, совокупность которых определяет метод решения поставленной краевой динамической задачи, а именно:

- (а) выбор закона контактного взаимодействия: нелинейный закон Герца [8,11, 50,62,187] или его линейная аппроксимация [67,78-81,141];
- (б) свойства материалов соударяющихся тел: упругие, вязкоупругие, термоупругие, упруго-вязко-пластические;
- (в) учет влияния распространяющихся нестационарных волн приводит к необходимости использования волновой теории удара, т.е. к выбору гиперболических определяющих уравнений для балок типа Тимошенко [50, 178] и для пластин типа Уфлянда-Миндлина [52, 130]; в противном случае используют уравнения балок Бернулли-Эйлера и пластин Кирхгофа-Лява;
- (г) наличие предварительного напряжения в мишени.

Так, схема ударного взаимодействия сферического ударника с упругой пластинкой Кирхгофа-Лява при моделировании ударного процесса при помощи контактного закона Герца приведена на рис. 1.1. В этом случае применяется подход С.П. Тимошенко [178], и задача сводится к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения относительно контактной силы $P(t)$ или локального смятия материала $\alpha(t)$ либо численными методами [50, 187], либо представляя решение в виде степенных рядов [152].

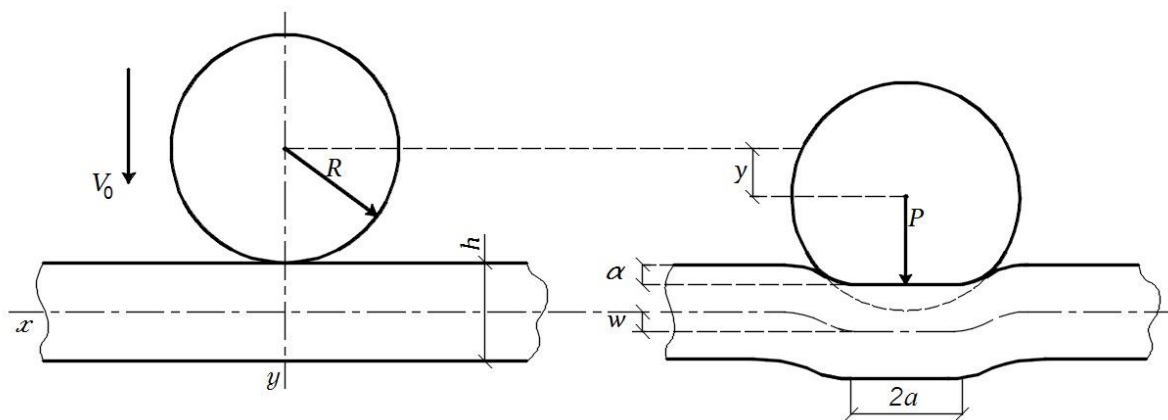


Рис.1.1. Схема ударного взаимодействия сферического ударника с пластинкой Кирхгофа-Лява при моделировании ударного процесса при помощи контактного закона Герца [152]

Волновая теория удара, развитая для упругих пластинок Уфлянда-Миндлина (рис. 1.2а) на основе лучевого метода [143-147,160] в [58], была обобщена на случай учета растяжения срединной поверхности (рис. 1.2б) в [43,147] и подробно изложена в работах [43,149,152].

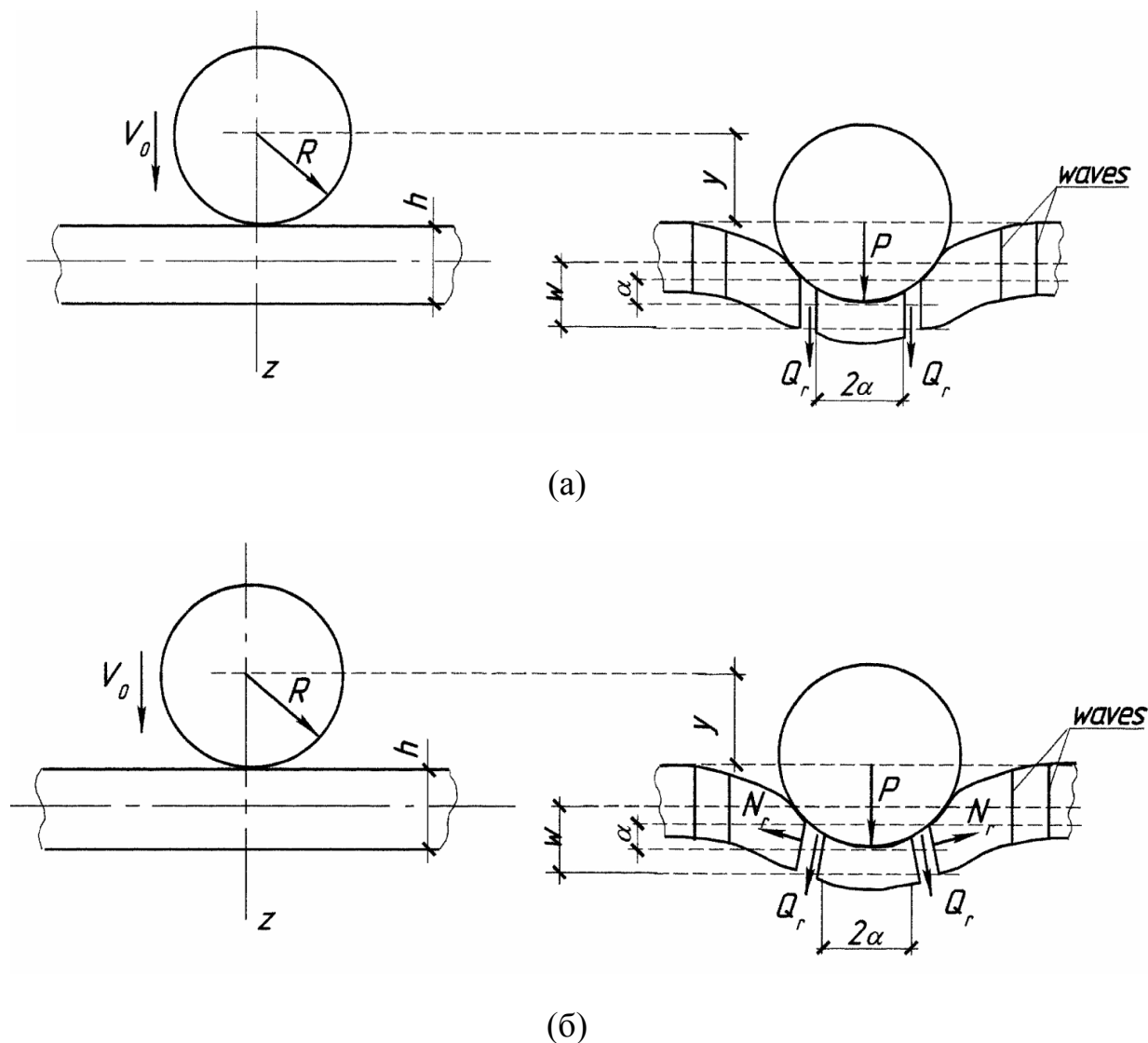


Рис. 1.2. Схема ударного взаимодействия жесткого сферического ударника с пластинкой Уфлянда-Миндлина при моделировании ударного процесса при помощи контактного закона Герца (рисунок приведен из статьи Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В. [152]): (а) без учета и (б) с учетом растяжения ее срединной поверхности

Альтернативным законом контактного взаимодействия может служить линеаризация закона Герца [67,78-81,141,152], когда ударное взаимодействие осуществляется посредством буфера в виде упругой пружины (рис. 1.3). При этом предполагается, что контактное пятно (область контактного взаимодействия ударника и мишени) движется как жесткое целое, а решение за волновыми фронтами вплоть до границы контактной области строится в виде лучевых разложений.

Для учета вязкоупругих свойств соударяющихся тел в работах [45,96] упругая пружина была заменена вязкоупругим элементом Максвелла (рис 1.4).

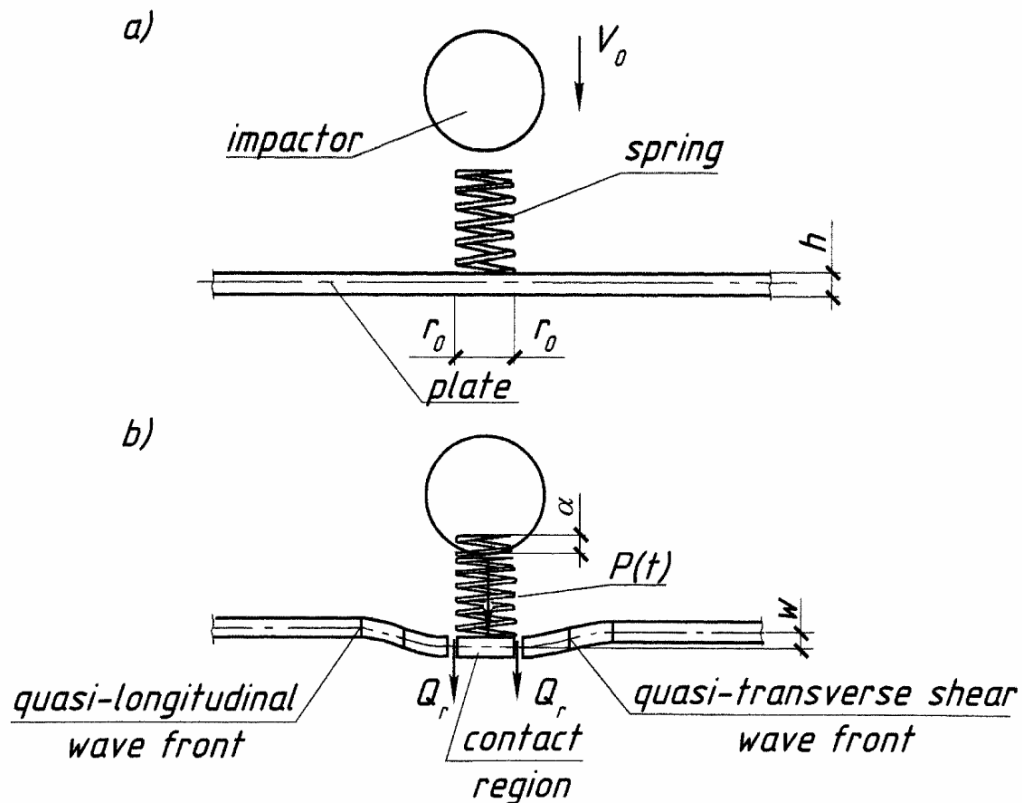


Рис. 1.3. Схема ударного взаимодействия жесткого тела с пластинкой Уфлянда-Миндлина при моделировании ударного процесса при помощи упругого буфера в виде линейно упругой пружины (рисунок приведен из статьи Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В. [152]): (a) – до взаимодействия, (b) – в процессе ударного взаимодействия

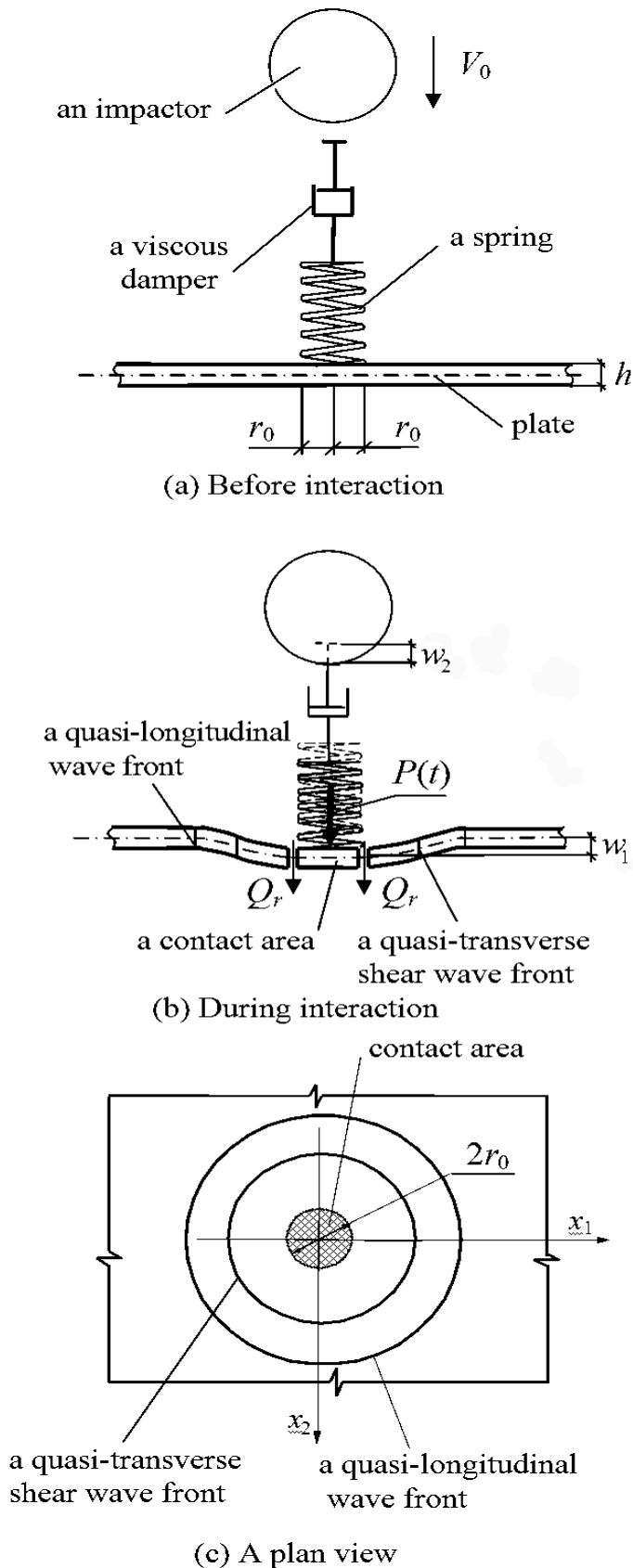


Рис. 1.4. Схема ударного взаимодействия жесткого тела с пластинкой Уфлянда-Миндлина при моделировании ударного процесса при помощи вязкоупругого буфера, поведение которого описывается законом Максвелла (рисунок приведен из статьи Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В. [152]): (a) – до взаимодействия, (b) – в процессе ударного взаимодействия, (c) вид сверху

Задачам демпфирования колебаний и распространению волн в средах с использованием классических моделей вязкоупругости уделяется большое внимание так в России, так и зарубежом [1,15,18,21,35,45,46,56,64,73,77,83,94,99,111,114,137,144,181,183,184]. В том числе такие модели находят применение и в задачах ударного взаимодействия [35,111,112,127,133,135,171].

В настоящее время дробное исчисление, которое позволяет описывать наследственные свойства материалов [7,13,22-26,37-40,42,57], широко применяется в разных областях науки и техники [2,5,6,12,28,29,30-34,36,41,44,48,49,53,55,60,65-72,75,76,82,84-88,90-93,97,98,100,101,116,118,120,121,123-125,128,132,136,138,172-177,179,180,182,185,186], включая различные динамические задачи механики твердого тела и конструкций. История развития первых прикладных исследований, связанных с применением операторов дробного порядка в динамических задачах вязкоупругости, была изложена профессором Россихиным Ю.А. в его ретроспективной статье [142].

Задачи ударного взаимодействия тонкостенных конструкций относятся к наиболее сложным среди прочих динамических задач. Обзор статей, связанных с применением моделей с дробным производными и операторами для решения задач ударного взаимодействия, можно найти в [157-159].

Тем не менее, насколько известно автору, исследование ударного взаимодействия вязкоупругих пластин с применением моделей с дробными производными проводилось лишь в нескольких работах. Так, задачи об ударе упругого стержня или шара по вязкоупругой пластинке Кирхгофа-Лява или вязкоупругой пластине Уфлянда-Миндлина рассматривались в [104] и [155,158,163] соответственно. В случае классической пластинки в качестве метода решения использовался метод построения функции Грина [104]. В случае пластинки Уфлянда-Миндлина применялся лучевой метод, согласно которому решение за фронтами нестационарных волн (поверхностей сильного разрыва) построено в виде отрезков степенных рядов с переменными коэффициентами.

Кроме того, контактная сила в [163] учитывалась согласно контактной теории Герца, а в [155,158] при помощи линейных приближений, позволяющих применить преобразование Лапласа.

Во всех вышеперечисленных статьях растяжение срединной поверхности пластинки, а также вязкоупругие свойства ударника не учитывались. Однако, как показывают экспериментальные исследования поведения гибких тонкостенных конструкций при ударах со средними скоростями [187], вклад растягивающих деформаций в процесс удара является весьма существенным и, следовательно, их необходимо принимать во внимание в расчетах. Так, удар упругих тел по упругим балкам и пластинам с учетом поперечных деформаций и растяжения срединной поверхности рассматривается в [43,150], и недавно этот подход применялся при исследовании динамического поведения вязкоупругой балки Тимошенко при ударе жестким, упругим или вязкоупругим шаром [59, 164].

В работах [59,164,166] вязкоупругие свойства балки описываются моделью стандартного линейного твердого тела с целыми производными по времени. В процессе удара происходит разрушение межмолекулярных связей внутри зоны контакта балки и ударника, в результате чего возникают более свободные перемещения молекул относительно друг друга и в конечном итоге происходит уменьшение вязкости материала балки внутри области контакта. Это обстоятельство позволяет описывать поведение материала балки внутри контактной зоны при помощи модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными, так как изменение параметра дробности (порядка дробной производной) позволяет управлять вязкостью материала балки.

Известно, что вязкоупругие свойства материала могут меняться в течение жизненного цикла конструкции из-за различных внешних причин, среди них старение и ударные нагрузки [139,140], и/или воздействие температуры и

радиации [129]. Динамические механические исследования облученного полиэтилена представлены в работе [129], где было показано влияние радиации на изменение вязкоупругих характеристик полиэтилена. Экспериментальные исследования влияния возраста бетона на контактную силу и время контакта в процессе ударного взаимодействия упругого стержня и вязкоупругой балки приведены в [140], где показана хорошая корреляция с аналитической моделью, предложенной в [139].

Согласно современным обзорам в области динамики удара [61,62,102,119,152] во многих работах предполагается, что ударяемая конструкция не подвергалась никаким начальным напряжениям. Но это не совсем точно отражает действительные разнонаправленные сложные напряженные состояния, которые испытывают материалы в период своей эксплуатации. Подробный обзор статей, в которых учитывается предварительное напряжение мишени при решении динамических задач, изучающих ударное взаимодействие, представлен в работах [54,113,171]. Тем не менее практически не найдено исследований о влиянии вязкоупругости на ударное взаимодействие.

В данной диссертационной работе, выполненной соискателем под руководством профессоров Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В., делается обобщение предыдущих методов и подходов, разработанных в рамках их школы, на решение задач ударного воздействия на вязкоупругие пластинки Уфлянда-Миндлина с учетом растяжения ее срединной поверхности и наличия предварительного напряжения.

Глава 2. Ударное воздействие вязкоупругого шара по упругой пластинке Кирхгофа-Лява, находящейся в вязкоупругой среде Кельвина-Фойгта с дробными производными

В данной главе рассматривается задача низкоскоростного поперечного удара вязкоупругой шара по упругой пластинке Кирхгофа-Лява в вязкоупругой среде, свойства которой описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробными производными.

Результаты исследований, изложенные в данной главе, опубликованы в работах [167,168].

2.1. Предварительные замечания

В настоящее время дробное исчисление широко используется в разных областях науки и техники, включая различные динамические задачи механики твердого тела и конструкций [148,157].

Как правило, в статьях, посвященных динамическому поведению таких вязкоупругих тел, как балки, пластины и мембраны, используется модель Кельвина-Фойгта с дробными производными [70,103-105,109,116]. При этом предполагается, что коэффициент Пуассона не зависит от времени в процессе деформирования, а в качестве известного оператора выбирается оператор Юнга, определяемый по формуле

$$E = E_1 \left(1 + \tau_{\sigma_1}^{\gamma_1} D^{\gamma_1} \right), \quad (1)$$

где E_1 - релаксированный модуль упругости, τ_{σ_1} - время ретардации, γ_1 ($0 < \gamma_1 \leq 1$) - параметр дробности, D^{γ_1} - дробная производная Римана-Луивилля [44,148,157]

$$D^{\gamma_1} x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(t') dt'}{\Gamma(1-\gamma_1)(t-t')^{\gamma_1}}, \quad (2)$$

$\Gamma(1-\gamma_1)$ - гамма-функция, $x(t)$ - произвольная функция.

Однако, если оператор Пуассона $\tilde{\nu}$ считается не зависящей от времени величиной, то этот случай совпадает со случаем динамического поведения упругих тел в вязкоупругой среде [161].

Согласно экспериментальным данным [38,39,99] коэффициент Пуассона всегда является оператором $\tilde{\nu}$, и только оператор объемного расширения-сжатия \tilde{K} может считаться не зависящим от времени, поскольку для большинства вязкоупругих материалов он мало изменяется в процессе деформирования.

С другой стороны, как показано в [161,162], вязкоупругая модель (1) с постоянным оператором объемного расширения-сжатия абсолютно непригодна для описания динамического поведения вязкоупругих тел, а сама модель Кельвина-Фойгта (1) применима только для описания динамического поведения упругих тел в вязкоупругой среде.

Недавно было показано для вязкоупругих балок [59,165], что когда оператор \tilde{E} определяется выражением (1), а оператор Пуассона $\tilde{\nu}$ считается не зависящей от времени величиной, то этот случай совпадает со случаем динамического поведения упругих тел в вязкоупругой среде.

Таким образом, авторы таких статей [70,103-105,109,116] подменяют одну задачу другой, а именно: задачу о динамическом поведении вязкоупругих тел в обычной среде задачей о динамическом поведении упругих тел в вязкоупругой среде.

В данной главе, обобщая подход, изложенный в [59,165], рассмотрим задачу о поперечном ударе вязкоупругого шара по упругой пластинке Кирхгофа-Лява в вязкоупругой среде Кельвина-Фойгта с дробными

производными. При этом вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного твердого тела с дробными производными.

2.2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу поперечного удара вязкоупругой сферы по упругой пластине Кирхгофа-Лява (рис. 1.1), когда вязкоупругие свойства окружающей среды описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробными производными. В этом случае уравнения движения вязкоупругого ударника радиуса R и массы m и упругой прямоугольной пластины с размерами a и b и толщины h записываются в следующем виде:

$$m\ddot{w}_2 = -P(t), \quad (3)$$

$$\frac{D}{\rho h} \nabla^2 w_1 + \frac{\mu}{\rho h} D^{\gamma_1} w_1 + \ddot{w}_1 = \frac{1}{\rho h} P(t) \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \delta\left(y - \frac{b}{2}\right), \quad (4)$$

где $P(t)$ - контактная сила, $\nabla^2 = (\partial / \partial x + \partial / \partial y)^2$, $D = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_1^2)$ - цилиндрическая жесткость, $w_1(x, y, t)$ - прогиб пластины, E_1 , ν_1 и ρ - ее модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность соответственно, x и y - декартовы координаты, $\delta(x - \frac{a}{2})$ - дельта-функция Дирака, точки обозначают производную по времени, μ - коэффициент вязкости, $D^{\gamma_1} w_1$ - дробная производная Римана-Луивилля, определяемая выражением (2).

Второй член в уравнении (4) описывает действие сил внешнего трения, возникающих в окружающей среде Кельвина-Фойгта с дробными производными в процессе колебаний пластины от воздействия контактной силы $P(t)$.

К уравнениям (3) и (4) добавим следующие начальным условия:

$$\begin{aligned} w_1(x, y, 0) = 0, \quad \dot{w}_1(x, y, 0) = 0, \\ w_2(0) = 0, \quad \dot{w}_2(0) = V_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где V_0 - начальная скорость ударника в момент удара.

Дважды интегрируя уравнение (3), получим

$$w_2(t) = -\frac{1}{m} \int_0^t P(t')(t-t') dt' + V_0 t. \quad (6)$$

Раскладывая перемещение $w_1(x, y, t)$ шарнирно-опертой пластины Кирхгофа-Лява по собственным функциям

$$w_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (7)$$

и подставляя (7) в (4) с учетом ортогональности синусов на отрезках $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, получим бесконечную систему несвязанных уравнений

$$\ddot{x}_{mn}(t) + \frac{\mu_{mn}}{\rho h} D^{\gamma_1} x_{mn}(t) + \Omega_{mn}^2 x_{mn}(t) = F_{mn} P(t), \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

где μ_{mn} - коэффициент вязкости гармоники с индексами m и n , $x_{mn}(t)$ - обобщенные перемещения, Ω_{mn} - собственная частота mn -той гармоники

$$\Omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2$$

и

$$F_{mn} = \frac{1}{\rho h} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2}.$$

С учетом гипотезы Рэлея о пропорциональности между упругой и вязкой матрицами, т.е.,

$$\frac{\mu_{mn}}{\rho h} = \Omega_{mn}^2 \tau_{\sigma_1}^{\gamma_1}, \quad (9)$$

где $\tau_{\sigma_1}^{\gamma_1}$ - коэффициент пропорциональности, уравнение (8) принимает вид

$$\ddot{x}_{mn}(t) + \Omega_{mn}^2 (1 + \tau_{\sigma_1}^{\gamma_1} D^{\gamma_1}) x_{mn}(t) = F_{mn} P(t). \quad (10)$$

Уравнение (10) описывает вынужденные колебания осциллятора Кельвина-Фойгта с дробной производной [148,157].

2.3 Функция Грина для модели Кельвина-Фойгта с дробными производными

Для того, чтобы получить решение уравнения (4), необходимо определить функцию Грина $G_{mn}(t)$ для каждой формы колебаний осциллятора (10)

$$G_{mn}(t) = A_{0mn}(t) + A_{mn} e^{-\alpha_{mn} t} \sin(\omega_{mn} t - \varphi_{mn}), \quad (11)$$

где индексы mn обозначают порядковый номер осциллятора, и все величины, входящие в (11), имеют ту же структуру и тот же физический смысл, что и соответствующие величины, обсуждаемые в [148,157], т.е. A_{mn} - амплитуда, α_{mn} - коэффициент демпфирования, а ω_{mn} и φ_{mn} - частота и фаза колебаний соответственно.

Из соотношения (11) следует, что функция Грина является суммой двух слагаемых, одно из которых $A_{0mn}(t)$ описывает дрейф положения равновесия и определяется интегралом, включающим функцию распределения динамических и реологических параметров [148,157], в то время как второе слагаемое является произведением двух функций, зависящих от времени, экспоненты и синусоиды, и описывает затухающие колебания вокруг дрейфующего положения равновесия.

Перепишем уравнение (10) с помощью функции Грина $G_{mn}(t)$

$$\ddot{G}_{mn}(t) + \Omega_{mn}^2 \tau_{\sigma_1}^{\gamma_1} D^{\gamma_1} G_{mn}(t) + \Omega_{mn}^2 G_{mn}(t) = F_{mn} \delta(t) \quad (m, n = 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Применяя преобразования Лапласа к уравнению (12), получим

$$\bar{G}_{mn} = \frac{F_{mn}}{p^2 + \kappa_{mn} p^{\gamma_1} + \Omega_{mn}^2}, \quad (13)$$

где черта обозначает трансформанту Лапласа соответствующей функции, p - параметр преобразования и $\kappa_{mn} = \Omega_{mn}^2 \tau_{\sigma_1}^{\gamma_1}$.

Если опустить номера m и n в уравнении (13), тогда оно будет совпадать с формулой (2.2.1) раздела 2.2 [148], посвященного колебаниям осциллятора Кельвина-Фойгта с дробными производными. Все дальнейшие формулы этого раздела (2.2.2)-(2.2.6) относятся к анализу корней характеристического уравнения

$$p^2 + \kappa_{mn} p^{\gamma_1} + \Omega_{mn}^2 = 0, \quad (14)$$

которое при каждой паре m и n имеет два комплексно сопряженных корня $(p_{mn})_{1,2} = r_{mn} e^{\pm i\psi_{mn}} = -\alpha_{mn} \pm i\omega_{mn}$ (см. расположение корней при $m=1, n=1$ на Рис.19 в [148]), и обращение функции (13) на первом листе римановой поверхности. Если добавить индексы m и n в эти формулы, получим искомое соотношение (11), где функция $A_{0mn}(t)$ описывает дрейф положения равновесия

$$A_{0mn}(t) = \int_0^\infty \tau^{-1} B_{mn}(\tau, \kappa_{mn}) e^{-t/\tau} d\tau, \quad (15)$$

а функция $B_{mn}(\tau, \kappa_{mn})$

$$B_{mn}(\tau, \kappa_{mn}) = \frac{\sin \pi \gamma_1}{\pi} F_{mn} \tau [\theta_{mn}(\tau)]^{-1} \left\{ [\theta_{mn}(\tau)]^{-1} \kappa_{mn}^{-1} \tau^{\gamma_1 - 2} + \theta_{mn}(\tau) \kappa_{mn} \tau^{2 - \gamma_1} + 2 \cos \pi \gamma_1 \right\}$$

дает распределение параметров ползучести (ретардации) динамической системы, $\theta_{mn}(\tau) = \tau^2 \Omega_{mn}^2 + 1$, амплитуда A_{mn} и фаза φ_{mn} колебаний определяются соответственно как

$$A_{mn} = 2F_{mn} \left[4r_{mn}^2 + \gamma_1^2 \kappa_{mn}^2 r_{mn}^{2(\gamma_1 - 1)} + 4\gamma_1 \kappa_{mn} r_{mn}^{\gamma_1} \cos(2 - \gamma_1) \psi_{mn} \right]^{-1/2},$$

$$\tan \varphi_{mn} = - \frac{2r_{mn} \cos \psi_{mn} + \gamma_1 \kappa_{mn} r_{mn}^{\gamma_1 - 1} \cos(1 - \gamma_1) \psi_{mn}}{2r_{mn} \sin \psi_{mn} - \gamma_1 \kappa_{mn} r_{mn}^{\gamma_1 - 1} \sin(1 - \gamma_1) \psi_{mn}}.$$

2.4. Определение контактной силы

Зная функцию Грина, решение уравнения (2) принимает вид

$$w_1(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \int_0^t G_{mn}(t-t') P(t') dt'. \quad (16)$$

Введем теперь в рассмотрение величину, характеризующую относительное сближение шара и пластинки, т.е. проникновение упругой сферы в упругую пластину или локальное смятие материалов ударника и мишени

$$y(t) = w_2(t) - w_1\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right), \quad (17)$$

которая связана с контактной силой при помощи обобщенного закона Герца

$$P(t) = ky^{3/2}, \quad (18)$$

где

$$k = \frac{4}{3} \sqrt{RE'} \quad (19)$$

- оператор, зависящий от геометрии и вязкоупругих свойств ударника и упругих свойств мишени, которые согласно принципу соответствия Вольтерра описываются оператором E'

$$\frac{1}{E'} = J' = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}, \quad (20)$$

и ν_2 и E_2 - операторы для вязкоупругой шара (ударника).

Для получения интегро-дифференциального уравнения для величин $y(t)$ и $P(t)$, необходимо определить вид оператора E_2 .

Предположим, что вязкоупругие свойства материала ударника описываются моделью стандартного линейного твердого тела с дробными производными, т.е. оператор E_2 записывается в виде

$$\sigma + \tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} D^{\gamma_2} \sigma = E_0 \left(\varepsilon + \tau_{\sigma_2}^{\gamma_2} D^{\gamma_2} \varepsilon \right), \quad (21)$$

где γ_2 - параметр дробности ударника, τ_{ε_2} и τ_{σ_2} - время релаксации и ретардации соответственно и E_0 - релаксированное значение модуля упругости материала ударника.

Следуя работам Ю.Н. Работнова [38,39] и Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой [159], предположим, что объемный модуль материала ударника является постоянной величиной, т.е.

$$\frac{E_2}{1 - 2\nu_2} = \frac{E_\infty}{1 - 2\nu_\infty}, \quad (22)$$

где E_∞ и ν_∞ - нерелаксированные значения модуля упругости и коэффициента Пуассона для материала ударника соответственно.

Из (22) можно найти [159], что зависящий от времени оператор Пуассона записывается в виде

$$\nu_2 = \nu_\infty + \frac{1}{2}(1 - 2\nu_\infty) \nu_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right), \quad (23)$$

где $\mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right)$ - безразмерный дробный оператор Ю.Н. Работнова [159, 161]

$$\mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_{i_2}^{\gamma_2} \right) = \frac{1}{1 + \tau_{i_2}^{\gamma_2} D^{\gamma_2}} \quad (i = \varepsilon, \sigma) \quad (24)$$

и

$$E_2^* = E_\infty \left[1 - \nu_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right) \right] \quad (25)$$

и имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
v_\sigma &= \frac{J_0 - J_\infty}{J_\infty} = \frac{E_\infty - E_0}{E_0}, \\
v_\varepsilon &= \frac{J_0 - J_\infty}{J_0} = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty}, \\
\frac{v_\varepsilon}{v_\sigma} &= \frac{J_\infty}{J_0} = \frac{E_0}{E_\infty} = \frac{\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2}}{\tau_{\sigma_2}^{\gamma_2}},
\end{aligned} \tag{26}$$

где J_0 и J_∞ - релаксированная и нерелаксированная податливости соответственно.

Используя алгебру безразмерных дробных операторов Ю.Н. Работнова, развитую недавно в работах [159,161], можно найти оператор $(1 - v_2^2)E_2^{-1}$

$$\frac{1 - v_2^2}{E_2} = \frac{1 - v_\infty^2}{E_\infty} \left[1 + \frac{(1 - 2v_\infty)^2 v_\varepsilon}{4(1 - v_\infty^2)} \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right) + \frac{3v_\sigma}{4(1 - v_\infty^2)} \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_{\sigma_2}^{\gamma_2} \right) \right]. \tag{27}$$

Подставляя оператор (27) в соотношение (20), получим

$$\frac{1}{E'} = \frac{1 - v_1^2}{E_1} + \frac{1 - v_\infty^2}{E_\infty} + \frac{(1 - 2v_\infty)^2 v_\varepsilon}{4E_\infty} \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right) + \frac{3v_\sigma}{4E_\infty} \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_{\sigma_2}^{\gamma_2} \right). \tag{28}$$

Теперь подставляя (28) в контактный закон (18) с учетом уравнений (6), (16) и (17), получаем интегральное уравнение для определения контактной силы

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{3}{4\sqrt{R}} \right)^{2/3} \left[\left(\frac{1 - v_1^2}{E_1} + \frac{1 - v_\infty^2}{E_\infty} \right) P(t) + \frac{(1 - 2v_\infty)^2}{4E_\infty} \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t - t'}{\tau_{\varepsilon_2}} \right) P(t') dt' + \right. \\
&\left. + \frac{3v_\sigma}{4E_\infty} \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t - t'}{\tau_{\sigma_2}} \right) P(t') dt' \right]^{2/3} = -\frac{1}{m} \int_0^t P(t')(t - t') dt' + V_0 t - \\
&- \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{m\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \int_0^t G_{mn}(t - t') P(t') dt',
\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t}{\tau_{i2}} \right) = \frac{t^{\gamma_2-1}}{\tau_{i2}^{\gamma_2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau_{i2})^{\gamma_2 n}}{\Gamma[\gamma_2(n+1)]} \quad (30)$$

- дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова [37], которая при $\gamma = 1$ переходит в обычную экспоненту, т.е.

$$\mathfrak{E}_1^*(\tau_i)x(t) = \frac{1}{\tau_i} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_i}\right) x(t') dt'. \quad (31)$$

2.5. Определение местного смятия

Для того чтобы найти уравнение для определения функции $y(t)$, необходимо использовать соотношение (17) с учетом (6), (16), (18) и (19). Так как формула (19) содержит оператор k , то для построения решения нужно найти обратный оператор $k^{-1} = \frac{3}{4\sqrt{R}} E'^{-1}$, где оператор E'^{-1} определяется уравнением (28). Как показано в [159,161], оператор k , входящий в (17), имеет вид

$$k = \frac{4\sqrt{R}}{3} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} = \frac{4\sqrt{R}}{3d} \left[1 - e_1 \mathfrak{E}_\gamma^*(t_1^{\gamma_2}) - e_2 \mathfrak{E}_\gamma^*(t_2^{\gamma_2}) \right], \quad (32)$$

где

$$t_{1,2}^{-\gamma} = \frac{1}{2} \left[\frac{1+g_1}{\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2}} + \frac{1+g_2}{\tau_{\sigma_2}^{\gamma_2}} \right] \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{1+g_1}{\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2}} - \frac{1+g_2}{\tau_{\sigma_2}^{\gamma_2}} \right]^2 + \frac{4g_1g_2}{\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2}\tau_{\sigma_2}^{\gamma_2}}},$$

$$d = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_\infty^2}{E_\infty},$$

$$g_1 = \frac{(1-2\nu_\infty)^2 \nu_\varepsilon}{4E_\infty}, \quad g_2 = \frac{3\nu_\sigma}{4E_\infty},$$

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{b_2 - a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} > 0, & e_2 &= \frac{a_1 - b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} > 0, \\
a_1 &= \frac{t_1^{-\gamma_2}}{t_1^{-\gamma_2} - \tau_{\varepsilon_2}^{-\gamma_2}} > 0, & a_2 &= \frac{t_2^{-\gamma_2}}{t_2^{-\gamma_2} - \tau_{\varepsilon_2}^{-\gamma_2}} > 0, \\
b_1 &= \frac{t_1^{-\gamma_2}}{t_1^{-\gamma_2} - \tau_{\sigma_2}^{-\gamma_2}} < 0, & b_2 &= \frac{t_2^{-\gamma_2}}{t_2^{-\gamma_2} - \tau_{\sigma_2}^{-\gamma_2}} > 0.
\end{aligned}$$

Теперь с учетом (32) нелинейное интегральное уравнение для определения величины $y(t)$ принимает вид

$$\begin{aligned}
y(t) &= V_0 t - \frac{4\sqrt{R}}{3dm} \int_0^t [y^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^2 e_j \int_0^{t'} \mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t' - t''}{t_j} \right) y^{3/2}(t'') dt''] (t - t') dt' - \\
&\quad - \frac{4\sqrt{R}}{3d} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \int_0^t G_{mn}(t - t') [y^{3/2}(t') - \\
&\quad - \sum_{j=1}^2 e_j \int_0^{t'} \mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t' - t''}{t_j} \right) y^{3/2}(t'') dt''] dt'. \tag{33}
\end{aligned}$$

Так как процесс ударного взаимодействия является кратковременным, т.е. при выполнении условия $t / \tau_j \ll 1$ то, как это было показано в классических работах К.С. Cole и Р.Н. Cole [188] и Ю.Н. Работнова [39], дробно-экспоненциальную функцию Ю.Н. Работнова (30) можно с достаточной точностью заменить более простым выражением

$$\mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t}{t_j} \right) \approx \frac{t^{\gamma_2 - 1}}{t_j^{\gamma_2} \Gamma(\gamma_2)} \quad (j = 1, 2), \tag{34}$$

т.е. учесть первый член ряда в формуле (30). Более того, из (34) следует, что

$$\mathfrak{E}_\gamma^* (\tau^\gamma) \approx \tau^{-\gamma} I^\gamma,$$

где I^γ - дробный интеграл.

Тогда функция Грина $G_{mn}(t)$, которая стремится к нулю при $t = 0$, согласно предельной теореме

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \bar{G}_{mn}(p)p = G(0) = 0, \quad (35)$$

записывается в виде

$$G_{mn}(t) \approx tA_{mn}\omega_{mn} \cos \varphi_{mn}. \quad (36)$$

С учетом соотношений (34)-(36), уравнение (33) сводится к

$$y(t) = V_0 t - \frac{4\sqrt{R}}{3d} \left(\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \omega_{mn} \cos \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \int_0^t [y^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^2 \frac{e_j}{t_j^{\gamma_2} \Gamma(\gamma_2)} \int_0^{t'} (t'-t'')^{\gamma_2-1} y^{3/2}(t'') dt''] (t-t') dt'. \quad (37)$$

2.6. Приближенное решение и частные случаи

В качестве первого приближения функции $y(t)$ может быть использовано выражение

$$y = V_0 t. \quad (38)$$

Учитывая (33) и соотношение

$$\left(1 - \frac{t''}{t'} \right)^{\gamma_2} \approx 1 - \gamma_2 \frac{t''}{t'},$$

можем посчитать интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{t'} (t'-t'')^{\gamma_2-1} y^{3/2}(t'') dt'' &= -\frac{V_0^{3/2}}{\gamma_2} \int_0^{t'} (t'')^{3/2} d(t'-t'')^{\gamma_2} = \\ &= \frac{3V_0^{3/2}}{\gamma_2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma_2 \right) (t')^{3/2+\gamma_2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Теперь подставляя (38) и (39) в правую часть выражения(37), получим

$$y(t) = V_0 t - \frac{4}{35} \Delta_{\gamma_1} V_0^{3/2} t^{7/2} + 3\Delta_{\gamma_1} \delta_{\gamma_2} V_0^{3/2} \frac{(1/3 - 1/5\gamma_2)t^{7/2+\gamma_2}}{\gamma_2(5/2 + \gamma_2)(7/2 + \gamma_2)}, \quad (40)$$

где

$$\Delta_{\gamma_1} = \frac{4\sqrt{R}}{3d} \left(\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \omega_{mn} \cos \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \right),$$

$$\delta_{\gamma_2} = \frac{1}{\Gamma(\gamma_2)} \sum_{j=1}^2 \frac{e_j}{t_j^{\gamma_2}}.$$

Частный случай при $\gamma_2 \rightarrow 0$

Так как при $\gamma_2 \rightarrow 0$ величина $\sum_{j=1}^2 e_j = 0$ [159], то соотношение (40)

принимает вид

$$y(t) = V_0 t - \frac{4}{35} \Delta_{\gamma_1} V_0^{3/2} t^{7/2}. \quad (41)$$

Формула (41) справедлива для случая низкоскоростного поперечного удара упругого шара по упругой пластинке в вязкоупругой среде, т.е. с учетом внешнего трения окружающей среды. Из выражения (41) можно определить продолжительность контакта путем приравнивания $y(t)$ к нулю. В результате получим

$$t_{cont}^{(0)} = \left(\frac{35}{4 \Delta_{\gamma_1} \sqrt{V_0}} \right)^{2/5}. \quad (42)$$

Приравнивая dy/dt к нулю, получим значение величины $t = t_{max}^{(0)}$, при котором $y(t)$ принимает свое максимальное значение $y_{max}^{(0)}$

$$t_{max}^{(0)} = \left(\frac{5}{2 \Delta_{\gamma_1} \sqrt{V_0}} \right)^{2/5}. \quad (43)$$

В результате имеем

$$y_{max}^{(0)} = \frac{5}{7} V_0 t_{max}^{(0)}. \quad (44)$$

Случай, когда $\gamma_2 \neq 0$. Теперь рассмотрим случай, когда $\gamma_2 \neq 0$. Предполагая, что в этом случае все характеристические величины мало отличаются от соответствующих величин при $\gamma_2 = 0$, получим

$$t_{cont}^{(\gamma_2)} = t_{cont}^{(0)} \left[1 + \frac{15}{2} \delta_{\gamma_2} (t_{cont}^{(0)})^{\gamma_2} \frac{1/3 - 1/5\gamma_2}{\gamma_2(5/2 + \gamma_2)(7/2 + \gamma_2)} \right], \quad (45)$$

$$t_{max}^{(\gamma_2)} = t_{max}^{(0)} \left[1 + 3\delta_{\gamma_2} (t_{max}^{(0)})^{\gamma_2} \frac{1/3 - 1/5\gamma_2}{\gamma_2(5/2 + \gamma_2)} \right], \quad (46)$$

$$y_{max}^{(\gamma_2)} = y_{max}^{(0)} + \frac{15}{2} \delta_{\gamma_2} V_0 (t_{max}^{(0)})^{1+\gamma_2} \frac{1/3 - 1/5\gamma_2}{\gamma_2(5/2 + \gamma_2)(7/2 + \gamma_2)}. \quad (47)$$

Частный случай при $\gamma_2 = 1$. В предельном случае $\gamma_2 = 1$, т.е. в случае обычной вязкости, формулы (45)-(47) принимают вид

$$t_{cont}^{(1)} = t_{cont}^{(0)} \left(1 + \frac{4}{63} \delta_1 t_{cont}^{(0)} \right), \quad (48)$$

$$t_{max}^{(1)} = t_{max}^{(0)} \left(1 + \frac{4}{35} \delta_1 t_{max}^{(0)} \right), \quad (49)$$

$$y_{max}^{(1)} = y_{max}^{(0)} + \frac{4}{63} \delta_1 V_0 t_{max}^{(0)}, \quad (50)$$

где $\delta_1 = \delta_{\gamma_2} |_{\gamma_2=1}$.

