

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОСТРОЕНИЯ РОССИЙСКОЙ
АКАДЕМИИ НАУК

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



Лампси Борис Борисович

**НЕЛИНЕЙНАЯ ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ
СТЕРЖНЕЙ, ИСПЫТЫВАЮЩИХ ВЛИЯНИЕ ДЕПЛАНАЦИИ ПОПЕРЕЧНЫХ
СЕЧЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Ерофеев В.И.

Нижний Новгород - 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава I. Математические модели, описывающие распространение крутильных волн в стержне и их линейное обобщение	10
1.1. Теория кручения Кулона.....	10
1.2. Теория кручения Сен-Венана.....	11
1.3. Теория стесненного кручения.....	15
1.4. Уравнения крутильных колебаний в тонкостенных стержнях.....	18
1.4.1. Теория Тимошенко.....	18
1.4.2. Теория В.З. Власова.....	21
1.4.3. Теория В.И. Сливкера.....	23
1.4. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня с учетом нелинейности и депланации поперечного сечения стержня...	18
	28
Глава II. Нелинейные стационарные крутильные волны в стержнях	48
2.1. Волновые процессы в тонкостенном стержне при учете квадратичной нелинейности.....	49
2.2. Волновые процессы в тонкостенном стержне при учете кубической нелинейности.....	54
2.3. Волновые процессы в тонкостенном стержне при одновременном учете квадратичной и кубической нелинейности.....	71
Глава III. Напряженное состояние упругого тонкостенного стержня	75
3.1. Развитие теории расчета тонкостенных стержней.....	76
3.2. Полусдвиговая теория В.И. Сливкера.....	80
3.3. Общий случай действия системы сил на тонкостенный стержень.....	81
3.4. Общие сведения о тонкостенных стержнях.....	82
3.5. Кручение тонкостенных стержней открытого и закрытого про-	

филей.....	83
3.5.1. Кручение стержней открытого профиля.....	83
3.5.2. Кручение тонкостенных стержней закрытого профиля.....	86
3.6. Влияние эксцентриситета приложения нагрузки.....	89
3.7. Напряженное состояние в стенке составной балки с учетом местного кручения и локальной нагрузки.....	90
3.8. Пример расчета составной балки с учетом местного кручения и локальной нагрузки от мостового крана.....	107
Выводы по главе.....	116
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	118
ЛИТЕРАТУРА	120

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В настоящее время стремительно развивающиеся техника и технологии требуют новых, более точных методов расчета, наряду с этим широко распространяется изучение волновых процессов. Полученные результаты исследований имеют широкую область применения: от контроля материалов и изделий при их производстве до строительства зданий, сооружений, объектов машиностроения, металлургии, нефтехимии. Среди многообразия изделий металлургической, машиностроительной, нефтедобывающей, других отраслей промышленности имеется широкая номенклатура протяженных объектов, длина которых превосходит поперечные размеры в сто и более раз. К таким объектам можно отнести прутковый прокат различного сечения, насосно-компрессорные, газовые и нефтяные трубы, железнодорожные рельсы, стальные тросы, проволоку, пружины и другую продукцию.

Для неразрушающего контроля протяженных объектов в России и за рубежом все чаще используются не методы, основанные на изучении поведения лабораторных образцов, а волноводные (wave guided) методы, основанные на использовании продольных, изгибных и крутильных нормальных волн. В основе акустического воздействия на объект контроля и напряженно-деформированного состояния лежат поля одной природы, поэтому оценка технического состояния металлоконструкций акустическим методом является наиболее достоверной. Использование при волноводном контроле продольной стержневой моды волны Похгаммера в области минимальной дисперсии скорости (для прутков) и нулевой крутильной волны (для труб) позволяет «прозвучивать» достаточно протяженные объекты – длиной в несколько сотен метров, обеспечивает высокую чувствительность к дефектам по всему сечению объекта.

Недостаточное количество работ по исследованию закономерностей распространения нормальных волн в протяженных объектах, их взаимодействия с дефектами, отсутствие научно-обоснованных технических решений по разработке эффективных высокочувствительных преобразователей, обоснованию новых ин-

формативных параметров является одной из причин, сдерживающих создание и внедрение надежных и эффективных методов бесконтактного акустического контроля линейно-протяженных объектов.

Волновая теория также применима и в строительстве при моделировании и расчетах зданий и сооружений повышенной этажности на динамические воздействия. Конструктивные схемы современных жилых и общественных зданий повышенной этажности (крупнопанельных, каркасно-панельных и монолитных) могут быть представлены пространственной моделью тонкостенного составного стержня. Теория тонкостенных составных стержней применяется для расчетов зданий повышенной этажности как на горизонтальные и вертикальные статические нагрузки, так и на сейсмические воздействия. При проектировании решаются задачи свободных продольно-поперечных колебаний тонкостенного составного стержня.

Таким образом, за основные направления применения волновой теории можно выделить расчеты при конструировании и методы неразрушающего контроля конструкций и материалов.

Диссертационная работа проводилась по программе ФНИ Государственных академий наук на 2013-2020гг. (Раздел 3 «Технические науки». Подраздел 30 «Методы анализа и синтеза многофункциональных механизмов и машин для перспективных технологий и новых человеко-машинных комплексов. Динамические и виброакустические процессы в технике»). По теме 0055-2014-0002, № госрегистрации 01201458047. Развитие теории нелинейной волновой динамики и виброакустики машин и ее приложение к анализу устойчивости распределенных механических систем с высокоскоростными движущимися нагрузками, созданию методов и средств диагностики конструкций на ранних стадиях повреждения и разработке высокоэффективных адаптивных систем виброзащиты машин (Научный руководитель: профессор Ерофеев В.И.). При поддержке гранта Российского научного фонда «Динамика и устойчивость систем «грунт – рельсовая направляющая – высокоскоростной движущийся объект» с учетом эффектов излучения волн и накопления повреждений в

материалах конструкций» (РНФ №14-19-01637 (конкурс «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований отдельными научными группами»); руководитель: профессор Ерофеев В.И.).

Цель работы: состоит в развитии нелинейной волновой динамики и прочности тонкостенных стержней, испытывающих влияние депланации их поперечных сечений при кручении.

В соответствии с изложенной целью в работе поставлены и решены следующие **задачи:**

– построение математической модели, позволяющей описывать распространение крутильной волны в тонкостенном стержне с учетом геометрической и физической нелинейности, а также депланации, то есть выхода поперечного сечения из первоначального плоского состояния.

– изучение дисперсионных и нелинейных эффектов, проявляющихся при распространении крутильных волн в упругих стержнях.

– разработка методик расчета тонкостенных стержней с учетом местного кручения.

– оценка влияния эксцентриситета приложения нагрузки на напряженно-деформированное состояние упругого тонкостенного стержня.

Научная новизна работы заключается в следующем:

Предложена математическая модель, позволяющая описать распространение крутильной волны в тонкостенном стержне. Модель включает в себя геометрическую и физическую упругие нелинейности, а также депланацию. В этой модели связь между углом закручивания стержня и мерой депланации не постулируется, как в большинстве известных моделей, а находится в процессе решения задачи. Определено, что депланация, которая вызывает появление дисперсии фазовой скорости крутильной волны, приводит еще к появлению характерной для интенсивных продольных колебаний квадратичной нелинейности, не встречавшейся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания.

Показано, что в тонкостенном стержне, совершающем интенсивные крутильные колебания, могут формироваться локализованные в пространстве несинусоидальные волны деформации.

Разработаны и апробированы оригинальные методики определения угла закручивания, функции депланации и бимоента при кручении тонкостенных составных стержней.

Практическая значимость работы состоит в возможности создания различных методов бесконтактного акустического контроля линейно-протяженных объектов, основанных на использовании продольных, изгибных и крутильных нормальных волн. Внедрение научно-обоснованных технических решений по разработке эффективных высокочувствительных преобразователей, обоснованию новых информативных параметров по исследованию закономерностей распространения нормальных волн в протяженных объектах, их взаимодействия с дефектами. Разработка методик по расчету стержневых элементов с учетом местного кручения, вызванного эксцентриситетом приложения нагрузки.

Методы исследования. В процессе исследования использованы методы механики сплошных сред, теории колебаний и волн.

Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается их согласованностью с общими положениями механики сплошных сред, теории колебаний и волн, а также согласованностью результатов расчетов с известными экспериментальными данными.

На защиту выносятся:

– математическая модель, описывающая крутильные колебания прямолинейного упругого стержня, обладающего депланацией поперечного сечения, геометрической и физической нелинейностями.

– результаты исследования дисперсионных и нелинейных эффектов, проявляющихся при распространении крутильных волн в тонкостенном упругом стержне.

– методика определения функции угла закручивания и функции депланации на примере стержня двутаврового поперечного сечения, нагруженного вертикальной сосредоточенной силой, приложенной с эксцентриситетом.

– методика определения величины бимоента, а также анализ влияния нормальной компоненты напряжения на общую проверку прочности при различных эксцентриситетах приложения нагрузки и учете местного кручения от силы поперечного торможения.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались: на Всероссийской научно-методической конференции «Современные проблемы механики и ее преподавание в вузе», посвященной 100-летию со дня рождения профессора Н.В. Бутенина (Санкт-Петербург, Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, 2014 г.); Всероссийской конференции «Проблемы прочности, динамики и ресурса», посвященной 95-летию со дня рождения А.Г. Угодчикова и 40-летию Научно-исследовательского института механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (Нижний Новгород, 16-19 ноября, 2015г.); XVIII Международном симпозиуме «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем» - DYVIS-2015 (Москва-Бекасово, ИМАШ РАН, 17-23 мая 2015 г.); LVII Международной конференции «Актуальные проблемы прочности» (г. Севастополь, СевГУ, 24-27 мая 2016г.).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 10 научных работ, 5 из которых – статьи из перечня журналов, рекомендуемых ВАК РФ.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении дана общая характеристика работы, обоснована ее актуальность, сформулированы основные цели, задачи и положения, выносимые на защиту, определена практическая значимость работы.

В первой главе излагаются гипотезы, положенные в основу построения математических моделей, используемых для изучения крутильных колебаний стержней, а также для изучения распространения крутильных волн. Модели базируются на технической теории кручения и уточняющей ее теории стесненного

кручения. Технические теории включают в себя модели Кулона и Сен-Венана, уточняющие – модели Тимошенко и Власова. Кручение называют стесненным, если депланация неоднородна вдоль стержня. По теориям Тимошенко и Власова депланация пропорциональна относительному углу закручивания, что приводит к дисперсии, то есть зависимости фазовой скорости крутильной волны от ее частоты.

Особое внимание уделяется анализу уточняющей теории, предложенной В. И. Сливкером в 2005 году, в которой связь между углом закручивания и мерой депланации не постулируется, как в теориях Тимошенко и Власова, а определяется в процессе решения задачи.

В диссертации модель Сливкера В.И. обобщается на случай учета геометрической и физической нелинейностей.

Вторая глава посвящена изучению нелинейных стационарных крутильных волн, распространяющихся в стержнях. На формирование таких волн влияют два фактора: нелинейность и дисперсия. Нелинейность приводит к зарождению в спектре волны новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия же наоборот, сглаживает перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волны. К формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения формы, может привести совместное действие этих факторов.

Третья глава посвящена исследованию напряженного состояния составной балки с учетом местного кручения и локальной нагрузки.

В этой главе в рамках полусдвиговой теории В. И. Сливкера выведены дифференциальные уравнения функции угла закручивания и функции депланации. Вычислены эти величины и их производные. На примере двутавровой балки проиллюстрирован характер распределения величины бимоента по длине балки и его зависимость от величины эксцентриситета.

В заключении приводятся основные результаты и выводы по работе.

ГЛАВА 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ КРУТИЛЬНЫХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ И ИХ НЕЛИНЕЙНОЕ ОБОБЩЕНИЕ

Крутильные волны, наряду с продольными и изгибными волнами, играют большую роль в формировании вибрационных полей строительных конструкций. На технической теории кручения и уточняющей ее теории стесненного кручения базируются математические модели, используемые для изучения крутильных колебаний стержней, а также для изучения распространения крутильных волн. Технические теории включают в себя модели Кулона и Сен-Венана, уточняющие – модели Тимошенко и Власова [2,18,24].

Анализируя дисперсионные свойства наиболее важных одноволновых и двухволновых приближенных теорий крутильных колебаний, можно выделить основные этапы развития.

1.1. Теория кручения Кулона

В основе теории Ш. О. Кулона [76], который одним из первых провел серию экспериментов по кручению и установил ряд закономерностей об их деформации, лежат предпосылки о недеформируемости поперечного сечения и об отсутствии смещений вдоль продольной оси стержня. На основании этого он предположил, что при кручении стержня его сечения поворачиваются, как жесткие площадки в своей плоскости, скользя друг по другу. Перемещения точек стержня, которые соответствуют этим гипотезам можно записать в виде:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &= 0; \\ u_y(x, y, z, t) &= -z\theta(x, t); \\ u_z(x, y, z, t) &= y\theta(x, t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где: x - продольная координата, θ - угол поворота сечения.

Компоненты тензора напряжений, отличные от нуля определяются по (1.2)

$$\sigma_{xy} = -Gz \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \sigma_{xz} = -Gy \frac{\partial \theta}{\partial x}, \tag{1.2}$$

где: G - модуль сдвига.

Тогда потенциальную энергию деформации можно записать:

$$W_p = \frac{1}{2G} \int_0^{\ell} \iint_S (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2) dx dS = \frac{1}{2} GI_r \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (1.3)$$

Используя принцип наименьшего действия [134], получим уравнение Кулона

$$GI_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho I_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4)$$

и граничные условия:

$$1) GI_r \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = \ell; \quad 2) \theta = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = \ell \quad (1.5)$$

Левая часть первых граничных условий (1.5) представляет собой крутящий момент M_x , то есть:

$$M_x = GI_r \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (1.6)$$

где: I_r - полярный момент инерции, который согласно теории Кулона пропорционален крутильной жесткости стержня.

Уравнение (1.4) имеет второй порядок точности по координате x , поэтому описывает только одну крутильную волну. Дисперсия этой волны представляет собой дисперсию сдвиговой волны в безграничной среде

$$k^2 = \frac{\rho \omega^2}{G} = k_i^2. \quad (1.7)$$

Для реального стержня она совпадает с низкочастотной дисперсией первой крутильной волны только при условии, что поперечное сечение стержня будет круговым или кольцевым. Именно с такими стержнями Ш. О. Кулон проводил свои исследования. Для стержней с более сложным поперечным сечением дисперсия (1.7) является заниженной, поэтому следует использовать аналогичное уравнение, предложенное Сен-Венаном.

1.2. Теория кручения Сен-Венана

Одним из наиболее значимых вкладов в развитие теории кручения стержней сделал Б. Сен-Венан. Результаты, полученные Сен-Венаном и изложенные в тру-

дах "Мемуары о кручении призмы" [71], вошли практически во все учебники по теории упругости, начиная с изданной в 1862 году книги немецкого ученого Клебша "Теория упругости твердых тел".

Сен-Венан впервые, исходя из математической постановки, получил точное решение задачи о кручении призматических стержней произвольного профиля. Построив свою теорию, он решил ряд конкретных задач для стержней с эллиптическим и прямоугольным сечениями, провел большую серию расчетов по определению жесткости при кручении и распределению касательных напряжений, что необходимо для исследования их прочности. В частности, для квадратного сечения он показал, что, жесткость при кручении, соответствующая построенной им теории, в 0,843 раза меньше той, что, получается, по гипотезе плоских сечений. И хотя полученные им решения справедливы лишь при "свободном" ("чистом") кручении стержней, современные приближенные теории крутильных колебаний в той или иной мере их используют, а все расчеты, связанные с кручением призматических стержней, производятся по формулам, полученным Сен-Венаном.

Изучая работу призматического стержня под действием статически приложенных к концам стержня крутящих моментов, равных по величине и противоположных по направлению, Сен-Венан предполагал, что кручение стержня складывается из двух составляющих:

- кручения по Кулону (отсутствие искривления поперечного сечения);
- однородных по всей длине продольных смещений сечений.

Однородность продольных смещений (депланаций) сечений является отличительной особенностью теории свободного кручения Сен-Венана.

Продольные перемещения, соответствующие этим гипотезам можно записать:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= \varphi_1(y, z); \\ u_y(x, y, z) &= -z\theta(x, t); \\ u_z(x, y, z) &= y\theta(x, t). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Касательные напряжения, отличные от нуля, как и в теории Кулона, имеют вид:

$$\sigma_{xy} = G \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - z \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad \sigma_{xz} = G \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - z \frac{\partial \theta}{\partial x} \right). \quad (1.9)$$

Подставив выражения для касательных напряжений (1.9) в уравнения статического равновесия системы [50], получим уравнения, которым должны удовлетворять неизвестные функции:

$$\Delta \varphi_1(y, z) = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x^2} = 0, \text{ т. е. } \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} = \text{const}. \quad (1.10)$$

Анализируя (1.10) можно утверждать, что при чистом кручении угол закручивания θ линейно меняется с продольной координатой x , а относительный угол $\theta' = \partial \theta / \partial x$ постоянный по длине стержня. Тогда на основании этого выражения для перемещений (1.8) и напряжений (1.9) можно записать:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= \theta' \varphi(y, z); & \sigma_{xy} &= G \theta' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right); \\ u_y(x, y, z) &= -\theta' xz; & \sigma_{xz} &= G \theta' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right); \\ u_z(x, y, z) &= \theta' xy; & \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где: $\varphi(y, z) = \varphi_1(y, z) / \theta'$ - функция кручения.

Так как функция кручения $\varphi(y, z)$ отличается от функции $\varphi_1(y, z)$ только постоянным множителем θ' , то она так же является гармонической, то есть:

$$\Delta \varphi(y, z) = 0. \quad (1.12)$$

Граничное условие на контуре s должно выражать отсутствие действия внешних сил на боковых гранях стержня, то есть

$$\sigma_{xn} = 0, \quad (1.13)$$

где: n - нормаль к контуру s .

Преобразуем условие (1.13) с помощью подстановки в него (1.11), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{xn} &= \sigma_{xy} \cos(n, y) + \sigma_{xz} \cos(n, z) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(n, y) - z \cos(n, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(n, z) + y \cos(n, z) = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Из выражения (1.14) следует граничное условие для функции кручения $\varphi(y, z)$ на контуре s :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = z \cos(n, y) - y \cos(n, z). \quad (1.15)$$

На математическом уровне говорят, что совокупность дифференциального уравнения (1.12) и краевого условия (1.15) аналогична постановке задачи К. Неймана для уравнения Лапласа. Это позволяет получить точное решение задачи на свободное кручение. Такое решение найдено с точностью до постоянной φ_0 , которая равна продольному перемещению стержня как целого. Если для случая кручения ее принять равной нулю, то на функцию кручения должны быть наложены условия:

$$\iint_S \varphi(y, z) dy dz = 0. \quad (1.16)$$

Для нахождения связи между крутящим моментом M_x и углом закручивания θ необходимо в выражение для крутящего момента

$$M_x = \iint_S (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}) dy dz \quad (1.17)$$

подставить выражения для напряжений (1.11)

$$M_x = G \frac{\partial \theta}{\partial x} \left[I_r - \iint_S \left(\frac{\partial(z\varphi)}{\partial y} - \frac{\partial(y\varphi)}{\partial z} \right) dy dz \right] = G I_x \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (1.18)$$

где: I_x - момент инерции чистого кручения.

Сравнивая выражения для крутящего момента M_x (1.18) с аналогичным выражением (1.6) теории Кулона можно сделать вывод, что из-за наличия продольных перемещений (депланации сечений), жесткость стержня определяется не полярным моментом инерции I_r , а моментом инерции чистого кручения I_x . Причем величина момента инерции чистого кручения меньше, чем величина полярного, а разность между ними становится тем больше, чем больше форма поперечного

сечения стержня отличается от форм круговой или кольцевой. Равенство моментов инерции возможно лишь в случае, когда деформация сечения будет отсутствовать.

1.3. Теория стесненного кручения

Кручение принято называть стесненным, если деформация по длине стержня переменная. Ярким примером, приводимым многими авторами, является стержень произвольного (некруглого) поперечного сечения, зафиксированный одним концом. К свободному концу стержня приложен крутящий момент или пара сил. (см. рис. 1.1).

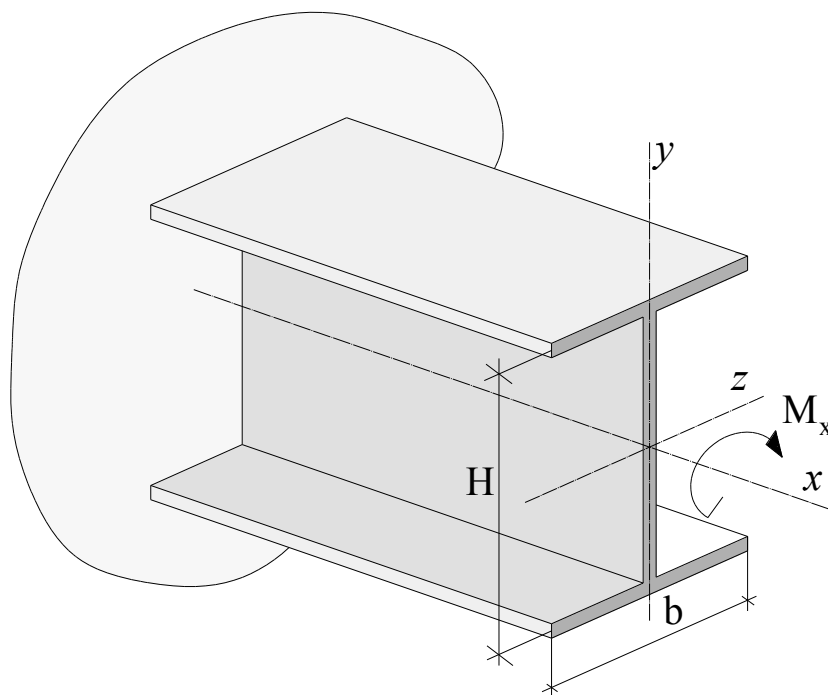


Рис 1.1.

В этом случае деформация в зафиксированной части сечения будет равна нулю, а на свободном конце отлична от нуля. Такая неоднородная деформация приводит к возникновению нормальных продольных напряжений, которые в свою очередь вызывают в поперечных сечениях появление дополнительных касательных напряжений с отличным от нуля крутящим моментом. Очевидно, что при стесненном кручении связь между крутящим моментом и углом закручивания более сложная по сравнению со свободным кручением.

Большой вклад в развитие теории стесненного кручения внес С. П. Тимошенко [77]. Он рассмотрел кручение стержня двутаврового профиля и вывел выражение для крутящего момента, которое помимо напряжений свободного кручения учитывает эффект депланации, то есть напряжений, возникающих от изгиба полков двутавра.

В основе инженерной теории стесненного кручения лежат гипотезы:

а) поперечное сечение стержня в своей плоскости не искажается в процессе деформации; б) депланация стержня пропорциональна относительному углу закручивания. Таким образом, основное отличие данной теории от теории Сен-Венана заключается в том, что угол закручивания θ является произвольной функцией продольной координаты x и времени t . Математически это можно записать:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &= \frac{\partial \theta}{\partial x}(z, t) \varphi(y, z); \\ u_y(x, y, z, t) &= -z\theta(x, t); \\ u_z(x, y, z, t) &= y\theta(x, t); \end{aligned} \quad (1.19)$$

где функция кручения $\varphi(y, z)$ удовлетворяет условию (1.12) и граничным условиям (1.15). Кроме этого полагается, что из-за тонкостенности стержня поперечные напряжения σ_{yy} и σ_{zz} равны нулю.

Согласно закона Гука, компоненты тензора напряжений запишутся:

$$\sigma_{xx} = E \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \varphi, \quad \sigma_{xy} = G \frac{\partial \theta}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right), \quad \sigma_{xz} = G \frac{\partial \theta}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right), \quad \sigma_{yz} = 0,$$

тогда выражение для потенциальной энергии стержня будет иметь вид:

$$W_p = \frac{1}{2} G I_x \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} E I_\varphi \int_0^l \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (1.20)$$

В выражении (1.20) первое слагаемое представляет собой потенциальную энергию деформации сдвига, а второе - энергию продольных деформаций, вызывающих неоднородную депланацию, которая пропорциональна величине, называемой моментом депланации:

$$I_\varphi = \iint_S \varphi^2(y, z) dy dz. \quad (1.21)$$

Если записать вариацию потенциальной энергии (1.20), получим:

$$\begin{aligned} \delta W_p = \int_0^\ell \left(EI_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - GI_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \delta \theta dx + \left(GI_x \frac{\partial \theta}{\partial x} - EI_\varphi \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} \right) \delta \theta \Big|_0^\ell + \\ + EI_\varphi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \delta \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_0^\ell. \end{aligned} \quad (1.22)$$

В выражении (1.22) второе слагаемое в правой части представляет собой работу двух крутящих моментов $M_x \delta|_0^\ell$, которые приложены по концам стержня, то есть при $x = 0, \ell$. Следовательно, связь между крутящим моментом M_x и углом закручивания θ выразится:

$$M_x = GI_x \frac{\partial \theta}{\partial x} - EI_\varphi \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}. \quad (1.23)$$

Полученная Тимошенко формула (1.23) отличается от формулы Кулона (1.18) наличием второго слагаемого, которое пропорционально третьей производной угла закручивания θ .

Последнее слагаемое в выражении (1.22) для потенциальной энергии представляет собой энергию $B_x \delta|_0^\ell$, передаваемую на стержень обобщенной силой, приложенной по его концам и названной позже Власовым [15] бимоментом:

$$B_x = EI_\varphi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (1.24)$$

Эта величина равна работе продольных сил на перемещениях u_x вдоль продольной оси:

$$B_x \delta \frac{\partial \theta}{\partial x} = \iint_S \sigma_{xx} \delta u_x dy dz. \quad (1.25)$$

На основании этого можно сделать вывод, что кручение может быть вызвано не только крутящим моментом, но и бимоментом. Если в качестве примера рассмотреть стержень двутаврового сечения, по краям полков которого приложены четыре одинаковые силы P (рис.1.2 а), образующие пары, то эти пары, приложен-

ные к полкам, будут вызывать изгиб в разные стороны (рис.1.2 б), что будет эквивалентно кручению. Другими словами момент, создаваемый двумя парами сил, будет представлять собой бимомент (1.24).

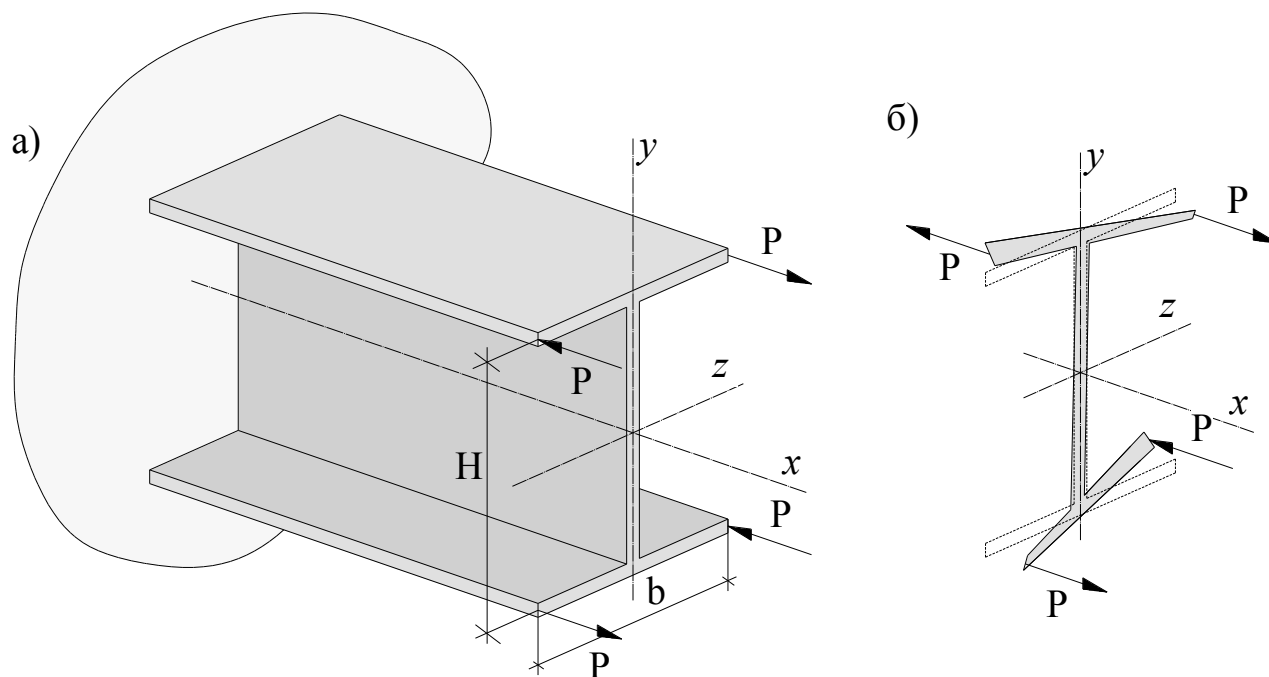


Рис. 1.2.

1.4. Уравнения крутильных колебаний в тонкостенных стержнях

1.4.1. Теория С.П. Тимошенко

Как отмечалось выше, в том случае если депланация неоднородна по длине стержня, то кручение называют стесненным. Основное отличие теории Тимошенко от теории Сен-Венана заключается в том, что угол кручения $\theta(x, t)$ является производной функцией продольной координаты x и времени t .

Для вывода дифференциального уравнения, описывающего крутильные колебания тонкостенного стержня, запишем выражение для кинетической энергии, соответствующее перемещениям (1.19):

$$\begin{aligned}
 W_k &= \frac{1}{2} \rho \int_0^{\ell} \iint_S \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] dx dS = \\
 &= \frac{1}{2} \rho I_r \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \rho I_\varphi \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} \right)^2 dx .
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Дифференциальное уравнение Сен-Венана получается, если в выражениях для потенциальной энергии деформации (1.20), в выражении вариации потенциальной энергии (1.22) и в выражении для кинетической энергии (1.26) положить равной нулю энергию депланации:

$$GI_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho I_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 . \quad (1.27)$$

Полученное уравнение (1.27) отличается от уравнения Кулона (1.4) величиной жесткости на кручение.

Если в выражениях для потенциальной энергии деформации (1.20) и в выражении вариации потенциальной энергии (1.22) учесть потенциальную энергию депланации, а в выражении для кинетической энергии (1.26) не учитывать соответствующий член, то получим следующее уравнение:

$$GI_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - EI_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - \rho I_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 . \quad (1.28)$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением крутильных колебаний теории Тимошенко [21].

Представим вращение поперечного сечения стержня в виде гармонической волны:

$$\theta(x, t) = \theta_0 e^{i(\omega t - kx)} . \quad (1.29)$$

Тогда, после подстановки в (1.28) и преобразований, получим дисперсионное уравнение:

$$GI_x k^2 + EI_\varphi k^4 - \rho I_r \omega^2 = 0 . \quad (1.30)$$

Согласно (1.30) частота ω и волновое число k связаны соотношением:

$$\omega = c_s k \sqrt{1 + \frac{c_0^2 I_\varphi}{c_\tau^2 I_d} k^2} , \quad (1.31)$$

где: $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость распространения продольных волн в стержне;

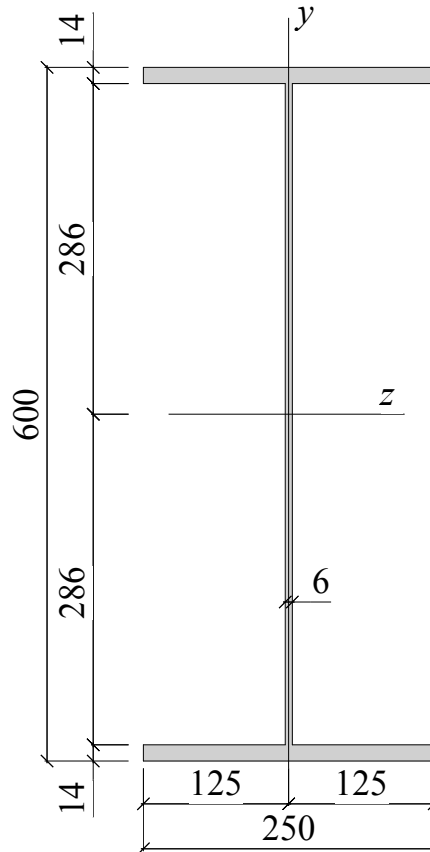
$c_\tau = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ – скорость распространения сдвиговых волн;

$c_s = \sqrt{\frac{GI_x}{\rho I_r}}$ – скорость распространения крутильных волн в стержне.

Таким образом, крутильные волны обладают дисперсией. Их фазовая скорость определяется по формуле:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c_s \sqrt{1 + \frac{c_0^2 I_\phi}{c_t^2 I_d} k^2}. \quad (1.32)$$

На рис. (1.4 а, б) на примере двутавровой балки, далее рассматриваемой в главе 3 и обладающей геометрическими характеристиками (рис. 1.3), показан график зависимости частоты ω и фазовой скорости v_ϕ от волнового числа k в коротковолновом ($k \rightarrow \infty$) и длинноволновом ($k \rightarrow 0$) диапазонах.



$$E = 206,01 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0,3, \quad \rho = 7850 \text{ кг/м}^3, \quad G = 79,23 \text{ ГПа}$$

$$I_d = 49,53 \text{ см}^4, \quad I_\phi = 3129911,458 \text{ см}^6, \quad I_r = 73814,124 \text{ см}^4, \quad I_g = 32323 \text{ см}^4.$$

Рис. 1.3. Поперечное сечение стержня

Для коротковолнового диапазона частота и фазовая скорость определяются:

$$\omega = \sqrt{\frac{I_\varphi}{I_d}} k^2, \quad v_\phi = \frac{\omega}{k} = c_0 \sqrt{\frac{I_\varphi}{I_d}} k; \quad (1.33)$$

для длинноволнового:

$$\omega = c_s k, \quad v_\phi = \frac{\omega}{k} = c_s. \quad (1.34)$$

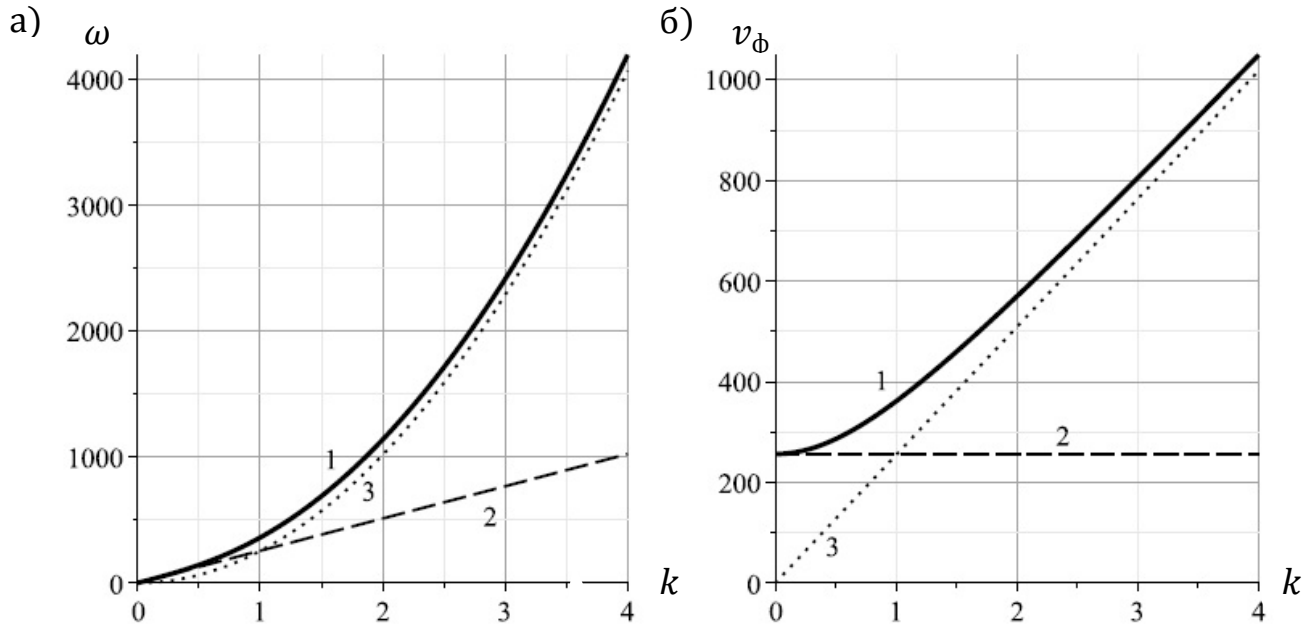


Рис.1.4

а) Дисперсионная кривая: 1,2,3 - угловая частота по формулам (1.31), (1.33) и (1.34) соответственно; б) Зависимость фазовой скорости от волнового числа: 1,2,3 - по формулам (1.32), (1.33) и (1.34).

Анализ полученных графиков позволяет сделать вывод, что при малых значениях волнового числа $k \rightarrow 0$ фазовая скорость v_ϕ близка к скорости распространения крутильной волны c_s и неограниченно возрастает при $k \rightarrow \infty$.

1.4.2. Теория В. З. Власова

Отличие теории стесненного кручения Власова от теории Тимошенко заключается в том, что в выражении кинетической энергии помимо кинетической энергии вращения, учитывается кинетическая энергия депланации. При этом выражение для потенциальной энергии по теории Власова остается идентичным

теории Тимошенко (1.20). Тогда дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня запишется в виде:

$$GI_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - EI_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - \rho I_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \rho I_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} = 0. \quad (1.35)$$

Подставив (1.29) в (1.35) получим дисперсионное уравнение, соответствующее модели Власова [16]:

$$GI_d k^2 + EI_\varphi k^4 - \rho I_r \omega^2 - \rho I_\varphi k^2 \omega^2 = 0. \quad (1.36)$$

Тогда зависимость между частотой ω и волновым числом k запишется:

$$\omega = k \sqrt{\frac{c_s^2 + c_0^2 (I_\varphi / I_r) k^2}{1 + (I_\varphi / I_r) k^2}}, \quad (1.37)$$

а фазовая скорость определится по формуле:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{c_s^2 + c_0^2 (I_\varphi / I_r) k^2}{1 + (I_\varphi / I_r) k^2}}. \quad (1.38)$$

Как и для теории Тимошенко рассмотрим зависимость частоты ω и фазовой скорости v_ϕ от волнового числа k в коротковолновом ($k \rightarrow \infty$) и длинноволновом ($k \rightarrow 0$) диапазонах.

Для коротковолнового диапазона частота и фазовая скорость определяются:

$$\omega = c_0 k, \quad v_\phi = \frac{\omega}{k} = c_0, \quad (1.39)$$

для длинноволнового:

$$\omega = c_s k, \quad v_\phi = \frac{\omega}{k} = c_s. \quad (1.40)$$

Закон частотной дисперсии показан на рис. 1.5а, а закон изменения фазовой скорости в зависимости от волнового числа на рис. 1.5б.

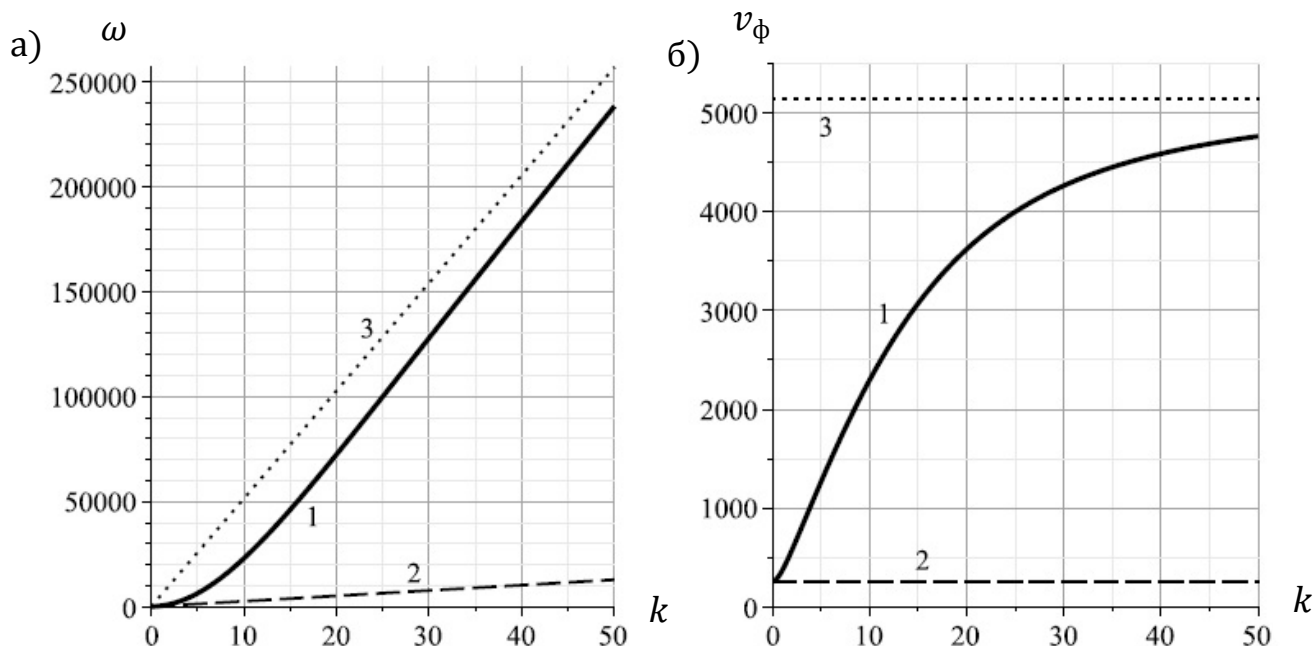


Рис 1.5

а) Дисперсионная кривая: 1,2,3 - угловая частота по формулам (1.37), (1.39) и (1.40) соответственно; б) Зависимость фазовой скорости от волнового числа: 1,2,3 - по формулам (1.37), (1.39) и (1.40).

