

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

На правах рукописи

Дубинин Алексей Лаврентьевич

**БИОМЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ  
ОРТОДОНТИЧЕСКОГО ЛЕЧЕНИЯ**

01.02.08 – Биомеханика

**Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук**

Научный руководитель: заслуженный деятель науки РФ,  
д.т.н., профессор Ю.И. Няшин

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение.....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Зубочелюстные аномалии и их влияние на организм человека. Методы их исправления.....</b>	<b>13</b>
1.1. Сведения об анатомии зубочелюстной системы человека.....	13
1.2. Зубочелюстные аномалии, их влияние на здоровье организма человека.....	15
1.3. Исправление зубочелюстных аномалий.....	20
Выводы по главе 1.....	28
<b>Глава 2. Биомеханический подход в ортодонтии.....</b>	<b>29</b>
2.1. Современная концепция здравоохранения. ....	29
2.2. Роль биомеханики в ортодонтии.....	32
2.3. Биомеханические принципы в ортодонтии.....	33
2.4. Модель системы «зуб–периодонт».....	36
Выводы по главе 2.....	38
<b>Глава 3. Введение понятия «область сопротивления зуба».....</b>	<b>39</b>
3.1. Разработка биомеханической модели движения зуба под действием нагрузки .....	39
3.2. Анализ условий существования «центра сопротивления зуба»..	45
3.3. Теоретическое исследование множества прямых поступательного воздействия и осей поворота парой.....	47
3.3.1. Исследование множества прямых поступательного воздействия.....	47
3.3.2. Исследование множества осей поворота парой .....	56
3.4. Введение понятия «область сопротивления зуба».....	64

Выводы по главе 3.....	67
<b>Глава 4. Анализ ортодонтического движения зуба в частных случаях</b>	<b>68</b>
4.1. Разработка методики определения компонентов матрицы податливости периодонта .....	68
4.2. Проведение численных экспериментов.....	74
4.2.1. Определение положения центра сопротивления в плоскости.....	74
4.2.2. Определение положения и ориентации области сопротивления в зависимости от заданных параметров системы «зуб-периодонт» (механические, геометрические).....	77
4.2.3. Определение связи между видами области сопротивления.....	85
4.3. Планирование и проведение натуральных экспериментов.....	88
Выводы по главе 4.....	95
<b>Глава 5. Определение оптимальной ортодонтической нагрузки.....</b>	<b>96</b>
5.1. Постановка задачи управления перемещением зуба на начальной стадии ортодонтического лечения .....	96
5.2. Решение задачи.....	99
5.2.1. Решение задачи на примере исправления диастемы.....	100
5.2.2. Решение задачи на примере исправления экстррузии зуба...	102
5.2.3. Решение задачи на примере исправления конвергенции зубов.....	104
5.3. Рекомендации для практики. Перспективы дальнейшего развития работы. ....	105
Выводы по главе 5.....	107
<b>Заключение.....</b>	<b>108</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>110</b>
<b>Приложения</b>	<b>127</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **Актуальность**

С позиций биомеханики человеческий организм рассматривается как единый сложный комплекс взаимодействующих друг с другом многоуровневых систем (зубочелюстная, костная, мышечная, дыхательная, кровеносная, нервная и др.). Почти всегда нарушения функционирования одной из систем ведут к некоторым расстройствам в работе других, а иногда и к общему ослаблению организма.

В непосредственной близости к ротовой полости проходит внутренняя сонная артерия, которая снабжает кровью большую часть головы, в частности головной мозг. Вследствие наличия зубочелюстных аномалий (неправильного прикуса, смещения диска височно-нижнечелюстного сустава и др.) ширина просвета сосуда может уменьшаться. Это очень опасное явление, которое может стать причиной временного нарушения кровообращения мозга и даже инсульта (одонтогенный инсульт) [18, 24, 34, 38, 83, 84, 102, 104, 105, 111]. Инсульт является вторым по смертности заболеванием в мире. Ежегодно регистрируется около 6 миллионов случаев, из них 450 тысяч – в России. Также ввиду наличия зубочелюстных аномалий возможны нарушения эстетики лица, дыхания, осанки, мимики, произношения слов, пищеварения и пр. [1, 17, 20, 21, 30, 34, 39, 40, 52, 54, 58, 137].

Исправление зубочелюстных аномалий заключается в перемещении зубов в «правильное положение» (соответствующее физиологическому прикусу) под действием ортодонтической нагрузки. Сам процесс перемещения зубов является довольно сложным. На его ход влияет множество факторов: свойства живых тканей, физиологические процессы, параметры ортодонтической конструкции. Поэтому врачу бывает довольно трудно учесть их влияние, опираясь лишь на свою интуицию и клинический опыт. Ввиду отсутствия количественных критериев оценки параметров врачу достаточно трудно ответить на один из основных вопросов ортодонтии «куда, как и какую приложить силу, чтобы переместить зуб желаемым образом?».

В то же время согласно современной концепции здравоохранения «4П-медицина» лечение должно быть персонализированным, предсказательным, превентивным, партнерским [33, 35, 42, 43, 74, 85, 96, 98–100, 103, 105, 127, 132]. Поэтому необходимо уметь обеспечивать индивидуальный подход к лечению пациентов, прогнозировать результаты лечения, используя современные компьютерные методы количественной оценки параметров и стараться предотвращать развитие аномалий еще на ранней стадии, а также объективизировать и оптимизировать существующие методики лечения.

В связи с этим очевидна необходимость биомеханического подхода к изучению процесса ортодонтического лечения. Данный подход основывается на знаниях и методах анатомии, физиологии, механики, математического моделирования, поэтому позволит глубже исследовать данный вопрос.

Таким образом настоящая работа является актуальной научной задачей.

### **Степень научной разработанности проблемы**

В 1917 году немецким ученым Фишем была опубликована работа [87], целью которой являлось привлечение внимания практикующих врачей и специалистов из области ортодонтии к базовым механическим принципам. Утверждалось, что данная теория может способствовать более глубокому

пониманию процессов, связанных с перемещением зубов, а также возможному развитию новых решений для существующих проблем. В ней впервые было предложено такое понятие как «центр сопротивления зуба» для исследования начального (мгновенного) перемещения зуба.

На момент начала данной диссертации история существования понятия центра сопротивления зуба насчитывала около 100 лет. Определенный вклад в развитие данного вопроса внесли такие ученые как Бурстоун [67, 70, 114, 125, 134], Смит [32], Хаак [94], Припутневич [70, 71, 125], Хосевар [97], Проватидис [122], Нагерл [114], Дермоут [82], Бульке [65, 66] и др. В результате появилось множество вариантов определения понятия «центр сопротивления», свойств (были и противоречащие друг другу), ряд способов нахождения его местоположения в зависимости от различных факторов (принятой модели, формы зуба, количества корней). Кроме того, некоторыми авторами вопрос ставился радикально: «можно ли пользоваться понятием центр сопротивления существует ли он вообще?» [140].

Существенных успехов в этом направлении добились Ван дер Варст, Питерс, де Бур [139] и М.А. Осипенко, М.Ю. Няшин, Ю.И. Няшин [117]. Однако нельзя сказать, что эти труды закрыли вопрос об управляемом ортодонтическом перемещении зубов. С новыми знаниями появилось еще больше новых вопросов. Благодаря данным работам стало ясно, что понятием «центр сопротивления» не всегда можно пользоваться. Также остается практически неизученным вопрос о количественном определении оптимальной величины ортодонтической нагрузки.

Настоящая диссертация является продолжением идей, развитых в работах [117, 139]. Цели и задачи исследования формулируются, исходя из вышеперечисленных положений.

### **Цели и задачи исследования**

**Цель исследования** заключается в разработке биомеханического подхода к исследованию движения зуба на начальной стадии ортодонтического лечения.

Для достижения главной цели исследования были поставлены следующие основные задачи:

- разработка биомеханической модели движения зуба;
- анализ ортодонтического движения зуба в частных случаях;
- верификация разработанной методики посредством натурального эксперимента, сравнения с результатами работ других авторов;
- постановка и решение задачи определения оптимальной ортодонтической нагрузки с учетом ограничения на напряжения в периодонтальной связке.

### **Научная новизна**

В работе создан новый биомеханический подход для исследования перемещений зуба, включающий в себя новое фундаментальное понятие «область сопротивления зуба», исследованы свойства данного понятия, дана классификация видов области сопротивления, определена зависимость ее вида от геометрических и механических параметров системы «зуб–периодонт». Впервые в задаче определения оптимальной ортодонтической нагрузки использованы понятия «центра/области сопротивления зуба». Получены количественные значения данной системы сил, которые позволяют объективизировать эмпирические методы ортодонтии.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Теоретическая и практическая значимость работы определяется

- разработкой методики, алгоритма и программной реализацией для определения положения и вида области сопротивления зуба в зависимости от индивидуальных параметров (механических свойств, геометрии) системы «зуб–периодонт», что позволяет исследовать перемещение зуба в рамках костной лунки;
- созданием методики определения свойств податливости периодонтальной связки;

- теоретическим обоснованием настройки и установки ортодонтического аппарата (расчет места приложения, направления, оптимальной величины нагрузки к коронке зуба).

Работа проводилась в рамках Межвузовского научно-исследовательского центра «Современные проблемы медицинской биомеханики», созданного специалистами Пермского национального исследовательского политехнического университета и Пермского государственного медицинского университета и внедрена в практику подготовки специалистов обоих университетов (специальности «Компьютерная биомеханика» и «Ортопедическая стоматология»).

Работа, представленная в диссертации, выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №15-01-04932 А «Управление перемещением зубов при их ортодонтическом лечении с помощью нахождения центра сопротивления или области сопротивления».

### **Методология и методы исследования**

Теоретико-методологической базой диссертационной работы являются труды российских и зарубежных ученых, посвященные проблемам наличия и исправления зубочелюстных аномалий, математического моделирования живых систем. Авторами таких работ являются А. Оппенгейм, Д.А. Калвелис, А.Я. Катц, А. Шварц, Р. Нанда, Ч. Бурстоун, М. Гайгер, С.М. Босяков, Л.С. Персин, А.Н. Еловикова, Ю.И. Няшин, М.Ю. Няшин, М.А. Осипенко и др.

При решении поставленных задач использовались общенаучные (анализ, идеализация, формализация, эксперимент, индукция, дедукция) и специальные методы (вариационный метод «принцип возможных перемещений», методы программирования в среде *Matlab*, *ANSYS*, методы математического моделирования). Реализация ряда методов была осуществлена с помощью математических и инженерных компьютерных пакетов программ *Matlab*, *ANSYS*.

### **Положения, выносимые на защиту**

- новое понятие «область сопротивления зуба», которое является естественным обобщением понятия «центр сопротивления»;
- классификация видов области сопротивления и установление связи между этими видами и геометрическими и механическими параметрами системы «зуб–периодонт»;
- методика применения разработанной теории движения зуба в частных случаях (определение свойств податливости периодонтальной связки, определение вида и положения области сопротивления зуба);
- верификация разработанной методики на основе натурального эксперимента и сопоставления с результатами работ других авторов;
- введение критерия оптимальности при ограничениях на напряжения в периодонте: разница между запланированным начальным перемещением зуба и рассчитываемым должна быть минимальной;
- количественные значения оптимальной ортодонтической нагрузки для перемещения зуба в рамках костной лунки, позволяющие сформулировать рекомендации по настройке и установке ортодонтического аппарата.

### **Личный вклад автора**

Теоретические результаты, связанные с введением нового понятия «область сопротивления», развитием методики определения вида и положения области сопротивления, проведением натурального эксперимента, введением критерия оптимальности, результаты численного моделирования, получение количественных значений ортодонтической нагрузки, изложенные в диссертационной работе, получены автором лично и самостоятельно. Постановка задач, обсуждение полученных результатов проводились совместно с научным руководителем и научным консультантом.

### **Степень достоверности результатов**

Достоверность полученных результатов работы обеспечивается применением апробированных моделей, строгостью используемых математических методов при построении решения поставленных задач; проведенным натурным экспериментом; согласованием полученных теоретических и экспериментальных результатов с результатами других авторов.

### **Апробация и опубликование результатов диссертации**

Материалы диссертации докладывались на следующих Международных и Всероссийских научных конференциях:

- Зимняя школа по механике. – Пермь, 2013.
- Математическое моделирование в естественных науках. – Пермь, 2014.
- II-ая Всероссийская научно-техническая интернет-конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Прикладная математика, механика и процессы управления». – Пермь, 2014.
- XI Всероссийская конференция с международным участием и школа-семинар по биомеханике «Биомеханика – 2014». – Пермь, 2014.
- Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Фундаментальные и прикладные проблемы механики, математики, информатики». – Пермь, 2015.
- 5th Eurosummer School on Biorheology & Symposium on Micro and Nano Mechanics and Mechanobiology of Cells, Tissues and Systems. – Sofia, 2015.
- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Казань, 2015.
- Russian Conference with International Participation in Memory of Professor Vladimir S. Markhasin "Experimental and Computational Biomedicine" dedicated to corresponding member of RAS V.S. Markhasin. – Екатеринбург, 2016.

- VII Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике «МЕХАНИКА-2016». – Минск, 2016.
- XII Всероссийская конференция с международным участием и школа-семинар по биомеханике «Биомеханика – 2016». – Пермь, 2016.

Также полученные результаты неоднократно докладывались на семинарах кафедры теоретической механики и биомеханики, кафедры математического моделирования систем и процессов факультета прикладной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета в 2013-2017 гг. На протяжении всего срока выполнения работа постоянно обсуждалась с доктором медицинских наук, практикующим ортодонтом, доцентом А.Н. Еловиковой.

Материалы диссертации опубликованы в 14 научных работах, из них 5 статей в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий ВАК, 7 – в тезисах и сборниках материалов конференций, 2 – в прочих изданиях.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, приложения.

В первой главе рассмотрены анатомия и физиология элемента зубочелюстной системы, включающего зуб и периодонт. Приведен обзор проблем современной ортодонтии с перечислением частых зубочелюстных аномалий, где указано на их связь с различными нарушениями в человеческом организме. Также приведено описание сложного многофакторного процесса перемещения зубов. Акцентируется внимание на вопросе выбора ортодонтической нагрузки как решающего фактора в задачах ортодонтии.

Вторая глава отмечает роль биомеханики в ортодонтии. Приведен аналитический обзор литературы (1917–2015), охватывающей тему использования биомеханических принципов для исследования перемещения зубов.

Акцентировано внимание на понятии «центр сопротивления зуба». Выбрана биомеханическая модель для системы «зуб–периодонт».

В третьей главе предложено новое фундаментальное понятие «область сопротивления зуба», которое является естественным обобщением понятия «центр сопротивления зуба». Введено определение для нового понятия, исследованы его свойства, проведена классификация видов области сопротивления.

В четвертой главе описана методика реализации развитой теории области сопротивления в частных случаях. Приведено описание проведения численных и натуральных экспериментов. Установлена связь между видами области сопротивления из введенной классификации и параметрами системы «зуб–периодонт» (геометрия, механические свойства).

В пятой главе поставлена новая задача управления перемещением зуба на начальной стадии ортодонтического перемещения с использованием понятий «центра/области сопротивления зуба». Задача решена на примерах, соответствующих клиническим случаям, и получены значения оптимальной ортодонтической нагрузки.

# ГЛАВА 1

## ЗУБОЧЕЛЮСТНЫЕ АНОМАЛИИ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ОРГАНИЗМ ЧЕЛОВЕКА. МЕТОДЫ ИХ ИСПРАВЛЕНИЯ

### 1.1. Сведения об анатомии зубочелюстной системы человека

#### Зубочелюстная система

Зубочелюстная система – это сложная многоуровневая система, в которую входят такие подсистемы как зубы, периодонт, челюсти, язык, слюнные железы, мышцы, суставы, височно-нижнечелюстной диск [2, 26, 31, 40, 46]. Комплекс структур, которые обеспечивают прикрепление зуба к зубной альвеоле (цемент корня, периодонтальная связка, стенка зубной альвеолы, десна) составляет поддерживающий аппарат зуба – пародонт. Выступающие части зубов (коронки), располагающихся в челюстях, образуют зубные ряды – верхний и нижний.

В дальнейшем в качестве объекта исследования будет рассматриваться элемент зубочелюстного ряда, включающий зуб и периодонт.

#### Зубы

Зубы – это твердые образования, располагающиеся в альвеолярных отростках челюстей и являющиеся составной частью жевательно-речевого аппарата. Они участвуют в пережевывании пищи, образовании речи и голоса дыхании.

У взрослого человека в норме имеется 32 зуба (по 16 зубов на верхнем и нижнем ряду): 8 резцов, 4 клыка, 8 премоляров и 12 моляров (рисунок 1.1). Анатомически зуб делится на коронку зуба, шейку зуба и корень (рисунок 1.2). Последний заканчивается верхушкой корня зуба. Внутри зуба расположена полость зуба, *cavitas dentis*, которая подразделяется на полость коронки и канал корня зуба [1, 2, 7, 8, 31].

### Периодонт

Периодонт (или периодонтальная связка) – это совокупность тканей, таких как пучки коллагеновых волокон, между которыми находятся основное вещество соединительной ткани, кровеносные и лимфатические сосуды, нервные волокна, клеточные элементы (фибробласты, гистиоциты, остеобласты, остеокласты и др.). Пучки коллагеновых волокон проходят от цемента корня до костной ткани альвеолы. У вершины межзубной перегородки они имеют горизонтальное направление, а часть из волокон, выходя из цемента, вплетаются в десну, образуя круговую связку зуба. Некоторые волокна проходят над вершиной межзубной перегородки, соединяя соседние зубы. Однако большинство коллагеновых волокон имеют косой ход, приобретая радиальное направление у верхушки корня.

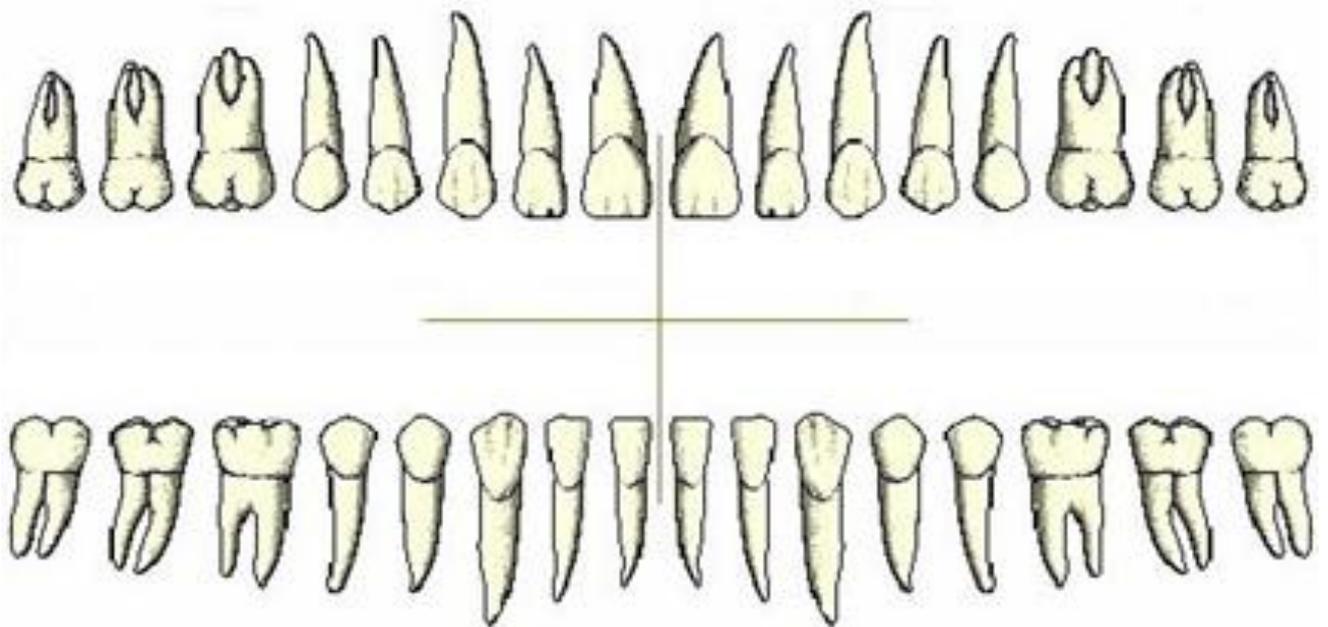


Рис. 1.1. Зубы верхнего и нижнего рядов

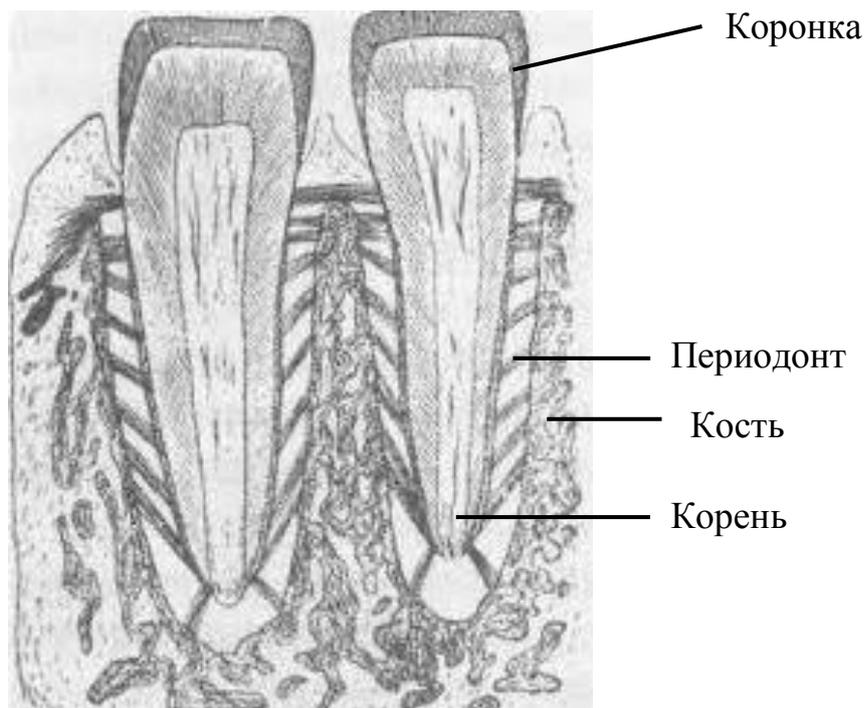


Рис. 1.2. Изображение зубочелюстного сегмента

Косое, а затем радиальное направление волокон обеспечивает надежную фиксацию корня в альвеоле. Периодонт находится между стенкой костной лунки и корнем зуба. Ширина периодонтальной щели может варьироваться в отдельных ее участках пределах от 0,15 до 0,35 мм (рисунок 1.2) [2, 4, 26, 31, 40, 46]. В средней трети корня периодонтальная щель сужена, и воронкообразно расширена у вершины межальвеолярной перегородки и в приверхушечной трети за счет микродвижений зуба в лунке.

## 1.2. Зубочелюстные аномалии, их влияние на здоровье организма человека

Зубочелюстные аномалии – это врожденные и приобретенные нарушения развития зубочелюстной системы: аномалии зубов (диастема, экстрюзия, конвергенция), челюстных костей, аномалии соотношения зубных рядов (прогнатия, прогения, глубокий прикус), сужение зубных дуг, нарушения сроков прорезывания и роста зубов [6, 13, 23, 40, 44].

## Прикус

Одним из важнейших параметров, который определяет функционирование зубочелюстной системы – это прикус. Прикусом, *occlusio dentis*, называется определенное соотношение зубов верхнего и нижнего зубных рядов при смыкании челюстей (рисунок 1.3) [1,2, 7, 8, 25, 31].

Молочный прикус имеется в возрасте 2,5–6 лет. Постоянный прикус формируется к 12–14 годам. Принято различать два вида прикусов –



Рис. 1.3. Правильное смыкание верхнего и нижнего зубных рядов (физиологический прикус)

физиологический (нормальный) и аномальный. Физиологический прикус обеспечивает полноценную функцию жевания, речи и эстетический оптимум. При аномальном прикусе, в зависимости от степени тяжести, могут быть различные осложнения в функционировании всего организма.

*Физиологический прикус* характеризуется определенным набором признаков. Зубы верхней и нижней челюстей (за исключением третьего верхнего

моляра и первого нижнего резца) контактируют между собой таким образом, что каждый зуб смыкается с двумя антагонистами – зубами противопоставленной челюсти. Срединная линия лица проходит между центральными резцами верхней и нижней челюстей и находится с ними в одной сагиттальной плоскости. В зубных рядах промежутки между зубами отсутствуют [13, 23, 44].

#### Виды аномального прикуса (рисунок 1.4)

1. *Дистальный прикус (прогнатия патологическая)*: значительное выдвижение вперед зубов верхней челюсти (рисунок 1.4, а).
2. *Мезиальный прикус (прогения патологическая)*: значительное выдвижение вперед зубов нижней челюсти (рисунок 1.4, б).
3. *Открытый прикус*: отсутствует контакт между фронтальными или боковыми зубами при смыкании челюстей (рисунок 1.4, в).
4. *Глубокий прикус*: зубы верхнего ряда перекрывают нижние больше, чем на треть высоты их коронок, нарушен режуще-бугоркового контакт (рисунок 1.4, г).
5. *Перекрестный прикус*: нарушение контакта зубных рядов в поперечном направлении при смыкании челюстей (рисунок 1.4, д).

#### Причины развития аномалий

Существует множество факторов, которые являются причинами зубочелюстных аномалий. Все их можно разделить на две основные группы – эндогенные (обусловленные внутренними факторами) и экзогенные (обусловленные внешними факторами).

Эндогенные причины патологий можно разделить на две группы – по генетическим и эндокринным факторам. При рождении ребенок наследует особенности строения зубочелюстной системы от обоих родителей. Таким образом различное сочетание унаследованных генов может стать причиной зубочелюстных аномалий. Например, у папы и мамы зубочелюстная система не

имеет выраженных патологий, однако ребенок перенял узкую челюсть от мамы и крупные зубы от папы. Таким образом, у ребенка будет наблюдаться дефицит места, и зубы будут расположены неровно, скученно. Также следует упомянуть о наследуемых недостатках развития лицевого скелета генетически. Это могут быть патологии развития эмали зубов, врожденная расщелина твердого неба).

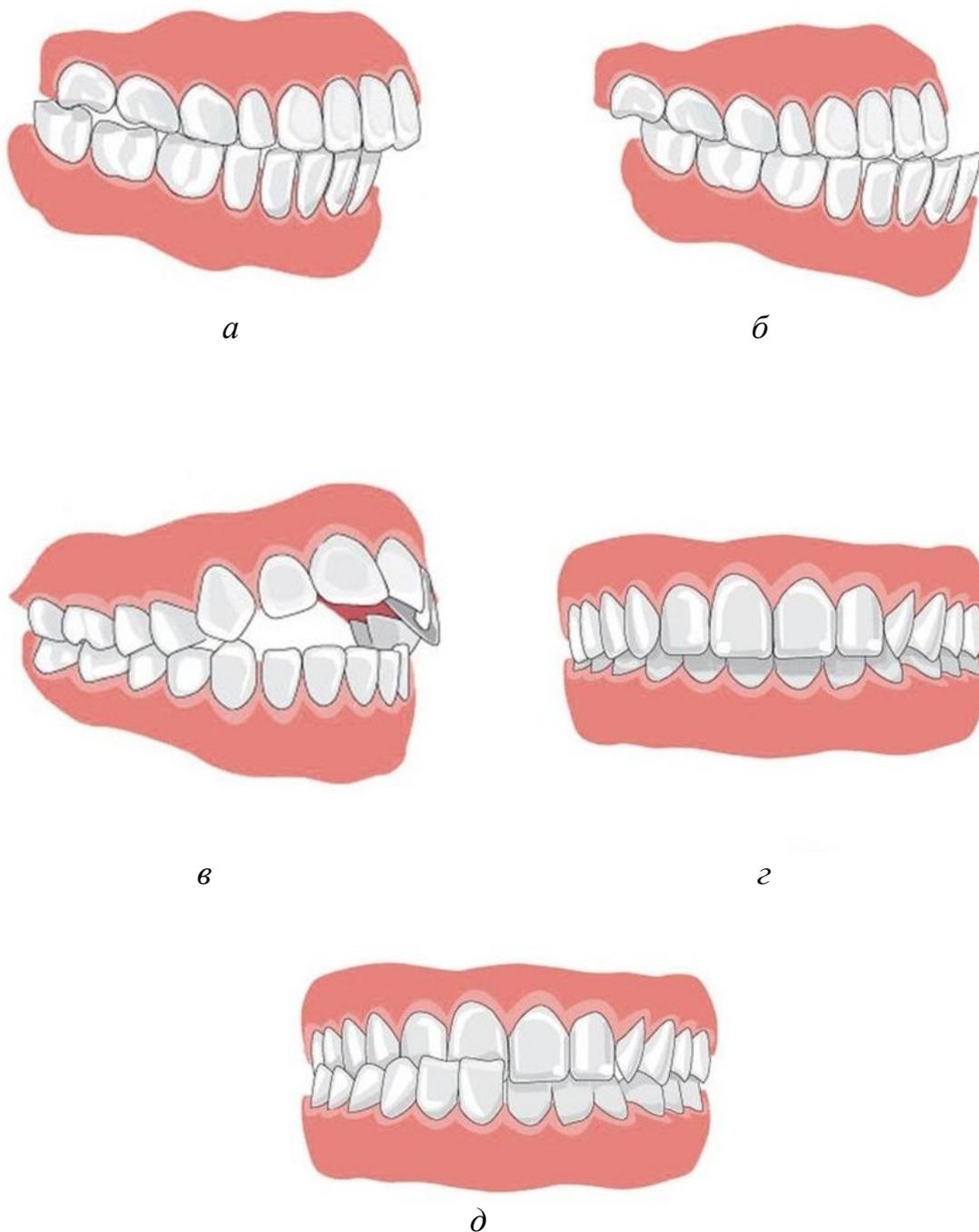


Рис. 1.4. Виды аномальных прикусов: *а* – дистальный (прогнатия); *б* – мезиальный (прогения); *в* – открытый; *г* – глубокий; *д* – перекрестный

В развитии растущего ребенка большую роль играет эндокринная система. Нарушения в ее работе влияют, в частности, и на зубочелюстную систему. К примеру, при гипотиреозе (сниженная функции щитовидной железы) может происходить задержка формирования зубов и челюстей, т.е. замедление прорезывания зубов, недоразвитие поверхностного слоя (гипоплазия эмали), частичное или полное отсутствие зубов (адентия) и пр.). При повышении функции щитовидной железы может происходить ретрогнатия (снижение средней и нижней трети лица), что отрицательно сказывается на росте челюстей. Вместе с тем нарушается деятельность жевательных мышц.

В период развития плода огромное значение имеют факторы окружающей среды: экология, наличие необходимых витаминов и минералов, поступающих с пищей, прием различных лекарственных препаратов. Они могут стать причинами нарушений развития зубочелюстной системы плода. Также могут стать причинами зубочелюстных аномалий и стрессовые ситуации, вредные привычки (курение, чрезмерное потребление алкоголя), вирусные заболевания, токсикация организма.

Патологии могут развиваться у ребенка и после рождения, например в результате искусственного вскармливания, затрудненного носового дыхания, недостаточного потребления витаминов, минералов, которые поступают вместе с пищей и водой, вредных привычек ребенка (подкладывание руки под щеку во время сна, сосание пальца), недостатка активности жевательных и мимических мышц.

### Влияние зубочелюстных аномалий на функционирование человеческого организма

Если говорить об осложнениях, которые могут повлечь за собой зубочелюстные аномалии, то они не ограничиваются лишь эстетическими изъянами. Приведем ряд последствий на весь организм человека: нарушение дыхания, потеря памяти, эпилепсия, нарушение дикции, слабоумие, кариес,

инфантильное глотание, выпадение волос, заболевания пародонта, нарушение осанки, бруксизм, деформация височно-нижнечелюстного сустава, респираторно-вирусные заболевания, **нарушение кровоснабжения мозга (одонтогенный инсульт)**, нарушение функций жевательных и мимических мышц, лор-заболевания, ишемическая болезнь сердца [1, 13, 16, 17, 26, 30, 35, 36, 48, 50, 133].

Жирным шрифтом специально выделено нарушение кровоснабжения мозга (одонтогенный инсульт) как наиболее опасное осложнение. Данное нарушение прослеживается из-за непосредственной близости внутренней сонной артерии к височно-нижнечелюстному суставу. Из-за неправильного соотношения челюстей, височно-нижнечелюстной диск может выпасть из суставной сумки и давить на внутреннюю сонную артерию, негативным образом влияя на нее, деформируя форму. Это ведет к сужению просвета сосуда (стенозу), влекущему за собой временное нарушение кровообращения, инсульт. Крайне важно уметь предупреждать развитие данного недуга на самой ранней стадии.

### **1.3. Исправление зубочелюстных аномалий**

Ортодонтия (греч. *Ορθός* – прямой, правильный и *οδόντι* – зуб) – область стоматологии, в которой изучаются причины и условия возникновения аномалий, диагностика, методы профилактики и лечения зубочелюстных аномалий.