Согласно вышеприведенным формулам увеличение параметра дробности γ_2 от 0 до 1 ведет к увеличению вязкости ударника от нуля до ее максимального значения, в результате чего происходит увеличение таких характеристических величин, как (а) время контакта, (б) время, при котором величина проникновения ударника достигает своего максимального значения, и (г) максимальное значение местного смятия материалов ударника и мишени. Перечисленные величины увеличиваются от значений $t_{cont}^{(0)}$, $t_{max}^{(0)}$, $y_{max}^{(0)}$ до $t_{cont}^{(1)}$, $t_{max}^{(1)}$, $y_{max}^{(1)}$ соответственно.

2.7. Численные исследования

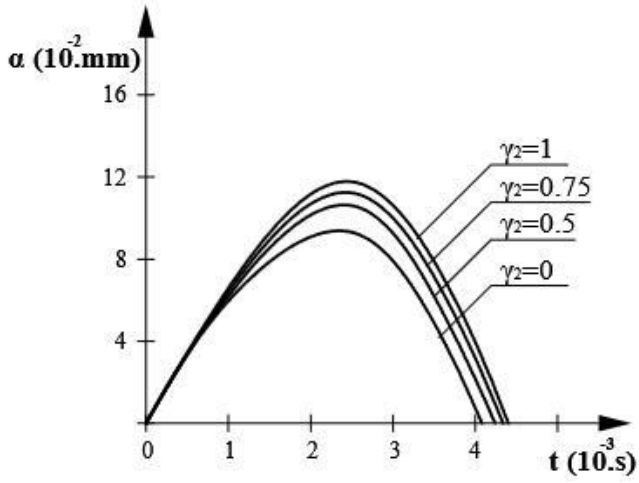
В качестве примера рассмотрим ударное взаимодействие железобетонной пластинки ($E_1 = 120.7 \text{ ГПа}$, $\tau_{\sigma 1} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, $\rho = 2400 \text{ кг/м}^3$, $\sigma_1 = 0.35$) с медным шаром ($E_\infty = 120.7 \text{ ГПа}$, $\tau_{\sigma 2} = 10^{-3} \text{ с}$, $\tau_{\varepsilon 2} = 10^{-4} \text{ с}$, $\rho = 7680 \text{ кг/м}^3$, $\sigma_1 = 0.2$).

На рис. 2.1-2.18 приведены временные зависимости локально смятия и контактной силы для различных значений параметра дробности γ_2 , которые обозначены цифрами около соответствующих кривых, и различных сочетаний начальной скорости удара, радиуса ударника и толщины пластинки при фиксированном значении параметра дробности $\gamma_1 = 0$ (рис. 1-6), 0.5 (рис. 7-12), 1 (рис. 13-18).

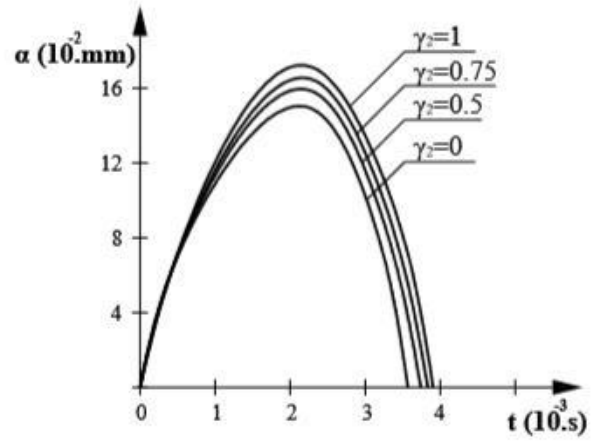
Из рис. 2.1-2.18 видно, что при увеличении параметра γ_2 от 0, что соответствует упругому материалу ударника, до 1, что отвечает вязкоупругому материалу, свойства которого описываются моделью стандартного линейного тела с обычной производной, максимальное значение контактной силы уменьшается, а время контакта растет. Увеличение толщины пластинки приводит к увеличению как максимального значений контактной силы, так и продолжительности контакта. Из рисунков следует, что чем больше начальная скорость удара, тем больше контактная сила и меньше время контакта. Увеличение радиуса ударника, т.е. его массы, приводит к уменьшению и контактной силы, и продолжительности контакта.

Из рис. 2.1 – 2.18 также следует, что при увеличении обоих параметров дробности от 0 до 1 время контакта, время, при котором локальное смятие достигает максимального значения, и уровень этого максимума возрастают.

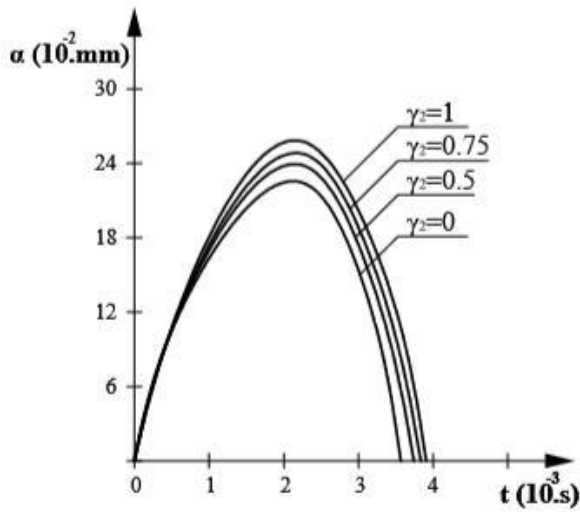
а)



б)



в)



г)

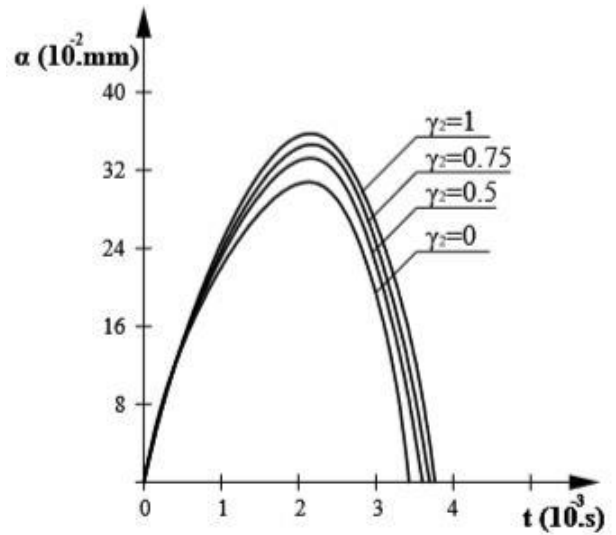
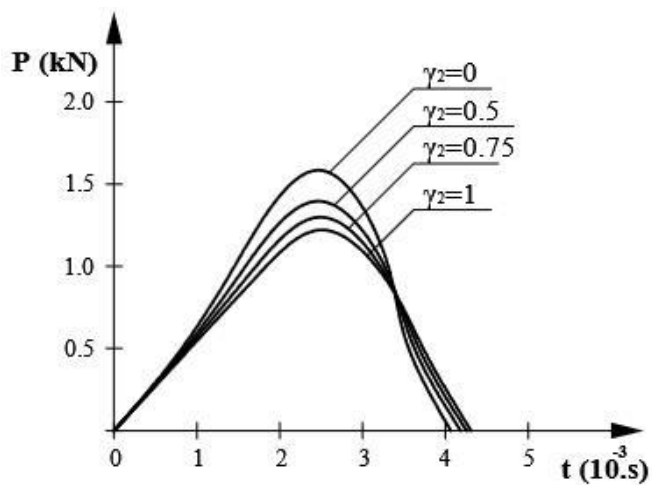
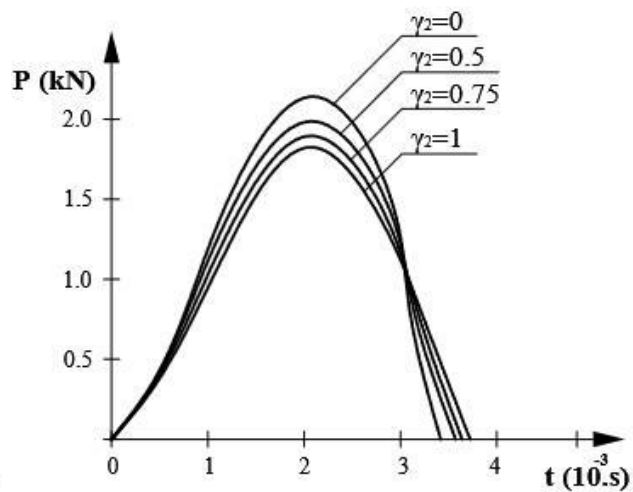


Рис. 2.1. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma_1=0$, $R=2\text{см}$, $h=12\text{мм}$ и начальной скорости удара V_0 : а) 5м/с, б) 10м/с, в) 15м/с, г) 20м/с

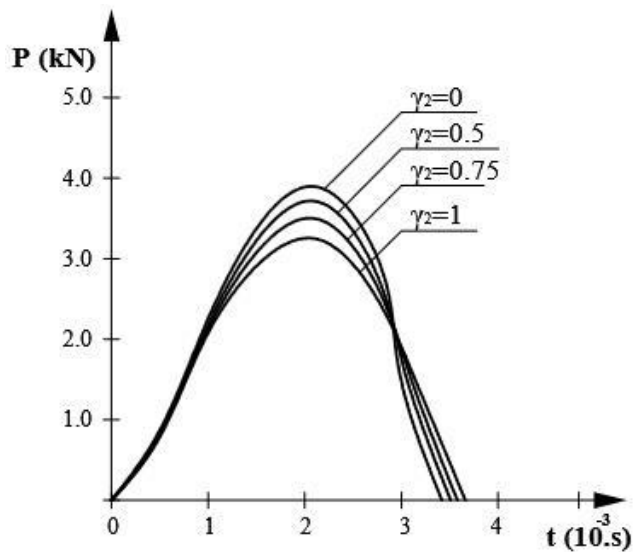
а)



б)



в)



г)

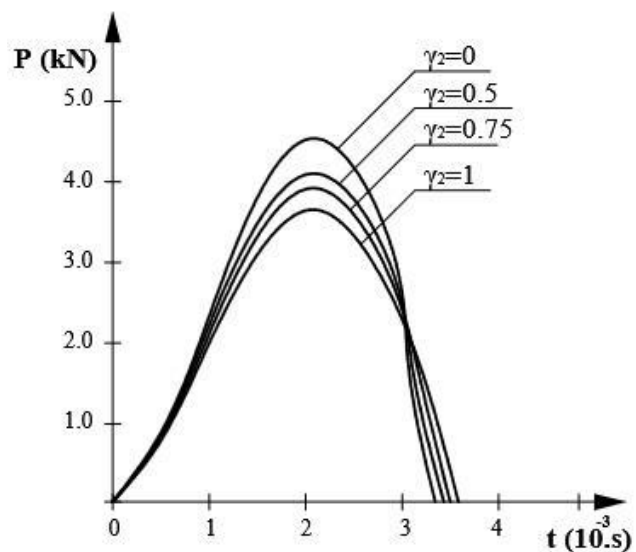
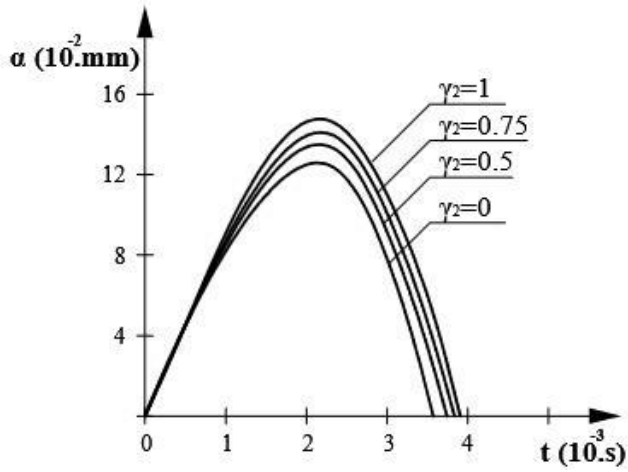
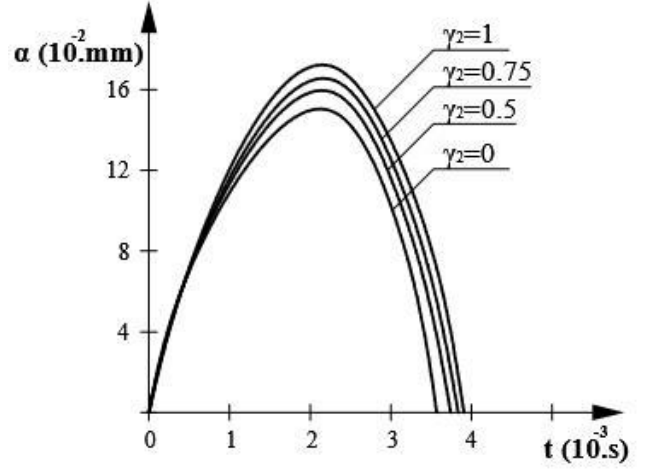


Рис. 2.2. Зависимость контактной силы от времени в случае $\gamma_1=0$, $R=2\text{см}$, $h=12\text{мм}$ и начальной скорости удара V_0 : а) 5м/с , б) 10м/с , в) 15м/с , г) 20м/с .

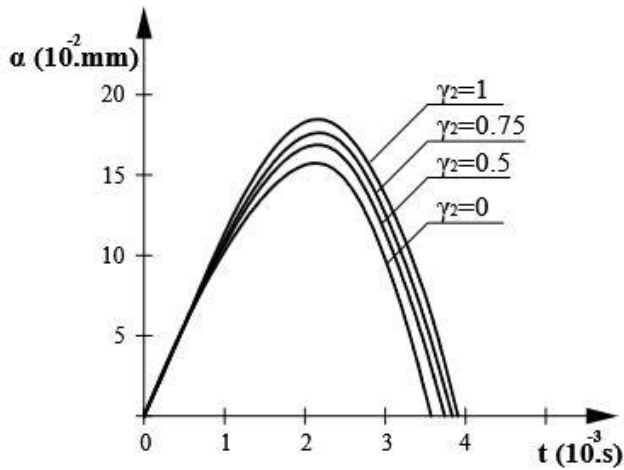
а)



б)



в)



г)

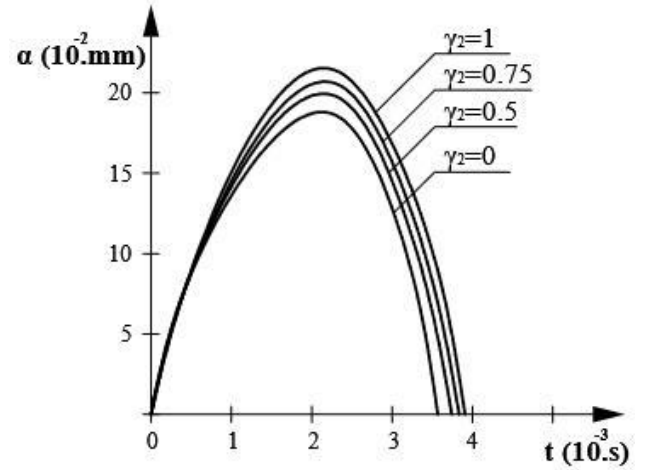
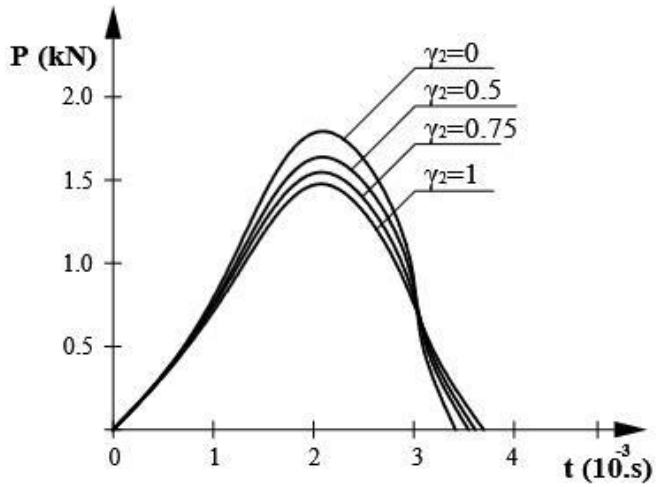
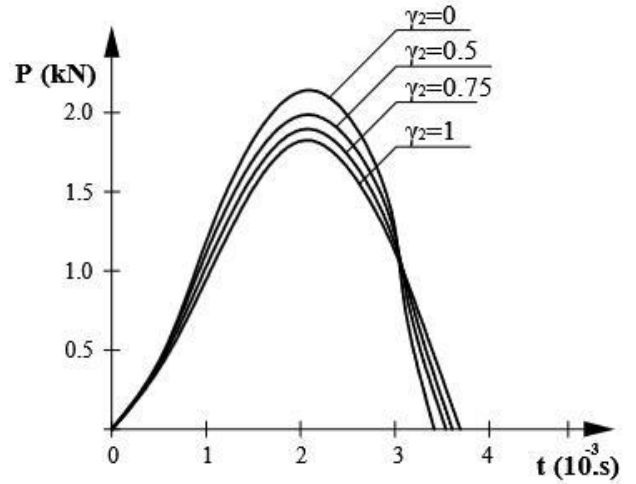


Рис. 2.3. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma_1=0$, начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$, $h=12\text{мм}$ с радиусом ударника R : а) 1 см, б) 2 см, в) 3 см, г) 4 см

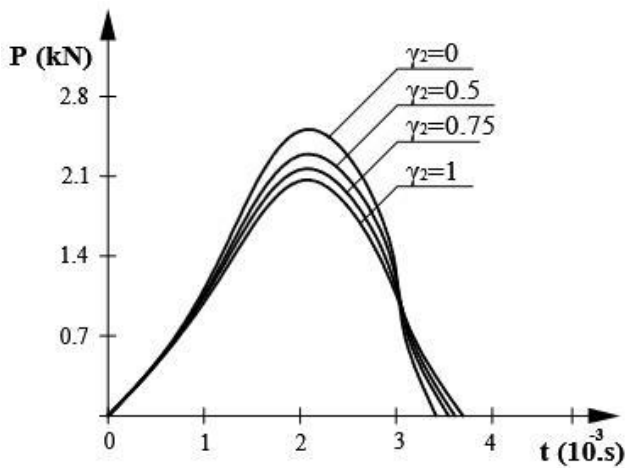
а)



б)



в)



г)

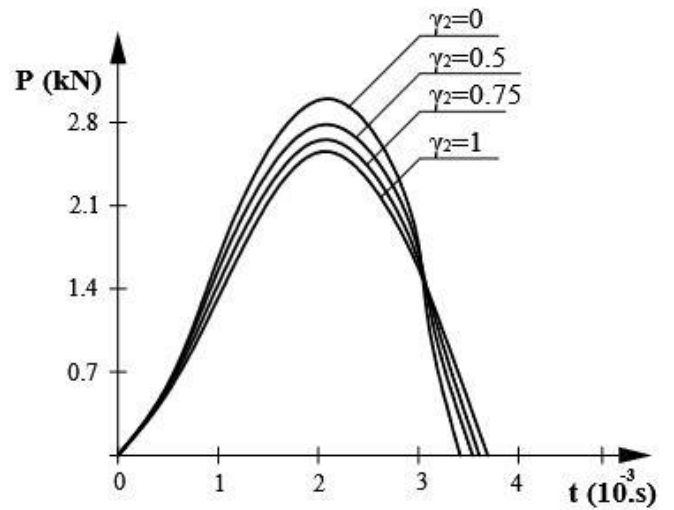
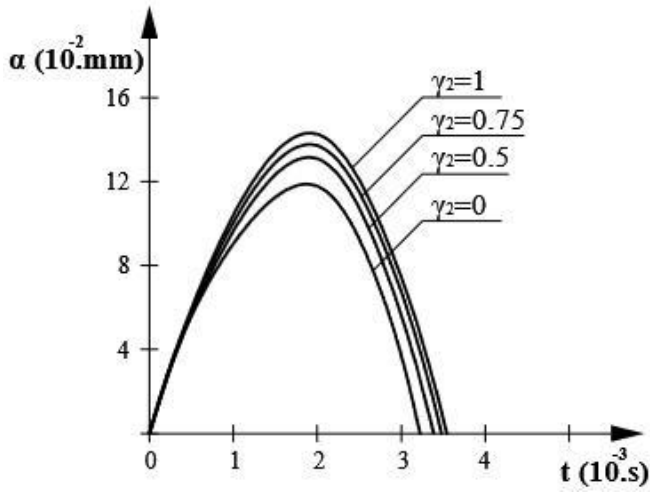
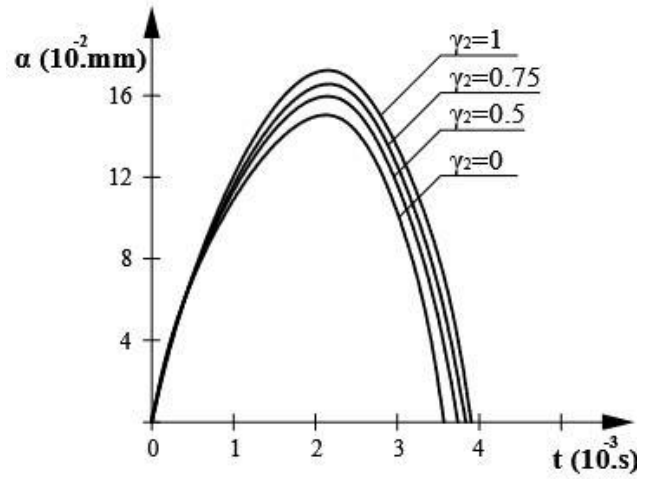


Рис. 2.4. Зависимость контактной силы от времени в случае $\gamma_1=0$, начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$, $h=12\text{мм}$ с радиусом ударника R : а) 1 см, б) 2 см, в) 3 см, г) 4 см

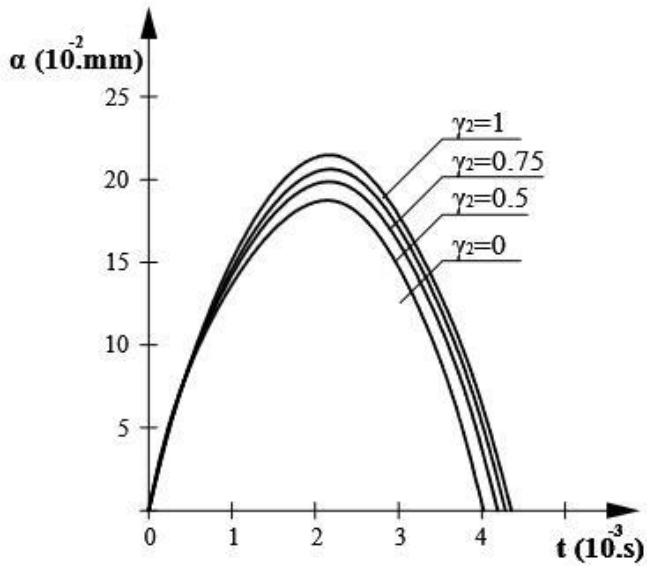
а)



б)



в)



г)

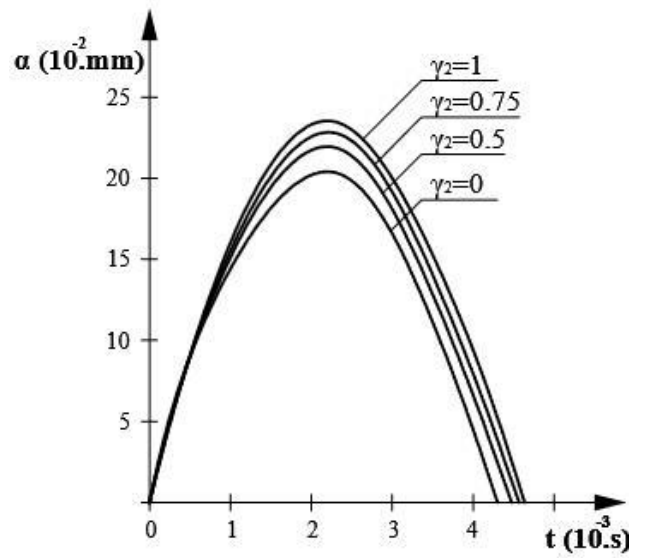


Рис. 2.5. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma_1=0$, начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$, $R=2\text{см}$, для пластинки толщиной h : а) 8мм, б) 12мм, в) 16мм, г) 20мм

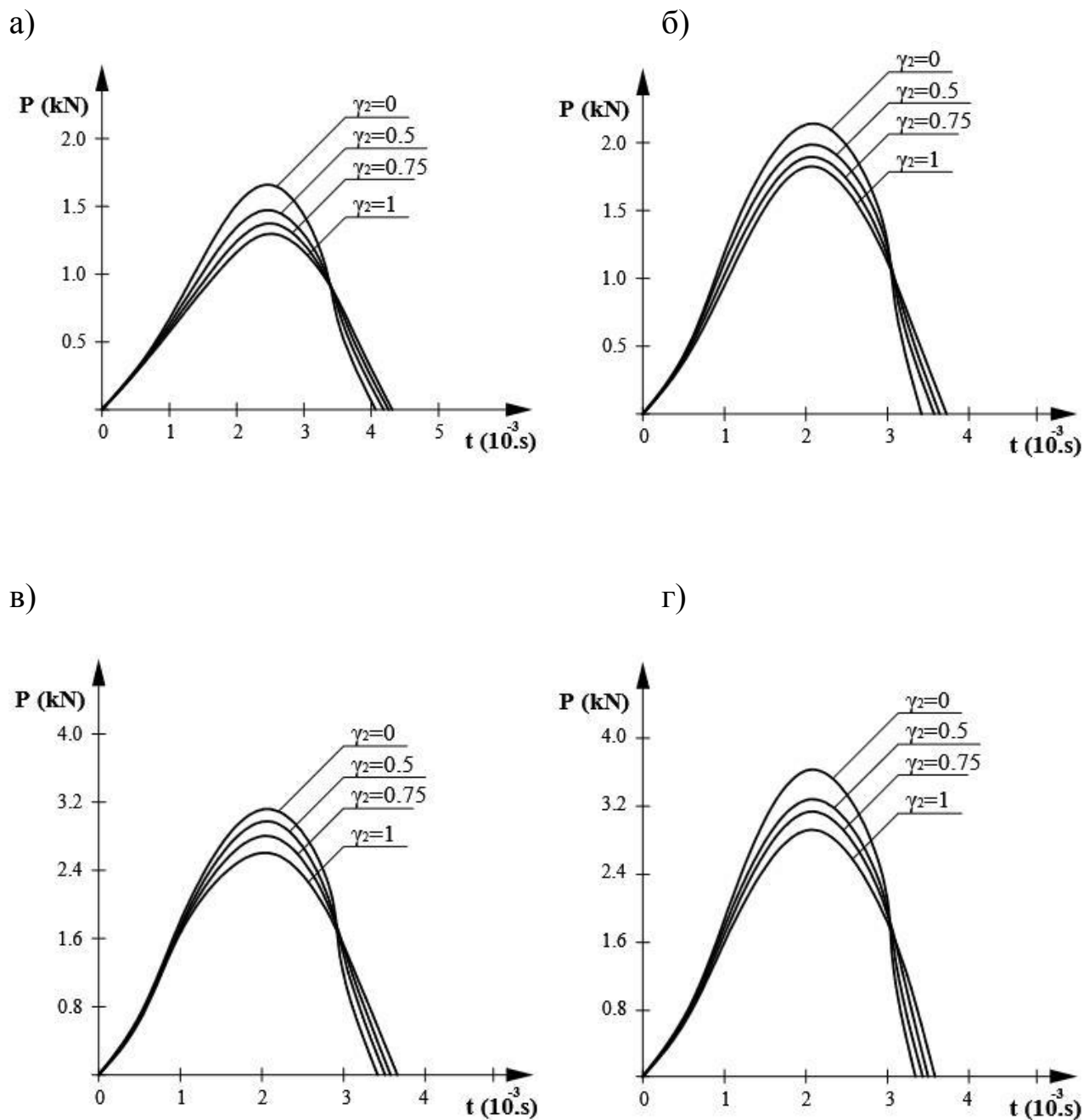


Рис. 2.6. Зависимость контактной силы от времени в случае $\gamma_1=0$, начальной скорости удара $V_0=10$ м/с, $R=2$ см, для пластинки толщиной h : а) 8 мм, б) 12 мм, в) 16 мм, г) 20 мм

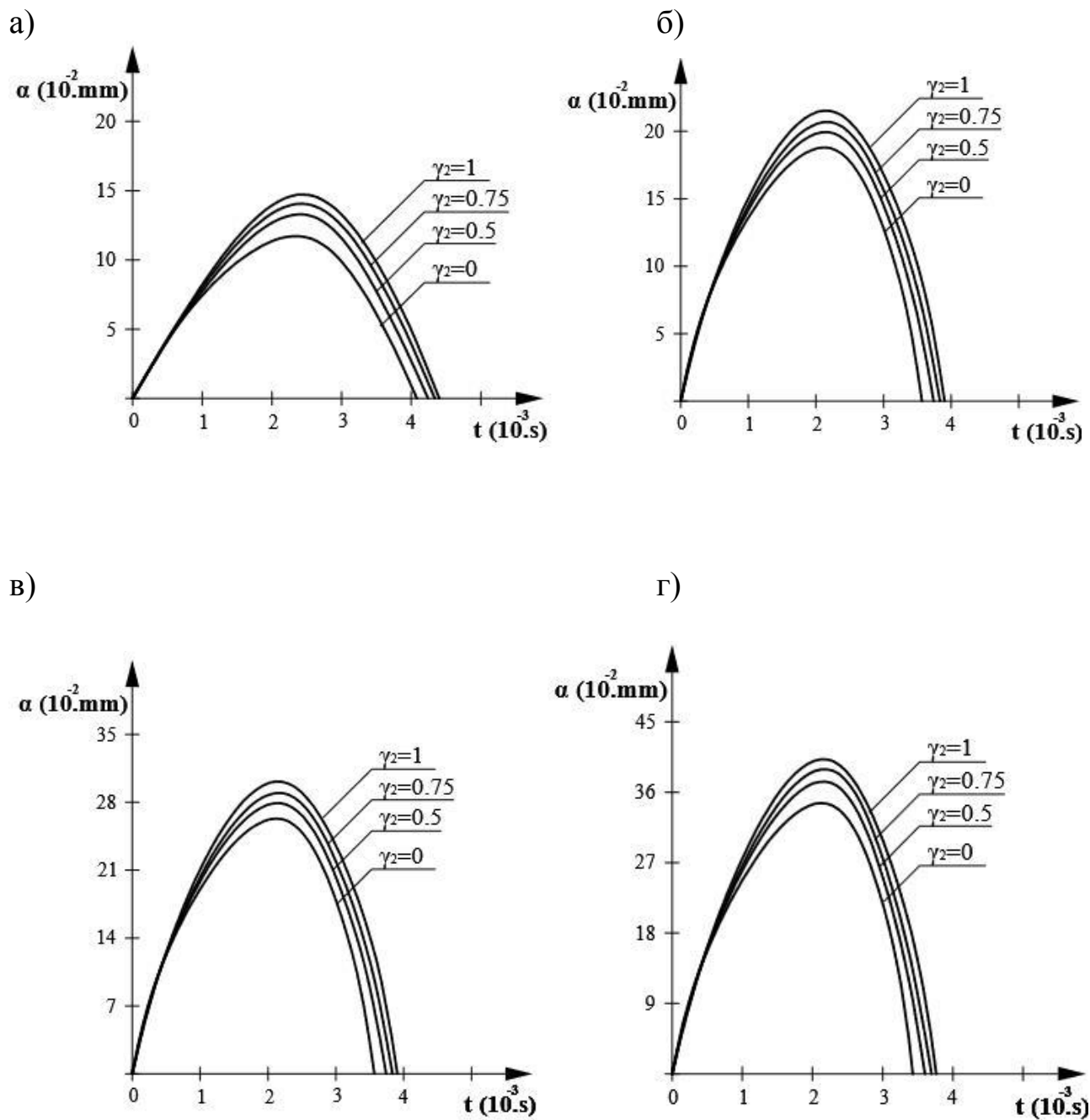
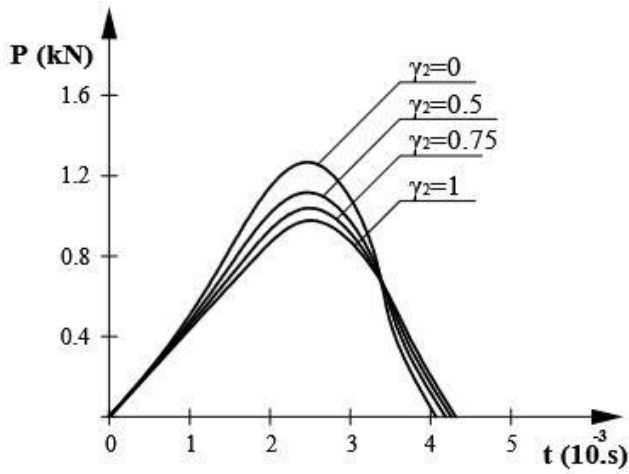
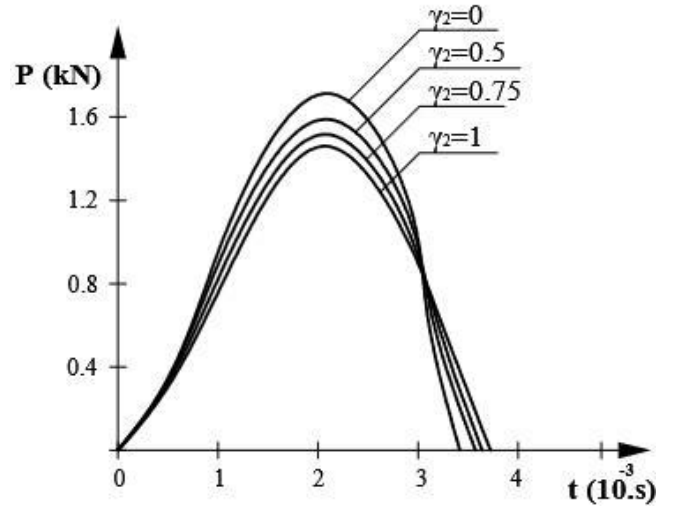


Рис. 2.7. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma_1=0.5$, $R=2$ см, $h=12$ мм и начальной скорости удара V_0 : а) 5 м/с, б) 10 м/с, в) 15 м/с, г) 20 м/с

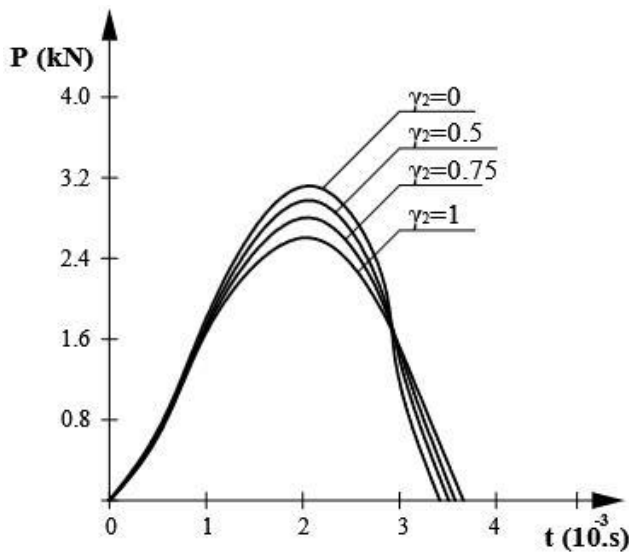
а)



б)



в)



г)

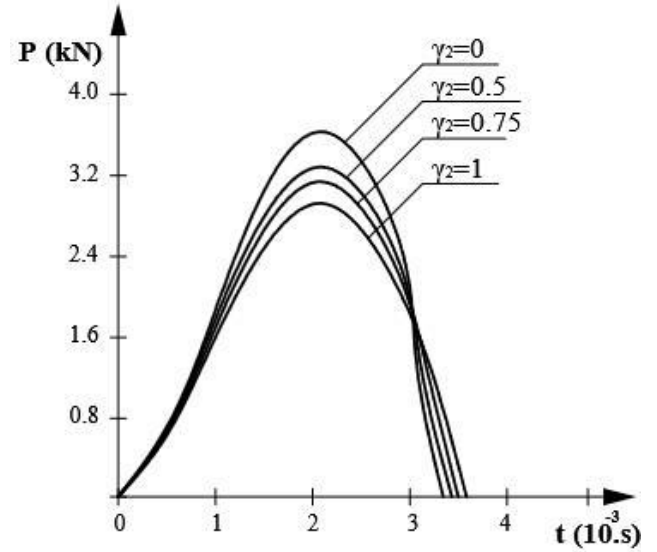
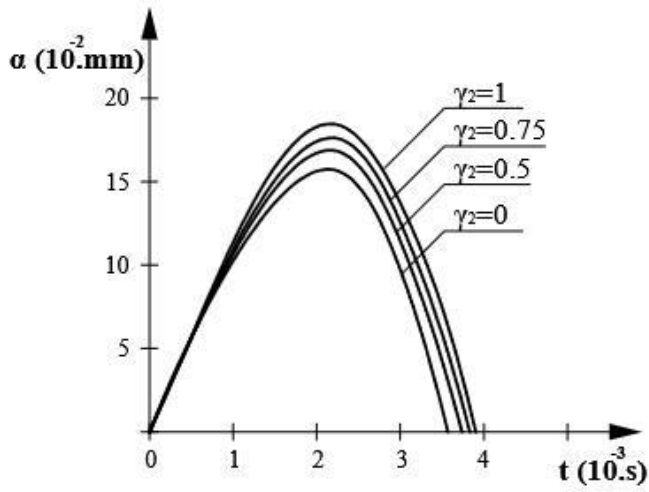
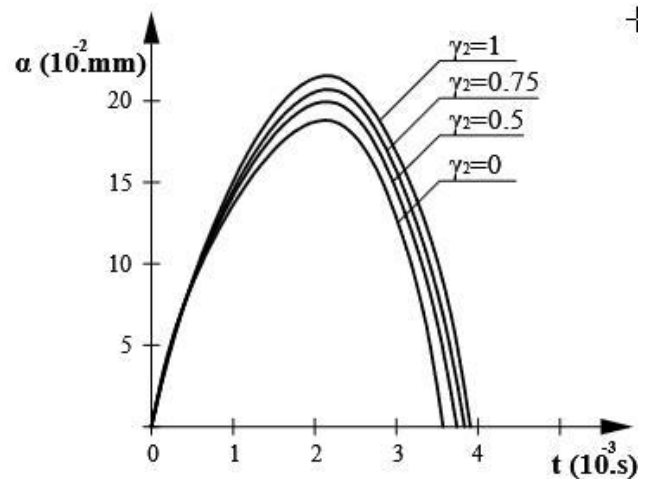


Рис. 2.8. Зависимость контактной силы от времени в случае $\gamma_1=0.5$, $R=2\text{см}$, $h=12\text{мм}$ и начальной скорости удара V_0 : а) 5м/с , б) 10м/с , в) 15м/с , г) 20м/с .