Анализ полученных графиков позволяет сделать вывод, что при малых значениях волнового числа ($k \rightarrow 0$) волны распространяются с фазовыми скоростями ν_ϕ , близкими к скорости распространения крутильной волны c_s , а при ($k \rightarrow \infty$) - со скоростями, близкими к скорости продольных волн c_0 .

1.4.3. Теория В.И. Сливкера

Приведенные выше теории не учитывают энергию деформации сдвига. Рассмотрим теорию, предложенную В. И. Сливкером [74]. В рамках этой теории, названной полусдвиговой, функция угла закручивания $\theta(x)$ и функция меры депланации $\beta(x)$ являются независимыми. Тогда крутильные колебания тонкостенного стержня будут описываться системой двух дифференциальных уравнений.

Выражение для кинетической энергии деформации имеет вид:

$$W_k = \frac{1}{2} \left[\rho I_r \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \rho I_\omega \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (1.32)$$

где: ρ – плотность материала стержня;

I_r – полярный момент инерции;

I_ω – секториальный момент инерции.

Выражение для потенциальной энергии деформации стержня запишется:

$$W_p = \frac{1}{2} G I_x \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} E I_\omega \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} G I_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right)^2, \quad (1.33)$$

где: E – модуль Юнга;

$G = \frac{E}{2(1 + \gamma)}$ – модуль сдвига;

I_x – крутящий момент инерции;

$I_g = \frac{I_x}{(\psi - 1)}$ – депланационный момент инерции;

ψ – геометрический параметр (см. [23]);

γ – коэффициент Пуассона.

Составляя лагранжиан $L = W_k - W_p$ и применяя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского [18,24], а также выполнив необходимые преобразования и дифференцирования, получим систему уравнений крутильных колебаний стержня:

$$\begin{cases} \rho I_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - G(I_x + I_g) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + G I_g \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0; \\ \rho I_\omega \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} - E I_\omega \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - G I_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right) = 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Для анализа дисперсионных свойств будем искать решение (1.34), представляя вращение поперечного сечения и продольные смещения точек стержня, возникающие в результате депланации, в виде гармонической волны:

$$\theta(x, t) = \theta_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad \beta(x, t) = \beta_0 e^{i(\omega t - kx)}. \quad (1.35)$$

Тогда подставив (1.35) в (1.34) получим систему дисперсионных уравнений:

$$\begin{cases} -k^2 G I_d \theta_0 - k^2 G I_g \theta_0 + \rho I_r \omega^2 \theta_0 + i G I_g k \beta_0 = 0; \\ -k^2 E I_\omega \beta_0 - G I_g \beta_0 + \rho I_\omega \omega^2 \beta_0 - i G I_g k \theta_0 = 0. \end{cases} \quad (1.36)$$

Полученная система уравнений сводится к одному дисперсионному уравнению, которое имеет четвертый порядок относительно ω :

$$\rho^2 I_\varphi I_r \omega^4 - (\rho G I_r I_g + G \rho \psi I_\varphi I_g k^2 + E \rho I_\varphi I_r k^2) \omega^2 + G^2 I_g I_x k^2 + E G \psi I_\varphi I_g k^4 = 0. \quad (1.37)$$

Решая (1.37) как биквадратное уравнение получим зависимость частоты волны ω от волнового числа k . Обозначим:

$$A = \rho I_\varphi I_r; B = -\rho G I_r I_g; C = -G \rho \psi I_\varphi I_g - E G \psi I_\varphi I_g; \\ D = G^2 I_g I_x; F = E G \psi I_\varphi I_g.$$

Тогда:

$$\omega = \sqrt{\frac{-(B + C k^2) \pm \sqrt{(B + C k^2)^2 - 4A(D k^2 + F k^4)}}{2A}}. \quad (1.38)$$

Выражение (1.38) дает две дисперсионные ветви: знак минус соответствует акустической, а знак плюс - оптической ветви дисперсии.

Фазовая скорость волны определится выражением:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{-(B + C k^2) \pm \sqrt{(B + C k^2)^2 - 4A(D k^2 + F k^4)}}{2A k^2}}. \quad (1.39)$$

Проанализируем зависимость частоты ω и фазовой скорости v_ϕ от волнового числа k в коротковолновом ($k \rightarrow \infty$) и длинноволновом ($k \rightarrow 0$) диапазонах.

В коротковолновом диапазоне ($k \rightarrow \infty$):

- для акустической ветви:

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{G I_g \psi}{\rho I_r}} k = c_s \sqrt{\frac{\psi}{\psi - 1}} k, \quad v_{\phi 1} = \frac{\omega}{k} = c_s \sqrt{\frac{\psi}{\psi - 1}}; \quad (1.40)$$

- для оптической ветви:

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{E}{\rho}} k = c_0 k, \quad v_{\phi 1} = \frac{\omega}{k} = c_0. \quad (1.41)$$

В длинноволновом диапазоне ($k \rightarrow 0$):

- для акустической ветви:

$$\omega_2 \approx \sqrt{\frac{GI_d}{\rho I_r}} k = c_s k, \quad v_{\phi 2} = \frac{\omega}{k} = c_s; \quad (1.42)$$

- для оптической ветви:

$$\omega_2 \approx \sqrt{\frac{GI_g}{\rho I_\varphi}} \left[1 + \frac{I_\varphi}{2GI_g} \frac{EI_r + \frac{GI_d}{\psi - 1}}{I_r} k^2 \right] = c_\tau \sqrt{\frac{I_g}{I_\varphi}} \left[1 + \frac{I_\varphi (c_0^2 + \frac{c_s^2}{\psi - 1})}{2I_g c_\tau^2} k^2 \right]; \quad (1.43)$$

$$v_{\phi 2} = \frac{\omega}{k} = c_\tau \sqrt{\frac{I_g}{I_\varphi}} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{I_\varphi (c_0^2 + \frac{c_s^2}{\psi - 1})}{2I_g c_\tau^2} \right].$$

Для акустической дисперсионной ветви при любом значении волнового числа k фазовая скорость распространения волны близка к скорости распространения крутильной волны c_s в стержне Сен-Венана (рис. 1.6). Для оптической ветви дисперсии при высоких частотах фазовая скорость распространения волны близка к скорости распространения продольной волны в стержне Бернулли-Эйлера (рис. 1.7).

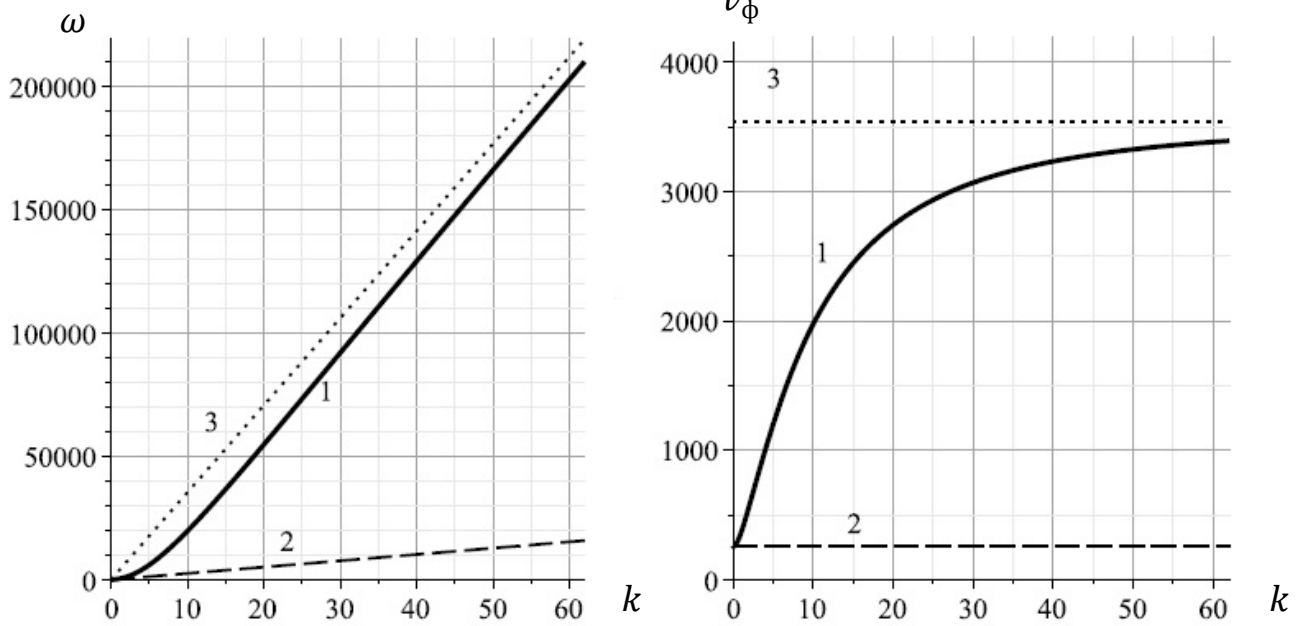


Рис 1.6

а) Дисперсионная кривая: 1,2,3 - угловая частота по формулам (1.38), (1.42) и (1.40) соответственно; б) Зависимость фазовой скорости от волнового числа: 1,2,3 - по формулам (1.39), (1.42) и (1.40).

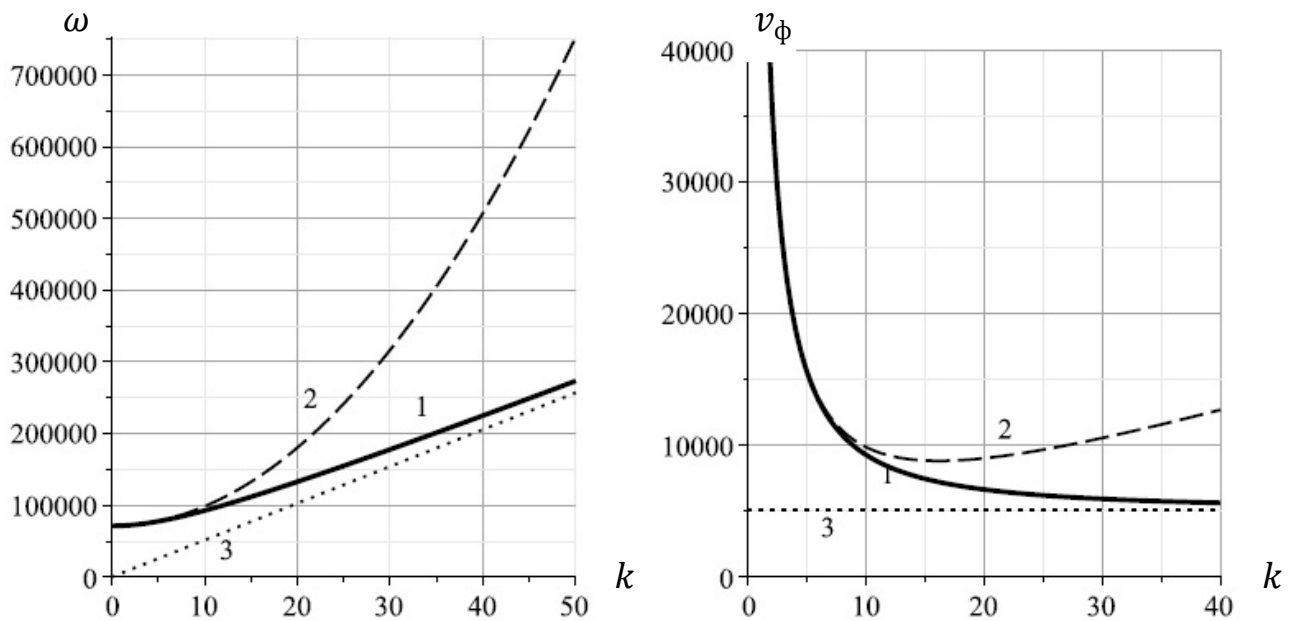


Рис 1.7

а) Дисперсионная кривая: 1,2,3 - угловая частота по формулам (1.38), (1.43) и (1.41) соответственно; б) Зависимость фазовой скорости от волнового числа: 1,2,3 - по формулам (1.39), (1.43) и (1.41).

1.4.4. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня с учетом нелинейности и депланации поперечного сечения стержня

Как отмечалось, если депланация неоднородна вдоль стержня, то кручение принято называть стесненным. По теориям Тимошенко и Власова депланация пропорциональна относительному углу закручивания, что приводит к дисперсии, то есть зависимости фазовой скорости крутильной волны от ее частоты.

В. И. Сливкером [74] предложена уточненная теория, в которой связь между углом закручивания $\theta(x, t)$ и мерой депланации $\beta(x, t)$ не постулируется как в теориях Тимошенко и Власова, а определяется в процессе решения задачи.

Для учета упругой нелинейности в выражении для плотности потенциальной энергии следует удерживать не только квадратичные слагаемые, но и слагаемые в четвертой степени:

$$W_p = \frac{1}{2}GI_x \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}EI_\omega \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}GI_g \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} - \beta\right)^2 + \alpha_1 \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^4 + \alpha_2 \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^4 + \alpha_3 \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} - \beta\right)^4, \quad (1.44)$$

где: α_i – коэффициенты, характеризующие геометрическую и физическую нелинейности стержня. Если стержень является геометрически нелинейным, то $\alpha_i > 0$, если – физически нелинейным, то $\alpha_i < 0$.

Составляя лагранжиан $L = W_k - W_p$ и применяя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского [18,24], получим систему уравнений динамики стержня:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_x}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_x}\right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0, \end{cases} \quad (1.45)$$

где введены обозначения:

$$\theta_t = \frac{\partial\theta}{\partial t}; \theta_x = \frac{\partial\theta}{\partial x}; \beta_t = \frac{\partial\beta}{\partial t}; \beta_x = \frac{\partial\beta}{\partial x}.$$

После проведения необходимых дифференцирований и преобразований (1.45) запишется в виде:

$$\begin{cases} \rho I_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - G(I_x + I_g) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + G I_g \frac{\partial \beta}{\partial x} + N_1 = 0 ; \\ \rho I_\omega \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} - E I_\omega \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - G I_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right) + N_2 = 0 . \end{cases} \quad (1.46)$$

Здесь через $N_{1,2}$ обозначены нелинейные слагаемые:

$$\begin{aligned} N_1 = & -12(\alpha_1 + \alpha_3) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 24\alpha_3 \beta \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 12\alpha_3 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \beta}{\partial x} - \\ & - 24\alpha_3 \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - 12\alpha_3 \beta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 12\alpha_3 \beta^2 \frac{\partial \beta}{\partial x} ; \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} N_2 = & -12\alpha_3 \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - 4\alpha_3 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^3 + 12\alpha_3 \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - 12\alpha_3 \frac{\partial \theta}{\partial x} \beta^2 + \\ & + 4\alpha_3 \beta^3 . \end{aligned} \quad (1.48)$$

Система (1.46) – (1.48) достаточно сложна для анализа. Для ее упрощения будем предполагать, что депланация $\beta(x, t)$ является малой. Поскольку нелинейные эффекты проявляются на величинах более высокого порядка малости, чем линейные, это позволяет учитывать депланацию только в линейной части уравнений, а в нелинейных слагаемых приближенно считать, что $\beta \approx \frac{\partial \theta}{\partial x}$. Тогда нелинейные слагаемые будут иметь вид:

$$N_1 = -12\alpha_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} ; \quad (1.49)$$

$$N_2 = -12\alpha_3 \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} . \quad (1.50)$$

При данных предположениях система уравнений (1.46) сводится к одному уравнению относительно $\theta(x, t)$. Для этого из первого уравнения системы выразим

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{(I_x + I_g) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}}{I_g} - \frac{I_r \rho}{G I_g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{12\alpha_1}{G I_g} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

и подставим его во второе уравнение, предварительно продифференцированное по переменной x .

Таким образом, нелинейное дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня с учетом деформации его поперечного сечения будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{EI_\omega(I_x + I_g)}{\rho I_g I_r} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - \frac{I_\omega}{I_g I_r G} [(I_x + I_g)G + EI_r] \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ & + \frac{I_\omega}{c_\tau^2 I_g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial t^4} - \frac{12I_\omega \alpha_1}{GI_g I_r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right] + \frac{12I_\omega \alpha_1 EI_\omega}{\rho I_r G I_g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right] - \\ & - \frac{12\alpha_1}{\rho I_r} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{12\alpha_3}{\rho I_r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Заметим, что уравнение (1.51) содержит в себе наряду с кубической нелинейностью, характерной для интенсивных крутильных колебаний стержней [24], еще и квадратичную нелинейность (последнее слагаемое), характерную для интенсивных продольных колебаний и не встречающуюся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания.

Воспользуемся заменой переменных t и x на безразмерные величины:

$$\tau = c_\tau t \sqrt{\frac{I_g}{I_\omega}}, \quad y = \frac{c_\tau x}{c_s} \sqrt{\frac{I_g}{I_\omega}},$$

тогда (1.51) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{E}{\rho c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{(I_x + I_g)c_\tau^2}{I_r c_s^2} \right] \theta - \\ & - \frac{12\alpha_1 c_\tau^2 I_g}{c_s^4 \rho I_r I_\omega} \left[1 + c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{E c_\tau^2 I_\omega}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \\ & + \frac{12\alpha_3 c_\tau^2 I_g}{c_s^4 \rho I_r I_\omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Стержень будем считать предварительно закрученным, то есть полагаем, что относительный угол поворота его сечения $\partial \theta / \partial y$ складывается из постоянной составляющей θ_0 и переменной $\tilde{\theta}(y, \tau)$, зависящей от координаты и времени:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \theta_0 + \tilde{\theta}(y, \tau). \quad (1.53)$$

Если $\tilde{\theta} \ll \theta_0$, то подставляя (1.53) в (1.52), предварительно продифференцировав его по y , получим линеаризованное относительно малых возмущений уравнение динамики:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{E}{\rho c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{(I_x + I_g)c_\tau^2}{I_r c_s^2} \right] \tilde{\theta} - \\ & - \frac{12\alpha_1 c_\tau^2 I_g \theta_0^2}{c_s^4 \rho I_r I_\omega} \left[1 + c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{E c_\tau^2 I_\omega}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} + \\ & + \frac{12\alpha_3 c_\tau^2 I_g \theta_0}{c_s^4 \rho I_r I_\omega} \frac{\partial^3 \tilde{\theta}}{\partial y^3} = 0. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Полагая далее $\alpha_3 = 0$ и задавая в (1.54) цифровые значения параметров, преобразуем это уравнение к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 400 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 200 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{\theta} - \\ & - 3 \cdot 10^5 \theta_0^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 400 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1 \right) \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Решение дисперсионного уравнения (1.55) будем искать в виде:

$$\theta(y, \tau) = A e^{i(\omega t - kx)}. \quad (1.56)$$

Тогда после подстановки в (1.56) и преобразований получим дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} & \omega^4 - \omega^2(1 + 600k^2 + 3 \cdot 10^5 \theta_0^2 k^2) + \\ & + (1 + 8 \cdot 10^4 k^2 + 12 \cdot 10^7 \theta_0^2 k^2 + 3 \cdot 10^5 \theta_0^2) k^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.57)$$

или можно записать:

$$\begin{aligned} & \omega^4 - \omega^2 k^2 \left(\frac{1}{k^2} + 600 + 3 \cdot 10^5 \theta_0^2 \right) + \\ & + k^2 (1 + 8 \cdot 10^4 k^2 + 12 \cdot 10^7 \theta_0^2 k^2 + 3 \cdot 10^5 \theta_0^2) = 0. \end{aligned} \quad (1.58)$$

При $\theta_0 = 0$ дисперсионное уравнение примет вид:

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 \left(\frac{1}{k^2} + 600 \right) + k^2 (1 + 8 \cdot 10^4 k^2) = 0. \quad (1.59)$$

Решая (1.57) и (1.59) как биквадратные уравнения, получим зависимость частоты волны ω от волнового числа k при $\theta_0 \neq 0$ и $\theta_0 = 0$.

Введем обозначения:

$$A = (1 + 8 \cdot 10^4 k^2), \quad B = \left(\frac{1}{k^2} + 600 \right), \quad C = k^2 B = (1 + 600k^2),$$

$$D = k^2 A = (k^2 + 8 \cdot 10^4 k^4), \quad F = \frac{dC}{dk} = 1200k, \quad G = \frac{dD}{dk} = (2k + 32 \cdot 10^4 k^3).$$

Тогда при $\theta_0 = 0$ круговая частота определится зависимостью:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{k^2 B \pm \sqrt{k^4 B^2 - 4k^2 A}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{C \pm \sqrt{C^2 - 4D}}{2}}; \quad (1.60)$$

фазовая скорость определяется по формуле:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \pm \sqrt{\frac{k^2 B \pm \sqrt{k^4 B^2 - 4k^2 A}}{2k^2}} = \pm \sqrt{\frac{C \pm \sqrt{C^2 - 4D}}{2k^2}}; \quad (1.61)$$

групповая скорость определится из выражения:

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \pm \frac{\left[F \pm \frac{CF - 2G}{\sqrt{C^2 - 4D}} \right]}{2\sqrt{\frac{C \pm \sqrt{C^2 - 4D}}{2}}}. \quad (1.62)$$

При $\theta_0 \neq 0$ и следующих обозначениях:

$$A_1 = (1 + 8 \cdot 10^4 k^2 + 12 \cdot 10^7 \theta_0^2 k^2 + 3 \cdot 10^5 \theta_0^2);$$

$$B_1 = \left(\frac{1}{k^2} + 600 + 3 \cdot 10^5 \theta_0^2 \right); \quad C_1 = k^2 B_1 = (1 + 600k^2 + 3 \cdot 10^5 \theta_0^2);$$

$$D_1 = k^2 A_1 = (k^2 + 8 \cdot 10^4 k^4 + 12 \cdot 10^7 \theta_0^2 k^2 + 3 \cdot 10^5 \theta_0^2);$$

$$F_1 = \frac{dC_1}{dk} = (1200k + 3 \cdot 10^5 \theta_0^2 k);$$

$$G_1 = \frac{dD_1}{dk} = (2k + 32 \cdot 10^4 k^3 + 48 \cdot 10^7 \theta_0^2 k^3 + 3 \cdot 10^5 \theta_0^2 k),$$

круговая частота определится по формуле:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{k^2 B_1 \pm \sqrt{k^4 B_1^2 - 4k^2 A_1}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4D_1}}{2}}; \quad (1.63)$$

фазовая скорость определяется выражением:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \pm \sqrt{\frac{k^2 B_1 \pm \sqrt{k^4 B_1^2 - 4k^2 A_1}}{2k^2}} = \pm \sqrt{\frac{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4D_1}}{2k^2}}; \quad (1.64)$$

групповая скорость определится из выражения:

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \pm \frac{\left[F_1 \pm \frac{C_1 F_1 - 2G_1}{\sqrt{C_1^2 - 4D_1}} \right]}{2 \sqrt{\frac{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4D_1}}{2}}}. \quad (1.65)$$

Зависимости частоты волны (ω) от волнового числа (k) при различных значениях постоянной составляющей угла поворота (θ_0) представлены на рисунках 1.8-1.14.

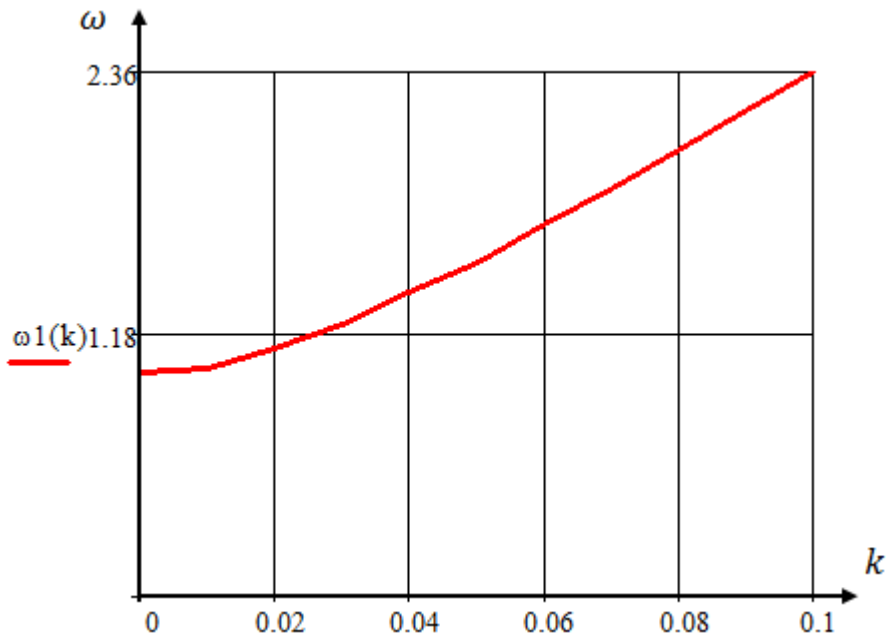


Рис. 1.8.

Дисперсионная кривая: угловая частота по формуле (1.60) $\theta_0 = 0$, при положительном знаке в уравнении.

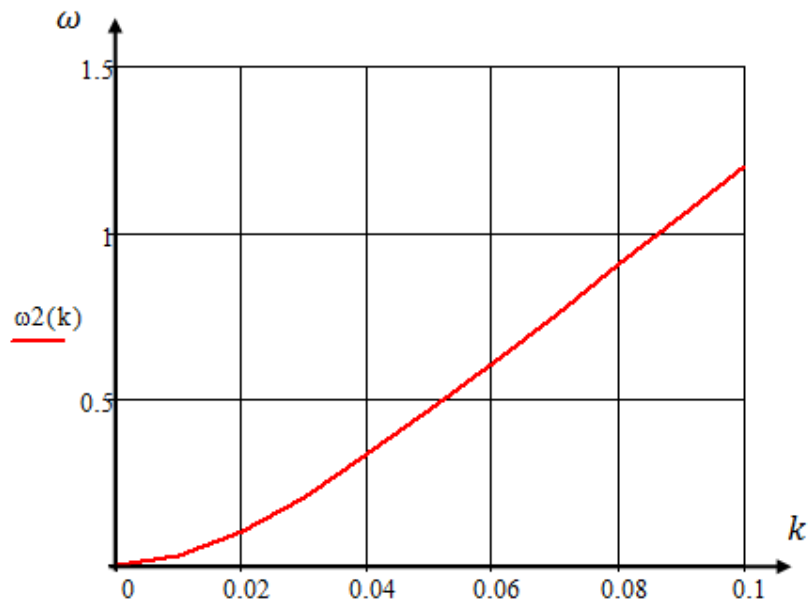


Рис. 1.9.

Дисперсионная кривая: угловая частота по формуле (1.60) $\theta_0 = 0$, при отрицательном знаке в уравнении.

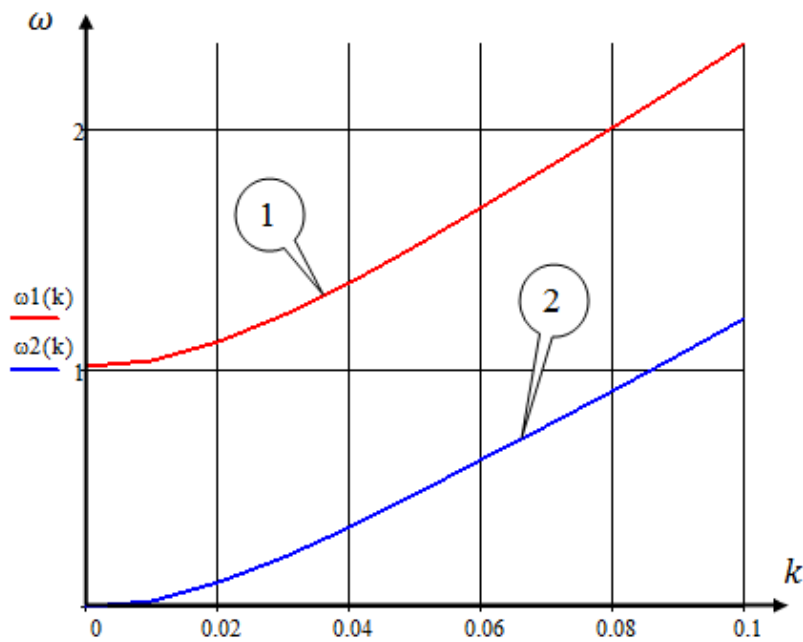


Рис. 1.10.

Дисперсионная кривая: угловая частота по формуле (1.60) $\theta_0 = 0$ при положительном (1) и отрицательном (2) знаке в уравнении.

Начальное значение частоты волны зависит от знака в уравнении (1.60). Кривая при взятом знаке «-» исходит из нуля, при знаке «+» начальное значение частоты в окрестностях единицы (рис 1.10). С увеличением волнового числа, кривые возрастают, при больших значениях k дисперсионные кривые стремятся к

прямым, при этом, построенная кривая со знаком «+» в уравнении (1.60) всегда будет выше.

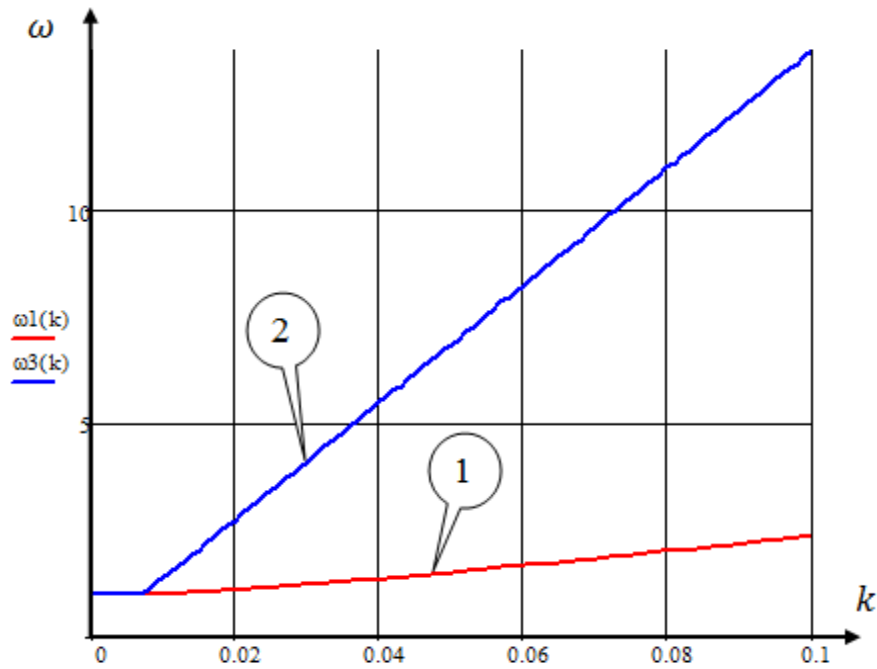


Рис. 1.11.

Дисперсионная кривая: угловая частота по формуле (1.60) $\theta_0 = 0$ – (1), по формуле (1.63) и $\theta_0 = 0,25$ – (2) при положительном знаке в уравнении.

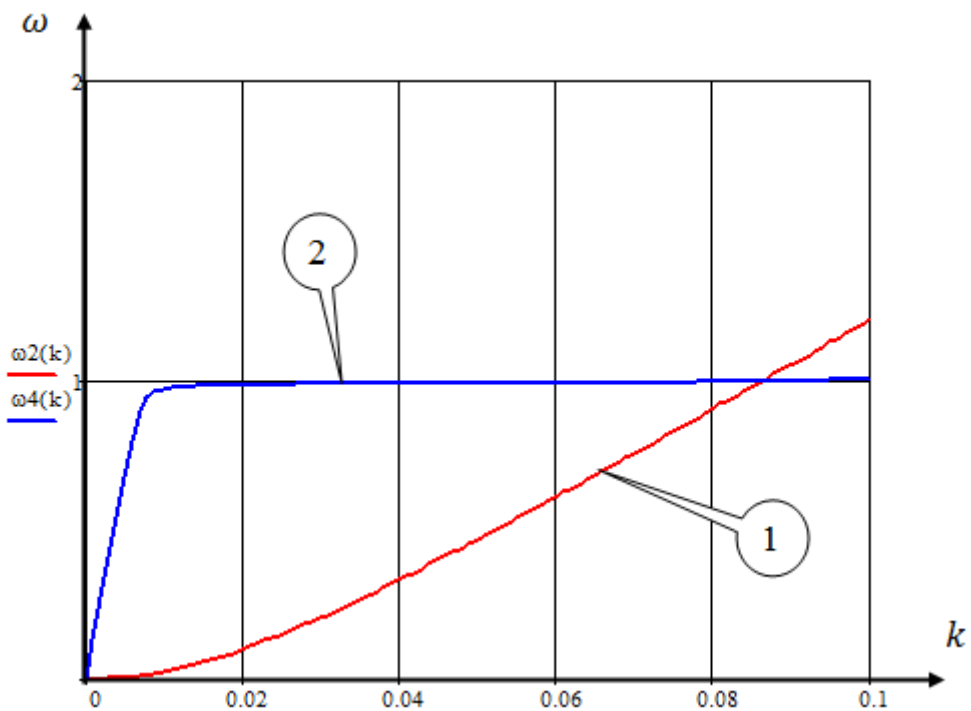


Рис. 1.12.

Дисперсионная кривая: угловая частота по формуле (1.60) $\theta_0 = 0$ – (1), по формуле (1.63) и $\theta_0 = 0,25$ – (2) при отрицательном знаке в уравнениях.

Начальное значение частоты волны (ω_0) не зависит от угла поворота (θ_0). Графики зависимостей исходят из одной точки (рис. 1.11, 1.12).

С увеличением волнового числа кривые расходятся при положительном знаке в уравнениях (1.60, 1.63). Кривая лежит тем выше, чем больше значение постоянной составляющей (θ_0) относительного угла закручивания (рис.1.13).

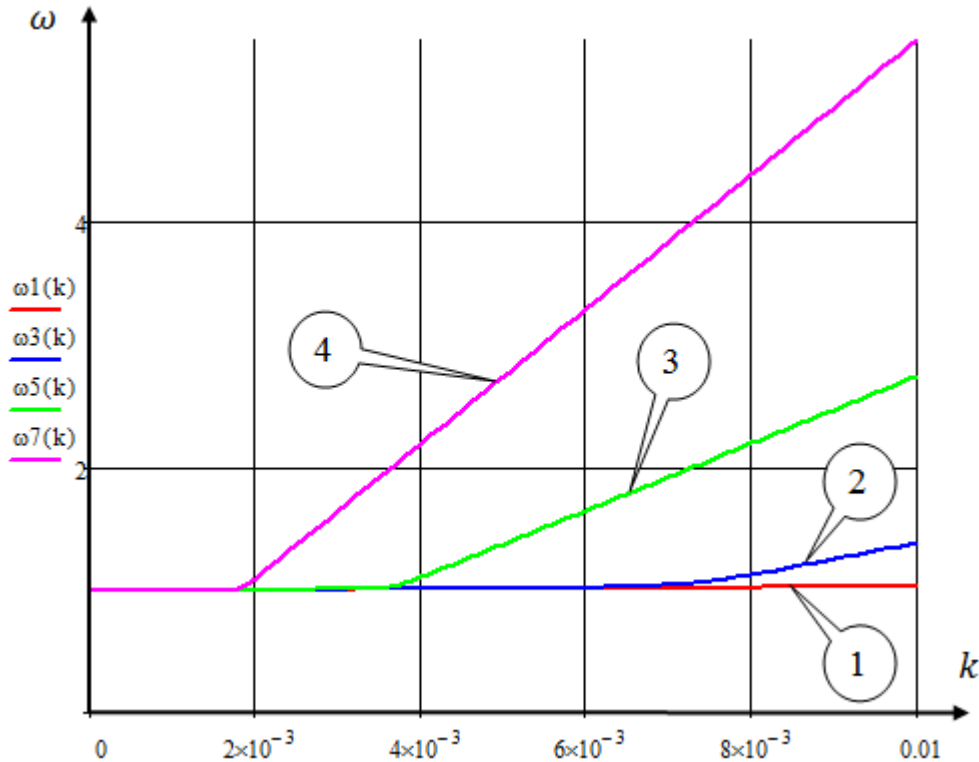


Рис. 1.13.

Дисперсионная кривая: угловая частота по формуле (1.60) $\theta_0 = 0$ – (1), по формуле (1.63) при $\theta_0 = 0,25$ – (2), $\theta_0 = 0,5$ – (3), $\theta_0 = 1$ – (4), с учетом положительного знака в уравнениях.

При знаке «-» в уравнениях (1.60, 1.63) кривые исходят из нуля, с увеличением волнового числа расходятся (рис.1.14). При больших значениях волнового числа дисперсионные кривые с заданным неравным нулю значением постоянной составляющей (θ_0) сближаются, стремясь в одну прямую, которая не совпадает с прямой при $\theta_0 = 0$.

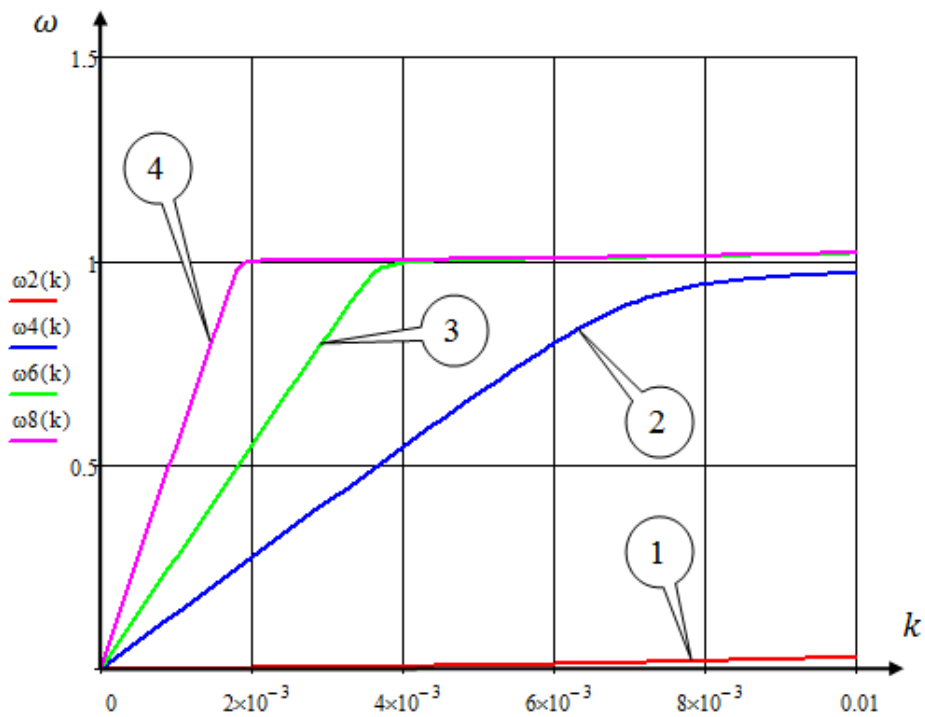


Рис. 1.14.

Дисперсионная кривая: угловая частота по формуле (1.60) $\theta_0 = 0$ – (1), по формуле (1.63) при $\theta_0 = 0,25$ – (2), $\theta_0 = 0,5$ – (3), $\theta_0 = 1$ – (4), с учетом отрицательного знака в уравнениях.

Ниже, на графиках представлены зависимости фазовой скорости от волнового числа в зависимости от постоянной составляющей относительного угла поворота, при различных значениях знака в уравнениях (1.61, 1.64).