В рамках ортодонтического лечения производится приведение зубных рядов к физиологичным форме, размеру, нормализация окклюзии, обеспечение оптимального динамического соотношения приводящих и отводящих мышц, коррекция роста и развития челюстных костей. Конечной целью ортодонтии является обеспечение идеального прикуса и как результат улучшение эстетики лица [1, 22, 25, 27, 45].

При планировании процесса исправления зубочелюстной аномалии врач-ортодонт должен понять, как и куда нужно переместить зуб. Изменение положения зуба обеспечивается действием на него определенной системы сил, которая прикладывается в определенном месте (на коронке зуба) и

реализующаяся с помощью таких корректирующих конструкций как брекет-система, эластопозиционер, аппараты внеротовой тяги и пр. Если сила будет чрезмерной, то высок риск повреждения окружающих тканей и в итоге осложнение процесса лечения. В случае же когда ортодонтическая нагрузка мала – лечение может затянуться. Неправильный выбор места приложения системы сил может привести к отличным от запланированных результатов, например перенапряжение окружающих тканей или совершение зубом сложного движения (в медицинской литературе распространен термин «наклонно-вращательное движение») вместо ожидаемого поступательного или вращательного.

Традиционно выделяют две фазы перемещения зуба: начальную и длительную [14, 22, 45, 115]. *Начальная* связана с движением зуба внутри костной лунки и не связана с костной перестройкой. Проффит [45] отмечает данный этап как наиболее ответственную ступень лечения, когда существует опасность передозировать силу ортодонтического аппарата, которая приводит к сдавливанию кровеносных сосудов периодонта, расположенного между плотными тканями, нарушению снабжения тканей кислородом, приостановлению физиологических процессов резорбции и аппозиции костной ткани, повреждению тканей периодонтальной связки. *Длительная* фаза связана с движением зуба в самой кости альвеолярного отростка в процессе ее перестройки, вызванной напряженным состоянием.

Проффит отмечает, что перемещение зубов при ортодонтическом вмешательстве осуществляется под влиянием двух процессов: 1) изменения костного метаболизма, контролируемого электрическими импульсами, возникающими при прогибе альвеолярной кости в процессе функционирования, обусловленными миграцией электронов внутри кристаллической решетки, и 2) клеточных изменений на химическом и физиологическом уровнях, связанных с током крови в пародонтальных тканях и костной лунке в результате установления зон сжимающего и растягивающего напряжения (рисунок 1.5). Известно, что в зонах сжатия кость перестраивается с преобладанием резорбции, в зонах

растяжения преобладает аппозиция костной ткани [22, 45]. Таким образом, зуб перемещается в костной ткани альвеолярного отростка. Обеспечение необходимого напряженного состояния и оптимальной системы сил, развиваемой ортодонтическим аппаратом, являются обязательными этапами на пути к направленной перестройке костной ткани, а значит к осуществлению желаемого перемещения зуба.

Шварц [131] впервые количественно оценил величину применяемой нагрузки в ортодонтии. Он выделил некоторые уровни реакции периодонтальной связки в ответ на оказываемое давление, определяющее характер перестройки пародонта. Проводя эксперименты на собаках, Шварц применял пружинные аппараты, которые создавали определенную силу. Он установил следующие границы: величина давления от  $3,5$  до  $26$  г/см<sup>2</sup> соответствует биологически оптимальным условиям для ортодонтического перемещения зубов, а при давлении в  $67$  г/см<sup>2</sup> наблюдается травматическое ущемление периодонтальной связки в зоне сжатия.

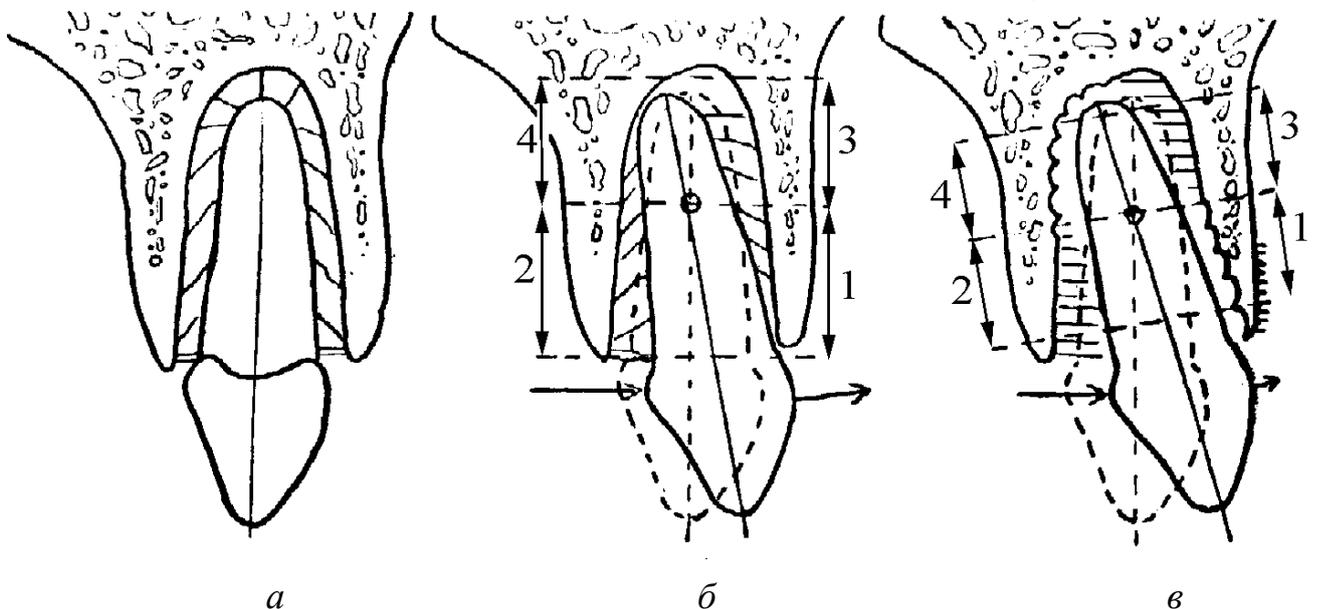


Рис. 1.5. Схема ортодонтического перемещения зуба в продольном срезе: *а* – нормальное положение зуба в альвеоле; *б* – наклонное положение зуба после воздействия силы; *1, 4* – зоны сжатия; *2, 3* – зоны растяжения; *в* – схематическое изображение рассасывания (зоны *1, 4*) и новообразования (зоны *2, 3*) кости альвеолы

Таким образом, для того чтобы избежать сужения сосудов и некроза периодонта, давление в этой связке не должно превышать кровяного давления в капиллярах.

Советскими и российскими учеными также был внесен большой вклад в изучение данного вопроса. Катц и др. [3] занимались исследованием внутренней структуры челюстей для более подробного понимания тканевых преобразований при ортодонтическом лечении. Калвелис [22] отмечал, что количественные показатели Шварца не могут являться решающими во всех случаях. Определяющее значение должна иметь индивидуальная реакция организма.

Естественной задачей исследователей стала оптимизация процесса перемещения зуба. Обзор источников [3, 14, 22, 42, 54, 115, 131] выявил достаточно много параметров, которые влияют на выбор величины нагрузки. Одними из самых важных являются возраст пациента, состояние психического и соматического здоровья, место зуба в зубном ряду, место приложения нагрузки, вид перемещения зубов, геометрические размеры корня зуба, условия смыкания челюстей, особенности строения губчатого и компактного вещества челюстей, особенности периодонта, сроки перемещения. Трудности при определении этих индивидуальных характеристик пациентов и учете механических факторов процесса вынуждают осторожных ортодонтот использовать силы одинаково малой величины для всех пациентов и во всех случаях.

Со временем начали появляться различные количественные рекомендации по выбору величины сил, учитывая градацию по разным факторам (Таблица 1.1) [19, 44, 45, 55]. Данные значения получены экспериментальным путем и являются весьма редкой информацией.

### Виды корректирующих конструкций

Следует отметить, что ортодонтические аппараты могут приводить к повреждению эмали зубов и тканей пародонта, что впоследствии может стать причиной разных болезней зубов. В целях профилактики осложнений важно уметь рассчитывать необходимую силу и вовремя производить замену аппаратов.

**Варианты дозирования сил**

Источник	Величины сил с учетом градации по разным факторам, Н	
Райтан (1968) [129]	Наклон: 0,5 – 0,75	Поступательное движение: 0,7 – 0,9
	Экструзия: 0,25	Интрузия: 0,5
Губская (1982) [19]	Наклон: 0,5–3,2	Поступательное движение: в 4 раза больше, чем для наклона
Проффит (2008) [45]	Наклон: 0,5 – 0,75	Поступательное движение: 1 – 1,5
	Экструзия: 0,5 – 0,75	Интрузия: 0,15 – 0,25
Буклет <i>Bioforce</i> (2010) [55]	Градация по топографии зуба и длине корня: 0,5 – 3,2	

Эластопозиционеры

Данный аппарат является некоторым аналогом спортивной каппы, однако имеет другие функции, а именно не защита от ударного воздействия, а перемещение зуба.

Эластопозиционеры (рисунок 1.6) выполняются индивидуально для каждого пациента после снятия слепка актуального состояния его прикуса с расчетом на перемещение зубов в желаемое положение. В течение 2–4 недель они за счет упругих свойств материала оказывают силовое воздействие, затем процедуру повторяют, ввиду того, что зубы переместились в новое положение и необходима новая система сил, продолжающая двигать зуб до тех пор, пока не будет достигнуто запланированное врачом положение.

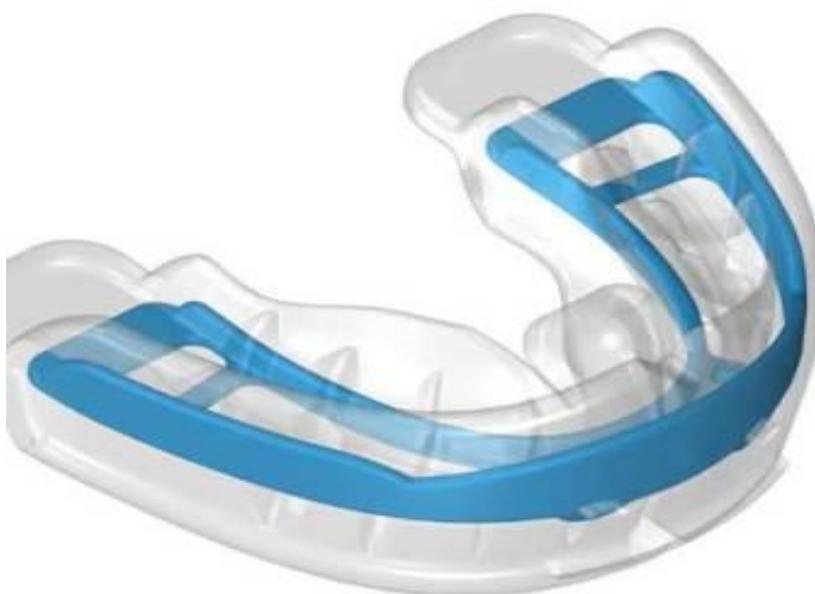


Рис. 1.6. Эластопозиционер

Данный вид исправлений зубочелюстных аномалий является одним из самых безопасных, не повреждает эмаль, не травмирует мягкие ткани, не вызывает дискомфорта, не требует постоянной носки.

Диапазон клинических показаний к применению эластопозиционера во временном и раннем сменном прикусе:

- перекрестный прикус во фронтальном отделе,
- открытый прикус с зубоальвеолярной протрузией при наличии травм,
- односторонний перекрестный прикус с латеральным смещением нижней челюсти, перекрестный прикус в боковом отделе,
- ретенционный период после лечения несъемными аппаратами,
- достижение плотных окклюзионных контактов после лечения другими аппаратами,
- коррекция направляющей плоскости клыков (при боковых движениях нижней челюсти),
- закрытие остаточных травм после гиперкоррекции в сагиттальном и трансверсальном направлениях или после экстракции.

Однако, данный аппарат имеет и недостатки: он противопоказаны при дистальном смещении, при сужении челюсти, невозможность перемещения на большие расстояния (свыше 3 мм).

### Брекет-системы

Один из самых популярных и эффективных на сегодняшний день методов устранения зубочелюстных аномалий является применение брекет-системы (*bracket* – пер. с англ. «замок» или «скоба») (рисунок 1.7). Название отражает идею аппарата: брекет-система состоит из замочков (брекетов), к которым крепится ортодонтическая дуга. Брекеты прикрепляются к зубам специальным клеем, а под действием дуги зубы меняют свое положение (рисунок 1.8).

Главный плюс этого аппарата в том, что с помощью брекет-системы можно добиться исправления практически любого прикуса. В среднем лечение может занимать 1,5–2,5 года, но также зависит от сложности ситуации и индивидуальных особенностей пациента. Процесс лечения подразумевает регулярное посещение врача пациентом для корректировки и смены лигатур (крепёжные элементы ортодонтической дуги к брекету).



Рис. 1.7. Установленная брекет-система

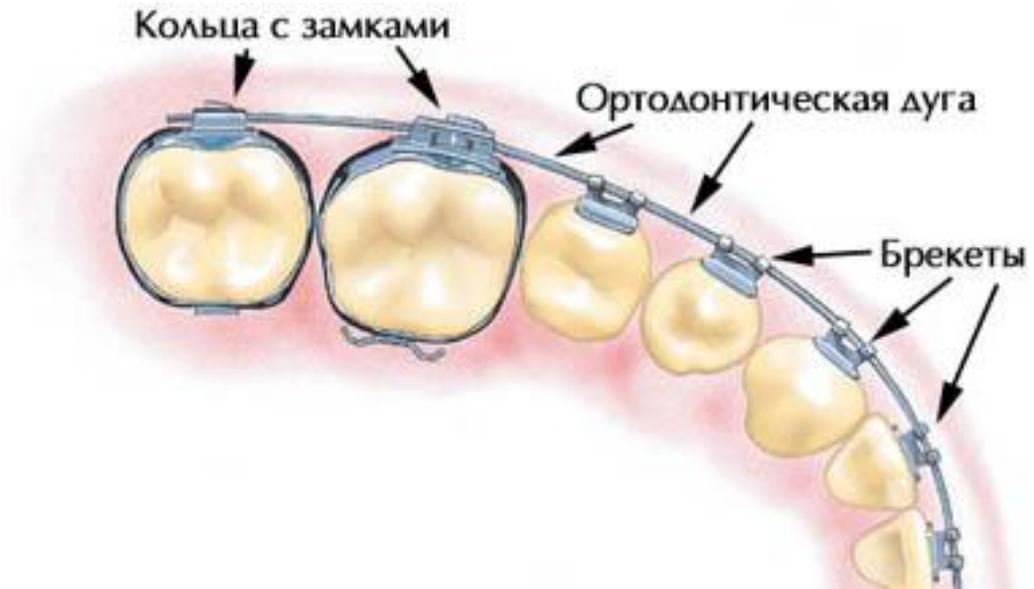


Рис. 1.8. Схематичное изображение элементов брекет-системы

### Упругие элементы

В качестве дополнительно действующей силы также могут применяться и упругие элементы (резиновые тяги, пружины) (рисунок 1.9).



а) резиновые тяги



б) ортодонтические пружины

Рис. 1.9. Ортодонтические упругие элементы

## **Выводы по главе 1**

1. Приведены сведения из анатомии и физиологии элемента зубочелюстной системы «зуб–периодонт».
2. Приведен обзор зубочелюстных аномалий, а также показано их влияние на системы организма человека. Особое внимание уделяется связи между неправильным прикусом и риском получения инсульта.
3. Приведено описание фаз движения зуба при ортодонтическом лечении, процесса перестройки кости, ортодонтических конструкций для исправления зубочелюстных аномалий.

*«Переход компьютерных моделей и технологий моделирования от фундаментальных исследований к клиническому использованию является одной из важнейших задач на ближайшие годы».*

– Рафаэль Себастиан, барселонский центр технологий, компьютерной визуализации и моделирования в биомедицине [142]

## **ГЛАВА 2**

### **БИОМЕХАНИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ОРТОДОНТИИ**

#### **2.1. Современная концепция здравоохранения**

Новые тенденции развития здравоохранения на сегодняшний день таковы, что емко формулируются в четырех терминах, которые начинаются с буквы «П»:

- персонализация (индивидуальный подход к каждому пациенту с учетом генетических, биохимических и физиологических особенностей человека);
- прогнозируемость (выявление предрасположенности к развитию заболевания);
- превентивность (предотвращение или снижение риска развития болезни);
- партнерство (активное участие самого пациента в процессе лечения).

Данная концепция носит название «4П–медицина» [33, 35, 42, 43, 74, 88, 96, 98–100, 103, 105, 127, 132]. Ее основателем считается руководитель Института системной биологии (США) профессор Лерой Худ.

Идея заключается в том, чтобы суметь предупредить и своевременно предотвратить наступление болезни у конкретного пациента, не дав ей «развернуться». Для этого крайне важно, чтобы пациент был не «слепым последователем» назначений врача, а активным участником процесса.

Французский ученый, лауреат Нобелевской премии, заложивший основы предикативной медицины, Жан Доссе утверждал: «На протяжении столетий медицина пыталась лечить болезни. Сейчас ее главная цель – предотвратить их. Для этого необходимо научиться предсказывать их вероятность» [43].

Одним из шагов к реализации данных идей является развитие международного мегапроекта «Виртуальный физиологический человек (Virtual Physiological Human)» [16, 28, 34, 36–38, 51, 86, 93, 141, 142], центр которого располагается в Барселоне. Идею разработки этого проекта в 1996 году предложил Клэй Истерли – сотрудник отдела здравоохранения и медицины национальной лаборатории Оак Ридж, США.

Виртуальный физиологический человек – это технологическая и методологическая структура, с развитием которой в будущем станет возможным исследование человеческого организма как единой многоуровневой системы (рисунок 2.1). Данный проект направлен на реализацию идеи объединения и сравнения исследований из множества достоверных источников. Он позволит поднять на новый уровень понимание организма человека и его патологий как единой системы [34, 93, 141].

Участники этого проекта ставят перед собой следующие цели:

- 1) объяснить и описать физиологические процессы в человеческом организме, а также дисфункций и патологических состояний;
- 2) определение биомаркеров заболеваний для постановки точного диагноза;
- 3) разработка инновационных лекарственных средств;

4) обеспечение индивидуального подхода к каждому пациенту, учитывая их персональные характеристики и особенности организма;

5) создание единой виртуальной модели человека [28, 86].

В 2012 году Марко Вичеконти, научный директор института Инсигнио, заявил: «Если я сейчас введу в мой симулятор данные, относящиеся к конкретному человеку, то он будет делать прогнозы о здоровье этого человека. Мы сможем наконец сказать что-то о Вас не потому, что Вы примерно того же возраста, пола и заболевания, как еще тысячи человек, а потому что Вы – это Вы с вашим состоянием организма и Вашей историей» [16].

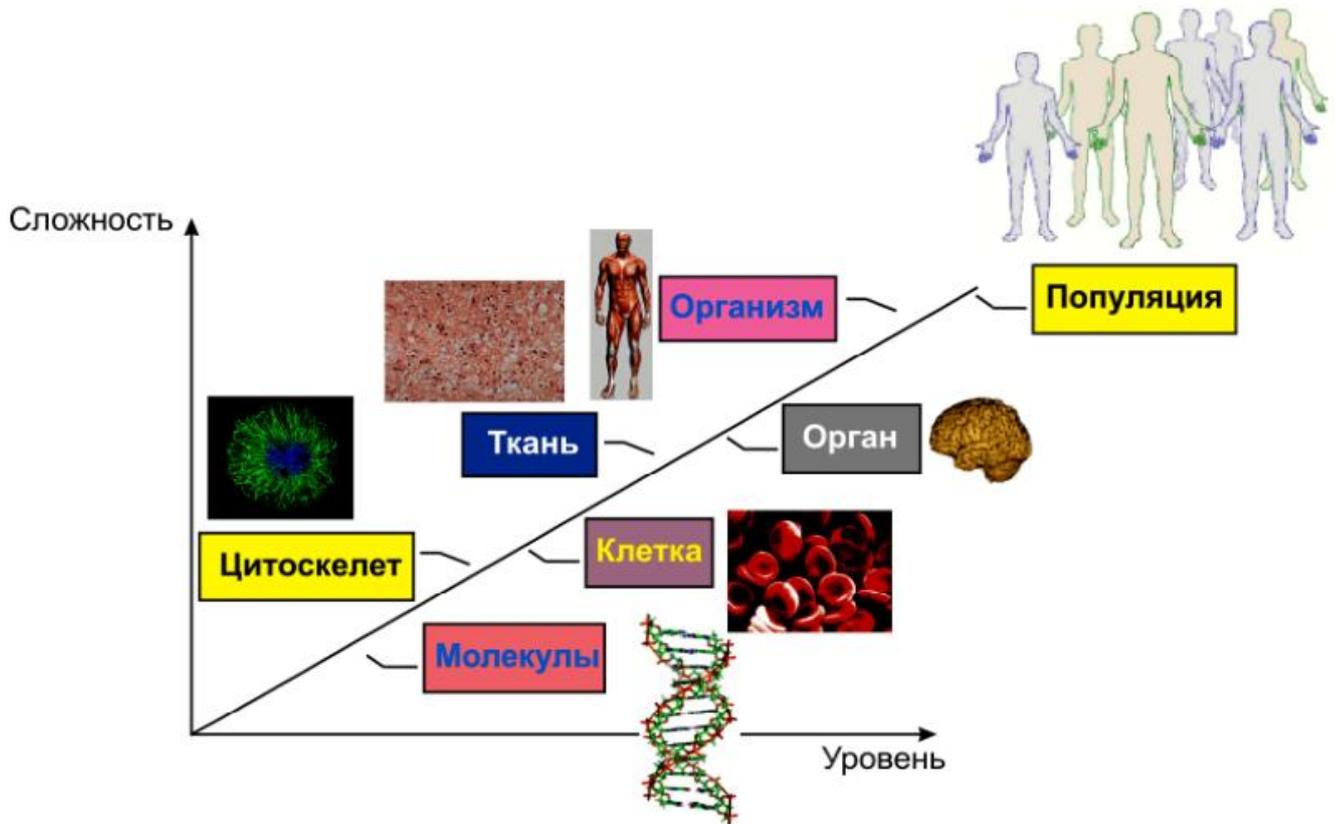


Рис. 2.1. Многоуровневый подход к построению модели физиологии людей [28]

## 2.2. Роль биомеханики в ортодонтии

*«Биомеханика – ядро клинической практики»*

Чарльз Бурстоун, ортодонт,  
профессор Коннектикутского университета [68]

В беседе 2007 г. [69] между профессором Чарльзом Бурстоуном, которого называют отцом биомеханики в ортодонтии, и профессором Равинда Нанда на вопрос, как он заинтересовался биомеханикой, Бурстоун отвечает: «Будучи молодым врачом-ортодонтом, в ходе лечения пациентов я очень часто наблюдал возникновение нежелательных эффектов. Даже если зубы удавалось выровнять, они не располагались в том месте, где я планировал. Я тогда думал, что, возможно, проблема в самой корректирующей конструкции, однако потом все-таки понял, что допускал несколько ошибок биомеханического характера. Это стало толчком для меня к изучению основ физики. Так я наработал научную базу для ортодонтической биомеханики. Другими словами, будучи врачом, я выявил эти проблемы, а затем решил разобраться с причинами их появления и методами их решения». Бурстоун поднимает проблему того, что качество лечения пациента часто напрямую зависит от личного опыта и чувства интуиции врача. В то же время, известна его фраза [68]: «Клинический опыт – это репетиция ошибок». Таким образом, он подчеркивает необходимость применения количественных показателей и точных методов исследования для постановки и решения задач ортодонтии.

Подобно Бурстоуну высказывался и Смит [134]: «Использование законов биомеханики предоставит возможность предсказывать и управлять движением зуба, а также позволит нам частично или полностью устранить нежелательные эффекты, возникающие при лечении пациентов».

Глава отделения ортодонтии в Королевском стоматологическом колледже, Университет *Aarhus*, профессор Бирте Мелсен отмечает, что «работа с пациентами, требующими междисциплинарного лечения, дает ценный опыт работы со специалистами из различных областей стоматологии. При

междисциплинарном подходе каждая дисциплина может расширять возможности другой. Таким образом, один плюс один может составлять больше, чем два» [111].

Основа ортодонтической науки строится на знаниях из области анатомии, физиологии, биомеханики, науки о росте. Одним из определяющих вопросов ортодонтии является вопрос об определении системы сил, под действием которой зуб переместится в желаемое положение без осложнений [3, 22, 27, 49, 54, 56, 87, 116, 128]. Благодаря развитию ортодонтической науки современный уровень лечения зубочелюстных аномалий позволяет успешно оказывать медицинскую помощь пациентам. Однако порой оказывается довольно сложным назначить адекватное лечение, пользуясь универсальными данными и качественными показателями. Как было указано ранее, современная медицина становится все более персонифицируемой, ориентирующейся на конкретного пациента. Поэтому необходимо уметь прогнозировать результаты лечения, обеспечивать индивидуальный подход к лечению пациентов, осуществлять корректировку ортодонтического процесса на разных его стадиях, использовать современные компьютерные методы количественного расчета параметров корректирующей конструкции и живых тканей организма пациента, оптимизировать процесс лечения.

Данный подход может быть реализован благодаря осуществлению идеи биомеханического сопровождения процесса перемещения зубов, основывающегося на знаниях и методах анатомии, физиологии, механики, математического моделирования.

### **2.3. Биомеханические принципы в ортодонтии**

Как было указано ранее, ортодонтическое лечение зубочелюстных аномалий заключается в приложении к зубам системы сил, которую оказывают различные корректирующие конструкции. В течение длительного времени зубы медленно перемещаются в новое положение. Однако, для того чтобы они переместились определенным образом и в желаемое положение, запланированное

лечащим врачом, необходимо уметь управлять данным процессом и, если это необходимо, корректировать его на различных стадиях лечения.

Данный вопрос представляется чисто механическим: куда, как и какой величины нужно приложить силу для осуществления необходимого перемещения тела? Для ответа на него совместными усилиями специалистов из области биомеханики и ортодонтии предлагались различные объекты для исследования движений зуба: центр сопротивления, центр вращения, центр упругости, оси сопротивления.

### Центр сопротивления

Наиболее «популярным» является понятие «центр сопротивления зуба». Впервые это понятие было предложено в 1917 году немецким ученым Фишем в работе [87], которая в переводе примечательно называлась «Некоторые инженерные принципы, которые могли бы заинтересовать ортодонттов». Анализируя движение однокоренного зуба в медиальной плоскости под действием горизонтальной силы, он заметил: «Существует единственная точка  $C$  где-то между кончиком корня и краем десны такая, что если к ней будет приложена сила, то зуба будет перемещаться без всякого вращения. Эту точку можно назвать центром сопротивления. Без сомнений, эта точка находится где-то между десневым краем и серединой длины корня» (рисунок 2.2).

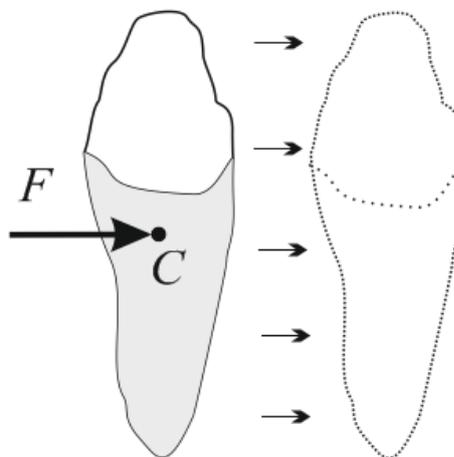


Рис. 2.2. Схематичный пример поступательного движения зуба под действием силы, приложенной к центру сопротивления

Так же приводится следующее свойство: при приложении пары сил, зуб совершит чистый поворот.

Далее с 1962 года изучению понятия «центр сопротивления зуба» было посвящено множество публикаций, в которых были исследованы его свойства и возможности для управляемого перемещения зуба в рамках костной лунки, были разработаны различные методики по определению положения этой точки на моделях разной степени сложности (двумерная, трехмерная, модель зуба в форме цилиндра, конуса, модель зуба, повторяющая его геометрию с одним корнем, с двумя корнями) [15, 41, 48, 57, 60–67, 70–73, 75–77, 79–82, 85, 87, 89, 90, 92, 94, 95, 97, 101, 107, 108, 112–114, 118–126, 130, 133, 136, 138, 140, 143–148]. Примечательно, что вопрос о единственности данной точки не поднимался.

Однако стоит особым образом выделить две другие статьи: «On the existence of the orthodontic center of resistance» (1987) [139] и «Center of resistance and center of rotation of a tooth: the definitions, conditions of existence, properties» (1999) [117]. В этих работах рассматривается система «зуб–периодонт». Зуб принимается за абсолютно твердое тело, погруженное в периодонтальную связку (линейно-упругую среда), внешние границы которой закреплены (рисунок 2.3). Под действием системы сил, приложенной к коронке зуба, он совершает малое перемещение в рамках костной лунки, что соответствует начальной стадии ортодонтического перемещения.

Собственно в данных работах введены необходимые и достаточные условия существования центра сопротивления зуба, согласно которым центр сопротивления может существовать лишь при наличии свойств симметрии у системы «зуб–периодонт» (плоскость симметрии, ось симметрии), что является скорее некоторой идеализацией, чем отражением действительности (более подробно будут обсуждены в главе 3), а также формулы для определения положения данной точки в общем виде.

В связи с приведенными в данных работах [117, 139] условиями существования центра сопротивления зуба, появились новые работы (в период 2012–2014 гг.) [12, 59, 78, 91, 140], в которых авторы переосмыслили это понятие. При построении моделей, повторяющих геометрию системы «зуб–периодонт», наблюдалось наличие более, чем одной такой точки [12, 59, 91], которые обладали свойствами аналогичными центру сопротивления. Однако раньше считалось, что центр сопротивления единственен. В работах [78, 140] формулируются новые понятия: оси сопротивления, центр упругости.

Таким образом, продолжая развивать идеи, опубликованные в работе [117], в настоящей диссертации представляется актуальной задача обобщения понятия центра сопротивления зуба так, чтобы новый объект мог существовать в большем числе случаев, сохраняя основные свойства центра сопротивления. А также представляет интерес создание методики применения развитого биомеханического подхода в частных случаях, ее верифицирование и определение оптимальной величины ортодонтической нагрузки.

## 2.5. Модель системы «зуб–периодонт»

Объектом исследования является система «зуб–периодонт». Рассматривается малое (мгновенное) перемещение зуба в рамках костной лунки (без учета перестройки костной ткани) под действием «слабой» (менее 10 Н) нагрузки  $\vec{R}, \vec{M}$

(вектор-столбцы, содержащие компоненты главного вектора и главного момента системы внешних сил относительно полюса соответственно) развиваемой корректирующим аппаратом. В отсутствие нагрузки зуб находится в состоянии устойчивого равновесия.

Зуб принимается за абсолютно твердое тело, так как его модуль Юнга приблизительно в 30000 раз больше, чем модуль Юнга периодонта [32]. Кость в данной модели как таковая не учитывается, а лишь исключает перемещения по внешней границе периодонта. Считается, что ортодонтические силы действуют

достаточно долго (более 10–20 секунд), чтобы процессы перераспределения периодонтальной жидкости прекратились. Периодонт принимается линейно-упругой средой.

При постановке краевой задачи считаем, что область обозначена как  $V$ , ее граница  $S$ , их объединение:  $\bar{V} = V \cup S$ . Уравнения, описывающие поведение упругой среды, следующие

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} = 0, \quad \vec{x} \in V, \quad (2.1)$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C} \cdot \tilde{\varepsilon}, \quad \vec{x} \in \bar{V}, \quad (2.2)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T), \quad \vec{x} \in \bar{V}. \quad (2.3)$$

Граничные условия:

1. Система внешних сил, осуществляемая ортодонтическим аппаратом, прикладывается к коронке зуба  $\vec{R}|_{S_R} = \vec{R}$ ,  $\vec{M}|_{S_R} = \vec{M}$
2. Внешняя граница периодонтальной связки считается неподвижной, т.к. это условие соответствует соединению с костью  $\vec{u}|_{S_U} = 0$  (рисунок 2.3).