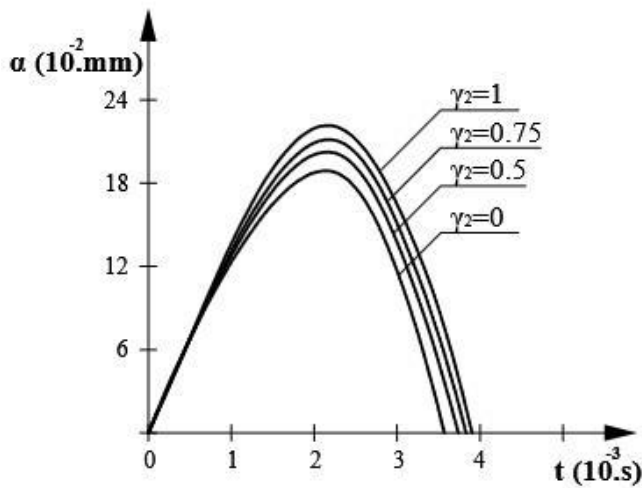
а)



б)



в)



г)

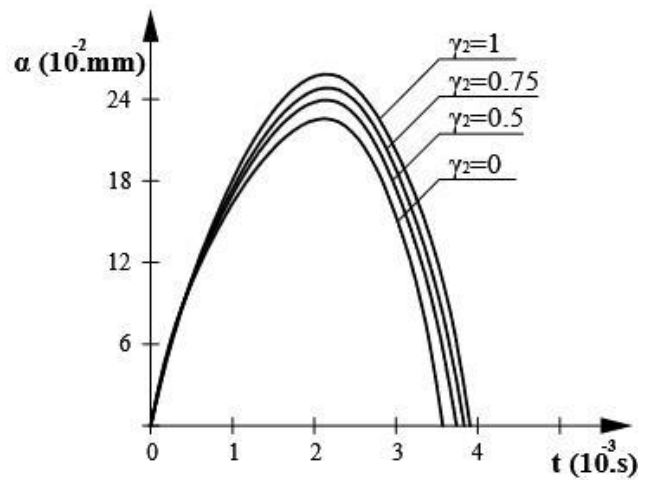
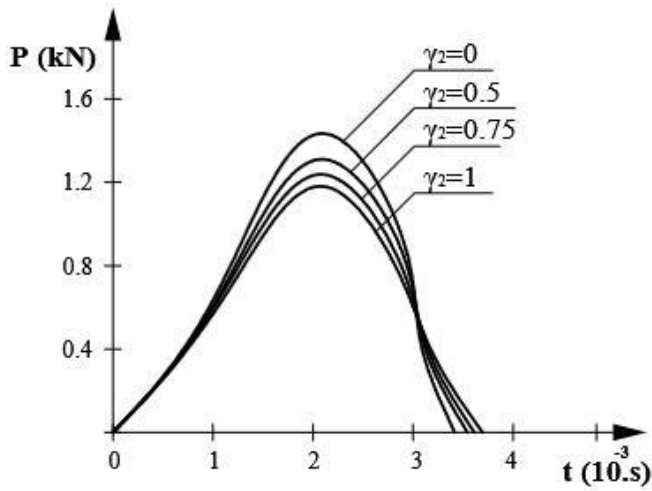
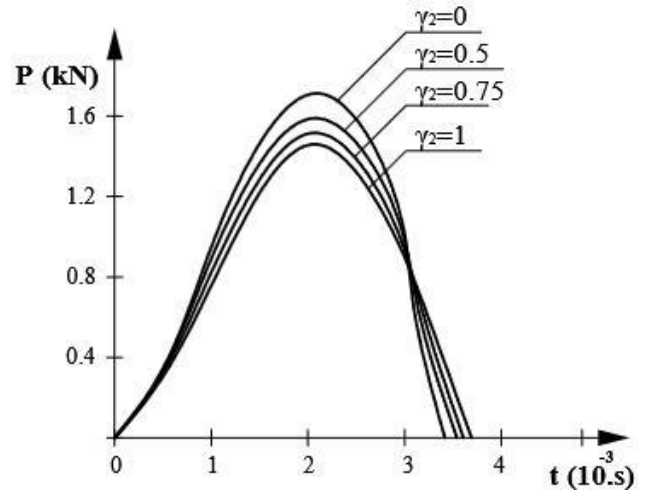


Рис. 2.9. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma_1=0.5$, начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$, $h=12\text{мм}$ с радиусом ударника R : а) 1см, б) 2см, в) 3см, г) 4см

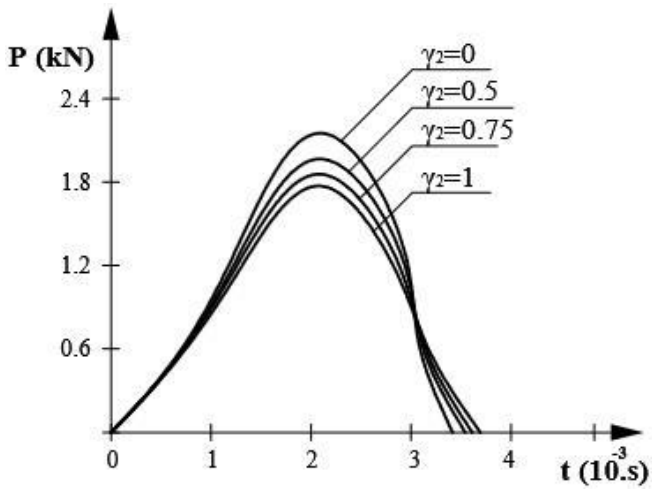
а)



б)



в)



г)

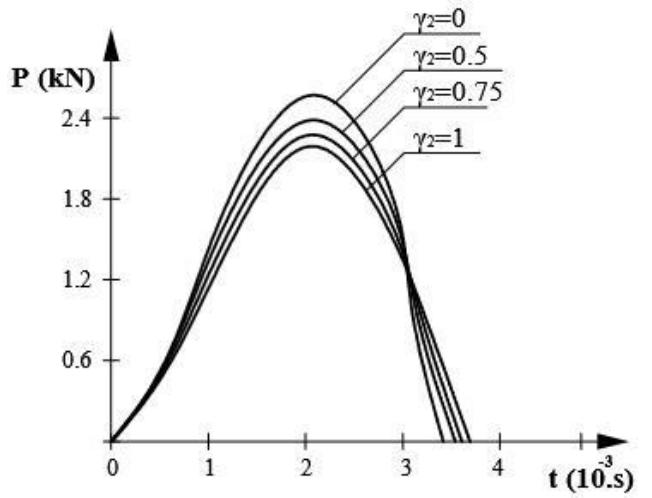
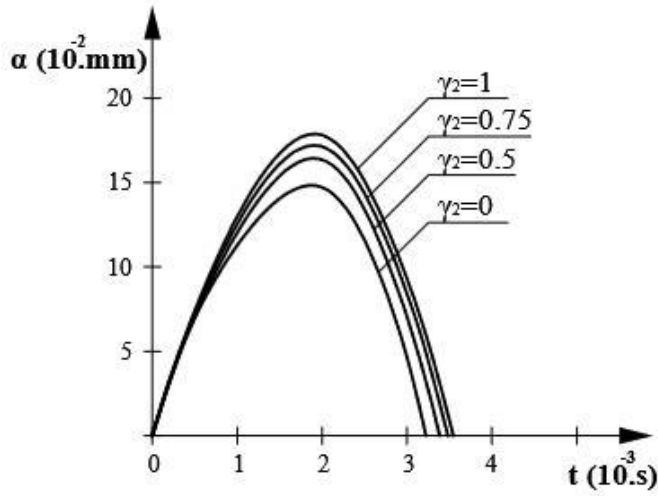
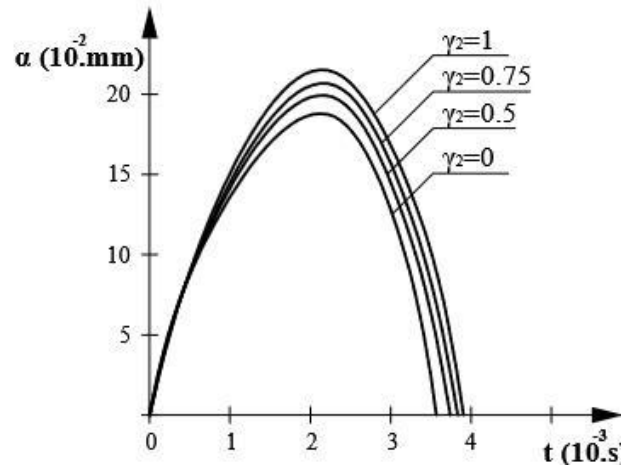


Рис. 2.10. Зависимость контактной силы от времени в случае $\gamma_1=0.5$, начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$, $h=12\text{мм}$ с радиусом ударника R : а) 1 см, б) 2 см, в) 3 см, г) 4 см

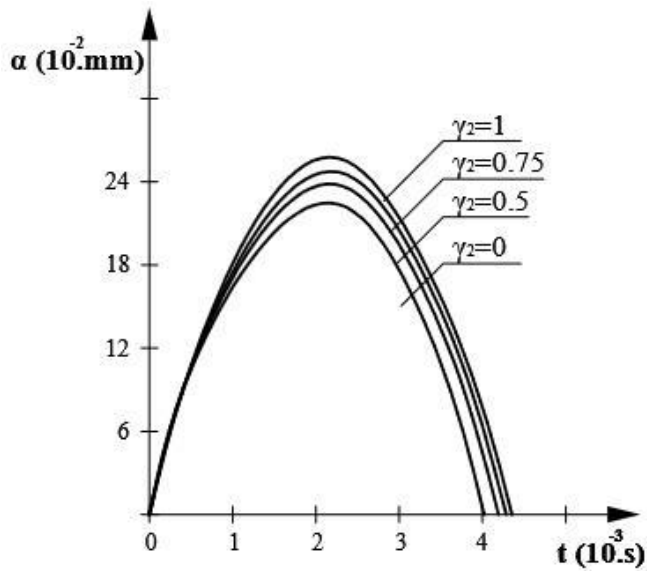
а)



б)



в)



г)

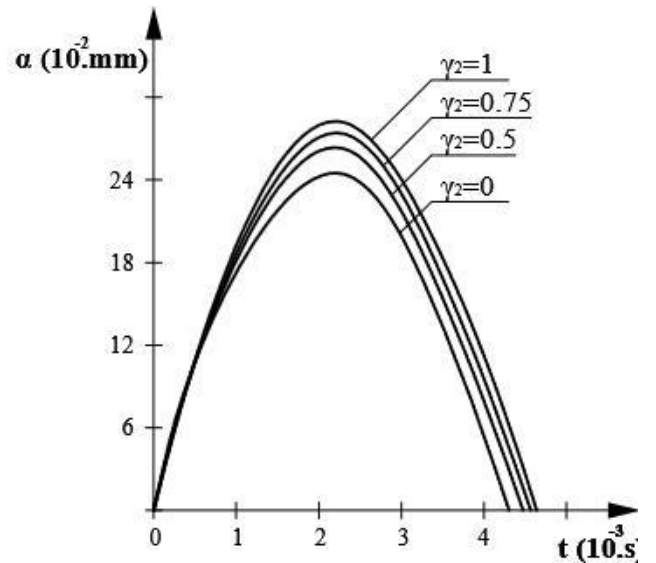
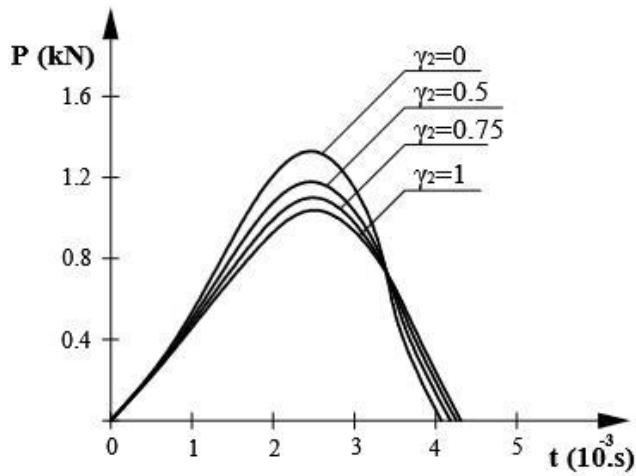
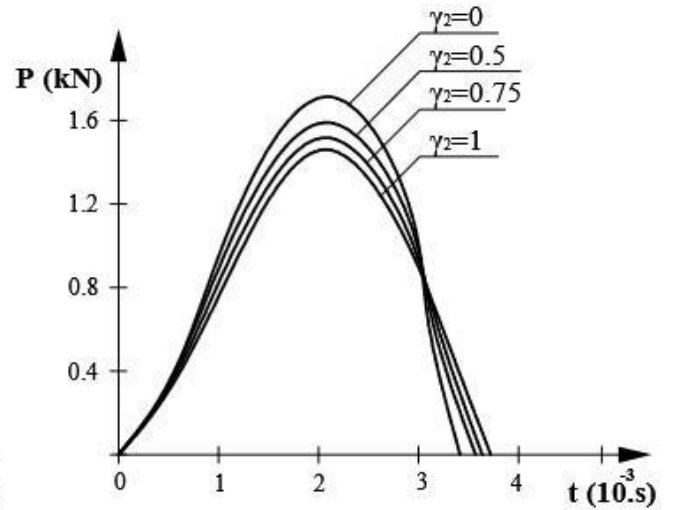


Рис. 2.11. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma_1=0.5$, начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$, с радиусом ударника $R=2\text{см}$, для пластинок толщиной h : а) 8мм, б) 12мм, в) 16мм, г) 20мм

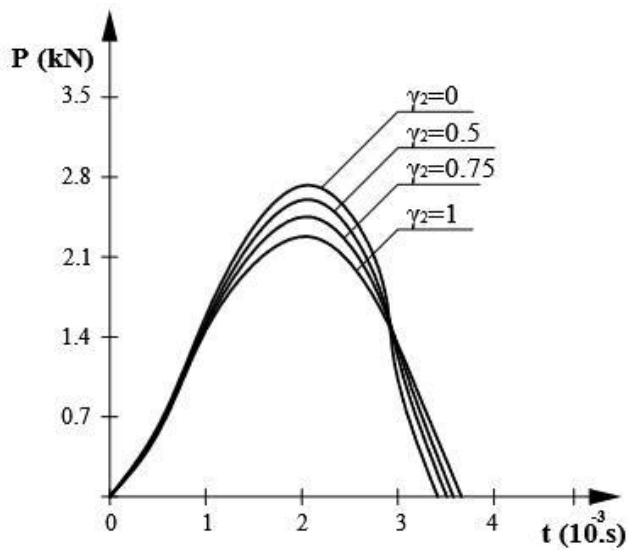
а)



б)



в)



г)

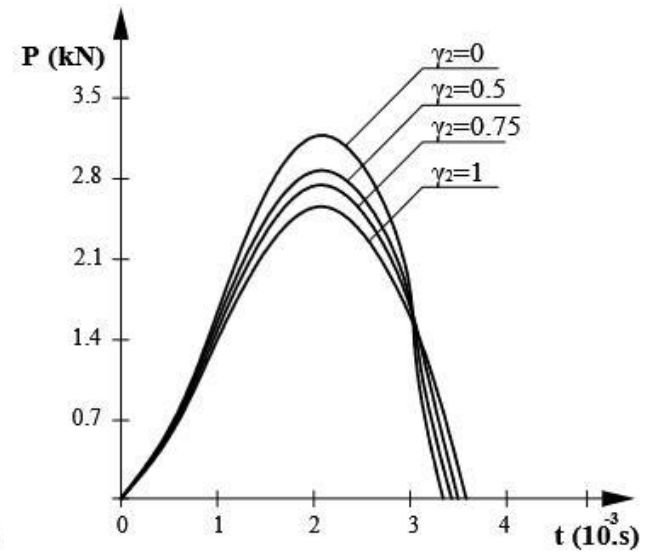
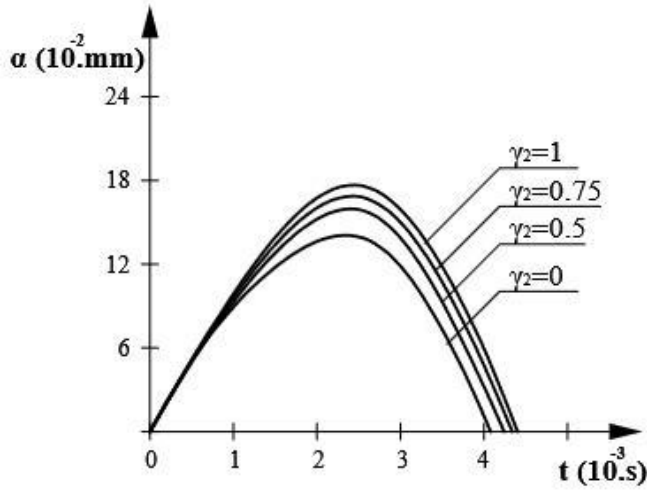
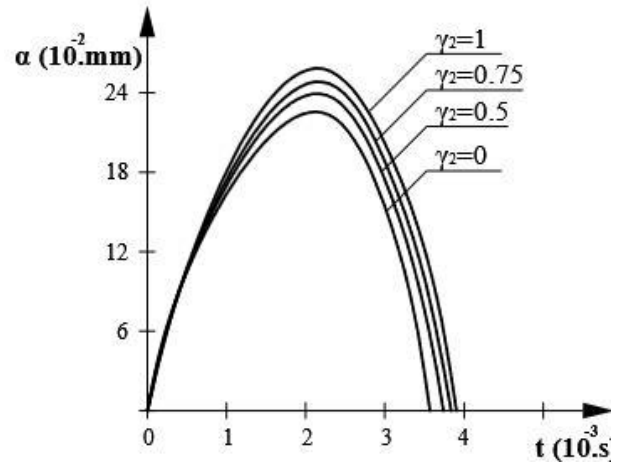


Рис. 2.12. Зависимость контактной силы от времени в случае $\gamma_1=0.5$, начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$, с радиусом ударника $R=2\text{см}$ и толщиной пластинки h : а) 8мм, б) 12мм, в) 16мм, г) 20мм

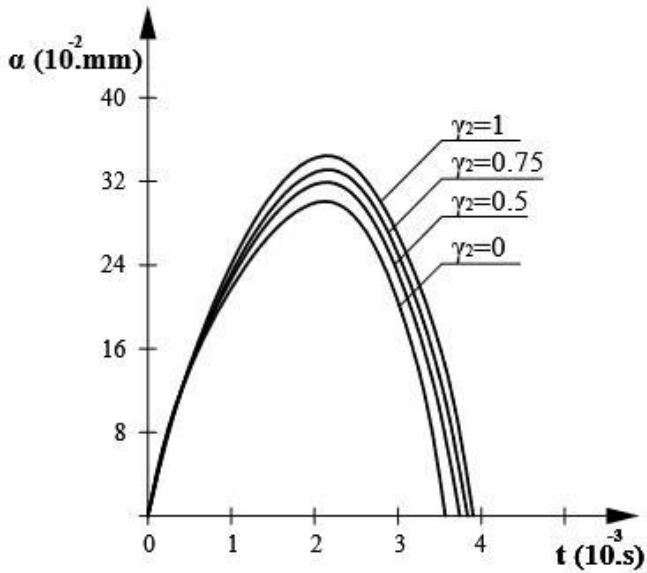
а)



б)



в)



г)

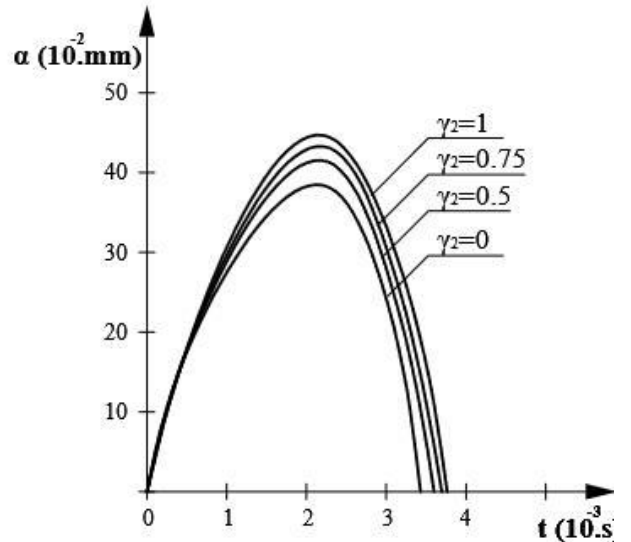
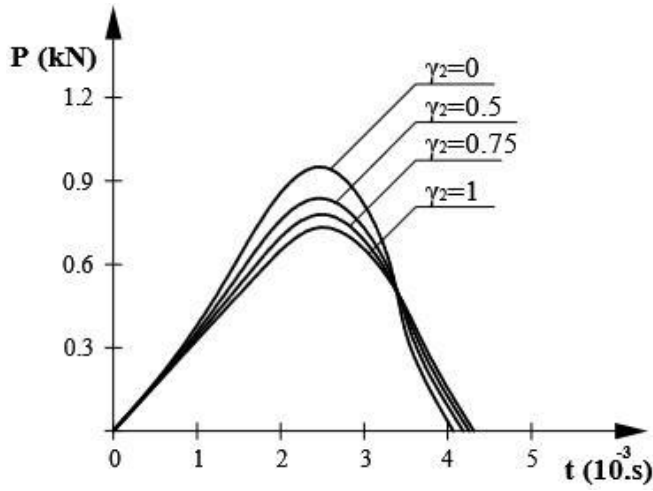
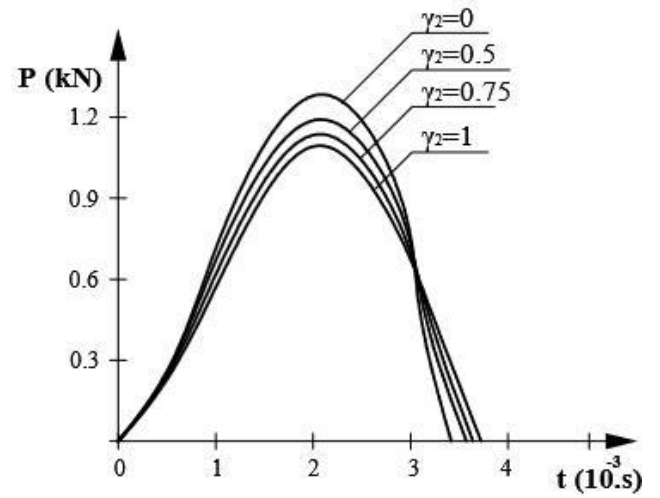


Рис. 2.13. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma_1=1$, $R=2\text{см}$, $h=12\text{мм}$ и начальной скорости удара V_0 : а) 5м/с, б) 10м/с, в) 15м/с, г) 20м/с

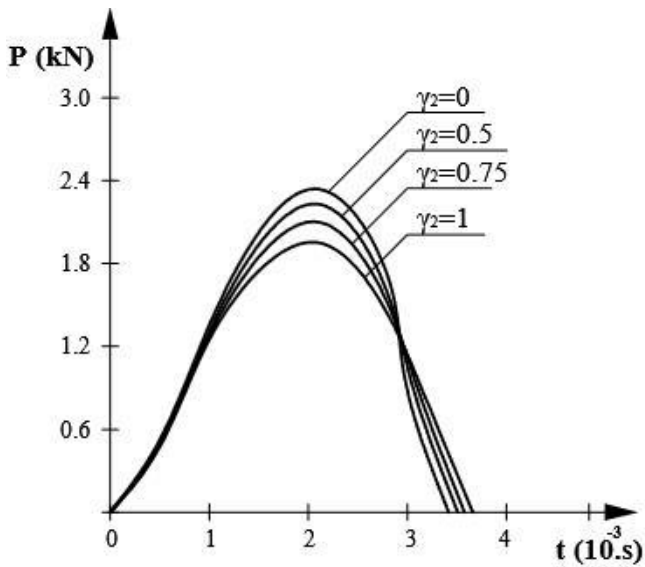
а)



б)



в)



г)

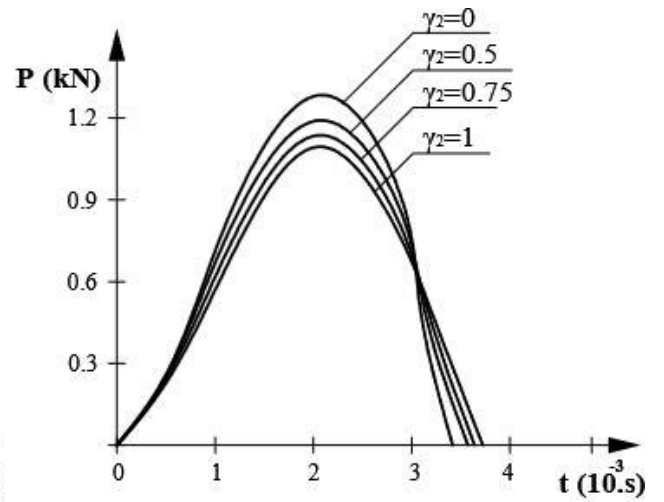
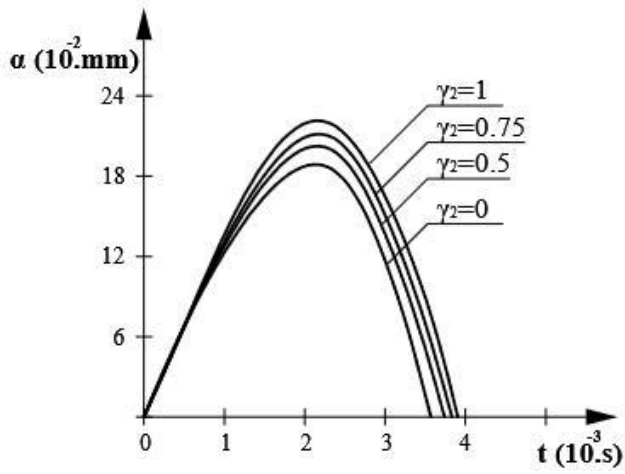
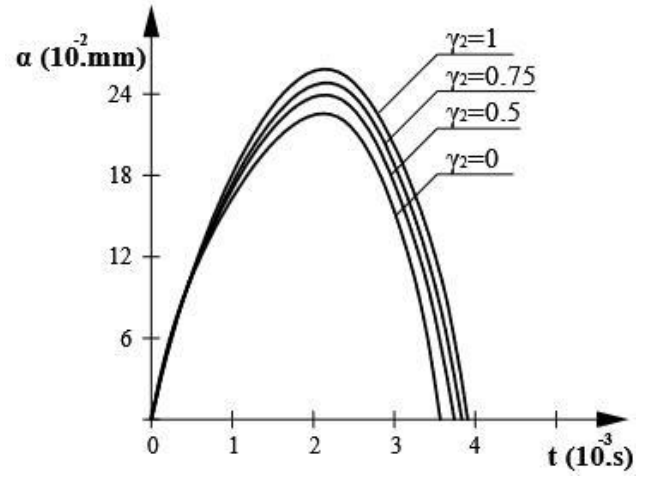


Рис. 2.14. Зависимость контактной силы от времени в случае $\gamma_1=1$, $R=2\text{ см}$, $h=12\text{ мм}$ и начальной скорости удара V_0 : а) 5 м/с , б) 10 м/с , в) 15 м/с , г) 20 м/с

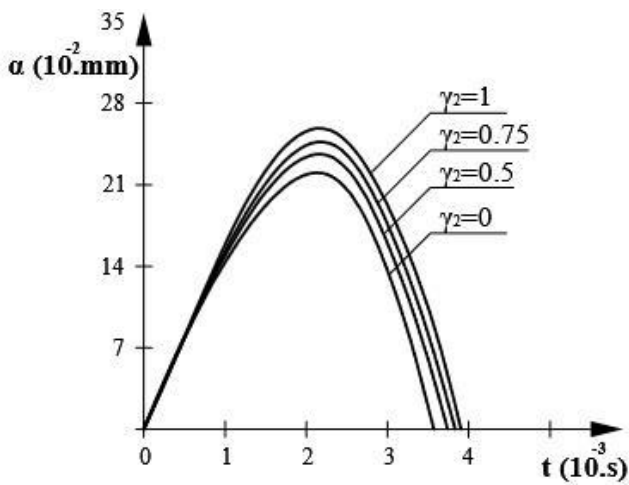
а)



б)



в)



г)

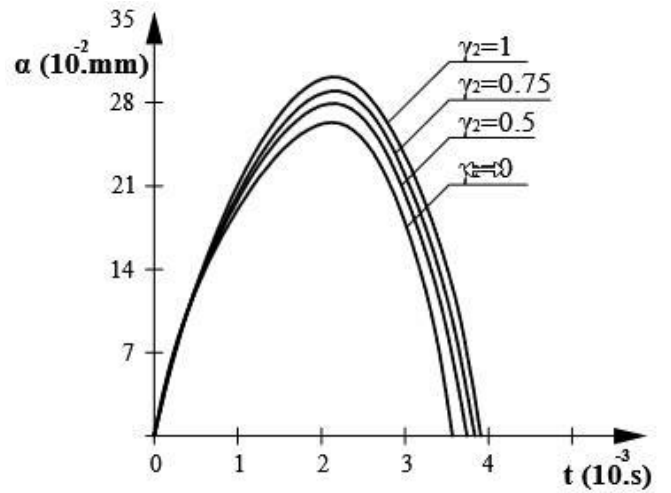
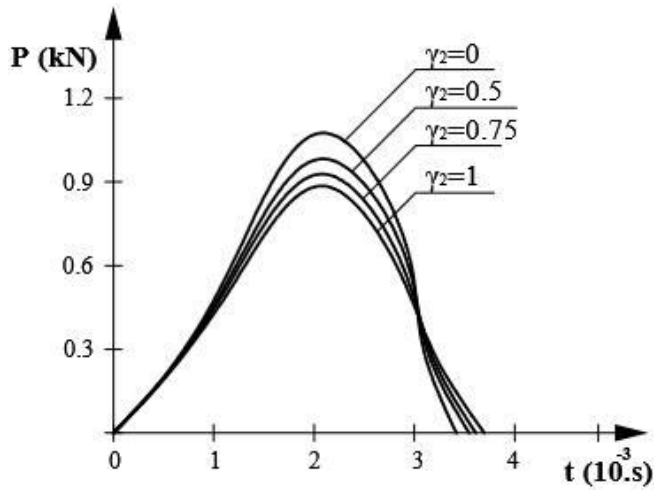
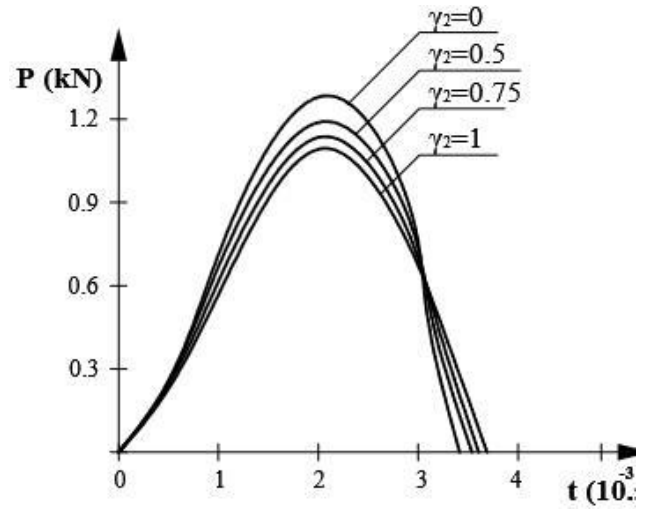


Рис. 2.15. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma_1=1$, начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$, $h=12\text{мм}$ с радиусом ударника R :
 а) 1см, б) 2см, в) 3см, г) 4см

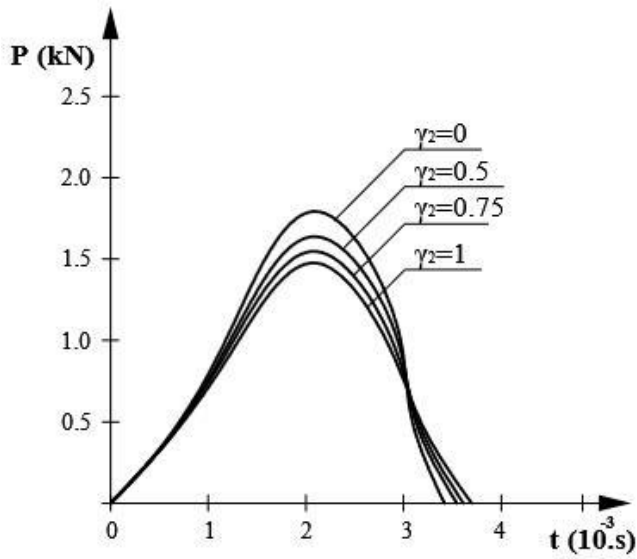
а)



б)



в)



г)

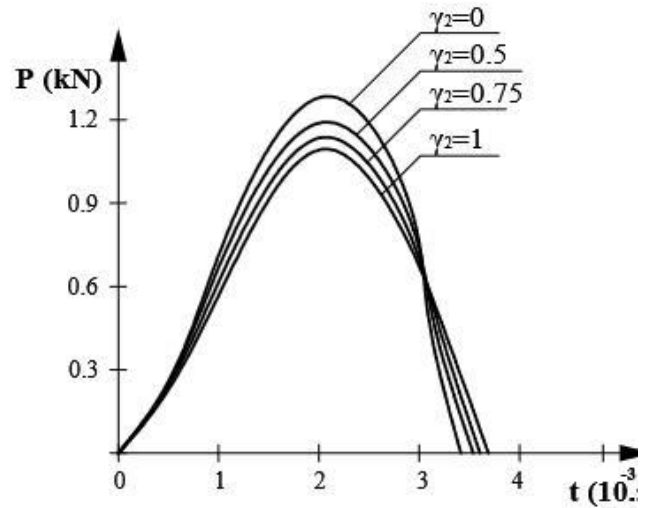
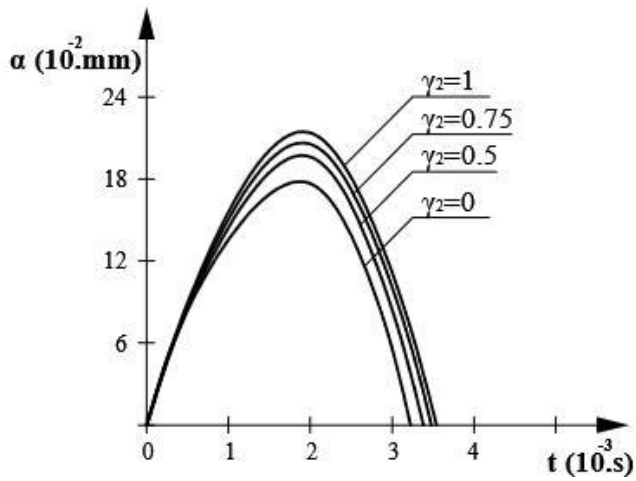
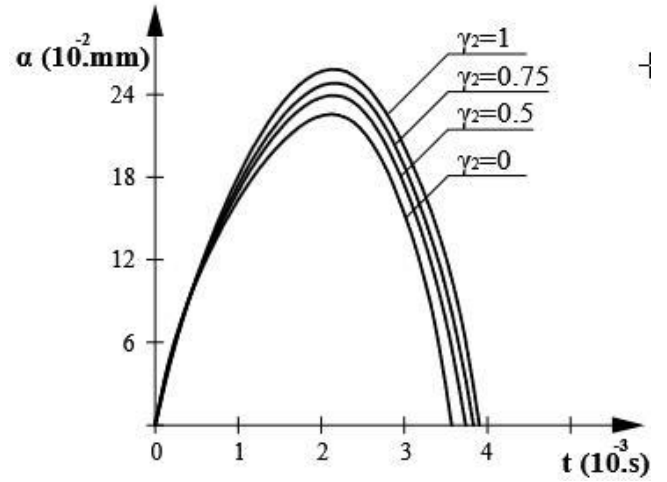


Рис. 2.16. Зависимость контактной силы от времени в случае $\gamma_1=1$,
 $V_0=10\text{м/с}$, $h=12\text{мм}$
с радиусом ударника R : а) 1см, б) 2см, в) 3см, г) 4см

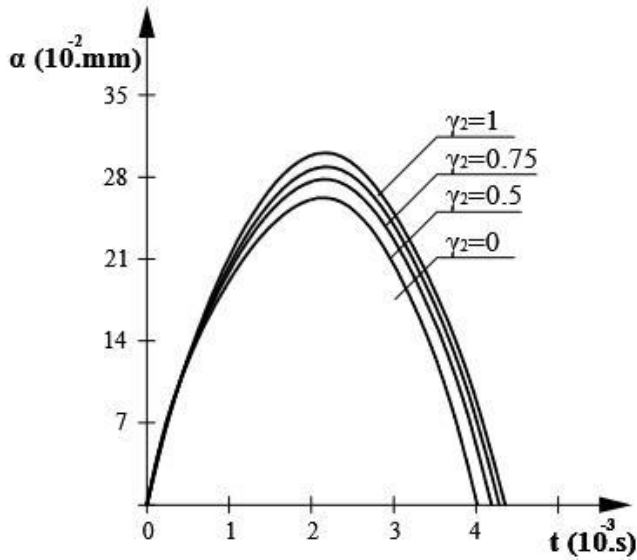
а)



б)



в)



г)

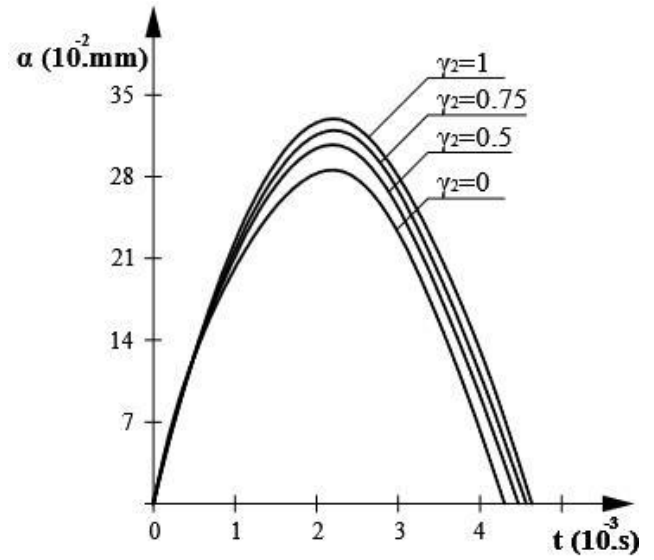
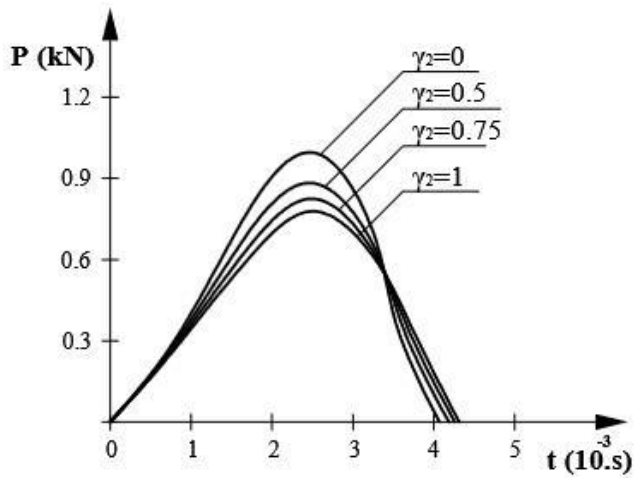
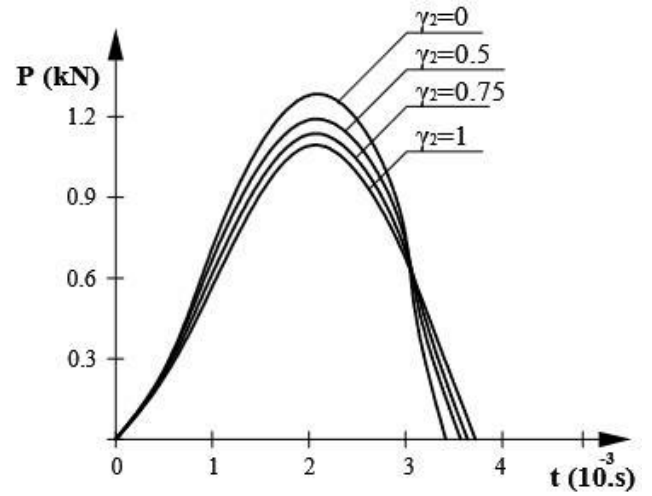


Рис. 2.17. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma_1=1$, начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$, с радиусом ударника $R=2\text{см}$, для толщины пластинки h : а) 8мм, б) 12мм, в) 16мм, г) 20мм

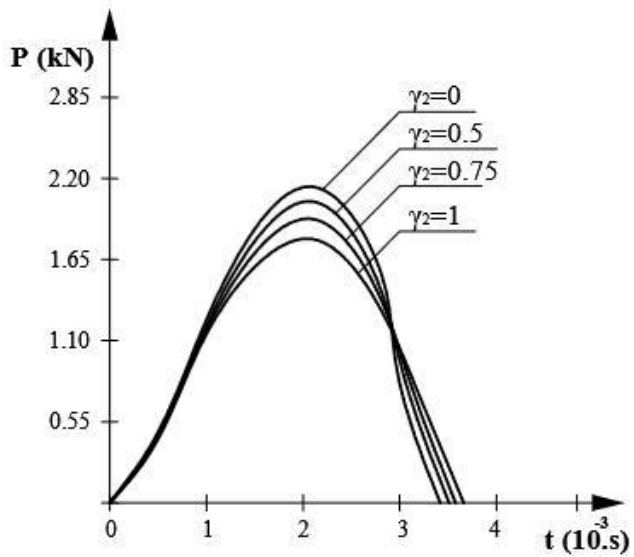
а)



б)



в)



г)

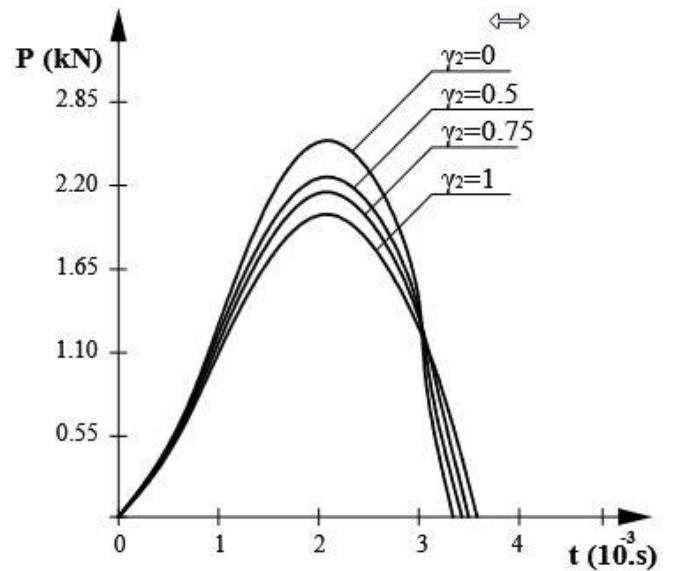


Рис. 2.18. Зависимость контактной силы от времени в случае $\gamma_1=1$, начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$, с радиусом ударника $R=2\text{см}$, для толщины пластинки h : а) 8мм, б) 12мм, в) 16мм, г) 20мм

Итак, в данной главе была рассмотрена задача удара вязкоупругого сферического ударника по упругой пластинке Кирхгофа-Лява в вязкоупругой среде для случая, когда вязкоупругие свойства внутри зоны контакта описываются моделью стандартного линейного твердого тела с дробными производными, в то время как демпфирующие свойства окружающей среды описываются с помощью модели Кельвина-Фойгта с дробными производными. Таким образом, два разных параметра дробности позволяют контролировать главные характеристики ударного взаимодействия.