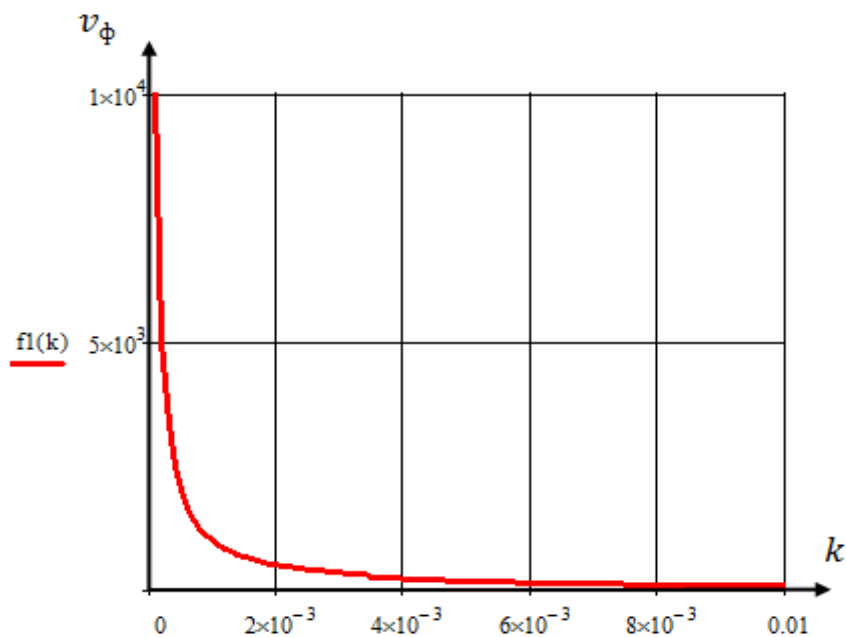


Рис. 1.15. Зависимость фазовой скорости от волнового числа: по формуле (1.61) при $\theta_0 = 0$ с учетом положительного знака в уравнении.

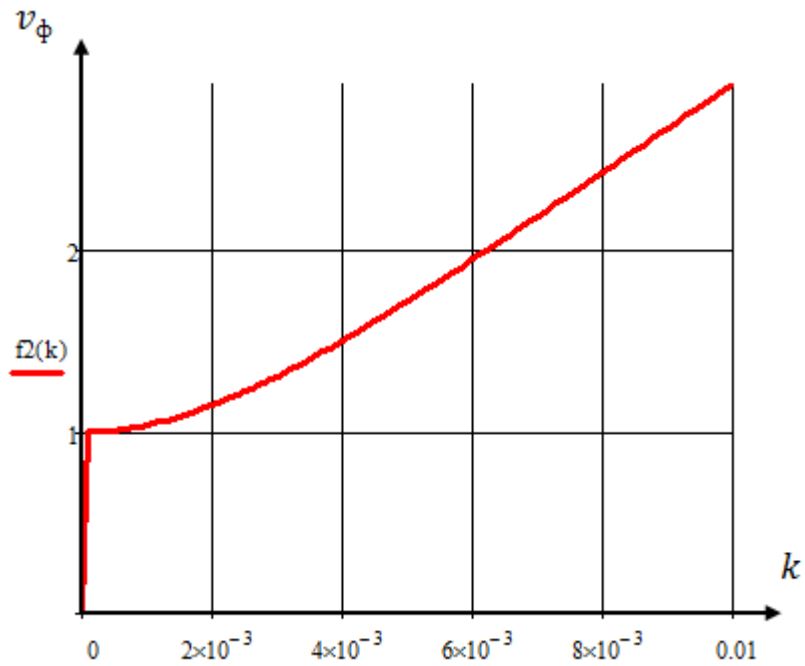


Рис. 1.16.

Зависимость фазовой скорости от волнового числа: по формуле (1.61) при $\theta_0 = 0$ с учетом отрицательного знака в уравнении.

Сравнение фазовых скоростей при знаке «+» и «-» в уравнении (1.61).

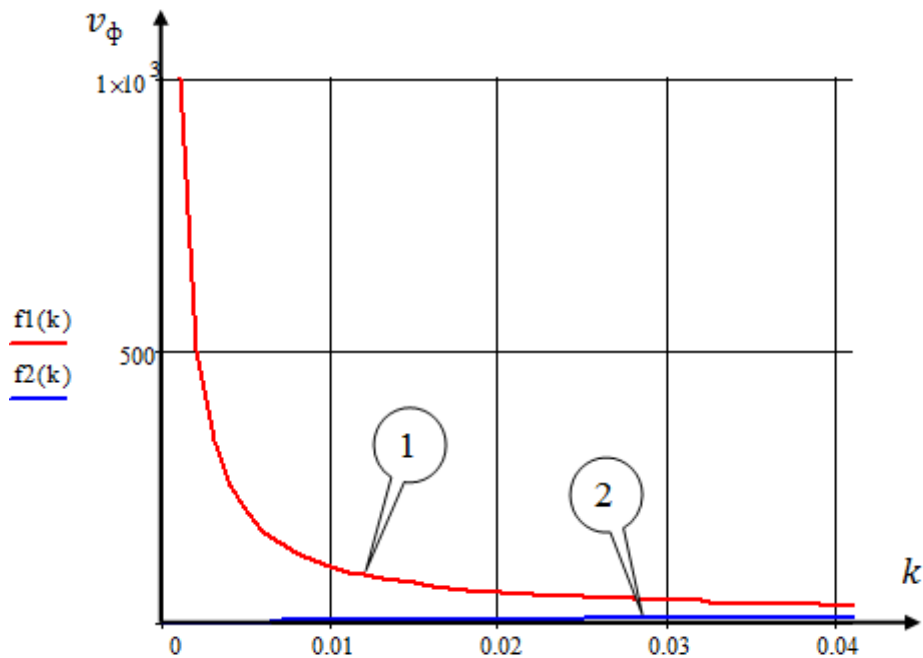


Рис. 1.17. Зависимость фазовой скорости от волнового числа: по формуле (1.61) при $\theta_0 = 0$ с учетом положительного знака в уравнении – (1) и отрицательном - (2).

С положительным знаком в уравнении (1.61) кривая из бесконечности стремится к некоторой асимптоте (рис.1.17), к которой же стремится и вторая кривая, исходящая из нуля (знак «-» в уравнении 1.61).

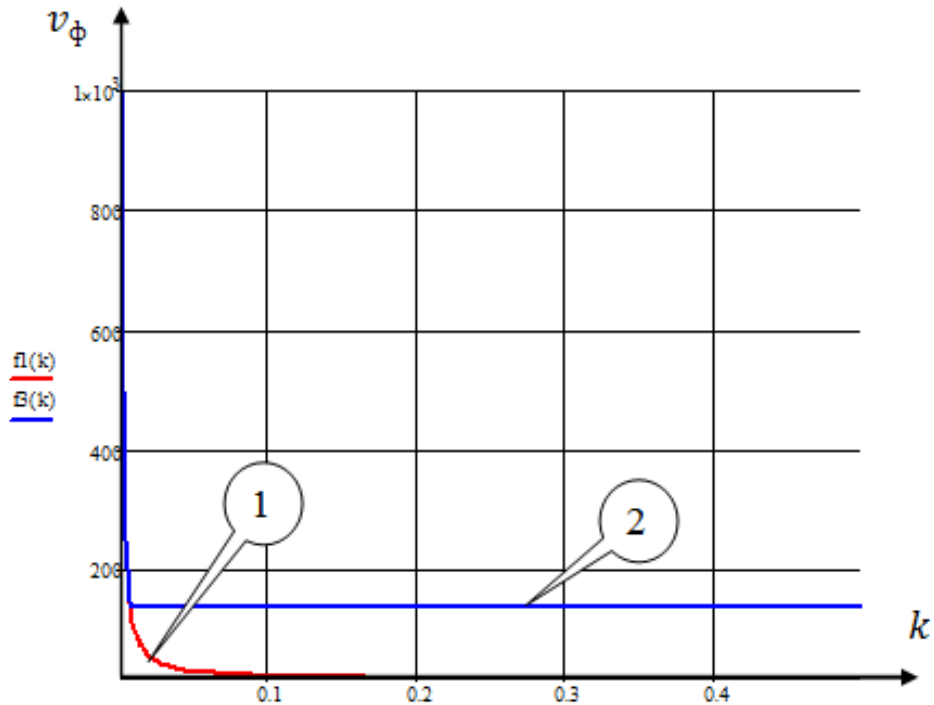


Рис. 1.18.

Зависимость фазовой скорости от волнового числа: по формуле (1.61)

при $\theta_0 = 0$ – (1), по формуле (1.64) при $\theta_0 = 0,25$ – (2)

с учетом положительного знака в уравнениях.

С положительным знаком в уравнениях (1.61, 1.64) кривая лежит тем выше, чем большее значение постоянного угла закручивания (θ_0). При больших значениях волнового числа (k) кривые стремятся к прямым (рис.1.18, 1.19).

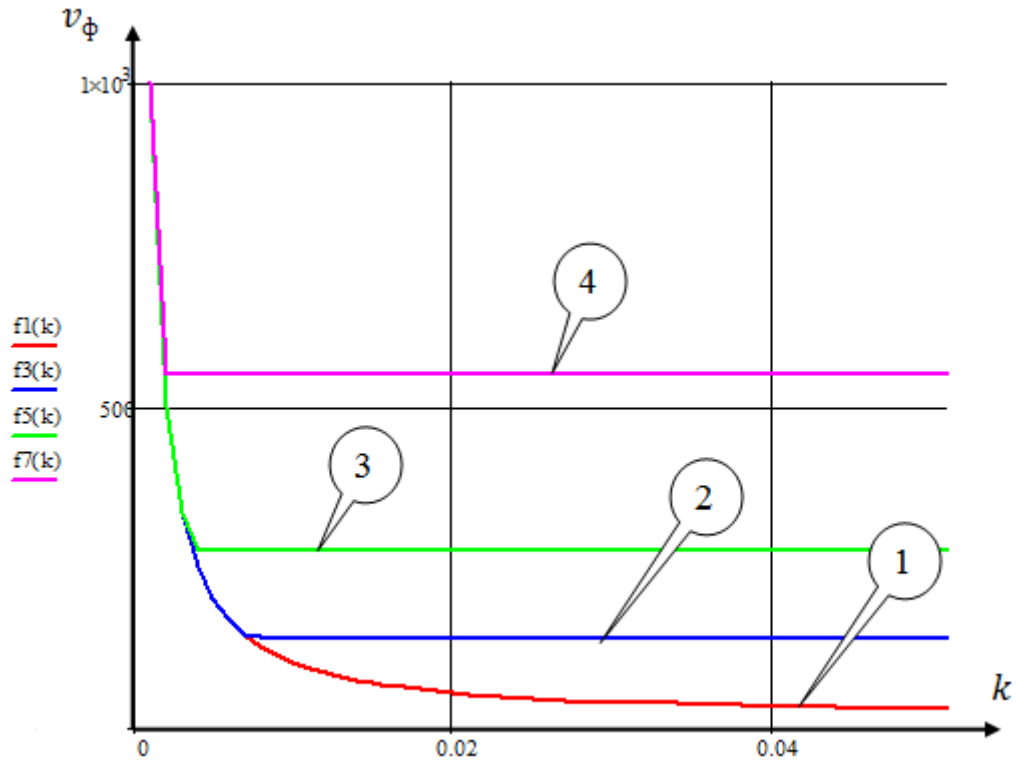


Рис. 1.19. Зависимость фазовой скорости от волнового числа: по формуле (1.61) при $\theta_0 = 0$ – (1), по формуле (1.64) при $\theta_0 = 0,25$ – (2), $\theta_0 = 0,5$ – (3), $\theta_0 = 1$ – (4), с учетом положительного знака в уравнениях.

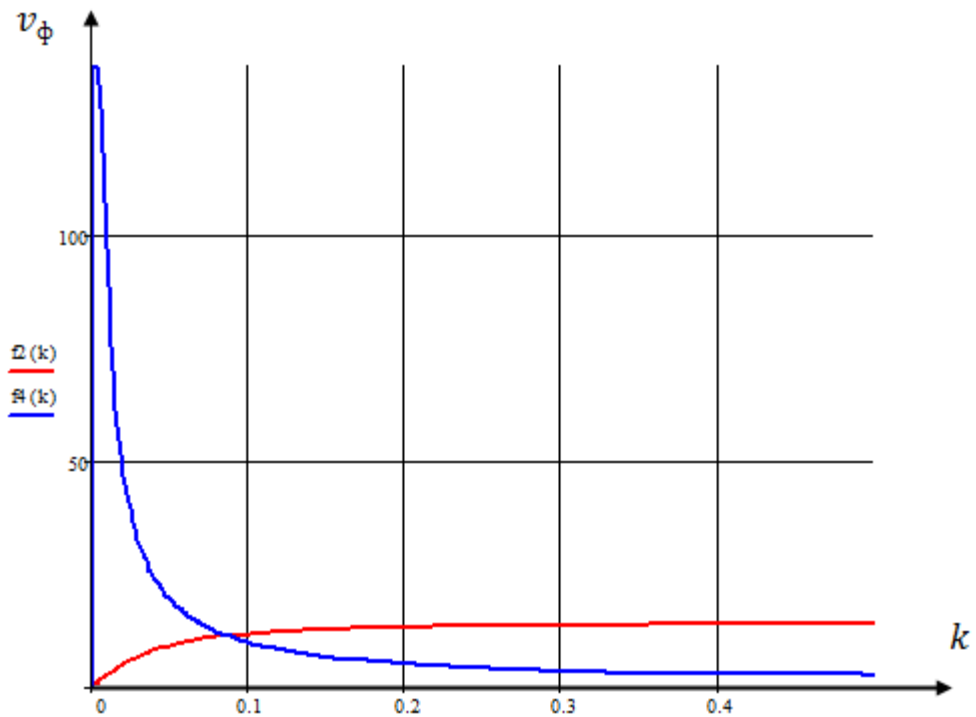


Рис. 1.20. Зависимость фазовой скорости от волнового числа: по формуле (1.61) при $\theta_0 = 0$ – (1), по формуле (1.64) при $\theta_0 = 0,25$ – (2) с учетом отрицательного знака в уравнениях.

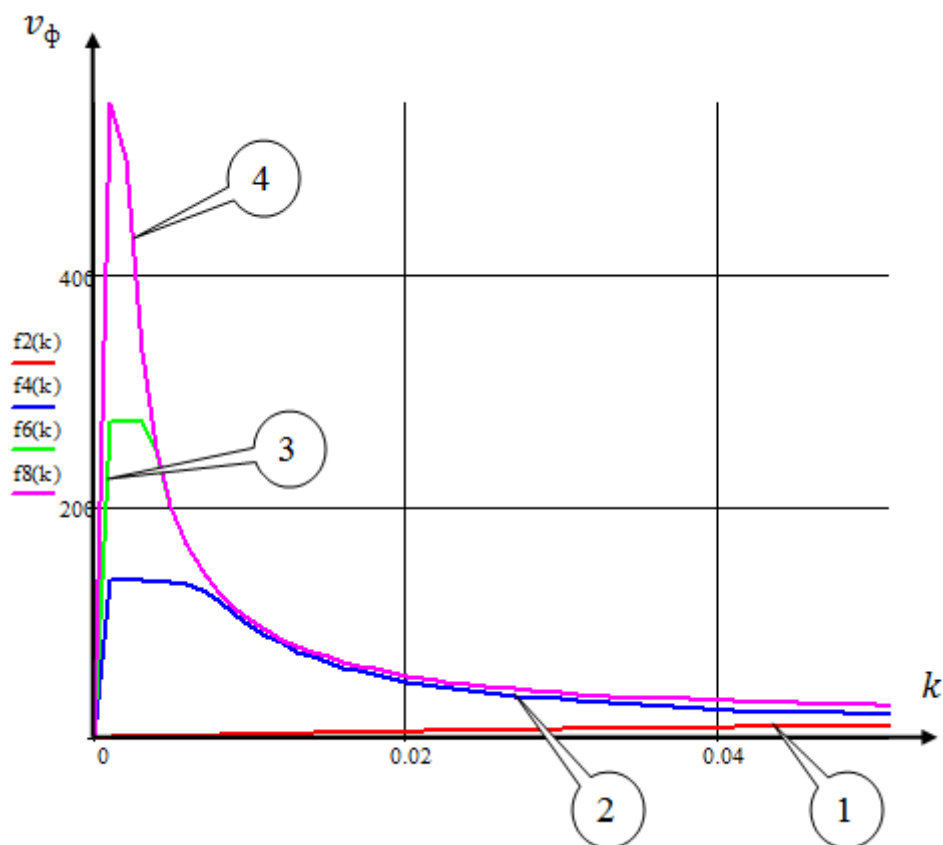


Рис. 1.21. Зависимость фазовой скорости от волнового числа: по формуле (1.61) при $\theta_0 = 0$ – (1), по формуле (1.64) при $\theta_0 = 0,25$ – (2), $\theta_0 = 0,5$ – (3), $\theta_0 = 1$ – (4), с учетом отрицательного знака в уравнениях.

С отрицательным знаком в уравнениях (1.61, 1.64) кривые исходят из нуля, поднимаются до пикового значения и далее, опускаясь, стремятся к первой кривой с $\theta_0 = 0$ (рис. 1.21). Пик на графике тем выше, чем большее значение постоянного угла закручивания (θ_0). После пикового значения кривые с начальным значением постоянного угла поворота более 0,25 сходятся в одну. При больших значениях волнового числа (k) кривые стремятся к прямым.

На рисунках 1.22 – 1.28 представлены зависимости групповой скорости ($v_{гр}$) от волнового числа (k) с учетом постоянной составляющей угла поворота (θ_0) и при разных знаках в уравнениях (1.62, 1.65).

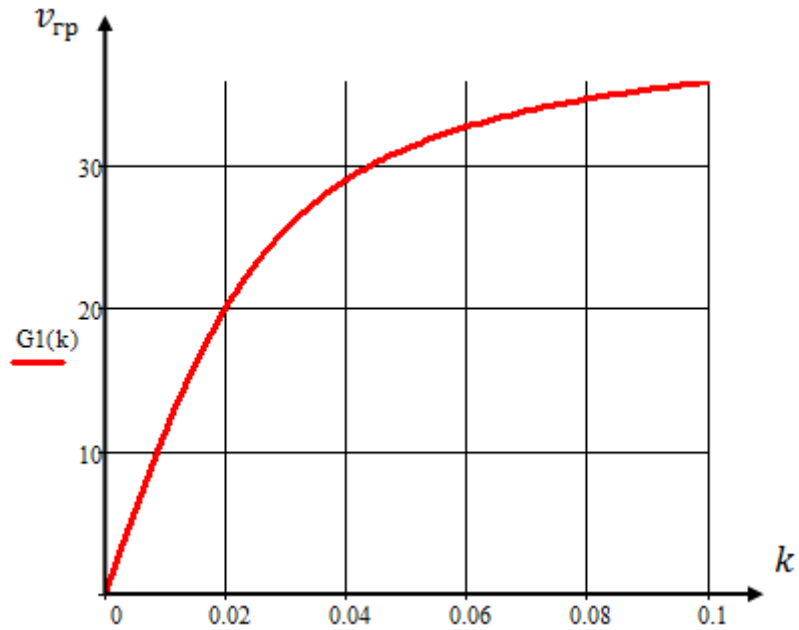


Рис. 1.22. Зависимость групповой скорости от волнового числа: по формуле (1.62) при $\theta_0 = 0$ с учетом положительного знака в уравнении.

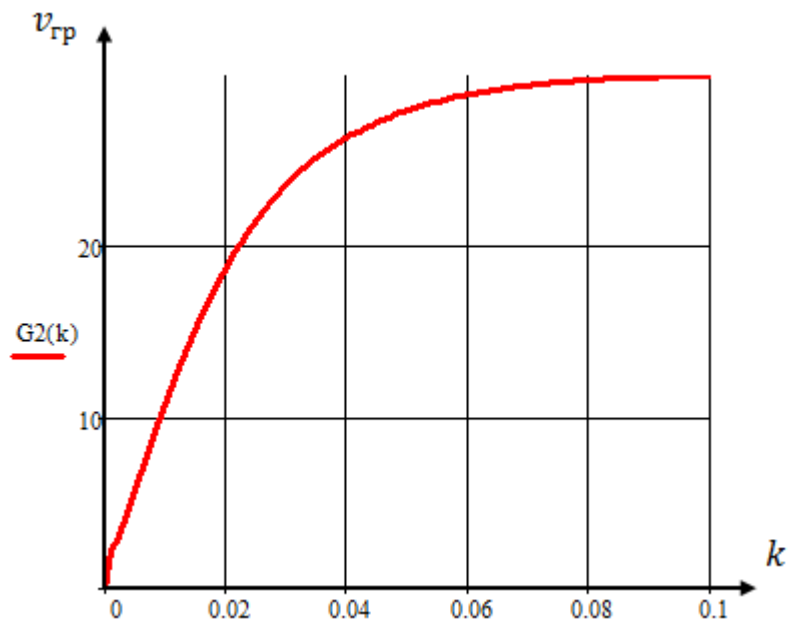


Рис. 1.23. Зависимость групповой скорости от волнового числа: по формуле (1.62) при $\theta_0 = 0$ с учетом отрицательного знака в уравнении.

Вне зависимости от знака в уравнениях (1.62, 1.65) кривые исходят из нуля (рис.1.24). В окрестностях нуля вторая кривая (знак «-») возрастает интенсивнее, но с увеличением волнового числа (k) кривая 1 располагается выше на графике.

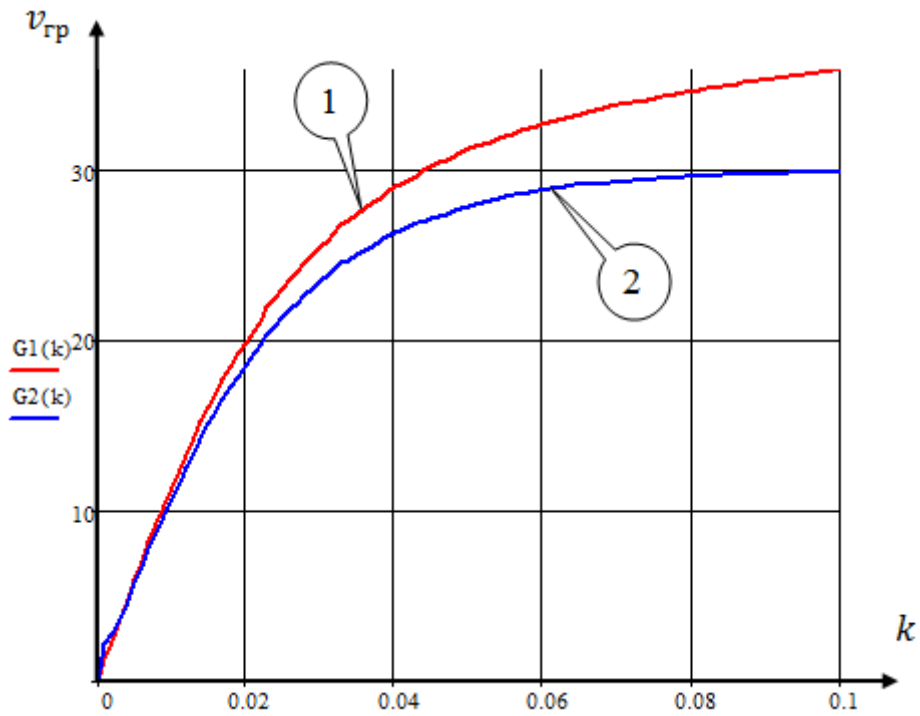


Рис. 1.24. Зависимость групповой скорости от волнового числа: по формуле (1.62) при $\theta_0 = 0$ при положительном (1) и отрицательном (2) знаке в уравнении.

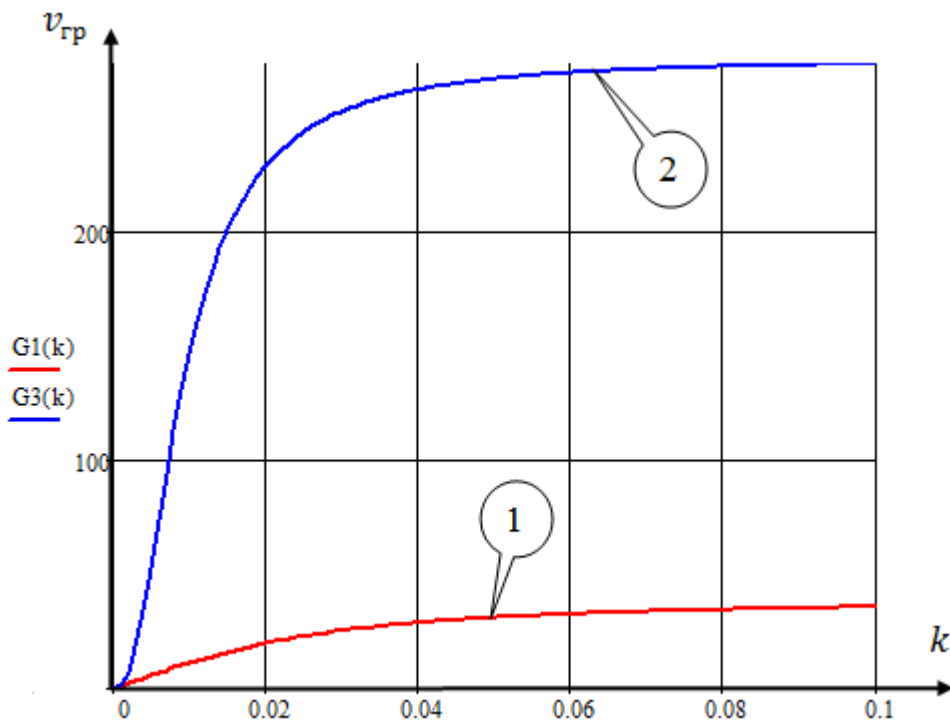


Рис. 1.25. Зависимость групповой скорости от волнового числа: по формуле (1.62) при $\theta_0 = 0$ – (1), по формуле (1.65) при $\theta_0 = 0,25$ – (2) с учетом положительного знака в уравнениях.

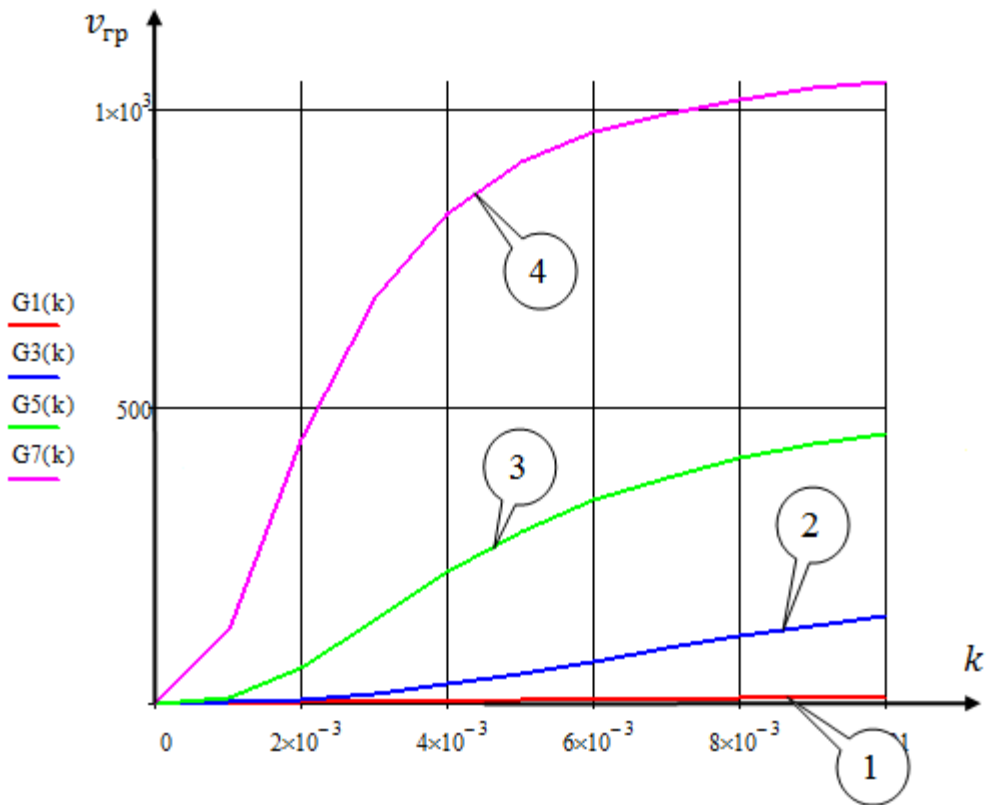


Рис. 1.26. Зависимость групповой скорости от волнового числа: по формуле (1.62) при $\theta_0 = 0$ – (1), по формуле (1.65) при $\theta_0 = 0,25$ – (2), $\theta_0 = 0,5$ – (3), $\theta_0 = 1$ – (4), с учетом положительного знака в уравнениях.

Вне зависимости от начального угла поворота (θ_0) кривые исходят из нуля, с увеличением они расходятся, чем большее значение θ_0 , тем более интенсивно возрастает кривая (рис. 1.25, 1.26). При больших значениях волнового числа (k) кривые стремятся к прямым.

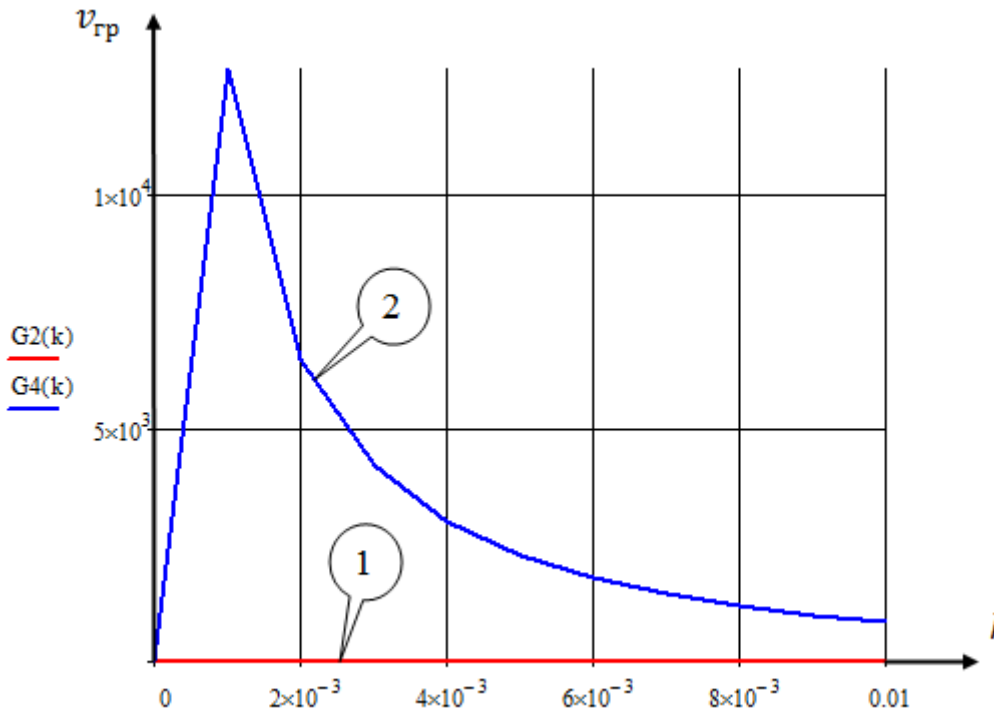


Рис. 1.27. Зависимость групповой скорости от волнового числа: по формуле (1.62) при $\theta_0 = 0$ – (1), по формуле (1.65) при $\theta_0 = 0,25$ – (2) с учетом отрицательного знака в уравнениях.

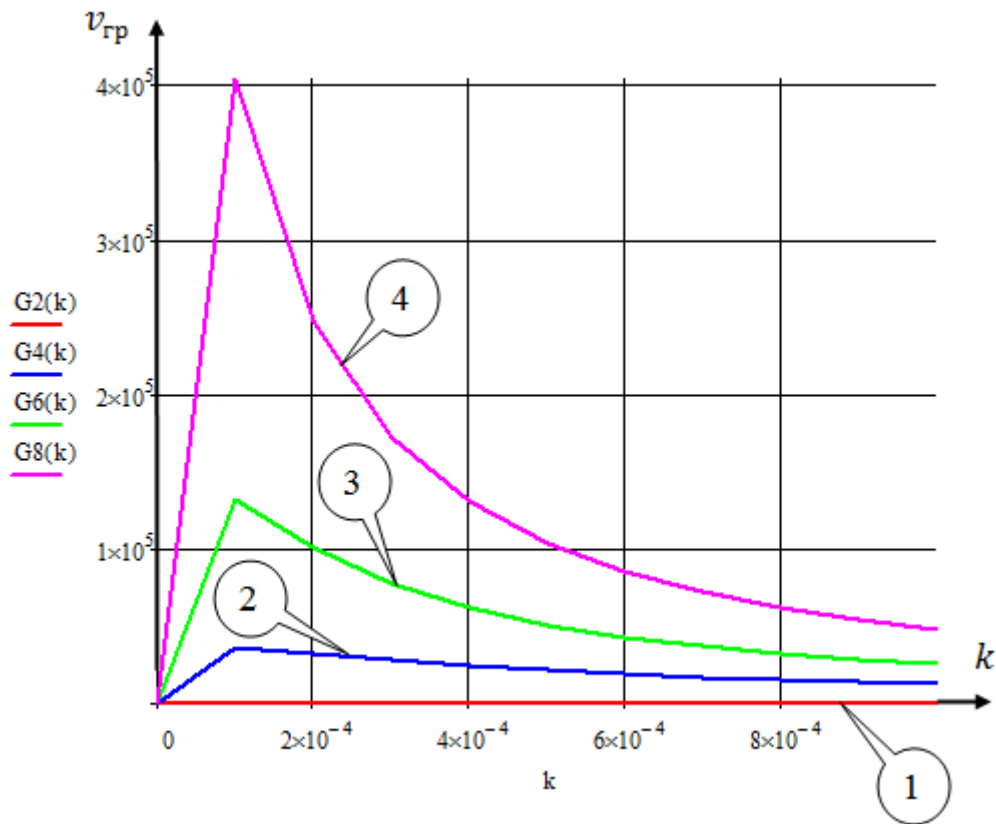


Рис. 1.28. Зависимость групповой скорости от волнового числа: по формуле (1.62) при $\theta_0 = 0$ – (1), по формуле (1.65) при $\theta_0 = 0,25$ – (2), $\theta_0 = 0,5$ – (3), $\theta_0 = 1$ – (4), с учетом отрицательного знака в уравнениях.

Аналогично фазовой скорости, с отрицательным знаком в уравнениях (1.62, 1.65) кривые исходят из нуля, поднимаются до пикового значения и далее, опускаясь, стремятся к первой кривой с $\theta_0 = 0$ (рис. 1.27, 1.28). Пик на графике тем выше, чем большее значение постоянного угла закручивания (θ_0). При больших значениях волнового числа кривые стремятся к прямым.

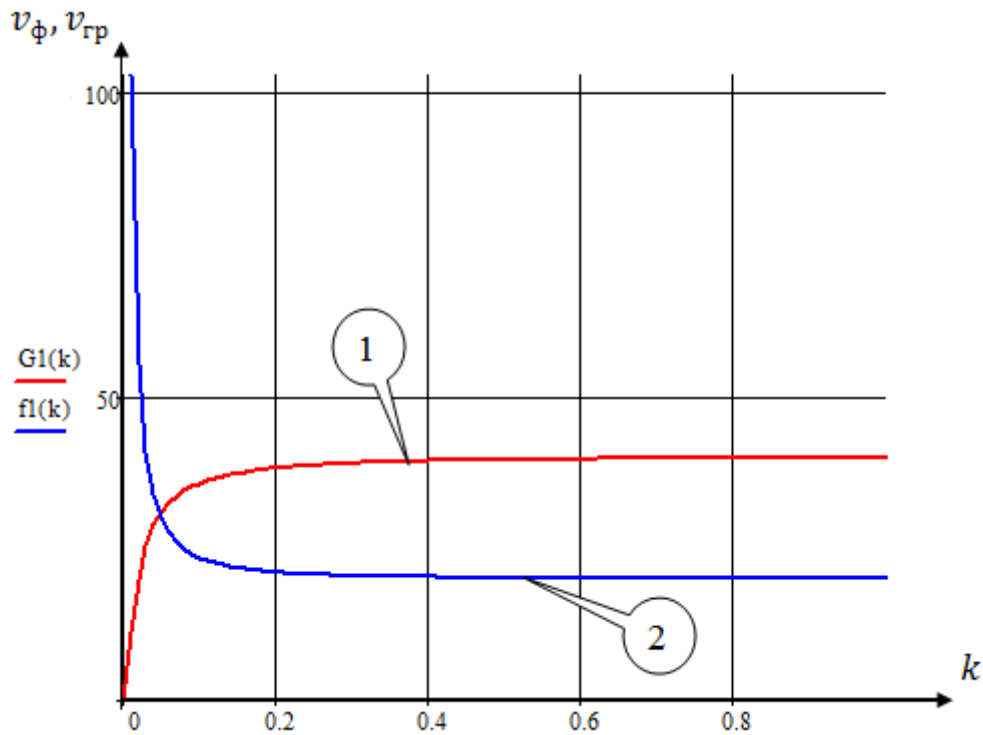


Рис. 1.29. Зависимость фазовой и групповой скоростей от волнового числа: по формулам (1.61 и 1.62) при $\theta_0 = 0$ с учетом положительного знака в уравнении.

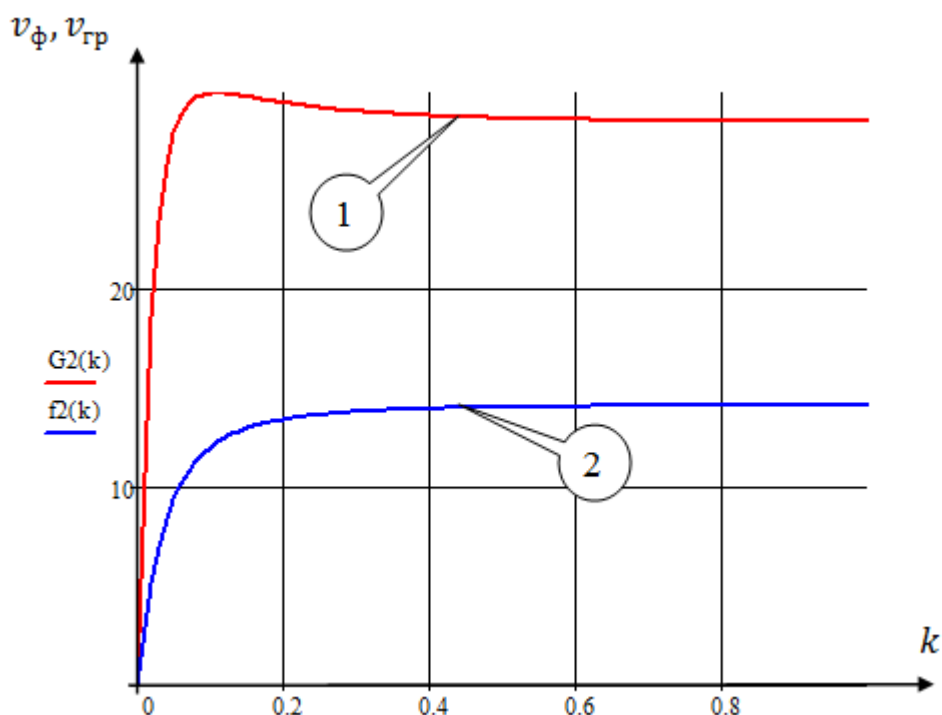


Рис. 1.30. Зависимость фазовой и групповой скоростей от волнового числа: по формулам (1.61 и 1.62) при $\theta_0 = 0$ с учетом отрицательного знака в уравнении.

Совместив графики зависимостей фазовых и групповых скоростей при различных знаках в уравнениях (1.61, 1.62), определяем дисперсию волн. С положительным знаком в уравнениях (рис. 1.29) дисперсия волны меняется с нормальной на аномальную при некотором значении волнового числа (k). С отрицательным знаком в уравнениях (рис. 1.30) дисперсия волны является аномальной $v_{\text{ф}} > v_{\text{гр}}$, при $k = 0$ дисперсия волны отсутствует.