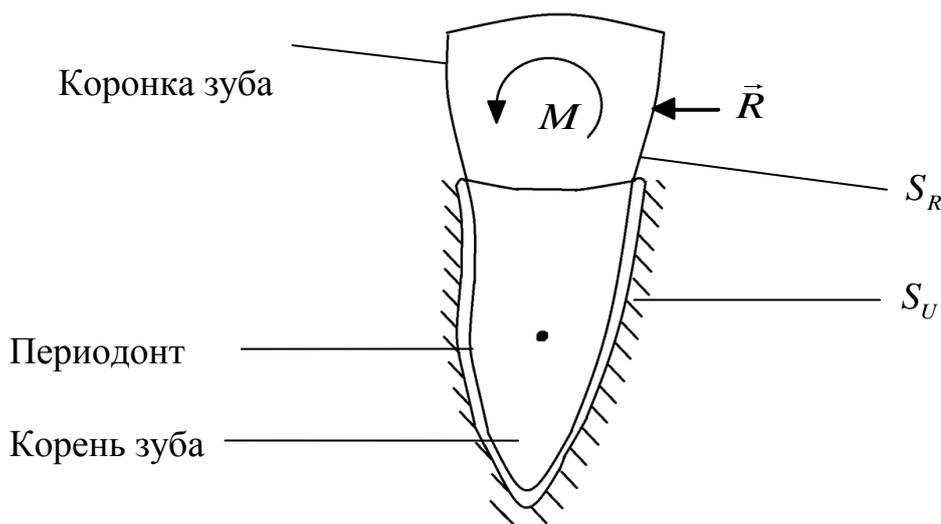


Рис. 2.3. Схема модели системы «зуб–периодонт»

## **Выводы по главе 2**

1. В соответствии с современной концепцией здравоохранения «4П-медицина» показана роль биомеханики в ортодонтии. Методы биомеханического моделирования живых тканей и процессов жизнедеятельности, введение количественной оценки параметров дают возможность объективизации эмпирических методов ортодонтии.
2. Проведен анализ литературы (охватывающий период 1917–2015 г.г.) по темам исследования движений зуба, биомеханических принципов в ортодонтии.
3. Принята математическая модель, описывающая движение зуба, погруженного в периодонт в рамках костной лунки под действием ортодонтической нагрузки.

## ГЛАВА 3

### ВВЕДЕНИЕ ПОНЯТИЯ «ОБЛАСТЬ СОПРОТИВЛЕНИЯ ЗУБА»

#### 3.1. Разработка биомеханической модели движения зуба под действием нагрузки

Итак, согласно выбранной модели, зуб принимается за абсолютно твердое тело. В отсутствие нагрузки считается, что зуб находится в состоянии устойчивого равновесия. Обобщенные координаты зуба: 3 компоненты перемещения полюса –  $\rho_x, \rho_y, \rho_z$ ; 3 компоненты малого угла поворота зуба вокруг полюса –  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ . Можно представить их в виде двух столбцов

$$\vec{\rho} = \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix}, \quad \vec{\varphi} = \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix}. \quad (3.1)$$

Перемещение точки зуба с радиус-вектором  $\vec{r}$  определяется формулой:

$$\vec{u} = \vec{\rho} + \vec{\varphi} \times \vec{r}, \quad (3.2)$$

при этом считается, что полюс совпадает с началом системы координат.

Периодонт, в который погружен зуб, рассматривается как линейно-упругая среда. Его потенциальная энергия – заданная функция обобщенных координат

зуба  $\Pi(\vec{\rho}, \vec{\varphi})$ . Считается, что нагрузка создается упругой системой, потенциальная энергия которой  $\Pi_{load}(\vec{\rho}, \vec{\varphi})$ .

Уравнения, определяющие положение зуба в равновесии

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho_j} + \frac{\partial \Pi_{load}}{\partial \rho_j} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial \Pi_{load}}{\partial \varphi_j} = 0. \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.3)$$

Представим потенциальную энергию периодонта в виде квадратичной формы обобщенных координат

$$\Pi(\vec{\rho}, \vec{\varphi}) = \frac{1}{2}((\hat{A}\vec{\rho})\vec{\rho} + (\hat{B}\vec{\varphi})\vec{\varphi} + 2(\hat{D}\vec{\varphi})\vec{\rho}). \quad (3.4)$$

Здесь  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{D}$  являются известными матрицами упругих свойств периодонта, где  $\hat{A}, \hat{B}$  – симметричные, положительно определенные (так как равновесие зуба в периодонте устойчиво, квадратичная форма (3.4) положительно определена),  $\hat{D}$  – в общем случае несимметрична.

Потенциальную энергию упругой системы, создающей нагрузку представим также в виде квадратичной формы обобщенных координат

$$\Pi_{load}(\vec{\rho}, \vec{\varphi}) = -\vec{R}\vec{\rho} - \vec{M}\vec{\varphi} + \frac{1}{2}((\hat{a}\vec{\rho})\vec{\rho} + (\hat{b}\vec{\varphi})\vec{\varphi} + 2(\hat{d}\vec{\varphi})\vec{\rho}). \quad (3.5)$$

Здесь  $\vec{R}, \vec{M}$  – известные столбцы, где  $\vec{R}$  – главный вектор системы сил,  $\vec{M}$  – главный момент системы сил относительно полюса;  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{d}$  – известные матрицы упругих свойств.

Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.3), получим

$$\begin{cases} (\hat{A} + \hat{a})\vec{\rho} + (\hat{D} + \hat{d})\vec{\varphi} = \vec{R}, \\ (\hat{D} + \hat{d})^T \vec{\rho} + (\hat{B} + \hat{b})\vec{\varphi} = \vec{M}. \end{cases}$$

Ввиду того, что рассматривается система зуб+периодонт под действием известной нагрузки, а не зуб+периодонт+объект, который создает нагрузку, то пренебрежем матрицами  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{d}$  по сравнению с  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{D}$  соответственно.

Тогда уравнения, которые определяют положение зуба в состоянии равновесия, примут вид

$$\begin{cases} \hat{A}\vec{\rho} + \hat{D}\vec{\varphi} = \vec{R}, \\ \hat{D}^T\vec{\rho} + \hat{B}\vec{\varphi} = \vec{M}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Система сил задается вектор-столбцами  $\vec{R}, \vec{M}$ . В силу того, что функция потенциальной энергии периодонта (3.4) положительно определена, то система (3.6) будет иметь единственное решение. Необходимым и достаточным условием единственности решения неоднородной системы в случае, когда число неизвестных равно числу уравнений, является отличие от нуля определителя матрицы. Представим (3.6) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{D} \\ \hat{D}^T & \hat{B} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{Bmatrix}. \quad (3.6.1)$$

Далее помножим правую и левую части на обратную матрицу системы. Тогда получим

$$\begin{Bmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{D} \\ \hat{D}^T & \hat{B} \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{Bmatrix}.$$

Матрица системы (3.6.1) имеет смысл тензора упругости, а обратная к ней будет иметь смысл тензора податливости и может быть представлена в следующем виде

$$\begin{Bmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} & \hat{\gamma} \\ \hat{\gamma}^T & \hat{\beta} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{Bmatrix}. \quad (3.7)$$

Таким образом решение (3.6) может быть представлено в виде

$$\begin{cases} \vec{\rho} = \hat{\alpha}\vec{R} + \hat{\gamma}\vec{M}, \\ \vec{\phi} = \hat{\gamma}^T\vec{R} + \hat{\beta}\vec{M}. \end{cases} \quad (3.7.1)$$

Матрица  $\begin{pmatrix} \hat{\alpha} & \hat{\gamma} \\ \hat{\gamma}^T & \hat{\beta} \end{pmatrix}$  является обратной к матрице  $\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{D} \\ \hat{D}^T & \hat{B} \end{pmatrix}$  (которая симметрична, положительно определена). Так как матрица обратная к симметричной, положительно определенной матрице является также симметричной, положительно определенной [105], то и  $\begin{pmatrix} \hat{\alpha} & \hat{\gamma} \\ \hat{\gamma}^T & \hat{\beta} \end{pmatrix}$  симметрична и положительно определена.

Матрицы  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$  зависят от геометрической формы корня зуба, упругих свойств периодонта, положения полюса. Матрицы  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  являются симметричными, положительно определенными (так как равновесие зуба в периодонте устойчиво, квадратичная форма (3.4) положительно определена),  $\hat{\gamma}$  в общем случае несимметрична.

Центр сопротивления зуба определен следующим образом: «Центр сопротивления зуба – точка, удовлетворяющая двум требованиям:

1. Если приложенные силы сводятся к паре сил с моментом, равным главному моменту системы сил, то зуб повернется вокруг центра сопротивления.

Если  $\vec{R} = 0$ , то  $\vec{u}(\vec{r}_{cre}) = 0$  для произвольного  $\vec{M}$ .

2. Если приложенные силы сводятся к равнодействующей с линией действия, проходящей через данный центр, то зуб будет двигаться поступательно (не обязательно в направлении действия силы).

Если  $\vec{M} = \vec{r}_{cre} \times \vec{R}$ , то  $\vec{\phi} = 0$  для произвольного  $\vec{R}$ » [117].

Здесь  $\vec{r}_{cre}$  – радиус-вектор центра сопротивления.

Тогда, для определения условий существования центра сопротивления подставим (3.7.1) в (3.2)

$$\vec{u}(\vec{r}) = \hat{\alpha}\vec{R} + \hat{\gamma}\vec{M} + (\hat{\gamma}^T\vec{R} + \hat{\beta}\vec{M}) \times \vec{r}.$$

Введем антисимметричную матрицу  $\hat{r}$  следующим образом:  $\hat{r}\vec{V} = \vec{r} \times \vec{V}$  (для любого вектора  $\vec{V}$ ). Элементы  $\hat{r}$  имеют вид

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Учитывая это, получим

$$\vec{u}(\vec{r}) = \hat{\alpha}\vec{R} + \hat{\gamma}\vec{M} - \hat{r}(\hat{\gamma}^T\vec{R} + \hat{\beta}\vec{M}).$$

Вынося главный вектор и главный момент системы сил как общий множитель при соответствующих коэффициентах, окончательно получим

$$\vec{u}(\vec{r}) = (\hat{\alpha} - \hat{r}\hat{\gamma}^T)\vec{R} + (\hat{\gamma} - \hat{r}\hat{\beta})\vec{M}. \quad (3.8)$$

Таким образом

1) из (3.8) находим, что при  $\vec{R} = 0$ , получается

$$\vec{u}(\vec{r}) = (\hat{\gamma} - \hat{r}\hat{\beta})\vec{M}.$$

Условие  $\vec{u}(\vec{r}_{cre}) = 0$  для любого  $\vec{M}$  эквивалентно условию  $\hat{\gamma} - \hat{r}_{cre}\hat{\beta} = 0$  или, так как  $\hat{\beta}$  невырождена, условию

$$\hat{r}_{cre} = \hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}. \quad (3.9)$$

Так как  $\hat{r}_{cre}$  является антисимметричной, то (3.9) выполняется, тогда и только тогда, когда  $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$  антисимметрична. Иначе центр сопротивления не существует.

2) Из (3.7.1) находим, что при  $\vec{M} = \vec{r}_{cre} \times \vec{R}$ , получается

$$\vec{\phi} = (\hat{\gamma}^T + \hat{\beta}\hat{r})\vec{R}.$$

Условие  $\vec{\phi} = 0$  для любого  $\vec{R}$  эквивалентно условию  $\hat{\gamma}^T + \hat{\beta}\hat{r} = 0$  или

$$\hat{r}_{cre} = -\hat{\beta}^{-1}\hat{\gamma}^T. \quad (3.10)$$

Так как  $(\hat{\beta}^{-1}\hat{\gamma}^T)^T = \hat{\gamma}(\hat{\beta}^{-1})^T = \hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$ , то (3.10) выполняется, тогда и только тогда, когда  $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$  антисимметрична. В то же время, так как при транспонировании антисимметричной матрицы она меняет знак, то в (3.10) получается аналогичное выражение для  $\vec{r}_{cre}$ , что и (3.9). В обратном случае центр сопротивления не существует.

Таким образом, условия существования данной точки могут быть сформулированы как: «Если  $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$  антисимметрична, то центр сопротивления существует, единственен и его положение определяется формулой  $\vec{r}_{cre} = \hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$ . В противном случае центр сопротивления не существует». Установлено, что центр сопротивления существует при наличии у системы «зуб–периодонт» плоскости симметрии и выполняет свои свойства в случае, когда нагрузка лежит в плоскости симметрии. В общем случае существование центра сопротивления гарантируется наличием у системы «зуб–периодонт» оси симметрии. Данный тип симметрии, стоит полагать, является скорее некоторой идеализацией, нежели отражением реальной геометрии системы «зуб–периодонт». Таким образом, нужно признать, что понятие центра сопротивления зуба не является достаточно общим [32, 117].

Тогда необходимо рассмотреть вопрос о возможности обобщения понятия центра сопротивления зуба так, чтобы новый объект мог существовать в большем количестве случаев, сохраняя основные свойства центра сопротивления.

Как показал обзор новейших работ [12, 59, 78, 91, 140], затрагивающих данную тематику, подобная идея введения альтернативного понятия или необходимого обобщения находит поддержку у ряда авторов.

### 3.2. Анализ условий существования «центра сопротивления зуба»

Для удобства повествования введем новые термины:

1. *Прямая поступательного воздействия* – линия действия силы, приводящей зуб к поступательному движению (рисунок 3.1).

2. *Ось поворота парой* – прямая, вокруг которой зуб поворачивается при нагружении парой сил (рисунок 3.2).

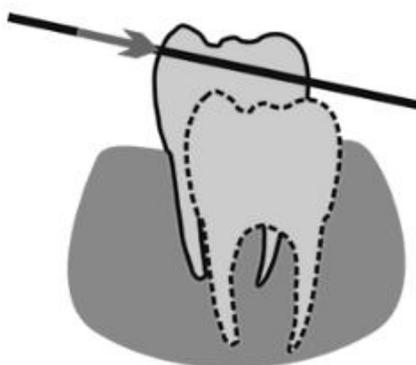


Рис. 3.1. Изображение прямой поступательного воздействия

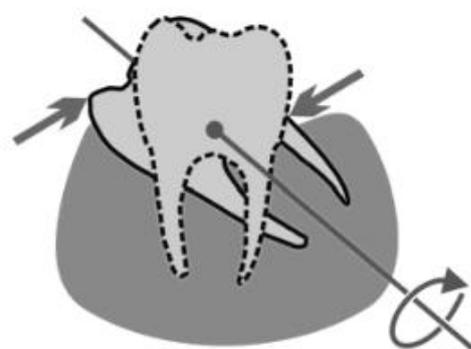


Рис. 3.2. Изображение оси поворота парой

Определение известного понятия центра сопротивления можно сформулировать, пользуясь новыми терминами, следующим образом:

«Центр сопротивления зуба – точка, имеющая следующие свойства:

1) любая прямая поступательного воздействия проходит через этот центр и любая прямая, проходящая через этот центр, является прямой поступательного воздействия (рисунок 3.3);

2) любая ось поворота парой проходит через этот центр и любая прямая, проходящая через эту точку, является осью поворота парой (рисунок 3.3)».

Далее введем обозначения:  $\hat{\delta}$  – симметричная часть матрицы  $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$ ;  $\hat{\epsilon}$  – антисимметричная часть матрицы  $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$ ;  $\vec{\epsilon}$  – вектор, соответствующий матрице  $\hat{\epsilon}$  ( $\hat{\epsilon}\vec{V} = \vec{\epsilon} \times \vec{V}$  для любого вектора  $\vec{V}$ ).

Так как условием существования центра сопротивления (3.9) является антисимметричность матрицы  $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$ , то справедливо также следующее утверждение: центр сопротивления существует тогда и только тогда, когда  $\hat{\delta} = 0$ , и его координаты могут быть найдены как компоненты вектора  $\vec{\epsilon}$ .

Если  $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$  не антисимметрична (т.е.  $\hat{\delta} \neq 0$ ), то центр сопротивления не существует. Например, когда рассматриваемая модель системы «зуб–периодонт» приближена к реальной форме. В данном случае прямые поступательного воздействия и оси поворота парой уже не будут пересекаться в одной точке, а будут расположены каким-то другим образом.

В целях обобщения понятия центра сопротивления зуба необходимо исследовать наборы прямых поступательного воздействия и осей поворота парой, а именно условия их существования, взаимное расположение.

### 3.3. Теоретическое исследование множества прямых поступательного воздействия и осей поворота парой

#### 3.3.1. Исследование множества прямых поступательного воздействия

Пусть  $\vec{F}$  – вектор приложенной к зубу силы, а  $\vec{r}_F$  – радиус-вектор точки приложения этой силы. Рассматривая второе уравнение из системы (3.7.1), запишем его в виде

$$\vec{\varphi} = \hat{\gamma}^T \vec{F} + \hat{\beta}(\vec{r}_F \times \vec{F}).$$

Вынося общий множитель  $\hat{\beta}$  за скобки, получим

$$\vec{\varphi} = \hat{\beta} (\hat{\beta}^{-1} \hat{\gamma}^T \vec{F} + \vec{r}_F \times \vec{F}).$$

Учитывая, что  $\hat{\beta}$  – симметричная матрица, то  $\hat{\beta}^{-1} \hat{\gamma}^T = (\hat{\beta}^{-1})^T \hat{\gamma}^T = (\hat{\gamma} \hat{\beta}^{-1})^T$ .

Тогда

$$\vec{\varphi} = \hat{\beta} [(\hat{\gamma} \hat{\beta}^{-1})^T \vec{F} + \vec{r}_F \times \vec{F}].$$

Учитывая определение матриц  $\hat{\delta}$ ,  $\hat{\varepsilon}$  ( $\hat{\delta}$  – симметричная часть матрицы  $\hat{\gamma} \hat{\beta}^{-1}$ ;  $\hat{\varepsilon}$  – антисимметричная часть матрицы  $\hat{\gamma} \hat{\beta}^{-1}$ ), а также то, что при транспонировании антисимметричной матрицы у нее меняется знак, то данное выражение примет вид

$$\vec{\varphi} = \hat{\beta} [(\hat{\delta} + \hat{\varepsilon})^T \vec{F} + \vec{r}_F \times \vec{F}] = \hat{\beta} [(\hat{\delta} - \hat{\varepsilon}) \vec{F} + \vec{r}_F \times \vec{F}].$$

Введем вектор  $\vec{\varepsilon}$ , соответствующий матрице  $\hat{\varepsilon}$  ( $\hat{\varepsilon} \vec{V} = \vec{\varepsilon} \times \vec{V}$  для любого вектора  $\vec{V}$ ), получим

$$\vec{\varphi} = \hat{\beta} [\hat{\delta} \vec{F} - \vec{\varepsilon} \times \vec{F} + \vec{r}_F \times \vec{F}].$$

В конечном виде данное выражение выглядит

$$\vec{\varphi} = \hat{\beta} (\hat{\delta} \vec{F} + (\vec{r}_F - \vec{\varepsilon}) \times \vec{F}). \quad (3.11)$$

Исследуем множество прямых поступательного воздействия. Для дальнейшего удобства перейдем в специальную систему координат с началом в точке, расположенной на конце вектора  $\vec{\varepsilon}$  и выберем за полюс эту точку. Оси этой системы координат направим вдоль главных осей матрицы  $\hat{\delta}$ . Тогда из (3.11) следует, что условие  $\vec{\phi} = 0$  можно представить в виде

$$0 = \hat{\beta}(\hat{\delta}\vec{F} + \vec{r}_F \times \vec{F}).$$

Учитывая, что  $\hat{\beta}$  невырождена, приводя симметричную часть матрицы  $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$  к диагональному виду  $\hat{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$  и представляя  $\vec{r}_F$  как  $\hat{r}_F = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ , получим

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & -z & y \\ z & \delta_2 & -x \\ -y & x & \delta_3 \end{pmatrix} \vec{F} = 0. \quad (3.12)$$

Представим (3.12) в виде системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} \delta_1 F_x - zF_y + yF_z = 0 \\ zF_x + \delta_2 F_y - xF_z = 0 \\ -yF_x + xF_y + \delta_3 F_z = 0 \end{cases}. \quad (3.13)$$

Далее, при известных значениях матрицы  $\hat{\delta}$ , в каждой точке поверхности  $\vec{r}_F = (x, y, z)^T$  приложим такую силу  $\vec{F}$ , чтобы она удовлетворяла условию (3.12). Ее компоненты могут быть найдены из решения системы (3.13). Линия действия вектора полученной силы будет являться прямой поступательного воздействия. Таким образом определим множество прямых поступательного воздействия. При этом перемещение полюса  $\vec{\rho}$  находится по формуле  $\vec{\rho} = \hat{\alpha}\vec{R} + \hat{\gamma}\vec{M}$ .

Так как  $\vec{F} \neq 0$ , приравниваем к нулю определитель матрицы (3.12) и получаем уравнение поверхности второго порядка

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 + \delta_3 z^2 + \delta_1 \delta_2 \delta_3 = 0. \quad (3.14)$$

Запишем уравнение прямолинейных образующих поверхности второго порядка (в зависимости от знака « $\pm$ » определяется первое или второе семейство соответственно), проходящих через точку  $(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x - x_0}{(-y_0\delta_2 \pm x_0z_0)} = \frac{y - y_0}{(x_0\delta_2 \pm y_0z_0)} = \frac{z - z_0}{\pm(\delta_1\delta_2 \pm z_0^2)}. \quad (3.15)$$

Значения чисел  $\delta_i$  определяют вид поверхности. Таким образом, приходим к классификации множеств прямых поступательного воздействия.

### 1. Множество прямых поступательного воздействия 1-го вида

Все числа  $\delta_i$  не равны нулю, имеют одинаковый знак.

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0.$$

Выражение (3.14) в данном случае выглядит следующим образом

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 + \delta_3 z^2 + \delta_1 \delta_2 \delta_3 = 0.$$

Приведем данное выражение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{\delta_2 \delta_3} + \frac{y^2}{\delta_1 \delta_3} + \frac{z^2}{\delta_1 \delta_2} = -1.$$

В этом случае поверхность (3.14) является пустым множеством. Прямых поступательного воздействия не существует.

При значениях  $\delta_1 < 0, \delta_2 < 0, \delta_3 < 0$  выражение (3.14) аналогично данному. Поэтому этот набор значений  $\delta_i$  не дает нового вида области сопротивления.

### 2. Множество прямых поступательного воздействия 2-го вида

Все числа  $\delta_i$  не равны нулю, имеют разные знаки.

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0.$$

Выражение (3.14) в данном случае выглядит следующим образом

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 - |\delta_3| z^2 - \delta_1 \delta_2 |\delta_3| = 0.$$

Приведем данное выражение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{\delta_2 \delta_3} + \frac{y^2}{\delta_1 \delta_3} - \frac{z^2}{\delta_1 \delta_2} = 1.$$

В этом случае поверхность (3.14) – это однополостный гиперболоид (рисунок 3.5).

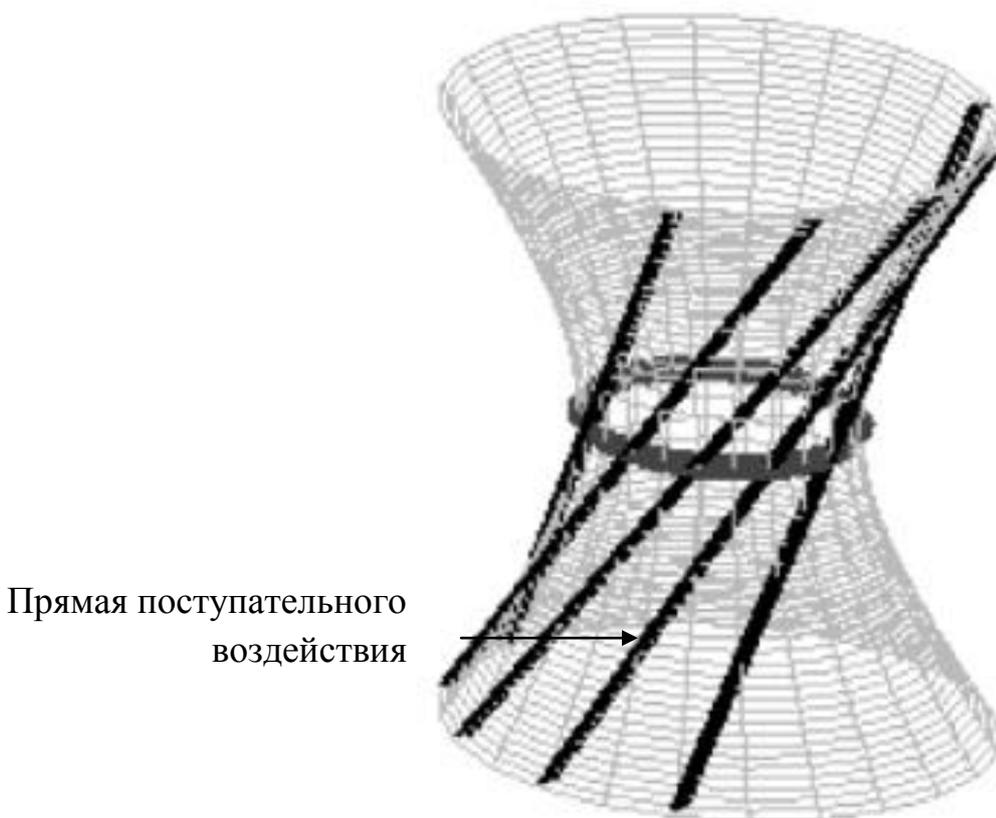


Рис. 3.5. Множество прямых поступательного воздействия 2-го вида

В то же время из (3.13) определим множество прямых поступательного воздействия

$$\begin{cases} F_x = (-y\delta_2 + xz)t \\ F_y = (zy + \delta_1 x)t \\ F_z = (\delta_1\delta_2 + z^2)t \end{cases} .$$

Линия действия вектора  $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$  совпадает с прямой (3.15) (со знаком «+»). Следовательно, множество прямых поступательного воздействия совпадает с одним из семейств прямолинейных образующих (рисунок 3.5).

Набор знаков  $\delta_1 > 0, \delta_2 < 0, \delta_3 < 0$  также не дает нового вида области сопротивления в виду того, что выражение (3.14) не дает нового вида при смене знаков  $\delta_i$ .

### 3. Множество прямых поступательного воздействия 3-го вида

Одно из чисел  $\delta_i$  равно нулю, остальные не равны нулю и имеют одинаковый знак

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 = 0.$$

Выражение (3.14) в данном случае выглядит следующим образом

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 = 0.$$

Приведем данное выражение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{\delta_2} + \frac{y^2}{\delta_1} = 0.$$

В этом случае поверхность (3.14) – мнимые пересекающиеся плоскости. Прямых поступательного воздействия не существует

#### 4. Множество прямых поступательного воздействия 4-го вида

Одно из чисел  $\delta_i$  равно нулю, остальные отличны от нуля и имеют различные знаки

$$\delta_1 > 0, \delta_2 < 0, \delta_3 = 0.$$

Выражение (3.14) в данном случае выглядит следующим образом

$$\delta_1 x^2 - |\delta_2| y^2 = 0.$$

Приведем данное выражение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{\delta_2} - \frac{y^2}{\delta_1} = 0.$$

В этом случае поверхность (3.14) – это две пересекающиеся плоскости

$$y = \pm x \sqrt{\frac{\delta_1}{|\delta_2|}}.$$

Определим множество прямых поступательного воздействия из (3.13).

$$\begin{cases} F_x = (-y\delta_2 + xz)t \\ F_y = (zy + \delta_1 x)t \\ F_z = (\delta_1 \delta_2 + z^2)t \end{cases} .$$

Если взять первую плоскость  $y = x \sqrt{\frac{\delta_1}{|\delta_2|}}$ , то из (3.15) получим

$$\begin{cases} x = x_0 \tau \\ y = x_0 \sqrt{\frac{\delta_1}{|\delta_2|}} \tau \\ z = \sqrt{\delta_1 |\delta_2|} + (z_0 - \sqrt{\delta_1 |\delta_2|}) \tau \end{cases} ,$$

где  $\tau = 1 + (z_0 + \sqrt{|\delta_1 \delta_2|})t$ . Эта прямая проходит через точку  $C_1(0, 0, \sqrt{|\delta_1 \delta_2|})$  при любых  $(x_0, y_0, z_0)$ , принадлежащих первой плоскости. Таким образом, получаем семейство прямых в плоскости  $y = x \sqrt{\frac{|\delta_1|}{|\delta_2|}}$ , проходящих через точку  $C_1$  (рисунок 3.6).

Аналогично получим, что, если взять вторую плоскость  $y = -x \sqrt{\frac{|\delta_1|}{|\delta_2|}}$ , то прямые поступательного воздействия образуют семейство прямых, проходящих через точку  $C_2(0, 0, -\sqrt{|\delta_1 \delta_2|})$  в этой плоскости (рисунок 3.6).

Таким образом, прямые поступательного воздействия – это два плоских пучка прямых, которые проходят через две точки  $C_1$  и  $C_2$ , лежащих на линии пересечения данных плоскостей (рисунок 3.6).

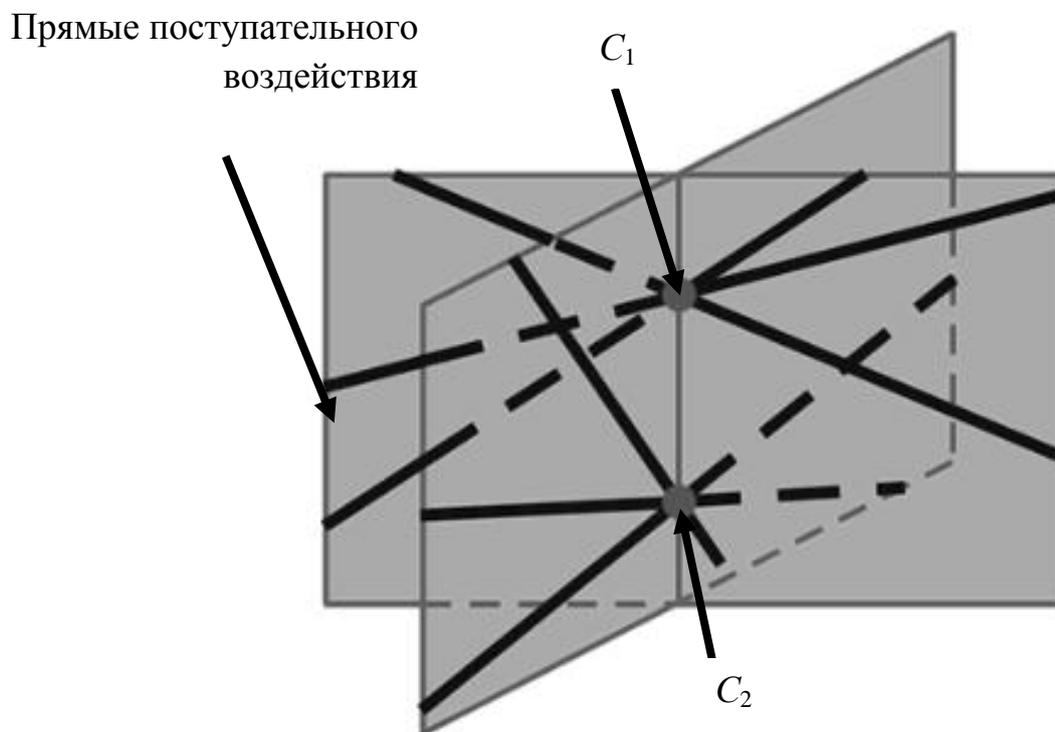


Рис. 3.6. Множество прямых поступательного воздействия\_4-го вида

### 5. Множество прямых поступательного воздействия 5-го вида

Лишь одно из чисел  $\delta_i$  не равно нулю

$$\delta_1 > 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0.$$

Выражение (3.14) в данном случае выглядит следующим образом

$$\delta_1 x^2 = 0.$$

В этом случае поверхность (3.14) вырождается в пару совпадающих плоскостей.

Аналогично, прямые поступательного воздействия собираются в плоский пучок прямых, который проходит через одну точку  $C_3$  (рисунок 3.7).

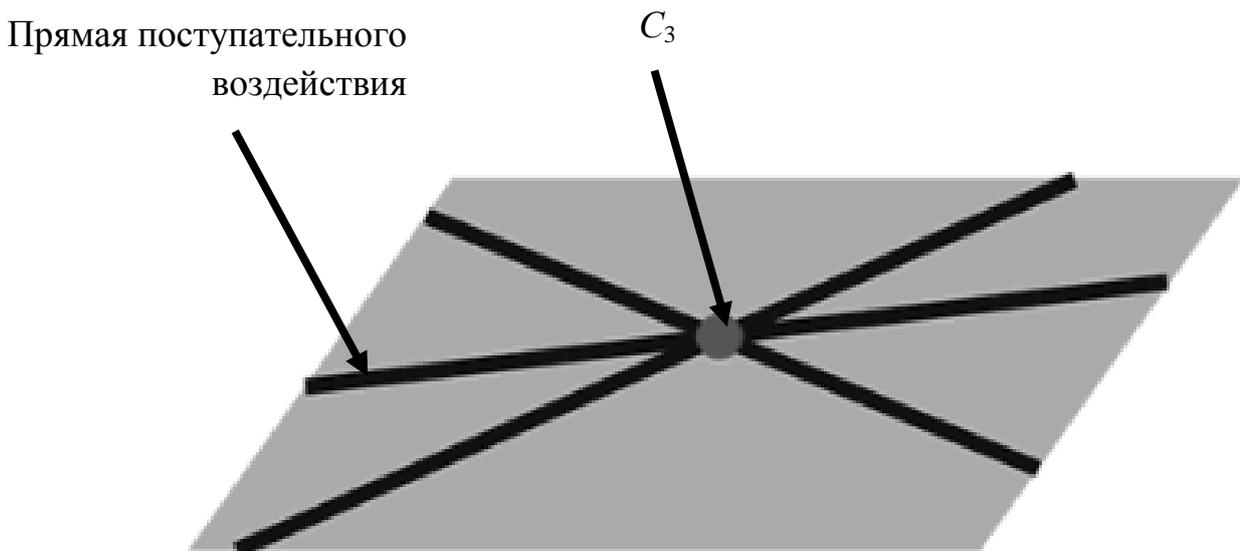


Рис. 3.7. Множество прямых поступательного воздействия 5-го вида

### 6. Множество прямых поступательного воздействия 6-го вида

Все числа  $\delta_i$  равны нулю

$$\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0.$$

В данном случае (3.14) – все пространство.