В процессе исследования построена функция Грина для мишени, что позволило получить интегральное уравнение для контактной силы и местного смятия с использованием алгебры дробных операторов Ю.Н. Работнова. Найдено приближенное решение и проанализированы частные случаи.

Глава 3. Анализ вязкоупругих пластин Уфлянда-Миндлина на ударные воздействия

В данной главе обобщен подход, развитый недавно в [59, 164] при исследовании динамического поведения вязкоупругой балки типа Тимошенко в процессе ударного взаимодействия с жестким, упругим или вязкоупругим шаром, с целью проведения анализа динамического поведения вязкоупругой пластины типа Уфлянда-Миндлина с учетом влияния растяжения ее срединной поверхности на процесс деформирования во время удара вязкоупругим сферическим ударником.

Результаты исследований, изложенные в данной главе, опубликованы в работе [169].

3.1. Постановка задачи и разрешающие уравнения

Пусть вязкоупругий шар радиуса R и массы m движется по навстречу вязкоупругой пластинке вдоль оси z , перпендикулярной плоскости пластины, с постоянной скоростью V_0 . Удар происходит в момент времени $t = 0$ (рис. 1.2б). В результате поперечного удара по вязкоупругой пластинке в ней распространяются нестационарные волны: продольная волна и волна поперечного сдвига, фронты которых являются поверхностями сильного разрыва. Эти волны представляют собой цилиндрические поверхности-полоски, чьи образующие параллельны нормали к срединной плоскости, а направляющие, расположенные в срединной плоскости, представляют собой окружности, распространяющиеся с нормальными скоростями $G^{(\alpha)}$. Индекс α указывает на порядковый номер волны: $\alpha = 1$ для продольной волны и $\alpha = 2$ для поперечной волны.

Некоторая искомая функция Z за фронтами волновых поверхностей $\Sigma^{(1)}$ и $\Sigma^{(2)}$ может быть представлена в виде лучевого ряда [143]

$$Z(r, t) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [Z_{,(k)}]^{(\alpha)} \Big|_{t=\frac{r}{G^{(\alpha)}}} \left(t - \frac{r}{G^{(\alpha)}} \right)^k H \left(t - \frac{r}{G^{(\alpha)}} \right), \quad (51)$$

где $[Z_{,(k)}]^{(\alpha)} = [\partial^k Z / \partial t^k]^{(\alpha)} = Z_{,(k)}^{+(\alpha)} - Z_{,(k)}^{-(\alpha)}$ - скачки производных k -ого порядка по времени от искомой функции Z на волновых поверхностях Σ_{α} , т.е. при $t = r / G^{(\alpha)}$, r - полярный радиус, верхние индексы "+" и "-" означают, что величины вычисляются непосредственно перед и за волновыми фронтами соответственно, $H(t - r / G^{(\alpha)})$ - единичная функция Хевисайда.

Поскольку процесс ударного взаимодействия является скоротечным, то в лучевом ряде (51) можно ограничиться только членами нулевого порядка, т.е.

$$Z(r, t) = \sum_{\alpha=1}^2 [Z]^{(\alpha)} \Big|_{t=\frac{r}{G^{(\alpha)}}} H \left(t - \frac{r}{G^{(\alpha)}} \right). \quad (52)$$

Для определения разрывов искомых величин, сначала необходимо записать определяющие уравнения, описывающие динамическое поведение вязкоупругой изотропной пластины Уфлянда-Миндлина в полярной системе координат (r, φ)

$$\frac{1}{r} (N_r - N_{\varphi}) + \frac{\partial N_r}{\partial r} = \rho h \ddot{u}_r, \quad (53)$$

$$\frac{1}{r} (M_r - M_{\varphi}) + \frac{\partial M_r}{\partial r} + Q_r = \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}_r, \quad (54)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} Q_r = \rho h \ddot{w}, \quad (55)$$

$$N_r = \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma \frac{u_r}{r} \right), \quad (56)$$

$$N_\varphi = \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left(\frac{u_r}{r} + \sigma \frac{\partial u_r}{\partial r} \right), \quad (57)$$

$$M_r = D \left(\frac{\partial \beta_r}{\partial r} + \sigma \frac{\beta_r}{r} \right), \quad (58)$$

$$M_\varphi = D \left(\frac{\beta_r}{r} + \sigma \frac{\partial \beta_r}{\partial r} \right), \quad (59)$$

$$Q_r = Kh\mu \left(\frac{\partial w_r}{\partial r} - \beta_r \right), \quad (60)$$

где N_r и N_φ - силы, действующие в плоскости пластины в направлениях r и φ соответственно, M_r и M_φ - изгибающие моменты, Q_r - поперечная сила, w - прогиб плиты, u_r - перемещение вдоль радиуса, β_r - угол поворота нормали в направлении r , ρ - плотность, h - толщина пластины, μ и E - операторы сдвига и Юнга соответственно, σ - оператор Пуассона, $D = Eh^3 / 12(1 - \sigma^2)$ - оператор цилиндрической жесткости, $K = \pi^2 / 12$ - коэффициент сдвига, а точки обозначают производные по времени. Затем применим к уравнениям (53) и (55) кинематическое условие совместности, предложенное в [146] для физических компонент тонких тел,

$$G[\partial Z / \partial r] = -[\dot{Z}] + \delta[Z] / \delta t \quad (61)$$

где $\delta / \delta t$ - δ -производная Томаса [51] по времени от функции, заданной на движущейся поверхности.

Заметим, что условие (61) справедливо в случае, когда пространственные координаты совпадают с лучевыми координатами [160].

Чтобы упростить процедуру применения условия (61), будем интерпретировать поверхность сильного разрыва как слой малой толщины δ , внутри которого искомая величина Z изменяется монотонно и непрерывно от значения Z^+ до значения Z^- . Предположим, что в некоторую точку с

фиксированным радиусом в момент времени t приходит передний фронт ударного слоя, а в момент времени $t + \Delta t$, где Δt мало, задний фронт этого слоя. Внутри ударного слоя выполняется соотношение

$$\partial Z / \partial r \approx -G^{-1} \partial Z / \partial t. \quad (62)$$

Записывая уравнения (53) и (55) внутри ударного слоя и учитывая выражение (62), получим

$$-G^{-1} \frac{\partial N_r}{\partial t} = \rho h \frac{\partial v_r}{\partial t}, \quad (63)$$

$$-G^{-1} \frac{\partial Q_r}{\partial t} = \rho h \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (64)$$

где $v_r = \dot{u}_r$ и $W = \dot{w}$.

Таким образом, мы выбрали только те уравнения движения, которые будут использоваться в дальнейшем изложении.

Интегрируя полученные уравнения (63) и (64) по времени от t до $t + \Delta t$ и устремляя затем $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$[N_r] = -\rho h G [v_r], \quad (65)$$

$$[Q_r] = -\rho h G [W] \quad (66)$$

Условия совместности (65) и (66) называются динамическими условиями совместности. При выводе этих условий мы пренебрегаем членами N_r и N_φ в уравнении (53), членом Q_r в уравнении (55), а также членом $\delta Z / \delta t$ в уравнении (62), так как интегралы от этих членов по времени t от t до $t + \Delta t$ стремятся к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$.

Чтобы записать уравнения (56) и (60) в разрывах, необходимо расшифровать операторы, входящие в эти выражения.

3.2. Расшифровка операторов дробного порядка

Для расшифровки операторов, которые встречаются в выражениях (56) и (60), необходимо задать два любых оператора, например, оператор всестороннего расширения-сжатия K и оператор сдвига μ . Как показывают многочисленные эксперименты с объемными напряжениями и деформациями [39], для большинства материалов оператор K является постоянной величиной, т.е.

$$K = K_{\infty}, \quad (67)$$

где K_{∞} - некоторая константа.

При дальнейшем анализе модель стандартного линейного твердого тела с обычными производными и с дробными производными будет использоваться в качестве вязкоупругой модели, соответственно, вне и внутри зоны контакта, так как в процессе удара происходит разрушение межмолекулярных связей внутри зоны контакта пластины с ударником, в результате чего наблюдаются более свободные перемещения молекул по отношению друг к другу, и в конечном итоге уменьшение вязкости материала пластины в зоне контакта. Это обстоятельство позволяет описывать поведение материала пластины внутри зоны контакта при помощи модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными, так как изменение параметра дробности (порядка дробной производной) дает возможность контролировать вязкость материала пластины.

Таким образом, для удобства изложения, сначала определим операторы дробного порядка, справедливые в зоне контакта, и затем полагая параметр дробности равным единице в конечных соотношениях, получим соответствующие выражения для вязкоупругой пластины вне зоны контакта на основе обычной вязкоупругости.

Так, внутри зоны контакта ударника с вязкоупругой мишенью, зададимся предварительно связью между девиаторами напряжений σ' и деформаций ε' в виде модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными [157], т.е.

$$\sigma' + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \sigma' = 2\mu_0 (\varepsilon' + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma \varepsilon'), \quad (68)$$

или

$$\sigma' = 2\mu_0 \frac{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma} \varepsilon', \quad (69)$$

где τ_ε и τ_σ - времена релаксации и ретардации соответственно, γ ($0 < \gamma \leq 1$) – параметр дробности, μ_0 - релаксированный модуль сдвига,

$$D^\gamma x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-t')^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} x(t') dt' \quad (70)$$

- дробная производная Римана-Лиувилля порядка γ $x(t)$ - некоторая функция.

Из выражения (69) следует, что оператор μ записывается в виде

$$\mu = \mu_0 \frac{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma}, \quad (71)$$

или

$$\mu = \mu_0 \mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) + \mu_0 \frac{\tau_\sigma^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma} \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma), \quad (72)$$

где

$$\mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) = \frac{1}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma} \quad (73)$$

- безразмерный дробный оператор Ю.Н. Работнова [159, 161].

Если в выражении (72) учесть формулу

$$\tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) = 1 - \mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma), \quad (74)$$

которая доказывается непосредственной проверкой [159,161] и ввести обозначение

$$\mu_\infty = \mu_0 \frac{\tau_\sigma^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma}, \quad (75)$$

где μ_∞ - нерелаксированный модуль сдвига, то в результате получим

$$\mu = \mu_\infty \left[1 - \nu_{\varepsilon\mu} \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_\varepsilon^\gamma \right) \right], \quad (76)$$

где $\nu_{\varepsilon\mu} = (\mu_\infty - \mu_0) \mu_\infty^{-1}$ - безразмерный дефект модуля.

Теперь вычислим оператор Юнга по формуле

$$E = \frac{9K_\infty \mu}{3K_\infty + \mu}. \quad (77)$$

Для начала найдем оператор

$$3K_\infty + \mu = (3K_\infty + \mu_\infty) \left[1 - M_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_\varepsilon^\gamma \right) \right], \quad (78)$$

где $M_\varepsilon = \mu_\infty \nu_{\varepsilon\mu} (3K_\infty + \mu_\infty)^{-1}$.

Будем искать обратный оператор $(3K_\infty + \mu)^{-1}$ в виде

$$(3K_\infty + \mu)^{-1} = (3K_\infty + \mu_\infty)^{-1} \left[1 + M_\sigma \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_\sigma^\gamma \right) \right], \quad (79)$$

где M_σ и τ_σ - пока неизвестные константы.

Далее перемножим операторы (78) и (79), учтем их свойство $(3K_\infty + \mu)(3K_\infty + \mu)^{-1} = 1$ и используем выражение

$$\mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_\varepsilon^\gamma \right) \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_\sigma^\gamma \right) = \frac{\tau_\varepsilon^\gamma \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_\varepsilon^\gamma \right) - \tau_\sigma^\gamma \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_\sigma^\gamma \right)}{\tau_\varepsilon^\gamma - \tau_\sigma^\gamma}, \quad (80)$$

которая доказывается прямой проверкой [159].

В результате получим

$$M_\sigma \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_\sigma^\gamma \right) \left(1 + M_\varepsilon \frac{\tau_\sigma^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma - \tau_\sigma^\gamma} \right) - M_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_\varepsilon^\gamma \right) \left(1 + M_\sigma \frac{\tau_\varepsilon^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma - \tau_\sigma^\gamma} \right) = 0. \quad (81)$$

Приравнявая нулю каждую скобку соотношения (81), приходим к системе двух уравнений для определения M_σ и τ_σ

$$\begin{cases} 1 + M_\varepsilon \frac{\tau_\sigma^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma - \tau_\sigma^\gamma} = 0, \\ 1 + M_\sigma \frac{\tau_\varepsilon^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma - \tau_\sigma^\gamma} = 0, \end{cases} \quad (82)$$

откуда следует

$$M_\sigma = \frac{M_\varepsilon}{1 - M_\varepsilon}, \quad \tau_\sigma^\gamma = \frac{\tau_\varepsilon^\gamma}{1 - M_\varepsilon}, \quad \frac{\tau_\varepsilon^\gamma}{\tau_\sigma^\gamma} = \frac{M_\varepsilon}{M_\sigma}. \quad (83)$$

Наконец подставим операторы (76) и (79) в формулу (77) и учтем выражение (80). В результате получим

$$E = E_\infty \left[1 - \nu_{\varepsilon\mu} \varepsilon_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) \left(1 + M_\sigma \frac{\tau_\varepsilon^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma - \tau_\sigma^\gamma} \right) + M_\sigma \varepsilon_\gamma^* (\tau_\sigma^\gamma) \left(1 + \nu_{\varepsilon\mu} \frac{\tau_\sigma^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma - \tau_\sigma^\gamma} \right) \right]. \quad (84)$$

Учитывая, что согласно системе уравнений (82) первая скобка выражения (84) равна нулю, а вторая скобка

$$1 + \nu_{\varepsilon\mu} \frac{\tau_\sigma^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma - \tau_\sigma^\gamma} = 1 - \frac{\nu_{\varepsilon\mu}}{M_\varepsilon} = -\frac{3K_\infty}{\mu_\infty}, \quad (85)$$

окончательно получим

$$E = E_\infty \left[1 - \nu_{\varepsilon E} \varepsilon_\gamma^* (\tau_{\varepsilon E}^\gamma) \right], \quad (86)$$

где $\nu_{\varepsilon E} = M_\sigma \frac{3K_\infty}{\mu_\infty} = \frac{1 - \mu_0 \mu_\infty^{-1}}{1 + \mu_0 (3K_\infty)^{-1}} < 1$, $\tau_{\varepsilon E}^\gamma = \tau_\sigma^\gamma$.

Теперь вычислим оператор податливости $J = E^{-1}$, который задается в виде

$$J = E^{-1} = E_\infty^{-1} \left[1 + \nu_{\sigma E} \varepsilon_\gamma^* (\tau_{\sigma E}^\gamma) \right], \quad (87)$$

где $\nu_{\sigma E}$ и $\tau_{\sigma E}^\gamma$ - пока неизвестные константы. Для их определения используем свойство $JE = 1$ и учтем выражение (80). Тогда получим

$$-\nu_{\varepsilon E} \varepsilon_\gamma^* (\tau_{\varepsilon E}^\gamma) \left(1 + \nu_{\sigma E} \frac{\tau_{\varepsilon E}^\gamma}{\tau_{\varepsilon E}^\gamma - \tau_{\sigma E}^\gamma} \right) + \nu_{\sigma E} \varepsilon_\gamma^* (\tau_{\sigma E}^\gamma) \left(1 + \nu_{\varepsilon E} \frac{\tau_{\sigma E}^\gamma}{\tau_{\varepsilon E}^\gamma - \tau_{\sigma E}^\gamma} \right) = 0. \quad (88)$$

Приравнивая к нулю каждую скобку выражения (88), имеем

$$\begin{cases} 1 + \nu_{\sigma E} \frac{\tau_{\varepsilon E}^\gamma}{\tau_{\varepsilon E}^\gamma - \tau_{\sigma E}^\gamma} = 0, \\ 1 + \nu_{\varepsilon E} \frac{\tau_{\sigma E}^\gamma}{\tau_{\varepsilon E}^\gamma - \tau_{\sigma E}^\gamma} = 0. \end{cases} \quad (89)$$

Решая систему уравнений (89), находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{\sigma E}}{\tau_{\varepsilon E}} \right)^\gamma &= 1 + \nu_{\sigma E}, \\ \left(\frac{\tau_{\varepsilon E}}{\tau_{\sigma E}} \right)^\gamma &= 1 - \nu_{\varepsilon E}. \end{aligned} \quad (90)$$

Теперь можем вычислить оператор Пуассона σ по формуле (67), которую можно переписать в виде

$$\frac{E}{1-2\sigma} = \frac{E_\infty}{1-2\sigma_\infty} = 3K_\infty. \quad (91)$$

Учитывая выражение (85), из формулы (91) имеем

$$\sigma = \sigma_\infty + \frac{1}{2}(1-2\sigma_\infty)\nu_{\varepsilon E} \mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_{\varepsilon E}^\gamma). \quad (92)$$

В дальнейшем нам понадобятся операторы

$$\frac{1}{1+\sigma} = \frac{1}{1+\sigma_\infty + \frac{1}{2}(1-2\sigma_\infty)\nu_{\varepsilon E} \mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_{\varepsilon E}^\gamma)}, \quad (93)$$

$$\frac{1}{1-\sigma} = \frac{1}{1-\sigma_\infty - \frac{1}{2}(1-2\sigma_\infty)\nu_{\varepsilon E} \mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_{\varepsilon E}^\gamma)}. \quad (94)$$

Чтобы вычислить операторы, стоящие справа в формулах (93) и (94), предположим, что они имеют следующий вид:

$$\frac{1}{1+\sigma} = \frac{1}{1+\sigma_\infty} \left[1 - B \mathfrak{E}_\gamma^* (t_1^\gamma) \right], \quad (95)$$

$$\frac{1}{1-\sigma} = \frac{1}{1-\sigma_\infty} \left[1 + D \mathfrak{E}_\gamma^* (t_2^\gamma) \right], \quad (96)$$

где B , t_1 и D , t_2 - пока неизвестные константы.

Приравнивая нулю правые части соотношений (93), (95) и (94), (96), приводя полученные выражения к общему знаменателю и учитывая формулу (80), находим

$$\begin{aligned} & \frac{1(1-2\sigma_\infty)v_{\varepsilon E}}{2(1+\sigma_\infty)} \left[1 - B \frac{\tau_{\varepsilon E}^\gamma}{\tau_{\varepsilon E}^\gamma - t_1^\gamma} \right] \mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_{\varepsilon E}^\gamma) - \\ & - B \left[1 - \frac{1(1-2\sigma_\infty)v_{\varepsilon E}}{2(1+\sigma_\infty)} \frac{t_1^\gamma}{(\tau_{\varepsilon E}^\gamma - t_1^\gamma)} \right] \mathfrak{E}_\gamma^* (t_1^\gamma) = 0, \\ & - \frac{1(1-2\sigma_\infty)v_{\varepsilon E}}{2(1-\sigma_\infty)} \left[1 + D \frac{\tau_{\varepsilon E}^\gamma}{\tau_{\varepsilon E}^\gamma - t_2^\gamma} \right] \mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_{\varepsilon E}^\gamma) + \\ & + D \left[1 + \frac{1(1-2\sigma_\infty)v_{\varepsilon E}}{2(1-\sigma_\infty)} \frac{t_2^\gamma}{(\tau_{\varepsilon E}^\gamma - t_2^\gamma)} \right] \mathfrak{E}_\gamma^* (t_2^\gamma) = 0. \end{aligned} \quad (97)$$

Приравнивая нулю выражения в квадратных скобках в соотношениях (97), определяем неизвестные константы

$$\begin{aligned} B &= \frac{(1-2\sigma_\infty)v_{\varepsilon E}}{2(1+\sigma_\infty) + (1-2\sigma_\infty)v_{\varepsilon E}} = \frac{\tau_{\varepsilon E}^\gamma - t_1^\gamma}{\tau_{\varepsilon E}^\gamma}, \\ t_1^{-\gamma} &= \tau_{\varepsilon E}^{-\gamma} \left[1 + \frac{(1-2\sigma_\infty)v_{\varepsilon E}}{2(1+\sigma_\infty)} \right], \quad t_1^\gamma = \frac{\tau_{\varepsilon E}^\gamma}{A}, \\ D &= \frac{(1-2\sigma_\infty)v_{\varepsilon E}}{2(1-\sigma_\infty) - (1-2\sigma_\infty)v_{\varepsilon E}} = \frac{\tau_{\varepsilon E}^\gamma - t_2^\gamma}{\tau_{\varepsilon E}^\gamma}, \\ t_2^{-\gamma} &= \tau_{\varepsilon E}^{-\gamma} \left[1 - \frac{(1-2\sigma_\infty)v_{\varepsilon E}}{2(1-\sigma_\infty)} \right], \quad t_2^\gamma = \frac{\tau_{\varepsilon E}^\gamma}{C}, \\ A &= \frac{2(1+\sigma_\infty) + (1-2\sigma_\infty)v_{\varepsilon E}}{2(1+\sigma_\infty)}, \end{aligned} \quad (98)$$

$$C = \frac{2(1 - \sigma_\infty) - (1 - 2\sigma_\infty)v_{\varepsilon E}}{2(1 - \sigma_\infty)}.$$

Теперь можно вычислить оператор

$$\frac{E}{1 - \sigma^2} = \frac{E}{2} \left(\frac{1}{1 + \sigma} + \frac{1}{1 - \sigma} \right). \quad (99)$$

Для этой цели подставим выражения (95), (96) и (86) в формулу (99) и учтем соотношение (80). В результате получим

$$\frac{E}{1 - \sigma^2} = \frac{E_\infty}{1 - \sigma_\infty^2} \left[1 - m_1 \mathfrak{A}_\gamma^* (t_1^\gamma) - m_2 \mathfrak{A}_\gamma^* (t_2^\gamma) \right], \quad (100)$$

где

$$m_1 = \frac{3}{2} \frac{B(1 - \sigma_\infty)}{(1 - 2\sigma_\infty)}, \quad m_2 = \frac{1}{2} \frac{D(1 + \sigma_\infty)}{(1 - 2\sigma_\infty)}. \quad (101)$$

Наконец подсчитаем оператор $E\sigma(1 - \sigma^2)^{-1}$ с учетом формул (80) и (98)

$$\frac{E}{1 - \sigma^2} \sigma = \frac{E_\infty \sigma_\infty}{1 - \sigma_\infty^2} \left[1 + \frac{m_1}{\sigma_\infty} \mathfrak{A}_\gamma^* (t_1^\gamma) - \frac{m_2}{\sigma_\infty} \mathfrak{A}_\gamma^* (t_2^\gamma) \right]. \quad (102)$$

В дальнейшем для удобства изложения представим дробный оператор Ю.Н.Работнова в несколько ином виде, умножив числитель и знаменатель формулы (73) на $\tau_\varepsilon^{-\gamma} I^\gamma$, где

$$I^\gamma x(t) = \int_0^t \frac{(t - t')^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} x(t') dt' \quad (103)$$

- дробный интеграл.

В результате получим

$$\mathfrak{A}_\gamma^* (\tau_i^\gamma) = \frac{I^\gamma \tau_i^{-\gamma}}{1 - (-I^\gamma \tau_i^{-\gamma})} \quad (i = \varepsilon, \sigma). \quad (104)$$

В работе [159] было показано, что если представить правую часть уравнения (104) как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $d = -I^\gamma \tau_i^{-\gamma}$, то получим

$$\mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_i^\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tau_i^{-\gamma(n+1)} I^{\gamma(n+1)}, \quad (105)$$

или

$$\mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_i^\gamma) x(t) = \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t-t'}{\tau_i} \right) x(t') dt', \quad (106)$$

где

$$\mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t}{\tau_i} \right) = \frac{t^{\gamma-1}}{\tau_i^\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t/\tau_i)^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \quad (107)$$

- дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова [37-39], которая при $\gamma = 1$ переходит в обычную экспоненту, т.е.

$$\mathfrak{E}_1^* (\tau_i) x(t) = \frac{1}{\tau_i} \int_0^t \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_i} \right) x(t') dt'. \quad (108)$$

Все выражения, которые были получены для вязкоупругой модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными, остаются справедливыми и для модели стандартного линейного твердого тела с обычными производными.

Поскольку вне области контакта вязкоупругие свойства материала пластинки описываются моделью стандартного линейного твердого тела с обычными производными, то можно переписать соотношения (56) и (60) с учетом полученных операторов, положив в них $\gamma = 1$. В результате имеем

$$\begin{aligned}
N_r &= \frac{E_\infty h}{1-\sigma_\infty^2} \left[1 - m_1 \varepsilon_1^*(t_1) - m_2 \varepsilon_1^*(t_2) \right] \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
&+ \frac{E_\infty h \sigma_\infty}{1-\sigma_\infty^2} \left[1 + \frac{m_1}{\sigma_\infty} \varepsilon_1^*(t_1) - \frac{m_2}{\sigma_\infty} \varepsilon_1^*(t_2) \right] \frac{u_r}{r},
\end{aligned} \tag{109}$$

$$Q_r = Kh\mu_\infty \left[1 - \nu_{\varepsilon\mu} \varepsilon_1^*(\tau_\varepsilon) \right] \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \beta_r \right).$$

Чтобы записать операторы (109) в разрывах, заменим в них $\partial u_r / \partial r$ и $\partial W / \partial r$ на $-G^{-1}v_r$ и $-G^{-1}W$ согласно уравнению (62), а затем запишем полученные соотношения в момент времени t и $t + \Delta t$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
N_r^+ &= -\frac{E_\infty h G^{-1}}{1-\sigma_\infty^2} \left[v_r^+ - \frac{m_1}{t_1} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{t_1}} v_r(t') dt' - \frac{m_2}{t_2} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{t_2}} v_r(t') dt' \right] \\
&+ \frac{E_\infty h \sigma_\infty}{(1-\sigma_\infty^2)r} \left[u_r^+ + \frac{m_1}{\sigma_\infty t_1} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{t_1}} u_r(t') dt' - \frac{m_2}{\sigma_\infty t_2} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{t_2}} u_r(t') dt' \right],
\end{aligned} \tag{110}$$

$$\begin{aligned}
N_r^- &= -\frac{E_\infty h G^{-1}}{1-\sigma_\infty^2} \left[v_r^- - \frac{m_1}{t_1} \int_0^{t+\Delta t} e^{-\frac{t+\Delta t-t'}{t_1}} v_r(t') dt' - \frac{m_2}{t_2} \int_0^{t+\Delta t} e^{-\frac{t+\Delta t-t'}{t_2}} v_r(t') dt' \right] \\
&+ \frac{E_\infty h \sigma_\infty}{(1-\sigma_\infty^2)r} \left[u_r^- + \frac{m_1}{\sigma_\infty t_1} \int_0^{t+\Delta t} e^{-\frac{t+\Delta t-t'}{t_1}} u_r(t') dt' - \frac{m_2}{\sigma_\infty t_2} \int_0^{t+\Delta t} e^{-\frac{t+\Delta t-t'}{t_2}} u_r(t') dt' \right],
\end{aligned} \tag{111}$$

$$Q_r^+ = -Kh\mu_\infty \left[(G^{-1}W^+ + \beta_r^+) - \frac{\nu_{\varepsilon\mu}}{\tau_\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{\tau_\varepsilon}} (G^{-1}W(t') + \beta_r(t')) dt' \right], \tag{112}$$

$$Q_r^- = -Kh\mu_\infty \left[(G^{-1}W^- + \beta_r^-) - \frac{\nu_{\varepsilon\mu}}{\tau_\varepsilon} \int_0^{t+\Delta t} e^{-\frac{t+\Delta t-t'}{\tau_\varepsilon}} (G^{-1}W(t') + \beta_r(t')) dt' \right]. \tag{113}$$

Разлагая интегралы, входящие в формулы (111) и (113), в ряд Тейлора по малому параметру Δt и ограничиваясь приближениями нулевого и первого порядков, получим

$$\int_0^{t+\Delta t} e^{-\frac{t+\Delta t-t'}{t_i}} x(t') dt' = \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{t_i}} x(t') dt' + x(t) \Delta t - \frac{\Delta t}{t_i} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{t_i}} x(t') dt' \quad (i=1,2,3), \quad (114)$$

где $x(t)$ может совпадать с $v_r(t)$, $u_r(t)$ или $G^{-1}W(t) + \beta_r(t)$, $t_3 = \tau_\varepsilon$.

Вычитая соотношение (111) из соотношения (110) и соотношение (113) из (112), учитывая при этом соотношение (114), а также то, что $u_r^+ = u_r^-$, $\beta_r^+ = \beta_r^-$, $v_r^+ - v_r^- = [v_r]$, $W^+ - W^- = [W]$, $N_r^+ - N_r^- = [N_r]$, $Q_r^+ - Q_r^- = [Q_r]$, и устремляя Δt к нулю, получим

$$[N_r] = -\frac{E_\infty h}{(1 - \sigma_\infty^2) G} [v_r], \quad (115)$$

$$[Q_r] = -\frac{Kh\mu_\infty}{G} [W]. \quad (116)$$

Из выражений (65) и (115), (56) и (116) можно определить скорости двух типов нестационарных волн: продольно-изгибной волны и поперечно-сдвиговой волны

$$G_\infty^{(1)} = \sqrt{\frac{E_\infty}{\rho(1 - \sigma_\infty^2)}}, \quad (117)$$

$$G_\infty^{(2)} = \sqrt{\frac{K\mu_\infty}{\rho}}. \quad (118)$$

Подставляя найденные скорости (117) и (118) в формулы (65) и (66) и ограничиваясь, как уже было сказано, нулевыми членами лучевых разложений, получим

$$N_r = -\rho h G_\infty^{(1)} v_r, \quad (119)$$

$$Q_r = -\rho h G_\infty^{(2)} W. \quad (120)$$

Соотношения (119) и (120) по виду не отличаются от соответствующих выражений для упругой пластинки, только у скоростей появился значок « ∞ », который указывает, что скорости выражаются через нерелаксированные модули вязкоупругих моделей.

Чтобы показать справедливость этого утверждения, рассмотрим для примера динамическое поведение вязкоупругого стержня, которое описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (121)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = J_\infty \sigma + \int_0^t J^{(1)}(t-t') \sigma(x, t') dt', \quad (122)$$

где σ - напряжение, u - перемещение, ρ - плотность, t - время, J_∞ - нерелаксированная величина податливости, $J^n(t) = d^n J / dt^n$, $J(t)$ - функция ползучести и $J^{(1)} = dJ / dt$ - ядро ползучести.

Если применить условие совместности (61) к уравнениям (121) и (122) и применить к уравнению (72) процедуру, описанную выше при выводе уравнений (115) и (116), то в результате получим из уравнения динамическое условие совместности Адамара

$$[\sigma] = -\rho G[v], \quad (123)$$

и из реологического уравнения (122) соотношение

$$G[\sigma] = -E_\infty[v], \quad (124)$$

где $E_\infty = J_\infty^{-1}$ - нерелаксированный модуль упругости и $v = \partial u / \partial t$.

Исключая величину $[\sigma]$ из уравнений (123) и (124), получим

$$G = \sqrt{\frac{E_\infty}{\rho}}. \quad (125)$$

Если рассматривать чисто упругий стержень, то будут получены те же формулы (123)-(125), с единственным отличием для упругого стержня от вязкоупругого в том, что в этом случае существует только упругий модуль.

С физической точки зрения, такое совпадение можно объяснить тем фактом, что разрывы искомых величин на фронтах ударной волны происходят

очень быстро, поэтому на волновом фронте вязкоупругий материал ведет себя как упругий с нерелаксированным модулем упругости.

Другое дело, если помимо взаимосвязи между разрывами в напряжениях и скоростях, необходимо найти зависимость от времени разрывов величин $\left[\frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n} \right]$ и $\left[\frac{\partial^n v}{\partial t^n} \right]$. В этом случае необходимо продифференцировать уравнения (121) и (122) n и $n+1$ раз по времени t соответственно и использовать условие совместности (61), в котором Z заменить на $\partial^{n-1} Z / \partial t^{n-1}$, в результате чего получим следующее условие совместности:

$$G \left[\frac{\partial^n Z}{\partial x \partial t^{n-1}} \right] = - \left[\frac{\partial^n Z}{\partial t^n} \right] + \frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{\partial^{n-1} Z}{\partial t^{n-1}} \right] \quad (n \geq 1) \quad (126)$$

Исключая величины $\left[\frac{\partial^n v}{\partial t^n} \right]$ ($n \geq 1$) из уравнений, полученных после такой

процедуры, приходим к рекуррентным уравнениям [63, 144]

$$\frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n} \right] + \alpha_1 \left[\frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n} \right] = F_{n-1}(t), \quad (127)$$

$$F_{n-1}(t) = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta t^2} \left[\frac{\partial^{n-1} \sigma}{\partial t^{n-1}} \right] - \sum_{i=1}^n \alpha_{i+1} \left[\frac{\partial^{n-i} \sigma}{\partial t^{n-i}} \right],$$

$$\alpha_i = \frac{J_0^{(i)}}{2J_0}, \quad J_0^{(i)} = J^{(i)}(0), \quad J_0 = J(0),$$

и

$$\left[\frac{\partial^n v}{\partial t^n} \right] = - \frac{1}{\rho G} \left\{ \left[\frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n} \right] - \frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{\partial^{n-1} \sigma}{\partial t^{n-1}} \right] \right\} \quad (n \geq 0). \quad (128)$$

Заметим, что разрыв в перемещении u равен нулю, т.е., $[u] = 0$, так как среда считается сплошной без каких-либо трещин или повреждений. Другими словами, функция $u(t)$ не может быть связана с функцией Хевисайда $H(t)$, так

как функция Хевисайда предполагает наличие разрывов, в то время как функция $u(t)$ непрерывна и не имеет каких-либо разрывов во времени.

Интегрируя (127), получим

$$\left[\frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n} \right] = \exp(-\alpha_1 t) \int_0^t F_{n-1}(t') \exp(\alpha_1 t') dt' + A_n \exp(-\alpha_1 t), \quad (129)$$

где

$$A_n = \frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{\partial^{n-1} \sigma}{\partial t^{n-1}} \right] \Big|_{t=0} - \rho G v_n.$$

Константы v_n заданы на границе стержня $x = 0$ согласно условию

$$v(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} v_n t^n. \quad (130)$$

Из (123) при $n = 0$ находим члены нулевого порядка лучевого ряда для вязкоупругого стержня

$$[\sigma] = A_0 \exp(-\alpha_1 t) H(t - xG^{-1}), \quad (131)$$

в то время как для упругого стержня имеем

$$[\sigma] = A_0 H(t - xG^{-1}). \quad (132)$$

Уравнение (128) при $n = 0$ сводится к динамическому условию совместности для стержня в виде соотношения (123).

В более сложных случаях, таких как распространение цилиндрических волн-полос в вязкоупругих пластинах, разрывы искомым величин пропорциональны $r^{-1/2} \exp(-\alpha t) H(t - rG^{-1})$, где $r = r_0 + Gt$, и r_0 - начальный радиус нестационарной цилиндрической волны-полосы (см., например, [151]).

Так как в нашем случае нет необходимости определять зависимость от времени разрывов нулевого порядка, поэтому можно ограничиться выводом динамических условий совместности (65) и (66), связывающих разрывы обобщенных сил с разрывами обобщенных скоростей, и эти формулы ничем не отличаются от выражений для упругой пластинки.

3.3. Уравнения движения зоны контакта и ударника

При $t > 0$ перемещение центра шара $z(t)$ может быть представлено в виде

$$z = w + \alpha, \quad (133)$$

где α - вдавливание ударника в результате местного смятия материалов мишени и ударника внутри зоны контакта.

Тогда уравнение движения части пластинки, находящейся в контакте с шаром, и уравнение движения шара имеют вид

$$2\pi a N_r \frac{\partial w}{\partial r} + 2\pi a Q_r + P(t) = \rho h \pi a^2 \ddot{w}, \quad (134)$$

$$m \ddot{z} = -P(t), \quad (135)$$

где $a(t)$ - радиус зоны контакта, $P(t)$ - контактная сила.

Уравнения (134) и (135) решаются с учетом формул (119) и (120), а также следующих начальных условий:

$$z|_{t=0} = 0, \quad \dot{z}|_{t=0} = V_0, \quad w|_{t=0} = 0, \quad \dot{w}|_{t=0} = 0. \quad (136)$$

К уравнениям (134) и (135) добавим соотношения, которые следуют из обобщенной контактной теории Герца

$$P(t) = \frac{4\sqrt{R}}{3} k \alpha^{3/2}, \quad (137)$$

$$a = \sqrt{\alpha R}, \quad (138)$$

где

$$k = \left(\frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \right)^{-1}, \quad (139)$$

при этом индексы "1" и "2" относятся к вязкоупругой пластинке и вязкоупругому шару соответственно. Операторы, которые действуют в зоне контакта, базируются на модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными.

Интегрируя уравнение (135), получим

$$z(t) = -\frac{1}{m} \int_0^t P(t')(t-t')dt' + V_0 t. \quad (140)$$

Для того чтобы выразить контактную силу $P(t)$ через перемещение $\alpha(t)$, нужно расшифровать оператор k . Процедура вычисления этого оператора, а также его обратного оператора, подробно описана в работах Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В. [159, 161]. Так, в [159] было показано, что оператор k записывается в виде

$$k = \mathfrak{a}_\infty^{-1} \left[1 - \sum_{j=1}^4 M_j \mathfrak{E}_\gamma^* (T_j^\gamma) \right], \quad (141)$$

где

$$\mathfrak{a}_\infty = \frac{1 - \sigma_{1\infty}^2}{E_{1\infty}} + \frac{1 - \sigma_{2\infty}^2}{E_{2\infty}}, \quad (142)$$

а неизвестные константы M_j и T_j можно определить из системы уравнений

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^4 \frac{n_k \tau_k^{-\gamma}}{\tau_k^{-\gamma} - T_j^{-\gamma}} &= 0, \\ 1 + \sum_{j=1}^4 \frac{M_j T_j^{-\gamma}}{\tau_k^{-\gamma} - T_j^{-\gamma}} &= 0, \end{aligned} \quad (143)$$

в которой

$$\begin{aligned} \tau_1^\gamma &= \tau_{1\varepsilon E}^\gamma, \quad \tau_2^\gamma = \tau_{1\sigma E}^\gamma, \quad \tau_3^\gamma = \tau_{2\varepsilon E}^\gamma, \quad \tau_4^\gamma = \tau_{2\sigma E}^\gamma, \\ n_1 &= \frac{(1 - 2\sigma_{1\infty})^2 v_{1\varepsilon E}}{4E_{1\infty} \mathfrak{a}_\infty}, \quad n_2 = \frac{3v_{1\sigma E}}{4E_{1\infty} \mathfrak{a}_\infty}, \\ n_3 &= \frac{(1 - 2\sigma_{2\infty})^2 v_{2\varepsilon E}}{4E_{2\infty} \mathfrak{a}_\infty}, \quad n_4 = \frac{3v_{2\sigma E}}{4E_{2\infty} \mathfrak{a}_\infty}. \end{aligned} \quad (144)$$

С учетом соотношения (141), контактная сила определяется в следующем виде:

$$P(t) = k_\infty \left[\alpha^{3/2}(t) - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t-t''}{T_j} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right], \quad (145)$$

где $k_\infty = 4\sqrt{R} / 3\alpha_\infty$.

Используя уравнение (145), соотношение (140) можно переписать в виде

$$z(t) = V_0 t - \frac{k_\infty}{m} \int_0^t \left[\alpha^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^{t'} \partial_\gamma \left(-\frac{t' - t''}{T_j} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right] (t - t') dt'. \quad (146)$$

Величины N_r и Q_r , представленные формулами (119) и (120), нужно подставить в уравнение (134). Тогда это уравнение вместе с уравнением (146) дает систему разрешающих уравнений, содержащих только две неизвестные величины, α и w . Тем не менее, сила N_r , входящая в уравнение (134), согласно формуле (119) зависит от скорости v_r , которую необходимо выразить через эти величины.

С этой целью запишем выражение для тензора напряжений σ_{ij} в трехмерной вязкоупругой среде

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{l,l} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (147)$$

где u_i - компоненты вектора перемещения, суммирование производится по двум повторяющимся индексам, δ_{ij} - символ Кронекера, $i, j = 1, 2, 3$, индекс после запятой обозначает производную по координатам $x_1 = x$, $x_2 = y$ и $x_3 = z$.

Учитывая формулу (76), а также выражение для оператора

$$\lambda = \lambda_\infty \left[1 + \nu_{\varepsilon\lambda} \partial_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) \right], \quad (148)$$

где $\nu_{\varepsilon\lambda} = \frac{2\mu_\infty}{3\lambda_\infty} \nu_{\varepsilon\mu}$, которое вытекает из формулы

$$K_\infty = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad (149)$$

перепишем уравнение (147) в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda_\infty \left[1 + \nu_{\varepsilon\lambda} \partial_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) \right] u_{l,l} \delta_{ij} + \mu_\infty \left[1 - \nu_{\varepsilon\mu} \partial_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) \right] (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (150)$$

Применяя методику, использованную выше при выводе выражений (115) и (66), из уравнения (150) получим

$$[\sigma_{ij}] = \lambda_{\infty}[u_{l,l}]\delta_{ij} + \mu_{\infty}([u_{i,j}] + [u_{j,i}]). \quad (151)$$

Применяя геометрическое условие совместности

$$G[u_{j,i}] = -[v_j]v_i + G[u_{j,N}]N_i, \quad (152)$$

где v_i - компоненты единичного вектора нормали \vec{v} к волновой поверхности, N_i - компоненты единичного вектора нормали \vec{N} к пластинке, к уравнению (101), получим

$$0 = -\lambda_{\infty}G^{-1}[v_l]v_lN_i - \mu_{\infty}G^{-1}[v_j]N_jv_i + \mu_{\infty}[u_{i,N}] + (\lambda_{\infty} + \mu_{\infty})[u_{N,N}]N_i, \quad (153)$$

где $[u_{i,N}] = [u_{i,j}]N_j$, и $[u_{N,N}] = [u_{i,j}]N_iN_j$.