ГЛАВА 2

НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЯХ

В главе 1 предложена математическая модель, позволяющая описать распространение крутильной волны в стержне. Модель включает в себя геометрическую и физическую упругие нелинейности и депланацию. В отличие от большинства известных моделей, здесь связь между углом закручивания стержня и мерой депланации находится в процессе решения задачи, а не постулируется. Определено, что депланация, приводящая к появлению дисперсии фазовой скорости крутильной волны, приводит еще и к появлению квадратичной нелинейности, характерной для интенсивных продольных колебаний и не встречавшейся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания.

В настоящей главе показано, что в стержне может формироваться нелинейная стационарная крутильная волна. Выявлено, что такая волна является периодической и движется быстрее, чем любые линейные возмущения. Волна имеет пилообразную форму, длина волны увеличивается с ростом ее амплитуды. Проанализированы нелинейные эффекты, проявляющиеся при распространении интенсивных крутильных волн в тонкостенном упругом стержне. В результате проведенного анализа показано, что совместное действие нелинейности (вызванной высокой интенсивностью вибрации) и дисперсией (обусловленной депланацией) в стержне могут формироваться несинусоидальные стационарные волны, распространяющиеся с постоянной скоростью без изменения формы.

2.1. Волновые процессы в тонкостенном стержне при учете квадратичной нелинейности

Будем далее рассматривать волновые процессы, учитывая квадратичную нелинейность ($\alpha_3 \neq 0$) и пренебрегая кубической нелинейностью ($\alpha_1 = 0$).

Уравнение (1.50) в этом случае можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{I_\omega}{c_\tau^2 I_g} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(I_x + I_g) c_\tau^2}{I_g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \theta + \\ + \frac{6\alpha_3}{\rho I_r} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь: $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость распространения продольных волн в стержне;

$c_\tau = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ – скорость распространения сдвиговых волн.

Линейные крутильные волны в стержне обладают дисперсией фазовой скорости [24]. Таким образом, на распространение крутильных волн, описываемых уравнением (2.1), будут влиять два фактора: нелинейность и дисперсия. Нелинейность приводит к зарождению в спектре волны новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия же наоборот, сглаживает перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волны. К формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения формы, может привести совместное действие этих факторов.

Обзор основных результатов теоретических и экспериментальных исследований нелинейных стационарных волн в стержнях, оболочках и пластинах содержится в работе [25].

Решение уравнения (2.1) будем искать в виде: $\theta(x, t) = \theta(\xi)$, где $\xi = x - Vt$, V – скорость стационарной волны (заранее не известна).

Для относительного угла закручивания поперечного сечения стержня

$$\Theta = \frac{d\theta}{d\xi}$$

уравнение в частных производных (2.1) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + m_1\Theta + m_2\frac{d}{d\xi}(\Theta)^2 = 0, \quad (2.2)$$

$$\text{где: } m_1 = \frac{V^2 - \frac{c_\tau^2 I_x}{I_r}}{\frac{I_\omega}{c_\tau^2 I_g} \left(V^2 - \frac{(I_x + I_g)c_\tau^2}{I_g} \right) (V^2 - c_0^2)},$$

$$m_2 = \frac{6\alpha_3 c_\tau^2 I_g}{\rho I_r I_\omega \left(V^2 - \frac{(I_x + I_g)c_\tau^2}{I_g} \right) (V^2 - c_0^2)}.$$

Анализ уравнения (2.2) на фазовой плоскости $(\Theta, \frac{d\Theta}{d\xi})$ показывает, что замкнутые фазовые траектории, а только им соответствуют финитные решения уравнения, возможны, если $m_1 > 0$. Следовательно, нелинейные крутильные стационарные волны могут существовать лишь при $m_1 > 0$. Это возможно, если нелинейная волна является «быстрой», т.е. ее скорость превышает скорости всех линейных возмущений:

$$V > c_0 > c_\tau \sqrt{\frac{(I_x + I_g)}{I_g}} > c_s, \quad (2.3)$$

или если нелинейная волна является «медленной» и ее скорость лежит в интервале:

$$c_s < V < c_\tau \sqrt{\frac{(I_x + I_g)}{I_g}}. \quad (2.4)$$

В начале координат на фазовой плоскости имеется особая точка типа «центр». Устойчивые движения определяет прямая $\frac{d\Theta}{d\xi} = \varepsilon^*$ (замкнутые фазовые траектории):

$$\varepsilon^* = \frac{m_1}{2m_2} = \frac{\rho I_r c_s^2}{12\alpha_3} \left(\frac{V^2}{c_s^2} - 1 \right). \quad (2.5)$$

Этот параметр растет с увеличением относительного значения скорости нелинейной стационарной волны, т.е. $|\varepsilon^*| \sim \left(\frac{V}{c_s}\right)^2$, и уменьшается с увеличением α_3 : $|\varepsilon^*| \sim 1/|\alpha_3|$. Знак m_2 определяется знаком α_3 .

На рис. 2.1 показан фазовый портрет уравнения (2.2) при $\alpha_3 < 0$ (а) и профиль стационарной волны, при амплитудах, близких к ε^* (б).

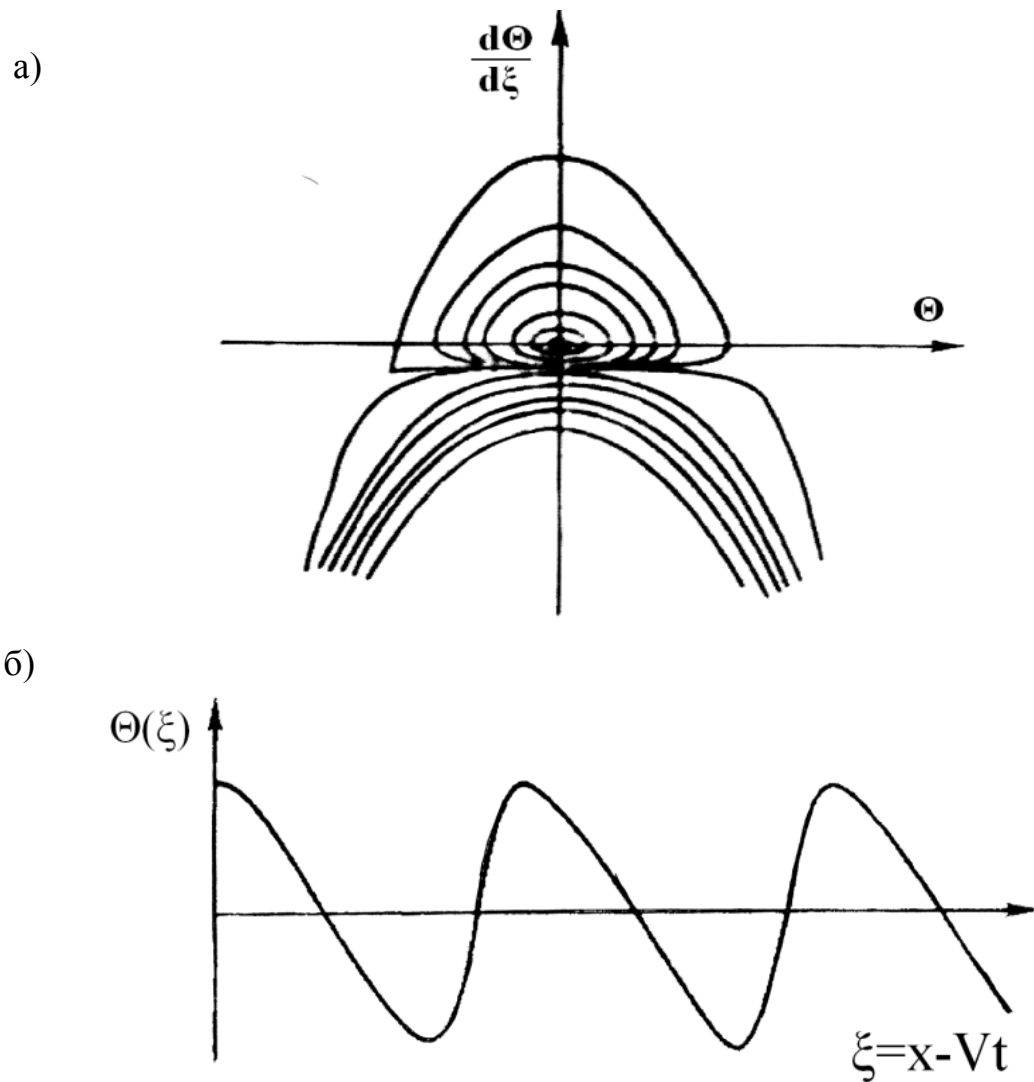


Рис.2.1

Аналитические построения, выполненные для случая $\alpha_3 > 0$, показаны на рис.2.2 (а,б).

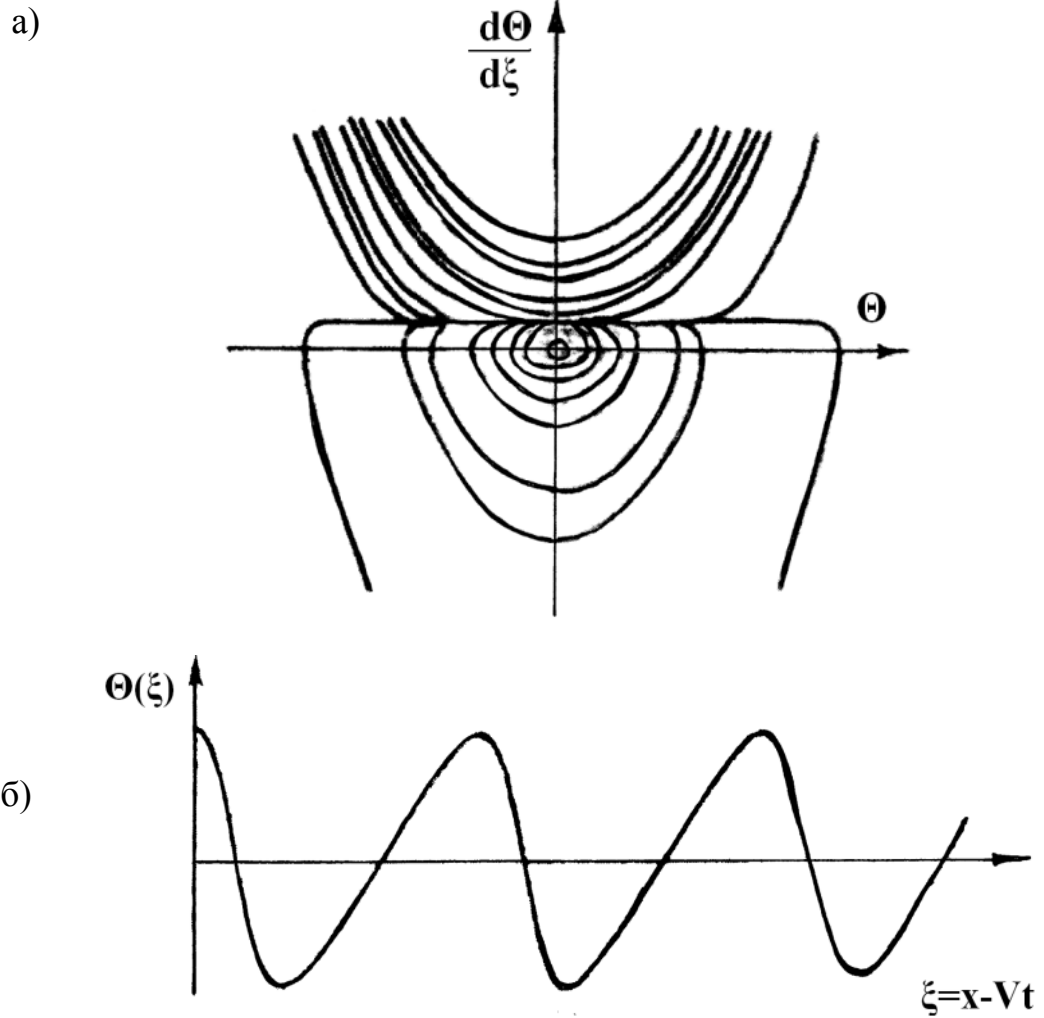


Рис 2.2.

Фазовый портрет позволяет оценить зависимость волнового числа нелинейной волны (k) от ее амплитуды (a):

$$\frac{k}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a/a_0}{\pi\epsilon^*}\right)^2}}, \quad (2.6)$$

где: k_0, a_0 — волновое число и амплитуда гармонической (линейной) волны.

С ростом амплитуды волны относительное значение волнового числа уменьшается (длина волны растет) (рис.2.3).

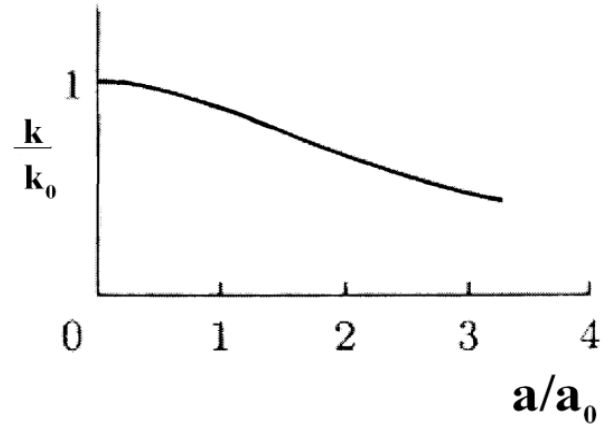


Рис 2.3.

Профили нелинейной волны при фиксированной амплитуде ($a/a_0 = \text{const}$) и различных значениях ε^* приведены на рис. 2.4.

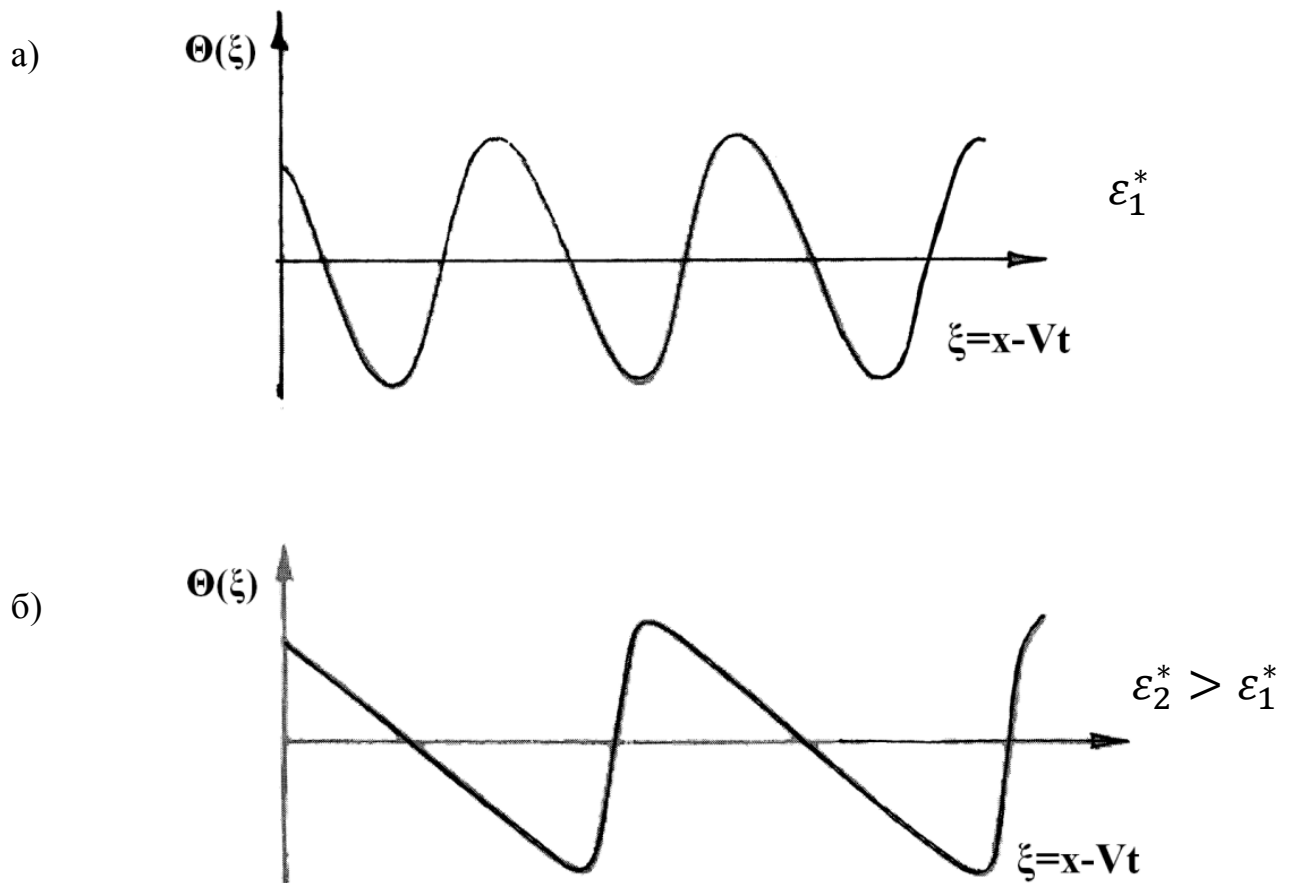


Рис.2.4.

2.2. Волновые процессы в тонкостенном стержне при учете кубической нелинейности

Будем рассматривать волновые процессы, которые могут происходить в стержне при учете кубической нелинейности ($\alpha_1 \neq 0$) и пренебрежении квадратичной нелинейностью ($\alpha_3 = 0$).

Уравнение (1.50) в этом случае можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{I_\omega}{c_\tau^2 I_g} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{I_x + I_g}{I_g} c_\tau^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \theta - \\ - \frac{4\alpha_1}{\rho I_r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь: θ – угол поворота поперечного сечения, ρ – плотность материала, I_ω – секториальный момент инерции, I_r – полярный момент инерции, I_x – крутящий момент инерции, $I_g = I_x / (\Psi - 1)$, Ψ – геометрический параметр (см. [23]), $c_s = \sqrt{GI_x / \rho I_r}$ – скорость распространения крутильных волн в стержне, $c_\tau = \sqrt{G / \rho}$ – скорость распространения сдвиговых волн, $c_0 = \sqrt{E / \rho}$ – скорость распространения продольных волн в стержне, E – модуль Юнга, $G = E / (2(1 + \nu))$ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Третье слагаемое в уравнении (2.7) появилось из-за наличия депланации, приводящей к возникновению дисперсии фазовой скорости крутильной волны [2,18]; четвертое слагаемое появилось в уравнении из-за наличия нелинейности.

Геометрическую и физическую нелинейности стержня характеризует коэффициент α_1 . Если стержень является геометрически нелинейным, то $\alpha_1 > 0$, если физически нелинейным, то $\alpha_1 < 0$.

Подобно случаю, рассмотренному в пункте 2.1, на распространение крутильных волн, описываемых уравнением (2.7), будут так же влиять два фактора: нелинейность и дисперсия. Нелинейность приводит к зарождению в спектре волны новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия же, наоборот, сглаживает перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волны. Совместное действие

этих факторов может привести к формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения формы.

Обзор основных результатов теоретических и экспериментальных исследований нелинейных стационарных волн в стержнях, пластинах и оболочках приведен в работе [25].

Решение уравнения (2.7) будем искать в виде: $\theta(x, t) = \theta(\xi)$,

где: $\xi = x - Vt$,

V – скорость стационарной волны (заранее не известна).

Для относительного угла закручивания поперечного сечения стержня $\Theta = d\theta/d\xi$ уравнение в частных производных (2.7) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению (уравнение Дуффинга):

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + m_1\Theta + m_2\Theta^3, \quad (2.8)$$

где:

$$m_1 = \frac{(V^2 - c_s^2)c_\tau^2 I_g}{I_\omega \left[V^2 - \left((I_x + I_g)/I_g \right) c_\tau^2 \right] (V^2 - c_0^2)} ; \quad (2.9)$$

$$m_2 = \frac{-4\alpha_1 c_\tau^2 I^2}{\rho I_r I_\omega \left[V^2 - \left((I_x + I_g)/I_g \right) c_\tau^2 \right] (V^2 - c_0^2)} .$$

Для входящих в (2.9) скоростей линейных возмущений справедливо следующее неравенство:

$$c_0 > c_\tau \sqrt{\frac{I_x + I_g}{I_g}} > c_\tau > c_s .$$

Если стержень обладает геометрической нелинейностью ($\alpha_1 > 0$), то стационарных крутильных волн не существует в диапазоне скоростей $V < c_s$. Во всех других диапазонах нелинейные стационарные волны могут формироваться. Однако, в зависимости от величины скорости V имеются качественно различные волновые картины, поскольку при этом уравнение Дуффинга (2.8) имеет различные решения.

Уравнение (2.8) имеет первый интеграл:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Theta}{d\xi} \right)^2 = E - \frac{m_1}{2} \Theta^2 - \frac{m_1}{4} \Theta^4, \quad (2.10)$$

который можно интерпретировать как закон сохранения энергии для ангармонического осциллятора. Здесь E – константа интегрирования, имеющая смысл начальной энергии системы, а функция $f(\Theta) = (m_1/2)\Theta^2 - (m_2/4)\Theta^4$ имеет смысл потенциальной энергии.

Уравнение (2.10) допускает разделение переменных:

$$\sqrt{2} d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{E - f(\Theta)}} \quad (2.11)$$

и имеет ограниченные решения в области между любыми действительными корнями полинома $E - f(\Theta)$, где $E - f(\Theta) > 0$.

Пусть $m_1 > 0$, $m_2 < 0$, это возможно если скорость стационарной волны находится в диапазоне $c_s < V < c_{\tau} \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$ или $V > c_0$. В этом случае функция потенциальной энергии $f(\Theta) = (m_1/2)\Theta^2 - (m_2/4)\Theta^4$ имеет локальный максимум $f_{max} = -m_1^2/4m_2$ в точках $\Theta = \pm \sqrt{-m_1/m_2}$ и локальный минимум $f_{min} = 0$ при $\Theta = 0$ (рис. 2.5а). Поэтому на фазовой плоскости $(\Theta; d\Theta/d\xi)$ точка $(0; 0)$ является устойчивым положением равновесия типа «центр», а точки $(\pm \sqrt{m_1/m_2}; 0)$ – неустойчивыми положениями равновесия типа «узел». Фазовый портрет системы приведен на (рис 2.5б).

Ограниченные решения уравнения (2.11) в этом случае существуют только при $0 \leq E \leq f_{max}$. При этом полином $E - f(\Theta)$ имеет четыре действительных корня $\Theta_{1,2} = \pm\alpha$, $\Theta_{3,4} = \pm\beta$, где

$$\alpha^2 = \frac{m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{-m_2}, \quad \beta^2 = \frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{-m_2}, \quad (\alpha^2 > \beta^2) \quad (2.12)$$

и принимает положительные значения при $-\alpha < \Theta < \alpha$ (рис. 1а). При $E = f_{max} = -m_1/4m_2$ корни попарно совпадают $\Theta_1 = \Theta_3$, $\Theta_2 = \Theta_4$, что соответствует на фазовой плоскости движению по сепаратрисе.

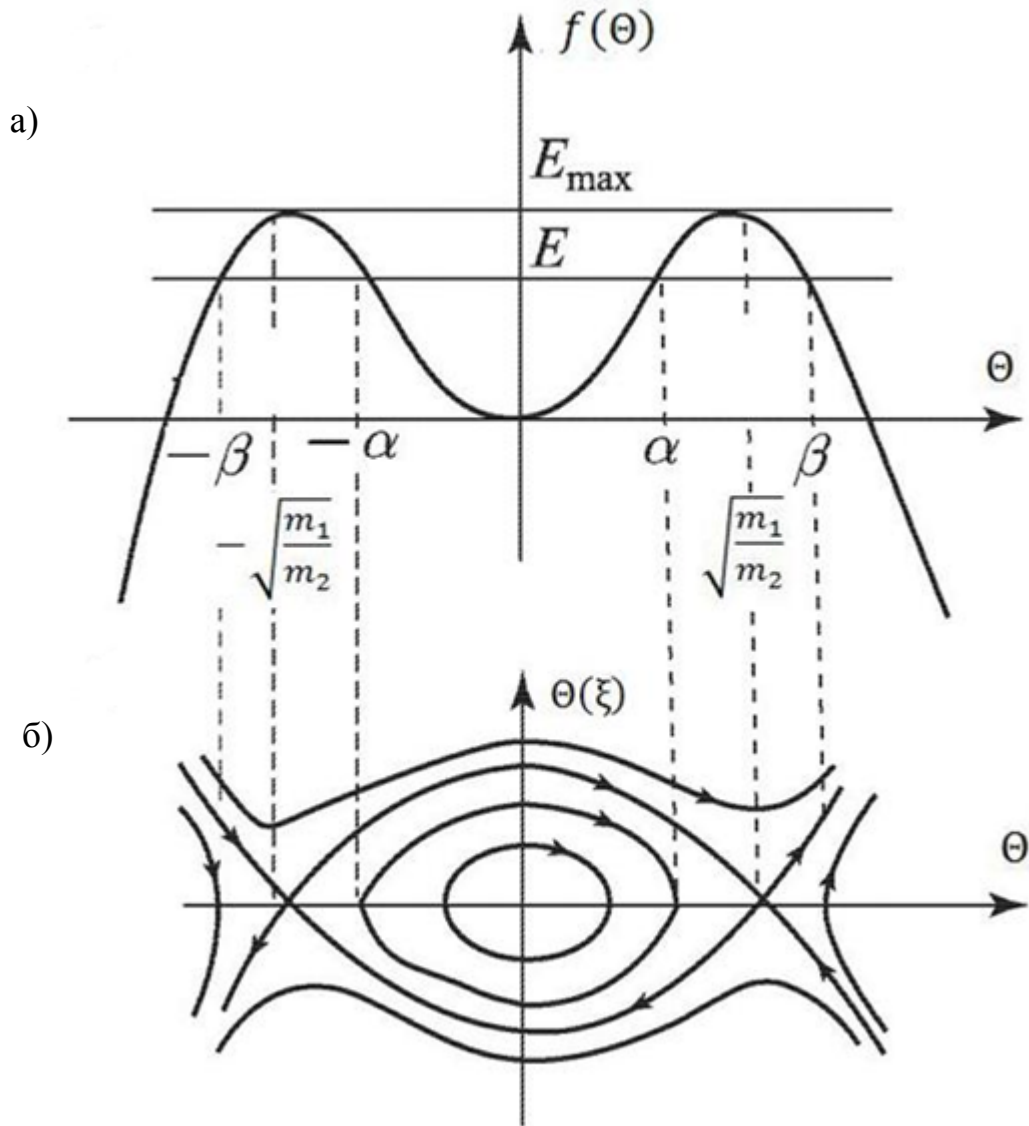


рис. 2.5.

Уравнение (2.11) принимает вид:

$$\alpha\beta\sqrt{-\frac{m_2}{2}}d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{(1 - (\Theta^2/\alpha^2))(1 - (\Theta^2/\beta^2))}} \quad (2.13)$$

и с помощью замены

$$\frac{\Theta}{\alpha} = z \quad (2.14)$$

приводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\sqrt{\frac{m_2}{2}} (\xi - \xi_0) = \frac{1}{\beta} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-s^2z^2)}}, \quad (2.15)$$

где $s^2 = \alpha^2/\beta^2$.

Обращая эллиптический интеграл, стоящий в правой части (2.15) при $z = 0, \xi_0 = 0$, получаем решение, описывающее нелинейные периодические колебания в виде:

$$\Theta(\xi) = \alpha \operatorname{sn} \left(-\sqrt{\frac{1}{2} m_2 \beta^2 \xi}, s \right). \quad (2.16)$$

В выражении (2.16) введем обозначения:

$$\begin{aligned} A = \alpha &= \sqrt{\frac{(m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E})}{-m_2}}; \\ k &= \sqrt{-\frac{1}{2} m_2 \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{2} (m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E})}; \\ s^2 &= \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}{m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где: A – амплитуда стационарной волны, k – нелинейный аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции, а длина волны Λ равна $\Lambda = 4\mathbf{K}(s)/k$. Из соотношений (2.17) следует, что при изменении E от 0 до $E_{max} = -m_1^2/4m_2$ частота колебаний уменьшается от $k = \sqrt{m_1}$ до $k = \sqrt{m_1/2}$, а амплитуда колебаний изменяется в пределах $0 \leq A \leq A_c^1 = \sqrt{m_1/m_2}$, где A_c^1 – амплитуда колебания, соответствующая на фазовой плоскости движению по сепаратрисе. Модуль эллиптической функции (коэффициент линейных искажений) при этом изменяется в интервале $0 \leq s^2 \leq 1$.

Аналогично, исключая E из выражений (2.17), получим связи между параметрами A, k, s в решении (2.16):

$$s^2 = -\frac{m_1 A^2}{2m_1 + m_2 A^2}, \quad k = \sqrt{\frac{2m_1 + m_2 A^2}{2}}, \quad \Lambda = \frac{4\mathbf{K}(s)}{\sqrt{m_1 + m_2 A^2/2}}. \quad (2.18)$$

Другая форма этих выражений:

$$A = \pm \sqrt{-\frac{2m_1}{m_2} \frac{s^2}{1+s^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{m_1}{1+s^2}}. \quad (2.19)$$

С учетом введенных обозначений решение (2.16), описывающее нелинейные периодические колебания по замкнутым фазовым траекториям вблизи сепаратрисы, можно представить в виде эллиптического синуса:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{sn}(k\xi, s). \quad (2.20)$$

Параметры крутильной стационарной волны связаны соотношением (2.20). При подстановке в (2.20) выражений (2.9) получим:

$$A = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{2\alpha_1} \frac{s^2}{(1+s^2)}}. \quad (2.21)$$

Следовательно, амплитуда волны растет прямо пропорционально с ростом ее скорости, а угол наклона кривых (2.21) возрастает при увеличении s от 0 до 1. При s близких к единице, форма колебаний приведена на рис 2.6а.

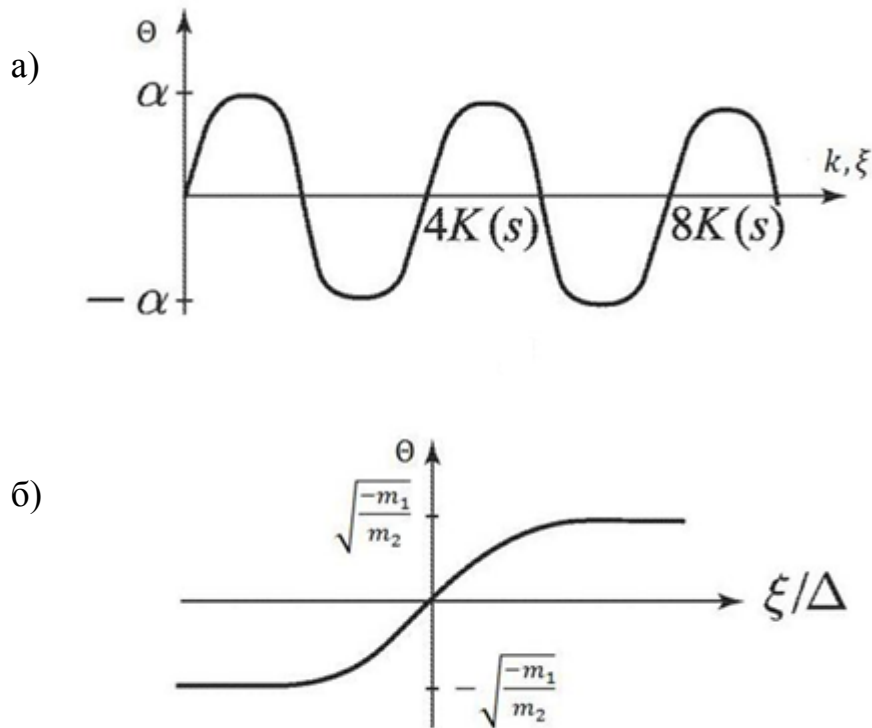


рис. 2.6.

Уединенная волна, является предельным случаем периодических волн (2.20). При $E = E_{max} = -m_1^2/4m_2$, $s^2 = 1$ выражение (2.16) описывает сепаратрисное решение:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{th}\left(\frac{\xi}{\Delta}\right), \quad (2.22)$$

где:

$$A = \pm \sqrt{-\frac{m_1}{m_2}} = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{4\alpha_1}}; \quad (2.23)$$

$$\Delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{m_2}} = \sqrt{\frac{2I_\omega [V^2 - ((I_x + I_g)/I_g) c_t^2] (V^2 - c_0^2)}{(V^2 - c_s^2) c_t^2 I_g}}, \quad (2.24)$$

V – скорость уединенной волны, A – амплитуда, Δ – ширина. Сепаратрисное решение имеет форму перепада, его вид представлен на рис. 2.6 б.

Амплитуда уединенной волны увеличивается с ростом скорости, но ее график лежит выше соответствующей зависимости (2.21) для периодической волны.

Ширина уединенной волны (2.24) при $c_s < V < c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$ уменьшается пропорционально $1/V$. При скоростях $V > c_0$ проявляется аномальное поведение уединенной волны, которое выражается в увеличении ее ширины ($\Delta \sim V$) с ростом ее скорости и амплитуды.

Пусть $m_1 < 0$, $m_2 > 0$. Этот случай справедлив для скоростей, находящихся в интервале $c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g} < V < c_0$. В этом случае функция потенциальной энергии $f(\Theta) = (m_1/2)\Theta^2 - (m_2/4)\Theta^4$ имеет локальный максимум $f_{max} = 0$ при $\Theta = 0$ и локальный минимум $f_{min} = -m_1^2/4m_2$ в точках $\Theta = \pm \sqrt{-m_1/m_2}$ (рис.2.7а). На фазовой плоскости $(\Theta; d\Theta/d\xi)$ точки $(\pm \sqrt{-m_1/m_2}, 0)$ являются устойчивым положением равновесия типа «центр», а точка $(0, 0)$ является «седлом» (рис. 2.7б).

Ограниченные решения уравнения (2.11) существуют, если константа интегрирования изменяется в диапазоне $f_{min} \leq E < +\infty$, причем различным значе-

ниям начальной энергии E соответствуют качественно различные режимы движения.

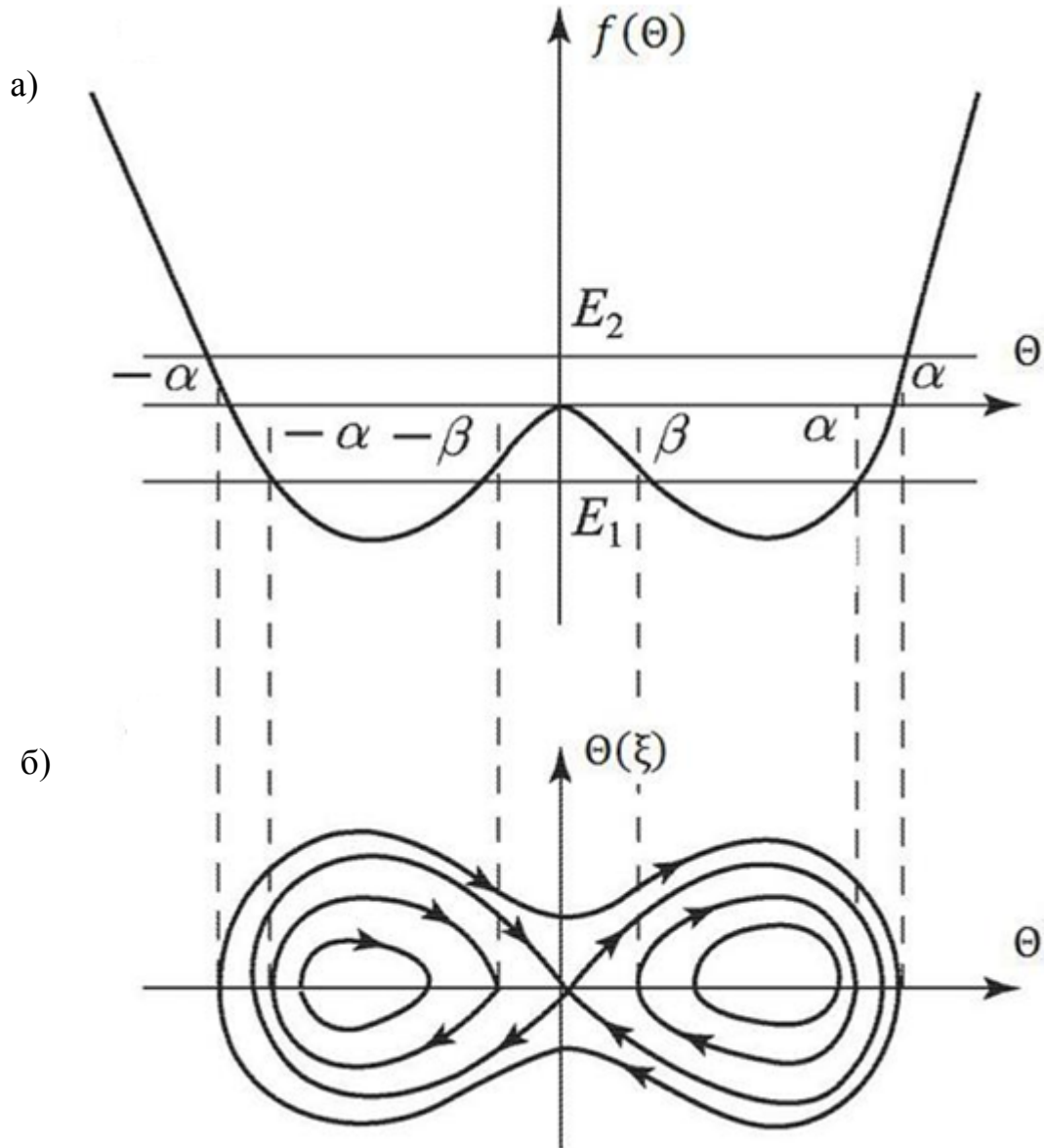


рис 2.7.

Пусть $f_{min} \leq E \leq 0$. В этом случае полином $E - f(\theta)$ имеет четыре действительных корня $\theta_{1,2} = \pm\alpha$, $\theta_{3,4} = \pm\beta$, где

$$\alpha^2 = \frac{-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}{m_2}, \quad \beta^2 = \frac{-m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}{m_2}, \quad (\alpha^2 \geq \beta^2) \quad (2.25)$$

и принимает положительные значения в областях $|\alpha| \leq \theta \leq |\beta|$ (рис. 2.7а). На фазовой плоскости им соответствуют замкнутые траектории, лежащие внутри сепаратрисы.

Уравнение (2.11) принимает вид:

$$\alpha\beta\sqrt{\frac{m_2}{2}}d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{-(1 - (\Theta^2/\alpha^2))(1 - (\Theta^2/\beta^2))}} \quad (2.26)$$

и с помощью замены

$$\frac{\Theta}{\alpha} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}z^2} \quad (2.27)$$

сводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\sqrt{\frac{m_2}{2}}(\xi - \xi_0) = \frac{1}{\alpha} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - s^2z^2)}}, \quad (2.28)$$

где $s^2 = (\alpha^2 - \beta^2)/\alpha^2$. Обращая эллиптический интеграл при $z = 0, \xi_0 = 0$, получаем решение, описывающее нелинейные периодические колебания в виде:

$$\Theta(\xi) = \alpha \operatorname{dn} \left(\sqrt{\frac{1}{2}m_2\alpha^2} \xi, s \right). \quad (2.29)$$

В выражении (2.29) введем обозначения:

$$\begin{aligned} A = \alpha &= \sqrt{\frac{(-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E})}{m_2}}; \\ k &= \sqrt{-\frac{1}{2}m_2\alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E})}; \\ s^2 &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2} = \frac{2\sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где: A – амплитуда стационарной волны, k – нелинейный аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции, $\Lambda = 4\mathbf{K}(s)/k$ – длина волны. Из соотношений (2.30) следует, что при изменении E от $E_{min} = -m_1^2/4m_2$ до 0 частота колебаний увеличивается от $k = \sqrt{-m_1/2}$ до $k = \sqrt{-m_1}$, а амплитуда периодических колебаний изменяется от значения $A = A_c^1 = \sqrt{-m_1/m_2}$ до значения $A = A_c^2 = \sqrt{-2m_1/m_2}$, где A_c^1, A_c^2 – амплитуды колебаний соответствующих движений по

сепаратрисам для фазовых портретов, приведенных на рис. 2.5 и 2.7 соответственно. Модуль эллиптической функции меняется в пределах $0 \leq s^2 \leq 1$.