Из (3.13) можно показать,

$$\begin{cases} F_x = xzt \\ F_y = zyt \\ F_z = z^2t \end{cases}$$

Видно, что при  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$  вектор  $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$  – любой. Это и означает семейство всех прямых, проходящих через точку  $(0, 0, 0)$ . Таким образом, прямые поступательного воздействия – пространственный пучок прямых, проходящий через точку  $C_4$  (рисунок 3.8).

В данном случае  $\delta_i = 0$ , что удовлетворяет условию существования центра сопротивления, который совпадает с точкой  $C_4$ .

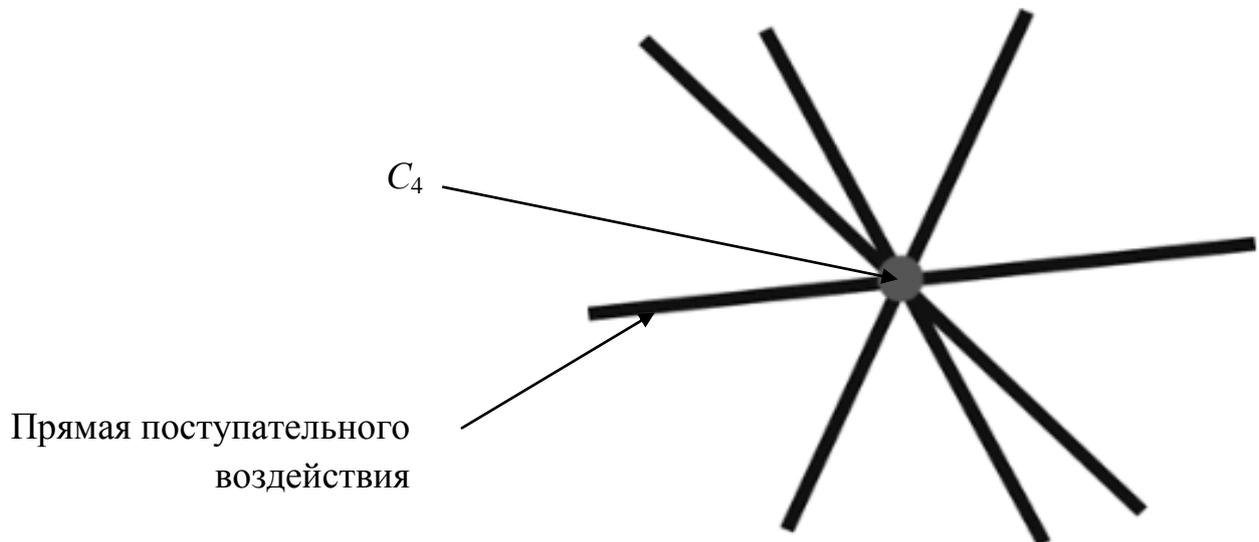


Рис. 3.8. Множество прямых поступательного воздействия\_б-го вида

### 3.3.2. Исследование множества осей поворота парой

Далее пусть  $\vec{M}$  – момент пары сил, приложенной к зубу. Тогда система (3.7.1) примет следующий вид

$$\begin{cases} \vec{\rho} = \hat{\gamma}\vec{M}, \\ \vec{\phi} = \hat{\beta}\vec{M}. \end{cases}$$

Выразим  $\vec{\rho} = \hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}\vec{\phi}$  и подставим в (3.2). Тогда

$$\vec{u} = \hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}\vec{\phi} + \vec{\phi} \times \vec{r}.$$

Учитывая определение матриц  $\hat{\delta}$ ,  $\hat{\varepsilon}$  ( $\hat{\delta}$  – симметричная часть матрицы  $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$ ;  $\hat{\varepsilon}$  – антисимметричная часть матрицы  $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$ ), получим

$$\vec{u} = (\hat{\delta} + \hat{\varepsilon})\vec{\phi} + \vec{\phi} \times \vec{r}.$$

Вектор  $\vec{r}$  представим в виде антисимметричной матрицы  $\hat{r}$  ( $\hat{r}\vec{V} = \vec{r} \times \vec{V}$  для любого вектора  $\vec{V}$ ), получим

$$\vec{u} = (\hat{\delta} + \hat{\varepsilon})\vec{\phi} - \hat{r}\vec{\phi}. \quad (3.16)$$

Перейдем в уже введенную ранее систему координат с началом, расположенным в точке, координаты которой являются компонентами вектора  $\vec{\varepsilon}$ . Из (3.16) и условия  $\vec{u}(\vec{r}_{cre}) = 0$  (при чистом повороте центр сопротивления не перемещается) получаем уравнение оси поворота

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & z & -y \\ -z & \delta_2 & x \\ y & -x & \delta_3 \end{pmatrix} \vec{\phi} = 0. \quad (3.17)$$

Представим (3.15) в виде системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} \delta_1\varphi_x + z\varphi_x - y\varphi_x = 0 \\ -z\varphi_x + \delta_2\varphi_x + x\varphi_x = 0 \\ y\varphi_x - x\varphi_x + \delta_3\varphi_x = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Далее, при известных значениях матрицы  $\hat{\delta}$ , через каждую точку поверхности проведем ось вращения (линия действия вектора малого поворота  $\vec{\varphi}$ ), удовлетворяющую условию (3.17). Его компоненты  $\vec{\varphi} = \{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}$  могут быть найдены из решения системы (3.18). Таким образом определим множество осей поворота парой.

Так как  $\vec{\varphi} \neq 0$ , приравниваем к нулю определитель матрицы (3.17) и получаем также уравнение поверхности 2-го порядка

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 + \delta_3 z^2 + \delta_1 \delta_2 \delta_3 = 0. \quad (3.19)$$

Таким образом, приходим к классификации видов области сопротивления через множество осей поворота парой.

Далее рассмотрим отдельно каждый вид множеств осей поворота парой аналогично тому, как это было проведено при исследовании посредством множества прямых поступательного воздействия.

### 1. Множество осей поворота парой 1-го вида

Все числа  $\delta_i$  не равны нулю, имеют одинаковый знак

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0.$$

Выражение (3.19) в данном случае выглядит следующим образом

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 + \delta_3 z^2 + \delta_1 \delta_2 \delta_3 = 0.$$

Приведем данное выражение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{\delta_2 \delta_3} + \frac{y^2}{\delta_1 \delta_3} + \frac{z^2}{\delta_1 \delta_2} = -1.$$

В этом случае, соотношение (3.19) не имеет решения и осей поворота парой нет.

При значениях  $\delta_1 < 0$ ,  $\delta_2 < 0$ ,  $\delta_3 < 0$  выражение (3.19) аналогично данному. Поэтому этот набор значений  $\delta_i$  не дает нового вида области сопротивления.

## 2. Множество осей поворота парой 2-го вида

Все числа  $\delta_i$  не равны нулю, имеют разные знаки

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0.$$

Выражение (3.19) в данном случае выглядит следующим образом

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 - |\delta_3| z^2 - \delta_1 \delta_2 |\delta_3| = 0.$$

Приведем данное выражение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{\delta_2 \delta_3} + \frac{y^2}{\delta_1 \delta_3} - \frac{z^2}{\delta_1 \delta_2} = 1.$$

В этом случае поверхность (3.19) – это однополостный гиперболоид (рисунок 3.9).

Из (3.18) определим множество осей поворота

$$\begin{cases} \varphi_x = -(y\delta_2 + xz)t \\ \varphi_y = (zy - \delta_1 x)t \\ \varphi_z = -(\delta_1 \delta_2 + z^2)t \end{cases} .$$

В данном случае линия действия вектора  $\vec{\varphi} = \{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}$  совпадает со второй прямой (3.14) (со знаком « $\leftarrow$ »). Следовательно, множество осей поворота также совпадает со вторым из семейств прямолинейных образующих (рисунок 3.9).

Набор знаков  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 < 0$ ,  $\delta_3 < 0$  также не дает нового нового вида области сопротивления, так как (3.19) не дает нового вида при смене знаков  $\delta_i$ .

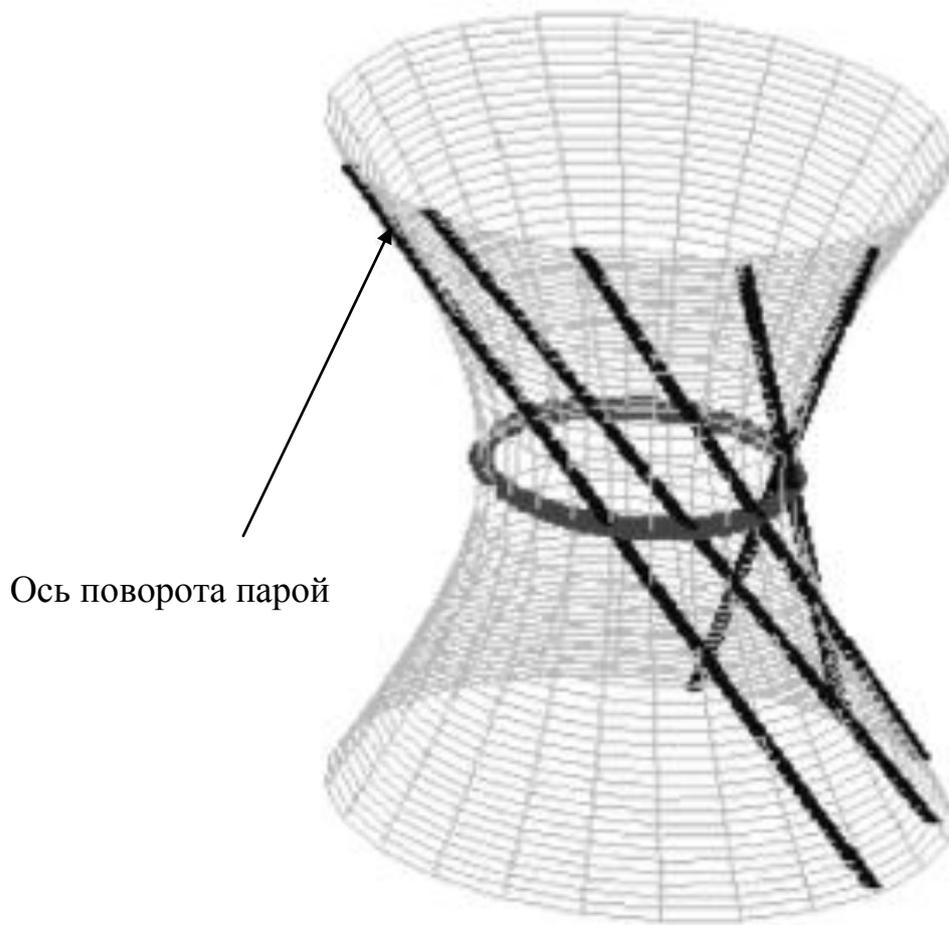


Рис. 3.9. Множество осей поворота парой 2-го вида

### 3. Множество осей поворота парой 3-го вида

Одно из чисел  $\delta_i$  равно нулю, остальные отличны от нуля и имеют одинаковый знак

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 = 0.$$

Выражение (3.19) в данном случае выглядит следующим образом

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 = 0.$$

Приведем данное выражение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{\delta_2} + \frac{y^2}{\delta_1} = 0.$$

В этом случае поверхность (3.19) – мнимые пересекающиеся плоскости. Осей поворота парой не существует.

#### 4. Множество осей поворота парой 4-го вида

Одно из чисел  $\delta_i$  равно нулю, остальные отличны от нуля и имеют различные знаки

$$\delta_1 > 0, \delta_2 < 0, \delta_3 = 0.$$

Выражение (3.19) в данном случае выглядит следующим образом

$$\delta_1 x^2 - |\delta_2| y^2 = 0.$$

Приведем данное выражение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{\delta_2} - \frac{y^2}{\delta_1} = 0.$$

Аналогично ранее рассмотренному случаю из классификации видов области сопротивления через прямые поступательного воздействия (также четвертого типа при  $\delta_1 > 0, \delta_2 < 0, \delta_3 = 0$ ) получаем подобный результат.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \tau \\ y = x_0 \sqrt{\frac{\delta_1}{|\delta_2|}} \tau \\ z = \sqrt{\delta_1 |\delta_2|} + (z_0 - \sqrt{\delta_1 |\delta_2|}) \tau \end{array} \right. .$$

Однако, в данном случае параметр  $\tau = 1 - (z_0 + \sqrt{|\delta_1 \delta_2|})t$ . Таким образом, если взять первую плоскость  $y = x \sqrt{\frac{\delta_1}{|\delta_2|}}$ , тогда оси поворота парой образуют семейство прямых, которое проходит через точку  $C_2(0, 0, -\sqrt{|\delta_1 \delta_2|})$ , введенную ранее в этой плоскости (рисунок 3.10). Если взять вторую плоскость  $y = -x \sqrt{\frac{\delta_1}{|\delta_2|}}$ , то оси поворота парой образуют семейство прямых, которое проходит через точку  $C_1(0, 0, \sqrt{|\delta_1 \delta_2|})$  в этой плоскости (рисунок 3.10).

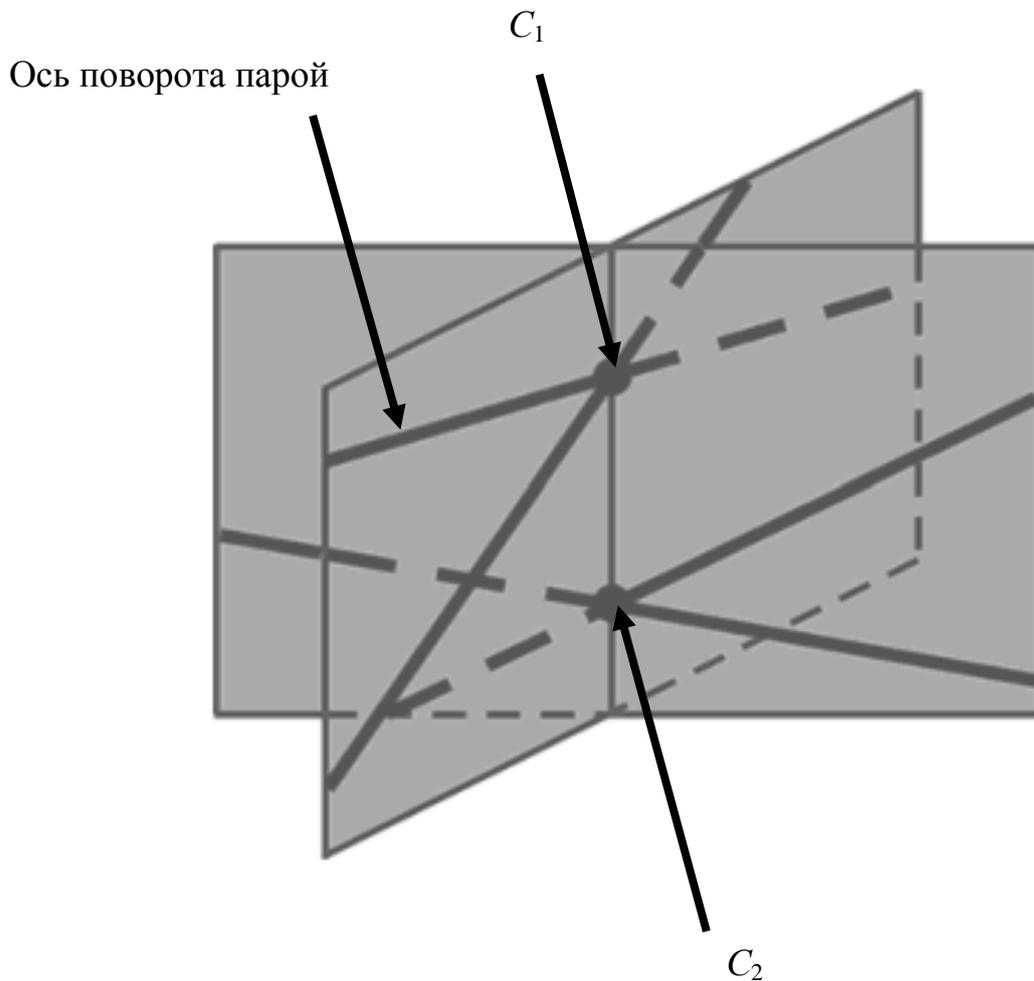


Рис. 3.10. Множество осей поворота парой 4-го вида

Выражение (3.19) определяет два семейства осей поворота, которые параллельны двум плоскостям. Соответствующий набор осей поворота парой предстает в виде двух плоских пучков прямых (рисунок 3.10). Они лежат в тех самых плоскостях, образованных прямыми поступательного воздействия. В то же время эти пучки прямых проходят также через те же две точки, из которых состояла область сопротивления (см. рисунок. 3.6). Однако наборы осей поворота парой и прямых поступательного воздействия, которые проходят через одну из точек области сопротивления, оказываются лежащими в разных плоскостях.

#### 5. Множество осей поворота парой 5-го вида

Только одно из чисел  $\delta_i$  отлично от нуля

$$\delta_1 > 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0.$$

Выражение (3.19) в данном случае выглядит следующим образом

$$\delta_1 x^2 = 0.$$

Выражение (3.19) определяет семейство направлений, параллельное некоторой плоскости. Соответствующий набор осей поворота парой предстает в виде плоского пучка прямых. Он лежит в той же плоскости, которая образовалась посредством прямых поступательного воздействия. Данный пучок прямых проходит через ту же точку, которая представляла собой область сопротивления (рисунок 3.11).

#### 6. Множество осей поворота парой 6-го вида

Все числа  $\delta_i$  равны нулю

$$\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0.$$

В этом случае соответствующее множество осей поворота парой (3.19) есть все пространство.

Аналогично подобному случаю из классификации множеств прямые поступательного воздействия при соответствующих условиях  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 0$ ,  $\delta_3 = 0$  видно, что оси поворота парой являются пространственным пучком прямых, который проходит через одну точку  $C_4$  (рисунок 3.12).

В данном случае  $\delta_i = 0$  и существует центр сопротивления, совпадающий с точкой  $C_4$ .

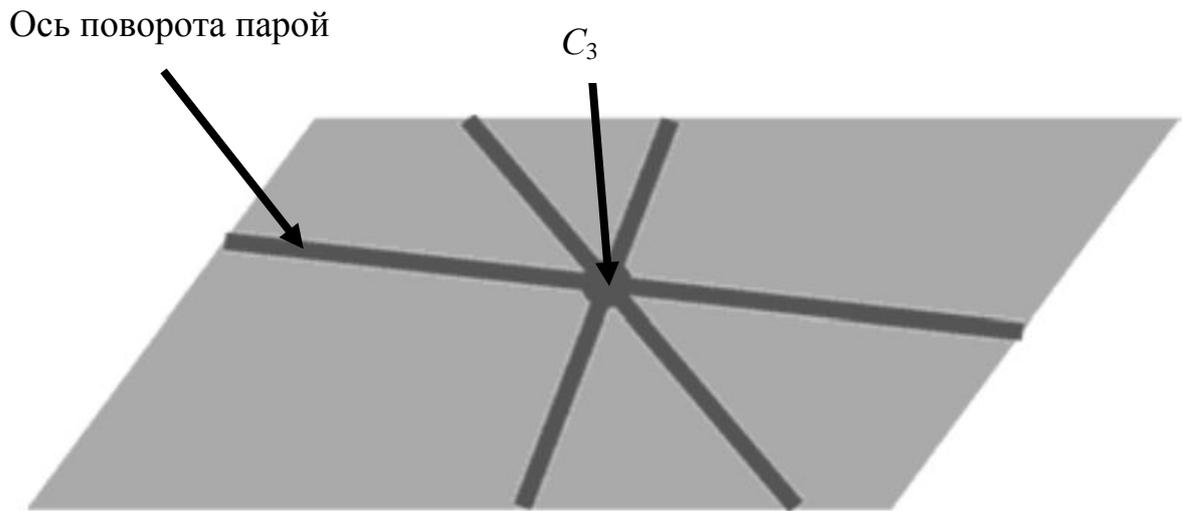


Рис. 3.11. Множество осей поворота парой\_5-го вида

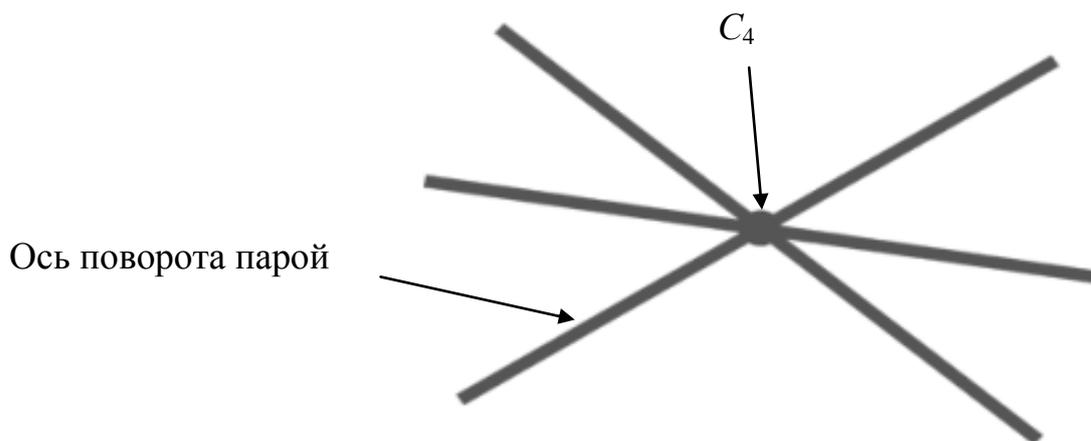


Рис. 3.12. Множество осей поворота парой\_6-го вида

### 3.4. Введение понятия «область сопротивления зуба»

Представлена исчерпывающая классификация множеств прямых поступательного воздействия и осей поворота парой. Естественно предположить, что, анализируя виды этих множеств, можно определить необходимое обобщение для центра сопротивления, в тех случаях, когда он не существует.

Таким образом, вводится новое понятие «область сопротивления зуба», обобщающее понятие «центр сопротивления зуба». Вид области сопротивления определяется наборами прямых поступательного воздействия и осей поворота парой.

По аналогии с центром сопротивления, введем определение для нового понятия. Область сопротивления – это набор точек, имеющий следующие свойства:

- 1) любая прямая поступательного воздействия проходит через эту область, и через всякую точку этой области проходит прямая поступательного воздействия;
- 2) любая ось поворота парой проходит через эту область, и через всякую точку этой области проходит ось поворота парой.

#### Классификация видов области сопротивления

Сравнивая полученные виды множеств прямых поступательного воздействия и осей поворота парой, при одинаковых условиях (т.е. наборе знаков  $\delta_i$ ) прослеживается определенная аналогия.

##### 1. Область сопротивления 1-го вида ( $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0$ )

В этом случае прямые поступательного воздействия и оси поворота парой не существуют, поэтому область сопротивления также не существует.

##### 2. Область сопротивления 2-го вида ( $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0$ )

Здесь, множество прямых поступательного воздействия определяется как одно из двух семейств прямолинейных образующих гиперболоида (рисунок 3.5).

Соответствующее множество осей поворота парой представляет собой второе семейство прямолинейных образующих того же гиперboloида (рисунок 3.10).

Удовлетворяя введенному определению, назовем областью сопротивления – набор точек в виде эллипса с центром в точке, координаты которой соответствуют компонентам вектора  $\vec{\varepsilon}$ , и полуосями  $a = \pm\sqrt{\delta_2\delta_3}$ ,  $b = \pm\sqrt{\delta_1\delta_3}$ , лежащим в плоскости  $z=0$ .

### 3. Область сопротивления 3-го вида ( $\delta_1 > 0$ , $\delta_2 > 0$ , $\delta_3 = 0$ )

Так же области сопротивления не существует, ввиду отсутствия прямых поступательного воздействия и осей поворота парой.

### 4. Область сопротивления 4-го вида ( $\delta_1 > 0$ , $\delta_2 < 0$ , $\delta_3 = 0$ )

В этом случае поверхности (3.14), (3.19) вырождаются в две пересекающиеся плоскости. Все множество прямых поступательного воздействия образуют два плоских пучка прямых, которые проходят через две точки  $C_1$  и  $C_2$ , которые в свою очередь лежат на линии пересечения указанных плоскостей. Оси поворота парой подобно предстают в виде двух плоских пучков прямых, которые проходят через те же две точки. Однако пучки осей поворота парой и прямых поступательного воздействия, которые проходят через общую точку  $C_1$ , оказываются лежащими в разных плоскостях.

Если плоскости, которые образованы осями поворота парой (или прямыми поступательного воздействия), оказываются взаимно перпендикулярными, то для каждой из этих двух точек может быть применено название *центр сопротивления в плоскости* в том смысле, что существуют плоскость и точка на ней, такие, что:

1) всякая прямая поступательного воздействия, лежащая в этой плоскости, проходит через эту точку и всякая прямая, проходящая через эту точку и лежащая в этой плоскости, является прямой поступательного воздействия;

2) существует пара сил, при нагружении зуба которой он поворачивается вокруг прямой, перпендикулярной этой плоскости и проходящей через эту точку.

Эти две точки  $C_1$  и  $C_2$  и являются областью сопротивления .

#### 5. Область сопротивления 5-го вида ( $\delta_1 > 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$ )

В этом случае поверхности (3.14), (3.19) вырождается в плоскость (пару совпавших плоскостей). Прямые поступательного воздействия предстают в виде плоского пучка прямых, который проходит через точку  $C_3$ . Оси поворота парой предстают аналогичным плоским пучком прямых, который также проходит через эту точку.

В данном случае, точка  $C_3$  – это область сопротивления. Можно заметить, что к этой точке не применимо название *центр сопротивления в плоскости* в описанном выше смысле, потому как свойство 2 для нее не выполняется.

#### 6. Область сопротивления 6-го вида ( $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$ )

Все прямые поступательного воздействия и оси поворота парой пересекаются в одной точке  $C_4$ . Эта точка и является областью сопротивления и ее координаты соответствуют компонентам вектора  $\vec{\epsilon}$ .

Заметим, что в данном случае выполняется условие существования центра сопротивления (3.9). Следовательно область сопротивления совпадает с центром сопротивления.

### **Выводы по главе 3**

1. Согласно условиям существования «центра сопротивления», существует он не всегда. Таким образом, предложено обобщение понятия «центр сопротивления зуба» – «область сопротивления зуба». Она существует в большем количестве случаев и сохраняет ряд свойств центра сопротивления.
2. Введено определение области сопротивления, изучены ее свойства.
3. Введена теоретическая классификация видов области сопротивления через совокупность прямых поступательного воздействия и осей поворота парой.

## ГЛАВА 4

### АНАЛИЗ ОРТОДОНТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ЗУБА В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

#### **4.1. Разработка методики определения компонентов матрицы податливости периодонта**

Развивая идеи работы [117], в главе 3 настоящей работы введено новое понятие «область сопротивления» путем анализа соотношений (3.7), связывающих систему сил и перемещения тела. Область сопротивления имеет преимущество перед старым понятием «центр сопротивления» в том, что существует в большем количестве случаев, т.е. является более общим, причем сохраняет основные свойства центра сопротивления.

Пользуясь понятием «область сопротивления» можно исследовать движение зуба в рамках костной лунки. Исходя из того, какое движение необходимо получить (поступательное, вращательное или сложное), необходимо приложить к коронке зуба соответствующую систему сил. Введена классификация возможных видов области сопротивления по принципу взаимного расположения прямых поступательного воздействия или осей поворота парой.

Далее представляет интерес создание методики, позволяющей применить разработанный подход в частных случаях. Она заключается в 1) установлении зависимости определенного вида области сопротивления от параметров рассматриваемой модели (геометрия, механические свойства), 2) определении положения области сопротивления и ее ориентации относительно зуба.

На практике получение трехмерной геометрии зуба и окружающих его тканей может быть доступно с помощью магнитно-резонансной томографии. Однако для разработки общей методики достаточно будет приближенной геометрии зуба. Причем важна именно его часть, погруженная в периодонт, т.е. корень зуба.

Первым шагом является создание методики определения компонентов  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$  матрицы системы (3.7) (характеризующих свойства податливости периодонтальной связки).

Для возможности получения аналитического решения представим линейно-упругую среду (периодонт) в виде набора пружин определенной жесткости  $c_i$  (рисунок 4.1). Ориентация и положение  $i$ -пружины в пространстве задается координатами точки крепления к зубу  $(x_i; y_i; z_i)$  и углами  $(\eta_i; \xi_i; \theta_i)$  с осями декартовой системы координат  $O_i'x_i'y_i'z_i'$ , оси которой параллельны осям декартовой системы координат  $Oxyz$  (рисунок 4.2). Данная ориентация соответствует расположению пучков коллагеновых волокон периодонтальной связки. Внешняя граница периодонта неподвижна, моделируя контакт с костной тканью.

Применим принцип возможных перемещений, который заключается в том, что сумма виртуальных работ внешних сил равна сумме виртуальных работ напряжений [25].

$$\sum_j \delta A_j^e = \sum \delta A_\sigma. \quad (4.1)$$

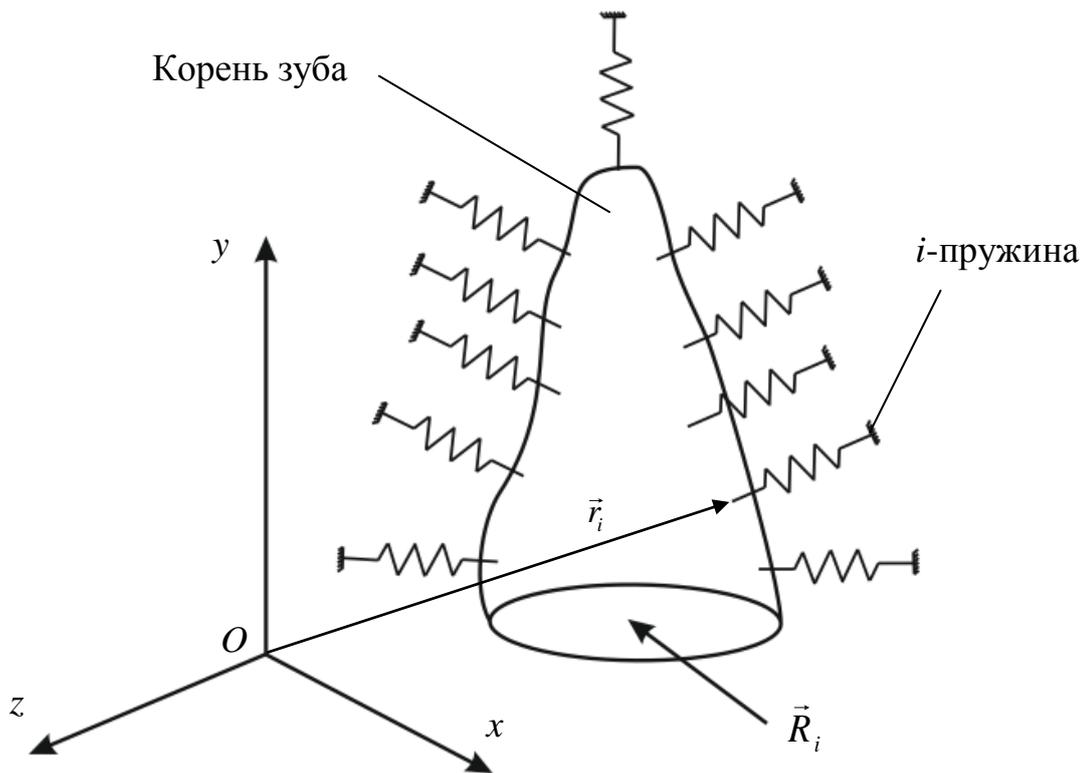


Рис. 4.1. Схематичное изображение твердого тела, окруженного пружинами

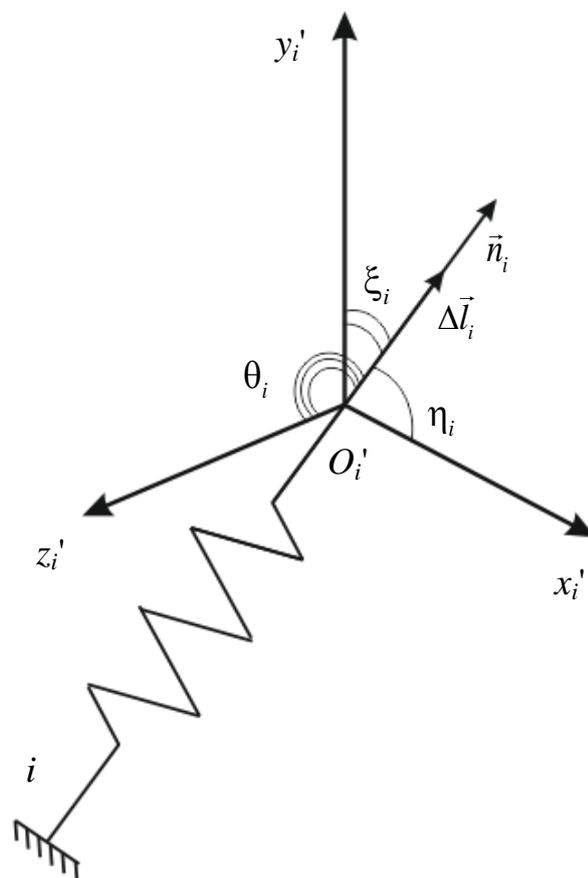


Рис. 4.2. Схематичное изображение  $i$ -й пружины

Система имеет 6 степеней свободы: 3 компоненты перемещения полюса  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ ; 3 угла поворота  $\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z$  вокруг осей. Сообщим точкам возможные перемещения и запишем сумму виртуальных работ внешних сил

$$\sum_j \delta A_j^e = \sum_j \vec{P}_j \delta \vec{r}_j, \quad (4.2)$$

а сумму виртуальной работы напряжений

$$\sum \delta A_\sigma = \sum_i c_i \Delta \vec{l}_i \delta \vec{r}_i. \quad (4.3)$$

Таким образом

$$\sum_j \vec{P}_j \delta \vec{r}_j = \sum_i c_i \Delta \vec{l}_i \delta \vec{r}_i \quad (4.4)$$

где  $\delta \vec{r}_i$  – это возможное перемещение точки прикрепления к зубу  $i$ -й пружины,  $\Delta \vec{l}_i$  – вектор удлинения  $i$ -й пружины.