Заметим, что условие (152) отличается от условия совместности Адамара тем, что содержит второе слагаемое, учитывающее деформацию поперечного сдвига пластинки.

Умножая (153) на N_i , находим

$$G^{-1}[v_l]v_l = (\lambda_{\infty} + 2\mu_{\infty})\lambda_{\infty}^{-1}[u_{N,N}]. \quad (154)$$

Принимая во внимание, что в цилиндрической системе координат (r, φ, z) для цилиндрической поверхности-полоски сильного разрыва, распространяющейся в пластинке, $[v_l]v_l = [v_r]$ и $[u_{N,N}] = [u_{z,z}]$ и учитывая, что $\lambda_{\infty}(\lambda_{\infty} + \mu_{\infty})^{-1} = \sigma_{\infty}(1 - \sigma_{\infty})^{-1}$, приходим к следующему соотношению:

$$G_{\infty}^{(1)}[u_{z,z}] = \sigma_{\infty}(1 - \sigma_{\infty})^{-1}[v_r], \quad (155)$$

в котором величина $[u_{z,z}]$, в свою очередь, определяется выражением

$$[u_{z,z}] = -\alpha / h. \quad (156)$$

Тогда скачок $[v_r]$ можно записать в виде

$$[v_r] = -G_{\infty}^{(1)}\alpha(1 - \sigma_{\infty}) / h\sigma_{\infty}, \quad (157)$$

и величина N_r , согласно формуле (119), принимает вид

$$N_r = \rho G_\infty^{(1)2} \alpha (1 - \sigma_\infty) / \sigma_\infty. \quad (158)$$

Учитывая формулы (120), (138), (145) и (158), а также соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -G_\infty^{(2)-1} W, \quad (159)$$

которое получается из выражения (62), если туда подставить вместо функции Z функцию w , перепишем уравнение (134) в виде

$$M \alpha \dot{W} = -e \alpha^{3/2} W - g \alpha^{1/2} W + k_\infty \left[\alpha^{3/2} - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t-t''}{T_j} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right], \quad (160)$$

где

$$e = \frac{2G_\infty^{(1)2} (1 - \sigma_\infty) M}{h \sqrt{R} G_\infty^{(2)} \sigma_\infty}, \quad g = \frac{2G_\infty^{(2)} M}{\sqrt{R}}, \quad M = \rho h \pi R.$$

Заметим, что поскольку ударный процесс является кратковременным, то в интегралах, входящих в уравнения (146) и (160)

$$\mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t}{T_j} \right) \approx \frac{t^{\gamma-1}}{T_j^\gamma \Gamma(\gamma)} \quad (j=1,2,3,4). \quad (161)$$

С учетом формулы (161), перепишем уравнения (146) и (160) в виде

$$z(t) = V_0 t - \frac{k_\infty}{m} \int_0^t \left[\alpha^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^{t'} \frac{(t'-t'')^{\gamma-1}}{T_j^\gamma \Gamma(\gamma)} \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right] (t-t') dt'. \quad (162)$$

$$M \alpha \dot{W} = -\left(e \alpha^{3/2} + g \alpha^{1/2} \right) W + k_\infty \left[\alpha^{3/2}(t) - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^t \frac{(t-t'')^{\gamma-1}}{T_j^\gamma \Gamma(\gamma)} \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right]. \quad (163)$$

Присоединяя формулу (133) к уравнениям (162) и (163), получим замкнутую систему трех уравнений относительно трех неизвестных функций: $z(t)$, $w(t)$ и $\alpha(t)$.

3.4. Приближенное аналитическое решение определяющей системы уравнений

Рассмотрим несколько случаев.

Частный случай при $\gamma = 0$

Рассмотрим случай, когда $\gamma = 0$, который соответствует упругой мишени и упругому ударнику.

Поскольку при $\gamma = 0$

$$\sum_{j=1}^4 M_j = 0, \quad (164)$$

как это было показано в [166], то в уравнениях (162) и (163) члены, содержащие суммы, пропадают, и уравнение (163) принимает вид

$$M\alpha\dot{W} = -\alpha^{1/2}(e\alpha + g)W + k_{\infty}\alpha^{3/2}, \quad (165)$$

а уравнение (162) можно оставить в виде (135).

Если в уравнении (165) пренебречь инерцией контактного пятна в силу его малости, то его можно переписать так:

$$W = k_{\infty} \frac{\alpha}{e\alpha + g}. \quad (166)$$

Учитывая соотношения

$$\dot{W} = \frac{dW}{d\alpha}\dot{\alpha}, \quad \frac{dW}{d\alpha} = \frac{k_{\infty}g}{(e\alpha + g)^2},$$

и вводя новую переменную

$$A = \dot{\alpha}, \quad (167)$$

уравнение (135) с учетом соотношения (166) может быть записано в виде

$$A \frac{dA}{d\alpha} + \frac{k_{\infty}g}{(e\alpha + g)^2} A = -\frac{k_{\infty}}{m} \alpha^{3/2}, \quad (168)$$

где $AdA/d\alpha = \ddot{\alpha}$.

Если пренебречь деформацией срединной поверхности, т.е. принять $e = 0$, то уравнение (168) примет вид

$$A \frac{dA}{d\alpha} + a_1 A = -\frac{k_\infty}{m} \alpha^{3/2}, \quad (169)$$

где $a_1 = k_\infty / g$.

Заметим, что уравнение (169) является уравнением Абеля второго рода [108], и его решение найдено в [143, 152] в виде

$$A = V_0 - a_1 \alpha + a_2 \alpha^{5/2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+1} \alpha^{(2n+3)/2}, \quad (170)$$

где

$$a_{n+1} = \prod_{m=2}^n \left(\frac{2m+1}{2m+3} \right) \left(\frac{a_1}{V_0} \right)^{n-1} a_2, \quad a_2 = -\frac{2 k_\infty}{5 V_0 m}.$$

В работах [143, 152] было показано, что коэффициенты a_1 и a_2 определяют два различных процесса, протекающих при ударном взаимодействии ударника и мишени: коэффициент a_1 отвечает за динамические процессы, возникающие в пластине при распространении поверхности сильного разрыва, а коэффициент a_2 описывает квазистатический процесс, происходящий при местном смятии материалов пластинки и шара по теории Герца. Если $a_1 \rightarrow 0$, что соответствует бесконечно большой скорости распространения волны поперечного сдвига (пластина Кирхгофа-Лява), то решение (170) для малых α переходит в квазистатическое решение [187].

Если $e \rightarrow \infty$ в уравнении (168), тогда приходим к хорошо известному уравнению, которое описывает соударение упругих тел по теории Герца [117].

Если $e \neq 0$, то, так как α является малой величиной, уравнение (168) может быть записано в виде

$$\ddot{\alpha} + a_1 \dot{\alpha} = \frac{k_\infty e}{g^2} (\alpha^2) - \frac{k_\infty}{m} \alpha^{3/2}. \quad (171)$$

Положим в правой части уравнения (171) $\alpha = V_0 t$ и проинтегрируем его. В результате получим

$$\dot{\alpha} = V_0 - a_1 V_0 t + k_\infty e g^{-2} V_0^2 t^2, \quad (172)$$

$$\alpha = V_0 t - \frac{1}{2} a_1 V_0 t^2 + \frac{1}{3} k_\infty e g^{-2} V_0^2 t^3. \quad (173)$$

Из уравнений (173) и (172) определим уточненное время контакта

$$t_{reb}^{0ex} = t_{reb}^0 + \frac{2}{3} V_0 \frac{e}{g} (t_{reb}^0)^2, \quad (174)$$

где $t_{reb}^0 = 2gk_\infty^{-1}$, так же, как и уточненное время, при котором α достигает своего максимального значения

$$t_{max}^{0ex} = t_{max}^0 + \frac{e}{g} V_0 (t_{max}^0)^2, \quad (175)$$

где $t_{max}^0 = gk_\infty^{-1}$, и максимальное смятие

$$\alpha_{max}^{0ex} = \alpha_{max}^0 + \frac{1}{3} V_0^2 \frac{k_\infty e}{g^2} (t_{max}^0)^3, \quad (176)$$

где $\alpha_{max}^0 = \frac{1}{2} V_0 g k_\infty^{-1}$.

Частный случай при $\gamma = 1$

При $\gamma = 1$ уравнения (162) и (163) без инерции контактного пятна в силу его малости и с учетом того, что $\alpha = V_0 t$, принимают вид

$$\alpha + w = V_0 t - \frac{k_\infty}{m} V_0^{3/2} \int_0^t \left(t'^{3/2} - \frac{2}{5} \Delta t'^{5/2} \right) (t - t') dt', \quad (177)$$

$$(e\alpha + g) \alpha^{1/2} W = k_\infty V_0^{3/2} \left(t^{3/2} - \frac{2}{5} \Delta t^{5/2} \right), \quad (178)$$

где $\Delta = \sum_{j=1}^4 M_j T_j^{-1}$, или после исключения величины W из уравнений (177) и (178)

$$\dot{\alpha} = V_0 - \frac{k_\infty}{g} V_0 t + \frac{k_\infty}{g} V_0 \left(\frac{2}{5} \Delta + \frac{e}{g} V_0 \right) t^2, \quad (179)$$

$$\alpha = V_0 t - \frac{k_\infty}{2g} V_0 t^2 + \frac{k_\infty}{3g} V_0 \left(\frac{2}{5} \Delta + \frac{e}{g} V_0 \right) t^3. \quad (180)$$

Из уравнений (179) и (180) находим уточненное время контакта

$$t_{reb}^{1ex} = t_{reb}^0 + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5} \Delta + V_0 \frac{e}{g} \right) (t_{reb}^0)^2, \quad (181)$$

а также уточненное время, при котором α достигает своего максимального значения

$$t_{max}^{1ex} = t_{max}^0 + \left(\frac{2}{5} \Delta + V_0 \frac{e}{g} \right) (t_{max}^0)^3, \quad (182)$$

и само максимальное смятие

$$\alpha_{max}^{1ex} = \alpha_{max}^0 + \frac{1}{3} V_0 \frac{k_\infty}{g} \left(\frac{2}{5} \Delta + V_0 \frac{e}{g} \right) (t_{max}^0)^3. \quad (183)$$

Сравнивая формулы (174) и (181), (175) и (182), так же, как (176) и (183), можно сделать следующие выводы: все характеристические величины, подсчитанные при $\gamma = 1$, больше аналогичных характеристических величин, что вычислены при $\gamma = 0$, а все характеристические величины, вычисленные при других значениях γ ($0 < \gamma < 1$), располагаются между этими двумя предельными аналогичными характеристическими величинами в порядке возрастания значений величины γ .

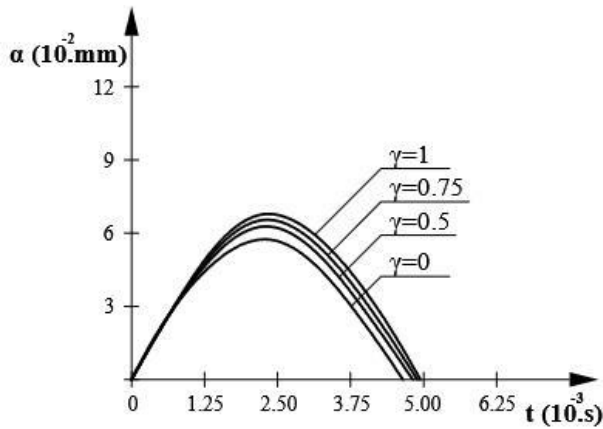
3.5. Численные исследования

На рис. 3.1-3.12 приведены временные зависимости локально смятия и контактной силы для различных значений параметра дробности γ , которые обозначены цифрами около соответствующих кривых, и различных сочетаний начальной скорости удара, радиуса ударника и толщины пластинки.

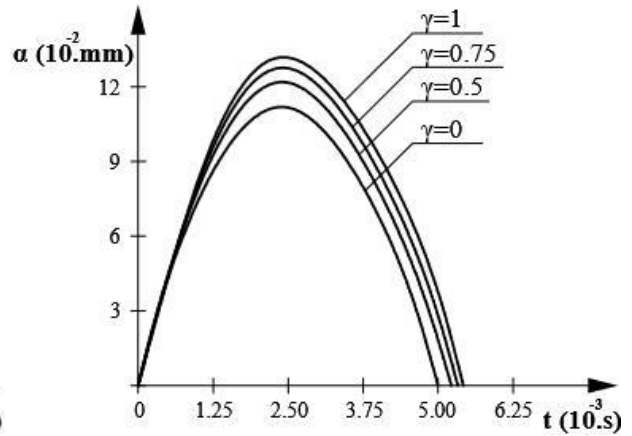
Из рис. 3.1-3.12 видно, что при увеличении параметра γ от 0, что соответствует упругому материалу ударника и мишени, до 1, что отвечает вязкоупругому материалу, свойства которого описываются моделью стандартного линейного тела с обычной производной, максимальное значение контактной силы уменьшается, а время контакта растет. Увеличение толщины пластинки приводит к увеличению как максимального значений контактной силы, так и продолжительности контакта. Из рисунков следует, что чем больше начальная скорость удара, тем больше контактная сила и меньше время контакта. Увеличение радиуса ударника, т.е. его массы, приводит к уменьшению и контактной силы, и продолжительности контакта.

Из сравнения соответствующих рисунков из серии 2.1-2.12 и 3.1-3.12 видно, что учет растяжения делает механическую систему «мишень-ударник» более гибкой, что приводит к увеличению максимальных значений контактной силы и локального смятия материалов пластинки и шара в зоне контакта, а также к увеличению продолжительности контактного взаимодействия при одних и тех же значениях параметра дробности.

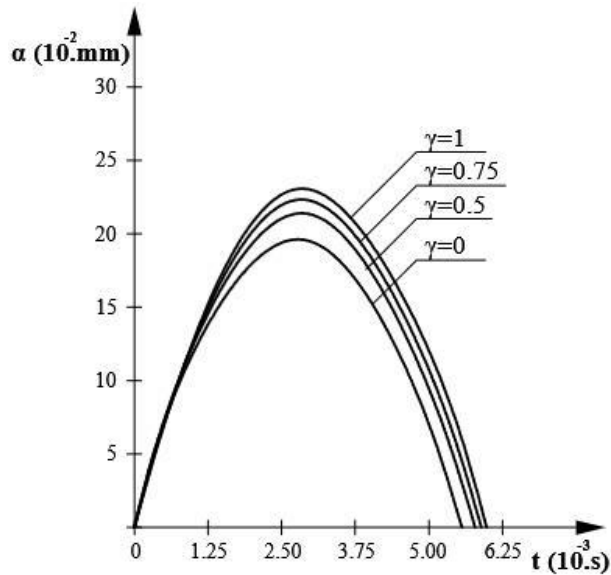
а)



б)



в)



г)

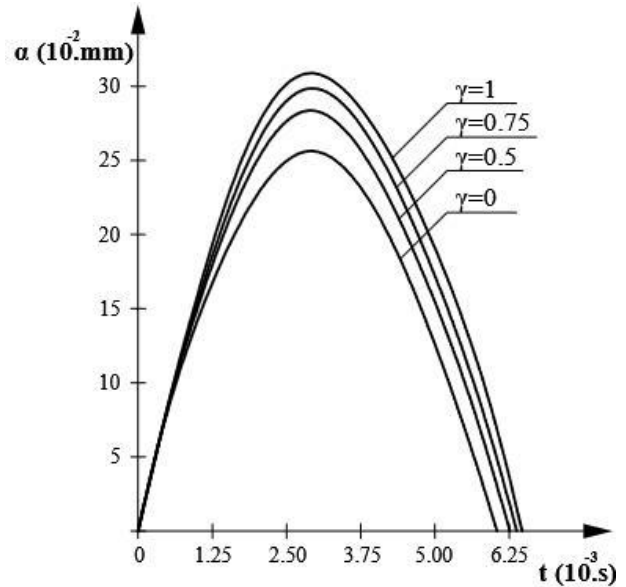
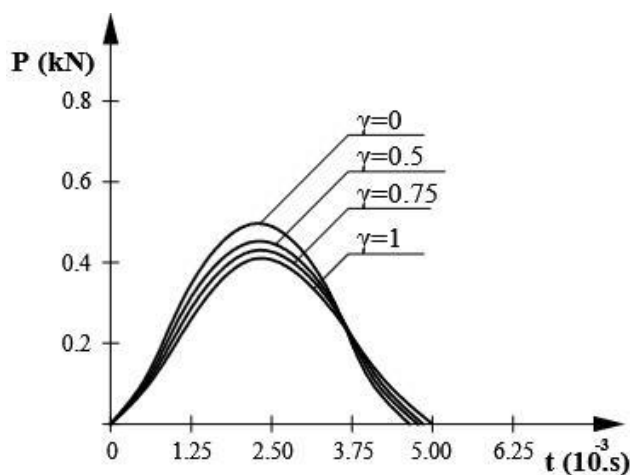
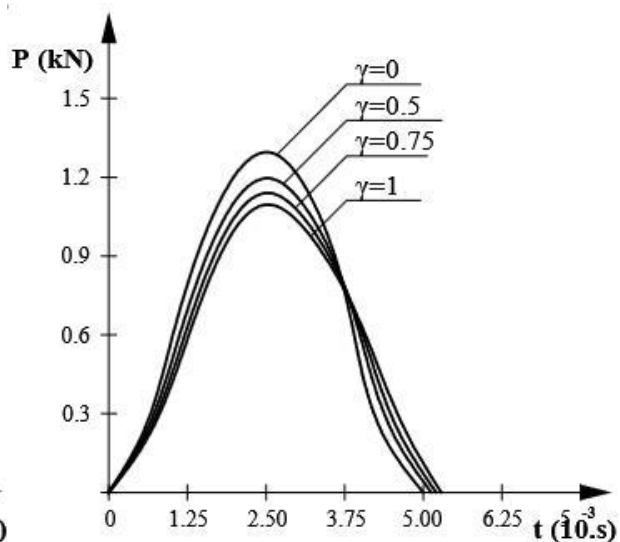


Рис. 3.1. Зависимость локального смятия от времени в случае радиуса шара $R=2\text{см}$, $h=14\text{мм}$ и начальной скорости удара V_0
 а) 5м/с , б) 10м/с , в) 15м/с , г) 20м/с

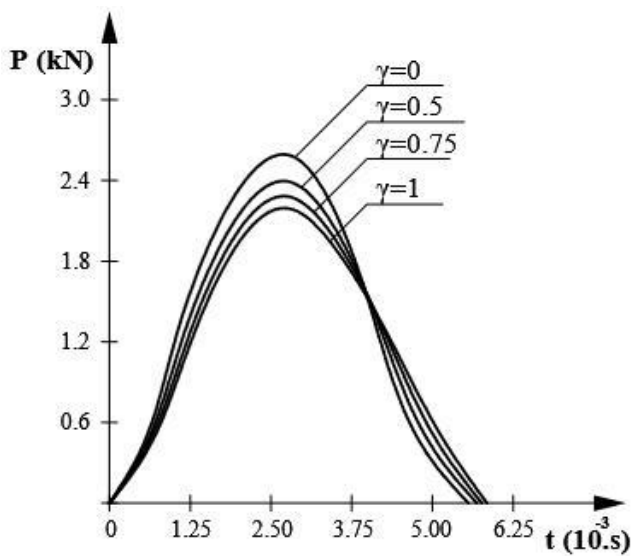
а)



б)



в)



г)

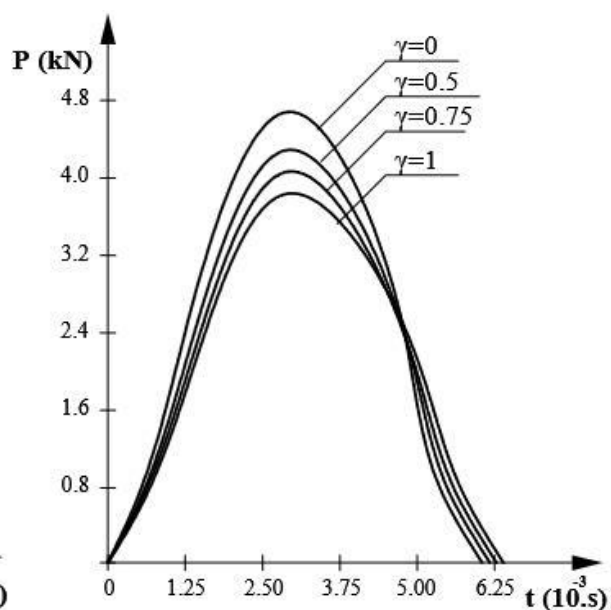
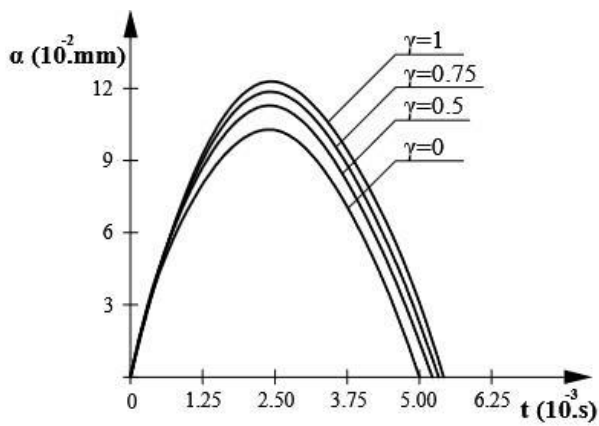
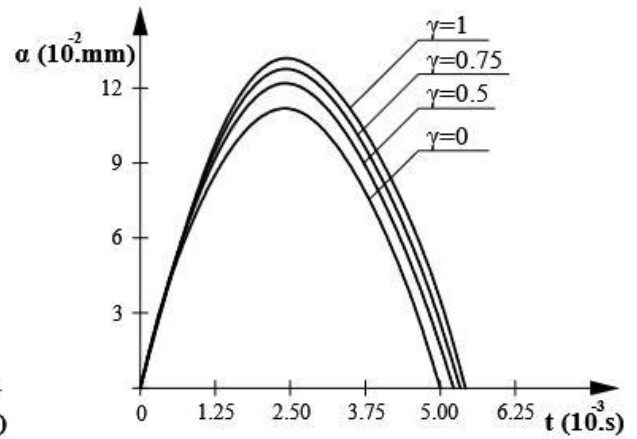


Рис. 3.2. Зависимость контактной силы от времени в случае радиуса шара $R=2\text{см}$, $h=14\text{мм}$ и начальной скорости удара V_0
 а) 5м/с , б) 10м/с , в) 15м/с , г) 20м/с

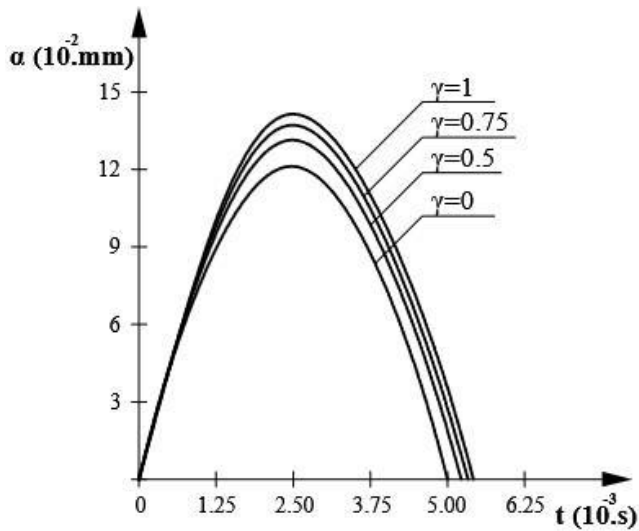
а)



б)



в)



г)

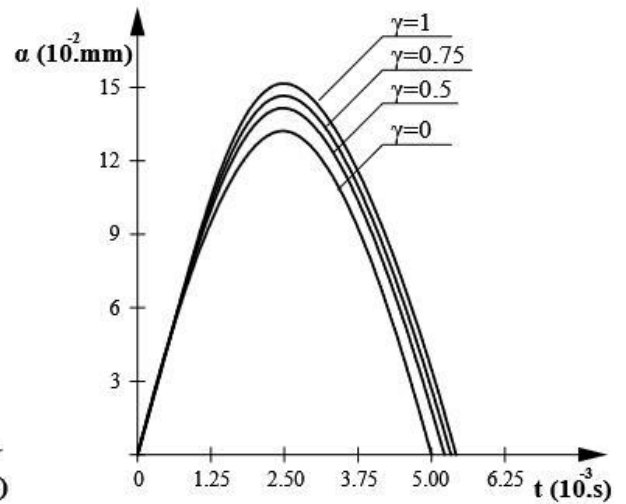
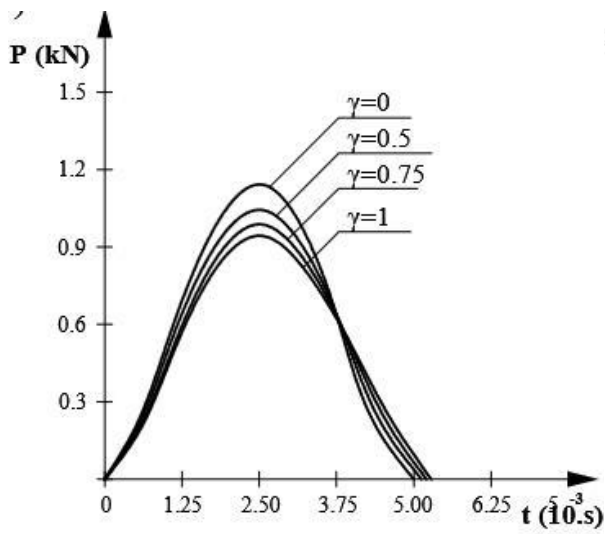
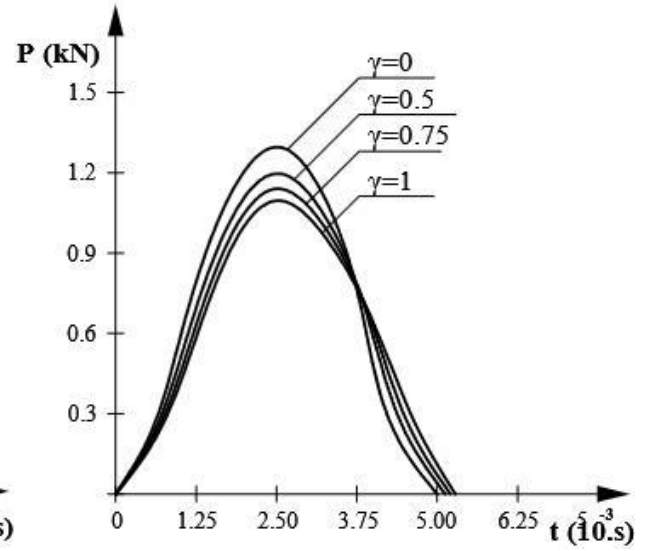


Рис. 3.3. Зависимость локального смятия от времени в случае начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$, $h=14\text{мм}$ с радиусом ударника а) 1см, б) 2см, в) 3см, г) 4см

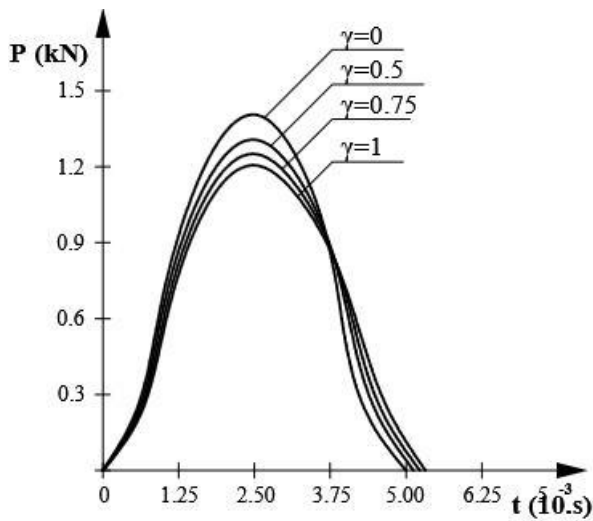
а)



б)



в)



г)

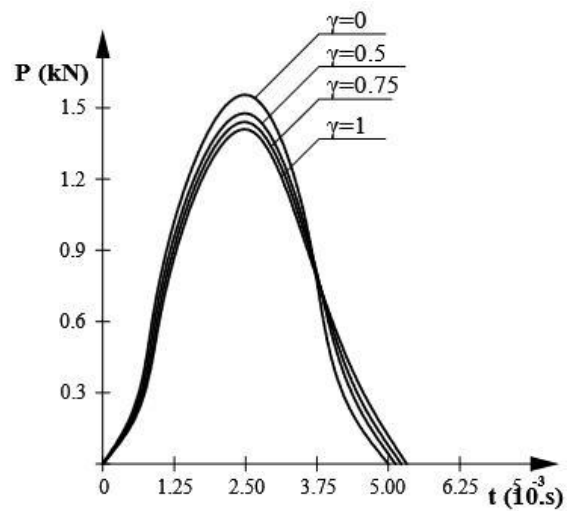
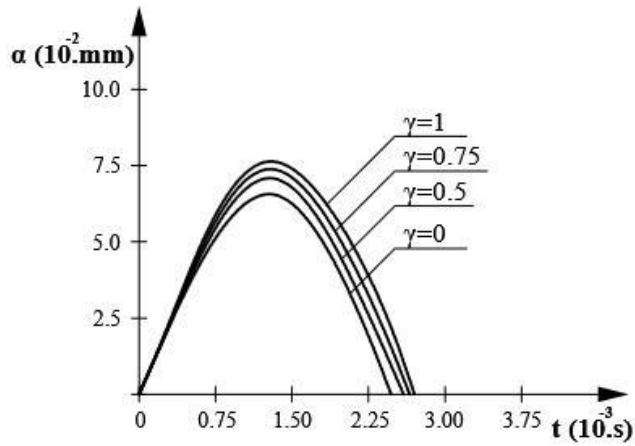
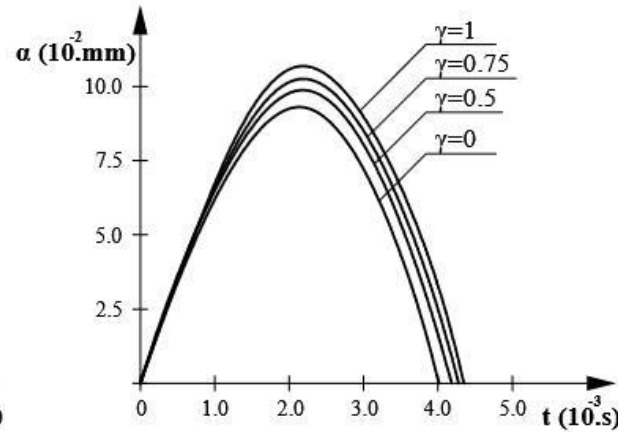


Рис. 3.4. Зависимость контактной силы от времени в случае начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$, $h=14\text{мм}$ с радиусом ударника а) 1см, б) 2см, в) 3см, г) 4см

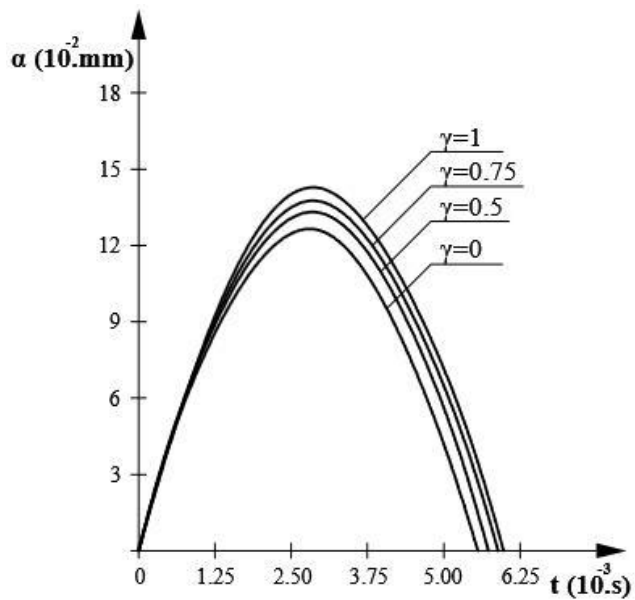
а)



б)



в)



г)

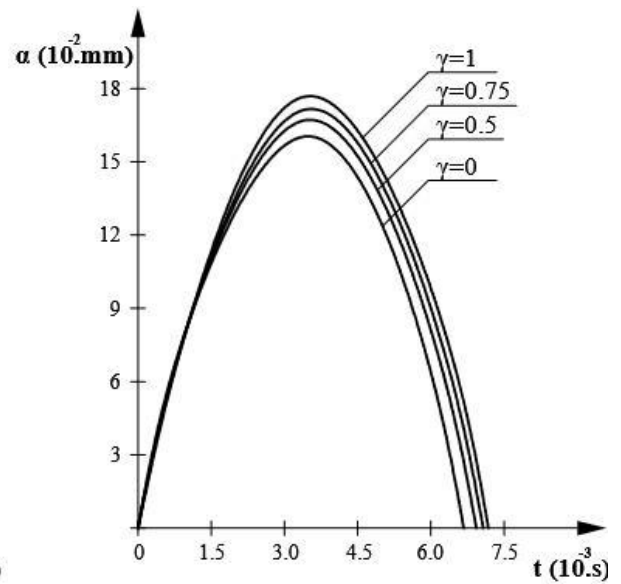
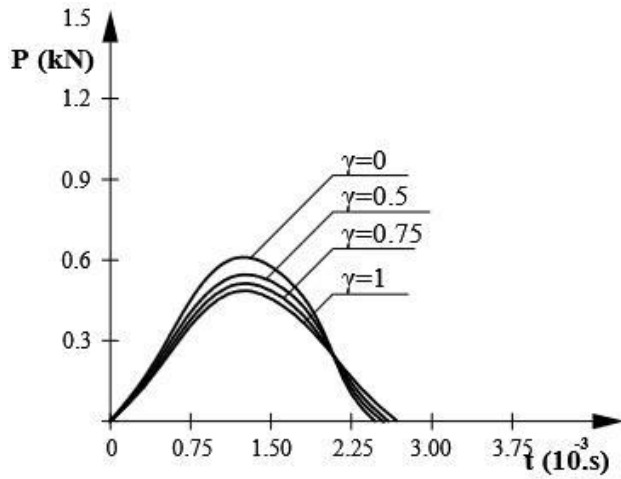
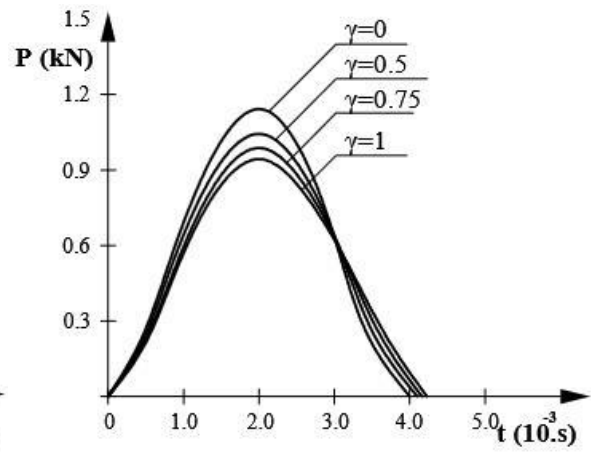


Рис. 3.5. Зависимость локального смятия от времени в случае начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$ с радиусом ударника $R=2\text{см}$, $h=$ а) 8мм , б) 12мм , в) 16мм , г) 20мм

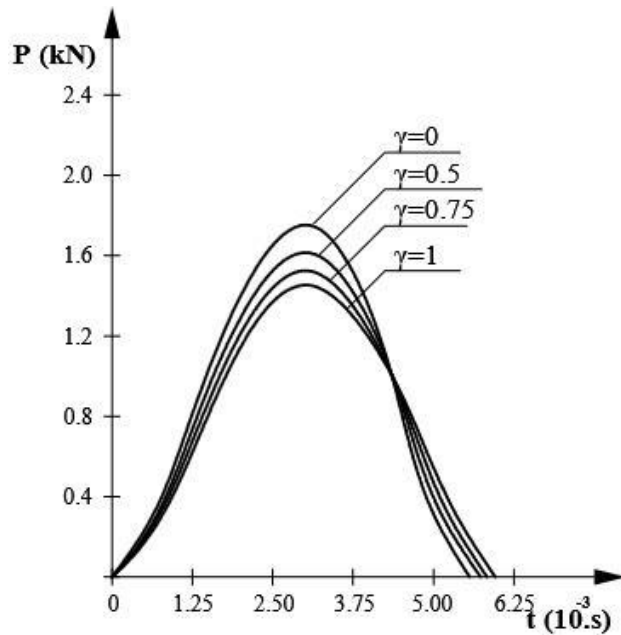
а)



б)



в)



г)

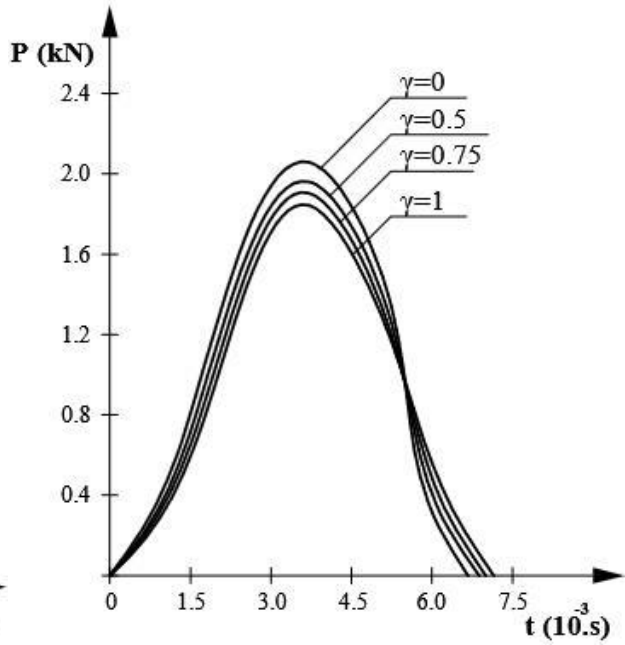
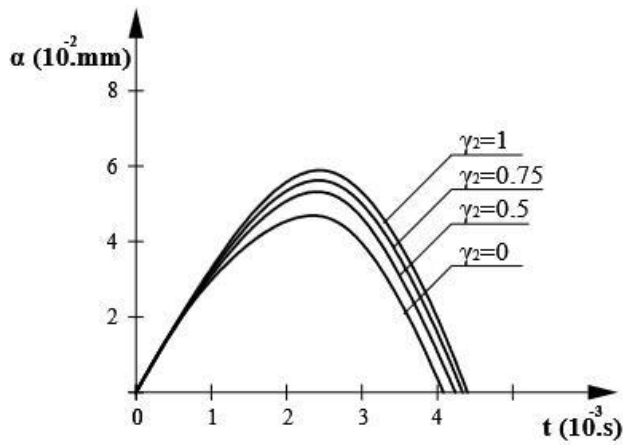
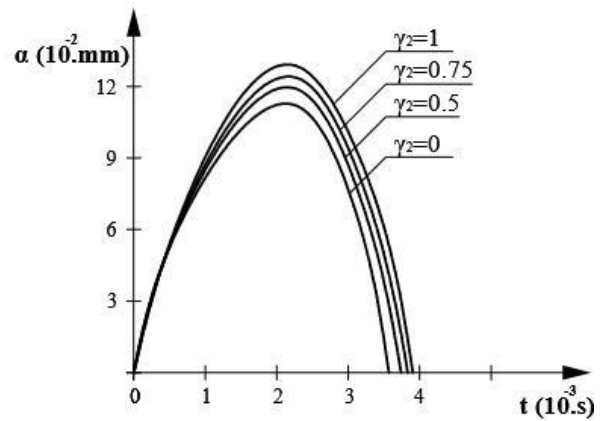


Рис. 3.6. Зависимость контактной силы от времени в случае начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$ с радиусом ударника $R=2\text{см}$, $h=$ а) 8мм, б) 12мм, в) 16мм, г) 20мм

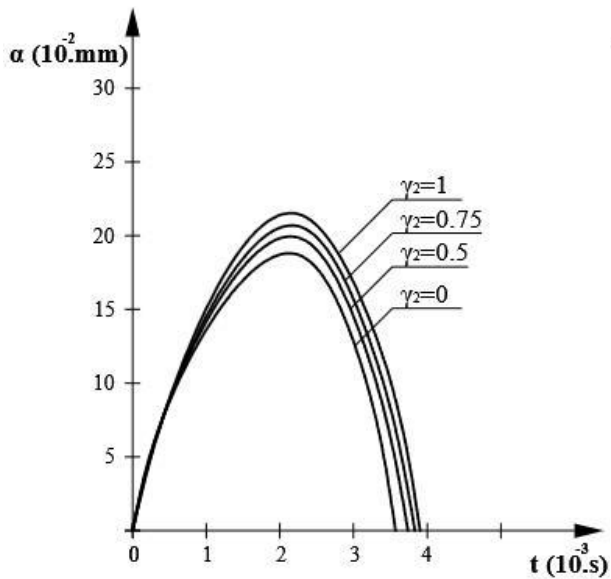
а)



б)



в)



г)