Исключая из выражений (2.30) константу интегрирования E , получим зависимость между параметрами A , k , s в решении (2.29):

$$s^2 = 2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2 A^2} \right), \quad k = \sqrt{m_2 A^2 / 2}, \quad \Lambda = \frac{4\sqrt{2}\mathbf{K}(s)}{\sqrt{m_2 A^2}}, \quad (2.31)$$

которые можно представить в виде:

$$A = \sqrt{-\frac{2m_1}{m_2} \frac{1}{2-s^2}} = \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{2\alpha_1} \frac{1}{2-s^2}}, \quad k = \sqrt{-\frac{m_1}{2-s^2}}, \quad 0 \leq s^2 \leq 1, \quad (2.32)$$

т.е. $A \sim V$, но амплитуда периодической волны при любом s меньше амплитуды уединенной волны.

С учетом введенных обозначений решение (2.29), описывающее нелинейные периодические колебания по замкнутым фазовым траекториям внутри сепаратрисы можно представить в виде эллиптической функции дельта-амплитуды:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{dn}(k\xi, s). \quad (2.33)$$

Эти колебания не имеют линейного вырождения, так как при $E \rightarrow E_{\min} = -\frac{m_1^2}{4m_2} s \rightarrow 0$ и $\operatorname{dn}(k\xi, s) = 1$.

При $E = 0$, $s = 1$ из (2.29) получаем вырождение в сепаратрисное решение:

$$\Theta(\xi) = A_c^2 \operatorname{ch}^{-1}(\xi/\Delta), \quad (2.34)$$

где:

$$A_c^2 = \pm \sqrt{-\frac{2m_1}{m_2}} = \pm \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{2\alpha_1}}; \quad (2.35)$$

$$\Delta = \frac{1}{k} = \sqrt{-\frac{1}{m_1}} = \sqrt{\frac{I_\omega \left[V^2 - \left((I_x + I_g)/I_g \right) c_\tau^2 \right] (V^2 - c_0^2)}{(V^2 - c_s^2) c_\tau^2 I_g}},$$

A_c^2 – амплитуда колебания, Δ – ширина уединенной волны.

Видно, что в этом диапазоне $A \sim V$, а $\Delta \sim \sqrt{1 - V^2/c_0^2}$. Качественный вид нелинейных периодических движений, описываемых дельта-амплитудой, приведен на рис. 2.8а, а на рис. 2.8в показан вид сепаратрисного решения.

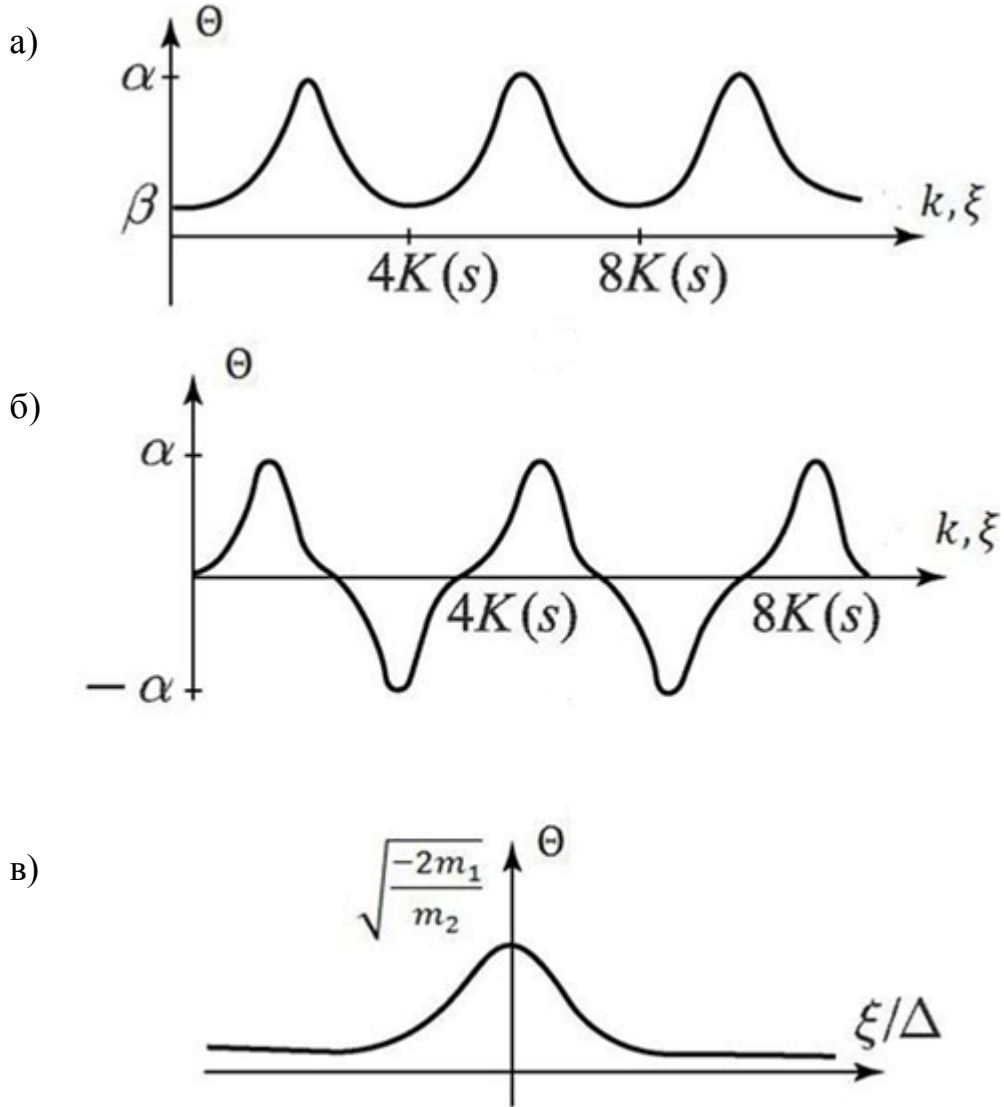


рис. 2.8

Если $E = 0$, то в этом случае полином $E - f(\Theta)$ имеет два действительных корня $\Theta_{1,2} = \pm\alpha$, $\Theta_{3,4} = \pm i\beta$, где:

$$\alpha^2 = \frac{-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}{m_2}, \quad \beta^2 = \frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}{m_2}, \quad (2.36)$$

и принимает положительные значения в областях $-\alpha < \Theta < \alpha$ (рис. 2.7а). На фазовой плоскости ограниченными решениями при таких значениях E соответствуют замкнутые фазовые траектории, лежащие вне петли сепаратрисы (рис. 2.7б).

Уравнение (2.11) принимает вид:

$$\alpha\beta\sqrt{\frac{m_2}{2}}d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{(1 - (\Theta^2/\alpha^2))(1 - (\Theta^2/\beta^2))}} \quad (2.37)$$

и с помощью замены

$$\frac{\Theta}{\alpha} = \sqrt{1 - z^2}, \quad (2.38)$$

сводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\sqrt{\frac{m_2}{2}}(\xi - \xi_0) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - s^2 z^2)}}, \quad (2.39)$$

где: $s^2 = \alpha/(\alpha^2 + \beta^2)$.

Обращая эллиптический интеграл при $z = 0, \xi_0 = 0$, получаем решение, описывающее нелинейные периодические колебания в виде:

$$\Theta(\xi) = \alpha \operatorname{cn} \left(\sqrt{\frac{m_1}{2}} (m_1^2 + \beta^2) \xi, s \right). \quad (2.40)$$

В выражении (2.40) введем обозначения:

$$\begin{aligned} A = \alpha &= \sqrt{\frac{(-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E})}{m_2}}; \\ k &= \sqrt{\frac{m_1}{2}} (\alpha^2 + \beta^2) = (m_1^2 + 4m_2E)^{1/4}; \\ s^2 &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{-m_1 \sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{2\sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где: A – амплитуда стационарной волны, k – нелинейный аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции, $\Lambda = 4\mathbf{K}(s)/k$ – длина волны.

Анализируя соотношения (2.41) получим, что при изменении E от 0 до $+\infty$ частота колебаний возрастает от значения $k = \sqrt{-m_1}$ до $+\infty$, амплитуда колебаний так

же неограниченно возрастает от значения $A = A_c^1 = \sqrt{-2m_1/m_2}$, а модуль эллиптической функции при этом уменьшается $0,5 \leq s \leq 1$.

Исключая константу интегрирования E из (2.41), получим зависимость между параметрами A , k , s в решении:

$$s^2 = \left(\frac{m_2 A^2}{2(m_1 + m_2 A^2)} \right), \quad k = \sqrt{2m_1 + m_2 A^2}, \quad \Lambda = \frac{4\mathbf{K}(s)}{\sqrt{m_1 + m_2 A^2}}. \quad (2.42)$$

Эти соотношения можно представить в виде:

$$A = \sqrt{-\frac{2m_1}{m_2} \frac{s^2}{2s^2 - 1}} = \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho I_r}{2\alpha_1} \frac{s^2}{2s^2 - 1}},$$

$$k = \sqrt{-\frac{m_1}{2s^2 - 1}}. \quad (2.43)$$

$$1 > s^2 > \frac{1}{2}$$

С учетом введенных обозначений решение (2.40), описывающее колебания по замкнутым фазовым траекториям вне сепаратрисы, представляется в виде:

$$\Theta(\xi) = A \operatorname{cn}(k\xi, s) \quad (2.44)$$

Это решение описывает нелинейные колебания, которые не имеют линейного вырождения. Их форма при s^2 близких к единице показана на рис. 2.8б. При $s = 1$ из (2.44) получаем сепаратрисное решение (2.34). Амплитуда таких периодических колебаний всегда больше амплитуды уединенных.

На основании приведенных рассуждений можно сделать следующий вывод: если стержень обладает геометрической нелинейностью ($\alpha_1 > 0$), то стационарных крутильных волн не существует в диапазоне скоростей $V < c_s$. Во всех других диапазонах нелинейные стационарные волны могут формироваться. Однако в зависимости от величины скорости V имеются качественно различные волновые картины, поскольку при этом уравнение Дуффинга (2.8) имеет различные решения.

Если скорость стационарной волны $c_s < V < c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$ или $V > c_0$, то уравнение Дуффинга (2.8) имеет два типа финитных решений – периодическое

(2.20), выражающееся через эллиптический синус и уединенное (2.22), являющееся предельным случаем периодического.

Для скоростей, лежащих в интервале $c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g} < V < c_0$, фазовый портрет уравнения (2.8) содержит два устойчивых положения равновесия, в окрестности которых фазовые траектории имеют форму, близкую к эллипсу. В этом случае имеются три типа финитных решений. Одним из них является уединенная стационарная волна (2.34), связывающая между собой два класса периодических волн. На фазовой плоскости это решение соответствует сепаратрисе, проходящей через начало координат и отделяющей одну область решений от другой. Вторым тип финитного решения соответствует движению по замкнутым траекториям вблизи положения равновесия и описывается эллиптической функцией дельта-амплитуды (2.33). Другой тип периодических движений описывается эллиптическим косинусом (2.44).

Типы фазовых портретов уравнения (2.8) в зависимости от скорости стационарной волны приведены на рис. 2.9.

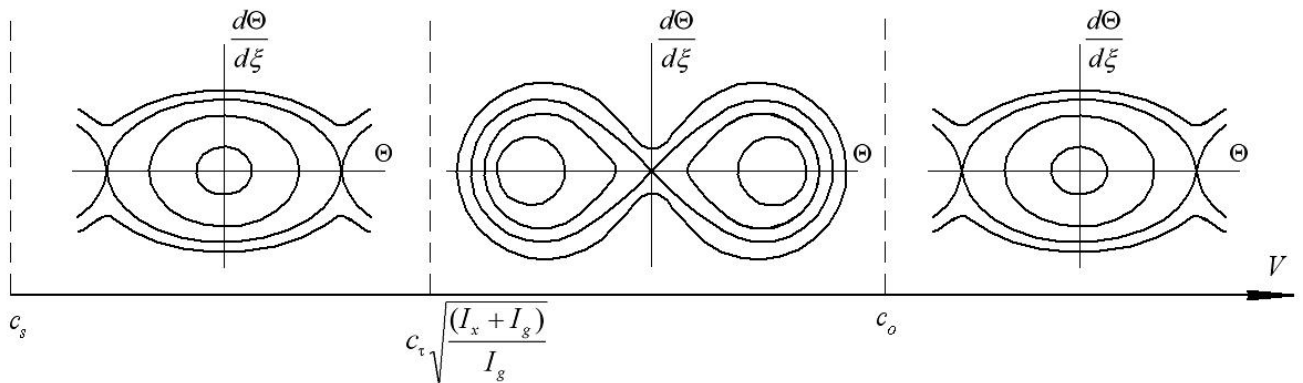


рис. 2.9

Если стержень обладает физической нелинейностью ($\alpha_1 < 0$), то возможны следующие случаи.

Пусть $m_1 > 0$, $m_2 > 0$. Это справедливо если скорость стационарной волны находится в диапазоне $c_s < V < c_\tau \sqrt{(I_x + I_g)/I_g}$ или $V > c_0$. В этом случае функция потенциальной энергии $f(\Theta) = (m_1/2)\Theta^2 - (m_2/4)\Theta^4$ имеет локальный

минимум $f_{min} = 0$ в при $\Theta = 0$ (рис. 2.10 а). На фазовой плоскости $(\Theta; d\Theta/d\xi)$ точка с координатами $(0, 0)$ является устойчивым положением равновесия типа «центр» (рис. 2.10 б).

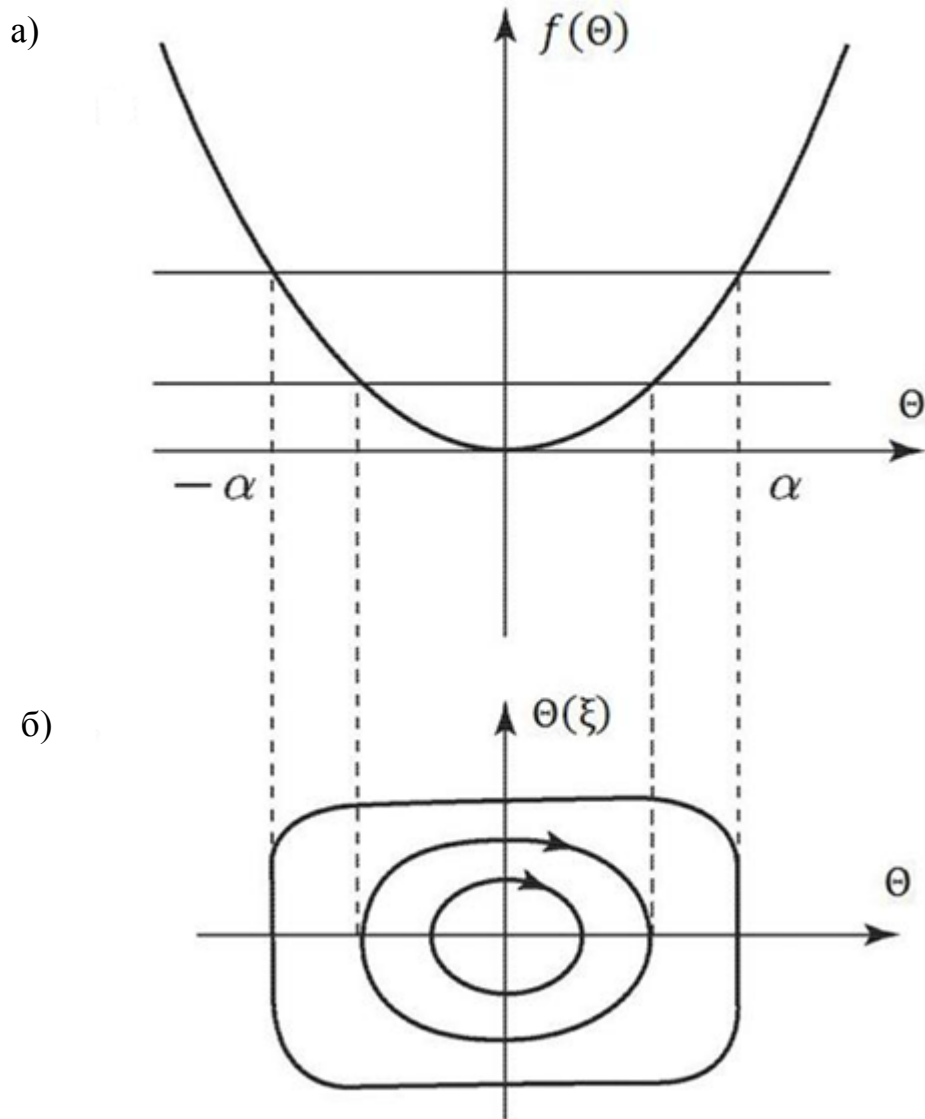


рис. 10

Ограниченные решения уравнения (2.11) существуют при $0 < E < +\infty$. Полином $E - f(\Theta)$ в этом случае имеет два действительных корня $\Theta_{1,2} = \pm\alpha$ и два мнимых корня $\Theta_{3,4} = \pm i\beta$, где:

$$\alpha^2 = \frac{-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}{m_2}, \quad \beta^2 = \frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}{m_2} \quad (2.45)$$

и принимает положительные значения в областях $-\alpha < \Theta < \alpha$ (рис. 2.10 а).

Тогда уравнение (2.11) запишется в виде:

$$\alpha\beta\sqrt{\frac{m_2}{2}}d\xi = \frac{d\Theta}{\sqrt{(1 - (\Theta^2/\alpha^2))(1 - (\Theta^2/\beta^2))}} \quad (2.46)$$

и с помощью замены

$$\frac{\Theta}{\alpha} = \sqrt{1 - z^2} \quad (2.47)$$

сводится к эллиптическому интегралу первого рода

$$\sqrt{\frac{m_2}{2}}(\xi - \xi_0) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - s^2 z^2)}}, \quad (2.48)$$

где $s^2 = \alpha/(\alpha^2 + \beta^2)$.

Обращая эллиптический интеграл при $z = 0, \xi_0 = 0$, стоящий в правой части (2,48), получаем решение, описывающее нелинейные периодические колебания в виде:

$$\Theta(\xi) = \alpha \operatorname{cn} \left(\sqrt{\frac{m_1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)} \xi, s \right). \quad (2.49)$$

В выражении (2.49) введем обозначения:

$$\begin{aligned} A = \alpha &= \sqrt{\frac{(-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2E})}{m_2}}; \\ k &= \sqrt{\frac{m_1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)} = (m_1^2 + 4m_2E)^{1/4}; \\ s^2 &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{-m_1\sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}{2\sqrt{m_1^2 + 4m_2E}}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где: A – амплитуда стационарной волны, k – нелинейный аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции, имеющий смысл коэффициента нелинейных искажений формы колебания $\Theta(\xi)$. Из соотношений (2.50) видно, что при изменении E от 0 до $+\infty$, амплитуда колебаний и частота изменяются в пределах $0 < A < +\infty, \sqrt{m_1} < k < \infty$, а коэффициент нелинейных искажений – в интервале $0,5 \leq s^2 \leq 1$.

Исключая константу интегрирования E из (2.50), получаем связи между параметрами A , k , s в решении (2.49):

$$s^2 = \frac{m_2 A^2}{2(m_1 + m_2 A^2)}, \quad k = \sqrt{m_1 + m_2 A^2}, \quad \Lambda = \frac{4\mathbf{K}(s)}{\sqrt{m_1 + m_2 A^2}}, \quad (2.51)$$

где: Λ – длина волны, $\mathbf{K}(s)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Из этих соотношений выразим зависимость амплитуды и частоты колебаний от коэффициента нелинейных искажений и коэффициентов уравнения Дуффинга:

$$A = \sqrt{\frac{2m_1}{m_2} \frac{s^2}{1 - 2s^2}} = \sqrt{\frac{(V^2 - c_s^2)\rho l_r}{-2\alpha_1} \frac{s^2}{1 - 2s^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{m_1}{1 - s^2}}. \quad (2.52)$$

При $E \rightarrow +\infty$ ($s^2 \approx 0$ и $A \rightarrow 0$) выражение описывает квазигармонические колебания вблизи положения равновесия вида:

$$\Theta = A \cos(k\xi). \quad (2.53)$$

При $E \rightarrow +\infty$, $s^2 \rightarrow 1/2$ и в этом случае (2.49) описывают существенно нелинейные колебания,

$$\Theta = A \operatorname{cn}(k\xi, s), \quad (2.54)$$

которые имеют пилообразную форму (рис. 2.11).

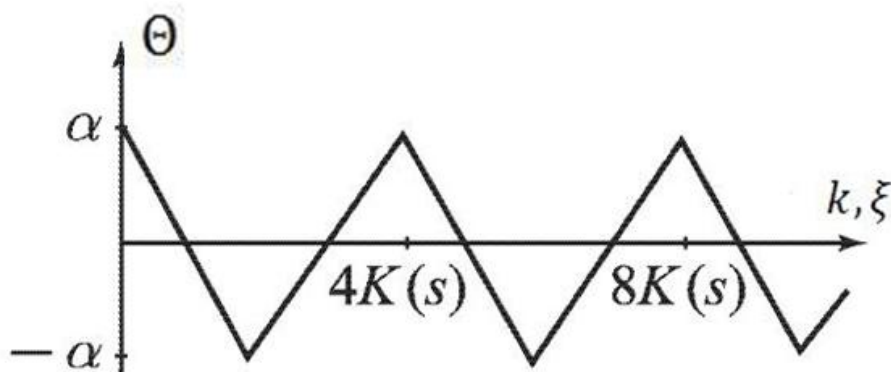


Рис.2.11

В диапазоне скоростей $V < c_s$ фазовый портрет уравнения (2.8) содержит два положения равновесия типа «центр», а точка $(0, 0)$ является седлом (см. рис. 2.7б). В этом случае, как и для стержня, обладающего геометрической нелинейностью, будут иметь место три типа финитных решений, двум из которых отвечают периодические волны (2.39) и (2.44), а третьему – уединенная волна (2.34).

Скорость, амплитуда и ширина уединенной волны связаны соотношениями (2.35). Параметры периодической волны (2.33) связаны между собой соотношением (2.32), а параметры периодической волны (2.44) соотношением (2.43).

Если скорость V находится в диапазоне $c_{\tau} \sqrt{(I_x + I_g)/I_g} < V < c_0$, а это означает, что $m_1 < 0$, $m_2 > 0$, то уравнение (2.8) не имеет замкнутых фазовых траекторий. Следовательно, в этом интервале скоростей нелинейных стационарных волн не существует.

Типы фазовых портретов уравнения Дуффинга в зависимости от скорости стационарной волны для стержня, обладающего физической нелинейностью, приведены на рис. 2.12.

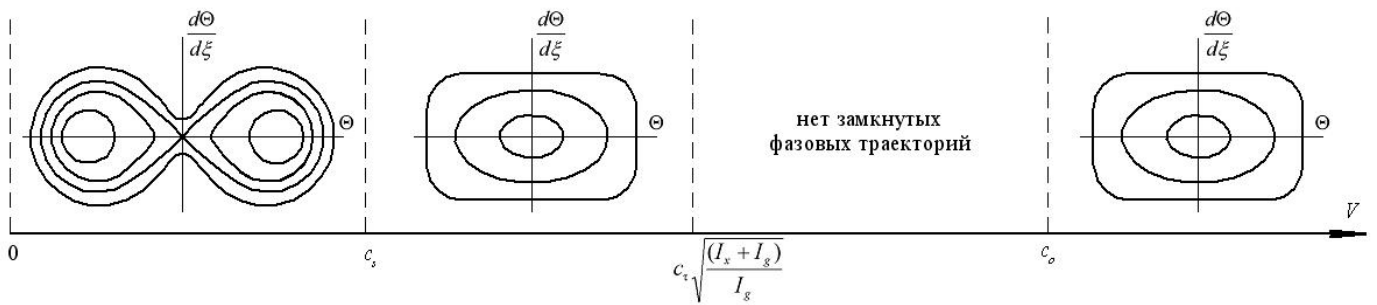


рис. 2.12

В результате проведенного анализа показано, что совместное действие нелинейности (вызванной высокой интенсивностью вибрации) и дисперсией (обусловленной депланацией) в стержне могут формироваться несинусоидальные стационарные волны, распространяющиеся с постоянной скоростью без изменения формы.

2.2. Волновые процессы в тонкостенном стержне при одно-временном учете квадратичной и кубической нелинейностей

Если при анализе стационарных волн учитывать в (1.50) и кубическую, и квадратичную нелинейности, то обыкновенное дифференциальное уравнение, к которому сведется (1.50), будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + m_1\Theta + m_2\Theta \frac{d\Theta}{d\xi} + m_3\Theta^3 = 0. \quad (2.55)$$

Этому уравнению эквивалентна система:

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{d\xi} = \varphi; \\ \frac{d\varphi}{d\xi} = m_3\Theta^3 - m_1\Theta - m_2\Theta \frac{d\Theta}{d\xi}. \end{cases} \quad (2.56)$$

На фазовой плоскости (Θ, φ) координаты положений равновесия ищутся из условий $(\Theta = 0, \varphi = 0)$. Таким образом, ординаты всех равновесных положений равны нулю, а абсциссы являются действительными корнями алгебраического уравнения третьей степени:

$$m_1\Theta - m_3\Theta^3 = 0. \quad (2.57)$$

При $m_1 m_3 < 0$ начало координат, точка $(0,0)$ является единственным положением равновесия, причем в любом случае при $m_1 < 0$ это «седло», а при $m_1 > 0$ – «центр». Когда в системе существует единственная «седловая» точка, то периодических движений нет и этот случай для поиска стационарных волн не интересен. Все движения периодические и фазовый портрет представляет собой набор непересекающихся замкнутых кривых, если в системе имеется единственный «центр». Для определенного набора параметров, а именно $m_1 > 0$, $m_1 = 3$ и $m_1 = -1$ удастся записать точное аналитическое решение:

$$\Theta(\xi) = \frac{\sqrt{m_1} (C_1 \sin(\sqrt{m_1}\xi) + C_2 \cos(\sqrt{m_1}\xi))}{C_1 \sin(\sqrt{m_1}\xi) + C_2 \cos(\sqrt{m_1}\xi) + C_3}, \quad (2.58)$$

где: C_1, C_2, C_3 – константы интегрирования находятся из начальных условий.

На первый взгляд, может показаться странным, что уравнение второго порядка, а констант интегрирования три, но это не так, поскольку числитель и знаменатель можно поделить на любую ненулевую константу и неизвестных будет две. Данная форма решения приведена здесь для общности, полагая, что любая из констант может обращаться в ноль. Непериодическое решение при этих значениях параметров и $m_1 < 0$ так же может быть записано через экспоненты с показа-

телями $\pm\sqrt{|m_1|}\xi$. При другом наборе параметров m_2 и m_3 , конечно с теми же знаками, динамика системы качественно не изменяется, однако точных решений найти не удастся. Нелинейное слагаемое при коэффициенте m_2 несимметрично, поэтому фазовый портрет несимметричен относительно оси абсцисс. При смене знака у коэффициента m_2 на противоположный, фазовый портрет (и в случае неединственного положения равновесия) симметрично отражается относительно (0Θ) , а решение (2.58) просто меняет знак. Движение по замкнутым фазовым траекториям всегда происходит по часовой стрелке.

При $m_1 m_3 > 0$ имеется три положения равновесия с координатами $(-\sqrt{m_1/m_3}, 0)$, $(0,0)$ и $(\sqrt{m_1/m_3}, 0)$, при $m_3 > 0$, $(\pm\sqrt{m_1/m_3}, 0)$ – «седла», $(0,0)$ – «центр». В этом случае все периодические движения находятся внутри области, ограниченной парой сепаратрис, исходящих из левого «седла» в правое и из правого – в левое. Из-за несимметричной нелинейности сепаратрисы также не симметричны и описываются по-разному, хотя величина перехода (амплитуда) из одного состояния в другое одинаковое, но скорость перехода разная. Так, при $m_1 > 0$ сепаратриса из левого «седла» в правое имеет вид:

$$\Theta(\xi) = -\sqrt{\frac{m_1}{m_3}} \operatorname{th} \left(\frac{2m_1 m_3 \sqrt{\frac{m_1}{m_3}}}{m_1 m_2 - \sqrt{m_1^2 m_2^2 + 8m_1^2 m_3}} \xi \right), \quad (2.59)$$

а из правого – в левое:

$$\Theta(\xi) = -\sqrt{\frac{m_1}{m_3}} \operatorname{th} \left(\frac{2m_1 m_3 \sqrt{\frac{m_1}{m_3}}}{m_1 m_2 + \sqrt{m_1^2 m_2^2 + 8m_1^2 m_3}} \xi \right). \quad (2.60)$$

При смене знака перед m_2 картина симметрично отражается относительно оси абсцисс.

В случае $m_1 < 0$ и $m_3 < 0$ начало координат является «седлом», а точки $(\pm\sqrt{m_1/m_3}, 0)$ «фокусами»; при $m_2 > 0$ левый «фокус» – неустойчивый, правый – устойчивый. При смене знака перед m_2 устойчивость фокусов так же меняется

на противоположную. При увеличении коэффициента m_2 область притяжения устойчивого «фокуса» увеличивается, за этой областью находится область периодических движений, соответствующих замкнутым фазовым траекториям. К сожалению, для этого случая никаких точных аналитических решений найти не удалось.

Все качественно различные фазовые портреты приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

m_1	m_3	$m_2 > 0$	$m_2 < 0$
< 0	< 0		
< 0	> 0		
		Периодических движений НЕТ	Периодических движений НЕТ
> 0	< 0		
> 0	> 0		

Заметим, что кроме уже упомянутых источников, нелинейным стационарным волнам в стержнях, оболочках и пластинах посвящены работы [86-132].

ГЛАВА 3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ

В рамках полусдвиговой теории В. И. Сливкера выведены дифференциальные уравнения функции угла закручивания $\theta(x)$ и функции депланации $\beta(x)$. На примере стержня двутаврового поперечного сечения, нагруженного вертикальной сосредоточенной силой, приложенной с некоторым эксцентриситетом "e", получены выражения для угла закручивания θ , депланации β и их производных. Построены графики распределения вышеуказанных величин по длине стержня при наличии эксцентриситета приложения нагрузки, который обуславливает появление местного кручения.

Графически показано изменение величины бимоента B_ω по длине балки в зависимости от величины эксцентриситета "e". Выявлено, что при наличии эксцентриситета приложения нагрузки, кроме изгибных напряжений, будут возникать напряжения от местного кручения. С увеличением эксцентриситета величина бимоента будет увеличиваться, а пиковые его значения будут под точкой приложения нагрузки. Поэтому проверка прочности сечения стержня должна проводиться с его учетом.

На примере расчета сварной двутавровой подкрановой балки проиллюстрировано влияние компоненты напряжения σ_ω на общую проверку прочности при различных эксцентриситетах приложения нагрузки, а так же учете местного кручения от силы поперечного торможения.

3.1. Развитие теории расчета тонкостенных стержней

Широкий класс металлических конструкций во многих отраслях техники представляет собой разнообразные сочетания штампованных, тонкостенных прокатных или составных элементов, которые имеют вид призматических стержней с одно- или двухсвязным поперечным сечением. В строительстве, машиностроении, авиации на современном этапе все больше используются конструкции, выполненные из тонкостенных профилей или просто из тонколистовой стали. Эти конструкции при сравнительно небольшом весе обеспечивают высокую жесткость и прочность, поэтому их применение является весьма эффективным и экономичным. В области строительства - это несущие и ограждающие конструкции зданий (арки, балки, колонны, элементы ферм, каркасов высотных зданий), сложные по своей геометрической форме конструкции покрытий зданий, как малых, так и больших пролетов. В конструкциях самолетов, ракет, кораблей стержни являются основными несущими элементами. Они используются в качестве резонаторов и волноводов в современных устройствах и приборах, образцов при исследовании физико-механических свойств различных материалов. Под стержнем в механике твердого деформируемого тела обычно принято понимать трехмерное тело, один из геометрических размеров которого значительно больше двух других. Стержни различаются формами своих осевых линий (криволинейные и прямолинейные), размерами и формой поперечных сечений (круг, прямоугольник, швеллер, тавр, двутавр, и др.).

На три этапа условно можно разделить историю развития теории тонкостенных стержней. Первый этап (1905 - 1940 гг.) - первые теоретические и экспериментальные, посвященные, в основном, отклонениям от закона плоских сечений при изгибе балок. Второй этап (1940 - 1970 гг.) - разработка законченной теории тонкостенных стержней с углубленным изучением неразрезных тонкостенных балок, расчетов плоских и трехмерных рам, вопросов устойчивости. Третий этап (1970г. - по настоящее время) - появление и активное развитие вычислительных средств и, в частности, метода конечных элементов.

Одним из разделов механики деформируемого твердого тела является теория стержневых систем и стержней. Её развитию предшествовало становление таких фундаментальных наук, как сопротивление материалов, теория упругости, теория пластичности и др. Формирование основных понятий и законов механики деформированного твердого тела таких как, напряжения и деформации, жесткость и податливость упругих элементов конструкций, связано с развитием теории стержневых систем и стержней.

Своими корнями становление теории стержней и стержневых систем уходит в XVII, XVIII века и тесно связано с развитием математики в целом, особенно с такими ее разделами, как дифференциальное и интегральное исчисление. Основы для её становления заложили Г. Галилей, Мариотт, Гук. Дальнейшие исследования связаны с именами выдающихся математиков, механиков и физиков, таких как: Якоб Бернулли, Леонард Эйлер, Жозеф Луи Лагранж, Шарль Огюстен Кулон, Огюстен Луи Коши, Баре де Сен-Венан, Густав Роберт Кирхгоф и др.

Основные задачи теории стержней состоят в исследовании прочности, устойчивости, жесткости и несущей способности стержней и стержневых систем. Начиная с Я. Бернулли и Л. Эйлера, важную роль в решении этих задач играет математическое моделирование, которое включает в себя, во-первых, вывод основных уравнений с учетом физико-механических свойств материалов, из которых они изготавливаются; во-вторых - аналитических и численных методов решения для исследования их поведения (деформационных свойств, прочности и др.) при воздействии на них внешних механических факторов (нагрузки), температуры, полей различной природы.

Становление теории упругости тонкостенных стержней как науки в России, в первую очередь, связано с именем М.В.Остроградского. В дальнейшее развитие теории упругости и сопротивления материалов большой вклад внесли его ученики и последователи: Д.И. Журавский, Г.Е. Паукер, а также А.В. Гадолин, Х.С. Головин, В.Л. Кирпичев, Ф.С. Ясинский и многие другие.

Начало работ по теории упругости Л.С. Лейбензона относится к 1914 году и касается, прежде всего, вопросов устойчивости упругого равновесия длин-

ных сжатых стержней с первоначальным кручением около прямолинейной оси стержня, а затем устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Практическое значение первой задачи ясно из того, что всем известные теперь сетчатые башни системы В. Г. Шухова составлены из закрученных прямолинейных образующих.

Большой вклад советские ученые внесли в развитие одномерных задач теории упругости — теории кручения и изгиба призматических стержней, основы которой были заложены еще Сен-Венаном [73] в 1855 году. Были найдены замкнутые решения для множества задач о кручении стержней различного сечения, а также решения, выраженные в рядах Фурье.

Г.В.Колосов и Д.Л.Гавра положили начало изучению одномерных задач теории упругости с помощью методов теории функций комплексного переменного. А дал строгое обоснование этого метода для случая многосвязной, конечной или бесконечной плоской области и точную формулировку задач теории упругости как краевых задач теории функций комплексного переменного Н.И.Мусхелишвили [133]. Он же разработал основные методы решения этих задач и успешно применил их к контактным задачам, исследованию изгиба и кручения стержней и ряду других. Метод теории аналитических функций оказался весьма плодотворным и стал одним из наиболее эффективных методов при решении подобных задач. В этом направлении получено множество результатов, относящихся к кручению призматических стержней.

Работы С.П. Тимошенко [77] стали основой современной теории стесненного кручения тонкостенных стержней. Он впервые отметил непригодность теории кручения Сен-Венана для тонкостенных стержней открытого профиля. С. П. Тимошенко показал на примере задачи о стесненном кручении консольной двутавровой балки, что для точного нахождения значения угла закручивания следует учитывать не только напряжения свободного кручения, но и напряжения изгиба в полках двутавра, то есть учитывать эффект депланации сечения. Им же решена задача об изгибно-крутильных формах потери устойчивости изгибаемой двутавровой балки.

В ряде случаев весьма эффективной является обобщенная теория расчета тонкостенных стержней при стесненном кручении, предложенная В.З.Власовым [16]. Он предложил теорию тонкостенных стержней открытого профиля, основывающуюся на гипотезах, согласно которым стержень открытого профиля рассматривается в виде оболочки с недеформируемым в поперечной плоскости профилем и деформация сдвига в срединной плоскости профиля равна нулю. Получены им общие дифференциальные уравнения деформирования тонкостенного стержня под нагрузкой, а также выявлено, что практически не действует принцип Сен-Венана о быстром затухании по длине стержня местных напряжений от уравновешенной внешней нагрузки. Получили широкое распространение и легли в основу расчета многих инженерных сооружений методы В. З. Власова. Однако следует отметить, что Власов рассматривал только стержни открытого профиля. А разработал теорию расчета тонкостенных стержней замкнутого профиля А.А. Уманский [78,79]. Учитывая, что эффекты стесненного кручения в стержнях с замкнутым поперечным сечением меньше, чем в стержнях с открытым контуром, А.А. Уманский ввел новую функцию для меры депланации, которая не совпадает с производной от угла закручивания, как это было принято В.З. Власовым. Существенный вклад в развитие теории А. А. Уманского внесли многие, преимущественно отечественные ученые: И. В. Урбан [80-82], Д. В. Бычков [10-13], Г. Ю. Джанелидзе и Я. Г. Пановко [21], С. Н. Кан [44], Б. М. Броуде [8-9] и др.

Теория местных напряжений в тонкостенных призматических стержнях была разработана в 70-х годах в ГИСИ имени Чкалова д.т.н. профессором Б. Б. Лампси [52] и его учениками. Принципиально эта теория строится на расчленении призматического тонкостенного стержня на составляющие его плоские элементы – полосы. Из условий связности смещений, которые составляются на основе функции влияния для напряжений, определяются усилия взаимодействия между полосами. Через решения ряда краевых задач для полосы, которая загружена на кромках и внутри единичными сосредоточенными силами, эти функции влияния отыскиваются. Это позволило разработать достаточно простые инженерные мето-

ды расчета концентрированных напряжений и рассмотреть ряд практических задач.

3.2. Полусдвиговая теория Сливкера В. И.

Один из возможных способов построения приближенных теорий расчета основан на разделении напряжений и деформаций на основные и второстепенные, которые в дальнейшем исключаются из разрешающих уравнений.

В своей уточняющей теории расчета тонкостенных стержней В. И. Сливкер [74] учел влияние деформаций сдвига, включив в выражение для энергии деформации тонкостенного стержня ту ее часть, которая вызвана работой касательных напряжений. Выражение для энергии деформации, согласно этим представлениям имеет вид:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{B_\omega^2}{EI_\omega} + \frac{M_0^2}{GI_x} + \frac{M_\omega^2}{r^2 GF_\omega} \right) \right). \quad (3.1)$$

По существу, эта идея является переносом на теорию тонкостенных стержней соответствующих решений, использованных при переходе от теории балок Бернулли-Эйлера к теории балок Тимошенко.

При расчете тонкостенных стержней в разработанной полусдвиговой теории В. И. Сливкер предлагает представить касательные напряжения как сумму двух слагаемых: касательных напряжений изгиба, вызванных поперечными силами Q_z и Q_y , и касательных напряжений кручения, вызываемых моментом стесненного кручения M_ω .

Касательные напряжения согласно этим представлениям записываются в виде двух слагаемых $\tau = \tau_Q + \tau_{M_\omega}$:

$$\tau_Q = \frac{Q_y \cdot S_y^{\text{отс}}}{I_z \cdot \delta} + \frac{Q_z \cdot S_z^{\text{отс}}}{I_y \cdot \delta} \quad (3.2)$$

- касательных напряжений изгиба, которые вызваны поперечными силами Q_y и Q_z ;

$$\tau_{M_\omega} = + \frac{M_\omega \cdot S_\omega^{\text{отс}}}{I_\omega \cdot \delta} \quad (3.3)$$

- касательных напряжений кручения, вызванных моментом стесненного кручения M_ω .

Впоследствии предлагается пренебречь касательными напряжениями изгиба, отнеся их в разряд второстепенных, но сохранив при этом касательные напряжения кручения. Эта теория обладает рядом преимуществ: во-первых, она позволяет частично учесть деформации сдвига и при этом оказывается значительно проще, чем сдвиговая теория, во-вторых, является универсальной для расчета как тонкостенных стержней открытого профиля (на основе теории В.З. Власова), так и закрытого профиля (на основе теории А.А. Уманского) ввиду схожести соответствующих дифференциальных уравнений кручения и функционалов энергий деформации.