Возможное перемещение точки определяется суммой поступательного возможного перемещения вместе с полюсом (началом системы координат)  $\delta \vec{r}_0$  вместе с возможным поворотом на бесконечно малый угол  $\delta \vec{\varphi}$ : вокруг полюса

$$\delta \vec{r}_i = \delta \vec{r}_0 + \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_i.$$

Аналогично для действительного малого перемещения  $\Delta \vec{r}_i$

$$\Delta \vec{r}_i = \Delta \vec{r}_0 + \Delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_i,$$

где  $\Delta \vec{\varphi}$  – вектор действительного малого угла поворота вокруг полюса под действием приложенной системы сил.

Представляя  $\delta \vec{r}_i$  в виде, получим

$$\delta \vec{r}_i = \delta r_{ix} \vec{i} + \delta r_{iy} \vec{j} + \delta r_{iz} \vec{k}. \quad (4.5)$$

Удлинение  $i$ -пружины  $\Delta \vec{l}_i$  определим через скалярное произведение вектора действительного перемещения  $\Delta \vec{r}_i$  и единичного вектора  $\vec{n}_i$  вдоль оси  $i$ -пружины, т.е.

$$\Delta \vec{l}_i = (\Delta \vec{r}_i \cdot \vec{n}_i) \cdot \vec{n}_i = (\Delta r_{ix} \cos \eta_i + \Delta r_{iy} \cos \xi_i + \Delta r_{iz} \cos \theta_i) \cdot \vec{n}_i. \quad (4.6)$$

Тогда подставляя (4.5) и (4.6) в правую часть выражения (4.2), распишем проекции виртуальных и действительных перемещений и получим

$$\sum_i c_i \Delta \vec{l}_i \delta \vec{r}_i = \sum_i c_i (\Delta x_0 a_i + \Delta y_0 b_i + \Delta z_0 d_i + \Delta \varphi_x e_i + \Delta \varphi_y f_i + \Delta \varphi_z g_i) (a_i \delta x_0 + b_i \delta y_0 + d_i \delta z_0 + e_i \delta \varphi_x + f_i \delta \varphi_y + g_i \delta \varphi_z). \quad (4.7)$$

Здесь  $a_i = \cos \eta_i$ ,  $b_i = \cos \xi_i$ ,  $d_i = \cos \theta_i$ ,  $e_i = (y_i \cos \theta_i - z_i \cos \xi_i)$ ,  
 $f_i = (z_i \cos \eta_i - x_i \cos \theta_i)$ ,  $g_i = (x_i \cos \xi_i - y_i \cos \eta_i)$ .

Сумма виртуальных работ внешних сил (4.2) определяется через обобщенные силы

$$\sum_j \vec{P}_j \delta \vec{r}_j = Q_x \delta x_0 + Q_y \delta y_0 + Q_z \delta z_0 + M_x \delta \varphi_x + M_y \delta \varphi_y + M_z \delta \varphi_z. \quad (4.8)$$

Тогда, подставляя выражения (4.7) и (4.8) в (4.4), обобщенные силы определим как коэффициенты при одинаковых вариациях обобщенных координат. Тогда, объединив их в систему уравнений, получим

$$\begin{cases} Q_x = \sum_i c_i (\Delta x_0 a_i + \Delta y_0 b_i + \Delta z_0 d_i + \Delta \varphi_x e_i + \Delta \varphi_y f_i + \Delta \varphi_z g_i) a_i, \\ Q_y = \sum_i c_i (\Delta x_0 a_i + \Delta y_0 b_i + \Delta z_0 d_i + \Delta \varphi_x e_i + \Delta \varphi_y f_i + \Delta \varphi_z g_i) b_i, \\ Q_z = \sum_i c_i (\Delta x_0 a_i + \Delta y_0 b_i + \Delta z_0 d_i + \Delta \varphi_x e_i + \Delta \varphi_y f_i + \Delta \varphi_z g_i) d_i, \\ M_x = \sum_i c_i (\Delta x_0 a_i + \Delta y_0 b_i + \Delta z_0 d_i + \Delta \varphi_x e_i + \Delta \varphi_y f_i + \Delta \varphi_z g_i) e_i, \\ M_y = \sum_i c_i (\Delta x_0 a_i + \Delta y_0 b_i + \Delta z_0 d_i + \Delta \varphi_x e_i + \Delta \varphi_y f_i + \Delta \varphi_z g_i) f_i, \\ M_z = \sum_i c_i (\Delta x_0 a_i + \Delta y_0 b_i + \Delta z_0 d_i + \Delta \varphi_x e_i + \Delta \varphi_y f_i + \Delta \varphi_z g_i) g_i. \end{cases}$$

Запишем данную систему уравнений в матричном виде

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i c_i a_i^2 & \sum_i c_i a_i b_i & \sum_i c_i a_i d_i & \sum_i c_i a_i e_i & \sum_i c_i a_i f_i & \sum_i c_i a_i g_i \\ \sum_i c_i b_i a_i & \sum_i c_i b_i^2 & \sum_i c_i b_i d_i & \sum_i c_i b_i e_i & \sum_i c_i b_i f_i & \sum_i c_i b_i g_i \\ \sum_i c_i d_i a_i & \sum_i c_i d_i b_i & \sum_i c_i d_i^2 & \sum_i c_i d_i e_i & \sum_i c_i d_i f_i & \sum_i c_i d_i g_i \\ \sum_i c_i e_i a_i & \sum_i c_i e_i b_i & \sum_i c_i e_i d_i & \sum_i c_i e_i^2 & \sum_i c_i e_i f_i & \sum_i c_i e_i g_i \\ \sum_i c_i f_i a_i & \sum_i c_i f_i b_i & \sum_i c_i f_i d_i & \sum_i c_i f_i e_i & \sum_i c_i f_i^2 & \sum_i c_i f_i g_i \\ \sum_i c_i g_i a_i & \sum_i c_i g_i b_i & \sum_i c_i g_i d_i & \sum_i c_i g_i e_i & \sum_i c_i g_i f_i & \sum_i c_i g_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \\ \Delta \varphi_x \\ \Delta \varphi_y \\ \Delta \varphi_z \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Матрица системы уравнений (4.9) соответствует состоянию равновесия зуба и поэтому симметрична и положительно определена. Она имеет размерность  $6 \times 6$  и содержит 21 независимую компоненту, которые определяются геометрической формой корня зуба, упругими свойствами периодонта, положением полюса. Можно увидеть, что искомая матрица системы (3.7) может быть определена как обратная к матрице системы уравнений (4.9).

Коэффициент жесткости пружин  $c_i$  может быть определен с помощью известного из литературы модуля упругости периодонта  $E$ . Считаем, что для каждой пружины коэффициент  $c_i$  одинаков. Для тонкого растяжимого стержня длиной  $l$  закон Гука имеет вид  $F = c\Delta l$ , а для относительных величин может быть записан как  $\sigma = E\varepsilon$  [5, 47, 53]. Учитывая, что нормальное напряжение в поперечном сечении  $\sigma = \frac{F}{S}$  (где  $S$  – площадь поперечного сечения), а относительное удлинение  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ , то выражение для  $c$  может быть записано как

$$c = \frac{ES}{l}.$$

На основе полученного аналитического решения для нахождения значений коэффициентов податливости периодонта  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  построен алгоритм, который запрограммирован в математическом пакете программ *Matlab*. С его помощью можно определять положение и ориентацию области сопротивления (и как ее частный случай – положение центра сопротивления), а также визуализировать наборы прямых поступательного воздействия и осей поворота парой, которые и определяют вид области сопротивления.

## 4.2. Проведение численных экспериментов

Следующим шагом является проведение ряда численных экспериментов в написанной программе, целью которых будет установление зависимости вида области сопротивления от свойств модели «зуб–периодонт», т.е. геометрической формы и механических свойств.

### 4.2.1. Определение положения центра сопротивления в плоскости

Так как было доказано, что центр сопротивления существует при наличии у системы «зуб–периодонт» плоскости симметрии, то в качестве первого примера разобран именно этот случай.

Для этого была создана плоская геометрическая модель системы «зуб–периодонт», задаваемая по координатам  $x, y$  (рисунок 4.3).

Далее определяются значения коэффициентов податливости периодонта  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  по разработанной методике. Используя их, можно найти положение центра сопротивления путем подстановки полученных значений в формулы из [49] (рисунок 4.4, а)

$$x_{cre} = -\frac{\gamma_{23}}{\beta_{33}}; \quad y_{cre} = \frac{\gamma_{13}}{\beta_{33}}. \quad (4.10)$$

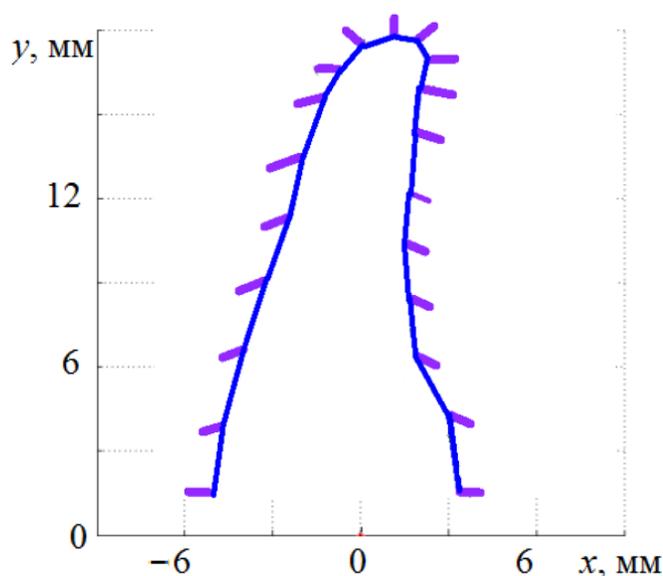


Рис. 4.3. Плоская модель системы «зуб–периодонт». Синие линии – границы корня зуба, фиолетовые линии – пружины.

Также положение центра сопротивления в плоскости можно найти экспериментально, пользуясь его свойствами.

- 1 способ: Центр сопротивления как точка пересечения прямых поступательного воздействия

Для нахождения прямых поступательного воздействия проводим  $N$  количество тестов. В  $k$ -м тесте ( $1 \leq k \leq N$ ) в разных точках зуба с координатами  $(x_i; y_i)$  к зубу прикладывается сила  $F$  под углом  $\alpha_{Fi}$  ( $0 \leq i \leq 2\pi$ ). Под действием этой нагрузки зуб совершает мгновенное перемещение. В случае когда угол поворота тела будет равен нулю  $\varphi = 0$  (что означает, что зуб совершает поступательное движение), линия действия приложенной силы будет являться прямой поступательного воздействия и выделяется особым образом (красным цветом) (рисунок 4.4, б). Получая набор таких линий, центр сопротивления определится как точка их пересечения.

- 2 способ: Центр сопротивления как точка, вокруг которой зуб совершает чистое вращение (неподвижная точка).

В данном случае, для определения центра сопротивления может быть использовано условие, что при приложении пары сил  $\vec{u}(\vec{r}_{cre}) = 0$ .

Воспользовавшись этими свойствами и сравнив с результатами, полученными по формулам (4.10), видно (рисунок 4.4), что координаты точек, полученных тремя способами, совпадают с точностью до сотых (см. таблицу 4.1).

Таблица 4.1

### Значения координат центра сопротивления в плоскости

Координаты	По формулам	1 способ	2 способ
$x$ , мм	0,77	0,77	0,77
$y$ , мм	11,15	11,15	11,15

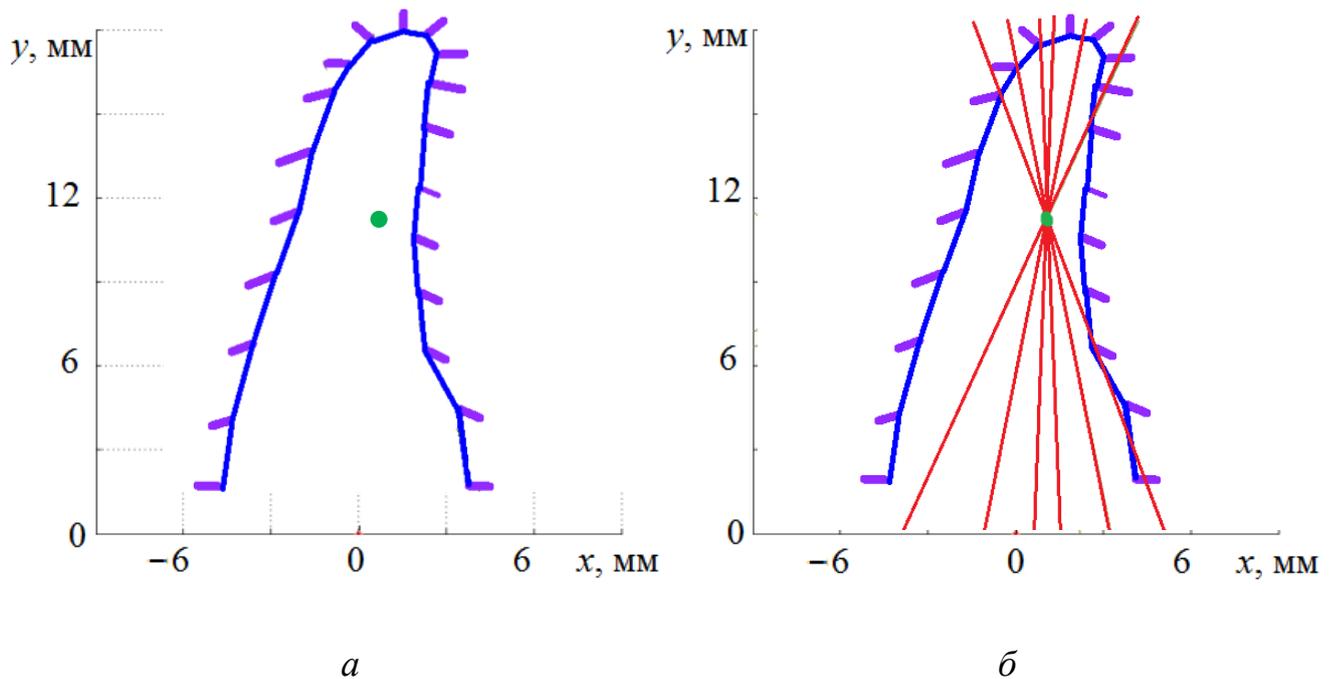


Рис. 4.4. Положение центра сопротивления, найденное: *a* – по аналитическим формулам; *б* – практическим способом. Синие линии – границы корня зуба, фиолетовые линии – пружины, зеленая точка – центр сопротивления, красные линии – линии поступательного воздействия.

4.2.2. Определение положения и ориентации области сопротивления в зависимости от заданных параметров системы «зуб-периодонт» (механические, геометрические)

***Общий случай***

В общем случае геометрическая форма модели корня зуба и окружающего периодонта задается приближенной к реальной форме переднего верхнего резца, т.е. специально не имеющей элементов симметрии (рисунок 4.5, а).

Определяем компоненты матрицы податливости периодонта  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  по разработанной методике. Далее, определяя компоненты матрицы  $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$ , можно выделить ее симметричную часть  $\hat{\delta}$ . Затем, приводя  $\hat{\delta}$  к диагональному виду, определим ее собственные значения  $\delta_i$

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} -0,0653 & 0 & 0 \\ 0 & -0,007 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0344 \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученные значения  $\delta_i$  в уравнение поверхности (3.14), получаем уравнение однополостного гиперboloида в каноническом виде

$$\frac{x^2}{0,015} + \frac{y^2}{0,047} - \frac{z^2}{0,021} = 1.$$

Все прямые поступательного воздействия расположены таким образом, что являются одним из семейств прямолинейных образующих данного однополостного гиперboloида (рисунок 4.5, б). Область сопротивления – эллипс минимального диаметра (рисунок 4.5, в).

Таким образом, сравнивая результат, полученный в ходе численного эксперимента с теоретической классификацией видов области сопротивления, представленной в главе 3, а именно набор значений  $\delta_i$ , видно, что «общему» случаю соответствует область сопротивления 2-го вида.

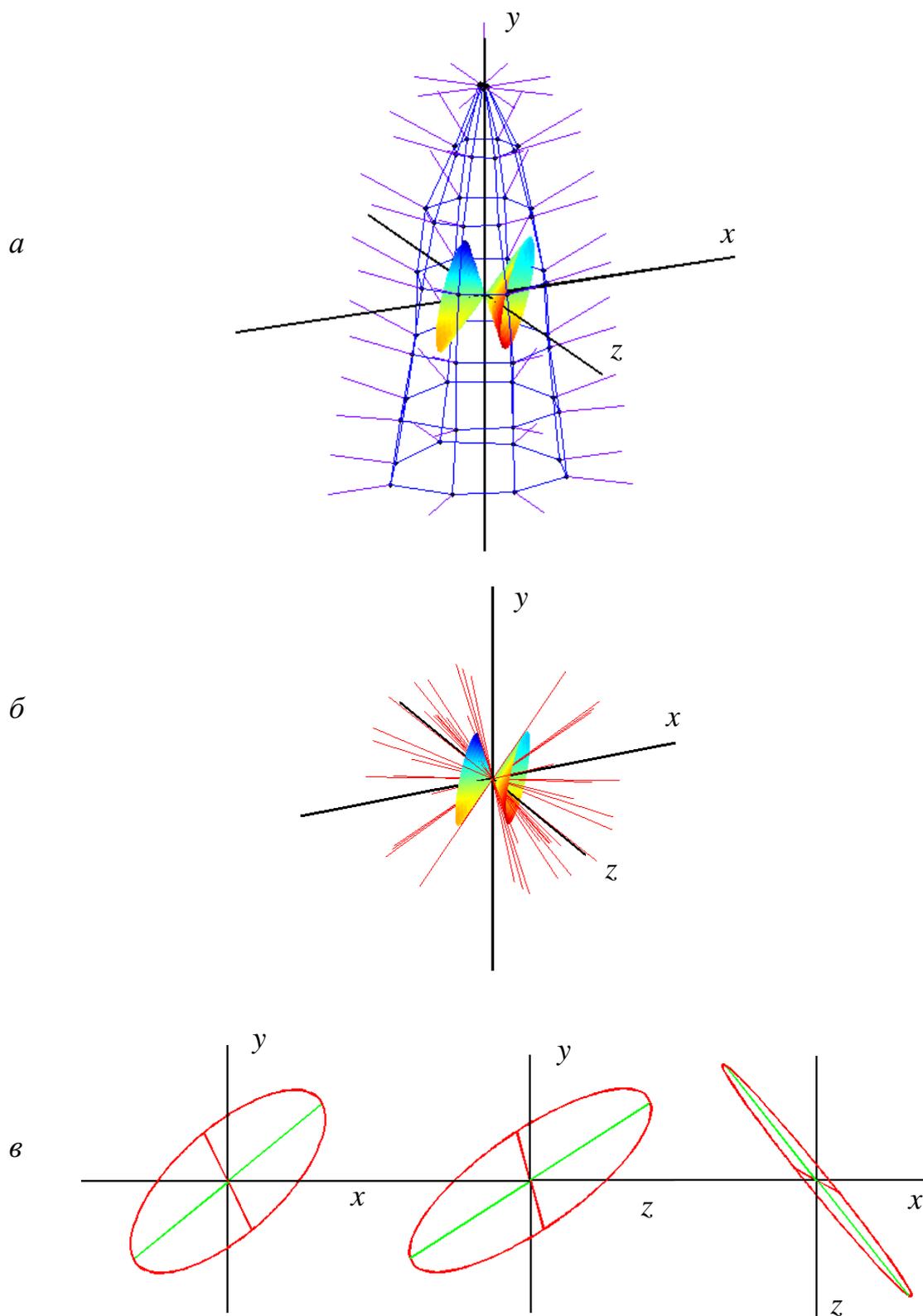


Рис. 4.5. Иллюстрация к общему случаю: *a* – положение гиперboloида относительно корня зуба (синие линии – границы корня, фиолетовые линии – пружины); *б* – связь гиперboloида и прямых поступательного воздействия (красные линии); *в* – положение эллипса в трех плоскостях

### *Случаи наличия элементов симметрии*

#### а) Наличие двух плоскостей симметрии

В данном случае модель корня зуба и окружающего его периодонта задается с идеализированной геометрической формой, имеющей две плоскости симметрии (рисунок 4.6), т.е. параллелепипед с поперечным сечением (прямоугольник), лежащим в плоскости  $xz$ .

Аналогично предыдущему пункту определим собственные значения  $\delta_i$

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} -0,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33 \end{pmatrix}.$$

Уравнение поверхности (3.13) принимает вид канонического уравнения пары пересекающихся плоскостей

$$\frac{z^2}{0,33} - \frac{x^2}{0,33} = 0.$$

Стоит отметить, что эти плоскости взаимно перпендикулярны (так как  $|\delta_3| = |\delta_1|$ ) и совпадают с плоскостями геометрической симметрии модели.

Областью сопротивления в данном случае являются две точки, которые лежат на линии пересечения двух плоскостей. Прямые поступательного воздействия здесь соответственно два плоских пучка прямых, которые проходят через эти точки (точки области сопротивления).

Таким образом, сопоставляя результат, полученный в ходе численного эксперимента, с теоретической классификацией видов области сопротивления, представленной в главе 3, а именно набор значений  $\delta_i$  и вид области сопротивления, видно, что случаю с двумя плоскостями симметрии соответствует область сопротивления 4-го вида.

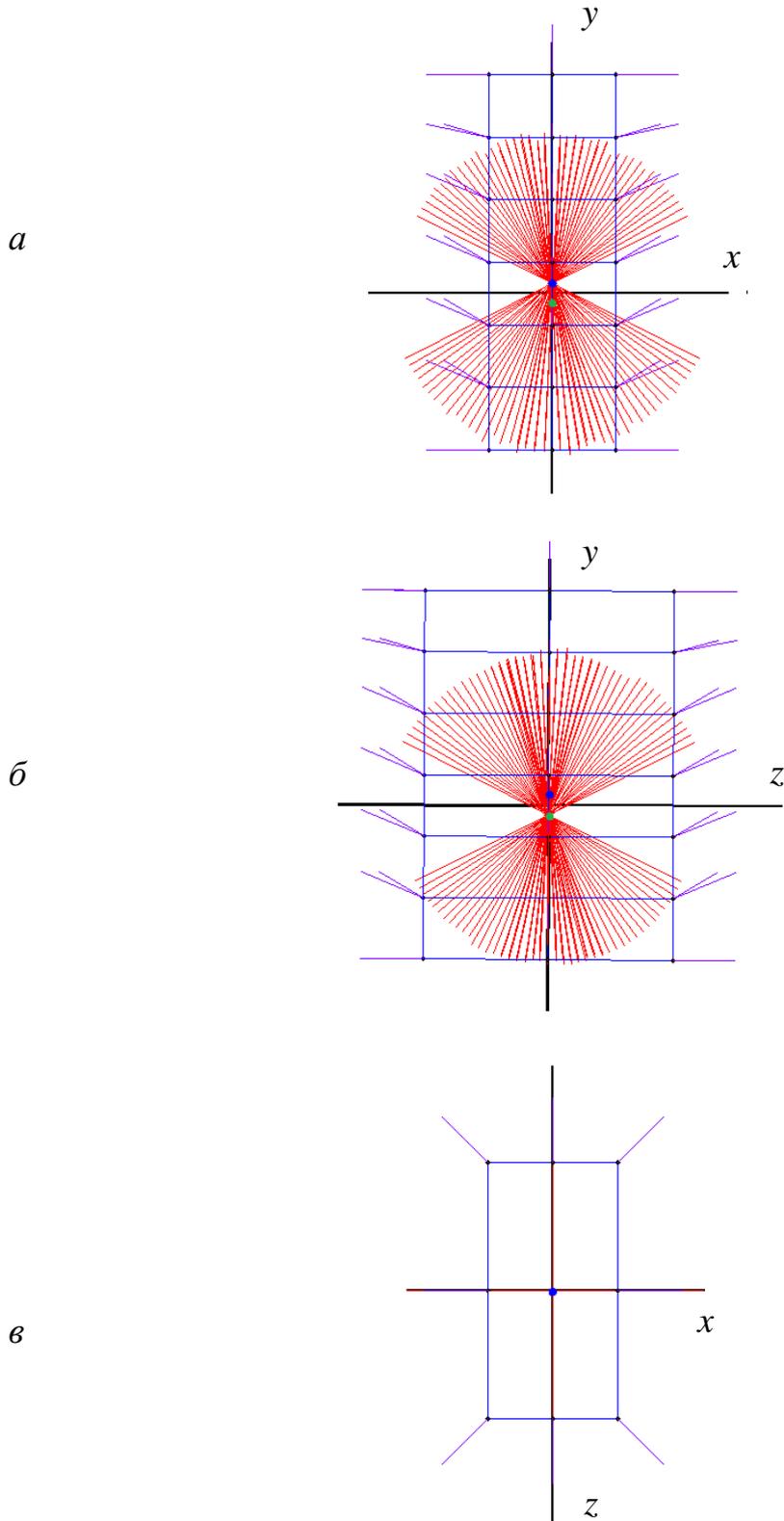


Рис. 4.6. Иллюстрация к случаю с двумя плоскостями симметрии. Синяя, зеленая точки – точки области сопротивления, красные линии – прямые поступательного воздействия

Результаты совпадают с результатами независимых численных экспериментов, описанных в работах [9-12, 62, 91].

В работе [12] С.М. Босяковым и др. представлена следующая модель: рассматривается начальное движение однокоренного зуба в рамках периодонтальной связки. Зуб принимается абсолютно твердым телом, которое имеет форму эллиптического параболоида (т.е. две плоскости симметрии), периодонтальная связка обладает линейно-упругими свойствами. Были получены координаты 2-х точек, которые обладают свойствами, аналогичными свойствам центра сопротивления, т.е. прикладывая силу в данной точке, тело перемещается поступательно. Этим точкам было дано название «центры сопротивления», которые были вычислены при заданных геометрических параметрах корня и упругих коэффициентах периодонтальной связки. Указывается, что полученные данные довольно с хорошей точностью соотносятся с результатами конечно-элементного моделирования.

В работе [91] Гайгер и пр. исследуют связь между положением центра сопротивления зуба и морфологическими факторами. Для этого была построена трехмерная геометрическая модель зуба, у которой имеется две плоскости симметрии: сагиттальная (параболическая форма), фронтальная (прямоугольная форма) (рисунок 4.7). Периодонтальная связка принимается как линейно-упругая среда, которая имеет одинаковую толщину по всей длине корня; внешняя граница закреплена (таким образом моделируется контакт с костной тканью), зуб – твердое тело, погруженное в эту связку.

Далее эксперимент заключался в том, чтобы в каждой плоскости симметрии по очереди прикладывались силы и оценивался характер движения зуба. Таким образом, авторы обнаружили, что положение точек, которые они назвали «центрами сопротивления», не совпадает в различных плоскостях. А именно в сагиттальной плоскости положение данной точки было найдено на расстоянии 49,6 % от длины корня (отсчитывая от десневого края), а во фронтальной плоскости – 44,1% от длины корня.

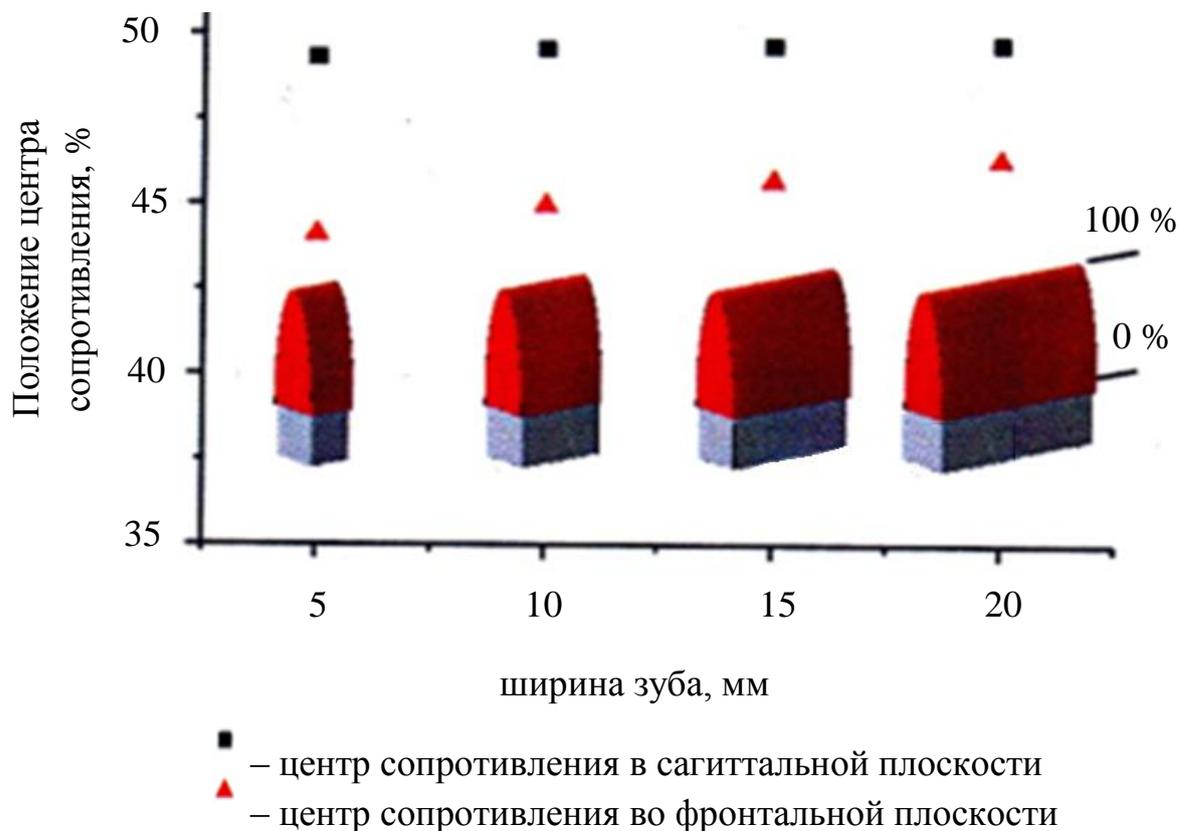


Рис. 4.7. Результаты эксперимента [91]

Также в данной статье был описан еще один эксперимент, в котором авторы исследовали возможность изменения положения найденных точек. С изменением геометрических размеров зуба во фронтальной плоскости и, оставляя без изменения размеры в сагиттальной плоскости наблюдались следующие изменения: в сагиттальной плоскости «центр сопротивления» оставался в том же положении, а во фронтальной плоскости, по мере увеличения ширины, он перемещался ближе к кончику корня (рисунок 4.7).

#### б) Наличие оси симметрии

Модель корня зуба и периодонта задается с идеализированной формой, имеющей ось симметрии  $n$ -порядка ( $n > 2$ ). Было рассмотрено два случая:  $n = 4$  (рисунок 4.8),  $n = 6$  (рисунок 4.9), т.е. параллелепипед с поперечным сечением (квадрат при  $n = 4$ , шестиугольник при  $n = 6$ ), лежащим в плоскости  $xz$ .