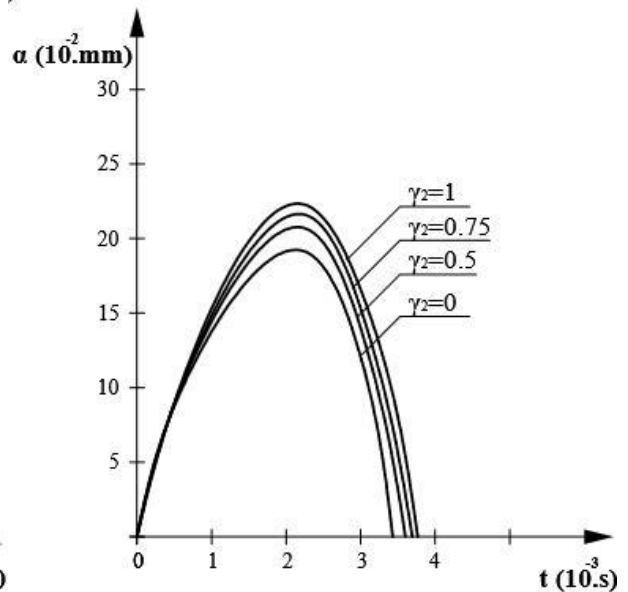
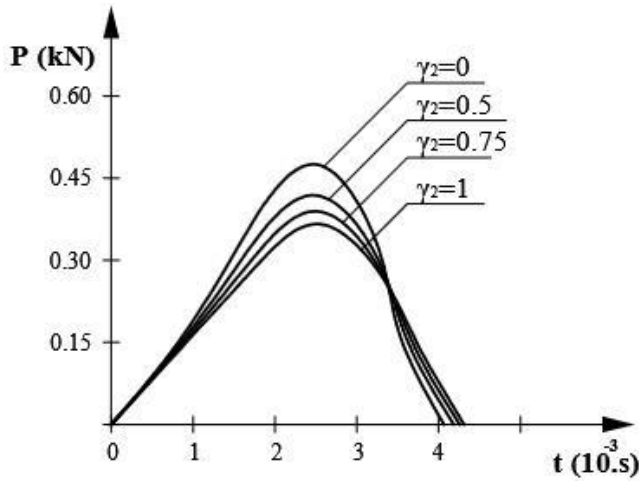
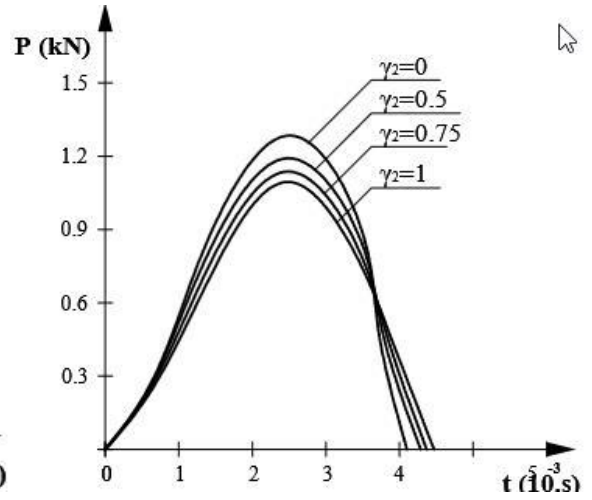


Рис. 3.7. Зависимость локального смятия от времени в случае радиуса шара $R=2\text{см}$, предварительно напряженной пластинки $h=14\text{мм}$ и начальной скорости удара V_0 :
 а) 5м/с , б) 10м/с , в) 15м/с , г) 20м/с

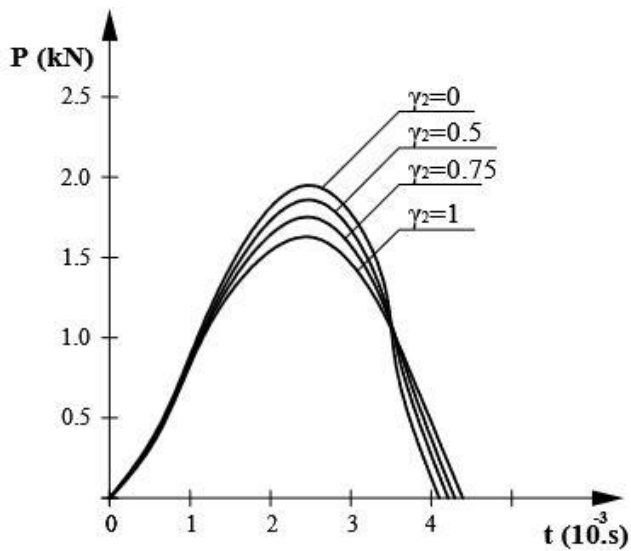
а)



б)



в)



г)

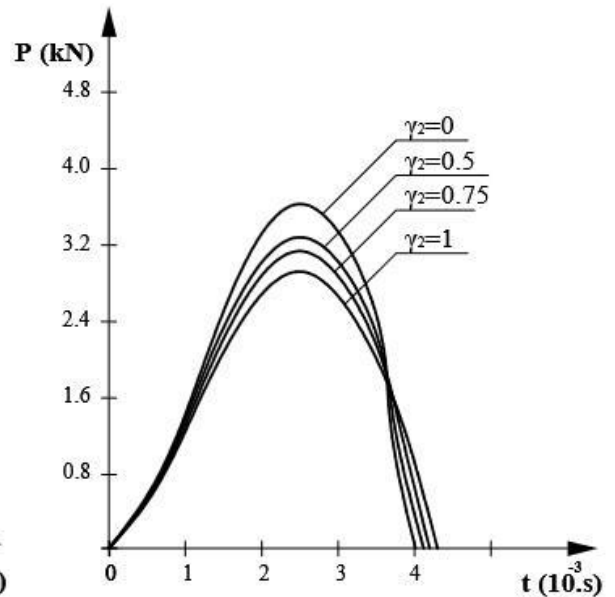
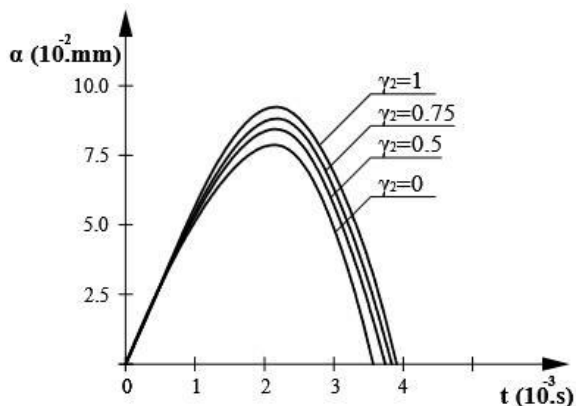
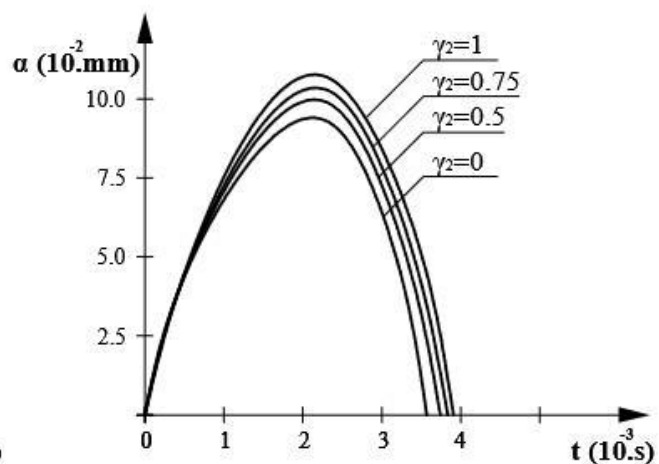


Рис. 3.8. Зависимость контактной силы от времени в случае радиуса шара $R=2\text{ см}$, предварительно напряженной пластинки толщиной $h=14\text{ мм}$ и начальной скорости удара V_0 :
 а) 5 м/с , б) 10 м/с , в) 15 м/с , г) 20 м/с

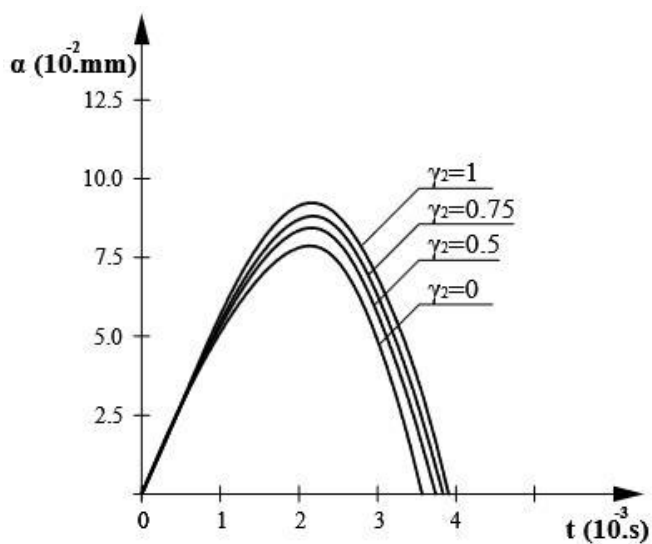
а)



б)



в)



г)

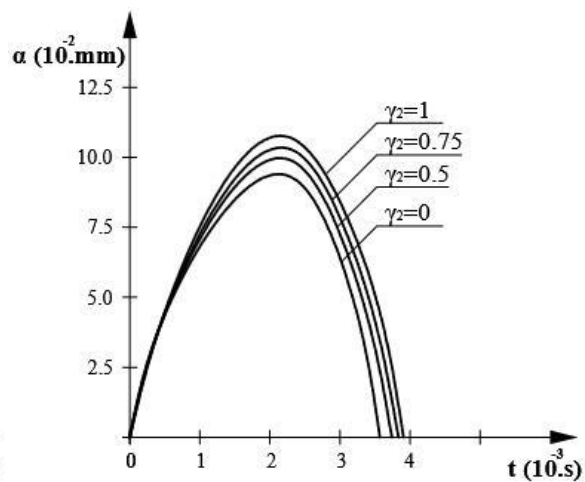
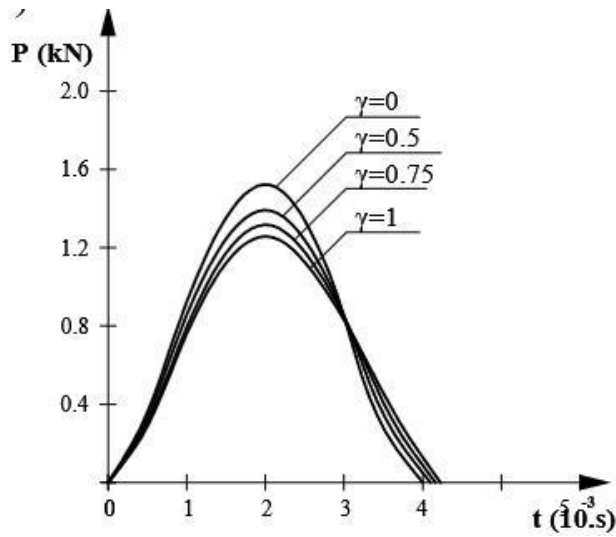
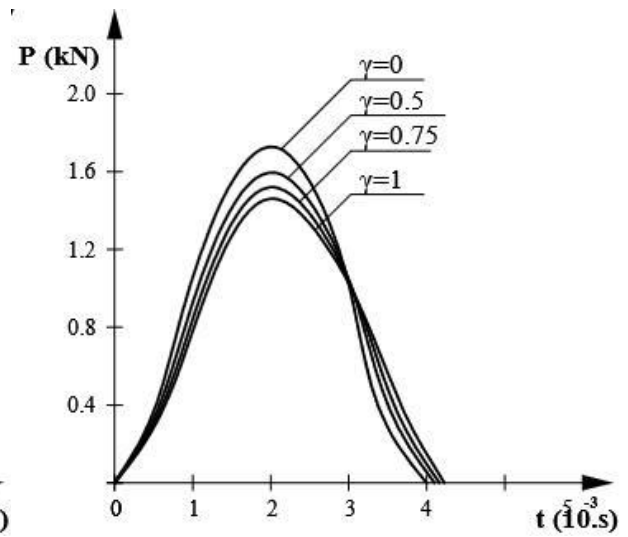


Рис. 3.9. Зависимость локального смятия от времени в случае начальной скорости удара $V_0=10\text{ м/с}$, предварительно напряженной пластинки толщиной $h=14\text{ мм}$, с радиусом ударника R: а) 1 см, б) 2 см, в) 3 см, г) 4 см

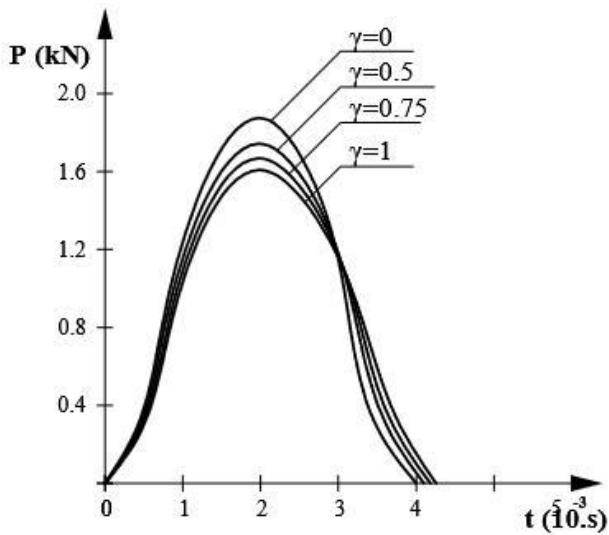
а)



б)



в)



г)

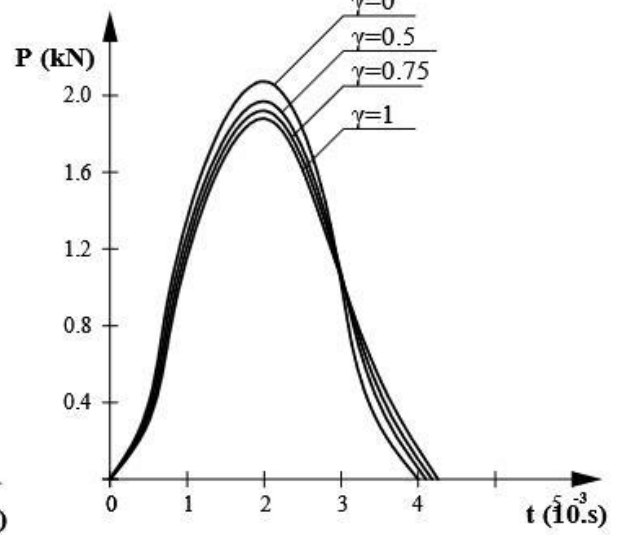
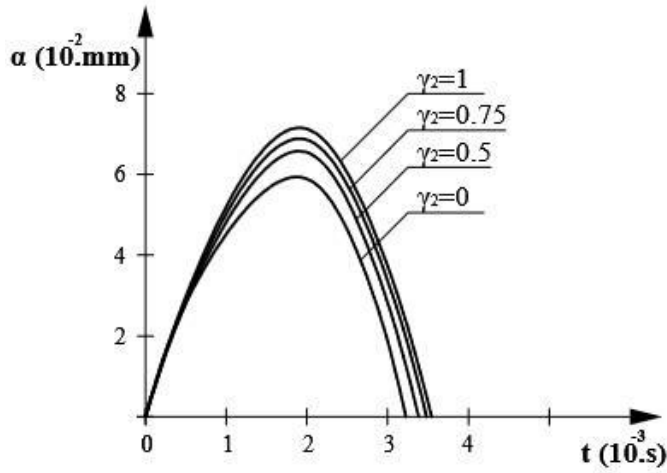
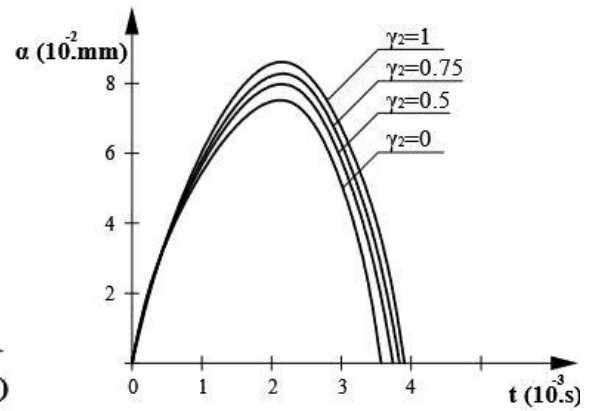


Рис. 3.10. Зависимость контактной силы от времени в случае начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$, предварительно напряженной пластинки $h=14\text{мм}$ с радиусом ударника $R=$ а) 1см, б) 2см, в) 3см, г) 4см

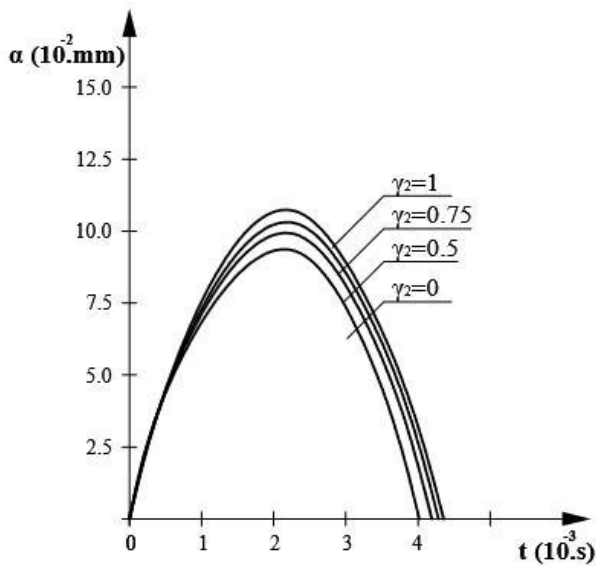
а)



б)



в)



г)

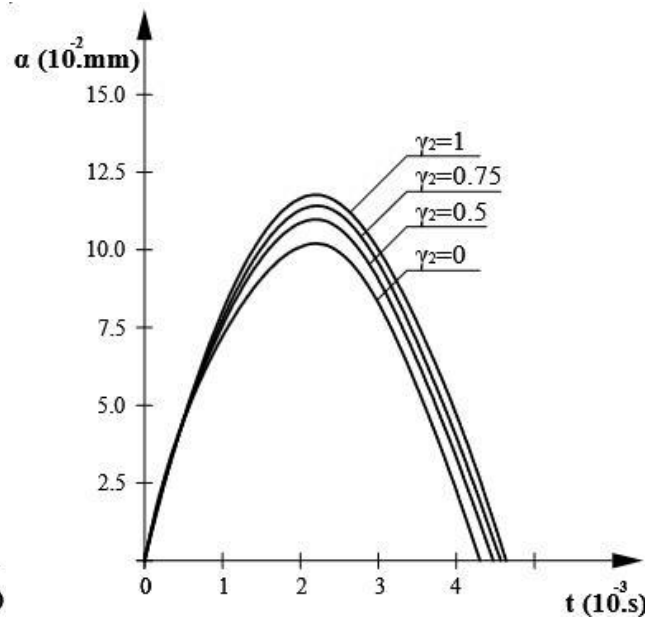
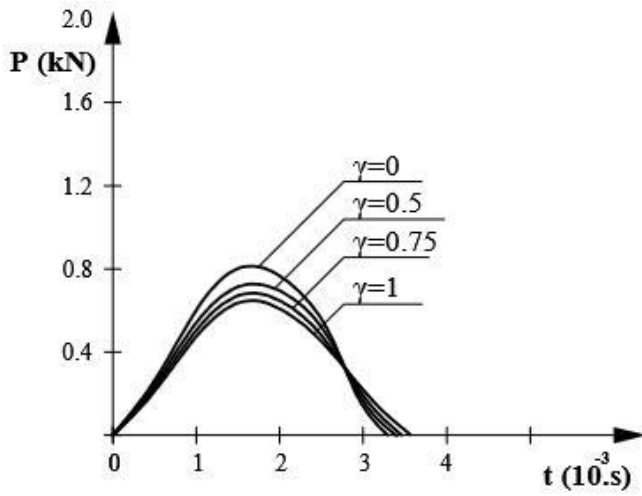


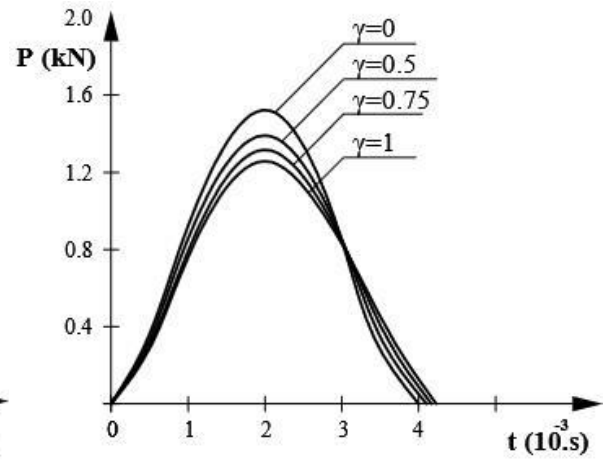
Рис. 3.11. Зависимость локального смятия от времени в случае начальной скорости удара $V_0=10\text{ м/с}$, с радиусом ударника $R=2\text{ см}$, предварительно напряженной пластинки толщиной h :

а) 8мм, б) 12мм, в) 16мм, г) 20мм

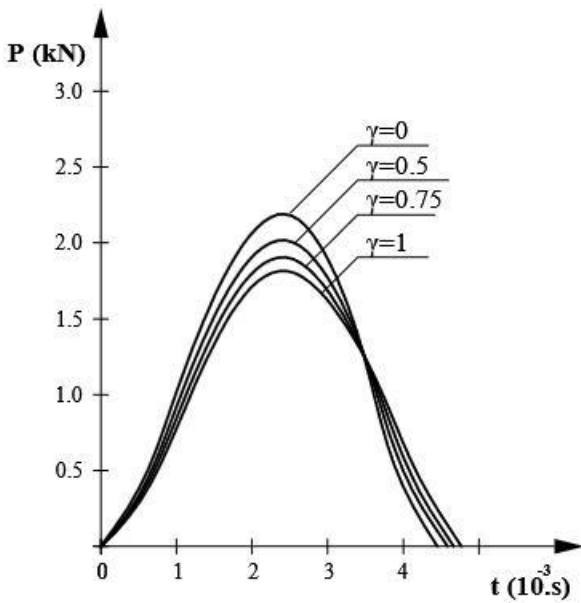
а)



б)



в)



г)

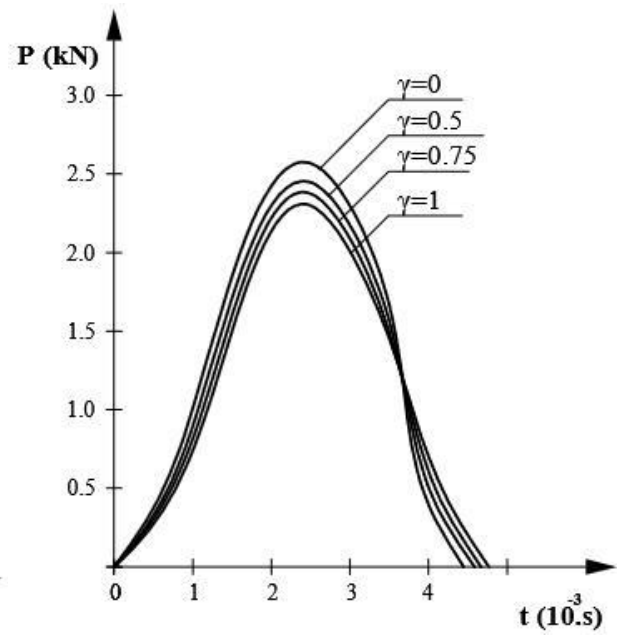


Рис. 3.12. Зависимость контактной силы от времени в случае начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$ с радиусом ударника $R=2\text{см}$, предварительно напряженной пластинки толщиной h :

а) 8мм, б) 12мм, в) 16мм, г) 20мм

Глава 4. Низкоскоростное ударное взаимодействие предварительно напряженной изотропной пластинки Уфлянда-Миндлина

В данной главе обобщены подходы, предложенные в [171] для изучения ударной реакции предварительно напряженной круглой упругой пластинки и в [158] для исследования ударной реакции пластинки, у которой внутри зоны контакта проявляются вязкоупругие свойства. Но в отличие от работы [158], где в качестве контактного закона использовалась модель линейного стандартного тела, в рассматриваемой в данной главе задаче применяется обобщенный контактный закон Герца с учетом зависящих от времени операторов, описывающих жесткость и коэффициент Пуассона материала пластинки.

Результаты исследований опубликованы в работе [170].

4.1. Постановка задачи и методы решения

Рассмотрим задачу удара жесткого шара по предварительно напряженной круглой изотропной пластине Уфлянда-Миндлина большой протяженности, чтобы не учитывать влияние волн, отраженных от ее границ. Это предположение является вполне оправданным, поскольку процесс ударного взаимодействия является скоротечным, и отраженные волны не успевают вернуться в зону контактного взаимодействия до отскока ударника от мишени. Вне зоны контакта пластинка считается упругой, в то время как внутри контактной области микроструктура материала меняется, и он начинает обладать вязкоупругими свойствами.

4.1.1. Динамическое поведение круглой упругой пластины

Уравнения движения предварительно напряженной круглой изотропной упругой пластинки Уфлянда-Миндлина в полярной системе координат с началом координат в центре пластины имеют следующий вид [171]:

$$D \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - D \frac{\varphi}{r^2} + K \mu h \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right) = \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\varphi}, \quad (184)$$

$$K \mu h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\varphi}{r} \right) = \rho h \ddot{w} + N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad (185)$$

где w - прогиб пластины, φ - угол поворота нормали к срединной поверхности пластины, r - полярный радиус, h - толщина пластины, ρ - ее плотность, $K = 5/6$ - коэффициент сдвига, N - постоянная сжимающая сила, действующая в радиальном направлении, $D = Eh^3 / 12(1 - \sigma^2)$ - изгибная жесткость, E , μ и σ - продольный модуль, модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно.

Предполагается, что в результате удара по пластине в точке контакта возбуждаются две нестационарные волны (поверхности сильного разрыва), которые далее распространяются со скоростями G_α ($\alpha = 1, 2$) вдоль пластинки в виде расходящихся цилиндрических поверхностей-полосок. Как и в предыдущей главе, будем интерпретировать поверхность сильного разрыва в виде слоя малой толщины δ , внутри которого искомая величина Z изменяется монотонно и непрерывно от значения Z^+ до значения Z^- . Внутри ударного слоя выполняется соотношение (62), а искомые функции позади волновых фронтов представляются в виде лучевых разложений (51). Так как процесс ударного взаимодействия является кратковременным, ограничимся только членами нулевого порядка (52).

Записывая уравнения (184) и (185) внутри ударного слоя с учетом выражения (62), а затем интегрируя полученные соотношения по времени t от t до $t + \Delta t$ и устремляя $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\rho G_1^2 = \frac{E}{1 - \sigma^2}, \quad (186)$$

$$\rho G_2^2 = K\mu - N/h. \quad (187)$$

Из выражения (187) видно, что скорость волны поперечного сдвига зависит от величины предварительного напряжения.

Для дальнейшего анализа необходимо определить поперечную силу Q_r . С этой целью разделим соотношение (185) на два уравнения

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} Q_r = \rho h \ddot{w} + N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad (188)$$

$$Q_r = K\mu h \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right). \quad (189)$$

Дифференцируя (188) и (189) один раз по времени и применяя условие совместности (62) с учетом выражения (187), получим

$$Q_r = -K\mu h G_2^{-1} W, \quad (190)$$

где $W = \dot{w}$.

4.1.2. Уравнения движения контактной области и ударника

При $t > 0$ перемещение центра шара записывается в виде уравнения (113), где α - вдавливание жесткого ударника ввиду местного смятия материала мишени внутри зоны контакта.

Уравнение движения части пластины, вступающей в контакт со сферическим ударником, и уравнение движения шара имеют вид

$$2\pi a(t)Q_r + P(t) = \rho h \pi a^2(t) \ddot{w} + 2\pi a(t)N \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (191)$$

$$m\ddot{z} = -P(t), \quad (192)$$

где $a(t)$ - радиус зоны контакта, $P(t)$ - контактная сила.

Уравнения (191) и (192) могут быть решены с учетом выражения (190) начальных условий (116).

Предполагается, что вязкоупругие свойства пластинки проявляются только в области контакта и описываются моделью стандартного линейного твердого тела с дробными производными. Все дело в том, что в процессе удара происходит разрушение межмолекулярных связей внутри области контакта пластинки со сферическим ударником, в результате чего происходят более свободные перемещения молекул по отношению друг к другу, что приводит к уменьшению вязкости материала пластины в зоне контакта. Это обстоятельство позволяет моделировать поведение материала пластины внутри зоны контакта при помощи модели стандартного линейного твердого тела с дробными

производными, так как изменение параметра дробности (порядка дробной производной) дает возможность контролировать вязкость материала пластины.

В этом случае необходимо использовать обобщенную контактную теорию Герца для определения контактной силы (117), а зависящий от времени радиус контактной области определяется соотношением (115), где оператор k имеет вид

$$k = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (193)$$

и зависит от вязкоупругих операторов E и ν , которые справедливы внутри зоны контакта и основаны на модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными.

Таким образом, оператор, соответствующий модулю Юнга, имеет вид [159]:

$$E_1 = E_\infty \left[1 - \nu_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) \right] \quad (0 \leq \gamma \leq 1), \quad (194)$$

где E_∞ и E_0 - нерелаксированный (мгновенный модуль упругости или «стеклянный» модуль) и релаксированный (длительный модуль упругости или «резиновый» модуль) модули упругости, которые связаны со временами релаксации τ_ε и ретардации τ_σ следующими соотношениями:

$$\left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \right)^\gamma = \frac{E_0}{E_\infty}, \quad (195)$$

$$\nu_\varepsilon = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} = \frac{\Delta E}{E_\infty}, \quad (196)$$

$$\varepsilon_\gamma^* (\tau_i^\gamma) Z(t) = \int_0^t \varepsilon_\gamma \left(\frac{t-t'}{\tau_i} \right) Z(t') dt' \quad (i = \varepsilon, \sigma), \quad (197)$$

где $\varepsilon_\gamma (t / \tau_i)$ - дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова, которая при $\gamma = 1$ переходит в обычную экспоненту, а когда $\gamma \rightarrow 0$, функция $\varepsilon_\gamma (t / \tau_i)$ стремится к дельта-функции Дирака $\delta(t)$.

Запишем выражение для оператора Пуассона σ с учетом условия (67)

$$\frac{E}{1-2\sigma} = \frac{E_\infty}{1-2\sigma_\infty} = 3K_\infty, \quad (198)$$

где σ_∞ - нерелаксированное значение коэффициента Пуассона.

С учетом соотношения (194), из формулы (198) получаем

$$\sigma = \sigma_\infty + \frac{1}{2}(1-2\sigma_\infty)\sigma_\varepsilon \varepsilon_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma). \quad (199)$$

Зная зависящие от времени операторы (194) и (199) и используя алгебру безразмерных операторов Ю.Н. Работнова [159, 161] и алгоритм, подробно изложенный в главе 3, найдем оператор жесткости в случае удара жестким сферическим ударником по вязкоупругой пластинке

$$k = \frac{E_\infty}{1-\sigma_\infty^2} \left[1 - \sum_{j=1}^2 m_j \varepsilon_\gamma^* (t_j^\gamma) \right], \quad (200)$$

где

$$m_1 = \frac{3}{2} \frac{B(1-\sigma_\infty)}{(1-2\sigma_\infty)}, \quad m_2 = \frac{1}{2} \frac{D(1+\sigma_\infty)}{(1-2\sigma_\infty)}.$$

Тогда с учетом выражений (200) и (197) для определения основных характеристик контактного взаимодействия получаем следующие интегральные уравнения:

$$P(t) = k_{\infty} \left[\alpha^{3/2}(t) - \sum_{j=1}^2 m_j \int_0^t \mathfrak{E}_{\gamma} \left(-\frac{t-t''}{t_j} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right], \quad (201)$$

$$z(t) = V_0 t - \frac{k_{\infty}}{m} \int_0^t \left[\alpha^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^2 m_j \int_0^{t'} \mathfrak{E}_{\gamma} \left(-\frac{t'-t''}{t_j} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right] (t-t') dt', \quad (202)$$

где

$$k_{\infty} = \frac{4\sqrt{R}}{3} \frac{E_{\infty}}{1-\sigma_{\infty}^2}.$$

4.2. Решение разрешающих уравнений

Теперь учитывая формулу (190) и соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -G_2^{-1} W, \quad (203)$$

которое получается из (62), если заменить функцию Z на функцию w , уравнения (191) и (192) могут быть записаны в виде

$$M\alpha\dot{W} + g\alpha^{1/2}W = P(t), \quad (204)$$

$$m\dot{W} + m\ddot{\alpha} = -P(t), \quad (205)$$

где контактная сила $P(t)$ определяется из уравнения (201), $M = \rho\pi hR$ и

$$g = 2MG_2 R^{-1/2}.$$

Система разрешающих уравнений (204) и (205) с учетом соотношения (34) принимает вид:

$$M\alpha\dot{W} + g\alpha^{1/2}W = k_\infty \left[\alpha^{3/2} - \Delta_\gamma \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right], \quad (206)$$

$$m\dot{W} + m\ddot{\alpha} = -k_\infty \left[\alpha^{3/2} - \Delta_\gamma \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right], \quad (207)$$

где

$$\Delta_\gamma = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{m_1}{t_1^\gamma} + \frac{m_2}{t_2^\gamma} \right).$$

4.2.1. Анализ критического состояния системы

Наиболее интересным для рассмотрения является случай, когда $N \rightarrow N_{crit} = K\mu h$, т.е. скорость волны поперечного сдвига стремится к нулю $G_2 \rightarrow 0$, и пластина находится в критическом состоянии, так как вся энергия ударного взаимодействия сконцентрирована в зоне контакта, что может привести к разрушению конструкции внутри контактной зоны.

Предположим, что сжимающая сила N в пластине достигла своего критического значения. Тогда в результате удара жесткого тела по плите возникает только одна волна в пластине, которая в дальнейшем распространяется со скоростью G_1 , а вторая волна оказывается «запертой» внутри контактной области. В этом случае, коэффициент $g = 0$ и уравнение (206) сводится к

$$M\alpha\dot{W} = k_\infty \left[\alpha^{3/2} - \Delta_\gamma \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right]. \quad (208)$$

Если в качестве первого приближения положить $\alpha \approx V_0 t$, тогда уравнение

(208) принимает вид

$$\dot{W} = \frac{k_\infty V_0^{1/2}}{M} \left[t^{1/2} - \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) t^{1/2+\gamma} \right]. \quad (209)$$

Интегрируя (209), получим

$$W = \frac{k_\infty V_0^{1/2}}{M} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} - \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \frac{1}{3/2 + \gamma} t^{3/2+\gamma} \right]. \quad (210)$$

Частный случай при $\gamma = 0$

В чисто упругом случае, т.е. при $\gamma = 0$, $\Delta_0 = \Delta_\gamma |_{\gamma=0} = 0$, поэтому уравнение (206) принимает вид

$$\dot{W} = \frac{k_\infty}{M} \alpha^{1/2}. \quad (211)$$

Решение уравнения (211) с учетом первого приближения имеет вид

$$W = \frac{2k_\infty V_0^{1/2}}{3M} t^{3/2}, \quad (212)$$

откуда следует, что скорость прогиба увеличивается с течением времени.

Частный случай при $\gamma = 1$

В случае обычной вязкости, т.е. при $\gamma = 1$, уравнение (208) принимает вид

$$\dot{W} = \frac{k_\infty}{M} \left[\alpha^{1/2} - \frac{2}{5} \Delta_1 \alpha^{3/2} \right], \quad (213)$$

решением которого является

$$W = \frac{2k_{\infty}V_0^{1/2}}{M} \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{25}\Delta_1V_0t \right] t^{3/2}, \quad (214)$$

где

$$\Delta_1 = \Delta_{\gamma} |_{\gamma=1} = \frac{m_1}{t_1} + \frac{m_2}{t_2}.$$

Приравнивая выражения (213) и (214) к нулю, можно оценить время, при котором скорость W и время контакта достигают своих максимальных значений

$$t_{\max} = \frac{5}{2\Delta_1V_0}, \quad (215)$$

$$t_{\text{cont}} = \frac{25}{6\Delta_1V_0} = \frac{5}{3}t_{\max}. \quad (216)$$

Подставляя (215) в соотношение (214), найдем максимальную величину скорости

$$W_{\max} |_{t=t_{\max}} = \frac{4}{15} \frac{k_{\infty}V_0^{1/2}}{M} t_{\max}^{3/2} \quad (217)$$

откуда следует, что вязкость смягчает реакцию пластины на удар в сравнении с упругим случаем.

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Если круглая пластина подвержена действию постоянной сжимающей силы, равномерно распределенной в ее срединной плоскости вдоль граничной окружности, то в процессе удара по такой предварительно напряженной пластинке возбуждается нестационарная волна поперечного сдвига

(поверхность сильного разрыва), которая затем распространяется со скоростью, зависящей от сжимающей силы.

2. При определенной критической величине сжимающей силы, скорость нестационарной волны равна нулю, в результате чего происходит «запирание» этой волны внутри зоны контакта.

3. «Запирание» волны, в свою очередь, ведет к тому, что энергия в процессе удара не рассеивается (как это происходит в случае возникновения и распространения поперечной волны сдвига), а остается внутри зоны контакта, что может привести к разрушению контактной области.

4. Если внутри зоны контакта начинает проявляться вязкость материала пластины, то она смягчает удар, и в этом случае скорость контактного пятна последовательно растет от нуля до определенной максимальной величины и затем снова уменьшается до нуля.

5. При дробном порядке вязкости, максимальную скорость контактной области можно контролировать выбором значением параметра дробности.

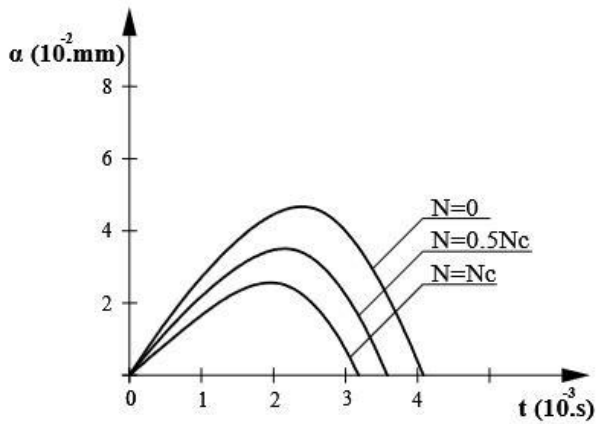
4.3. Численные исследования

На рисунках 4.1-4.12 приведены результаты численных исследований в виде временных зависимостей локально смятия и контактной силы для различных значений предварительно приложенной постоянной сжимающей силы N , которые обозначены цифрами около соответствующих кривых, и различных сочетаний начальной скорости удара, радиуса ударника и толщины пластинки при фиксированном значении параметра дробности $\gamma=0$ (рис.1-4), 0.5 (рис. 5-8), 1 (рис. 9-12).

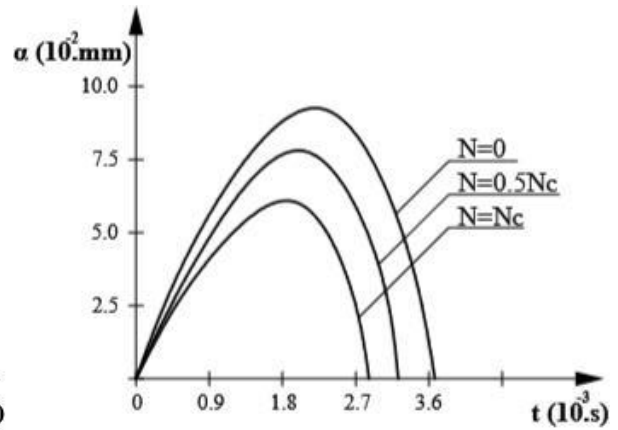
Из рис. 4.1-2.12 видно, что при увеличении параметра сжимающей силы от 0, что соответствует отсутствию действия предварительного напряжения, до $N=N_{кр}$, что соответствует запираанию нестационарной волны поперечного сдвига внутри контактной области, максимальное значение контактной силы уменьшается, а время контакта растет. Увеличение толщины пластинки приводит к увеличению как максимального значений контактной силы, так и продолжительности контакта. Из рисунков следует, что чем больше начальная скорость удара, тем больше контактная сила и меньше время контакта. Увеличение радиуса ударника, т.е. его массы, приводит к уменьшению и контактной силы, и продолжительности контакта.

Если внутри зоны контакта начинает проявляться вязкость материала пластины, что соответствует увеличению параметра дробности от 0 до 1, то она смягчает удар.