3.3. Общий случай действия системы сил на тонкостенный стержень

Как известно, задача по определению напряженно-деформируемого состояния тонкостенного стержня в случае сложного сопротивления решается на основе принципа независимости действия сил путем суммирования результатов, получаемых отдельно для каждого вида деформации.

Общая формула нормальных напряжений записывается следующим образом:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z} + \sigma_\omega = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{B_\omega}{I_\omega} \cdot \omega, \quad (3.4)$$

где: N – продольная сила в сечении, M_y – изгибающий момент относительно центральной оси y , M_z – изгибающий момент относительно центральной оси z , B_ω – изгибно-крутящий бимомент, I_y – момент инерции относительно оси y , I_z – момент инерции относительно оси z , I_ω – секториальный момент инерции, A – пло-

щадь поперечного сечения тонкостенного стержня, y, z – линейные координаты, ω – главная секториальная координата соответствующей точки.

В общем случае выражение для полных касательных напряжений в изучаемой точке стержня имеет вид:

$$\tau = \tau_{yx} + \tau_{zx} + \tau_{M_\omega} + \tau_{M_0} = \frac{Q_y \cdot S_y^{\text{отс}}}{I_z \cdot \delta} + \frac{Q_z \cdot S_z^{\text{отс}}}{I_y \cdot \delta} + \frac{M_\omega \cdot S_\omega^{\text{отс}}}{I_\omega \cdot \delta} + \frac{M_0}{I_x} \cdot \delta, \quad (3.5)$$

где: Q_y – поперечная сила по направлению оси y , Q_z – поперечная сила по направлению оси z , M_0 – момент при чистом кручении, M_ω – изгибно-крутящий момент, I_x – момент инерции сечения при чистом кручении, I_ω – секториальный момент инерции, $S_y^{\text{отс}}$ – статический момент отсеченной части сечения относительно оси y , $S_z^{\text{отс}}$ – статический момент отсеченной части сечения относительно оси z , $S_\omega^{\text{отс}}$ – секториальный статический момент отсеченной части сечения.

3.4. Общие сведения о тонкостенных стержнях

Стержень, у которого толщина стенок и полок δ мала по сравнению с линейными размерами поперечного сечения b и h , а два последних значительно меньше его длины l , называется тонкостенным стержнем. Тонкостенные стержни могут быть как открытого профиля (тавр, двутавр, швеллер и т.п.) (рис. 3.1а), так и закрытого профиля (трубчатое, коробчатое сечения) (рис. 3.1б).

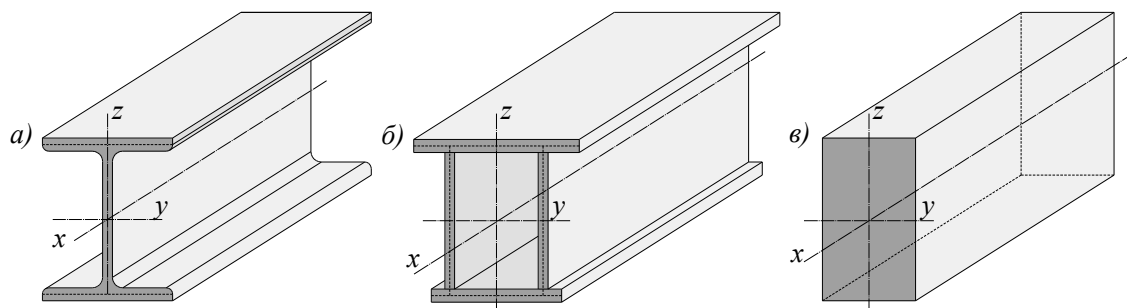


Рис. 3.1 Тонкостенные стержни открытого (а), закрытого (б) профиля, стержни сплошного (в) поперечного сечения (брусья).

С точки зрения расчетной схемы, тонкостенные стержни подобны брусам, поэтому сохраняют в себе его основные свойства при работе на растяжение, сжатие, изгиб или кручение. Однако следует отметить, что в силу своих геометрических особенностей тонкостенный стержень обладает свойствами, существенно

отличающими его от стержней сплошного поперечного сечения (круга, квадрата, прямоугольника):

- не всегда применим принцип Сен-Венана [71], согласно которому в поперечном сечении стержня усилия распределяются равномерно;
- не соблюдается закон плоских сечений: при действии нагрузок, вызывающих закручивание, в тонкостенных стержнях поперечные сечения не остаются плоскими, происходит депланация сечений, связанная с перемещениями точек из плоскости поперечного сечения вдоль оси стержня.

Граничные условия (условия закрепления стержня) так же влияют на депланацию поперечного сечения. Если депланация в различных поперечных сечениях неоднородна, то деформацию подобного вида принято называть стесненным кручением. Неоднородная депланация, в свою очередь, за счет неодинаковых продольных перемещений точек разных сечений, то есть относительного удлинения волокон, приводит к возникновению не только касательных, но и нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня. Таким образом, при стесненном кручении тонкостенных стержней одновременно возникают деформации кручения и изгиба.

3.5. Кручение тонкостенных стержней открытого и закрытого профилей

3.5.1. Кручение тонкостенных стержней открытого профиля

Кручение принято называть свободным, если депланация всех поперечных сечений одинакова, то есть $\beta = const$. Крутящий момент $M_{кр}$, приложенный к незакрепленной системе (с отсутствующими граничными условиями), уравновешивается моментом, который будут создавать возникающие касательные напряжения τ_0 , т.е. моментом чистого кручения M_0 . Связь между моментом чистого кручения M_0 и углом закручивания θ определяется следующей зависимостью:

$$M_0 = GI_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3.6)$$

Кручение называют стесненным, если деформация β по длине стержня неоднородна. В этом случае полагают, что полный крутящий момент, действующий на систему, уравнивается моментом чистого кручения M_0 и изгибно-крутящим моментом $M_\omega = P \cdot h$, возникновение которого, например для двутавра, обусловлено деформацией полок. Касательные напряжения τ_ω в этом случае равномерно распределены по толщине полок (рис.3.2).

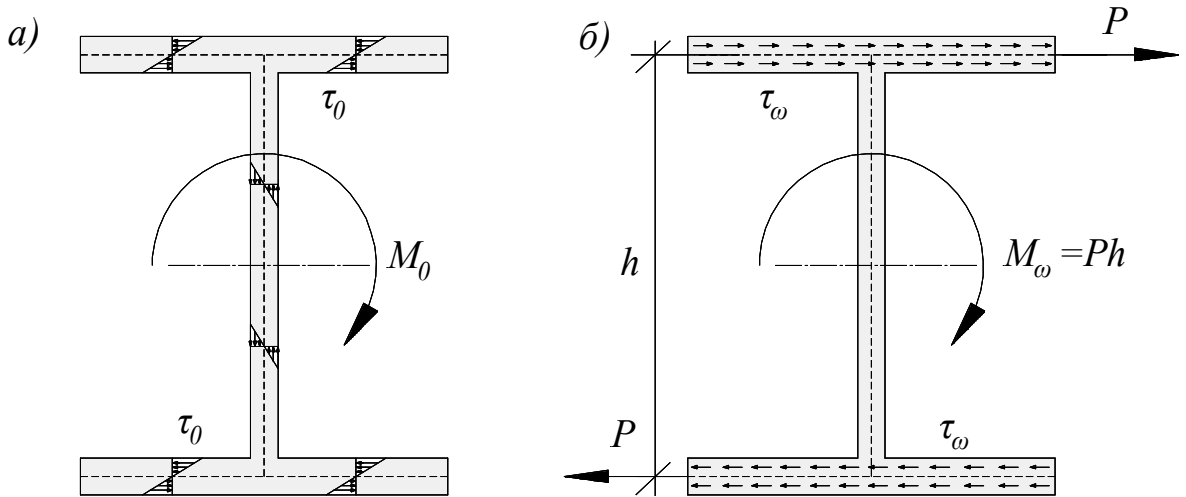


Рис. 3.2 Свободное (а) и стесненное (б) кручения двутаврового стержня

Для получения уравновешенной системы сил необходимо, чтобы выполнялось условие:

$$M_{кр} = M_0 + M_\omega = GI_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + M_\omega. \quad (3.7)$$

При стесненном кручении за счет деформации полок двутавра наличие неоднородной деформации приводит так же к возникновению нормальных напряжений σ_ω . Таким образом, неизвестными величинами при учете стесненного кручения являются M_ω , σ_ω , τ_ω . Выражения для определения неизвестных величин получены в [1] через функцию угла закручивания $\theta(x)$ с учетом следующих предположений:

- поперечные сечения поворачиваются вокруг оси центра кручения как жесткие диски. Это значит, что пренебрежено искривлением очертания поперечного сечения в своей плоскости по всей длине стержня, либо компенсировано постановкой ребер или диафрагм жесткости, то есть проекция поперечного сечения

стержня на плоскость, перпендикулярную осевой линии стержня, в процессе деформации сохраняет постоянными размеры и форму;

- развитие депланации поперечных сечений происходит по закону секториальных площадей. Такое возможно в случае, если пренебречь деформацией сдвига срединной поверхности, которое вызвано напряжениями τ_ω ;

- распределение напряжений σ_ω и τ_ω происходит равномерно по толщине стенки;

- остается справедливой гипотеза о ненадавливании продольных волокон в поперечном направлении друг на друга.

С учетом этих допущений получены зависимости для искомых величин:

$$M_\omega = \frac{\partial B_\omega}{\partial x} = -EI_\omega \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} = -EI_\omega \theta'''; \quad (3.8)$$

$$B_\omega = -EI_\omega \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -EI_\omega \theta'', \quad (3.9)$$

где: EI_ω - секториальная жесткость поперечного сечения, B_ω - бимомент (обобщенный силовой фактор, отвечающий напряжениям σ_ω).

$$\sigma_\omega = -\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} E\omega = -\theta'' E\omega. \quad (3.10)$$

Выразив из (3.9) $-\theta''$ и подставив в (3.10), получено выражение для нормальных напряжений:

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{I_\omega} \cdot \omega. \quad (3.11)$$

Касательные напряжения, вызванные стесненным кручением, записываются в виде:

$$\tau_{M_\omega} = \frac{M_\omega \cdot S_\omega^{\text{отс}}}{I_\omega \cdot \delta}. \quad (3.12)$$

Дифференциальное уравнение угла закручивания $\theta(x)$ получено из условия равновесия (3.7), которое записывается в виде:

$$M_{кр} = M_0 + M_\omega = GI_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + -EI_\omega \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} = GI_x \theta' - EI_\omega \theta'''. \quad (3.13)$$

Дифференцируя (3.13) по x , дифференциальное уравнение для углов закручивания окончательно примет вид:

$$\theta^{IV} - k^2\theta'' = \frac{m}{EI_\omega}, \quad (3.14)$$

где: $m = -\partial M_{кр}/\partial x$ - интенсивность крутящего момента, EI_ω - секториальная жесткость поперечного сечения, $k = \sqrt{GI_x/EI_\omega}$.

Общее решение уравнения (3.11) отыскивается в виде:

$$\theta = C_1 + C_2x + C_3chkx + C_4shkx, \quad (3.15)$$

а коэффициенты C_i определяются граничными условиями задачи.

3.5.2. Кручение тонкостенных стержней закрытого профиля

При кручении тонкостенных стержней с замкнутым поперечным сечением согласно исследованиям, проведенными многими учеными и, в первую очередь, Уманским А. А. [78,79], Урбан И. В. [80-82], касательные напряжения, которые действуют вдоль срединных линий контура сечения, можно представить в виде двух составляющих:

- касательных напряжений, вызванных чистым или свободным кручением

$$\tau_0 = \pm \frac{M_x}{\Omega\delta_s}, \quad (3.16)$$

где: M_x - полный крутящий момент, Ω - удвоенная площадь, охватываемая средней линией замкнутого профиля;

- касательных напряжений, вызванных стесненным кручением, которые, так же как и для стержней с незамкнутым поперечным сечением, считаются равномерно распределенными по толщине стенок:

$$\tau_{M_\omega} = -\frac{M_\omega\bar{S}_\omega}{I_\omega\delta_s}, \quad (3.17)$$

где: M_ω - изгибно-крутящий момент, I_ω - главный обобщенный секториальный момент инерции поперечного сечения стержня, \bar{S}_ω - приведенный секториальный статический момент, определяющийся по (3.18).

$$\bar{S}_{\bar{\omega}} = S_{\bar{\omega}} - \frac{1}{\Omega} \int_s S_{\bar{\omega}} d\omega, \quad (3.18)$$

$$S_{\bar{\omega}} = \int_{S_0}^S \bar{\omega} dA, \quad (3.19)$$

где: $S_{\bar{\omega}}$ - главный обобщенный секториальный статический момент, $\bar{\omega}$ - главная обобщенная секториальная площадь точек контура, S_0 – начальная точка.

Профессор А. А. Уманский [78,79], разработавший эту теорию, наряду с неизвестной функцией углов закручивания $\theta(x)$, ввел в рассмотрение неизвестную функцию меры депланации $\beta(x) = d\beta/dx$, так же требующую определения. Эти функции определяются из двух условий:

- первое условие заключается в том, что касательные напряжения, вызванные стесненным кручением, приводятся в сечении к суммарному крутящему моменту

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} - \mu \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{M_{кр}}{GI_d}, \quad (3.20)$$

откуда, функция меры депланации $\beta = \beta(x)$ определяется из следующей зависимости:

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{M_{кр}}{GI_d} \right), \quad (3.21)$$

где: θ - относительный угол закручивания, μ - коэффициент депланации сечения

$$\mu = 1 - \frac{I_x}{I_p}, \quad (3.21)$$

где:

$$I_x = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{dS}{\delta_s}}, \quad I_p = \oint r^2 dA, \quad (3.22)$$

условный момент инерции чистого кручения и направленный момент инерции соответственно. В (3.22) r – перпендикуляр, проведенный из центра кручения к касательной элемента контура сечения;

- второе условие выражает отсутствие разрывов в перемещениях срединной поверхности стержня. Из этого условия получено дифференциальное уравнение для определения углов закручивания:

$$\theta^{IV} - k^2 \theta'' = \frac{\mu m}{EI_{\bar{\omega}}}, \quad (3.23)$$

где: $m = -\partial M_{\text{кр}}/\partial x$ - интенсивность внешнего момента, $EI_{\bar{\omega}}$ - секториальная жесткость поперечного сечения, $k = \sqrt{\mu GI_x/EI_{\bar{\omega}}}$.

Выражения для изгибно-крутящего момента M_{ω} и бимоента B_{ω} записываются в виде:

$$B_{\omega} = -EI_{\bar{\omega}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}; \quad (3.24)$$

$$M_{\omega} = \frac{dB_{\omega}}{dx} = -EI_{\omega} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}. \quad (3.25)$$

Нормальные напряжения определяются следующей зависимостью:

$$\sigma_{\omega} = \frac{B_{\omega}}{I_{\bar{\omega}}} \cdot \bar{\omega}. \quad (3.26)$$

Общее решение уравнения (3.23) имеет вид:

$$\theta = C_1 + C_2 x + C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx + M_{\text{кр}} \frac{x}{GI_x}, \quad (3.27)$$

а коэффициенты C_i определяются граничными условиями задачи.

На основании вышеизложенного можно констатировать, что отличие теории кручения стержней открытого профиля от теории кручения стержней закрытого профиля заключается в следующем:

- касательные напряжения свободного кручения определяются по разному;
- секториальные координаты и секториальные геометрические характеристики сечений открытого профиля для замкнутого сечения заменяются обобщенными характеристиками;
- в дифференциальном уравнении углов закручивания и в выражении изгибно-крутильной характеристики появляется коэффициент депланации, который для открытых профилей равен единице.

3.6. Влияние эксцентриситета приложения нагрузки

При эксплуатации конструкций, а так же при выполнении строительномонтажных работ возможно смещение линии действия нагрузки с осевой линии балки, т.е. приложение ее с некоторым эксцентриситетом "e". Так, например, для подкрановых балок величина допускаемого отклонения оси рельса от срединной плоскости стенки балки на период приемки монтажных работ составляет 15 мм. Наличие эксцентриситета приложения нагрузки приводит, во-первых, к увеличению длины распределения давления, передаваемого верхним поясом на кромку стенки, а во-вторых - к закручиванию узла сопряжения стенки с поясом и их изгибу. Длина распределения давления, которую пояс передает на кромку стенки, согласно работам д.т.н. Броуде Б. М. [8], определяется по (3.28)

$$\lambda_0 = 2,6(\lambda + 2e), \quad (3.28)$$

где λ - условная длина распределения давления пояса на кромку стенки.

Кручение узла, а также связанный с ним изгиб пояса и стенки представляет собой достаточно сложную задачу, решением которой занимались многие ученые (А. А. Апалько [3], О.Ф.Иванков [43], Н.С. Москалев [65], И.М. Один И.М [68], Г.А. Шапиро [84], Г.В. Чалков [83], А.М. Ковлягин [45]) и др).

3.7. Напряженное состояние в стенке составной балки с учетом местного кручения и локальной нагрузки

Рассматривается двутавровая стальная балка, нагруженная локальной нагрузкой, приложенной в месте расположения ребра жесткости с некоторым эксцентриситетом " e " (рис 3.3 и 3.4).

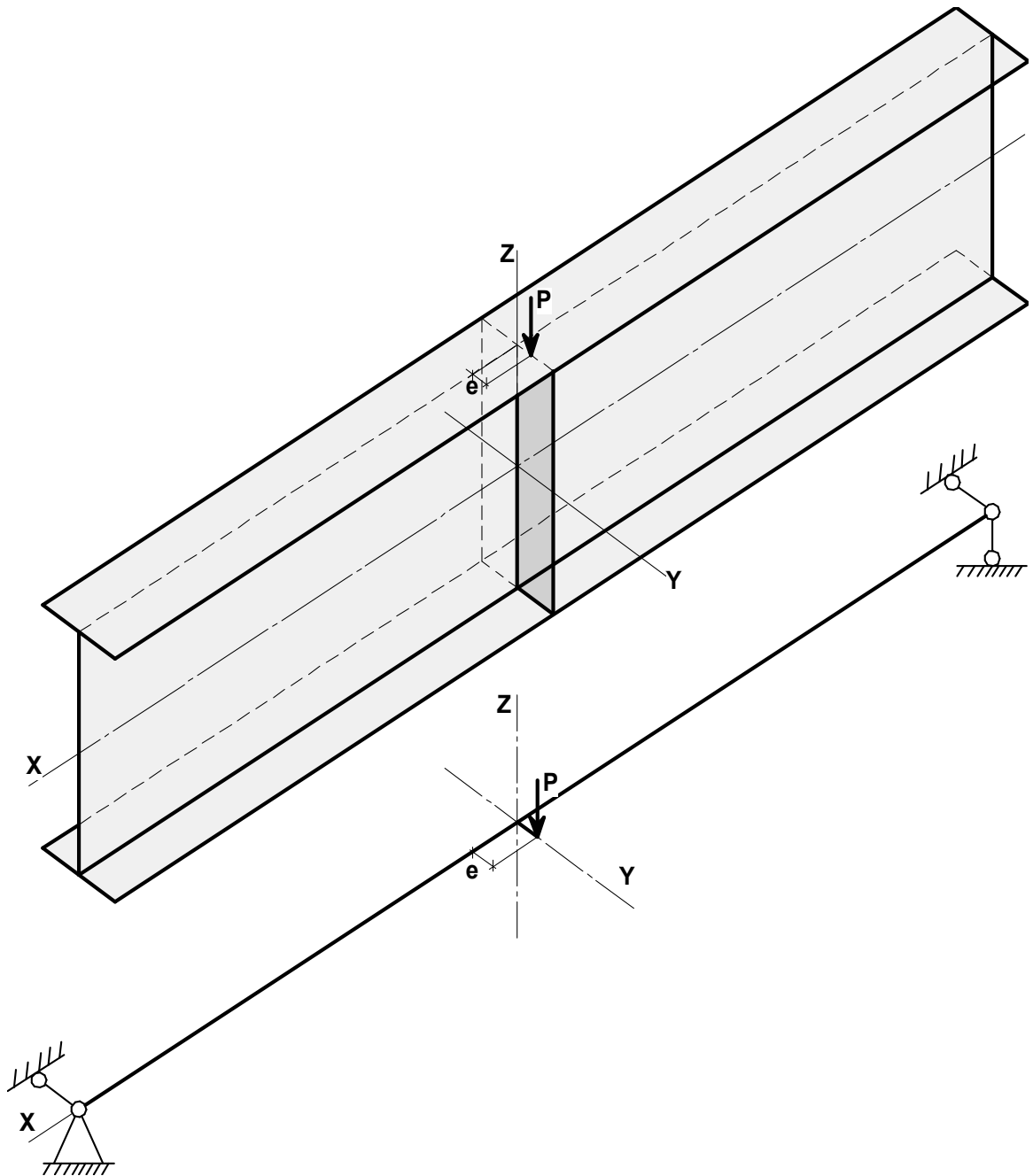


Рис. 3.3 Общий вид балки

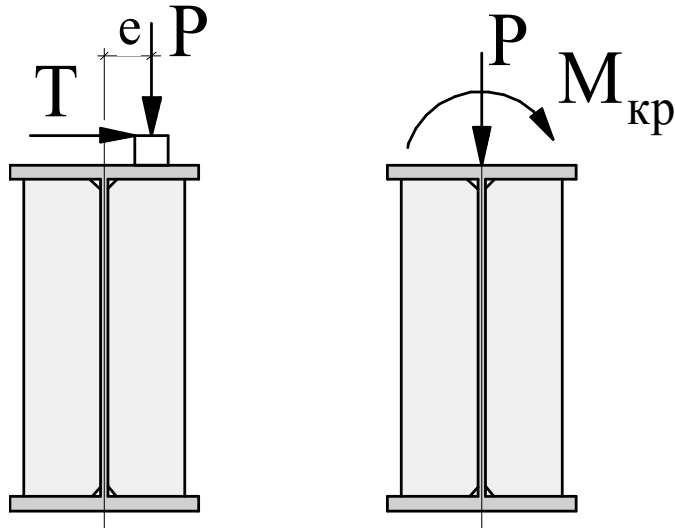


Рис. 3.4 Поперечное сечение балки

Крутящий момент $M_{кр}$, действующий на балку, определяется согласно СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции» [75]:

$$M_{кр} = \gamma_f \gamma_{f1} P \ell + 0,75 T \gamma_f h_r, \quad (3.29)$$

где: γ_f - коэффициент надежности по нагрузке,

γ_{f1} - коэффициент увеличения нагрузки на колесе мостового крана,

P – нагрузка от давления колеса крана,

T – сила поперечного торможения.

Используем принцип независимости действия сил для определения напряженно-деформированного состояния. Определяем напряжения в стенке от локальной нагрузки, приложенной по оси стенки, и суммируем их с напряжениями в стенке от местного кручения.

По методике, предложенной д.т.н. профессором Б.Б. Лампси [51], определяются напряжения в стенке от локальной нагрузки.

Суммарные напряжения в стенке складываются из напряжений в стенке по оси ребра от воздействий, приложенных к ее продольным кромкам:

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= [\alpha_0 + (1 - c_r) \alpha_p + \Psi_1 (\alpha_q + \Delta \alpha)] P / th ; \\ \sigma'_y &= \frac{[(1 - c_r) \beta_p + \Psi_1 (\beta_q + \Delta \beta)] P}{th} ; \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\tau_{xy} = \frac{[(1-c_r)\gamma_p + \Psi_1(\gamma_q + \Delta\gamma)]P}{th},$$

и напряжений от давления, передаваемого ребром жесткости на стенку балки $g(\mu)$:

$$\sigma_{xg} = \alpha_g c_r P / th, \quad \sigma_{yg} = \beta_g c_r P / th, \quad \tau_{xyg} = \gamma_g c_r P / th, \quad (3.31)$$

где: c_r – коэффициент, определяющий долю усилия, передаваемого поясом непосредственно на торец ребра. Значения c_r подсчитаны в зависимости от параметров λ_r, χ, η ;

$\alpha_g, \beta_g, \gamma_g$ - функции влияния, значения которых подсчитаны для некоторых величин управляющих параметров.

Для получения полных напряжений в стенке балки, необходимо к вышеуказанным напряжениям добавить напряжения от местного кручения.

Потенциальная энергия имеет вид:

$$L = L_0 + \partial W + \partial A, \quad (3.32)$$

где: L_0 - потенциальная энергия в исходном состоянии.

Приращение потенциальной энергии деформации составим, применяя полусдвиговую теорию В. И. Сливкера [74]:

$$\partial W = \frac{1}{2} \left[\int_{\ell} \left\{ GI_x \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + EI_\omega \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + GI_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right)^2 \right\} dx \right]. \quad (3.33)$$

Работа внешних сил:

$$\partial A = M_{кр} \theta.$$

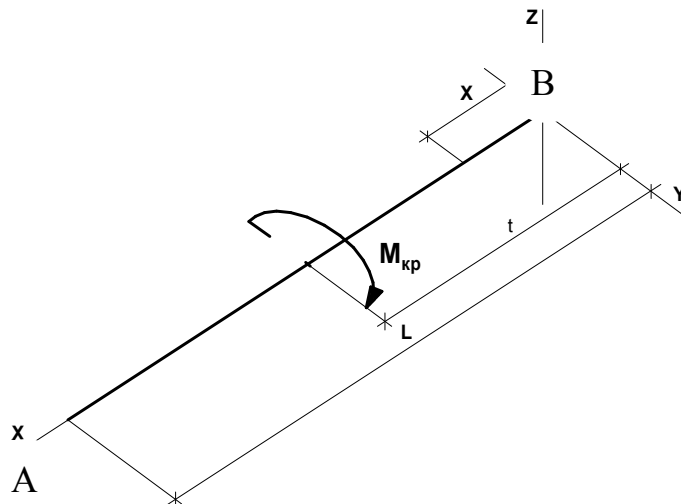


Рис. 3.5 Схема балки

Полная потенциальная энергия системы на участке $0 \leq x \leq t$ будет иметь вид:

$$L = L_0 + \frac{1}{2} \left[\int_0^t \left\{ GI_x \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + EI_\omega \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + GI_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right)^2 \right\} dx \right]. \quad (3.34)$$

На участке $t \leq x \leq \ell$ выражение для полной потенциальной энергии запишется в виде:

$$L = L_0 + \frac{1}{2} \left[\int_0^t \left\{ GI_x \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + EI_\omega \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + GI_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right)^2 \right\} dx \right] - M_{кр} \theta. \quad (3.35)$$

Из условия экстремума функционала полной энергии системы:

1. при $0 \leq x \leq t$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} &= 0, \end{aligned}$$

где:

$$\partial \theta_x = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \partial \beta_x = \frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

После дифференцирования получим:

$$\left. \begin{aligned} -G(I_x + I_g) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + GI_g \frac{\partial \beta}{\partial x} &= 0 \\ -EI_\omega \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - GI_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.36)$$

2. при $t \leq x \leq \ell$

$$\left. \begin{aligned} -G(I_x + I_g) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + GI_g \frac{\partial \beta}{\partial x} - M_{кр} &= 0 \\ -EI_\omega \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - GI_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.37)$$

Решаем систему уравнений (3.36) относительно θ , для этого из первого уравнения выразим $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ и подставим его во второе уравнение, предварительно продифференцировав его по x .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial x} &= \frac{(I_x + I_g) \partial^2 \theta}{I_g \partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} &= \frac{(I_x + I_g) \partial^3 \theta}{I_g \partial x^3}; \\ -EI_\omega \frac{(I_x + I_g) \partial^3 \theta}{I_g \partial x^3} - GI_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right) &= 0; \\ -EI_\omega \frac{(I_x + I_g) \partial^4 \theta}{I_g \partial x^4} - GI_g \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + GI_g \frac{\partial \beta}{\partial x} &= 0,\end{aligned}$$

или после преобразований:

$$\begin{aligned}-EI_\omega \frac{(I_x + I_g) \partial^4 \theta}{I_g \partial x^4} - GI_g \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + G(I_x + I_g) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0; \\ -EI_\omega \frac{(I_x + I_g) \partial^4 \theta}{I_g \partial x^4} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} [GI_x + GI_g - GI_g] &= 0.\end{aligned}$$

Окончательно дифференциальное уравнение принимает вид:

$$-EI_\omega \frac{(I_x + I_g)}{I_g} \theta^{IV} + GI_x \theta'' = 0. \quad (3.38)$$

Решаем систему уравнений (3.36) относительно β , для этого из первого уравнения выразим $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ и подставим во второе уравнение, продифференцированное по x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{I_g}{(I_x + I_g)} \frac{\partial \beta}{\partial x}; \\ -EI_\omega \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} - GI_g \left[\frac{I_g}{(I_x + I_g)} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right] &= 0; \\ -EI_\omega \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} - GI_g \left[\frac{I_g}{(I_x + I_g)} - 1 \right] \frac{\partial \beta}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Окончательно дифференциальное уравнение принимает вид:

$$-EI_\omega \beta''' - GI_g \left[\frac{I_g}{(I_x + I_g)} - 1 \right] \beta' = 0. \quad (3.39)$$

Решаем систему уравнений (3.37) относительно θ , для этого из первого уравнения выразим $\frac{\partial \beta}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial x} &= \frac{(I_x + I_g) \partial^2 \theta}{I_g} + \frac{M_{кр}}{GI_g}; \\ \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} &= \frac{(I_x + I_g) \partial^3 \theta}{I_g} + \frac{M_{кр}}{GI_g}; \\ -EI_\omega \left[\frac{(I_x + I_g) \partial^3 \theta}{I_g} + \frac{M_{кр}}{GI_g} \right] - GI_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right) &= 0; \\ -EI_\omega \frac{(I_x + I_g) \partial^3 \theta}{I_g} - \frac{EI_\omega}{GI_g} M_{кр} - GI_g \frac{\partial \theta}{\partial x} + GI_g \beta &= 0; \\ -EI_\omega \frac{(I_x + I_g) \partial^4 \theta}{I_g} - \frac{EI_\omega}{GI_g} M_{кр} - GI_g \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + GI_g \left[\frac{(I_x + I_g) \partial^2 \theta}{I_g} + \frac{M_{кр}}{GI_g} \right] &= 0; \\ -EI_\omega \frac{(I_x + I_g) \partial^4 \theta}{I_g} - \frac{EI_\omega}{GI_g} M_{кр} - GI_g \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + G(I_x + I_g) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{M_{кр}}{GI_g} &= 0; \\ -EI_\omega \frac{(I_x + I_g) \partial^4 \theta}{I_g} - \frac{EI_\omega}{GI_g} M_{кр} + GI_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{M_{кр}}{GI_g} &= 0; \\ -EI_\omega \frac{(I_x + I_g) \partial^4 \theta}{I_g} + GI_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{EI_\omega}{GI_g} M_{кр} - \frac{M_{кр}}{GI_g}. \end{aligned}$$

Окончательно дифференциальное уравнение принимает вид:

$$-EI_\omega \frac{(I_x + I_g)}{I_g} \theta^{IV} + GI_x \theta'' = \frac{M_{кр}}{GI_g} (EI_\omega - 1). \quad (3.40)$$

Решаем систему уравнений (3.37) относительно β , для этого из первого уравнения выразим $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ и подставим во второе уравнение, продифференцированное по x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{I_g}{(I_x + I_g)} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{M_{кр}}{G(I_x + I_g)}; \\ -EI_\omega \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} - GI_g \left[\frac{I_g}{(I_x + I_g)} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{M_{кр}}{G(I_x + I_g)} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right] &= 0; \\ -EI_\omega \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} - \frac{GI_g I_g}{(I_x + I_g)} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{I_g}{(I_x + I_g)} M_{кр} + GI_g \frac{\partial \beta}{\partial x} &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -EI_{\omega} \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} - \frac{GI_g I_g}{(I_x + I_g)} \frac{\partial \beta}{\partial x} + GI_g \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{I_g}{(I_x + I_g)} M_{kp} ; \\
& -EI_{\omega} \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} + GI_g \left[\frac{I_g}{(I_x + I_g)} - 1 \right] \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{I_g}{(I_x + I_g)} M_{kp} .
\end{aligned}$$

Окончательно дифференциальное уравнение принимает вид:

$$EI_{\omega} \beta'''' + GI_g \left[\frac{I_g}{(I_x + I_g)} - 1 \right] \beta' = \frac{I_g}{(I_x + I_g)} M_{kp} . \quad (3.41)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (3.38) относительно θ .

В уравнении (3.38) I_g представляет собой жесткостную характеристику, называемую депланационным моментом инерции. Его величина согласно [23] определяется выражением:

$$I_g = \frac{I_x}{\psi - 1} , \quad (3.42)$$

где ψ - безразмерный геометрический параметр.

Выразив ψ из (3.42) и подставив в (3.38), дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$EI_{\omega} \psi \theta^{IV} - GI_x \theta'' = 0 . \quad (3.43)$$

Обозначим:

$$k^2 = \frac{GI_x}{\psi EI_{\omega}} , \quad (3.44)$$

тогда (3.43) переписывается в следующей форме:

$$\theta^{IV} - k^2 \theta'' = 0 . \quad (3.45)$$

Решение дифференциального уравнения (3.45) имеет вид:

$$\theta(x) = c_1 + c_2 x + c_3 chkx + c_4 shkx . \quad (3.46)$$

Произвольные постоянные c_1, c_2, c_3 и c_4 найдем, используя метод начальных параметров. Выражения для $\theta(x), \theta'(x), B_{\omega}(x)$ и $M(x)$ для случая сосредоточенного крутящего момента примут следующий вид:

$$\theta(x) = c_1 + c_2 x + c_3 chkx + c_4 shkx; \quad (3.47)$$

$$\theta'(x) = c_2 + kc_3shkx + kc_4chkx; \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} B_\omega(x) &= -EI_\omega\theta'' = -EI_\omega(k^2c_3chkx + k^2c_4shkx) = \\ &= -\frac{GI_x}{\psi EI_\omega}EI_\omega(c_3chkx + c_4shkx) = -GI_x\frac{1}{\psi}(c_3chkx + c_4shkx); \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} M(x) &= -EI_\omega\theta''' + GI_x\theta' = \\ &= -EI_\omega k^3(c_3shkx + c_4chkx) + GI_x(c_2 + kc_3shkx + kc_4chkx) = \\ &= -GI_x\frac{k}{\psi}(c_3shkx + c_4chkx) + GI_x(c_2 + kc_3shkx + kc_4chkx) = \\ &= GI_x\left(-\frac{k}{\psi}c_3shkx - \frac{k}{\psi}c_4chkx + c_2 + kc_3shkx + kc_4chkx\right) = \\ &= GI_x\left(c_2 + kc_3shkx\left(1 - \frac{1}{\psi}\right) + kc_4chkx\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Выберем начало координат на опоре B (см. рис. 3.5). Для этого сечения начальными параметрами будут θ_0 , θ'_0 , B_0 и M_0 . Полагая $x = 0$, выразим произвольные постоянные c_1 , c_2 , c_3 и c_4 через начальные параметры θ_0 , θ'_0 , B_0 и M_0 . Будем иметь:

$$\theta_0 = c_1 + c_3; \quad \theta'_0 = c_2 + kc_4; \quad B_0 = -GI_x\frac{1}{\psi}c_3;$$

$$M_0 = GI_x\left[c_2 + k\left(\frac{\psi - 1}{\psi}\right)c_4\right].$$

Решая систему уравнений, получим:

$$c_3 = -\frac{\psi B_0}{GI_x}; \quad c_1 = \theta_0 + \frac{\psi B_0}{GI_x}; \quad c_4 = \theta'_0\frac{\psi}{k} - \frac{M_0\psi}{GI_x k}; \quad c_2 = \theta'_0 - \theta'_0\psi + \frac{\psi}{GI_x}M_0.$$

Подставив найденные значения произвольных постоянных c_1 , c_2 , c_3 и c_4 в выражения (3.47, 3.48), будем иметь:

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \theta_0 + \theta'_0\left[(1 - \psi)x + \frac{\psi}{k}shkx\right] + \frac{\psi}{GI_x}B_0(1 - chkx) + \\ &\quad + \frac{\psi}{GI_x}M_0\left(1 - \frac{1}{k}shkx\right); \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\theta'(x) = \theta'_0[(1 - \psi) + \psichkx] - \frac{\psi}{GI_x}B_0kshkx + \frac{\psi}{GI_x}M_0(1 - chkx). \quad (3.52)$$

Момент стесненного кручения, согласно теории Сливкера [74], определяется выражением:

$$M_{\omega} = \frac{GI_x}{\psi - 1} (\theta' - \beta). \quad (3.53)$$

Момент чистого кручения:

$$M_0 = GI_x \theta'. \quad (3.54)$$

Тогда полный крутящий момент можно записать в виде:

$$M_x = M_{\omega} + M_0 = \frac{GI_x}{\psi - 1} \theta' - \frac{GI_x}{\psi - 1} \beta + GI_x \theta'. \quad (3.55)$$

Функцию депланации β выразим из выражения (3.55)

$$\beta = \frac{\psi - 1}{GI_x} M_x - \theta' - (\psi - 1)\theta' = \frac{\psi - 1}{GI_x} M_x - \psi\theta'. \quad (3.56)$$

Рассмотрим граничные условия:

при $x = 0$: $\theta = 0$, $B = 0$;

при $x = \ell$: $\theta = 0$, $B = 0$.

Первые два граничных условия дают $\theta_0 = 0$, $B_0 = 0$. Из вторых двух условий выразим θ'_0 и M_0 при $x = \ell$:

$$\begin{aligned} \theta_{x=\ell} = \theta'_0 \left[(1 - \psi)x + \frac{\psi}{k} shkx \right] + \frac{\psi}{GI_x} M_0 \left(x - \frac{1}{k} shkx \right) - \\ - \frac{Pe}{GI_x} \left\{ \psi \left[(x - t) - \frac{1}{k} shk(x - t) \right] \right\}; \\ M_0 = \frac{Pe(\ell - t)}{\ell}. \end{aligned}$$

При условии что $\theta_{x=\ell} = 0$; $\theta_0 = 0$, можно записать:

$$\begin{aligned} \theta'_0 \left[(1 - \psi)\ell + \frac{\psi}{k} shk\ell \right] + \frac{Pe(\ell - t)}{\ell GI_x} \psi \left(\ell - \frac{1}{k} shk\ell \right) - \frac{Pe}{GI_x} \psi(\ell - t) + \\ + \frac{Pe}{GI_x} \frac{\psi}{k} shk(\ell - t) = 0. \end{aligned} \quad (3.57)$$

После преобразований, из (3.57) получим выражение для θ'_0 :

$$\theta'_0 = \frac{1}{\left[(1 - \psi)\ell + \frac{\psi}{k} shk\ell \right] \ell} \cdot \frac{Pe}{GI_x} \frac{\psi}{k} [(\ell - t)shk\ell - \ell shk(\ell - t)]. \quad (3.58)$$

Подставляя (3.58) в (3.51) и (3.52), получим выражения для функции угла закручивания $\theta(x)$ и первой производной $\theta'(x)$ на участках стержня:

при $0 \leq x < t$:

$$\theta(x) = \frac{Pe}{GI_x} \left\{ \frac{\left[(1-\psi)x + \frac{\psi}{k} shkx \right]}{\left[(1-\psi)\ell + \frac{\psi}{k} shk\ell \right]} \cdot \frac{\psi}{k\ell} [(\ell-t)shk\ell - \ell shk(\ell-t)] + \frac{(\ell-t)}{\ell} \psi \left(x - \frac{1}{k} shkx \right) \right\}; \quad (3.59)$$

$$\theta'(x) = \frac{Pe}{GI_x} \left\{ \frac{\left[(1-\psi) + chkx \right]}{\left[(1-\psi)\ell + \frac{\psi}{k} shk\ell \right]} \cdot \frac{\psi}{k\ell} [(\ell-t)shk\ell - \ell shk(\ell-t)] + \frac{(\ell-t)}{\ell} \psi (1 - chkx) \right\}; \quad (3.60)$$

при $t \leq x < \ell$:

$$\theta(x) = \frac{Pe}{GI_x} \left\{ \frac{\left[(1-\psi)x + \frac{\psi}{k} shkx \right]}{\left[(1-\psi)\ell + \frac{\psi}{k} shk\ell \right]} \cdot \frac{\psi}{k\ell} [(\ell-t)shk\ell - \ell shk(\ell-t)] + \frac{(\ell-t)}{\ell} \psi \left(x - \frac{1}{k} shkx \right) - \psi \left[(x-t) - \frac{1}{k} shk(x-t) \right] \right\}; \quad (3.61)$$

$$\theta'(x) = \frac{Pe}{GI_x} \left\{ \frac{\left[(1-\psi) + \frac{\psi}{k} chkx \right]}{\left[(1-\psi)\ell + \frac{\psi}{k} shk\ell \right]} \cdot \frac{\psi}{k\ell} [(\ell-t)shk\ell - \ell shk(\ell-t)] + \frac{(\ell-t)}{\ell} \psi (1 - chkx) - \psi [1 - chk(x-t)] \right\}. \quad (3.62)$$

Сравним полученное решение (3.61) для функции угла закручивания $\theta(x)$ с теорией В. З. Власова [16]. В теории Власова ($\psi = 1$), тогда (3.61) переписется в следующем виде:

$$\theta(x) = \frac{Pe}{GI_x} \left\{ \frac{shkx}{shk\ell} \frac{1}{k\ell} [(\ell-t)shk\ell - \ell shk(\ell-t)] + \frac{(\ell-t)}{\ell} \left(x - \frac{1}{k} shkx \right) - \left[(x-t) - \frac{1}{k} shk(x-t) \right] \right\},$$

ИЛИ

$$\theta(x) = \frac{Pe}{GI_x} \left\{ -\frac{shk(\ell - t)shkx}{kshk\ell} + \frac{t}{\ell}(\ell - x) + \frac{1}{k}shk(x - t) \right\},$$

а при

$$k = \frac{k'}{\ell},$$

$$\theta(x) = \frac{Pe}{GI_x} \left\{ \frac{\ell}{k'shk'} \left[sh \frac{k'}{\ell} (x - t)shk' - sh \frac{k'}{\ell} (\ell - t)sh \frac{k'}{\ell} x \right] + \frac{t}{\ell}(\ell - x) \right\}.$$

После преобразований окончательно получим:

$$\theta(x) = \frac{Pe}{GI_x} \left\{ \frac{t}{\ell}(\ell - x) - \frac{\ell}{k'} \frac{sh \frac{k'}{\ell} t}{shk'} sh \frac{k'}{\ell} (\ell - x) \right\}.$$

Полученное выражение для угла закручивания $\theta(x)$, полностью совпадает с уравнением теории В.З. Власова.