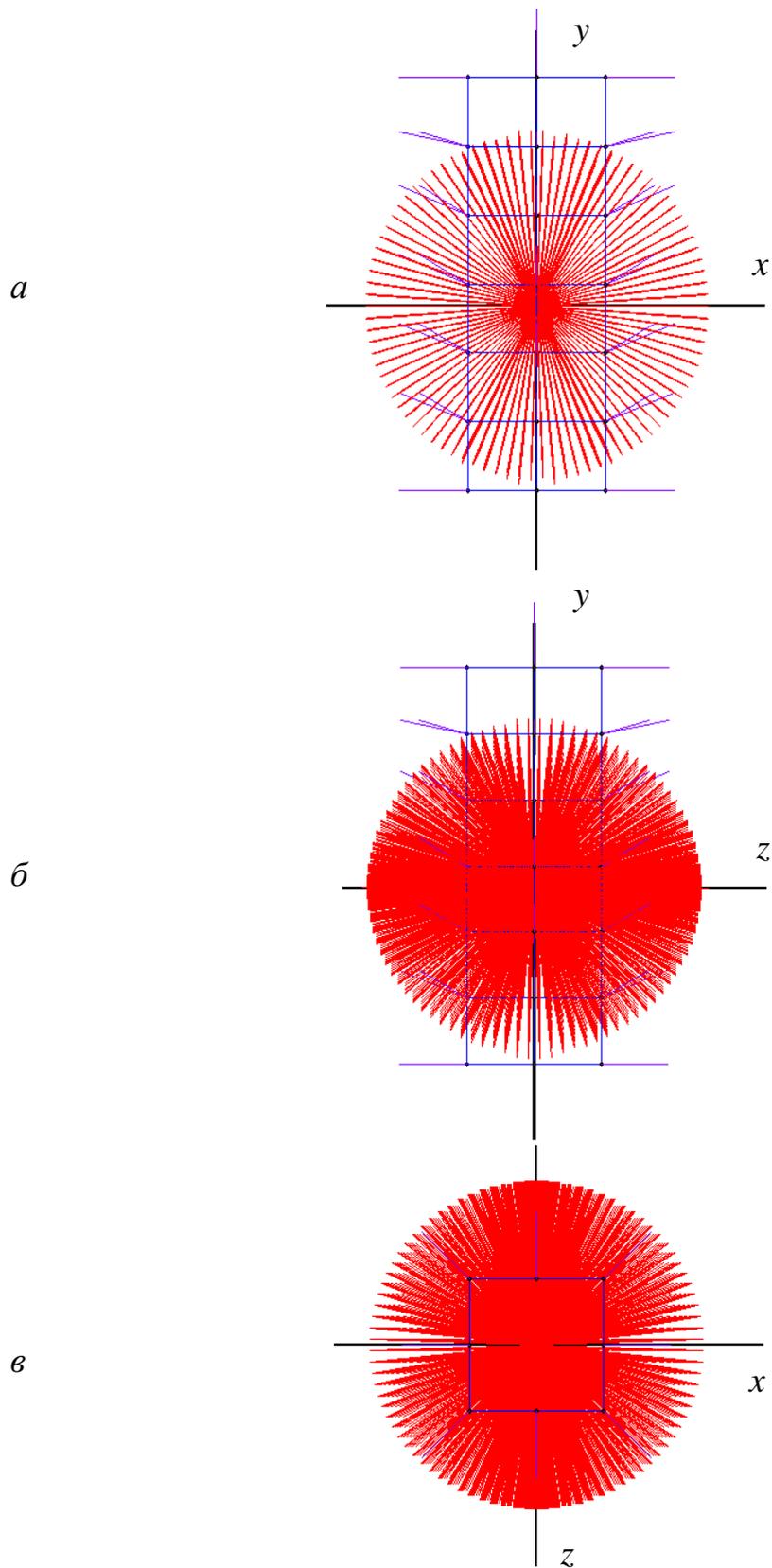


Рис. 4.8. Иллюстрация к случаю с двумя плоскостями симметрии ( $n = 4$ ). Красные линии – прямые поступательного воздействия

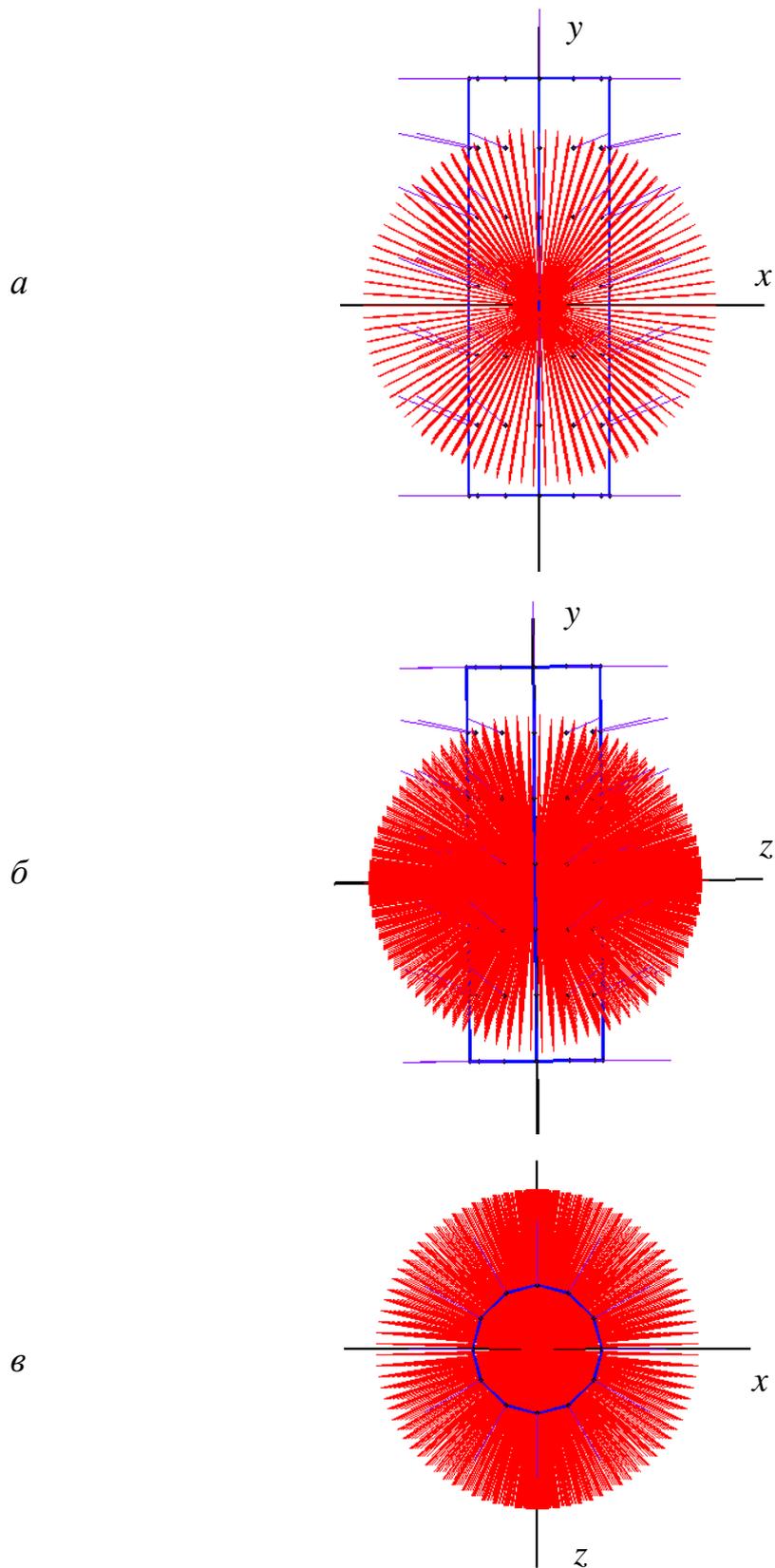


Рис. 4.9. Иллюстрация к случаю с двумя плоскостями симметрии ( $n = 6$ ). Красные линии – прямые поступательного воздействия

В обоих случаях результат оказался одинаковым. Симметричная часть  $\hat{\delta}$  матрицы  $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$  равна

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что  $\hat{\delta} = 0$ . Следовательно выполняется условие существования центра сопротивления. Таким образом в данном случае область сопротивления совпадает с центром сопротивления и все прямые поступательного воздействия пересекаются в одной точке.

Данный случай соответствует области сопротивления 6-го вида введенной классификации.

3-ий и 5-ый виды из классификации областей сопротивления здесь не рассматриваются, так как имеется гипотеза (подтвержденная экспериментально в ходе большого количества численных экспериментов), согласно которой, вероятно, не существует зубов такой формы, для которой бы  $\delta_i$  приняли соответствующие комбинации знаков.

#### 4.2.3. Определение связи между видами области сопротивления

Данный раздел демонстрирует численный эксперимент, целью которого было наблюдение общей природы различных видов области сопротивления. Он наглядно отражает переход от одного вида области к другому путем изменения геометрических параметров системы «зуб–периодонт».

Изначально задавалось тело произвольной формы (без элементов симметрии) (рисунок 4.10, *а*) и постепенно приводилось к идеализированной форме (имеющей плоскости симметрии, затем ось симметрии 4-го порядка (рисунок 4.10, *б*). В процессе перехода фиксировались значения  $\delta_i$  на отдельных этапах изменения формы. Затем они были объединены на графиках (рисунки 4.11, 4.12) для отражения зависимости от изменяемых параметров.

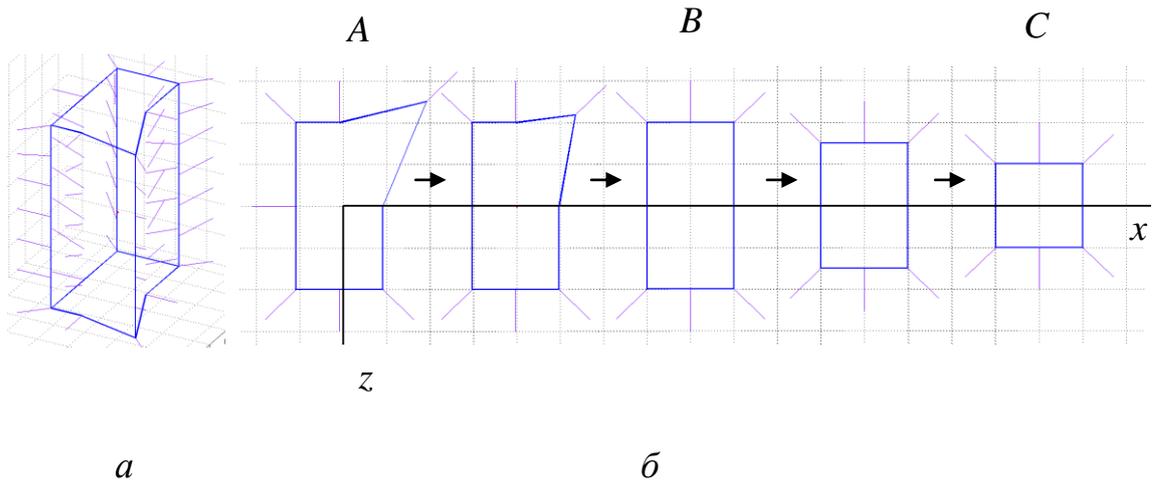


Рис. 4.10. Иллюстрация к эксперименту: *a* – экспериментальная начальная модель; *b* – этапы изменения формы корня зуба: *A* – без элементов симметрии; *B* – две плоскости симметрии; *C* – ось симметрии 4-го порядка

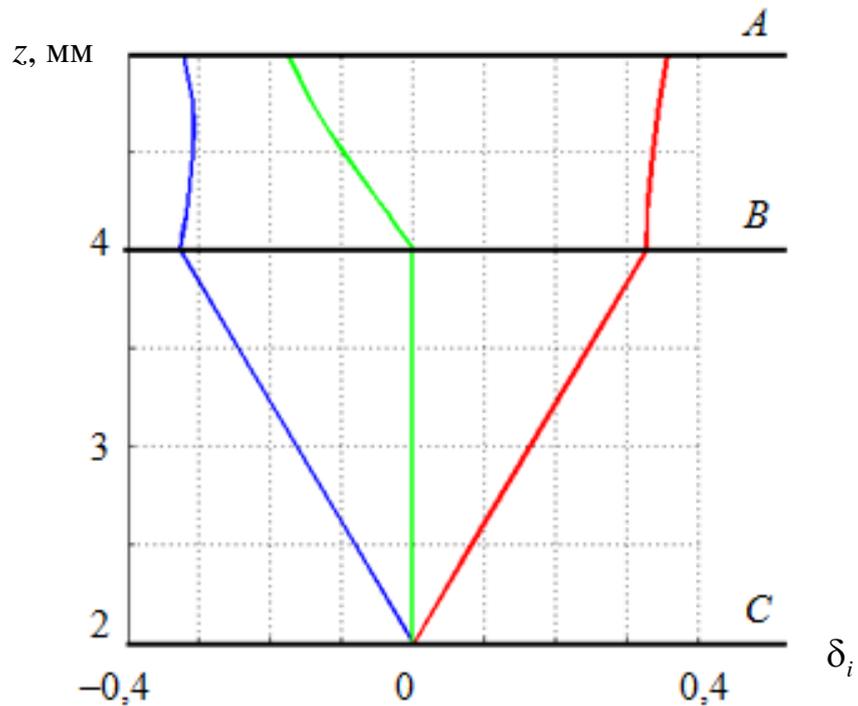


Рис. 4.11. Зависимости изменения чисел  $\delta_i$  от изменения формы корня зуба по оси *z*: синяя линия –  $\delta_1$ ; зеленая линия –  $\delta_2$ ; красная линия –  $\delta_3$

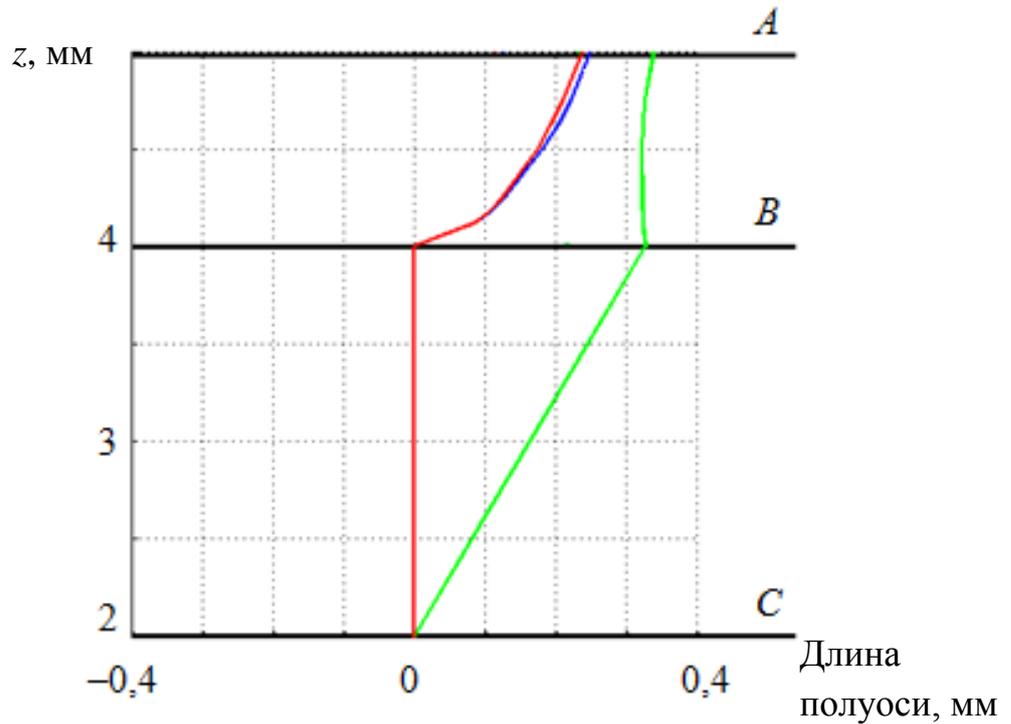


Рис. 4.12. Зависимости изменения длин полуосей области сопротивления от изменения формы корня зуба по оси  $z$ : красная линия –  $x$ -полуось; зеленая линия –  $y$ -полуось

Участок  $A-B$  характеризуется переходом от тела произвольной формы  $A$  к телу с двумя плоскостями симметрии  $B$  (см. рисунок 4.10). На графиках (рисунки 4.11, 4.12) видно, что на участке  $A-B$  все три собственных значения отличны от нуля, при чем одно из них больше нуля ( $\delta_1 < 0$ ,  $\delta_2 < 0$ ,  $\delta_3 > 0$ ), т.е. для него существует область сопротивления 2-го вида (эллипс), что и соответствует телу, задаваемому произвольной формой. По мере того, как форма тела приближается к обретению элементов симметрии, одно из собственных значений стремится к нулю  $\delta_2 \rightarrow 0$ , что соответствует существованию области сопротивления 4-го типа (2 точки) ( $\delta_1 < 0$ ,  $\delta_2 = 0$ ,  $\delta_3 > 0$ ). Одна из полуосей эллипса уменьшается, сжимая эллипс до прямой линии, окончательно приводя его к двум точкам, отдаленным друг от друга на расстоянии, равном длине ненулевой полуоси.

Окончательный переход из положения  $B$  в положение  $C$ , который характеризуется приобретением телом оси симметрии, показывает стремление остальных собственных значений к нулю. Таким образом в положении  $C$  все собственные значения равны нулю ( $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$ ), что соответствует области сопротивления 6-го вида. Т.е. область сопротивления, состоящая из двух точек, сужается до единственной точки, а именно центра сопротивления.

### **4.3. Планирование и проведение натуральных экспериментов**

Разработан биомеханический подход к управлению перемещением зуба в границах костной лунки на основе понятия область сопротивления (и как частный случай – центр сопротивления). В целях его верификации был проведен ряд натуральных экспериментов.

В рамках первого эксперимента система «зуб-периодонт» моделировалась в двумерной постановке. Его целью являлась необходимость проверки существования центра сопротивления в плоскости симметрии.

#### Планирование эксперимента 1

- 1) Цели эксперимента: убедиться в существовании центра сопротивления в плоскости на практике, качественно оценить его положение относительно рассматриваемой модели.
- 2) Необходимо создать натурную двумерную модель системы «зуб–периодонт» (движение исследуется в одной плоскости, силы прикладывают в той же плоскости). Зуб – твердое тело, периодонт – линейно-упругая среда. Внешняя граница периодонта должна быть неподвижна (рисунок 4.13)

- 3) Прикладывая к твердому телу силу  $\vec{F}$  поочередно в разных точках под разными углами (в исследуемой плоскости), оценить тип его движения. Определить набор прямых поступательного воздействия и точку их пересечения.
- 4) Определить положение центра сопротивления в плоскости.

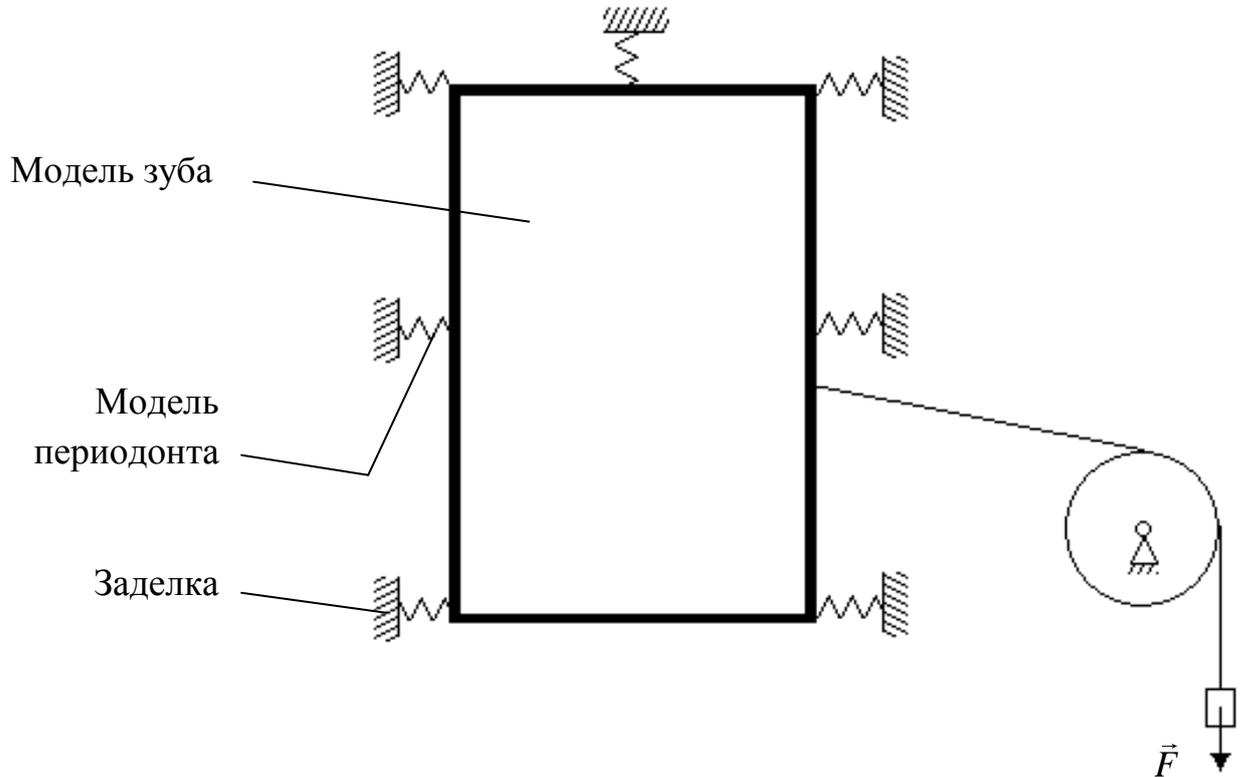


Рис. 4.13. Схема плоской экспериментальной модели «зуб–периодонт» под действием нагрузки

#### Материалы и методы

На рисунке 4.14 представлены модель зуба 1, модель периодонта 2. Для удовлетворения цели эксперимента не требовалось точного повторения геометрической формы реального зуба и величины податливости периодонта. Поэтому для упрощения создания модели была выбрана прямоугольная форма тела. Коронка в модели зуба не учитывается, так как важна лишь его погруженная в периодонт часть (корень зуба). Модель выполнена из строительной смеси

(цемент). Была подготовлена прямоугольная матрица, куда был залит раствор цемента. Далее форма застывала в течение 24 часов.

Модель периодонта была реализована набором пружинок одинаковой жесткости (из предположения, что периодонт является линейно-упругой средой). На стадии застывания модели твердого тела одним концом в него были установлены пружины, расположенные во фронтальной плоскости и направленные по нормали к границе зуба. После полного отверждения раствора, другой конец каждой пружины был неподвижно закреплен телом 3 (рисунок 4.14).

Из определения центра сопротивления следует, что все прямые поступательного воздействия пересекаются в одной точке. Таким образом, к разным точкам зуба, прикладывались силы в различных направлениях (лежащие в исследуемой плоскости).

Положение зуба до и после приложения нагрузки фиксировалось цифровой фотокамерой. Далее в программе фото-редакторе две фотографии накладывались друг на друга и оценивался тип движения, совершаемый зубом (сравнивалось взаимное положение контрольных линий). Если под действием приложенной силы зуб совершал поступательное движение (контрольные линии оказывались параллельны), то линия действия такой силы называлась прямой поступательного воздействия 4 (рисунок 4.13).

### Результаты и вывод

Анализируя набор прямых поступательного воздействия, стало видно, что они пересекаются в одной точке. Эта точка и является центром сопротивления, тем самым подтверждая его существование. Положение определено, как очень близкое к середине.

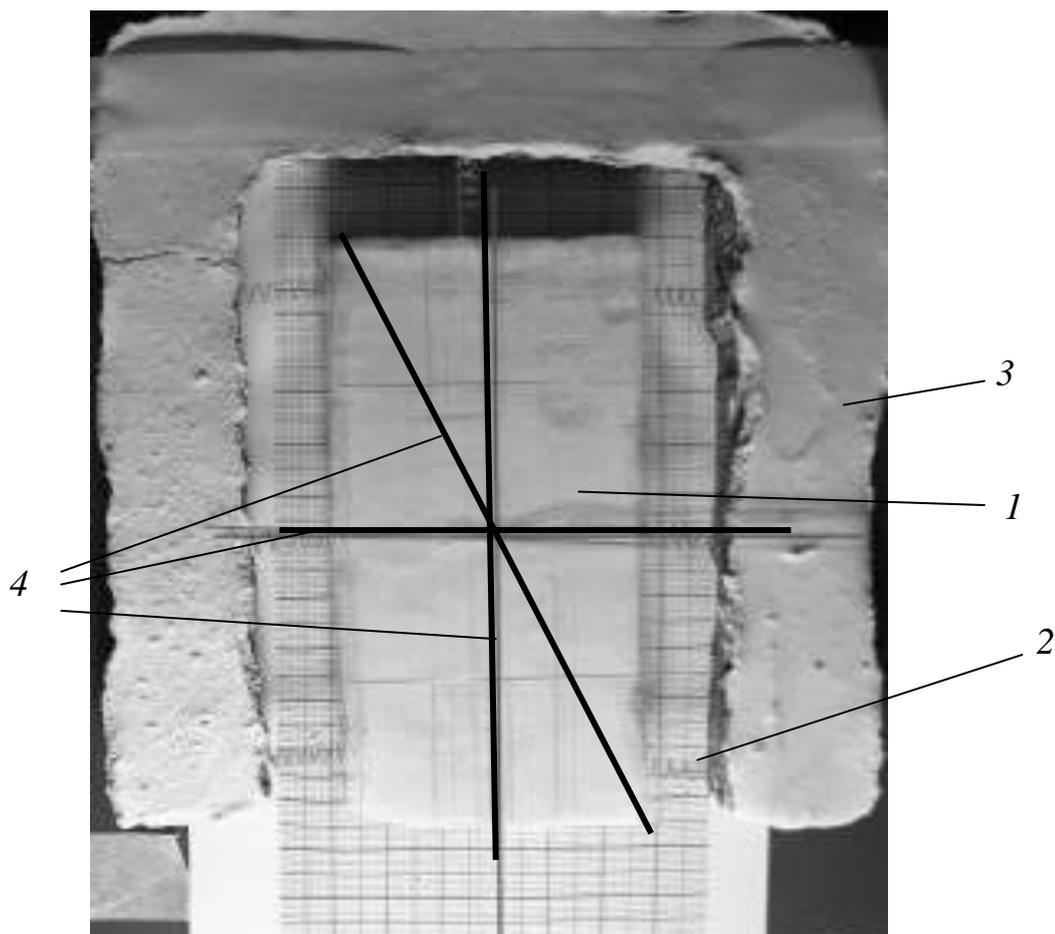


Рис. 4.14. Экспериментальная модель системы «зуб-периодонт» в плоской постановке: 1 – модель зуба, 2 – модель периодонта, 3 – заделка внешней границы периодонта, 4 – прямые поступательного воздействия

Далее аналогичным образом был осуществлен натурный эксперимент в трехмерной постановке.

### Планирование эксперимента 2

1) Цели эксперимента: убедиться в существовании области сопротивления, определить вид области сопротивления, присущего рассматриваемой модели, качественно оценить ее положение, относительно рассматриваемой модели.

2) Необходимо создать натурную трехмерную модель системы «зуб–периодонт»  
Зуб – твердое тело, периодонт – линейно-упругая среда. Внешняя граница периодонта должна быть неподвижна (рисунок 4.15) .

- 3) Прикладывая к твердому телу силу  $\vec{F}$  поочередно в разных точках под разными углами, оценить тип его движения. Определить набор прямых поступательного воздействия, оценить их взаимное расположение.
- 4) Определить положение области сопротивления, а также вид области сопротивления из введенной классификации, соответствующий исследуемой модели.

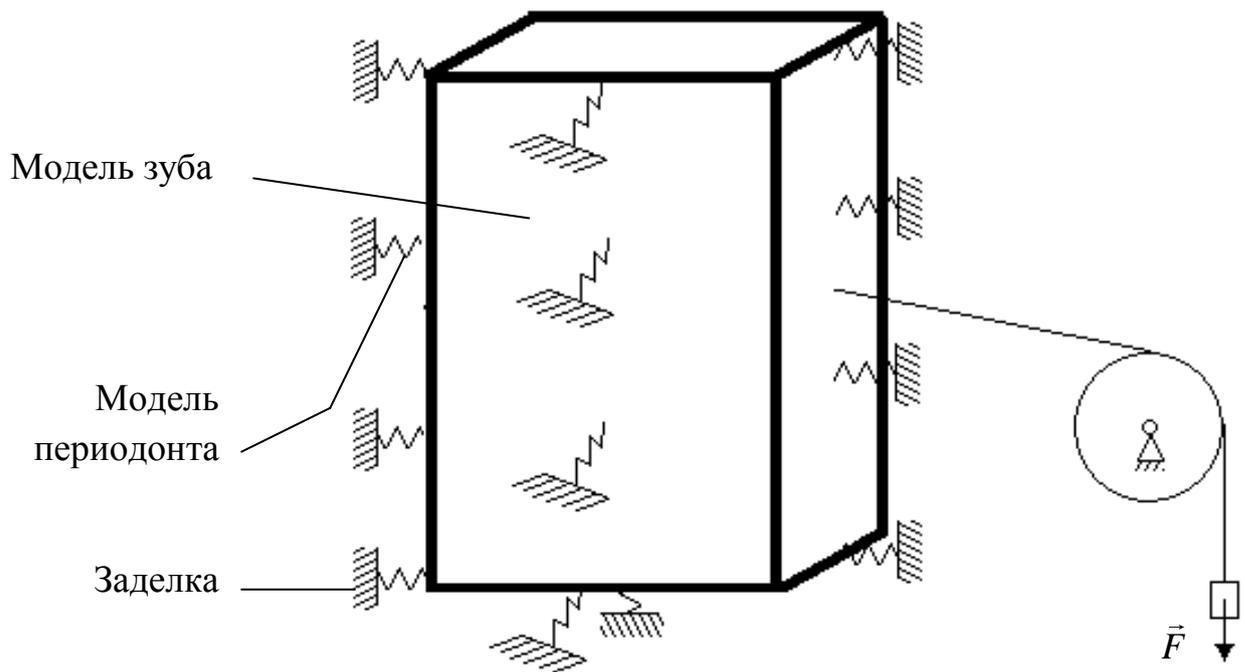


Рис. 4.15. Схема трехмерной модели «зуб–периодонт»  
под действием нагрузки

### Материалы и методы

На рисунке 4.16 представлены модель зуба, модель периодонта. Для удовлетворения цели эксперимента (аналогично первому эксперименту) не требовалось точного повторения геометрической формы реального зуба и величины податливости периодонта. Поэтому для упрощения создания модели была выбрана форма прямоугольного параллелепипеда. Такая форма тела была выбрана специально, так как не имеет оси симметрии. Поэтому, согласно теории,

единственной точки пересечения всех прямых поступательного воздействия (т.е. центра сопротивления) здесь быть не может.

Материал и процесс изготовления модели твердого тела пружинами с вставленными в него одним концом и закрепленными с другого конца аналогичен предыдущему эксперименту. Отличие заключается лишь в том, что пружины устанавливались во всех трех плоскостях (фронтальной (передней и задней стороне), сагиттальной (левой и правой стороне), поперечной (снизу)).

К разным точкам зуба прикладывались силы в различных направлениях. Положение зуба до и после приложения нагрузки фиксировалось тремя цифровыми фотокамерами в трех плоскостях. Далее в программе фото-редакторе две фотографии, соответствующие каждой плоскости, накладывались друг на друга и оценивался тип движения, совершаемый зубом. Если под действием приложенной силы, зуб совершал поступательное движение во всех трех плоскостях, то линия действия такой силы называлась прямой поступательного воздействия (рисунок 4.16).

### Результаты и вывод

Анализируя полученный набор прямых поступательного воздействия, стало видно, что они, действительно, не пересекаются в одной точке, т.е. центра сопротивления для данной модели не существует. Вместо него здесь имеется две точки, являющиеся точками пересечения двух взаимно перпендикулярных плоских пучков прямых поступательного воздействия. Они являются областью сопротивления 4-го вида, соответствующей для моделей, которые обладают двумя плоскостями симметрии. Эти точки локализованы в промежутке от середины до нижнего края корня на общей продольной оси. Точка пересечения пучка, лежащего во фронтальной плоскости, находится ниже той, что является точкой пересечения пучка, принадлежащего сагиттальной плоскости.