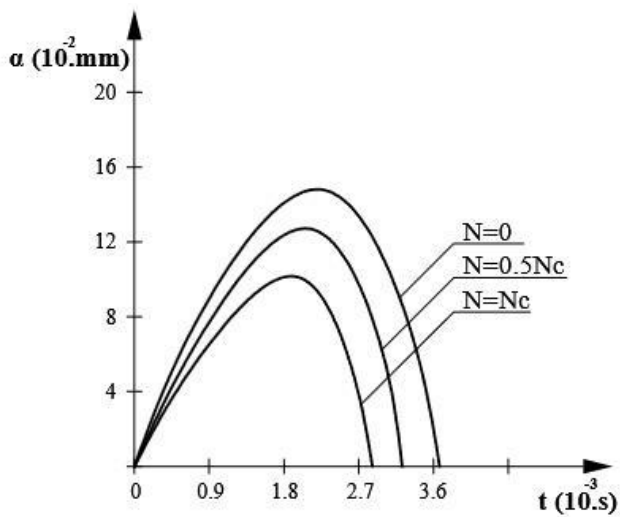
а)



б)



в)



г)

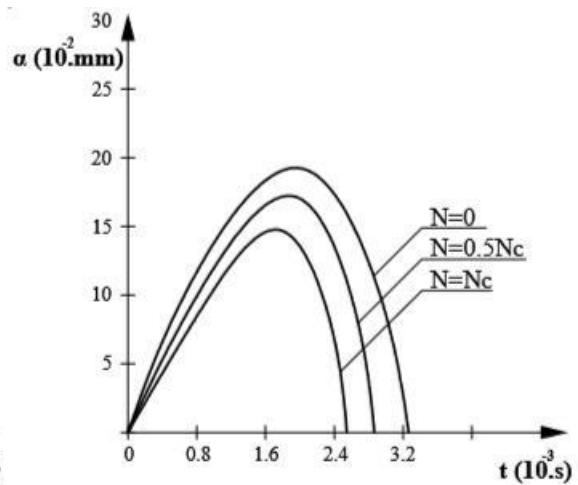
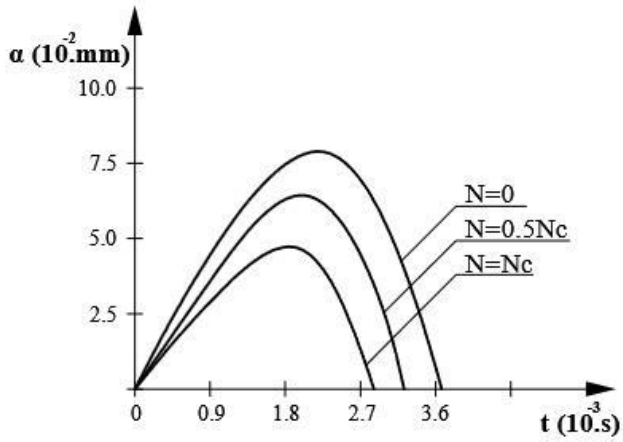
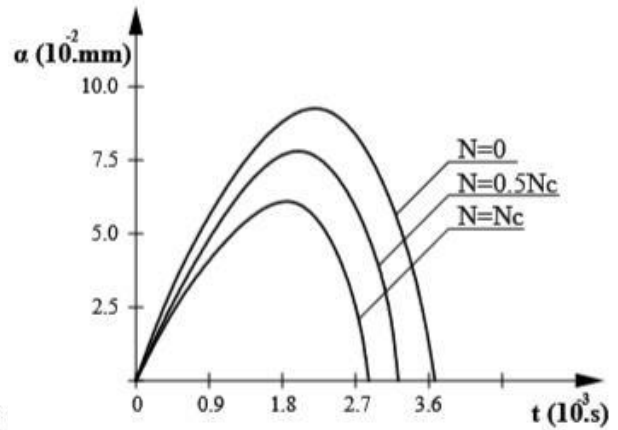


Рис. 4.1. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma=0$, радиуса шара $R=2\text{ см}$, предварительно напряженной пластинки толщиной $h=14\text{ мм}$ и начальной скорости удара V_0 : а) 5 м/с , б) 10 м/с , в) 15 м/с , г) 20 м/с

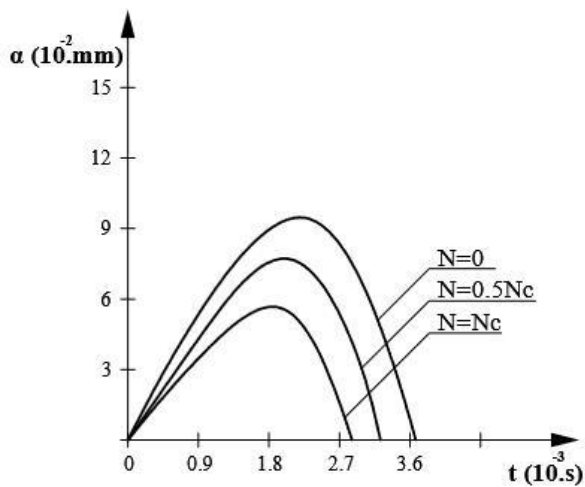
а)



б)



в)



г)

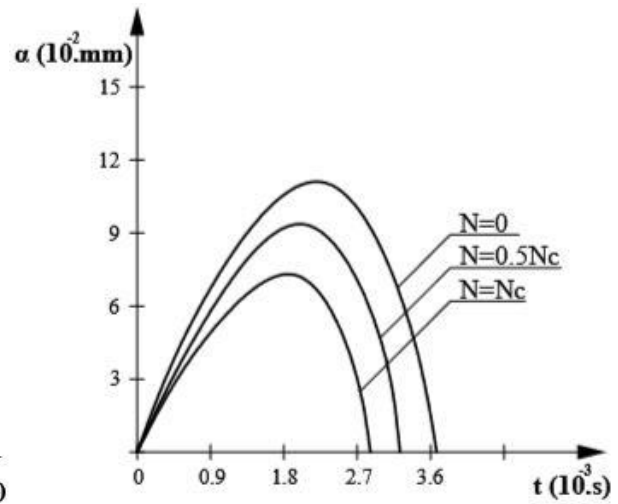
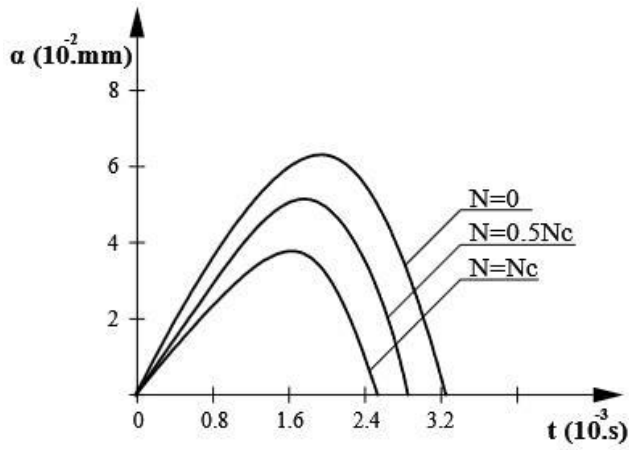
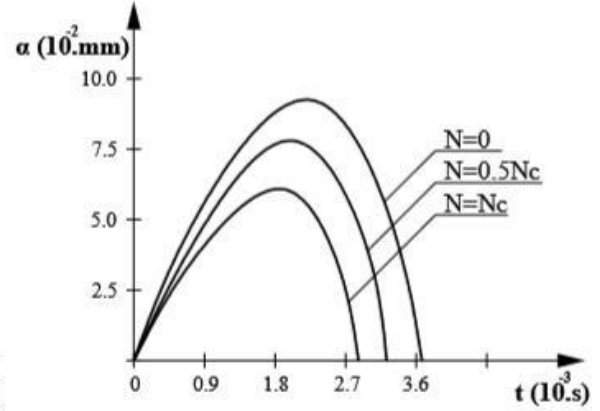


Рис. 4.2. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma=0$, начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$, предварительно напряженной пластинки $h=14\text{мм}$ с радиусом ударника R :
 а) 1см, б) 2см, в) 3см, г) 4см

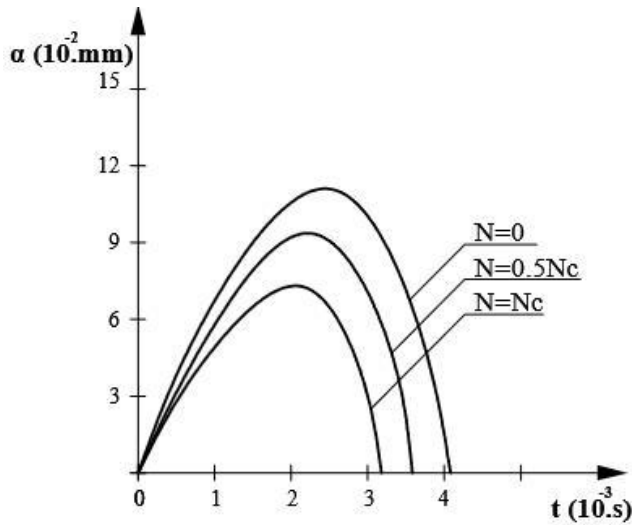
а)



б)



в)



г)

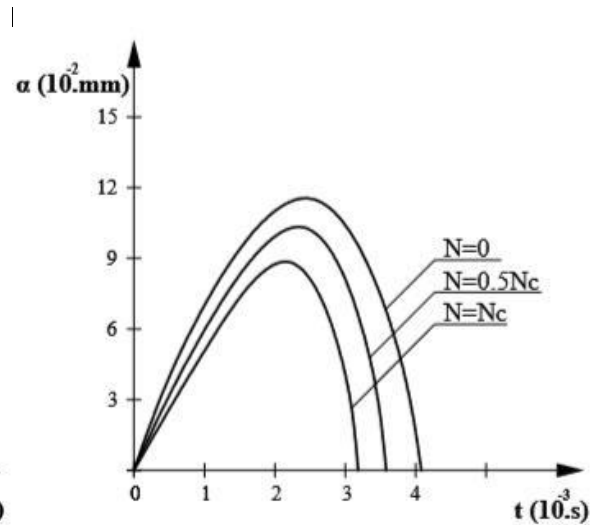
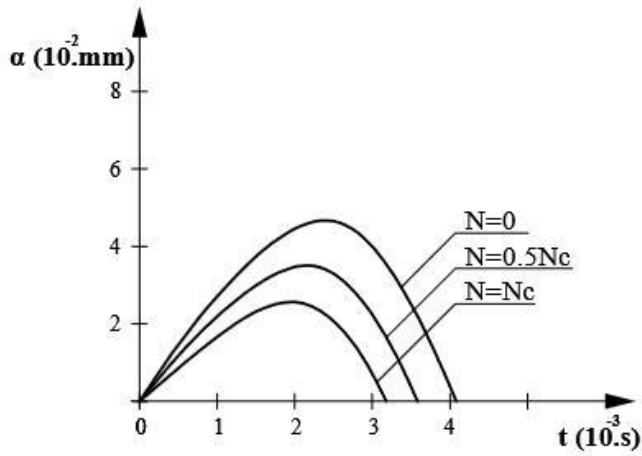
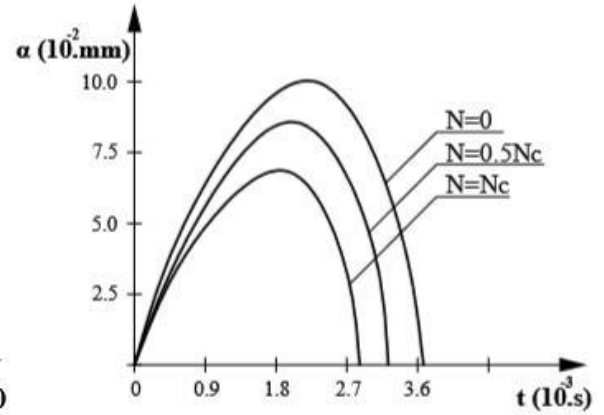


Рис. 4.3. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma=0$, начальной скорости удара $V_0=10 \text{ м/с}$ с радиусом ударника $R=2 \text{ см}$ и предварительно напряженной пластинки h : а) 8мм, б) 12мм, в) 16мм, г) 20мм

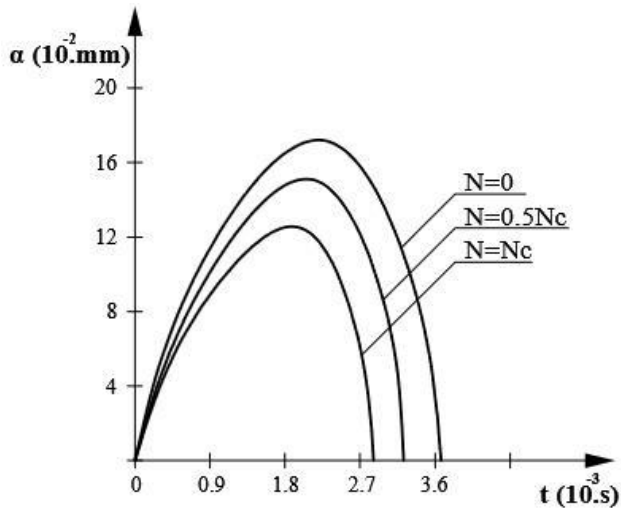
а)



б)



в)



г)

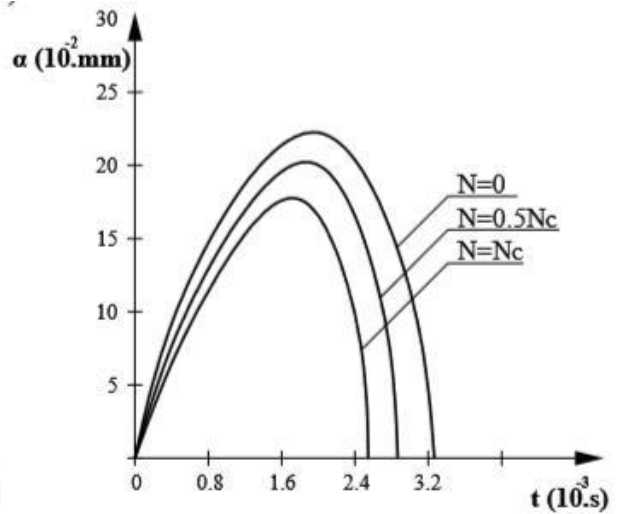
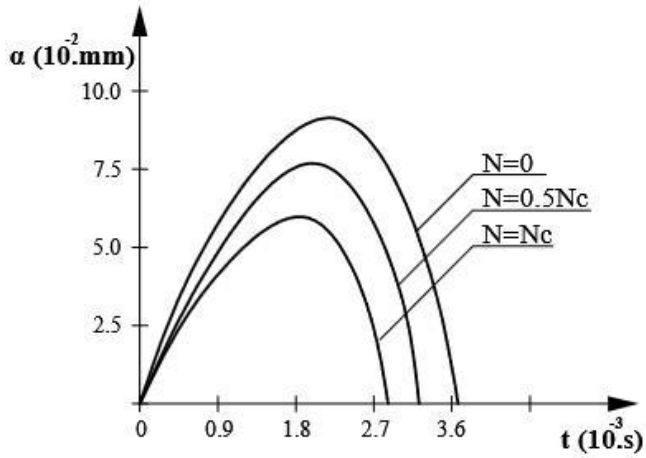
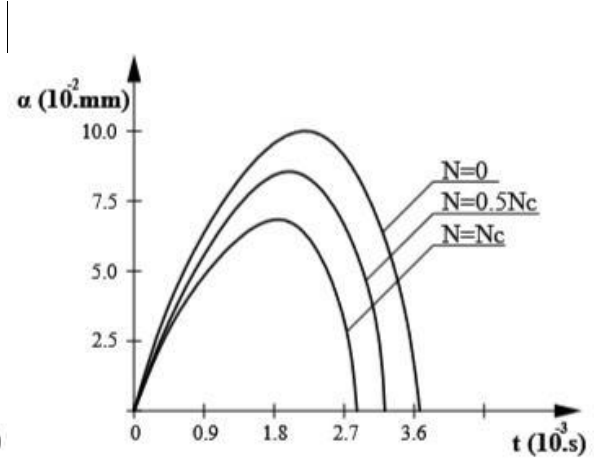


Рис. 4.4. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma=0.5$, радиуса шара $R=2\text{ см}$, предварительно напряженной пластинки $h=14\text{ мм}$ и начальной скорости удара V_0 :
 а) 5 м/с , б) 10 м/с , в) 15 м/с , г) 20 м/с

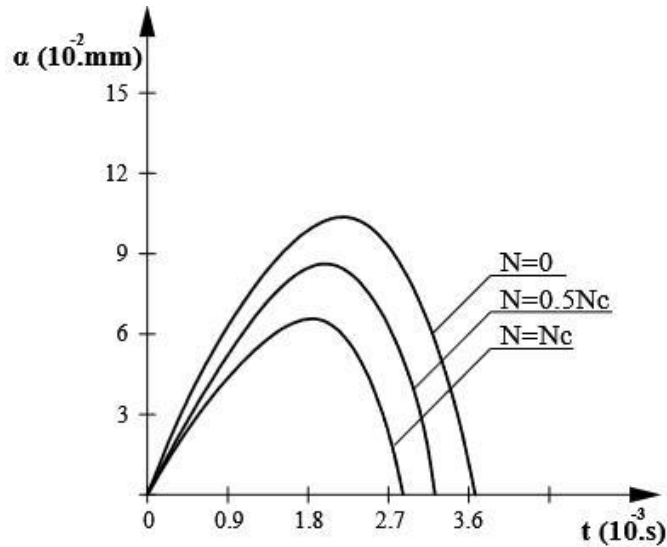
а)



б)



в)



г)

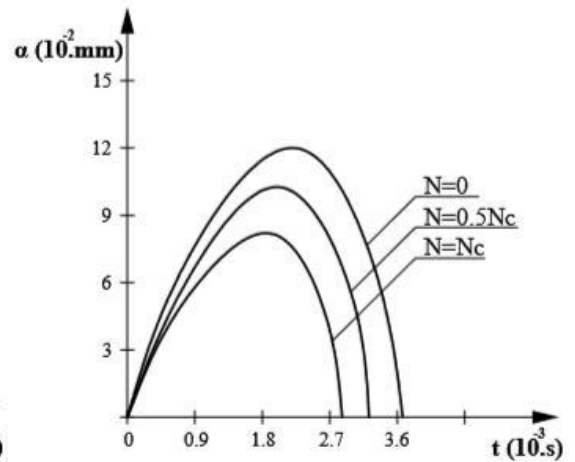
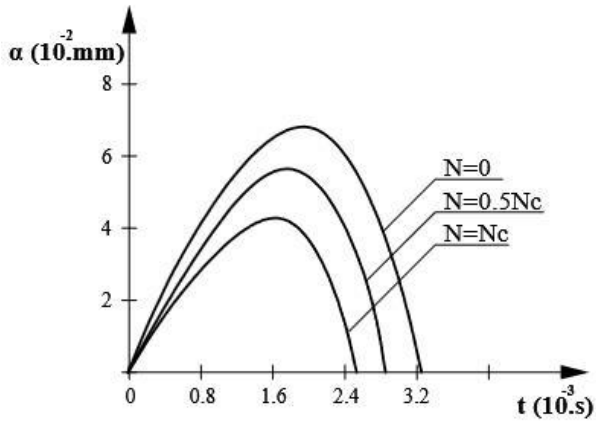


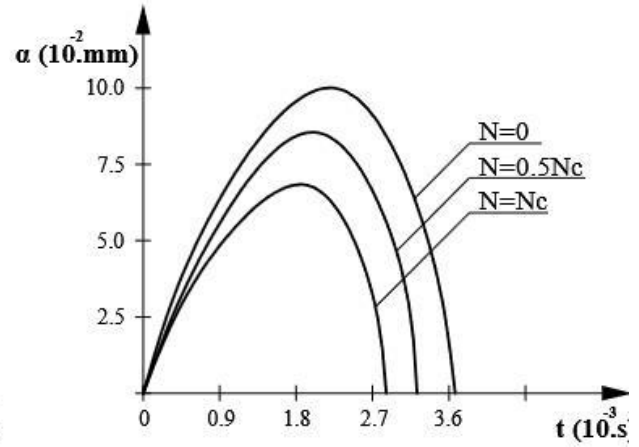
Рис. 4.5. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma=0.5$, начальной скорости удара $V_0=10\text{ м/с}$, предварительно напряженной пластинки $h=14\text{ мм}$ с радиусом ударника R :

а) 1 см, б) 2 см, в) 3 см, г) 4 см

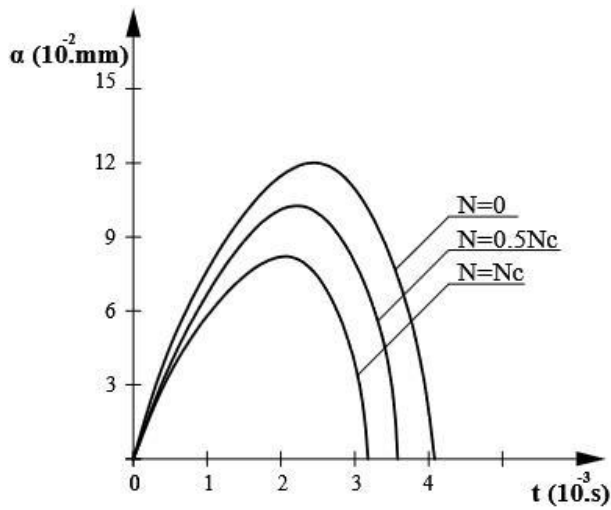
а)



б)



в)



г)

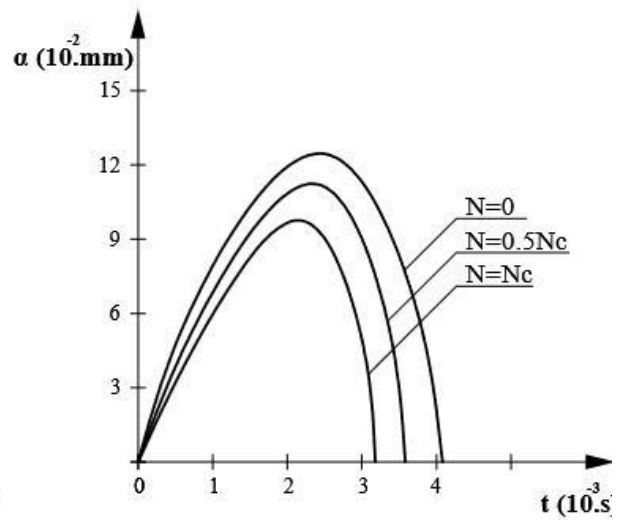
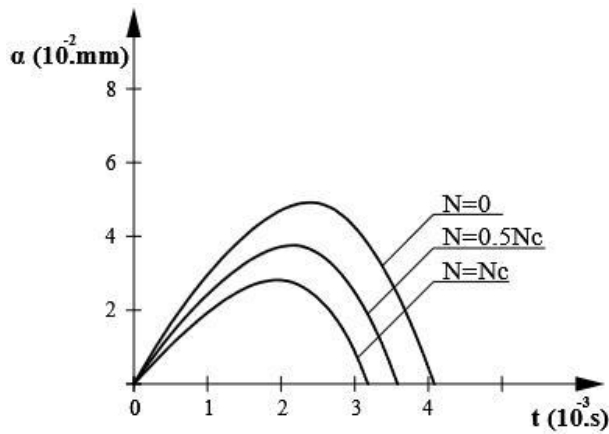
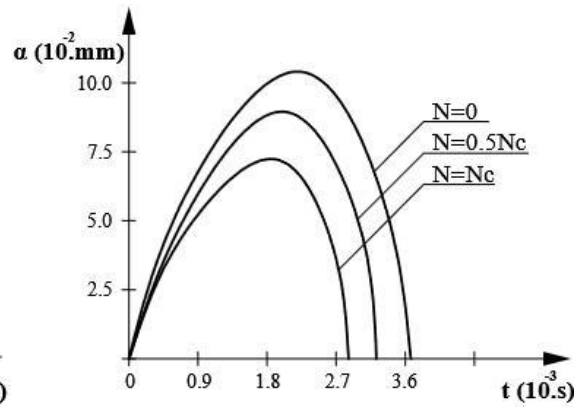


Рис. 4.6. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma=0.5$, начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$ с радиусом ударника $R=2\text{см}$ и предварительно напряженной пластинки h :
 а) 8мм, б) 12мм, в) 16мм, г) 20мм

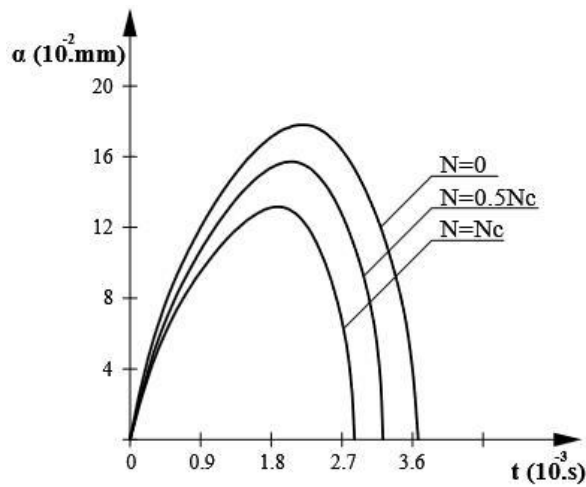
а)



б)



в)



г)

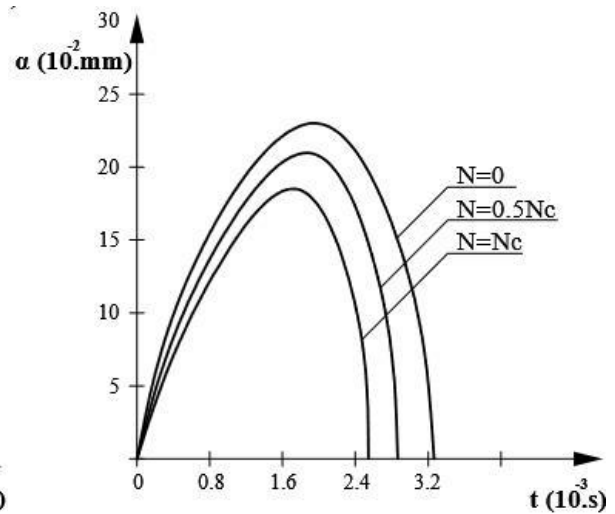
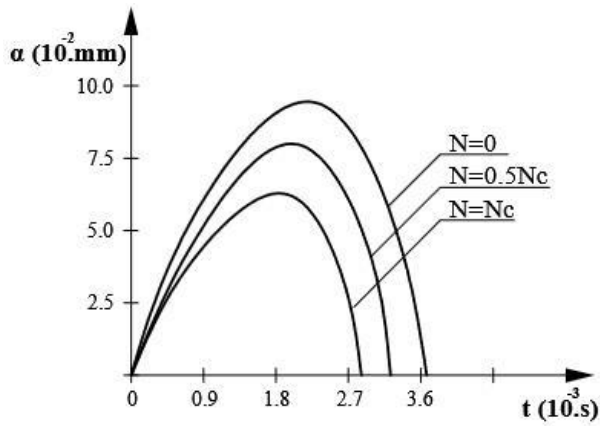
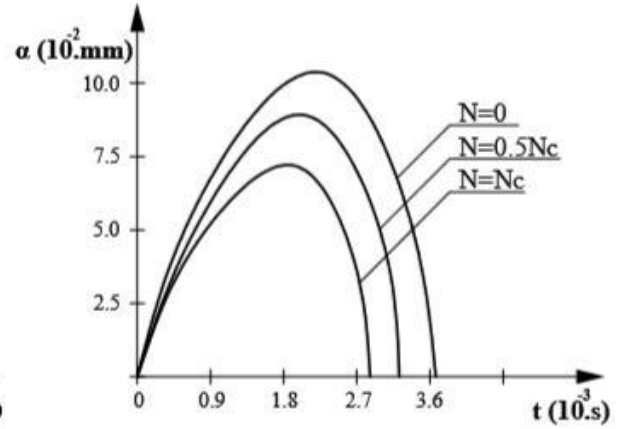


Рис. 4.7. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma=0.75$, радиуса шара $R=2\text{см}$, предварительно напряженной пластинки $h=14\text{мм}$ и начальной скорости удара V_0 :
 а) 5м/с , б) 10м/с , в) 15м/с , г) 20м/с

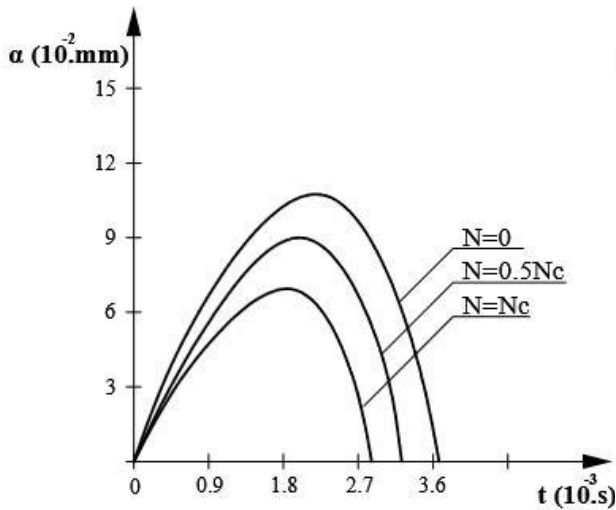
а)



б)



в)



г)

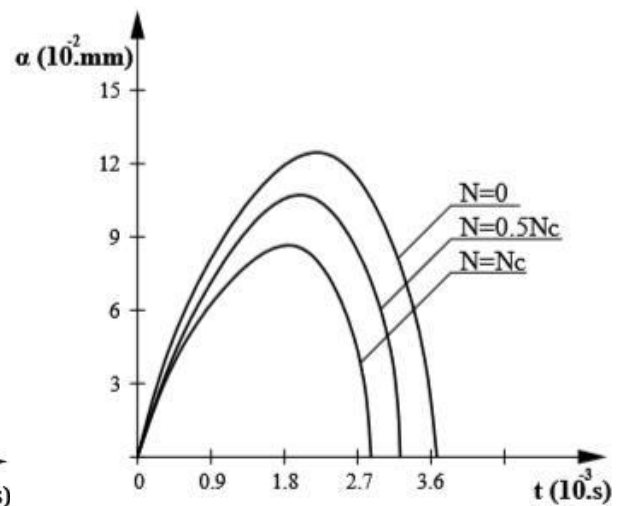
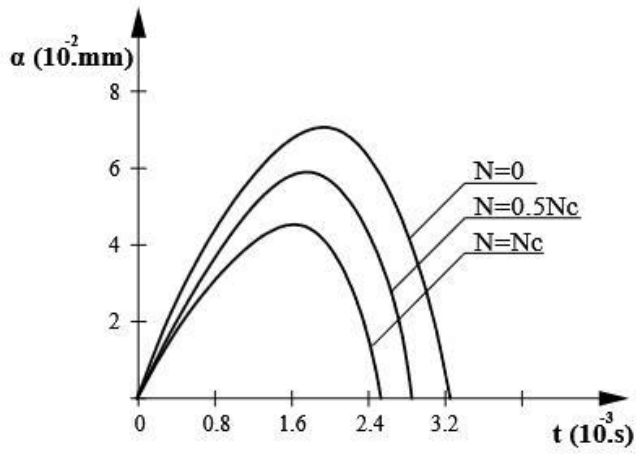


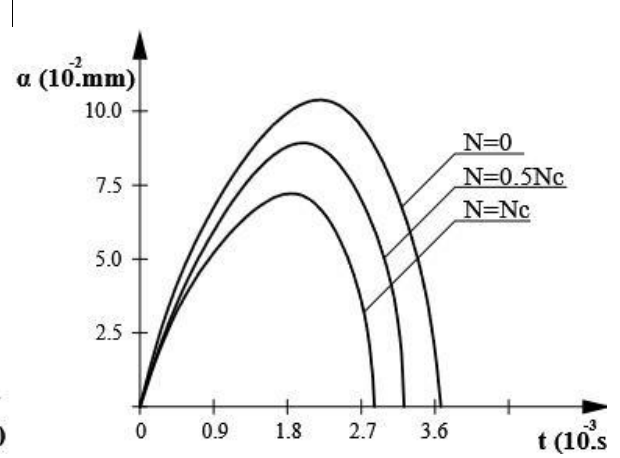
Рис. 4.8. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma=0.75$, начальной скорости удара $V_0=10\text{ м/с}$, предварительно напряженной пластинки $h=14\text{ мм}$ с радиусом ударника R :

а) 1 см, б) 2 см, в) 3 см, г) 4 см

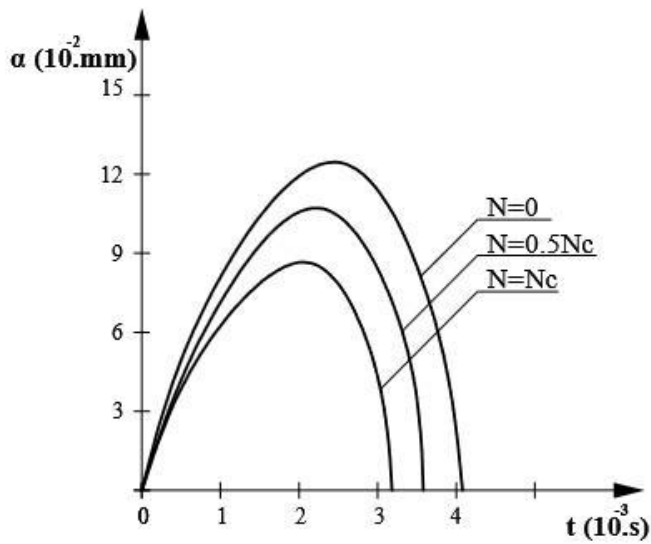
а)



б)



в)



г)

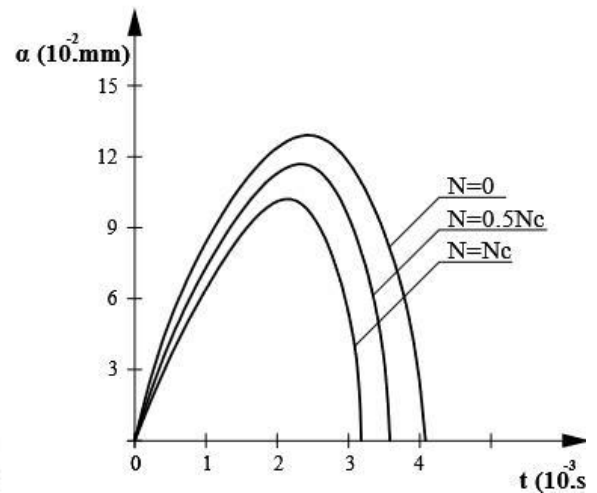
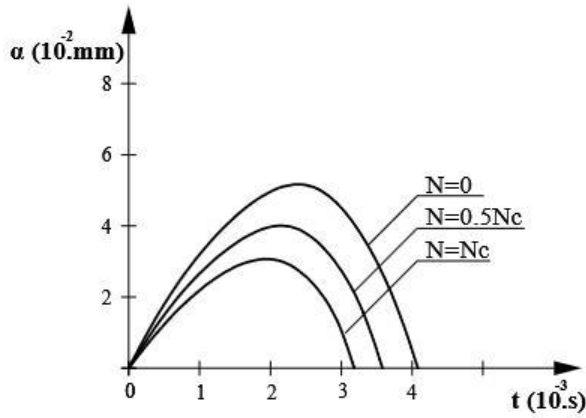


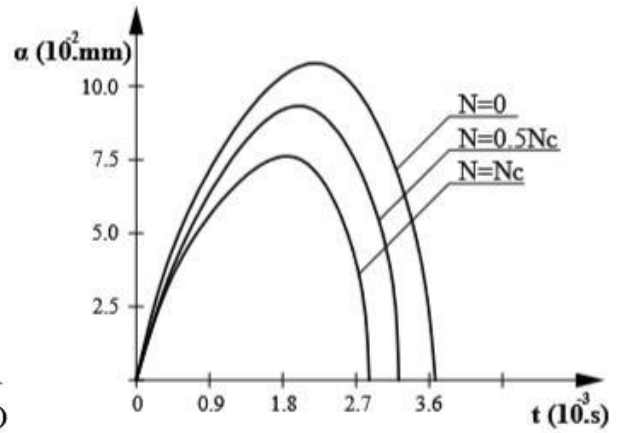
Рис. 4.9. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma=0.75$, начальной скорости удара $V_0=10 \text{ м/с}$ с радиусом ударника $R=2 \text{ см}$ и предварительно напряженной пластинки h :

а) 8мм, б) 12мм, в) 16мм, г) 20мм

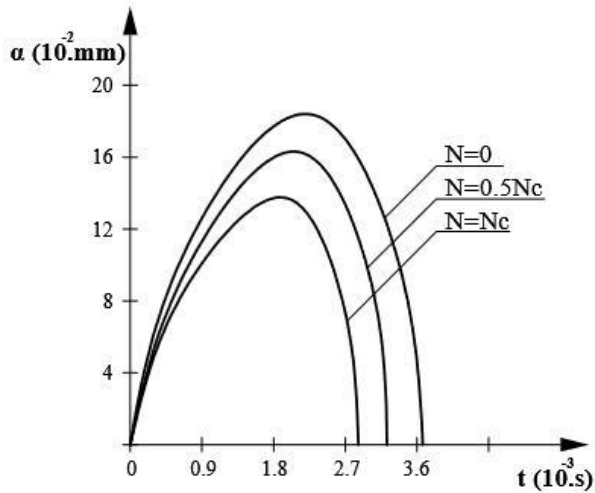
а)



б)



в)



г)

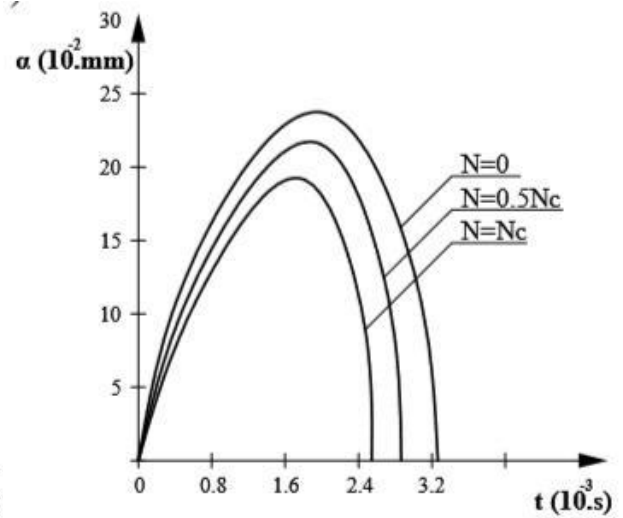
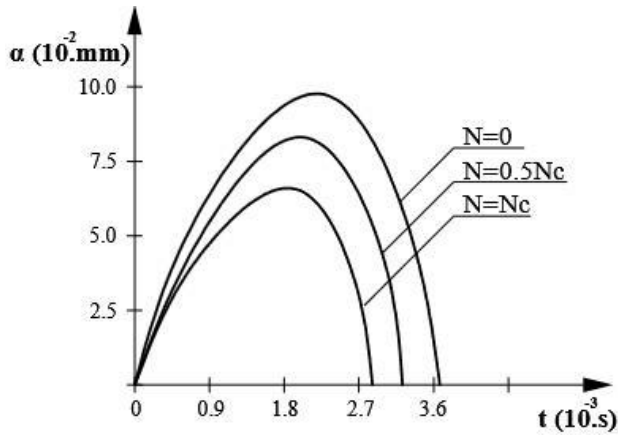
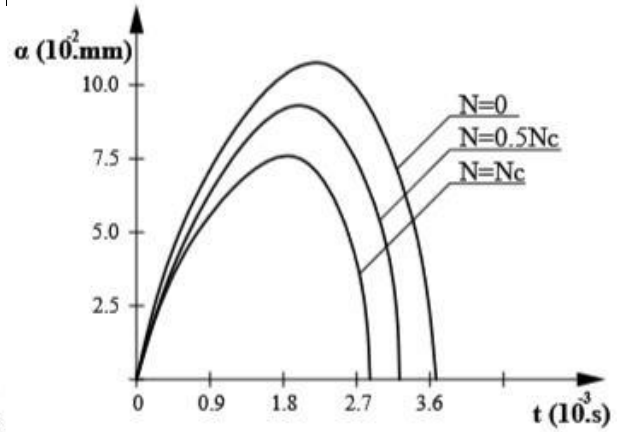


Рис. 4.10. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma=1$, радиуса шара $R=2\text{см}$, предварительно напряженной пластинки $h=14\text{мм}$ и начальной скорости удара V_0 :
 а) 5м/с , б) 10м/с , в) 15м/с , г) 20м/с

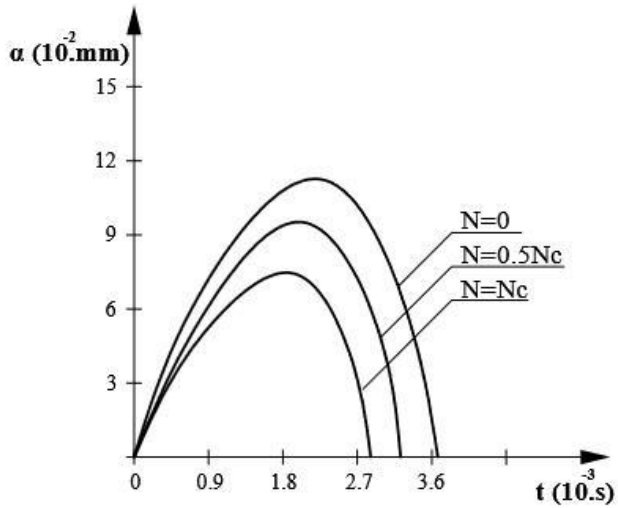
а)



б)



в)



г)

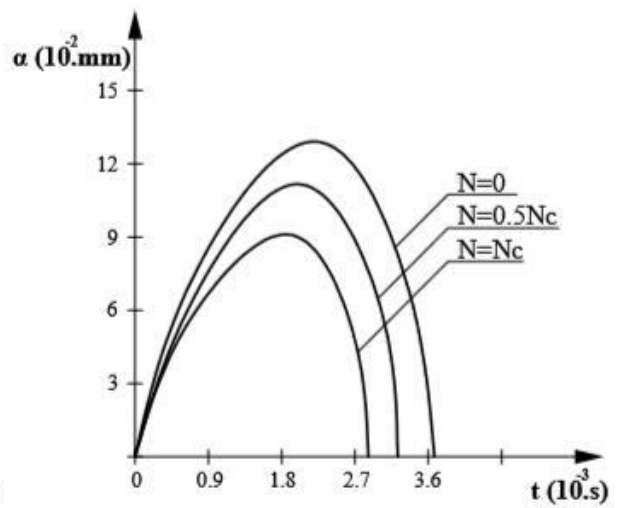
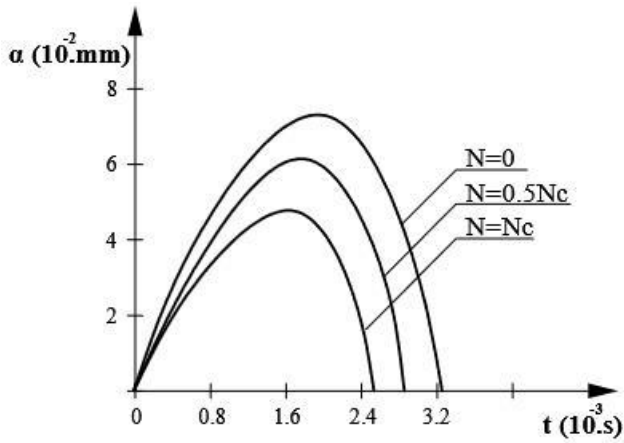


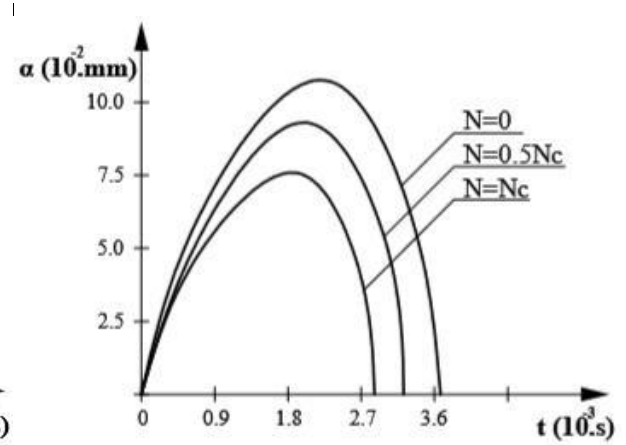
Рис. 4.11. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma=1$, начальной скорости удара $V_0=10 \text{ м/с}$, предварительно напряженной пластинки $h=14 \text{ мм}$ с радиусом ударника R :

а) 1 см, б) 2 см, в) 3 см, г) 4 см

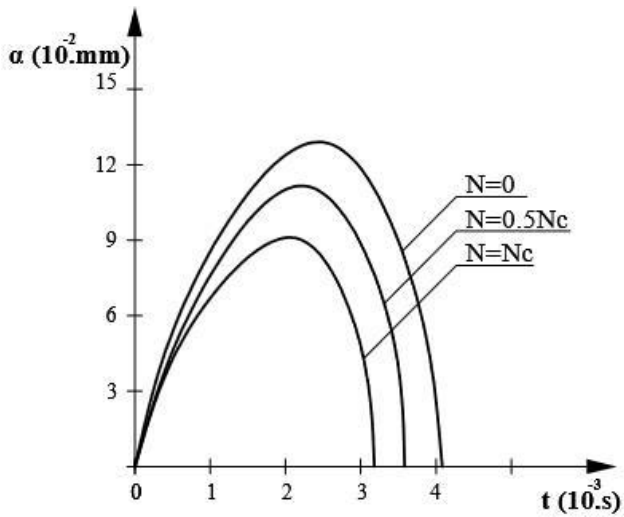
а)



б)



в)



г)

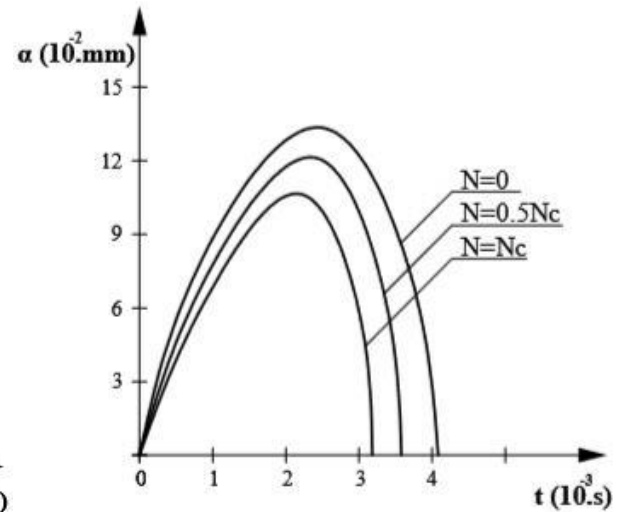


Рис. 4.12. Зависимость локального смятия от времени в случае $\gamma=1$, начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$ с радиусом ударника $R=2\text{см}$ и предварительно напряженной пластинки h :
 а) 8мм, б) 12мм, в) 16мм, г) 20мм

Заключение

Основные результаты данной диссертационной работы можно сформулировать следующим образом:

1. Решена задача об ударе вязкоупругого шара по упругой шарнирно опертой пластинке Кирхгофа-Лява, находящейся в вязкой среде. Вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного тела с дробной производной, а демпфирующие свойства среды – моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, при этом параметры дробности ударника γ_2 и среды γ_1 имеют разные значения. Решение задачи вне области контакта строится при помощи функции Грина, а в зоне контакта – с использованием обобщенной теории Герца. Благодаря применению алгебры безразмерных дробных операторов Ю.Н. Работнова удается расшифровать сложные операторные выражения, которые возникают при решении данной задачи, и получить определяющие интегральные уравнения как для контактной силы, так и для величины, характеризующей местное смятие материалов пластинки и шара. Полученные уравнения затем решены приближенно с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса. Проведены численные исследования, которые показывают, что при изменении параметра дробности γ_2 от нуля до единицы, что соответствует увеличению вязкости ударника, максимум контактной силы уменьшается, а время контакта ударника и мишени увеличивается. Кроме зависимости контактной силы от времени построены временные зависимости смятия материала ударника и мишени, а также исследовано влияние массы ударника, его начальной скорости и размеров поперечного сечения мишени на основные характеристики ударного взаимодействия шара и балки.