Определим функцию депланации β для участков, подставив в (3.56) выражения (3.60) и (3.62). Тогда:

- на участке $0 \leq x < t$:

$$\beta(x) = \frac{\psi - 1}{GI_x} \cdot \frac{Pe(\ell - t)}{\ell} - \psi \frac{Pe}{GI_x} \left\{ \frac{[(1 - \psi) + chkx]}{[(1 - \psi)\ell + \frac{\psi}{k}shk\ell]} \cdot \frac{\psi}{k\ell} [(\ell - t)shk\ell - \ell shk(\ell - t)] + \frac{(\ell - t)}{\ell} \psi(1 - chkx) \right\}, \quad (3.63)$$

- на участке $t \leq x < \ell$:

$$\beta(x) = \frac{\psi - 1}{GI_x} \cdot \left(-\frac{Pet}{\ell} \right) - \psi \frac{Pe}{GI_x} \left\{ \frac{[(1 - \psi)x + \frac{\psi}{k}shkx]}{[(1 - \psi)\ell + \frac{\psi}{k}shk\ell]} \cdot \frac{\psi}{k\ell} [(\ell - t)shk\ell - \ell shk(\ell - t)] + \frac{(\ell - t)}{\ell} \psi(x - chkx) - \psi \left[(x - t) - \frac{1}{k}shk(x - t) \right] \right\}. \quad (3.64)$$

Для определения величины бимоента B_ω , определяющегося согласно теории Сливкера [74] формулой (3.65), необходимо знать первую производную от функции депланации $\beta(x)$:

$$B_{\omega} = -EI_{\omega}\beta'; \quad (3.65)$$

- на участке $0 \leq x < t$:

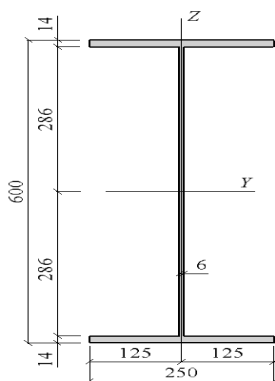
$$\beta'(x) = -\psi \frac{Pe}{GI_x} \left\{ \left(\frac{\ell - t}{\ell} \psi k \operatorname{sh} kx - \frac{\psi k \operatorname{sh} kx}{\left[(1 - \psi)\ell + \frac{\psi}{k} \operatorname{sh} k\ell \right]} \right) \cdot \frac{\psi}{k\ell} [(\ell - t) \operatorname{sh} k\ell - \ell \operatorname{sh} k(\ell - t)] \right\}; \quad (3.66)$$

- на участке $t \leq x < \ell$:

$$\beta'(x) = -\psi \frac{Pe}{GI_x} \left\{ \frac{(\ell - t)}{\ell} \psi k \operatorname{sh} kx - \frac{\psi k \operatorname{sh} kx}{\left[(1 - \psi)\ell + \frac{\psi}{k} \operatorname{sh} k\ell \right]} \right. \\ \left. \cdot \frac{\psi}{k\ell} [(\ell - t) \operatorname{sh} k\ell - \ell \operatorname{sh} k(\ell - t)] - \psi k \operatorname{sh} k(\ell - t) \right\}. \quad (3.67)$$

После определения $\theta'(x)$ и $\beta(x)$ так же можно определить момент стесненного кручения M_{ω} по формуле (3.53) и момент при чистом кручении M_0 по (3.54).

Полученные выражения (3.59) - (3.64), (3.66) и (3.67) позволяют определить функции угла закручивания и депланации, а также значения их производных. Проиллюстрируем это на примере двухопорной двутавровой стальной балки пролетом 6 метров, которая загружена вертикальной сосредоточенной силой в середине пролета и приложенной с эксцентриситетом 20 мм относительно срединной плоскости стенки над ребром жесткости (см. рис.3.3). Поперечное сечение балки и ее геометрические характеристики приведены на рис. 3.6.



$$E = 2,06 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2 \quad \nu = 0,3, \rho = 7850 \text{ кг/м}^3,$$

$$G = 7,923 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2$$

$$I_x = 41,27 \text{ см}^4, \quad I_{\omega} = 16498696,28 \text{ см}^6,$$

$$I_r = 73110,059 \text{ см}^4, \quad I_g = 68783,3 \text{ см}^4.$$

Рис. 3.6. Поперечное сечение стержня

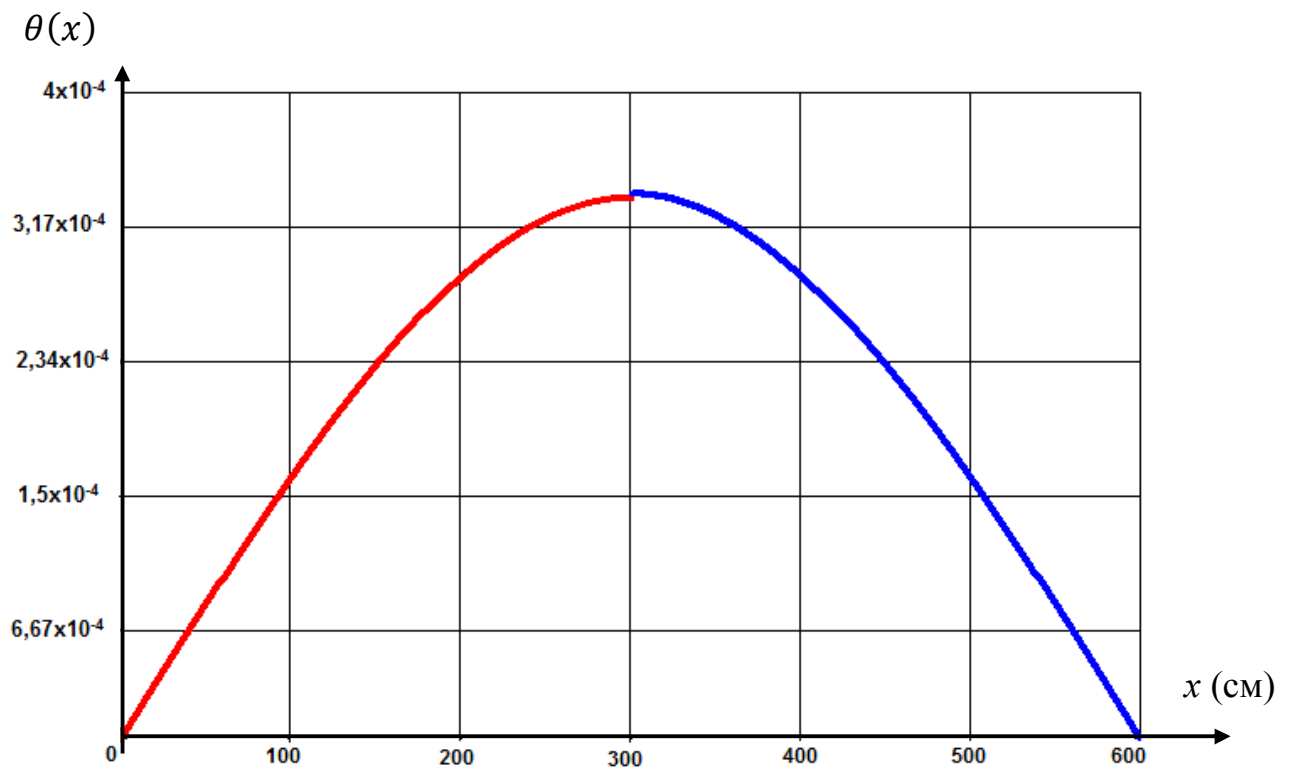


Рис. 3.7. График изменения угла закручивания $\theta(x)$ по длине балки формулы (3.59), (3.61)

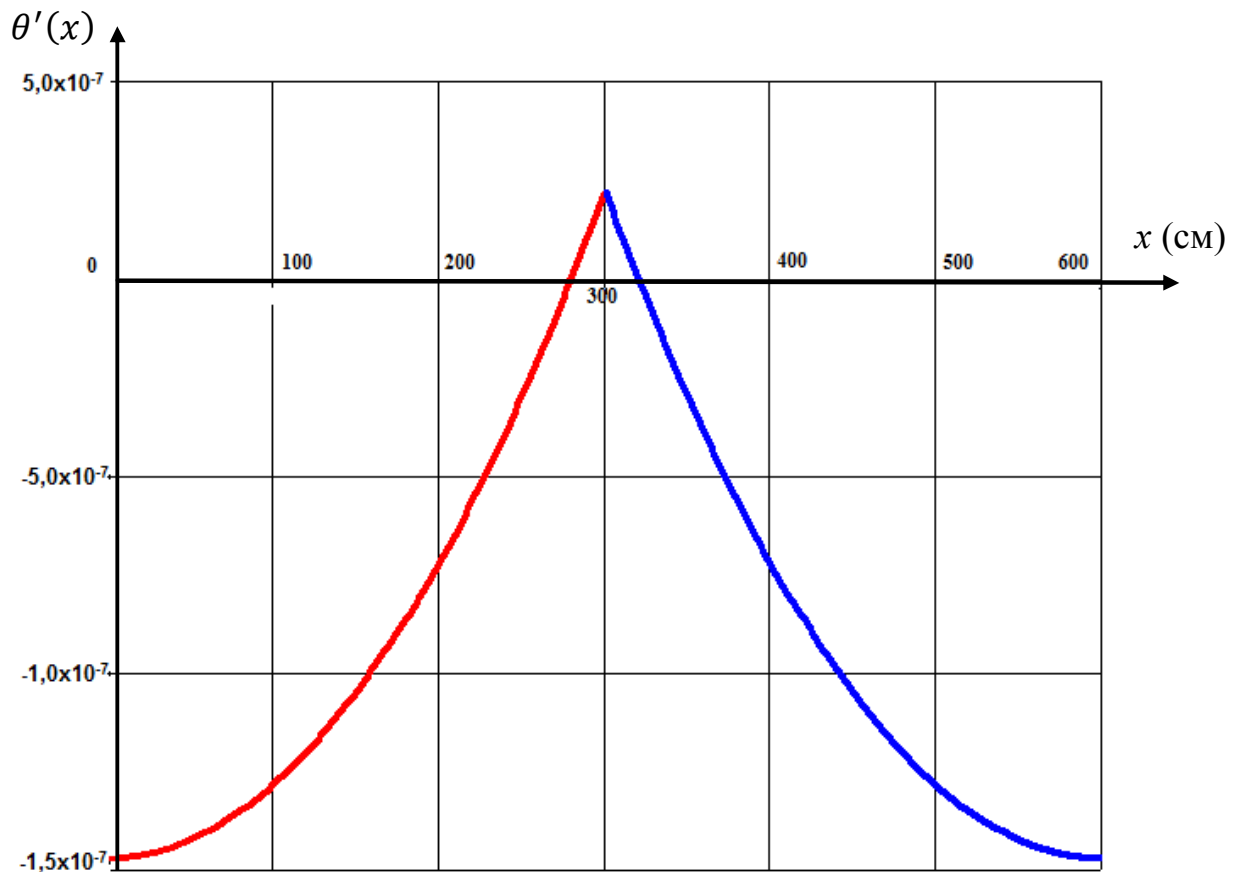


Рис. 3.8. График изменения производной функции угла закручивания $\theta'(x)$ по длине балки: формулы (3.60), (3.62)

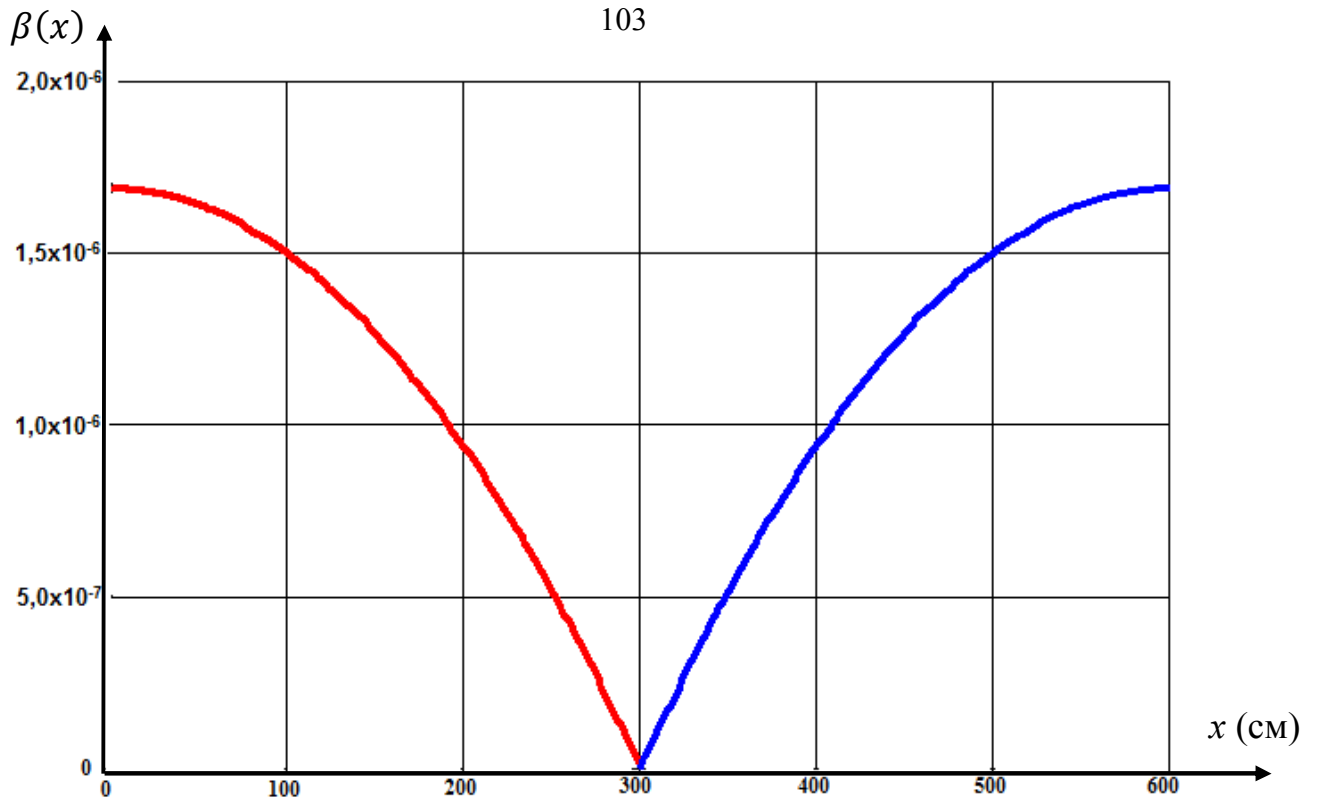


Рис. 3.9. График изменения деформации сечения $\beta(x)$ по длине балки: формулы (3.63), (3.64)

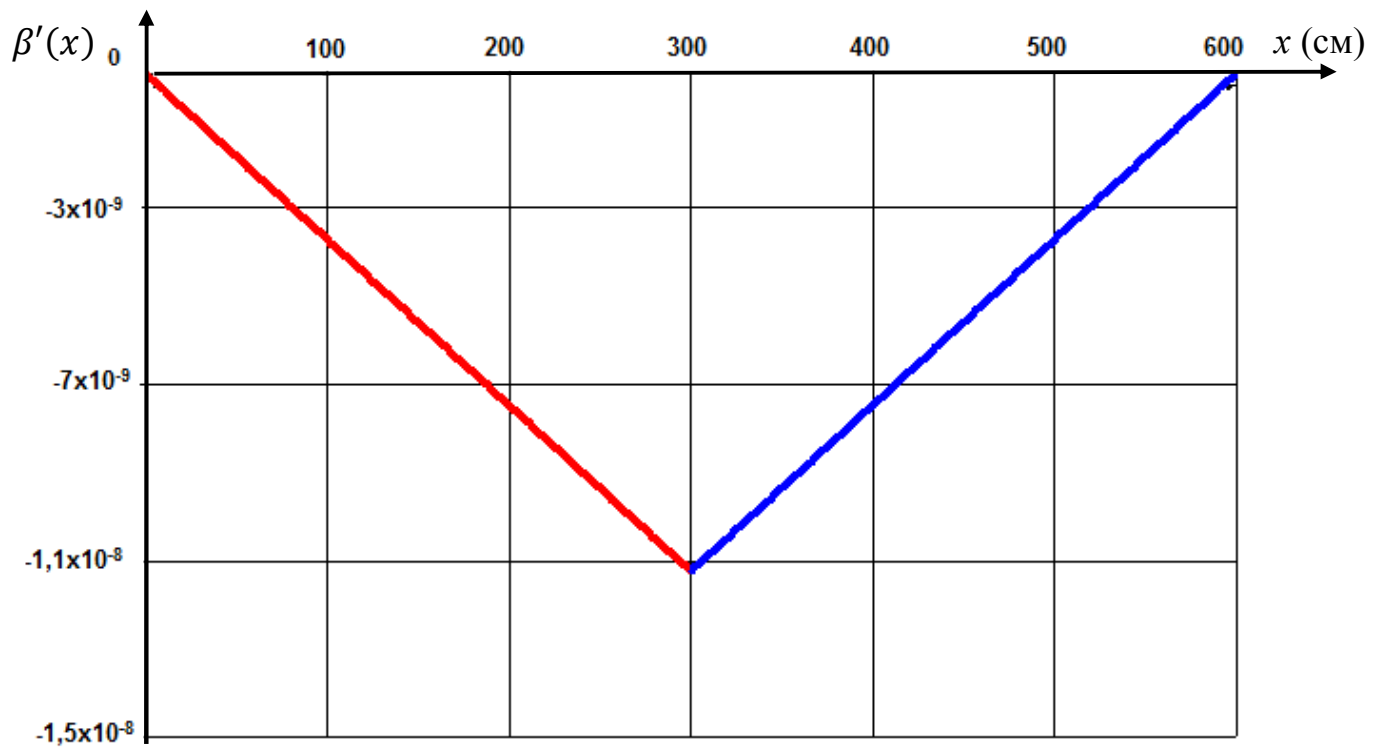


Рис. 3.10. График первой производной функции деформации сечения $\beta'(x)$ по формулам (3.66), (3.67)

Как известно, напряженно-деформированное состояние стержня характеризуется шестью видами деформаций, соответствующих шести степеням свободы поперечного сечения: растяжение - сжатие (смещение вдоль оси x), сдвиг по оси y и z , кручение вокруг оси x , изгиб в плоскостях zox и yox . Но все предпосылки и формулы, связанные с расчетами стержней на прочность и жесткость, справедливы лишь при принятии гипотезы плоских сечений. Очевидно, что при искривлении плоскости поперечного сечения возникнут дополнительные напряжения и деформации, характеризующиеся новыми силовыми факторами. Такой вид деформации назван депланацией, а соответствующий силовой фактор - бимоментом. Многочисленные теоретические и практические исследования показали, что более всего депланация отражается на нормальных напряжениях, возникающих в полках элементов и в меньшей степени на касательных. Становится очевидным, что часть составляющих тензора напряжений (как нормальная, так и касательная) может быть обусловлена не только поперечной силой и изгибающим моментом, но и крутящим и изгибно-крутящим моментами, а также бимоментом. Можно предположить, что это становится справедливым для балок с несимметричным сечением, при неравномерном нагружении балок. Типичным примером являются подкрановые балки, для которых нагрузка от вертикального давления колеса крана, приложенная с некоторым эксцентриситетом e относительно оси стенки (за счет смещения рельса с оси балки), а так же от силы поперечного торможения кроме изгибающего момента, будут вызывать еще и крутящий момент (см. рис. 3.11).

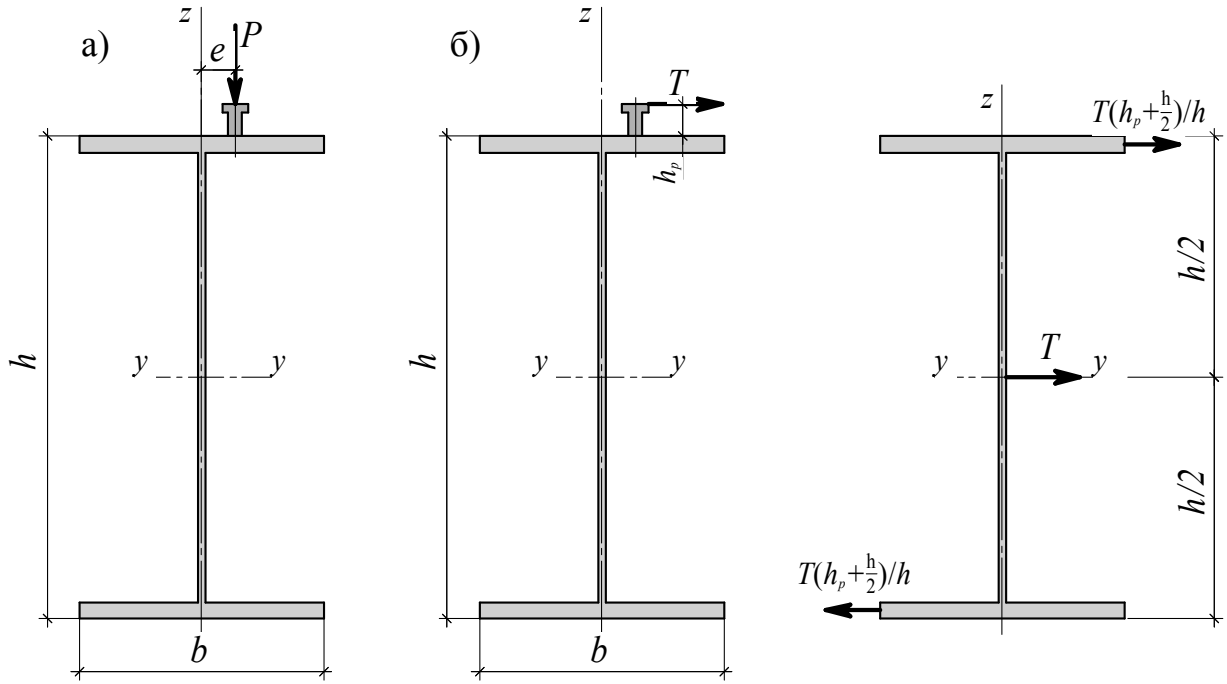


Рис. 3.11 Схема приложения нагрузки от вертикального давления колеса крана с эксцентриситетом (а) и силы поперечного торможения (б)

Проиллюстрируем на примере двутавровой балки (см. рис. 3.6) характер распределения величины бимомента B_ω по длине балки и его зависимость от величины эксцентриситета e . Для этого в формулу (3.65) подставим выражения β' (3.66) и (3.67) для участков $0 \leq x < t$ и $t \leq x < \ell$ соответственно. Тогда:

на участке $0 \leq x < t$:

$$B_\omega(x) = -\psi P e \frac{EI_\omega}{GI_x} \left\{ \frac{(\ell - t)}{\ell} \psi k shkx - \frac{\psi k shkx}{\left[(1 - \psi)\ell + \frac{\psi}{k} shk\ell \right]} \cdot \frac{\psi}{k\ell} [(\ell - t)shk\ell - \ell shk(\ell - t)] \right\}; \quad (3.68)$$

на участке $t \leq x < \ell$:

$$B_\omega(x) = -\psi P e \frac{EI_\omega}{GI_x} \left\{ \frac{(\ell - t)}{\ell} \psi k shkx - \frac{\psi k shkx}{\left[(1 - \psi)\ell + \frac{\psi}{k} shk\ell \right]} \cdot \frac{\psi}{k\ell} [(\ell - t)shk\ell - \ell shk(\ell - t)] - \psi k shk(\ell - t) \right\}. \quad (3.69)$$

Графически это будет выглядеть следующим образом:

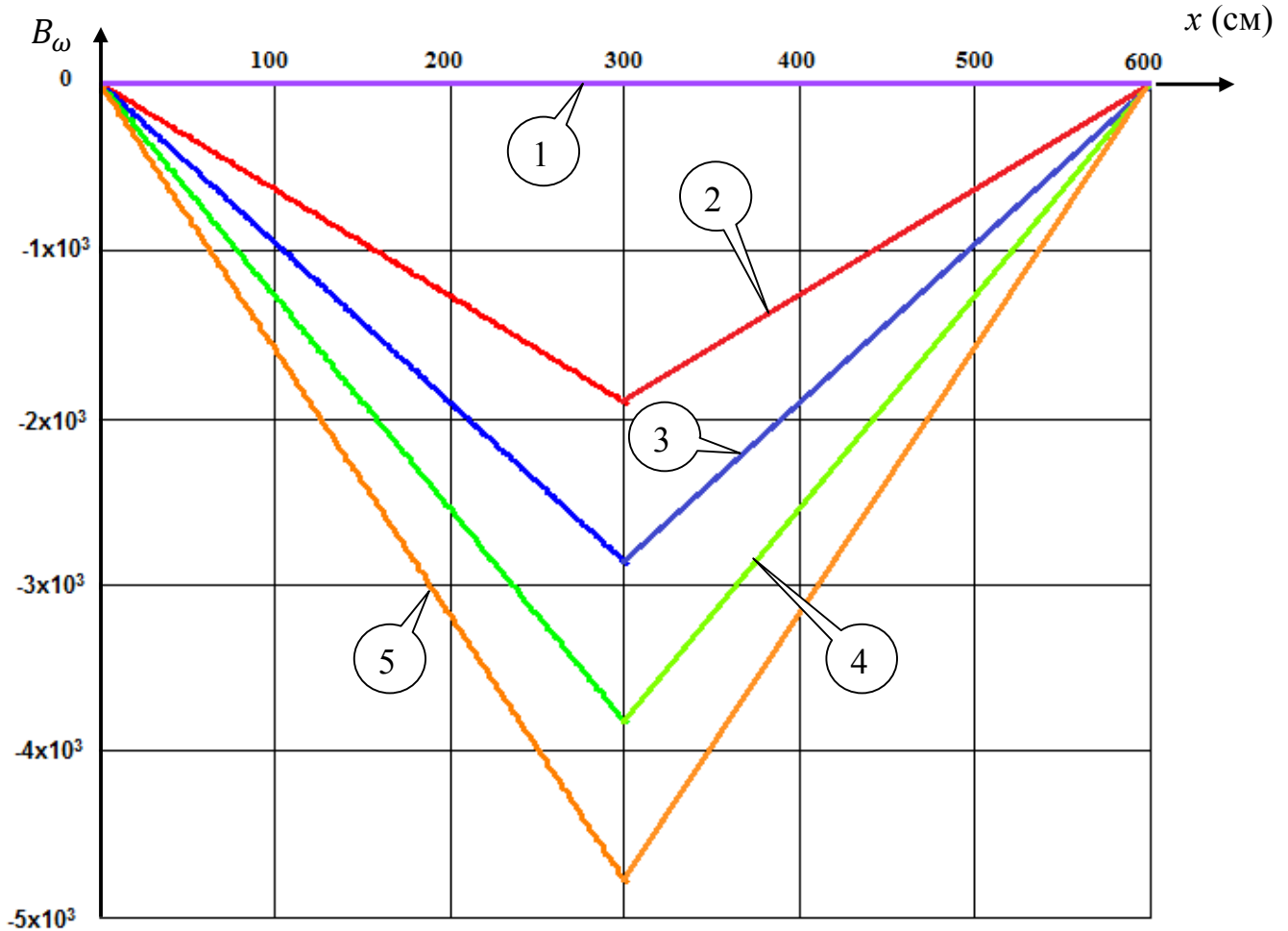


Рис. 3.12. График изменения величины бимоента B_ω по длине балки в зависимости от эксцентриситета приложения нагрузки e :

① $e = 0$; ② $e = 10$ мм; ③ $e = 15$ мм; ④ $e = 20$ мм; ⑤ $e = 25$ мм.

Анализ полученного графика позволяет сделать вывод, что при отсутствии эксцентриситета приложения нагрузки местное кручение будет отсутствовать, а, следовательно, и величина бимоента B_ω равна нулю. Это значит, что при выполнении проверки прочности его можно не учитывать. При наличии же эксцентриситета приложения нагрузки, кроме изгибных напряжений будут возникать напряжения от местного кручения. Величина бимоента будет увеличиваться с увеличением эксцентриситета, а пиковые его значения будут под точкой приложения нагрузки. Поэтому проверка прочности сечения стержня должна проводиться с его учетом.

3.8. Пример расчета составной балки с учетом местного кручения и локальной нагрузки от мостового крана

Проиллюстрируем полученные теоретические выкладки на примере расчета сварной двутавровой металлической подкрановой балки пролетом 6 метров.

Подобрано сечение подкрановой балки под два крана грузоподъемностью $Q_0 = 12,5 \text{ т} = 125 \text{ кН}$, режим работы 5К по методике СП 16.13330.2011 "Стальные конструкции" [75] при следующих исходных данных: пролет кранов $L_c = 16,5 \text{ м}$, шаг колонн $B_{fr} = 6 \text{ м}$, материал – сталь С245, коэффициент надежности по ответственности $\gamma_n = 1$ (уровень ответственности нормальный, класс сооружения КС-2 по ГОСТ 27751-2014). Для изготовления балки принят сварной двутавр без тормозной конструкции.

В соответствии с ГОСТ 25711 нормативное давление колеса крана $F_{cn} = 120 \text{ кН}$; вес крана $G_c = 160 \text{ кН}$; вес тележки крана $G_T = 30 \text{ кН}$; база крана $K_c = 4,4 \text{ м}$; ширина крана $B_c = 5,5 \text{ м}$; количество колес крана на одной его стороне $n_0 = 2$; крановый рельс КР 70.

Нагрузки на балку.

Расчетное давление колеса крана при учете двух кранов с учетом собственного веса подкрановой балки, кранового рельса и дополнительных технологических деталей:

$$F_c = \gamma_n \gamma_f k_d \psi \alpha_g F_{cn} = 1 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 0,85 \cdot 1,03 \cdot 120 = 151,3 \text{ кН}$$

Нормативное значение горизонтального давления колеса:

$$T_{cn} = \frac{\beta(Q_0 + G_T)}{n_0} = 0,05 \cdot \frac{(125 + 30)}{2} = 3,88 \text{ кН};$$

Расчетное значение горизонтального давления колеса при учете двух кранов:

$$T_c = \gamma_n \gamma_f \psi T_{cn} = 1 \cdot 1,2 \cdot 0,85 \cdot 3,88 = 3,96 \text{ кН}.$$

Усилия в подкрановой балке.

Для дальнейших расчетов необходимы максимальные расчетные значения изгибающего момента $M_{max,z}$ и поперечной силы $Q_{max,z}$ от двух кранов, а также максимальный нормативный изгибающий момент от одного крана $M_{max,1n}$. Для определения этих величин можно использовать линии влияния соответствующих усилий или пользоваться стандартными правилами строительной механики. Второе предпочтительнее, т.к. дополнительно необходимы и опорные реакции балки.

Для определения $M_{max,z}$ установим два крана (крановый поезд) на балку в соответствии с правилом Винклера (рис. 3.13). На рассчитываемой балке расположились два колеса смежных кранов кранового поезда. Остальные два колеса выходят за пределы балки и поэтому в расчетах не учитываются.

Правильность установки кранового поезда проверяем выполнением неравенств:

$$\frac{R_{лв} + F_c}{a_{лв}} = \frac{0 + 151,3}{2,725} = 55,5 > \frac{R_{пр}}{a_{пр}} = \frac{151,3}{3,275} = 46,2$$

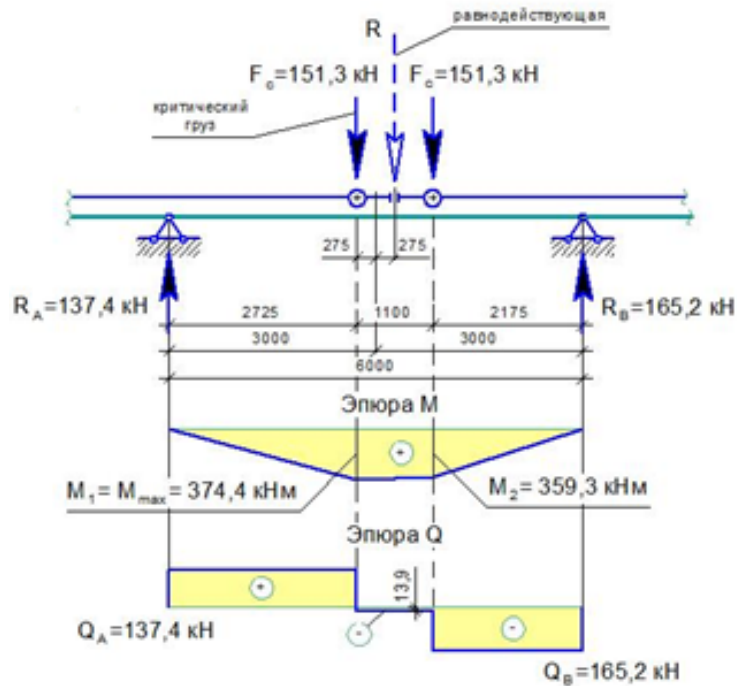
$$\frac{R_{лв}}{a_{лв}} = \frac{0}{2,275} = 0 < \frac{F_c + R_{пр}}{a_{пр}} = \frac{151,3 + 151,3}{3,275} = 92,4$$

Определим опорные реакции:

$$R_A + R_B = 151,3 + 151,3 = 302,6 \text{ кН, т. е. } R_A = 302,6 - R_B;$$

$$\sum M_A = 0: 151,3 \cdot 2,725 + 151,3 \cdot (2,725 + 1,1) = R_B \cdot 6; R_B = 165,2 \text{ кН};$$

$$R_A = 302,6 - 162,5 = 137,4 \text{ кН.}$$

Рис. 3.13. К определению $M_{max,z}$

Моменты в сечениях под сосредоточенными силами:

$$M_1 = M_{max,z} = R_A \cdot 2,725 = 137,4 \cdot 2,725 = 374,4 \text{ кНм};$$

$$M_2 = R_B \cdot 2,175 = 165,2 \cdot 2,175 = 359,3 \text{ кНм}.$$

Для определения $Q_{max,z}$ крановый поезд устанавливается так, чтобы одно из колес было над опорой, а другие колеса были бы максимально приближены к этой же опоре (рис. 3.14). На рассчитываемой балке расположились три колеса смежных кранов кранового поезда.

Определим опорные реакции:

$$R_A + R_B = 151,3 + 151,3 + 151,3 = 453,9 \text{ кН, т. е. } R_A = 453,9 - R_B;$$

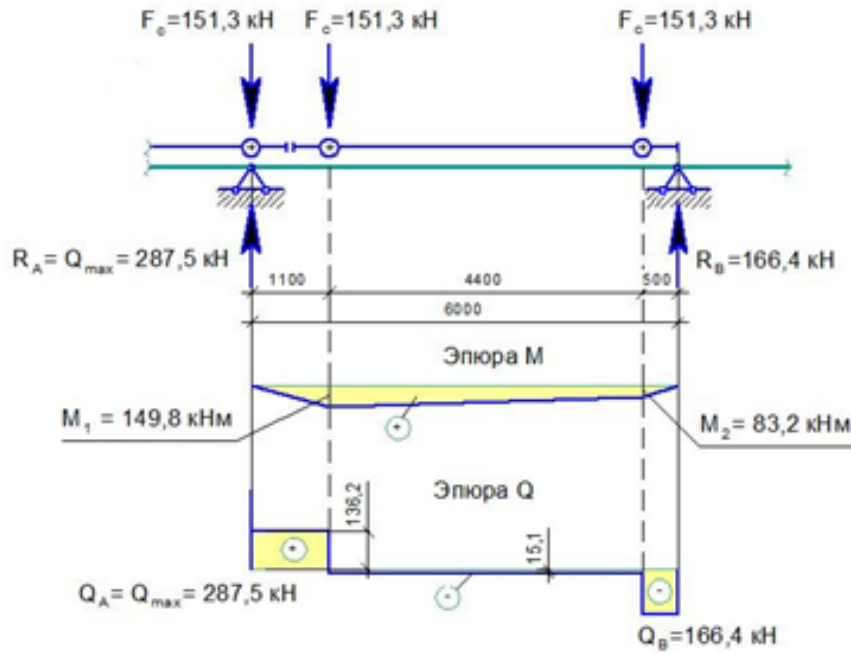
$$\sum M_A = 0: 151,3 \cdot 1,1 + 151,3 \cdot (4,4 + 1,1) = R_B \cdot 6; R_B = 166,4 \text{ кН};$$

$$R_A = 453,9 - 166,4 = 287,5 \text{ кН}.$$

Моменты в сечениях под сосредоточенными силами:

$$M_1 = (R_A - F_c) \cdot 1,1 = (287,5 - 151,3) \cdot 1,1 = 149,8 \text{ кНм};$$

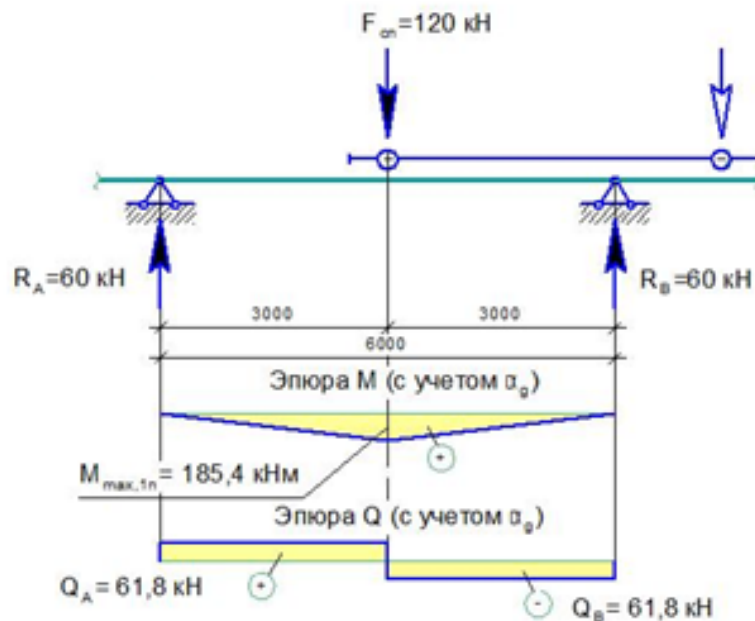
$$M_2 = R_B \cdot 0,5 = 165,2 \cdot 0,5 = 83,2 \text{ кНм}.$$

Рис. 3.14. К определению $Q_{max,z}$

Для определения $M_{max,1n}$ установим колесо одного крана в середине пролета балки (рис. 3.15). Другое колесо располагается вне габаритов балки и в расчетах не учитывается.

$$R_A = R_B = 60 \text{ кН};$$

$$M_{max,1n} = F_{cn} \cdot 6/4 \cdot \alpha_g = 120 \cdot 6/4 \cdot 1,03 = 185,4 \text{ кНм}.$$

Рис. 3.15 К определению $M_{max,1n}$

При определении момента $M_{max,z}$ и поперечной силы $Q_{max,z}$ от горизонтальной нагрузки учтем, что максимальные значения этих величин развиваются при тех же установках кранового поезда, что и при определении момента и поперечной силы от вертикальной нагрузки (рис. 3.31, 3.14), при этом эпюры усилий будут подобны. Коэффициентом подобия k_T может быть принято отношение горизонтальной нагрузки к вертикальной, т.е.:

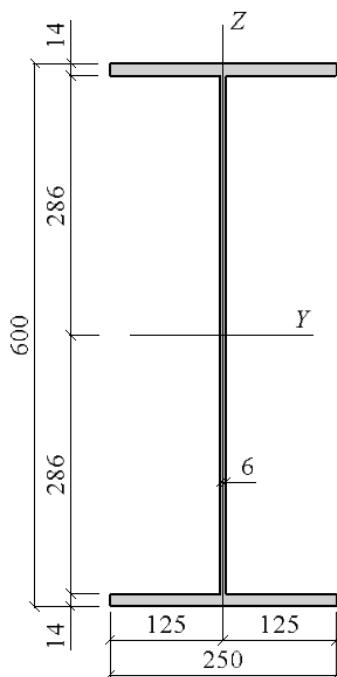
$$k_T = \frac{T_c}{F_c} = \frac{3,96}{151,3} = 0,026.$$

Тогда получим:

$$M_{max,y} = k_T M_{max,z} = 0,026 \cdot 374,4 = 9,7 \text{ кНм};$$

$$Q_{max,y} = k_T Q_{max,z} = 0,026 \cdot 287,5 = 7,5 \text{ кН}.$$

Скомпонованное сечение балки, удовлетворяющее требованиям жесткости и устойчивости, а также его геометрические характеристики приведены на рис. 3.15.



$$A = 104,32 \text{ см}^2 \quad I_z = 69451,7 \text{ см}^4,$$

$$W_z = 2315,1 \text{ см}^3, \quad G = 7,923 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2$$

$$I_x = 41,27 \text{ см}^4, \quad I_\omega = 16498696,28 \text{ см}^6,$$

$$I_r = 73110,059 \text{ см}^4, \quad I_g = 68783,3 \text{ см}^4.$$

Рис. 3.15 Поперечное сечение подкрановой балки, геометрические характеристики.