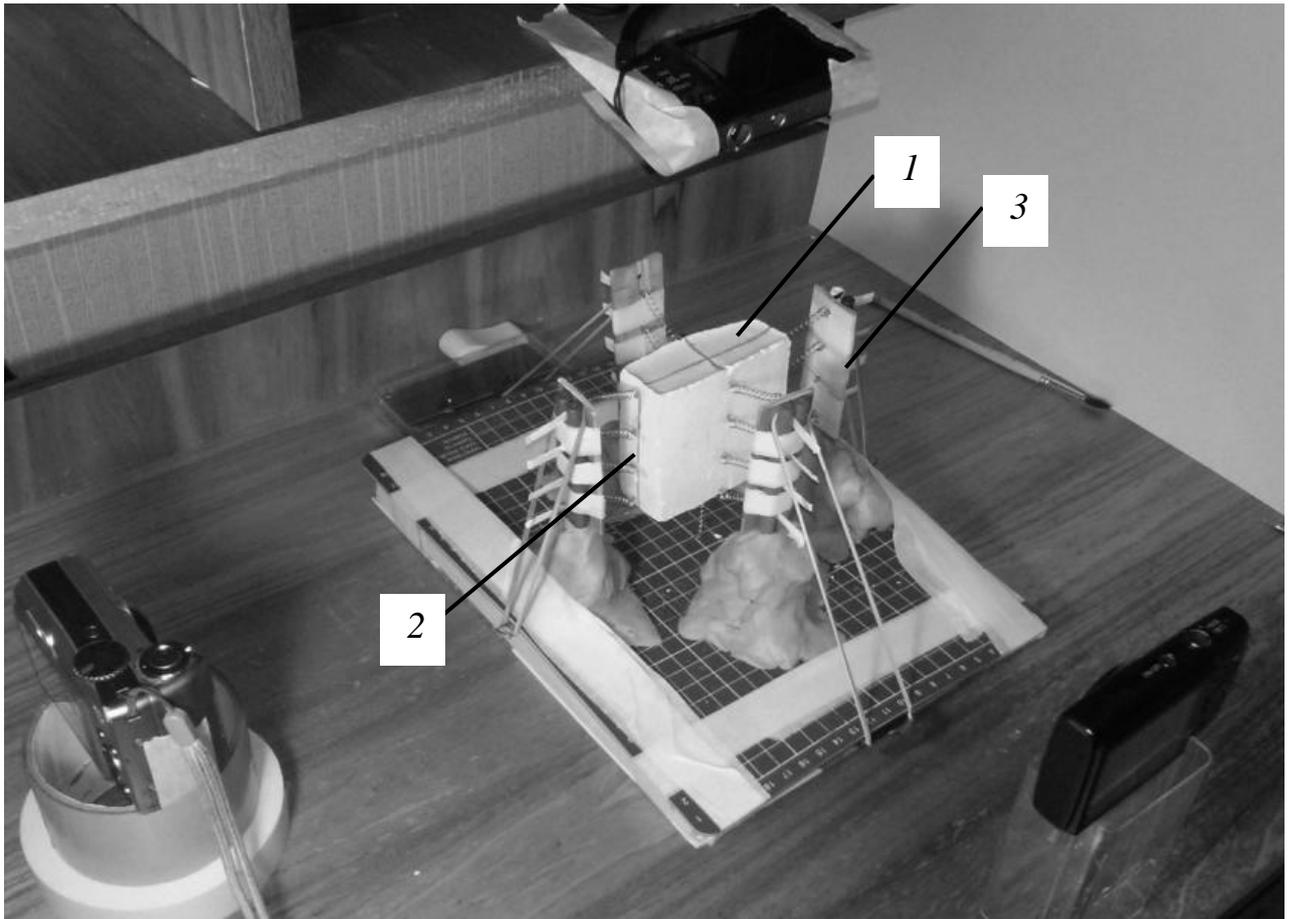


Рис. 4.16. Экспериментальная модель системы «зуб-периодонт» в трехмерной постановке: 1 – модель зуба, 2 – модель периодонта, 3 – заделка внешней границы периодонта,

### **Выводы по главе 4**

1. Развита методика определения вида и положения области сопротивления (и как частного случая – центра сопротивления).
2. Проведены численные эксперименты, в результате которых удалось установить зависимость определенного вида области сопротивления от геометрии и механических свойств исследуемой модели.
3. Верифицирован разработанный на основе понятия «область сопротивления зуба» подход к управлению перемещением зуба в рамках костной лунки путем согласования результатов натуральных и численных экспериментов и работ других авторов.

*Основная цель лечения зубочелюстных аномалий должна заключаться не в бесконечных поисках новых аппаратов, а в управлении естественными силами организма для перестройки кости, в применении малых надежных сил, близких по своему действию к биологическим раздражителям.*

– С.С. Райзман,  
д-р мед. наук, ортодонт

## ГЛАВА 5

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ОРТОДОНТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

#### **5.1. Постановка задачи управления перемещением зуба на начальной стадии ортодонтического лечения**

Рассматривается типичный случай обращения пациента с зубочелюстной аномалией к врачу для ее исправления. В начале планирования лечения ортодонт должен определить вид патологии, механизм ее развития, способность организма к росту. Далее врач должен решить, куда переместить каждый из неправильно стоящих зубов и какое положение он должен занять. Затем, приступая к осуществлению плана лечения, встает следующий вопрос: как реализовать запланированное лечение, как переместить зубы в новое желаемое положение? Другими словами, куда и как необходимо приложить нагрузку к зубу, какая нагрузка будет оптимальной? Под оптимальной в данном случае понимается

максимальная нагрузка, не приводящая к перенапряженности окружающих зуб тканей.

Ввиду индивидуальных особенностей организма каждого пациента практикующий врач-ортодонт не может применять универсальное решение в разных случаях. Каждый раз необходимо подходить к решению клинических ситуаций с учетом характеристик данного пациента, в чем на помощь врачам приходят современное компьютерное оборудование и специальное программное обеспечение, в основе которого лежит биомеханическая теория.

В соответствии с этими обстоятельствами, задача ортодонтии может быть сформулирована как задача теории управления. Для исследования перемещения зуба в рамках костной лунки используется развитая теория области сопротивления зуба, с помощью которой можно получить ответы на вопросы об ориентации и величине ортодонтической нагрузки, которая необходима для определенного типа движения.

Толщина периодонта (по нормали к поверхности корня) принимается равной по всей длине корня зуба. Допустимые уровни перемещения зуба: при поступательном движении  $h = 0,07$  мм (порядка 30 % от толщины периодонта); угол поворота зуба  $\mu = 2^\circ$ .

Критерий оптимизации выбирается в соответствии со следующей формулировкой: разница между запланированным (идеальным) начальным перемещением зуба  $\vec{u}^*(\vec{r})$  и рассчитываемым (реальным)  $\vec{u}(\vec{r})$  должна быть минимальна:

$$\Phi = \int [(\vec{u}^*(\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r}))]^2 dV \rightarrow \min, \quad \vec{r} \in V, \quad (5.1)$$

$$\vec{u}^*(\vec{r}) = \vec{\rho}^* + \vec{\phi}^* \times \vec{r}, \quad \vec{r} \in V, \quad (5.2)$$

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{\rho} + \vec{\phi} \times \vec{r}, \quad \vec{r} \in V, \quad (5.3)$$

где  $V$  – область, занимаемая корнем зуба;  $\vec{\rho}^*$  – вектор запланированного перемещения полюса,  $\vec{\rho}^* = \{x^*, y^*, z^*\}^T$ ;  $\vec{\varphi}^*$  – вектор запланированного малого угла поворота зуба вокруг полюса,  $\vec{\varphi}^* = \{\varphi_x^*, \varphi_y^*, \varphi_z^*\}^T$ ;  $\vec{\rho}$  – вектор рассчитываемого перемещения полюса,  $\vec{\rho} = \{x, y, z\}^T$ ;  $\vec{\varphi}$  – вектор рассчитываемого малого угла поворота зуба вокруг полюса,  $\vec{\varphi} = \{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}^T$ .

Величина нагрузки выбирается с таким ограничением, чтобы напряжения в периодонте  $\sigma_i$ , установившиеся в результате ее действия, не превосходили давления крови в капиллярах периодонта ( $\sigma_i^{don}$ ), значение которого в среднем равно 2,7 кПа [3]

$$\sigma_i < \sigma_i^{don}, \quad \forall \vec{r}. \quad (5.6)$$

По вышеописанной методике определяется положение центра/области сопротивления, в соответствии с которым ориентируется система сил. Значение величины системы сил находятся из решения целевой функции (5.1). Далее полученное значение нагрузки проверяется на соответствие ограничению по напряжениям (5.6) с помощью решения задачи определения напряженно-деформированного состояния периодонтальной связки.

Уравнения, описывающие поведение упругой среды

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = 0, \quad (5.7)$$

$$\vec{\sigma} = \tilde{C} \cdot \tilde{\varepsilon}, \quad (5.8)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T). \quad (5.9)$$

Граничные условия:

1. Система ортодонтических сил прикладывается к коронке зуба

$$\vec{R} \Big|_{S_R} = \vec{R}, \quad \vec{M} \Big|_{S_R} = \vec{M}.$$

2. Внешняя граница периодонта закреплена (моделируя соединение с костью):  $\vec{u}|_{S_U} = 0$  (рисунок 5.1).

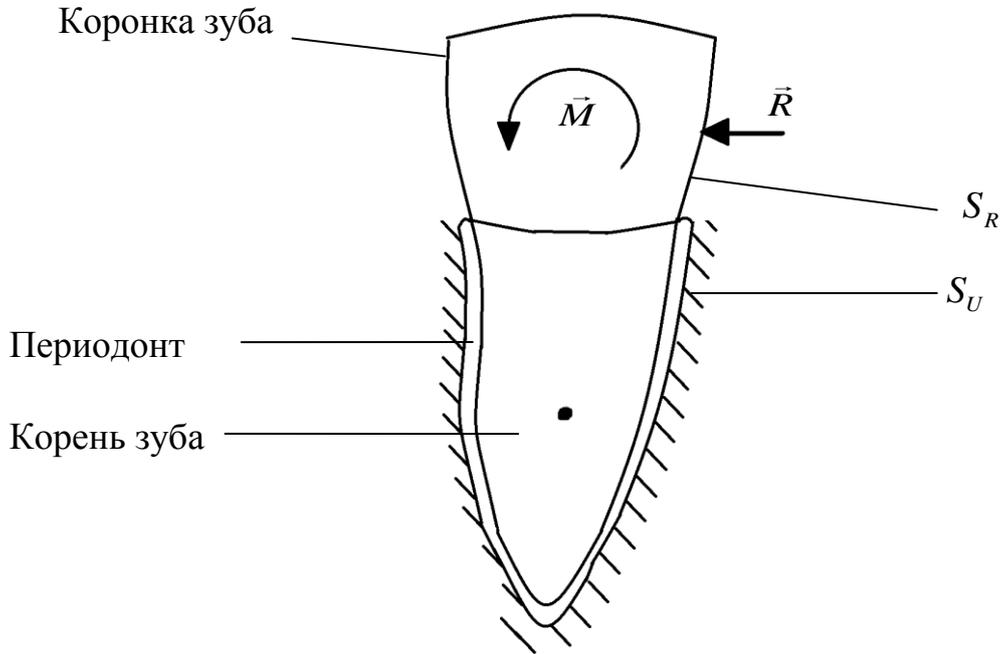


Рис. 5.1. Схема модели системы «зуб–периодонт»

## 5.2. Решение задачи

Решение данной задачи было проведено на примере трех случаев, которые являются распространенными в клинической практике: диастема (промежуток между двумя верхними резцами), экстррузия зуба (зуб, недостаточно погруженный в альвеолярный отросток), конвергенция зубов (аномальный наклон зуба). В результате получены значения равнодействующей ортодонтической нагрузки и момента пары сил необходимых для запланированного перемещения в рамках костной лунки.

Для этих видов движения существуют рекомендательные значения ортодонтической нагрузки, которые были получены в ходе натурных экспериментов (см. таблицу 1.1). Они могут быть использованы как допустимые, определяющие некоторое поле значений, с которыми можно сравнить результаты, полученные из решения задачи.

Для решения задач определения напряженно-деформированного состояния в периодонте был использован метод конечных элементов. Создана пространственная геометрическая модель системы «зуб-периодонт», приближенная к реальной форме (имеющая две плоскости симметрии, т.е. такая, что «центра сопротивления зуба» не существует). Механические свойства элементов системы «зуб-периодонт» приняты следующие [116] (см. таблицу 5.1). Ортодонтическая нагрузка моделировалась с помощью сосредоточенной силы, сосредоточенного момента, приложенных к коронке зуба. По внешней границе периодонта были исключены перемещения, поверхности со стороны десен считались свободными от нагрузок.

Таблица 5.1.

#### Механические свойства

Материал	Модуль Юнга, МПа	Коэффициент Пуассона
Зуб (в целом)	20000	0,3
Периодонт	0,68	0,49

#### 5.2.1. Решение задачи на примере исправления диастемы

Диастема подразумевает наличие промежутка между двумя передними верхними резцами (рисунок 5.2, а). Соответственно лечение данной аномалии заключается в устранении этого промежутка путем прикрепления к зубам корректирующей конструкции. Под действием ортодонтической нагрузки зубы стремятся приблизиться друг к другу, перемещаясь поступательно и постепенно сокращая расстояние между собой. Для реализации такого перемещения необходимо, чтобы линия действия равнодействующей ортодонтических сил проходила через точку области сопротивления (рисунок 5.2, б). Из-за того, что брекет-система может быть прикреплена лишь к коронке зуба, т.е. сила может быть приложена только в этом месте, доступ к центру сопротивления зуба может быть обеспечен добавлением пары сил, реализуя принцип параллельного переноса

силы. Положение и вид области сопротивления рассчитывается по разработанной методике.

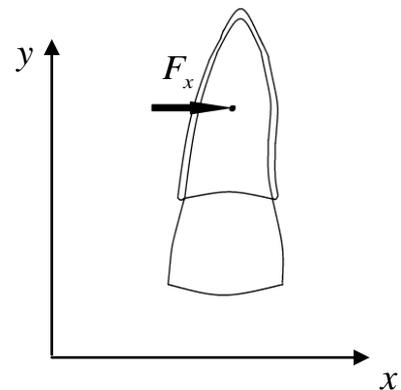
Учитывая, что формулы (5.2), (5.3) в данном случае принимают вид  $u^*(r) = \rho^* = x^*$  и  $u(r) = \rho = \alpha_{11} F_x$  соответственно, то после подстановки их в (5.1) целевая функция принимает вид

$$\Phi = \int [x^* - \alpha_{11} F_x]^2 dV \rightarrow \min. \quad (5.10)$$

При подставлении индивидуальных значений толщины  $x^* = h = 0,07$  мм и соответствующего рассматриваемому перемещению вдоль оси  $x$  коэффициента податливости периодонта  $\alpha_{11} = 0,053$  мм/Н (который определяется по разработанному в главе 4 алгоритму) величина системы силы получается равной  $F_x = 1,3$  Н,  $F_y = 0$ ,  $M = 0$ .



а



б

Рис. 5.2. Диастема: а – изображение аномалии; б – схема исправления

Далее в программе, реализующей метод конечных элементов (ANSYS), проверяется условие (5.6) (рисунок 5.3), путем моделирования системы «зуб–периодонт» и приложения рассчитанной нагрузки. Получающиеся напряжения в периодонте  $\sigma_i$  не должны превышать допустимых значений  $\sigma_i^{don}$ . В противном случае нагрузка должна быть уменьшена во столько раз, во сколько полученные напряжения превышают допустимые (в виду линейности задачи).

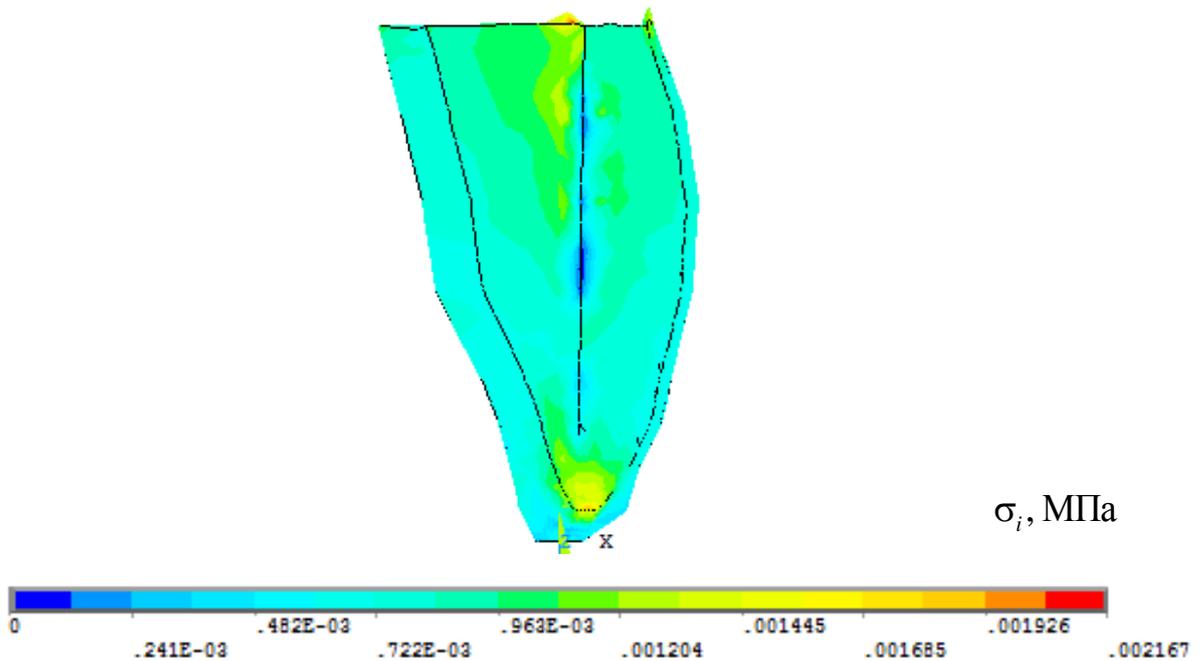


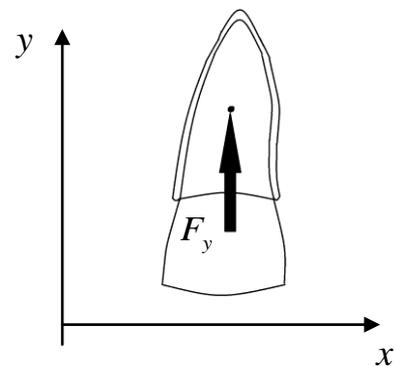
Рис. 5.3. Поле интенсивности напряжений в периодонте

### 5.2.2. Решение задачи на примере исправления экстррузии зуба

В следующем примере рассмотрена ситуация, при которой зуб выпирает из альвеолярного отростка (экстррузия) (рисунок 5.4, *а*). Лечение данной аномалии заключается в том, чтобы осуществить такую систему сил, под действием которой удастся углубить этот зуб в кость, т.е. поступательно переместить его вдоль продольной оси, исключая любое вращение (рисунок 5.4, *б*). Для этого линия действия равнодействующей системы сил должна проходить через центр/область сопротивления.



*а*



*б*

Рис. 5.4. Экстррузия зуба: *а* – изображение аномалии; *б* – схема исправления

Учитывая, что формулы (5.2), (5.3) в данном случае принимают вид  $u^*(r) = \rho^* = y^*$  и  $u(r) = \rho = \alpha_{22} F_y$  соответственно, то после подстановки их в (5.1) целевая функция принимает следующий вид

$$\Phi = \int [y^* - \alpha_{22} F_y]^2 dV \rightarrow \min. \quad (5.11)$$

При подстановке индивидуальных значений толщины  $y^* = h = 0,07$  мм и соответствующего рассматриваемому перемещению вдоль оси  $y$  коэффициента податливости периодонта  $\alpha_{22} = 0,148$  мм/Н (который определяется по разработанному в главе 4 алгоритму) величина силы получается равной  $F_y = 0,47$  Н,  $F_x = 0$ ,  $M = 0$ .

Далее в программе, реализующей метод конечных элементов (ANSYS), проверяется условие (5.6) (рисунок 5.5).

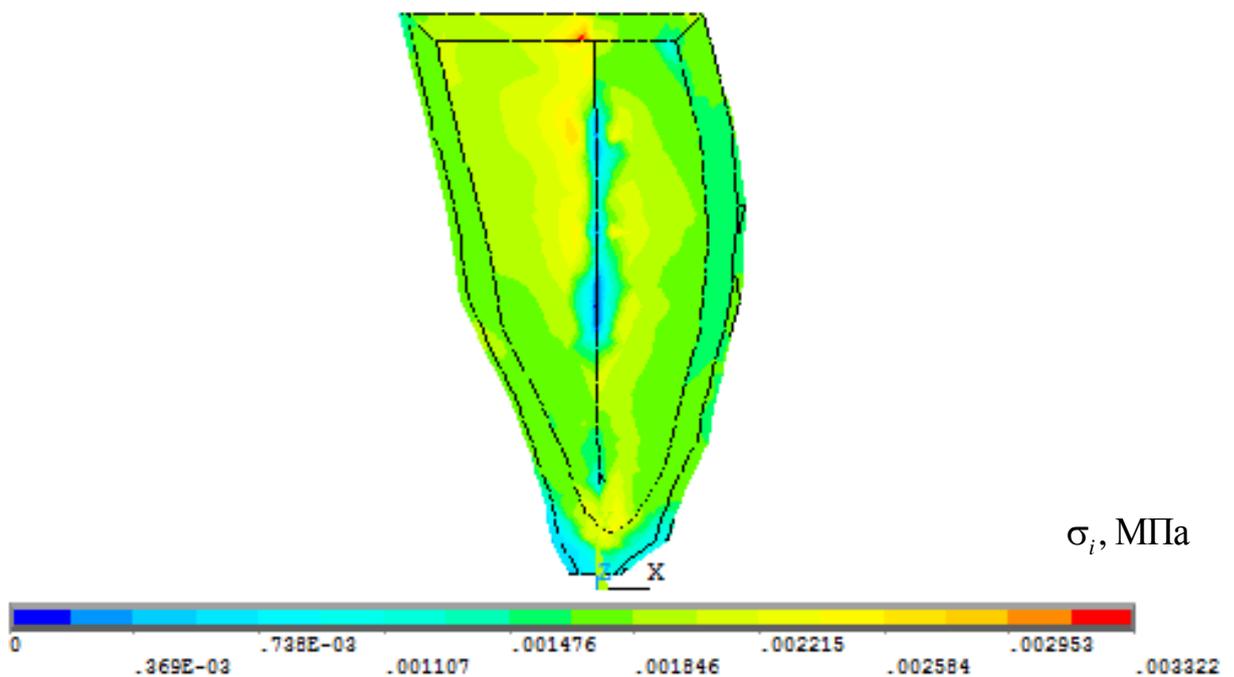


Рис. 5.5. Поле интенсивности напряжений в периодонте

### 5.2.3. Решение задачи на примере исправления конвергенции зубов

Еще одна из часто встречающихся зубочелюстных аномалий – наклон зуба (конвергенция), которая проявляется в результате синдрома Попова–Годдона, травм, неправильно сформировавшегося прикуса (рисунок 5.6, *а*) [39]. Для восстановления правильного положения необходимо приложить такую нагрузку, под действием которой бы осуществлялся поворот зуба. Пользуясь свойствами центра/области сопротивления, этот тип движения может быть обеспечен путем приложения пары сил. Таким образом тело будет совершать вращение вокруг оси поворота (рисунок 5.6, *б*).

Учитывая, что формулы (5.2), (5.3) в данном случае принимают вид  $u^*(r) = \varphi^* r$  и  $u(r) = \varphi r = \beta_{33} M r$  соответственно, то после подстановки их в (5.1) целевая функция принимает следующий вид

$$\Phi = \int [(\varphi^* - \beta_{33} M) r]^2 dV \rightarrow \min. \quad (5.12)$$

При подстановке значений поворота зуба на малый угол  $\varphi_z^* = \mu = 0,035$  рад и соответствующего рассматриваемому повороту в плоскости  $xu$  коэффициента податливости периодонта  $\beta_{33} = 0,0786$  рад/Н·см (который определяется по разработанному в главе 3 алгоритму) величина момента пары сил получается равной  $M = 0,44$  Н·см,  $F_x = F_y = 0$ .

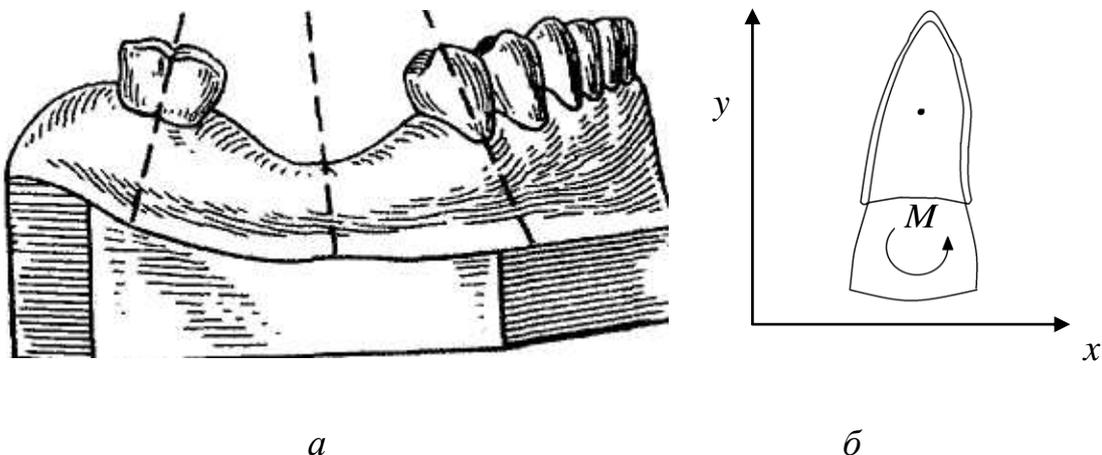


Рис. 5.6. Конвергенция зубов: *а* – изображение аномалии;  
*б* – схема исправления

Далее в программе, реализующей метод конечных элементов (ANSYS), проверяется условие (5.6) (рисунок 5.7).

При последующем сравнении полученных значений сил и момента пары сил с соответствующими экспериментальными данными (см. таблицу 1.1) видно, что указанные величины лежат в близких пределах.

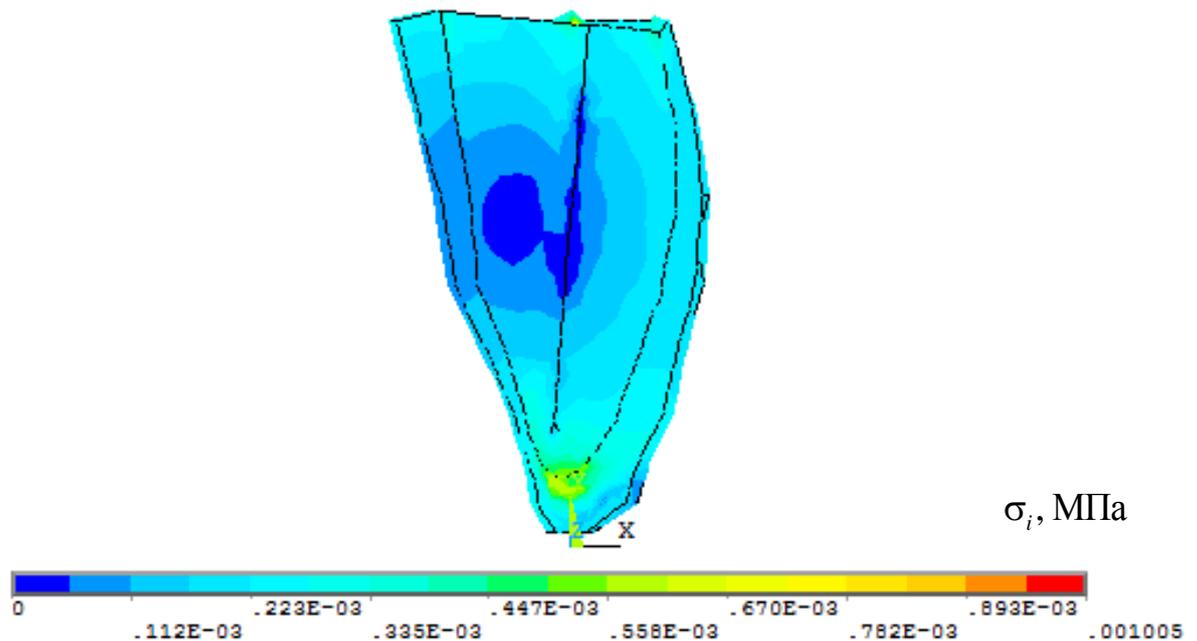


Рис. 5.7. Поле интенсивности напряжений в периодонте

### 5.3. Рекомендации для практики. Перспективы дальнейшего развития работы.

Данная работа является шагом на пути к осуществлению биомеханического подхода к ортодонтическому лечению. Рассмотрена начальная фаза перемещения зуба (в рамках костной лунки, без учета костной перестройки).

Пользуясь разработанной биомеханической моделью движения зуба под действием нагрузки на основе «центра/области сопротивления» можно объективизировать методику установки и настройки ортодонтического аппарата:

- теоретически обосновать место крепления брекета, учитывая форму, положение, топографию зуба;
- получить количественное значение оптимальной ортодонтической нагрузки, создаваемой ортодонтическим аппаратом для реализации запланированного перемещения зуба в рамках костной лунки;

Перспективы развития данной работы заключаются в том, чтобы рассмотреть длительное перемещение зуба с учетом перестройки костной ткани, а также исследовать возможность применения понятий «центра/области сопротивления зуба» в существующей форме или внести необходимые изменения в теорию при исследовании длительного перемещения зуба.

## **Выводы по главе 5**

1. Предложена математическая постановка задачи определения оптимальной ортодонтической нагрузки для перемещения зуба в рамках костной лунки с использованием понятий «центра/области сопротивления». Введен критерий оптимизации.
2. Поставленная задача решена на примерах, которые соответствуют случаям из клинической практики. Решение получено в виде определенных величин сил и моментов пары сил, а также направления вектора равнодействующей системы сил и места его приложения.
3. Сформулированы практические рекомендации, определены перспективы дальнейшего развития работы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Анализ литературных источников позволил сформулировать идею необходимости разработки биомеханического сопровождения ортодонтического лечения зубочелюстных аномалий. Данная работа является шагом в сторону развития этой идеи, а именно исследована начальная стадия движения зуба (в рамках костной лунки), на которой существует опасность перегрузки окружающих его тканей.

2. Введено новое фундаментальное понятие «область сопротивления зуба», классификация ее видов, изучены свойства нового понятия, создана методика определения вида и положения области сопротивления в зависимости от геометрических и механических параметров системы «зуб–периодонт». На основе этого нового понятия разработана биомеханическая модель движения зуба.

3. Верификация разработанной модели на основании проведенного натурального эксперимента, сравнение с результатами работ других авторов и анализа клинических данных позволяют судить о ее достоверности.

4. Осуществлена постановка задачи определения оптимальной системы сил, пользуясь понятиями «центра/области сопротивления». Сформулирован критерий оптимизации и получено решение на трех примерах, соответствующих случаям из клинической практики.

5. Разработанный подход, методика и программная реализация биомеханического моделирования процесса перемещения зуба на основе «центра/области сопротивления» позволяют объективизировать эмпирические методы ортодонтии, а именно теоретически обосновать выбор оптимального варианта приложения ортодонтической нагрузки с количественной оценкой ее величины с учетом формы, положения, топографии зуба. Это необходимо для контролируемого перемещения зубов и возможности прогнозирования результатов лечения, избегания нежелательных эффектов.

6. Практическая ценность диссертации подтверждена актом внедрения разработанной методики в практику подготовки специалистов Пермского государственного медицинского университета (специальность «Ортопедическая стоматология»).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Аболмасов, Н. Г. Ортодонтия / Н. Г. Аболмасов, Н. Н. Аболмасов. – М. : МЕДпресс-информ, 2008. – 424 с.
2. Анатомия зубов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://www.nedug.ru/library/строение\\_и\\_пищеварение\\_пищеварительной\\_системы/Анатомия\\_зубов](http://www.nedug.ru/library/строение_и_пищеварение_пищеварительной_системы/Анатомия_зубов) (дата обращения 01.06.2016).
3. Астахов, Н. А. Ортопедическая стоматология / Н. А. Астахов, Е. М. Гофунг, А. Я. Катц. – Л. : Медгиз, 1940.
4. Балин, В. Н. Практическая периодонтология / В. Н. Балин, А. К. Иорданишвили, А. М. Ковалевский. – СПб. : Питер, 1995. – 255 с.
5. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1976.
6. Беляков, Ю. А. Стоматологические проявления наследственных болезней и синдромов / Ю. А. Беляков. – М. : Медицина, 1993. – 254 с.
7. Боровский, Е. В. Терапевтическая стоматология / Е. В. Боровский. – М. : Техмет, 1997. – С. 29-45.
8. Боровский, Е. В. Терапевтическая стоматология / Е. В. Боровский, М. И. Грошиков, В. К. Патрикеев. – М.: Медицина, 1972. – 383 с.
9. Босяков, С. М. Определение жесткости костной ткани при поступательных перемещениях и поворотах корня зуба / С. М. Босяков, К. С. Юркевич. – Российский журнал биомеханики. – 2010. – Т. 14, № 2. – С. 37–46.
10. Босяков, С. М. Определение силовых факторов, развиваемых ортодонтическим аппаратом для расширения верхней челюсти / С. М. Босяков, Г. И. Михасев, К. С. Юркевич. – Российский журнал биомеханики. – 2010. – Т. 14, № 1. – С. 74–85.