2. Волновая теория удара, разработанная ранее Ю.А. Россихиным и М.В. Шитиковой, была обобщена на случай растяжения срединной поверхности вязкоупругой мишени в виде пластинки.

3. Решена задача об ударе упругого шара по вязкоупругой пластинке типа Уфлянда-Миндлина, уравнения динамического поведения которой учитывают инерцию вращения и деформации поперечного сдвига. Вязкоупругие свойства пластинки вне области контакта описываются классической моделью стандартного линейного тела, а в зоне контакта используется модель стандартного линейного тела с дробными производными. Введение параметра дробности позволяет управлять вязкостью в зоне контакта, поскольку в процессе удара могут рваться поперечные связи между длинными молекулами, что может привести к изменению вязкости в системе «мишень-ударник». В процессе удара учитывается также растяжение срединной поверхности пластинки. Поскольку в момент удара в зоне контакта происходит зарождение продольной и поперечной ударных волн (поверхностей сильного разрыва), которые затем распространяются в вязкоупругой пластинке со скоростями упругих волн, то решение за фронтами ударных волн, т.е. вне области контакта, строится при помощи лучевых разложений, коэффициенты которых находятся из определяющей системы уравнений при помощи кинематических и геометрических условий совместности. В зоне контакта решение строится при помощи обобщенной теории Герца, при этом приходится расшифровывать сложные операторные выражения, которые приводят к линейным комбинациям из дробных операторов Ю.Н. Работнова. Такой комбинированный подход позволяет получить определяющую систему интегро-дифференциальных уравнений относительно прогиба пластинки в зоне контакта и местного смятия материалов пластинки и шара. Полученная система решена приближенно с

использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса.

4. Решена задача об ударе жесткого шара по предварительно напряженной вязкоупругой пластинке типа Уфлянда-Миндлина. Показано, что при определенной критической величине сжимающей силы, скорость нестационарной волны равна нулю, в результате чего происходит «запирание» этой волны внутри зоны контакта, которое, в свою очередь, ведет к тому, что энергия в процессе удара не рассеивается (как это происходит в случае возникновения и распространения поперечной волны сдвига), а остается внутри контактной области, что может привести к разрушению контактной области. Показано, что для упругой пластины критическая сжимающая сила ведет к увеличению скорости контактного пятна с течением времени, в результате чего может происходить отделение жесткой шайбы (зоны контакта) с дальнейшим выталкиванием ее из пластины. Если внутри зоны контакта начинает проявляться вязкость материала пластины, то она смягчает удар, и в этом случае скорость контактного пятна последовательно растет от нуля до определенной максимальной величины и затем снова уменьшается до нуля.

5. Проведен сравнительный анализ результатов ударного взаимодействия шара с вязкоупругой пластинкой Уфлянда-Миндлина с учетом и без учета растяжения ее срединной поверхности, а также с учетом и без учета предварительного напряжения. Показано, что учет растяжения делает механическую систему «мишень-ударник» более гибкой, что приводит к увеличению максимальных значений контактной силы и локального смятия материалов пластинки и шара в зоне контакта, а также к увеличению продолжительности контактного взаимодействия при одних и тех же значениях параметра дробности.

Список литературы

1. Амбразевичюс А.В. Релаксационные свойства ряда блочных теплостойких полимеров в области линейной и нелинейной вязкоупругости: дис. к-та техн. наук. – Каунас, 1984.
2. Бабенко Ю.И. Метод дробного дифференцирования в прикладных задачах теории теплообмена / Ю.И. Бабенко. - СПб.: НПО «Профессионал», 2009. -584 с.
3. Бойков В.Г. Ударные взаимодействия / В.Г. Бойков. - ЗАО Автомеханика, 2005. - Режим доступа : /<http://www.euler.ru/distr/euler/simulation/impacts.pdf>.
4. Болотин В.В. Прочность, устойчивость, колебания / В.В. Болотин – Москва: Машиностроение, 1968. - Т. 3. - 567 с.
5. Васильев В.В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем/ В.В. Васильев, Л.А. Симак. - Киев: НАН Украины, 2008. - 256 с.
6. Гачаев А.М. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными и им сопутствующие интегральные операторы: дис. к-та физ.-мат. наук: 01.01.02. – Нальчик, 2006.
7. Герасимов А.Н. Обобщенные законы деформирования и его применения к задачам внутреннего трения / А.Н. Герасимов // Прикладная математика и механика. - 1948. – Т. 12, N 3. – С. 251-260.
8. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит. – Москва. : Изд-во литер. по стр-ву, 1965. - 448 с.
9. Гонсовский В.Л. О волнах напряжений в вязкоупругой среде с сингулярным ядром / В.Л. Гонсовский, Ю.А. Россихин // Прикладная механика и техническая физика. - 1973. – Т. 1, N 4. - С. 184-186.

10. Гонсовский В.Л. Удар вязкоупругого стержня о жесткую преграду/ В.Л. Гонсовский, С.И. Мешков, Ю.А. Россихин // Прикладная механика. - 1972. – Т. 8, № 10. - С. 71-76.
11. Грещук Л.Б. Разрушение композитных материалов при ударах с малыми скоростями / Л.Б. Грещук // Динамика удара; пер. с англ. / Зукас Дж.А. и др. – Москва: Мир, 1985. - С. 8-46.
12. Журавков М.А. О перспективах использования теории дробного исчисления в механике / М.А. Журавков, Н.С. Романова – Электрон. текстовые дан. – Минск: БГУ, 2013. – 53 с.
13. Зеленев В.М. Затухающие колебания упруго наследственных систем со слабо-сингулярными ядрами / В.М. Зеленев, С.И. Мешков, Ю.А. Россихин // Прикладная механика и техническая физика. - 1970. – Т. 1, N 2. - С. 104-108.
14. Зыонг Туан Мань, Анализ ударного взаимодействия двух вязкоупругих сферических оболочек: дис. к-та физ.-мат. наук: 01.02.04. - Саратов: Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, 2017.
15. Ильясов Муса Х.О. Некоторые динамические задачи линейной вязкоупругости: дис. доктора физ.-мат. наук: 01.02.04. – Баку, 1982.
16. Исаев В.И. Математические модели стержней, балок и плит в задачах сосредоточенного удара: дис. к-та физ.-мат. наук: 05.03.18. – Москва, 2007.
17. Клаф Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен; пер. с англ. Килимник Л.Ш. и Швецова А.В. – Москва: Стройиздат, 1979.
18. Курбанов Наби Т.О. Некоторые вопросы распространения нестационарных возмущений в линейных вязкоупругих материалах: дис. к-та физ.-мат. наук: 01.02.04. – Баку, 1984.
19. Кушеккалиев А.Н. Нестационарные волны в пластинах при нормальных ударных воздействиях: дис. к-та физ.-мат. наук: 01.02.04. – Саратов, 2004.

20. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - Москва: Наука, 1965. - Т. 7. - 195 с.
21. Литвинчук С.Ю. Гранично-элементное моделирование нестационарных трехмерных динамических задач теории упругости и вязкоупругости: дис. к-та физ.-мат. наук: 01.02.04. – Нижний Новгород: Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2006.
22. Мешков С.И. Описание внутреннего трения в наследственной теории упругости при помощи ядер, имеющих слабую сингулярность / С.И. Мешков // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1967. - Т. 1, № 4. - С. 147-151.
23. Мешков С.И. Интегральное представление дробно-экспоненциальных функций и их приложение к динамическим задачам линейной вязкоупругости / С.И. Мешков // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1970. - Т. 1. - С. 103-110.
24. Мешков С.И. Вязкоупругие свойства металлов / С.И. Мешков. – Москва: Металлургия, 1974. - 193 с.
25. Мешков С.И. К описанию внутреннего трения при помощи дробно-экспоненциальных ядер / С.И. Мешков, В.С. Постников, Т.Д. Шермегор // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1966. - Т. 1, № 3. - С. 102-106.
26. Мешков С.И. О распространении звуковых волн в наследственно-упругой среде / С.И. Мешков, Ю.А. Россихин // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1968. - Т. 1, № 5. – С. 89-93.
27. Милютин В.Е. Реакция многослойной пластинки на ударное воздействие: дис. к-та техн. наук: 01.02.04. – Тула, 2000.
28. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применения / А.М. Нахушев – Москва: Физматлит, 2003. - 272 с.

29. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов / В.А. Нахушева — М.: Наука, 2006. - 173 с.
30. Огородников Е.Н. Вынужденные колебания дробных осцилляторов / Е.Н. Огородников, Н.С. Яшагин // Математическое моделирование и краевые задачи. - 2008. - Часть 1. - С. 215-221.
31. Огородников Е.Н. Математические модели дробных осцилляторов, постановка и структура решения задачи Коши / Е.Н. Огородников // Математическое моделирование и краевые задачи. - 2009. - Часть 1. - С. 177-181.
32. Огородников Е.Н. Об одном классе дробных дифференциальных уравнений математических моделей динамических систем с памятью / Е.Н. Огородников // Вестник Самарского государственного технического университета. - 2013. - Т. 1, № 30. - С. 245-252.
33. Огородников Е.Н. Математическое моделирование наследственно-упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Риммана-Лиувилля / Е.Н. Огородников, В.П. Радченко, Л.Г. Унгарова // Вестник Самарского государственного технического университета. - 2016. - Т. 20, N 1. - С. 167-194.
34. Огородников Е.Н. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов / Е.Н. Огородников, В.П. Радченко, Н.С. Яшагин // Вестник Самарского государственного технического университета. - 2011. — Т. 1, № 22. - С. 255-268.
35. Попова А.М. Математическое моделирование реологических эффектов в процессе удара: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. — Якутск, 2004.
36. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А.В. Псху — М.: Наука, 2005. - 199 с.
37. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последействием / Ю.Н. Работнов // Прикладная математика и механика. - 1948. - Т. 12, № 1. - С. 53-

62. (Перевод на английский язык Шитиковой М.В.: Rabotnov Yu.N. Equilibrium of an elastic medium with after-effect // Fractional Calculus and Applied Analysis. –2014. - Vol. 17. – P. 684-696).
38. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. - Москва: Наука, 1966. – 752 с.
39. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. - Москва: Наука, 1977. - 384 с.
40. Розовский М.И. Об интегро-дифференциальном уравнении динамической контактной задачи вязкоупругости / М.И. Розовский // Прикладная математика и механика. - 1973. - Т. 37, № 2. - С. 359-363.
41. Рок В.Е. Наследственные модели переходных волновых процессов в геологических средах, содержащих фрактальные структуры: дис. доктора физ.-мат. наук: 25.00.10. – Москва, 2004.
42. Россихин Ю.А. Динамические задачи линейной вязко-упругости, связанные с исследованием ретардационно-релаксационных спектров: дис. канд. физ.-мат. наук. - Воронеж, 1976.
43. Россихин Ю.А. Удар упругого шара по балке Тимошенко и пластинке Уфлянда-Миндлина с учётом растяжения срединной поверхности / Ю.А. Россихин, М. В. Шитикова // Известия вузов. Строительство. - 1996. - № 6. - С. 28-34.
44. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. - Минск: Наука и техника, 1987.
45. Сеницкий Ю.Э. Удар вязкоупругого тела по полой сферической оболочке / Ю.Э. Сеницкий // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. - 1982. № 2. - С. 138-143.

46. Старовская М.Ю. Проявление наследственных свойств материала в динамических задачах линейной вязкоупругости: дис. к-та физ.-мат. наук: 01.02.04. – Москва, 2007.
47. Стретт Дж.В. (лорд Рэлей) Теория звука / Дж.В. Стретт. - Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. - 504 с.
48. Сургуладзе Т.А. О некоторых применениях операторов дробного порядка в вязкоупругости: дис. доктора физ.-мат. наук: 01.02.04. – Москва, 2002.
49. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка / В.Е. Тарасов. - М., Ижевск: РХД, 2010. - 568 с.
50. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. - Москва: Изд-во Физматгиз, 1959. - 439 с.
51. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твёрдых телах / Т. Томас. - Москва: Мир, 1964. - 308 с.
52. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин / Я.С. Уфлянд // Прикладная математика и механика. - 1948. - Т. 12, № 3. - С. 287-300.
53. Учайкин В.В. Метод дробных производных / В.В. Учайкин. - Ульяновск: Артишок, 2008. - 512 с.
54. Хрупов А.А. Исследование колебаний предварительно напряжённых пластин: дис. к-та техн. наук: 01.02.04. - Москва, 2009.
55. Худалов М.З. Разностные методы решения краевых задач для уравнений параболического типа с дробной производной в граничных условиях: дис. к-та физ.-мат. наук: 01.01.02. – Владикавказ, 2003.
56. Черненко В.П. Анализ нестационарных волн в наследственно-упругих стержнях и оболочках с ростом времени: асимптотический подход: дис. к-та физ.-мат. наук: 01.02.04. – Саратов: Саратовский национальный

- исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 2006.
57. Шермергор Т.Д. Об использовании операторов дробного дифференцирования для описания наследственных свойств материалов / Т.Д. Шермергор // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1966. - Т. 18, № 1. - С. 118-121.
58. Шитикова М.В. Лучевой метод в задачах динамического контактного взаимодействия упругих тел: дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04. - Москва: Институт проблем механики РАН, 1995.
59. Эстрада Меза М.Г. Анализ динамического поведения вязкоупругих балок при ударных воздействиях с использованием моделей, содержащих дробные операторы: дис. к-та физ.-мат. наук: 01.02.04. - Саратов: Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, 2017.
60. Яшагин Н.С. Математическое моделирование и исследование осцилляционных явлений в системах с памятью на основе аппарата дробного интегро-дифференцирования: дис. к-та физ.-мат. наук: 05.03.18. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2011.
61. Abrate S. Localized impact on sandwich structures with laminated facing / S. Abrate // Applied Mechanics Reviews. - 1997. - Vol. 50, № 1. - P. 69–82.
62. Abrate S. Modeling of impacts on composite structures / S. Abrate // Composite Structures. - 2001. - Vol. 51. - P. 129–138.
63. Achenbach J.D. Note on wave propagation in linearly viscoelastic media / J.D. Achenbach, D.P. Reddy // ZAMP Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik. -1967. – Vol. 18. –P. 141-144.
64. Aksel N. On the impact of a rigid sphere on a viscoelastic half-space / N. Aksel // Ingenieur-Archiv. - 1986. – Vol. 56, № 1. - P. 38-54.

65. Arena P. Nonlinear Noninteger Order Circuits and Systems: an Introduction / P. Arena. - Singapore-New Jersey-London-Hong Kong : World Scientific, 2002. - 212 p.
66. Arikoglu A.A. New fractional derivative model for linearly viscoelastic materials and parameter identification via genetic algorithms / A.A. Arikoglu // *Rheologica Acta*. - 2014. - Vol. 53. - P. 219-233.
67. Atanacković T.M. Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Wave Propagation, Impact and Variational Principles / T.M. Atanacković. - New York: Wiley, 2014. - 406 p.
68. Atanacković T.M. On viscoelastic compliant contact-impact models / T.M. Atanacković, D.T. Spasic // *ASME Journal of Applied Mechanics*. – 2004. - Vol. 71, N 1. – P. 134-138.
69. Atanacković T.M. On a model of viscoelastic rod on unilateral contact with a rigid wall / T.M. Atanacković, I. Oparnica, S. Pilipovic // *IMA Journal of Applied Mathematics*. – 2006. – Vol. 71. P. 1-13.
70. Babouskos N.G. Nonlinear vibrations of viscoelastic plates of fractional derivative type: An AEM solution / N.G. Babouskos, J.T. Katsikadelis // *The Open Mechanics Journal*. - 2010. -Vol. 4. - P. 8-20.
71. Bagley R.L. A theoretical basis for the application of fractional calculus / R.L. Bagley, P.J. Torvik // *Journal of Rheology*. - 1983. - Vol. 27. – P. 201-210.
72. Baleanu D. Fractional Calculus: Models and Numerical Methods / D Baleanu. - New York: World Scientific, 2016. - 476 p.
73. Calvit H.H. Numerical solution of the problem of impact of a rigid sphere onto a linear viscoelastic half-space and comparison with experiment / H.H. Calvit // *International Journal of Solids and Structures*. - 1967. - Vol. 3, Issue 6. - P. 951-960.
74. Cantwell W.J. The impact resistance of composite materials / W.J. Cantwell, J. Morton // *Composites*. - 1991. - Vol. 22, Issue 5. - P. 347-362.

75. Carpinteri A. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.). - Wien : Springer-Verlag, 1997. – 348 p.
76. Cattani C. Fractional Dynamics / C. Cattani, H.M. Srivastava, X.-J. Yang. - Berlin: De Gruyter Open, 2016.
77. Chen C.P. Design of viscoelastic impact absorbers: optimal material properties / C.P. Chen, R.S. Lakes // International Journal of Solid Structures. - 1990. - Vol. 26. - Issue 12. - P. 1313-1328.
78. Christoforou A.P. Analysis of simply-supported orthotropic cylindrical shells subject to lateral impact loads / A.P. Christoforou, S.R. Swanson // Journal of Applied Mechanics. - 1990. - Vol. 57, Issue 2. - P. 376-382.
79. Christoforou A.P. Analysis of impact response in composite plates / A.P. Christoforou, S.R. Swanson // International Journal of Solids and Structures. – 1991. - Vol. 27. – P. 161-170.
80. Conway H.D. Impact of an indenter on a large plate / H.D. Conway, H.C. Lee // Journal of Applied Mechanics. - 1970. - Vol. 37, Issue 1. - P. 234-235.
81. Conway H.D. The impact between a rigid sphere and thin layer / H.D. Conway, H.C. Lee // Journal of Applied Mechanics. - 1970. - Vol. 37, Issue 1. - P. 159-162.
82. Costa M.F.P. AIP Generalized Fractional Maxwell Model: Parameter Estimation of a Viscoelastic Material / M.F.P Costa, C. Ribeiro // Conference Proceedings of the American Institute of Physics. - 2012. - Vol. 1479. - P. 790-793.
83. D'Acunto B. On the motion of a viscoelastic solid in the presence of a rigid wall - Part II. Impact laws for the hereditary case. Solution of the unilateral problem / B. D'Acunto, A. D'Anna, P. Penno // International Journal of Non-linear Mechanics. - 1988. - Vol. 23, Issue 1. - P. 67-85.
84. Daou R. Fractional Calculus: History, Theory and Applications / R. Daou, M. Xavier . - New York : Nova Science Publishers, 2015.

85. Debnath L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering / L. Debnath // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. - 2003. - Vol. 54. - P. 3413–3442.
86. Debnath L. A brief historical introduction to fractional calculus / L. Debnath // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. – Vol. 35, № 4. - 2013. - P. 487-501.
87. Diethelm K. Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods / K. Diethelm // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. - 2005. - Vol. 194, Issue 6-8. - P. 743-773.
88. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations / K. Diethelm. - Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
89. Dobyns A.L. Analysis of simply-supported orthotropic plates subject to static and dynamic loads / A.L. Dobyns // AIAA Journal. - 1981. - Vol. 19, Issue 5. - P. 642-650.
90. Drăgănescu G.E. Application of a variational iteration method to linear and nonlinear viscoelastic models with fractional derivatives / G.E. Drăgănescu // Journal of Mathematical Physics. - 2006. - Vol. 47, Issue 8. - P. 082902.
91. Escalante-Martinez J.E. Experimental evaluation of viscous damping coefficient in the fractional underdamped oscillator / J.E. Escalante-Martinez [etc.] // Advances in Mechanical Engineering. - 2016. - Vol. 8, Issue 4. - P. 1-12.
92. Espindola J.J. A generalised fractional derivative approach to viscoelastic material properties measurement / J.J. Espindola, J.M. Silva Neto, E.M.O. Lopes // Applied Mathematics and Computation. - 2005. – Vol. 164. - P. 493-506.
93. Frech M. A survey of fractional calculus for structural dynamics applications / M. Frech, J. Rogers // IMAC-IX: A Conference on Structural Dynamics. - Kissimmee: [s. n.], 2001. - Vol. 4359. - P. 305-309.

94. Fujii Y. Proposal for material viscoelasticity evaluation method under impact load / Y. Fujii, T. Yamaguchi // *Journal of Materials Science*. - 2005. - Vol. 40, Issue 18. - P. 4785-4790.
95. Greszczuk L. B. Damage in composite materials due to low velocity impact / L. B. Greszczuk // *Impact Dynamics*. - New York : Wiley, 1982. - P. 55-94.
96. Hammel J. Aircraft impact on a spherical shell // *Nuclear Engineering Design*. - 1976. - Vol. 37. - P. 205-223.
97. Herrmann R. *Fractional Calculus: an Introduction for Physicists* / R. Herrmann. New Jersey: World Scientific, 2011.
98. Hilfer R. *Applications of Fractional Calculus in Physics* / R. Hilfer (Editor). - Singapore: World Scientific, 2000. - 472 p.
99. Hilton H.H. Clarifications of certain ambiguities and failings of Poisson's ratios in linear viscoelasticity / H.H. Hilton // *Journal of Elasticity*. - 2011. - Vol.104. -P. 303-318.
100. Huang W. The dynamic response of an elastic circular plate on a viscoelastic Winkler foundation impacted by a moving rigid body /W. Huang, Y-D. Zou // *JSME International Journal Series III*. - 1992. - Vol. 35, Issue 2. – P. 274-278.
101. Hunter S.C. The Hertz problem for a rigid spherical indenter and a viscoelastic half-space / S.C. Hunter // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. - 1960. - Vol.8, Issue 4. - P. 219-234.
102. Ibrahim R.A. *Vibro-Impact Dynamics; Modeling, Mapping and Applications*. Springer, 2009.
103. Ingman D. Application of different operator with servo-order function in model of viscoelastic deformation process / D. Ingman, J. Suzdalnitsky // *Journal of Engineering Mechanics*. - 2005. – Vol. 131, N 7. – P. 763-767.
104. Ingman D. Response of viscoelastic plate to impact / D. Ingman, J. Suzdalnitsky // *ASME Journal of Vibration and Acoustics*. - 2008. - Vol. 130, Issue 1. - 8 pages.

105. Ingman D. Constitutive dynamic-order model for nonlinear contact phenomena / D. Ingman, J. Suzdalnitsky, M. Zeifman // ASME Journal of Applied Mechanics. – 2000. – Vol. 67, N 2. – P. 383-390.
106. Jung B. A statistical characterization method for damping material properties and its application to structural-acoustic system design / B. Jung // Journal of Mechanical Science and Technology. - 2011. - Vol. 25, Issue 8. - P. 1893-1904.
107. Kaminsky A.A. Mechanics of the delayed fracture of viscoelastic bodies with cracks: Theory and experiment (Review) / A.A. Kaminsky // International Applied Mechanics. - 2014. - Vol. 50, Issue 5. - P. 485–548.
108. Kamke E. Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen / E. Kamke. – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1943.
109. Katsikadelis J.T. Nonlinear dynamic analysis of viscoelastic membranes described with fractional differential models / J.T. Katsikadelis // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. -2012. -Vol. 50. -P. 743-753.
110. Kilbas A.A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. - Amsterdam: Elsevier Science, 2006. - 523 p.
111. Kim H.S. Model for thickness effect with impact testing of viscoelastic materials / H.S. Kim, R.M. Shafiq // Journal of Applied Polymer Science. - 2001. - Vol. 81. – P. 1762-1767.
112. Kren A.P. Determination of the relaxation function for viscoelastic materials at low velocity impact / A.P. Kren, A. O. Naumov // International Journal of Impact Engineering. - 2010. - Vol. 37. - P. 170-176.
113. Kursun A. Investigation of the effect of low-velocity impact on composite plates with preloading / A. Kursun, M. Senel // Experimental Techniques. – 2013. – Vol. 37, P. 41-48.
114. Lee E.H. The contact problem for viscoelastic bodies / E.H. Lee, J.R.M. Radok // Journal of Applied Mechanics. - 1960.- Vol. 27, Issue 3. - P. 438-444.

115. Lee Y. The lumped parameter method for elastic impact problem / Y. Lee, J.F. Hamilton, J.W. Sullivan // *ASME Journal of Applied Mechanics*. - 1983. - Vol. 50, Issue 4a. - P. 823-827.
116. Lorenzo S.Di. Stochastic response of fractionally damped beams / S. Di Lorenzo, M. Di Paola, F.P. Pinnola, A. Pirrotta // *Probabilistic Engineering Mechanics*. - 2014. - Vol. 35. - P. 37-43.
117. Love A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity / A.E.H. Love. - Cambridge: Cambridge University Press, 1906.
118. Lu Y.C. Fractional derivative viscoelastic model for frequency-dependent complex moduli of automotive elastomers / Y.C. Lu // *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. - 2006. - Vol. 3, Issue 4. - P. 329-336.
119. Luo A.C.J. *Vibro-impact Dynamics* / A.C.J. Luo, Y. Guo Y. – New York: Wiley, 2013.
120. Machado J.A.T. On development of fractional calculus during the last fifty years / J.A.T. Machado, A.M.S.F. Galhano, J.J. Trujillo // *Scientometrics*. - 2014. - Vol. 98, Issue 1. - P. 577-582.
121. Machado J.A.T. Recent history of fractional calculus / J.A.T. Machado, V. Kiryakova, F. Mainardi // *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. - 2011. - Vol. 16, Issue 3. - P. 1140-1153.
122. Mahajan P. Adaptive computation of impact force under low velocity impact / P. Mahajan, A. Dutta // *Computers and Structures*. - 1999. - Vol. 70, Issue 2. - P. 229-241.
123. Mainardi F. An historical perspective on fractional calculus in linear viscoelasticity / F. Mainardi // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. - 2012. - Vol. 15, Issue 4. - P. 712-717.
124. Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models* / F. Mainardi - London : Imperial College Press, 2009. - 368 p.

125. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity / F. Mainardi. - London: Imperial College Press, 2010.
126. Markopoulos Y.P. On the low velocity impact response of laminated composite plates utilizing the p-version Ritz method / Y.P. Markopoulos, V. Kostopoulos // Advanced Composite Letters. - 2003. - Vol. 12, Issue 5. - P. 177-190.
127. Matuk C. Impact of a linearly elastic rod on a thin linearly viscoelastic target/ C. Matuk // Journal of Sound and Vibration. - 1979. - Vol. 64, Issue 1. - P. 45-55.
128. Meral F.C. Fractional calculus in viscoelasticity: An experimental study / F.C. Meral, T.J. Royston, R. Magin // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. - 2010. - Vol. 15, Issue 4. - P. 939-945.
129. Merrill L.J. Dynamic mechanical studies of irradiated polyethylene / L.J. Merrill, J.A. Sauer, A.E. Woodward // Polymer. -1960. -Vol. 1. -P. 351-364.
130. Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates / R.D. Mindlin // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1951. - Vol. 73. – P. 31-38.
131. Mochihara M. Behavior of plates in the elastic range under transverse impact / M. Mochihara, Y. Tanaka // Research Reports of Kagoshima Technological College. - 1989. - Vol. 23. - P. 35-44.
132. Näsholm S.P. On a fractional Zener elastic wave equation / S.P. Näsholm, S. Holm // Fractional Calculus and Applied Analysis. - 2013. - Vol. 16, Issue 1. – P. 26-50.
133. Nairn J.A. Measurement of polymer viscoelastic response during an impact experiment / J.A. Nairn // Polymer Engineering and Science. - 1989. - Vol. 29, Issue 10. - P. 654-661.
134. Oeser M. Visco-elastic modeling of virgin and asphalt binders / M. Oeser // Computer Methods for Geomechanics: Frontiers and Applications; Eds. Oeser Nasser Khalili, Markus. - Melbourne: IACMAG 2011 . - Vol. 1. - P. 313-319.

135. Pao Y.-H. Extension of the Hertz theory of impact to the viscoelastic case / Y.-H. Pao // *Journal of Applied Physics*. - 1955. - Vol. 26. - P. 1083.
136. Permoon M.R. Application of radial basis functions and sinc method for solving the forced vibration of fractional viscoelastic beam / M.R. Permoon, J. Rashidinia, A. Parsa, H. Haddadpour, R. Salehi // *Journal of Mechanical Science and Technology*. - 2016. - Vol. 30. -P. 3001-3008.
137. Phillips J.W. Impact of a rigid sphere on a viscoelastic plate / J.W. Phillips, H.H. Calvit // *ASME Journal of Applied Mechanics*. – 1967. Vol. 34, N 4. P. 873-878.
138. Podlubny I. *Fractional Differential Equations* / I. Podlubny. - New York : Academic Press, 1999. - 340 p.
139. Popov I.I. Impact response of a viscoelastic beam considering the changes of its microstructure in the contact domain / I.I. Popov, Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, T.P. Chang // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. - 2015. - Vol. 19, Issue 4. - P. 455-481.
140. Popov I.I. Experimental study of concrete aging effect on the contact force and contact time during impact interaction of an elastic rod with a viscoelastic beam / I.I. Popov, T.-P. Chang, Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // *Journal of Mechanics*. – 2017. – Vol. 33, № 3. P. 317-322.
141. Qian Y. A comparison of solution techniques for impact response of composite plates / Y. Qian, S.R. Swanson // *Composite Structures*. – 1990. - Vol. 14. – P. 177-192.
142. Rossikhin Yu.A. Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids / Yu.A. Rossikhin // *Applied Mechanics Reviews*. - 2010. - Vol. 63, № 1. - 12 pages.
143. Rossikhin Yu.A. A ray method of solving problems connected with a shock interaction / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // *Acta Mechanica*. - 1994. Vol. 102, Issue 1. - P. 103-121.

144. Rossikhin Yu.A. To the construction of uniformly valid forward-area asymptotics in terms of the ray method in dynamic problems in linear viscoelasticity / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // ASME Journal of Applied Mechanics. -1994. –Vol. 61. –P.744-746.
145. Rossikhin Yu.A. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // Applied Mechanics Reviews. - 1995. - Vol. 48, Issue 1. - P. 39.
146. Rossikhin Yu.A. The ray method for solving boundary problems of wave dynamics for bodies having curvilinear anisotropy / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // Acta Mechanica. - 1995. - Vol. 109. - P. 49-64.
147. Rossikhin Yu.A. The impact of elastic bodies upon beams and plates with consideration for the transverse deformations and extension of a middle surface / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // ZAMM. - 1996. - Vol. 76. - P. 433-434.
148. Rossikhin Yu.A. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // Applied Mechanics Reviews. - 1997. - Vol. 50, Issue 1. - P. 15-67.
149. Rossikhin Yu.A. The impact of a sphere on a Timoshenko thin-walled beam of open section with due account for middle surface extension / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // ASME Journal of Pressure Vessel Technology. - 1999. - Vol. 12. - P. 375-383.
150. Rossikhin Yu.A. Analysis of dynamic behaviour of viscoelastic rods whose rheological models contain fractional derivatives of two different orders / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // ZAMM. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. - 2001. - Vol. 81, Issue 6. - P. 363-376.
151. Rossikhin Yu.A. Viscoelastic transverse impact of a sphere on an Uflyand-Mindlin plate / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, A.A. Loktev. - Barcelona:

- Proceedings of the 8th International Conference on Computational Plasticity, p. 372-375, 2005.
152. Rossikhin Yu.A. Transient response of thin bodies subjected to impact: Wave approach / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // *The Shock and Vibration Digest*. - 2007. - Vol. 39, Issue 4. - P. 273-309.
 153. Rossikhin Yu.A. Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. - 2007. - Vol. 10, Issue 2. - P. 111-121.
 154. Rossikhin Yu.A. The method of ray expansions for investigating transient wave processes in thin elastic plates and shells / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // *Acta Mechanica*. - 2007. - Vol. 189, Issue 1 - P. 87-121.
 155. Rossikhin Yu.A. Fractional-derivative viscoelastic model of the shock interaction of a rigid body with a plate / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // *Journal of Engineering Mathematics*. - 2008. - Vol. 60. - P. 101-113.
 156. Rossikhin Yu.A. Dynamic response of a pre-stressed transversely isotropic plate to impact by an elastic rod / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // *Journal of Vibration and Control*. – 2009. - Vol. 15, N 1. – P 25-51.
 157. Rossikhin Yu.A. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // *Applied Mechanics Reviews*. - 2010. - Vol. 63, № 1. – Paper ID 010801.
 158. Rossikhin Yu.A. The analysis of the impact response of a thin plate via fractional derivative standard linear solid model / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // *Journal of Sound and Vibration*. - 2011. - Vol. 330. - P. 1985-2003.
 159. Rossikhin Yu.A. Two approaches for studying the impact response of viscoelastic engineering systems: An overview / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // *Computers & Mathematics with Applications*. - 2013. - Vol. 66. - P. 755-773.

160. Rossikhin Yu.A. Ray expansion theory / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // Encyclopedia of Thermal Stresses. - Heidelberg: Springer, 2014.
161. Rossikhin Yu.A. Features of fractional operators involving fractional derivatives and their applications to the problems of mechanics of solids / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // Chapter 8 in: Fractional Calculus: Applications (Roy Abi Zeid Daou and Xavier Moreau, Eds.), New York: NOVA Publishers, USA, 2015. - P. 165-226.
162. Rossikhin Yu.A. The fractional derivative Kelvin–Voigt model of viscoelasticity with and without volumetric relaxation / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // Journal of Physics: Conference Series, 2018, Vol. 991, pp. 1-8, PaperID 012069.
163. Rossikhin Yu.A. Dynamic response of a visco-elastic plate impacted by an elastic rod / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // Journal of Vibration and Control. - 2016. – Vol. 22. –P. 2019-2031.
164. Rossikhin Yu.A. Impact response of a Timoshenko-type viscoelastic beam with due account for the extension of its middle surface / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, M.G. Meza Estrada // SpringerPlus. - 2016. - Vol. 5, Issue 1. – 18 pages.
165. Rossikhin Yu.A. Modeling of the impact response of a beam in a viscoelastic medium / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, M.G. Meza Estrada // Applied Mathematical Sciences. – 2016. - Vol. 10, Issues 49-52. - P. 2471-2481.
166. Rossikhin Yu.A. Dynamic response of a viscoelastic beam impacted by a viscoelastic sphere / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, I.I. Popov // Computers & Mathematics with Applications. – 2017. – Vol. 73, N 6. – P. 970-984.
167. Rossikhin Yu.A. Application of the fractional derivative Kelvin-Voigt model for the analysis of impact response of a Kirchhoff-Love plate / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, P.T. Trung // WSEAS Transactions on Mathematics. - 2016. - V. 15. - P. 498-501.

168. Rossikhin Yu.A. Impact of a viscoelastic sphere against an elastic Kirchhoff-Love plate embedded into a fractional derivative Kelvin-Voigt medium / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, P.T. Trung // *International Journal of Mechanics*. - 2017. - V. 11. - P. 58-63.
169. Rossikhin Yu.A. Analysis of the viscoelastic sphere impact against a viscoelastic Uflyand-Mindlin plate considering the extension of its middle surface / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, P.T. Trung // *Shock and Vibration*. - 2017. - V. 2017, Article ID 5652023, 12 p.
170. Rossikhin Yu.A. Low-velocity impact response of a pre-stressed isotropic Uflyand-Mindlin plate / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, P.T. Trung // *ITM Web of Conferences*. - 2017. - V. 9, Article ID 03005, 5 p.
171. Rossikhin Yu.A. Dynamic stability of a circular pre-stressed elastic orthotropic plate subjected to shock excitation / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // *Shock and Vibration* – 2006. – Vol. 13, N 3. – P.197-214.
172. Sasso M. Application of fractional derivative models in linear viscoelastic problems / M. Sasso, G. Palmieri, D. Amodio // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. - 2011. - Vol. 15, Issue 4. - P. 367-387.
173. Sasso M. Application of fractional derivatives models to time-dependent materials / M. Sasso, G. Palmieri, D. Amodio // *SEM Annual Conference*. - Indianapolis, Indiana USA : Springer New York, 2010. - Vol. 3. - P. 213-221.
174. Shimizu N. Impulsive responses of viscoelastic oscillators / N. Shimizu, M. Iijima // *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series C*. - 1998. - Vol. 624. - P. 2903-2907.
175. Tarasov V.E. *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media* / V.E. Tarasov // - Beijing: Higher Education Press, 2010.
176. Tenreiro Machado J.A. Some applications of fractional calculus in engineering / J.A. Tenreiro Machado, M.F. Silva, R.S. Barbosa, I.S. Jesus, C.M. Reis, M.G.

- Marcos, A.F. Galhano // *Mathematical Problems in Engineering*. -2010. - Vol. 2010, Article ID 639801. - 34 pages.
177. Tenreiro Machado J.A. On development of fractional calculus during the last fifty years / J.A. Tenreiro Machado, A.M.S.F. Galhano, J.J. Trujillo // *Scientometrics*. -2014. –Vol. 98, Issue 1. – P. 577–582.
178. Timoshenko S.P. Zur Frage nach der Wirkung eines Stosses auf einen Balken // *ZAMP*. – 1913. – Vol. 62, N 1-4. - P. 198-209.
179. Uchaikin V.V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers* / V.V. Uchaikin. - Berlin - Higher Education Press, Beijing: Springer, 2013.
180. Valério D. Some pioneers of the applications of fractional calculus / D. Valério, J.T. Machado, V. Kiryakova // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. - 2014. - Vol. 17, Issue 2. - P. 552–578.
181. Zener C. The intrinsic inelasticity of large plates // *Physical Reviews*. -1941. Vol. 59. - P. 669-673.
182. Zeng F. *Numerical Methods for Fractional Calculus* / F. Zeng, C. Li. - Boca Raton: CRC Press, 2015.
183. Zhang Yu.N. Validation of nonlinear viscoelastic contact force models for low speed impact / Yu.N. Zhang, I. Sharf // *Journal of Applied Mechanics*. - 2009. - Vol. 76. - 12 pages.
184. Zhou X.Q. Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review / X.Q. Zhou [etc.] // *Composite Structures*. - 2016. - Vol. 136. - P. 460-480.
185. Zhou Y. *Basic Theory of Fractional Differential Equations* / Y. Zhou. - Singapore: World Scientific, 2014. - 304 p.
186. Zhuravkov M.A. Review of methods and approaches for mechanical problem solutions based on fractional calculus / M.A. Zhuravkov, N.S. Romanova // *Mathematics and Mechanics of Solids*. - 2014. - Vol. 21, Issue 5. - P. 595-620.

187. Zukas J.A. Impact Dynamics / J.A. Zukas, T. Nicholas, H.F. Swift, L.B. Greszchuk, D.R. Curran. - New York: John Wiley & Sons, 1982.
188. Cole K.S. Dispersion and absorption in dielectrics. II. Direct current characteristics / K.S. Cole, R.H. Cole // Journal of Chemical Physics. - 1942. – Vol. 10. – P. 98-105.