11. Босьяков, С. М. Математическое моделирование начальных перемещений корня зуба в костной ткани под действием мгновенной статической нагрузки / С. М. Босьяков, К. С. Юркевич. – Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 3. – С. 27–36.
12. Босьяков, С. М. Области сопротивления для модели однокоренного зуба: различные случаи симметрии / С. М. Босьяков, А. Ф. Мселати. – Российский журнал биомеханики. – 2015. – Т. 19, № 3. – С. 258–272.
13. Бусыгина, М. В. Болезни зубов и слизистой оболочки полости рта / М. В. Бусыгина. – М. : Медицина, 1967. – 342 с.
14. Величина сил ортодонтических аппаратов и морфологические изменения при их применении [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [www.mysurgeon.ru/baza\\_znaniy/stomatologiya\\_657](http://www.mysurgeon.ru/baza_znaniy/stomatologiya_657) (дата обращения 10.01.2016).
15. Величко, Л. С. Ортодонтическое лечение и протезирование при недоразвитии верхней челюсти в сформированном прикусе: дис. ... канд. мед. наук / Величко Леонид Степанович – 1965. – 146 с.
16. Виртуальные люди помогут предсказать лечение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://medbooking.com/blog/post/virtualnyje-lyudi-pomogut-predskazaty-lechenije> (дата обращения 10.06.2016).
17. Гасимова, З. В. Взаимосвязь зубочелюстно-лицевых аномалий с ротовым дыханием, нарушенной осанкой, способы комплексного лечения / З. В. Гасимова // Стоматология детского возраста и профилактика. – 2004. – Т. 3, № 3, 4. – С. 59–62.
18. Гиляревский, С. А. Современные подходы к диагностике и профилактике прогрессирования начальных стадий атеросклероза сонных артерий / С. А. Гиляревский // Трудный пациент. – 2005. – № 3.
19. Губская, А. Н. Дозирование ортодонтической нагрузки при перемещении зубов / А. Н. Губская, И. В. Золотухин, В. А. Корешков. – Киев, 1982. – 41 с.

20. Данилова, М. А. Этиология зубочелюстных аномалий. Профилактика в различных возрастных периодах: метод. Рекомендации / М. А. Данилова, П. В. Ишмурзин, Ю. С. Халова. – Пермь, 2006.
21. Еловицова, А. Н. Биомеханические основы лечения зубочелюстных аномалий / А. Н. Еловицова, М. Ю. Няшин, Е. Ю. Симановская, Л. М. Гвоздева, Ю. И. Няшин // Стоматология. – 2002. – № 3. – С. 51–54.
22. Калвелис, Д. А. Ортодонтия. Зубочелюстные аномалии в клинике и эксперименте / Д. А. Калвелис. – Л.: Медицина, 1964. – 238 с.
23. Калмин, О. В. Аномалии развития органов и частей тела человека / О. В. Калмин, А. В. Михайлов, С. А. Степанов, Л. А. Лернер. – Саратов: Изд-во Саратовского медицинского ун-та, 1999. – 184 с.
24. Каплан, М. Л. Роль локальных нарушений гемодинамики при патологической извитости сонных артерий в развитии сосудистой мозговой недостаточности / М. Л. Каплан, Д. Н. Бонцевич, С. В. Шилько // Российский журнал биомеханики. – 2015. – Т. 19, № 1. – С. 8–24.
25. Копейкин, В. Н. Руководство по ортопедической стоматологии / В. Н. Копейкин. – М. : Медицина, 1993. – 494 с.
26. Кудрин, И. С. Анатомия органов полости рта / И. С. Кудрин. – М. : Медицина, 1968. – 212 с.
27. Куцевляк, В. И. Ортодонтия: Учебное пособие / В. И. Куцевляк, А. В. Самсонов, С. А. Скляр. – 2005.
28. Кучумов, А. Г. Биомеханический подход к моделированию билиарной системы как шаг в направлении к построению виртуальной модели физиологии человека / Ю. И. Няшин, В. А. Самарцев, В. А. Гаврилов, М. Менар // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 2 – С. 32–48.
29. Лурье, А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 824 с.

30. Маркова, М. В. Анализ параметров верхних дыхательных путей у пациентов с дистальной окклюзией зубных рядов до и после ортодонтического лечения с применением несъемных телескопических гибридных аппаратов / М. В. Маркова, Л. В. Польша, Л. С. Персин, О. Л. Линева, М. П. Душенкова // Ортодонтия. – 2015. – № 2. – С. 29–34.
31. Михайлов, С. С. Анатомия человека / С. С. Михайлов. – М. : Медицина, 1973. – 584 с.
32. Няшин, М. Ю. Математическая модель периодонта: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Няшин Михаил Юрьевич. – Пермь, 1999.
33. Няшин, Ю. И. О развитии междисциплинарных медицинских исследований в области стоматологии в Перми / Ю. И. Няшин // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 2015. – С. 2810–2811.
34. Няшин, Ю. И. Взаимодействие зубочелюстной системы с другими системами человеческого организма в рамках концепции виртуального физиологического человека / Ю. И. Няшин, А. Н. Еловицова, Я. А. Коркодинов, В. Н. Никитин, А. В. Тотмянина // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 3. – С. 8–26.
35. Няшин, Ю. И. Компьютерная биомеханика и медицина XXI века / Ю. И. Няшин, В. А. Лохов // I Международная конференция по реологии, 10-11 октября 2015 г., Кутаиси, Грузия. – 2015. – С. 48–49.
36. Няшин, Ю. И. Височно–нижнечелюстной сустав человека как элемент зубочелюстной системы: биомеханический анализ / Ю. И. Няшин, В. М. Тверье, В. А. Лохов, М. Менар // Российский журнал биомеханики. – 2009. – Т. 13, № 4. – С. 7–21.

37. Няшин, Ю. И. Зубочелюстная система как элемент виртуального физиологического человека / Ю. И. Няшин, В. М. Тверье, М. Менар // *Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. – 2011. – № 4 (5). – с. 2401–2403.
38. Оборин, Л. Ф. О механизме влияния биомеханических стоматологических факторов на качество и продолжительность жизни людей / Л. Ф. Оборин, Ю. И. Няшин, В. Н. Никитин, А. В. Райков // *Российский журнал биомеханики*. – 2010. Т. 14, № 4. – С. 70–86/
39. Оборин, Л. Ф. Взаимодействие биомеханических и гемодинамических факторов дисфункции височно-нижнечелюстного сустава врожденного и приобретенного происхождения / Л. Ф. Оборин, Е. С. Патлусова // *Российский журнал биомеханики*. – 2009. – Т. 13, № 4. – С. 94–107.
40. Олейник, Е. А. Скученное положение зубов – фактор риска развития кариеса и заболеваний пародонта / Е. А. Олейник // *Институт стоматологии*. – 2007. – Т. 1, № 34. – С. 84–85.
41. Осипенко, М. А. О соотношении понятий «центр сопротивления зуба» и «центр жесткости сечения балки» / М. А. Осипенко, Ю. И. Няшин, М. Ю. Няшин // *Российский журнал биомеханики*. – 2009. – Т. 13, № 3. – С. 89–93.
42. Пальцев, М. А. Персонафицированная медицина / М. А. Пальцев // *Наука в России*. – 2011. – № 1. – С. 12–17.
43. Пальцев, М. А. ОРГЗДРАВ: новости, мнения, обучение / М. А. Пальцев, Н. Н. Белушкина, Е.А.Чабан. – 2015. – № 2. – С. 48–54.
44. Персин, Л. С. Ортодонтия. Диагностика и лечение зубочелюстных аномалий: руководство для врачей / Л. С. Персин. – М. : Медицина, 2004. – 360 с.
45. Проффит, У. Р. Современная ортодонтия / У. Р. Проффит. – М. : МЕДпресс-информ, 2008. – 560 с.

46. Пэттен, Б. М. Эмбриология человека / Б. М. Пэттен. – М. : Медгиз, 1959. – 768 с.
47. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1979.
48. Ряховский, А. Н. Биомеханика шинирования зубов / А. Н. Ряховский, А. М. Хлопова // Панорама ортопедической стоматологии. – 2004. – № 1. – С. 18–28.
49. Селянинов, А. А., Тотьмянина А. В., Подгаец Р. М. Биомеханическое сопровождение коррекции зубного ряда с применением эластопозиционеров / А. А. Селянинов, А. В. Тотьмянина, Р. М. Подгаец // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, №1. – С. 57–79.
50. Сперанский, В. С. Избранные лекции по анатомии / В. С. Сперанский. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1993. – 424 с.
51. Тверье, В. М. Механический фактор развития и функционирования зубочелюстной системы человека / В. М. Тверье, Е. Ю. Симановская, Ю. И. Няшин // Российский журнал биомеханики. – 2005. – Т. 9, № 2. – С. 34–42.
52. Фадеев, Р. А. Кудрявцева О. А. Особенности диагностики и реабилитации пациентов с зубочелюстными аномалиями, осложненными заболеваниями височно-нижнечелюстных суставов и жевательных мышц (Ч. 2) / Р. А. Фадеев, О. А. Кудрявцева // Институт стоматологии. – 2008. – № 4. – С. 20–21.
53. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003.
54. Хорошилкина, Ф. Я. Руководство по ортодонтии / Ф. Я. Хорошилкина. – М. : Медицина, 1999. – 797 с.
55. Чуйко, А. Н., Шинчуковский И. А. Биомеханика в стоматологии: монография / А. Н. Чуйко, И. А. Шинчуковский. – Харьков: Форт, 2010. – 468 с.

56. Шварц, А. Д. Биомеханика и окклюзия зубов / А. Д. Шварц. – М. : Медицина, 1994. – 208 с.
57. Шилько, С. В. Биомеханический анализ периодонтальной связки. часть 1 / С. В. Шилько // Российский журнал биомеханики. – 2003. – Т. 7, № 3. – С. 29–34.
58. Шмурак, М. И. Биомеханическое моделирование естественного и искусственного вскармливания детей раннего возраста / М. И. Шмурак // Автореферат на соискание степени канд. физ.-мат. н. – Саратов, 2009.
59. Юркевич, К. С. Биомеханическое моделирование напряженно-деформированного состояния системы зуб–периодонт при ортодонтическом лечении / К. С. Юркевич: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Минск, 2012.
60. Antoszewska, J. Biomechanics of Tooth-Movement: Current Look at Orthodontic Fundamental., Principles in Contemporary Orthodontics / J. Antoszewska, N. Küçükkeleş. – InTech, 2011. – 584 p.
61. Bica, C. Experimental Model for Orthodontic Tooth Movement / C. Bica, L. C. Brezeanu, M. Muji // IFMBE Proceedings. – 2009. – Vol. 26. – P. 387–390.
62. Bosiakov, S. The calculation of teeth roots displacement which appears during orthodontical treatment / S. Bosiakov, K. Yurkevich, A. Dosta // World Congress on Medical Physics and Biomedical Engineering 7-12 September. – Munich, 2009.
63. Bourauel, C. Simulation of orthodontic tooth movements / C. Bourauel, D. Freudenreich, D. Vollmer, D. Kobe, D. Drescher, A. Jäger // Journal of Orofacial Orthopedics. – 1999. – Vol. 60, № 2. – P. 136–151.
64. Bourauel, C. Application of Bone Remodeling Theories in the Simulation of Orthodontic Tooth Movements / C. Bourauel, D. Vollmer // Journal of Orofacial Orthopedics. – 2000. – Vol. 61. – P. 266–279.

65. Bulcke van den, M.M. Location of the centers of resistance for anterior teeth during retraction using the laser reflection technique / M. M. Bulcke van den, C. J. Burstone, R. C. Sachdeva, L. R. Dermaut // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopaedics. – 1987. – Vol. 91, № 5. – P. 375–384.
66. Bulcke van den, M. M. The center of resistance of anterior teeth during intrusion using the laser reflection technique and holographic interferometry / M. M. Bulcke van den, L. R. Dermaut, R. C. L. Sachdeva, C. J. Burstone // American Journal of Orthodontic and Dentofacial Orthopaedics. – 1986. – Vol. 90. – P. 211–220.
67. Burstone, C. J. Biomechanics of tooth movement / C. J. Burstone. – Philadelphia: Vistas in orthodontics, 1962. – 213 p.
68. Burstone, C. J. Orthodontics as a science: The role of biomechanics / C. J. Burstone // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopaedics. – 2000. – Vol. 117, № 5. – P. 598–600.
69. Burstone, C. J. Part 2: Biomechanics. Interview by Dr. Nanda. Charles J. Burstone / C. J. Burstone // Journal of clinical orthodontics. – 2007 – Vol. 41, № 3. – P. 139–147.
70. Burstone, C. J. Holographic determination of centers of rotation produced by orthodontic forces / C. J. Burstone, R. J. Pryputniewicz // American Journal of Orthodontics. – 1980. – Vol. 77. – P. 396–409.
71. Burstone, C. J. Center of resistance of the human mandibular molars / C. J. Burstone, R. J. Pryputniewicz, R. Weeks // Journal of Dental Research. – 1981. – Vol. 60. – P. 515.
72. Casaccia, G. R. Analysis of initial movement of maxillary molars submitted to extraoral forces: a 3D study / G. R. Casaccia, J. C. Gomes, L. R. Squeff, N. D. Penedo, C. N. Elias, J. P. Gouvêa, E. F. Sant'Anna, M. T. Araújo, A. C. Ruellas // Dental Press J. Orthod. – 2010. – Vol. 15. – P. 37–39.

73. Cattaneo, P. M. The finite element method: a tool to study orthodontic tooth movement / P. M. Cattaneo, M. Dalstra, B. Melsen // *Journal of Dental Research*. – 2005 – Vol. 84. – P. 428–433.
74. Cesario, A. P4 medicine needs P4 education / A. Cesario, C. Auffray, P. Russo, L. Hood // *Curr. Pharm. Des.* – 2014. – Vol. 20 (38). – P. 6071–6072.
75. Choy, K. Initial changes of centres of rotation of the anterior segment in response to horizontal forces / K. Choy, K. H. Kim, C. J. Burstone // *European Journal of Orthodontics*. – 2006. – Vol. 28. – P. 471–474.
76. Christiansen, R. L. Centers of rotation within the periodontal space / R.L. Christiansen, C. J. Burstone // *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopaedics*. – 1969. – Vol. 55. – P. 353–369.
77. Danielytė, J. Numerical simulation of tooth mobility using nonlinear model of the periodontal ligament / J. Danielytė, R. Gaidys // *Mechanika*. – 2008. – № 3. – P. 20–26.
78. Dathe, H. A caveat concerning center of resistance / H. Dathe, H. Nägerl, D. Kubein-Meesenburg // *Journal of Dental Biomechanics*. – 2013. – Vol. 4. – P. 1–7.
79. Davidian, E. J. Use of a computer model to study the force distribution on the root of the maxillary central incisor / E. J. Davidian // *American Journal of Orthodontics*. – 1971. – Vol. 59, № 6. – P. 581–588.
80. Demange, C. Equilibrium situations in bend force systems / C. Demange // *American Journal of Orthodontic and Dentofacial Orthopaedics*. – 1990 – Vol. 98. – P. 333–339.
81. Demishkevich, E. Biomechanical finite-element investigation of the applicability of the orthodontic concept of the center of resistance / E. Demishkevich, S. Gavrushin // *Proceedings of the 7 th Russian Bavarian Conference*. – 2011. – P. 1–4.

82. Dermaut, L. R. Experimental determination of the center of resistance of the upper first molar in a macerated, dry human skull submitted to horizontal headgear traction / L. R. Dermaut, J. P. J. Kleutghen, H. J. J. De Clerck // *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopaedics*. – 1986 – Vol. 90. – P. 29–36.
83. Desvarieux, M. Relationship between periodontal disease, tooth loss, and carotid artery plaque: the oral infections and vascular disease epidemiology study (INVEST) / M. Desvarieux, R. T. Demmer, T. Rundek, B. Boden-Albala, D. R. J. Jacobs, P. N. Papapanou, R. L. Sacco // *Stroke*. – 2003. – Vol. 34. – P. 2120–2125.
84. Desvarieux, M. Periodontal microbiota and carotid intima-media thickness: the oral infections and vascular disease epidemiology study (INVEST) / M. Desvarieux, R. T. Demmer, T. Rundek, B. Boden-Albala, D. R. Jacobs, R. L. Sacco, P. N. Papapanou // *Circulation*. – 2005. – Vol. 111. – P. 576–582.
85. Faizee, S. The Location of the Center of Rotation of the Maxillary Central Incisor during Stage III of the Begg Technique: A Finite Element Study / S. Faizee, S. Dhinahar, A. Gupta, D. Dilpkumar, R. Priya // *The Journal of Indian Orthodontic Society*. – 2012. – Vol. 46. – P. 183–187.
86. Fenner, J. W. The EuroPhysiome, STEP and a roadmap for the virtual physiological human / J. W. Fenner, B. Brook, G. Clapworthy, P. V. Coveney, V. Feipel, H. Gregersen, D. R. Hose, P. Kohl, P. Lawford, K. M. McCormack, D. Pinney, S. R. Thomas, S. Van Sint Jan, S. Waters, M. Viceconti // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. – 2008. – Vol. 366, № 1878. – P. 2979–2999.
87. Fish, G. D. Some engineering principles of possible interest to orthodontists / G. D. Fish // *Dental Cosmetics*. – 1917. – Vol. 59. – P. 881–889.
88. Flores, M. P4 medicine: how systems medicine will transform the healthcare sector and society / M. Flores, G. Glusman, K. Brogaard, N. D. Price, L. Hood // *Per. Med.* – 2013. – Vol. 10 (6). – P. 565–576.

89. Geiger, M. Finite element-based force/moment-driven simulation of orthodontic tooth movement / M. Geiger // *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. – 2013. – Vol. 16, № 6. – P. 639–647.
90. Geiger, M. Finite element calculation of bone remodeling in orthodontics by using forces and moments / M. Geiger, J. Schneider, F. G. Sander // *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*. – 2003. – Vol. 03. – P. 97–107.
91. Geiger, M. E. Centre of resistance of constructed tooth models of various morphologies / M. E. Geiger, F. Schmidt, B. G. Lapatki // *18th Symposium on Computational Biomechanics in Ulm, 13-14 May 2013*. – Ulm, 2013.
92. Göz, G. Die Bedeutung des Widerstandszentrums für die Biologie der Zahnbewegung / G. Göz, B. Rahn // *Fortschritte der Kieferorthopädie*. – 1992. – Vol. 53. – P. 137–141.
93. Grizzi, F. The complexity of anatomical systems / F. Grizzi, M. Chriva-Internati // *Theoretical Biology and Medical Modelling*. – 2010. – Vol. 14, No. 1. – P. 1–9.
94. Haack, D. C. The science of mechanics and its importance to analysis and research in the field of orthodontics / D. C. Haack // *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopaedics*. – 1963. – Vol. 49, № 5. – P. 330–344.
95. Halazonetis, D. J. Computer experiments using a two-dimensional model of tooth support / D. J. Halazonetis // *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopaedics*. – 1996. – Vol. 109. – P. 598–606.
96. Hamburg, M. A. The Path to Personalized Medicine / M. A. Hamburg, F. S. Collins // *N. Engl. J. Med.* – 2010. – Vol. 363 (4). – P. 301–304.
97. Hocevar, R. A. Understanding, planning and managing tooth movement: orthodontic tooth system theory / R. A. Hocevar // *American Journal of Orthodontics*. – 1985 – Vol. 80, № 5. – P. 1223–1230.
98. Hood, L. Systems biology and p4 medicine: past, present, and future / L. Hood // *Rambam Maimonides Med. J.* – 2013. – Vol. 4 (2). – P. e0012.

99. Hood, L. Revolutionizing medicine in the 21st century through systems approaches  
L. Hood, R. Balling, C. Auffray // *Biotechnol. J.* – 2012. – Vol. 7 (8). –  
P. 992–1001.
100. Hood, L. Systems approaches to biology and disease enable translational systems  
medicine / L. Hood, Q. Tian // *Genomics. Proteomics. Bioinformatics.* – 2012. –  
Vol. 10. – P. 181–185.
101. Hurd, J. J. Centers of rotation for combined vertical and transverse tooth  
movements J. J. Hurd, R. J. Nikolai // *American Journal of Orthodontics and  
Dentofacial Orthopaedics.* – 1976. – Vol. 70. – P. 551–558.
102. Jaeger, H. J. Congenital absence of the internal carotid artery and the basilar  
artery with persistent trigeminal artery associated with coarctation of the aorta /  
H. J. Jaeger, U. M. Mehring, H. M. Gissler, K. D. Mathias // *Eur. Radiol.* – 2000. –  
Vol. 10. – P. 1805–1809.
103. Jain, K. K. Personalized medicine / K. K. Jain // *Curr. Opin. Mol. Ther.* – 2002. –  
Vol. 4 (6). – P. 548–558.
104. Joshipura, K. J. Possible explanations for the tooth loss and cardiovascular  
disease relationship / K. J. Joshipura, C. W. Douglass, W. C. Willett // *Ann.  
Periodontol.* – 1998. – Vol. 3. – P. 175–183.
105. Joshipura, K. J. Periodontal disease, tooth loss, and incidence of ischemic stroke /  
K. J. Joshipura, H. C. Hung, E. B. Rimm, W. C. Willett, A. Ascherio // *Stroke.* –  
2003. – Vol. 34. – P. 47–52.
106. Jorgensen, J. T. Companion diagnostics: the key to personalized medicine.  
Foreword / J. T. Jorgensen // *Expert Rev. Mol. Diagn.* – 2015. – Vol. 15 (2). –  
P. 153–156.
107. Kojima, Y. A finite element simulation of initial movement, orthodontic  
movement, and the centre of resistance of the maxillary teeth connected  
with an archwire / Y. Kojima, H. Fukui // *European Journal of Orthodontics.* –  
2014. – Vol. 36, № 3. – P. 255–261.

108. Kojima, Y. Numerical simulations of canine retraction with T-loop springs based on the updated moment-to-force ratio / Y. Kojima, H. Fukui // *European Journal of Orthodontics*. – 2012. – Vol. 34. – P. 10–18.
109. Korn, A. G. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review* / A. G. Korn, T. M. Korn. – New York: Dover Publications, 1968. – 1097 p.
110. Manzi, F. R. Panoramic radiography as an auxiliary in detecting patients at risk for cerebrovascular accident (CVA): a case report / F. R. Manzi, F. N. Bóscolo, M. A. Solange, F. H. Neto // *Journal of Oral Science*. – 2003. – Vol. 45, No. 3. – P. 177–180.
111. Melsen, B. *Adult Orthodontics* / B. Melsen. – New Jersey: Wiley-Blackwell, 2012. – 408 p.
112. Middleton, J. The role of the periodontal ligament in the bone modeling: the initial development of a time-dependent finite element model / J. Middleton, M. Jones, A. Wilson // *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopaedics*. – 1996. – Vol. 109. – P. 155–162.
113. Mühlemann, H. R. Tooth mobility III. The mechanism of tooth mobility / H. R. Mühlemann, H. A. Zander // *Journal of Periodontology*. – 1954. – Vol. 25. – P. 128–137.
114. Nägerl, H. Centers of rotation with transverse forces: an experimental study / H. Nägerl, C. J. Burstone, B. Becker, D. Kubein-Messenburg // *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopaedics*. – 1991. – Vol. 99. – P. 337–345.
115. Noyes, B. F. The contribution of Albin Oppenheim to orthodontia / B. F. Noyes // *The Angle Orthodontist*. – 1945. – Vol. 15, № 3. – P. 47–51.
116. Nyashin, M. Y. Determination of optimal orthodontic forces / M. Y. Nyashin, V. S. Pechenov, F. G. Rammerstorfer // *Russian Journal of Biomechanics*. – 1997. – Vol. 1, № 1. – P. 84–96.

117. Osipenko, M. A. Center of resistance and center of rotation of a tooth: the definitions, conditions of existence, properties / M. A. Osipenko, M. Y. Nyashin, Y. I. Nyashin // *Russian Journal of Biomechanics*. – 1999. – Vol. 3, № 1. – P. 1–11.
118. Papageorgiou, I. S. The center of resistance of teeth in Orthodontics / I. S. Papageorgiou // *Hellenic orthodontic review*. – 2005. – Vol. 8. – P. 43–57.
119. Pedersen, E. Location of centres of resistance for maxillary anterior teeth measured on human autopsy material / E. Pedersen, F. Isidor, P. Gjessing, K. Andersen // *European Journal of Orthodontics*. – 1991. – Vol. 13, № 6. – P. 452–458.
120. Penedo, N. D. 3D simulation of orthodontic tooth movement / N. D. Penedo, C. N. Elias, M. C. Thomé Pacheco, J. P. Gouvêa // *Dental Press J. Orthod*. – 2010. – Vol. 15. – P. 98–108.
121. Poppe, M., Bourauel C., Jäger A. Determination of the elasticity parameters of the human periodontal ligament and the location of the center of resistance of single-rooted teeth. A study of autopsy specimens and their conversion into finite element models / M. Poppe, C. Bourauel, A. Jäger // *Journal of Orofacial Orthopedics*. – 2002. – Vol. 63, № 5. – P. 358–370.
122. Provatidis, C. G. A comparative FEM-study of tooth mobility using isotropic and anisotropic models of the periodontal ligament. Finite Element Method / C. G. Provatidis // *Medical Engineering and Physics*. – 2000. – Vol. 22, № 5. – P. 359–370.
123. Provatidis, C. G. An analytical model for stress analysis of a tooth in translation / C. G. Provatidis // *International Journal of Engineering Science*. – 2001. – Vol. 39. – P. 1361–1381.
124. Provatidis, C. G. Numerical Estimation of the Centres of Rotation and Resistance in Orthodontic Tooth Movement / C. G. Provatidis // *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. – 1999. – Vol. 2, № 2. – P. 149–156.

125. Pryputniewicz, R. J. The effect of time and force magnitude on orthodontic tooth movement / R. J. Pryputniewicz, C. J. Burstone // *Journal of Dental Research*. – 1979. – Vol. 58. – P. 1754–1764.
126. Qian, H. The influence of PDL principal fibers in a 3-dimensional analysis of orthodontic tooth movement / H. Qian, J. Chen, T. R. Katona // *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopaedics*. – 2001. – Vol. 120, № 3. – P. 272–279.
127. Quaglini, S. Personalization and Patient Involvement in Decision Support Systems: Current Trends / S. Quaglini, L. Sacchi, G. Lanzola, N. Viani // *Year Med. Inform.* – 2015. – Vol. 10 (1). – P. 106–118.
128. Ravinda, N. Biomechanics and esthetic strategies in clinical orthodontics / N. Ravinda. – St. Louis: Elsevier, 2009 – 396 p.
129. Reitan, K. Biomechanical principles and reactions. Current orthodontics concepts and techniques / K. Reitan. – Philadelphia, W.B. Sanders Company, 1969. – P. 156–159.
130. Reimann, S. Biomechanical finite-element investigation of the position of the centre of resistance of the upper incisors / S. Reimann, L. Keilig, A. Jäger, C. Bourauel // *European Journal of Orthodontics*. – 2007. – Vol. 29. – P. 219–224.
131. Schwartz, A. M. Tissue changes incidental to orthodontic tooth movement / A. M. Schwartz // *International Journal of Orthodontics*. – 1932. – Vol. 18. – P. 331–352.
132. Shabaruddin, F. H. Economic evaluations of personalized medicine: existing challenges and current developments / F. H. Shabaruddin, N. D. Fleeman, K. Payne // *Pharmgenomics Pers. Med.* – 2015. – Vol. 8. – P. 115–126.
133. Sia, S. Determining the center of resistance of maxillary anterior teeth subjected to retraction forces in sliding mechanics. An in vivo study / S. Sia, Y. Koga, N. Yoshida // *Angle Orthodontics*. – 2007. – Vol. 77, № 6. – P. 999–1003.

134. Smith, R. J. Mechanics of tooth movement / R. J. Smith, C. J. Burstone // American Journal of Orthodontics. – 1984. – Vol. 85. – P. 294–307.
135. Toms, S. R. A nonlinear finite element analysis of the periodontal ligament under orthodontic tooth loading / S. R. Toms, A. W. Eberhardt // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopaedics. – 2003. – Vol. 123, № 6. – P. 657–665.
136. Toms, S. R. Nonlinear stress-strain behavior of periodontal ligament under orthodontic loading / S. R. Toms, J. E. Lemons, A. A. Bartolucci, A. W. Eberhardt // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopaedics. – 2002. – Vol. 122, № 2. – P. 174–179.
137. Tsutsumi, S. Pseudo-3D Computer Simulation for Pathogenesis and Rehabilitation Cervical Spine Deformity by Malocclusion / S. Tsutsumi, K. Doi // International Journal of Industrial Ergonomics. – 1992. – Vol. 9, № 2. – P. 137–144.
138. Türk, T. Clinical evaluation of the centre of resistance of the upper incisors during retraction / T. Türk, S. Elekdag-Türk, M. Dincer // European Journal of Orthodontics. – 2005. – Vol. 27. – P. 196–201.
139. Varst van der, P. G. On the existence of the orthodontic center of resistance / P. G. Varst van der, M. C. R. B. Peters, A. Boer de // Biomechanics: Basic and Applied Research. – Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1987. – P. 751–756.
140. Viecilli, R. F. Axes of resistance for tooth movement: does the center of resistance exist in 3-dimensional space? / R. F. Viecilli, A. Budiman, C. J. Burstone // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopaedics. – 2013. – Vol. 143, № 2. – P. 163–172.
141. Virtual Physiological Human [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://en.wikipedia.org/wiki/Virtual\\_Physiological\\_Human](https://en.wikipedia.org/wiki/Virtual_Physiological_Human) (дата обращения 10.06.2016).
142. Virtual Physiological Human Institute [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [www.vph-institute.org](http://www.vph-institute.org) (дата обращения 10.06.2016).

143. Vlachoianis, J. E. A novel treatment approach for extruded maxillary molars / J. E. Vlachoianis, M. Santoro // *Journal of International Dental and Medical Research*. – 2011. – Vol. 4, № 2. – P. 77–86.
144. Vollmer, D. Determination of the centre of resistance in an upper human canine and idealized tooth model / D. Vollmer, C. Bourauel, K. Maier, A. Jäger // *European Journal of Orthodontics*. – 1999. – Vol. 21, № 6. – P. 633–648.
145. Yoshida, N. Experimental evaluation of initial tooth displacement, center of resistance and center of rotation under the influence of an orthodontic force / N. Yoshida, P.G. Jost-Brinkmann, Y. Koga, N. Mimaki, K. Kobayashi // *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopaedics*. – 2001. Vol. 120. – P. 190–197.
146. Yoshida, N. A new method for qualitative and quantitative evaluation of tooth displacement under the application of orthodontic forces using magnetic sensors / N. Yoshida, Y. Koga, K. Kobayashi, Y. Yamada, T. Yoneda // *Medical Engineering & Physics*. – 2000. – Vol. 22. – P. 293–300.
147. Yoshida, N. In vivo determination of the centres of resistance of maxillary anterior teeth subjected to retraction forces / N. Yoshida, Y. Koga, N. Mimaki, K. Kobayashi // *European Journal of Orthodontics*. – 2001. – Vol. 23. – P. 529–534.
148. Yoshida, N. In vivo measurement of the elastic modulus of the human periodontal ligament / N. Yoshida, Y. Koga, C. L. Peng, E. Tanaka, K. Kobayashi // *Medical Engineering & Physics*. – 2001. – Vol. 23. – P. 567–572.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1

### АКТ

#### проверки эффективности применения методики биомеханического сопровождения ортодонтического перемещения зубов на начальной стадии

На кафедре ортопедической стоматологии Пермского государственного медицинского университета им. академика Е.А. Вагнера проводилась апробация методики биомеханического сопровождения ортодонтического перемещения зубов на начальной стадии, разработанная на кафедре теоретической механики и биомеханики Пермского национального исследовательского политехнического университета (авторы: Ю.И. Няшин, А.Л. Дубинин).

Предложенная методика требует следующих индивидуальных данных пациента: с помощью компьютерной томографии определяется форма и размеры зуба, назначенного к перемещению. Затем, по разработанному авторами аналитическому методу вычисляются механические характеристики окружающего зуб периодонта. Методами биомеханического моделирования для заданного врачом направления движения зуба рассчитывается величина его возможного перемещения, и находятся величина и направление прикладываемого силового воздействия (силы и момента пары сил). При моделировании используется разработанная авторами теория центра (области) сопротивления, позволяющая найти точку приложения найденной силы или направление прикладываемого момента пары сил. Методика реализована в виде пакета программ для персонального компьютера.

Полученные данные используются врачом-ортодонтом для подбора или настройки соответствующего ортодонтического аппарата. Данная методика может быть использована нужное количество раз до окончания лечения.

По результатам апробации можно констатировать, что предложенная методика основывается на современных представлениях медицины о механизмах ортодонтического лечения, дает хорошие количественные результаты и может быть рекомендована к использованию в качестве пособия врачу-ортодонту в медицинской практике.

Заслуженный деятель науки РФ,  
заведующий кафедрой  
ортопедической стоматологии  
Пермского государственного медицинского  
университета им. Е.А. Вагнера,  
доктор медицинских наук, профессор



/ Г.И. Рогожников/