Дополнительно определим:

- момент инерции верхнего пояса относительно вертикальной оси Z :

$$I_{z,f} = t_f \frac{b_f^3}{12} = 1,4 \frac{25^3}{12} = 1822,9 \text{ см}^4;$$

- момент сопротивления верхнего пояса относительно вертикальной оси Z:

$$W_{z,f} = t_f \cdot \frac{b_f^2}{6} = 1,4 \cdot \frac{25^2}{6} = 145,8 \text{ см}^3.$$

Проверка прочности сечения без учета местного кручения:

- верхний пояс:

$$\frac{M_{z,max}}{W_z R_y \gamma_c} + \frac{M_y}{W_{y,f} R_y \gamma_c} = \frac{374,4 \cdot 10^2}{2315,1 \cdot 24 \cdot 1} + \frac{9,7 \cdot 10^2}{145,8 \cdot 24 \cdot 1} = 0,954 < 1,0;$$

- нижний пояс:

$$\frac{M_{z,max}}{W_z R_y \gamma_c} = \frac{374,4 \cdot 10^2}{2315,1 \cdot 24 \cdot 1,0} = 0,674 < 1,0;$$

Выполним проверку прочности сечения подкрановой балки с учетом местного кручения, вызванного: а) силой поперечного торможения, б) эксцентриситетом приложения нагрузки (вертикального давления).

Для определения величины бимомента B_ω по формулам (3.68) и (3.69) определим приведенную длину балки из условия равенства момента для случая ее загрузки одной сосредоточенной силой, приложенной в середине пролета, максимальному моменту от заданного нагружения:

$$\frac{P \ell_{пр}}{4} = M_{max,z} = R_A \cdot 2,725 = 137,4 \cdot 2,725 = 374,4 \text{ кНм};$$

откуда получим величину приведенного пролета $\ell_{пр} = 9,9 \text{ м}$.

Тогда величина бимомента B_ω в середине пролета балки ($x = 4,95 \text{ м}$) будет равна:

а) от силы поперечного торможения T_c :

$$B_\omega = -3,726 \cdot 10^4 \text{ кНсм}^2 = -372,6 \text{ кНм}^2;$$

б) от эксцентриситета приложения вертикальной нагрузки ($e = 15 \text{ мм}$):

$$B_\omega = -5,41 \cdot 10^4 \text{ кНсм}^2 = -541,0 \text{ кНм}^2.$$

В эксплуатируемых на практике подкрановых конструкциях вполне вероятным является смещение линии действия нагрузки (давления колеса крана) из се-

рединной плоскости стенки, т.е. приложение ее с некоторым эксцентриситетом e . Согласно действующим правилам (п. 4.12, табл. 4.9) [75] это смещение на момент приемки монтажных работ ограничивается величиной 15 мм. В процессе эксплуатации величина эксцентриситета может и увеличиваться. Это подтверждается результатами проведенных обследований подкрановых конструкций.

Нормальные напряжения, вызванные стесненным кручением, определяются формулой (3.11). Для определения этого напряжения необходимо построить эпюру секториальных площадей. Известно, что если поперечное сечение обладает осью симметрии, то главный полюс лежит на этой оси, а главная начальная точка отсчета - на пересечении этой же оси со срединной линией сечения. Если же имеются две оси симметрии, то главный полюс совпадает с центром тяжести поперечного сечения [11]. Способы нахождения секториальных характеристик широко известны, выражения для них можно найти у многих авторов [6, 11, 13 21], поэтому в рамках данной задачи воспользуемся готовым решением.

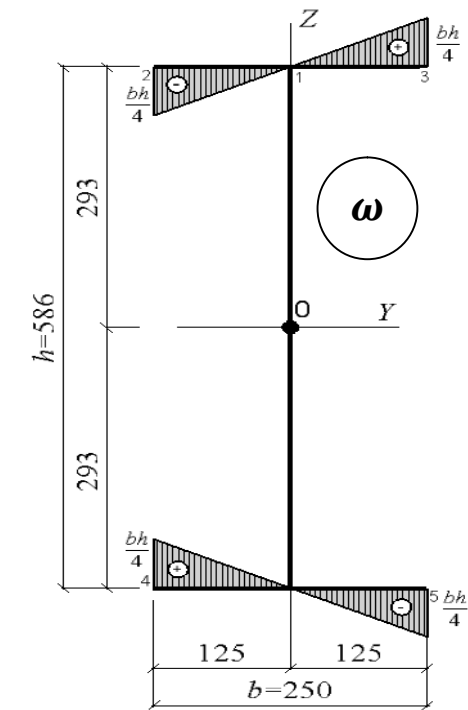


Рис. 3.16. Эпюра секториальных площадей ω .

Вычислим нормальные напряжения, вызванные стесненным кручением:

а) от силы поперечного торможения T_c ; б) от эксцентриситета приложения вертикальной нагрузки. Получим:

$$\text{а) } \sigma'_{\omega} = \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \cdot \omega = \frac{3,726 \cdot 10^4}{16498696,28} \cdot \frac{25 \cdot 58,6}{4} = 0,83 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2};$$

$$\text{б) } \sigma''_{\omega} = \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \cdot \omega = \frac{5,41 \cdot 10^4}{16498696,28} \cdot \frac{25 \cdot 58,6}{4} = 1,2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Суммарное значение нормальных напряжений от местного кручения составит:

$$\sigma_{\omega} = \sigma'_{\omega} + \sigma''_{\omega} = 0,83 + 1,2 = 2,03 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Тогда проверка прочности сечения с учетом местного кручения будет иметь вид:

- верхний пояс:

$$\frac{M_{z,max}}{W_z R_y \gamma_c} + \frac{M_y}{W_{y,f} R_y \gamma_c} + \frac{B_{\omega} \omega}{I_{\omega} R_y \gamma_c} = \frac{374,4 \cdot 10^2}{2315,1 \cdot 24 \cdot 1} + \frac{9,7 \cdot 10^2}{145,8 \cdot 24 \cdot 1} +$$

$$+ \frac{(3,726 \cdot 10^4 + 5,41 \cdot 10^4) \cdot 25 \cdot 58,6}{16498696,28 \cdot 4 \cdot 24 \cdot 1} = 1,039 > 1,0;$$

перенапряжение составляет 3,9%.

- нижний пояс:

$$\frac{M_{z,max}}{W_z R_y \gamma_c} + \frac{B_{\omega} \omega}{I_{\omega} R_y \gamma_c} = \frac{374,4 \cdot 10^2}{2315,1 \cdot 24 \cdot 1,0} + \frac{(3,726 \cdot 10^4 + 5,41 \cdot 10^4) \cdot 25 \cdot 58,6}{16498696,28 \cdot 4 \cdot 24 \cdot 1} =$$

$$= 0,759 < 1,0.$$

где:

$$B_{\omega} = B'_{\omega} + B''_{\omega},$$

B'_{ω} - бимомент от силы поперечного торможения T_c ;

B''_{ω} - бимомент от эксцентриситета приложения вертикальной нагрузки.

В таблице 3.1 приведены значения бимомента B''_{ω} , от эксцентриситета приложения вертикальной нагрузки, суммарные нормальные напряжения σ_{ω} при различных эксцентриситетах приложения вертикальной нагрузки, а так же результаты итоговых проверок прочности верхнего и нижнего поясов.

Таблица 3.1

Эксцентриситет "e", см	Бимомент B_{ω} кНсм ²	Напряжение σ_{ω} кН/см (суммарное)	Проверка прочности в.п.	Проверка прочности н.п.	Процент перенапряжения
1,5	$-5,41 \times 10^4$	$0,83 + 1,2 = 2,03$	1,039	0,759	3,9%
2,0	$-7,214 \times 10^4$	$0,83 + 1,6 = 2,43$	1,055	0,775	5,5%
2,5	$-9,017 \times 10^4$	$0,83 + 2,0 = 2,83$	1,072	0,792	7,2%
3,0	$-1,082 \times 10^5$	$0,83 + 2,4 = 3,23$	1,089	0,809	8,9%
3,5	$-1,262 \times 10^5$	$0,83 + 2,8 = 3,63$	1,105	0,825	11,05%
4,0	$-1,443 \times 10^5$	$0,83 + 3,2 = 4,03$	1,122	0,842	11,22%

Анализируя полученный результат, можно сделать вывод: при учете нормальных напряжений σ_{ω} , вызванных стесненным кручением от силы поперечного торможения T_c , добавка к напряжениям составляет 3,4%. При учете эксцентриситета приложения вертикальной нагрузки "e" от 15 до 40 мм, добавка к напряжениям составила от 5,0% до 13,3%. Очевидно, что с увеличением эксцентриситета этот процент будет только увеличиваться. Совокупность этих двух факторов приводит к увеличению суммарных напряжений и невыполнению проверки прочности по формуле (3.4).

Таким образом, анализ полученных результатов показал, что при наличии эксцентриситетов приложения силовых факторов, вызывающих местное кручение, проверку прочности необходимо выполнять с учетом компоненты напряжений, обусловленной наличием стесненного кручения стержня.

Выводы по главе:

1. Выведены дифференциальные уравнения для угла закручивания θ (3.38), (3.40) и меры депланации β (3.39), (3.41) для участков балки, нагруженных локальной нагрузкой, приложенной с некоторым эксцентриситетом "e" по отношению к срединной плоскости стенки.

2. Получены выражения для определения углов закручивания $\theta(x)$ (3.59), (3.61) и их первых производных $\theta'(x)$ (3.60), (3.62). Выполнено сравнение полученного решения для $\theta(x)$ с теорией В. З. Власова. Сравнение показало, что при единичном значении безразмерного параметра ($\psi = 1$), предлагаемое решение полностью совпадает с выражением для угла закручивания теории В. З. Власова.

3. Выведены формулы для определения функции депланации $\beta(x)$ (3.63), (3.64), а так же первой производной функции депланации $\beta'(x)$ (3.66), (3.67) на участках балки.

4. На примере двутавровой балки, нагруженной сосредоточенной силой, приложенной с некоторым эксцентриситетом "e", с использованием полученных формул графически проиллюстрированы законы изменения функций угла закручивания $\theta(x)$ (рис. 3.7), меры депланации $\beta(x)$ (рис. 3.9) и их производных $\theta'(x)$ (рис. 3.8) и $\beta'(x)$ (рис. 3.10) по длине балки.

5. Предложена методика определения величины бимоента B_ω (3.68), (3.69). Графически показано влияние эксцентриситета приложения нагрузки на величину бимоента B_ω (рис. 3.12).

6. С использованием полученной методики выполнен пример расчета сварной двутавровой подкрановой балки. Определено, что при наличии эксцентриситета приложения нагрузки, а так же наличии силовых факторов, вызывающих местное кручение, например силы поперечного торможения T_c , будут развиваться нормальные напряжения σ_ω . Величина этих напряжений будет существенно зависеть от величины бимоента B_ω , который, в свою очередь, тем больше, чем больше величина эксцентриситета приложения нагрузки "e". В таблице 3.1 для рассматриваемой балки приведены значения бимоента B''_ω при различных экс-

центриситетах приложения вертикальной нагрузки, а также значения суммарных нормальных напряжений σ_{ω} , вызванных стесненным кручением: а) от силы поперечного торможения T_c , б) от эксцентриситета приложения вертикальной нагрузки.

Анализ полученных результатов показал, что при наличии эксцентриситетов приложения силовых факторов, вызывающих местное кручение, проверку прочности необходимо выполнять с учетом компоненты напряжений, обусловленной наличием стесненного кручения стержня.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы сводятся к следующему:

1. Предложена математическая модель, позволяющая описать распространение крутильной волны в тонкостенном стержне. Модель включает в себя геометрическую и физическую упругие нелинейности, а так же депланацию, т.е. выход поперечного сечения в процессе деформации стержня из первоначального плоского состояния.

2. Определено, что депланация, приводящая к появлению дисперсии фазовой скорости крутильной волны, приводит еще и к появлению квадратичной нелинейности, характерной для интенсивных продольных колебаний и не встречавшейся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания.

3. Показано, что в стержне с квадратичной нелинейностью может сформироваться стационарная крутильная волна. Такая волна является периодической и движется быстрее, чем любые линейные возмущения. Волна имеет пилообразную форму, длина волны увеличивается с ростом ее амплитуды.

4. Показано, что совместное действие кубической нелинейности (вызванной высокой интенсивностью вибрации) и дисперсии (обусловленной депланацией) в стержне могут привести к формированию несинусоидальных стационарных волн, распространяющихся с постоянной скоростью без изменения формы.

5. В рамках полусдвиговой теории кручения (теория В. И. Сливкера [74]) получены аналитические выражения для угла закручивания, меры депланации и их производных для участков составной балки, загруженных локальной нагрузкой, приложенной с эксцентриситетом по отношению к оси стенки. Предложена методика определения величины бимоента.

6. С использованием полученной методики выполнен пример расчета сварной двутавровой подкрановой балки. Определено, что при наличии эксцентриситета приложения нагрузки, а также наличии силовых факторов, вызывающих местное кручение, например силы поперечного торможения, будут развиваться нормальные напряжения. Величина этих напряжений будет существенно зависеть от

величины бимоента, который, в свою очередь, тем больше, чем больше величина эксцентриситета приложения нагрузки.

Литература

1. Александров, А. В. Сопротивление материалов : учеб. для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; под ред. А. В. Александрова. – 3-е изд. исп. – Москва : Высш. шк., 2003. – 560 с. : ил.
2. Артоболевский, И. И. Введение в акустическую динамику машин / И. И. Артоболевский, Ю. И. Бобровницкий, М. Д. Генкин. – Москва: Наука, 1979. – 296 с.
3. Альпако, А. А. Напряженное состояние стенок сварных подкрановых балок / А. А. Альпако // Бюллетень технической информации / Гипролеспром. – 1957. – №8 (25).
4. Ахмедов, Н. К. Распространение крутильных волн в радиально-слоистом цилиндрическом волноводе / Н. К. Ахмедов // Механика твердого тела. – 2008. – № 2. – С. 114-123.
5. Ахметов, Н. К. Крутильные колебания и волны в слоистом цилиндре / Н. К. Ахметов, Ю. А. Устинов // Механика твердого тела. – 1991. – № 2. – С. 92-98.
6. Бейлин, Е. А. Элементы теории кручения тонкостенных стержней произвольного профиля / Е. А. Бейлин. – Санкт-Петербург : СПбГАСУ, 2003. – 113 с.
7. Бейлин, Е. А. О влиянии упругих депланационных связей и деформируемости профиля в тонкостенных криволинейных стержнях на изгибно-крутильные формы колебаний и потери устойчивости / Е. А. Бейлин // Расчет пространственных конструкций. – Москва, 1969. – Вып. 12. – С. 201-216.
8. Броуде, Б. М. Распределение сосредоточенного давления в стальных балках / Б. М. Броуде. – Москва : Госстройиздат, 1950. – 84 с.
9. Броуде, Б. М. Предельное состояние стальных балок / Б. М. Броуде. – Москва : Госстройиздат, 1953. – 216 с.
10. Бычков, Д. В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций / Д. В. Бычков. – Москва : Госстройиздат, 1962. – 476 с.

11. Бычков, Д. В. Кручение металлических балок / Д. В. Бычков, А. К. Мрощинский. – Москва : Стройиздат, 1944. – 260 с.
12. Бычков, Д. В. Расчет балочных и рамных стержневых систем из тонкостенных элементов / Д. В. Бычков. – Москва : Стройиздат, 1948. – 208 с.
13. Бычков, Д. В. Совместное действие изгиба и кручения в металлических балках / Д. В. Бычков. – Москва : Стройиздат, 1940. – 134 с.
14. Власов, В. З. Избранные труды. Т. 2 / В. З. Власов. – Москва : Изд-во АН СССР, 1955. – 392 с.
15. Власов, В. З. Тонкостенные упругие стержни (прочность, устойчивость, колебания) / В. З. Власов. – Москва : Стройиздат, 1940. – 276 с.
16. Власов, В. З. Тонкостенные упругие стержни / В. З. Власов. – Москва : Физматгиз, 1959. – 568 с.
17. Ведяйкина О. И. Распространение и взаимодействие интенсивных изгибных и изгибно-крутильных волн в элементах конструкций : дис. ... канд. физ.-мат. наук / О. И. Ведяйкина. – Саратов, 2013. – 110 с.
18. Вибрации в технике : справочник. В 6 т. Т. 1 / под ред. В. В. Болотина. – Москва : Машиностроение, 1999. – 504 с.
19. Грюнберг, Н. Я. Изгиб и кручение тонкостенных криволинейных стержней / Н. Я. Грюнберг // Труды лаборатории строительной механики центральной научно-исследовательского института подземного строительства. – Москва, 1949. – С. 130-157.
20. Гуркова, М. А. Кручение тонкостенного стержня открытого и замкнутого профиля и автоматизация процесса расчета : дис. ... канд. техн. наук / М. А. Гуркова. – Москва, 2000. – 168 с.
21. Дженелидзе, Г. Ю. Статика упругих тонкостенных стержней / Г. Ю. Дженелидзе, Я. Г. Пановко. – Москва : Гостехиздат, 1948. – 208 с.
22. Дьяков, С. Ф. Дисперсия крутильной волны, распространяющаяся в тонкостенном стержне / С. Ф. Дьяков, В. В. Лалин // Наукоедение. – 2013. – № 5. – С. 1-10.

23. Дьяков, С. Ф. Применение полусдвиговой теории В.И. Сливкера к решению задач статики и динамики тонкостенных стержней : дис. ... канд. техн. наук / С. Ф. Дьяков. – Санкт-Петербург, 2013. – 147 с.
24. Ерофеев, В. И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диспансия. Нелинейность / В. И. Ерофеев, В. В. Кажаяев, Н. П. Семирикова. – Москва : Физматлит, 2002. – 208 с.
25. Ерофеев, В. И. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках : обзор / В. И. Ерофеев, Н. В. Ключева // Акустический журнал. – 2002. – Т. 48, № 6. – С. 725-740.
26. Ерофеев, В. И. Изгибно-крутильные, продольно-изгибные и продольно-крутильные волны в стержнях / В. И. Ерофеев // Вестник научно-технического развития. – 2012. – Т. 5. – С. 3-18.
27. Ерофеев, В. И. Интенсивные продольно-крутильные волны в стержне / В. И. Ерофеев, А. С. Зинченко, В. В. Кажаяев // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2011. – Т. 6. – С. 24-27.
28. Ерофеев, В. И. Интенсивные изгибно-крутильные волны в упругом стержне / В. И. Ерофеев, В. В. Кажаяев, О. И. Орехова // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2012. – Т. 1. – С. 11-15.
29. Ерофеев, В. И. Дисперсия изгибно-крутильной волны, распространяющейся в балке / В. И. Ерофеев, О. И. Орехова // Приволжский научный журнал / Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Нижний Новгород, 2011. – № 2. – С. 7-15 ; № 3. – С. 20-26.
30. Ерофеев, В. И. Нелинейные волны в упругих телах с пространственной дисперсией : монография / В. И. Ерофеев, А. И. Потапов, И. Н. Солдатов / Горьк. гос. ун-т. – Горький, 1986. – 224 с. – Деп. в ВИНТИ 25.07.86, № 5440-В86.
31. Ерофеев, В. И. Интенсивные изгибные и крутильные волны в упругом стержне / В. И. Ерофеев, В. В. Кажаяев, О. И. Орехова // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2012. – № 1. – С. 11-15.

32. Ерофеев, В. И. Нелинейные крутильные и изгибно-крутильные волны в стержнях / В. И. Ерофеев, О. И. Орехова // LAP LAMBERT Academic Publising. – Saarbrucken (Deutschland), 2012. – 137 с.
33. Ерофеев, В. И. Дисперсия крутильных и изгибных волн, распространяющихся в закрученных стержнях / В. И. Ерофеев, О. И. Орехова // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. – Нижний Новгород, 2012. – № 30. – С. 74-86.
34. Ерофеев, В. И. Математическая модель упругого тонкостенного стержня, совершающего крутильные колебания при наличии нелинейности и депланации / В. И. Ерофеев, Б. Б. Лампси // Приволжский научный журнал / Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Нижний Новгород, 2014. – № 2. – С. 14-17.
35. Ерофеев, В. И. Нелинейная стационарная крутильная волна в стержне / В. И. Ерофеев, В. Н. Комаров, Б. Б. Лампси // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2015. – № 4. – С.35-39.
36. Ерофеев, В. И. Влияние упругой нелинейности и депланации на параметры крутильной волны, распространяющейся в тонкостенном стержне / В. И. Ерофеев, Б. Б. Лампси // Проблемы прочности и пластичности. – 2015. – Т. 77, № 2. – С. 191-197.
37. Erofeev, V. I. Nonlinear stationary flexural-torsional waves in an elastic rod / V. I. Erofeev, B. B. Lampsii, N. N. Verichev // Materials Physics and Mechanics. – 2016. – Vol. 28, № 1/2. – P. 77-80. (индексируется в базах данных Web of Science, Scopus).
38. Ерофеев, В. И., Юдников С.Г., Лампси Б.Б. Напряженное состояние в стенке составной балки с учетом местного кручения и локальной нагрузки / В. И. Ерофеев, С. Г. Юдников, Б. Б. Лампси // Приволжский научный журнал / Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Нижний Новгород, 2017. – № 3.
39. Ерофеев, В. И. Нелинейная математическая модель упругого стержня, совершающего крутильные колебания, учитывающая депланацию поперечного сечения / В. И. Ерофеев, Б. Б. Лампси // Вестник научно-технического развития. – 2014. – № 4 (80). – С. 12-15.

40. Ерофеев, В. И. Крутильные колебания упругого тонкостенного стержня при наличии нелинейности и депланации / В. И. Ерофеев, Б. Б. Лампси // XVIII Международный симпозиум «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем» - DYVIS-2015 : сб. тр. (Москва-Бекасово, 17-23 мая 2015 г.). – Москва, 2015. – С. 121-127.

41. Ерофеев, В. И. Крутильные нелинейные стационарные волны в стержне / В. И. Ерофеев, Б. Б. Лампси // Прикладная механика и технологии машиностроения : сб. науч. тр. – Нижний Новгород, 2015. – № 1(24). – С. 173-193.

42. Ерофеев, В. И. Влияние депланации на распространение интенсивной крутильной волны в стержне / В. И. Ерофеев, Б. Б. Лампси // Современные проблемы механики и ее преподавание в вузе : тр. Всерос. науч.-метод. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения проф. Н. В. Бутенина. – Санкт-Петербург, 2015. – Т. 1. – С. 167-171.

43. Иванков, О. Ф. К вопросу расчета на местный изгиб стенок подкрановых балок в случаях, когда рельс сдвинут с оси стенки балки / О. Ф. Иванков, В. П. Хлебородов // Сборник докладов совещания по крановым конструкциям / ОИ-ОЗТ ВНИИПТМАШ. – Москва, 1966.

44. Кан, С. Н. Прочность замкнутых открытых цилиндрических оболочек / С. Н. Кан // Расчет пространственных конструкций. – Москва, 1961. – Вып. 6. – С. 213-249.

45. Ковлягин, А. М. Прочность стальных двутавровых балок при изгибе и местном кручении : дис. ... канд. техн. наук / А. М. Ковлягин ; Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Нижний Новгород, 2001. – 146 с.

46. Кругленко, И. В. Изгиб и стесненное кручение тонкостенных стержней произвольного поперечного сечения : автореф. дис. ... канд. техн. наук / И. В. Кругленко. – Ленинград, 1988. – 17 с.

47. Кругленко, И. В. Изгиб и кручение тонкостенных стержней произвольного поперечного сечения / И. В. Кругленко / Ленингр. инж.-строит. ин-т. – Ленинград, 1988. – 13 с. : ил. – Деп. во Всерос. ин-т науч. и техн. информ. 05.04.88., № 2595-B88.

48. Кравченко, И. Т. Теория волновых процессов / И. Т. Кравченко. – Изд. 3. – Москва : Либроком, 2011. – 240 с.
49. Курочкина, Е. В. Влияние ребер жесткости на напряженное состояние металлических балок : автореф. дис. ... канд. техн. наук / Е. В. Курочкина ; Горьк. инж.-строит. ин-т им. В. П. Чкалова. – Горький, 1974. – 24 с.
50. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости / Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. – Москва : Наука, 1965.
51. Лампси, Б. Б. Металлические тонкостенные несущие конструкции при локальных нагрузках / Б. Б. Лампси. – Москва : Стройиздат, 1979. – 270 с.
52. Лампси, Б. Б. Тонкостенные металлические конструкции как системы плоских полос [Рукопись] / Б. Б. Лампси. – Горький, 1980. – 34 с. – Деп. в ЦИ-НИС. – № 165-80.
53. Лампси, Б. Б. Об учете влияния ребер жесткости на напряженное состояние металлических балок / Б. Б. Лампси, Е. В. Курочкина // Труды / Горьк. инж.-строит. ин-т им. В. П. Чкалова. – Горький, 1970. – Вып. 57. – С. 29-37.
54. Лампси, Б. Б. Прочность металлических конструкций / Б. Б. Лампси. – Москва : Стройиздат, 1987. – 280 с. : ил.
55. Лампси, Б. Б. Оценка влияния особенностей конструкции и нагрузки на напряженное состояние и прочность ездовых поясов систем типа подкраново-подстропильных ферм : дис. ... канд. техн. наук / Б. Б. Лампси. – Горький, 1983. – 220 с.
56. Лампси, Б. Б. Усиление стальных ферм покрытия путем изменения геометрии формы / Б. Б. Лампси, С. Г. Юдников, Б. Б. Лампси // Вестник Волжского регионального отделения : сб. науч. тр. / Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Нижний Новгород, 2015. – Вып. 18. – С. 100-102.
57. Лампси, Б. Б. Математическая модель тонкостенного стержня, совершающего крутильные колебания, с учетом упругой нелинейности и депланации / Б. Б. Лампси // Актуальные проблемы прочности : сб. тез. докл. LVII Междунар. конф. (Севастополь, 24-27 мая 2016 г.). – Севастополь, 2016. – С. 177.

58. Лампси, Б. Б. Сравнительный анализ действительной работы подкрановых балок коробчатого и двутаврового сечений / Б. Б. Лампси, В. С. Ширманов // *Архитектура и строительство – 2000 : тез. докл. науч.-техн. конф. Ч. 4. Экспериментальные и теоретические исследования строительных конструкций* / Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Нижний Новгород, 2000. – С. 34-35.

59. Лампси, Б. Б. Нормальные напряжения при изгибе в стержне с двухсвязным поперечным сечением / Б. Б. Лампси, В. С. Ширманов // *Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных конструкций сложной формы : тез. док. Междунар. науч.-техн. конф.* – Москва, 2000. – С. 83-84.

60. Лампси, Б. Б. Учет кручения в стальных балках составного сечения при воздействии локальных нагрузок / Б. Б. Лампси, В. С. Ширманов, А. М. Ковлягин // *Аннотация докладов VIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике.* – Екатеринбург, 2001.

61. Ланда, П. С. Нелинейные колебания и волны / П. С. Ланда. – Изд. 2, испр. и доп. – Москва : Либроком, 2010. – 552 с.

62. Лужин, О. В. Об одной аналогии в теориях стесненного кручения тонкостенных стержней / О. В. Лужин // *Строительная механика и расчет сооружений.* – 1960. – Т. 4. – С. 13-14.

63. Лужин, О. В. Кручение тонкостенных стержней комбинированного поперечного сечения / О. В. Лужин // *Проблемы расчета пространственных конструкций* / Моск. инж.-строит. ин-т. – 1980. – С. 79-89.

64. Любаров, Б. И. Кручение тонкостенных стержней открыто-закрытого профиля / Б. И. Любаров // *Исследования по строительным конструкциям.* – Ленинград, 1972. – С. 92-98.

65. Москалев, Н. С. Приближенный метод определения напряжений в стенке подкрановой балки от действия местной крутящей нагрузки / Н. С. Москалев // *Научные доклады высшей школы. Строительство.* – 1958. – № 3. – С. 167-172.

66. Мурашов, С. А. Распространение крутильных волн в линейно-протяженных объектах с продольными дефектами : автореф. дис. ... канд. техн. наук / С. А. Мурашов ; Ижев. гос. техн. ун-т. – Ижевск, 2011. – 24 с.
67. Неразрушающий контроль : справочник. В 7 т. Т. 3. Ультразвуковой контроль / И. Н. Ермолов, Ю. В. Ланге ; под ред. В. В. Клюева. – Москва : Машиностроение, 2004. – 864 с.
68. Один, И. М. К расчету напряжений в стенках подкрановых балок от смещения рельса / И. М. Один // Промышленное строительство. – 1962. – № 3. – С. 58-60.
69. Орехова, О. И. Дисперсия изгибной и крутильной волн в балках цилиндрической формы / О. И. Орехова // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (2). – С. 262-263.
70. Петрова, И. Г. Крутильные колебания тонкостенных стержней с частично замкнутым контуром / И. Г. Петрова // Исследования по механике строительных конструкций и материалов. – Ленинград, 1989. – С. 13-17.
71. Сен-Венан, Б. Мемуар о кручении призм / Б. Сен-Венан. – Москва : Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1961. – 519 с.
72. Серов, А. В. Особенности генерации крутильной волны удвоенной частоты в упругом стержне / А. В. Серов // Прикладная механика и технологии машиностроения : сб. науч. тр. / Нижегород. фил. ин-та машиноведения им. А. А. Благонравова. – Нижний Новгород, 2007. – №1 (10). – С. 32-37.
73. Серов, А. В. Крутильные волны конечной амплитуды в упругом стержне / А. В. Серов // XIII Нижегородская сессия молодых ученых. Технические науки : материалы докл. – Нижний Новгород, 2008. – С. 77.
74. Сливкер, В. И. Строительная механика. Вариационные основы : учеб. пособие / В. И. Сливкер. – Москва : Изд-во Ассоц. строит. вузов, 2005. – 736 с.
75. Стальные конструкции : СП 16.13330.2011 : актуализированная ред. СНиП II-23-81* : дата введ. в д. 20.05.11 / Минстрой России. – Москва, 2016. – 174 с. – (Свод правил).

76. Тимошенко, С. П. История науки о сопротивлении материалов / С. П. Тимошенко. – Москва : Гостехиздат, 1957. – 536 с.
77. Тимошенко, С. П. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки / С. П. Тимошенко // Изв. С.-Петербургского политехнического института. – 1905-1906. – Т.4-5 – С. вып. 3-4 вып. 1-4.
78. Уманский, А. А. Изгиб и кручение тонкостенных авиа конструкций / А. А. Уманский. – Москва : Оборонгиз, 1939. – 112 с.
79. Уманский, А. А. О нормальных напряжениях при кручении крыла самолета / А. А. Уманский // Техника воздушного флота. – 1940. – № 12. – С. 48-65.
80. Урбан, И.В. Общая форма расчета на стесненное кручение тонкостенных открытых и закрытых профилей : труды / И.В. Урбан // МЭМИИТ. вып.62, Москва, 1953.
81. Урбан, И.В. Теория изгибного кручения тонкостенных конструкций открытого и закрытого профиля / И.В. Урбан // МЭМИИТ, Москва, 1950.
82. Урбан, И.В. Теория расчета стержневых тонкостенных конструкций / И.В. Урбан. - Москва : Трансжелдориздат, 1955. – 192 с.
83. Чалков, Г. В. Напряжения в стенках подкрановых балок повышенного ресурса при местном кручении верхнего пояса : дис. ... канд. техн. наук / Г. В. Чалков. – Новосибирск, 2012. – 186 с.
84. Шапиро, Г. А. Местные напряжения в стенке подкрановой балки при внецентренной нагрузке / Г. А. Шапиро // Строительная механика и расчет сооружений. – 1959. – № 5. – С. 29-35.
85. XIth European Conference on Non-Destructive Testing. October 6 – 10, 2014, Prague, Czech Republic. Conference Proceedings // The e-Journal of Nondestructive Testing. – 2014. – Vol. 19. – No 12.
86. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. О нелинейных одномерных волнах в пластинах // Пробл. динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1990, с. 50-52.

87. Березовский А.А., Жерновой Ю.В. Изгибные стационарные волны в стержнях при нелинейном законе упругости // Украинский матем. журнал. 1981. Т. 33. № 4. С. 493-498.
88. Березовский А.А., Жерновой Ю.В. Нелинейные продольно-поперечные стационарные волны в упругих стержнях // Сб. Матем. физика, № 30, Киев: Наукова думка, 1981, С. 41-48.
89. Вакуленко С.А., Молотков И.А., Островский Л.А., Сутин А.М. Нелинейные продольные волны в упругих стержнях // Волны и дифракция, VIII Всес. симп. По дифракции и распространению волн. Т. 99.- М., 1981, с. 107-110.
90. Дрейден Г.В., Островский Ю.И., Самсонов А.М., Семенова И.В., Сокуринская Е.В. Формирование и распространение солитонов деформации в нелинейно-упругом твердом теле // ЖТФ, 1988, Т. 58, № 10, с. 2040-2047.
91. Дрейден Г.В., Островский Ю.И., Самсонов А.М., Семенова И.В., Сокуринская Е.В. Об экспериментах по распространению солитонов деформации в нелинейно-упругом стержне // Письма в ЖТФ, 1995, Т. 21, Вып.11, с. 42-46.
92. Дрейден Г.В., Порубов А.В., Самсонов А.М., Семенова И.В. Генерация и наблюдение солитона продольной деформации в пластине. // Письма в ЖТФ, 1996, Т. 22, Вып.21, с. 61-68.
93. Ерофеев В.И., Ключева Н.В., Семерикова Н.П. Нелинейно-упругие волны в стержне Миндлина-Германа // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7. № 4. с.35-47.
94. Ерофеев В.И., Ключева Н.В., Семерикова Н.П. Солитоны деформации в стержне Миндлина-Германа // Прикладная механика и технологии машиностроения. / Сб. науч. трудов. Н.Новгород: Изд-во «Интелсервис» НФ ИМАШ РАН, 1998, с. 85-95.
95. Ерофеев В.И., Потапов А.И.. Нелинейные модели продольных колебаний стержней // Гидроаэромеханика и теория упругости / Всес. межвуз. сб. Днепропетровск : ДГУ. 1984, вып. 32, с.78-82.
96. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках. - Саратов, 1999.

97. Каудерер Г. Нелинейная механика. -М.: Наука. 1961. 777с.
98. Кившарь Ю.С., Сыркин Е.С. Сдвиговые солитоны в упругой пластине // Акустич. журнал, 1991, Т.37, Вып.1, с. 104-109.
99. Милосердова И.В., Потапов А.И. Нелинейные стоячие волны в стержнях конечной длины // Акустич. журнал, 1983, Т. 29, Вып.4, с. 515-520.
100. Милосердова И.В., Потапов А.И. Продольные колебания в стержне с нелинейно-упругим закреплением // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1980, № 6, с. 178-183.
101. Молотков И.А., Вакуленко С.А. Нелинейные продольные волны в неоднородных стержнях // Интерференционные волны в слоистых средах. 1. Зап. науч. семин. ЛОМИ, Т. 99.- Л.: Наука, 1980, с. 64-73.
102. Мягков Н.Н. О динамической локализации деформации в разупрочняющемся стержне // Механ. композиц. матер. и констр., 199, Т. 5, № 3, с. 28-32.
103. Островский Л.А., Сутин А.М. Нелинейные упругие волны в стержнях // ПММ, 1977, Т. 41, Вып. 3, с. 531-537.
104. Порубов А.В., Самсонов А.М.. Уточнение модели распространения продольных волн деформации в нелинейно-упругом стержне // Письма в ЖТФ, Т.19, Вып.12, с. 26-29.
105. Потапов А.И., Семерикова Н.П. Нелинейные продольные волны в стержнях с учетом взаимодействия полей деформации и температуры // ПМТФ, 1988, № 1, с. 57-61.
106. Потапов А.И., Солдатов И.Н. Квазиплоский пучок нелинейных продольных волн в пластине.// Акустический журнал. 1984. Т.30. В.6. с. 819-822.
107. Рыбак С.А., Скрынников Ю.И. Уединенная волна в тонком стержне постоянной кривизны // Акустич. журнал, 1990, Т. 36, № 4, с. 730-732.
108. Самсонов А.М. Эволюция солитона в нелинейно-упругом стержне переменного сечения. // ДАН СССР, 1984, Т.277, № 2, с. 332-335.
109. Самсонов А.М., Сокуринская Е.В. О возможности возбуждения солитона продольной деформации в нелинейно-упругом стержне // ЖТФ, 1988, Т. 58, Вып. 8, с. 1632-1634.

110. Самсонов А.М., Сокуринская Е.В. Солитоны продольного смещения в неоднородном нелинейно-упругом стержне. // Препр. / АН СССР, Физ.-тех. ин-т, 1985, № 983, с.1-44.
111. Самсонов А.М., Сокуринская Е.В. Солитоны продольной деформации в нелинейно-упругих стержнях // Теория распространения волн в упругих и упругопластических средах. Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1987, с.28-32.
112. Самсонов А.М., Сокуринская Е.В. Уединенные продольные волны в неоднородном нелинейно-упругом стержне // ПММ, 1987, Т. 51, Вып. 3, с. 483-488.
113. Сокуринская Е.В. Некоторые точные решения задачи о нелинейных упругих волнах в пластине. // Письма в ЖТФ, 1994, Т.20, Вып.3, с. 36-41.
114. Шенявский Л.А. Влияние геометрической нелинейности на волны, распространяющиеся в свободной тонкой пластине // ПММ, 1979, Вып.6, Т.43, с. 1089-1094.
115. Энгельбрехт Ю.К., Нигул У.К. Нелинейные волны деформации. М.: Наука, 1981.
116. Abramian A.K., Indejtsev D.A., Vakulenko S.A. Wave localization in hydroelastic systems // Flow, Turbulence and Combustion. 1999. № 61. pp 1-20.
117. Clarcon P.A., LeVeque R.J., Saxton R. Solitary wave interaction in elastic rods // Stud. Appl. Math., 1986, V. 75, № 2, pp. 95-122.
118. Kovriguine D.A., Potapov A.I. Nonlinear waves in elastic bar // Eur. J. Mech. A. / Solids, 1996. V. 15, pp. 1049-1075.
119. Nakamura A. Soliton formation process calculated for longitudinal sound waves in solid bar // Проблемы нелинейной акустики. Сб. трудов XI Международного симпозиума по нелинейной акустике. Ч.1. Новосибирск. 1987. с. 378- 382.
120. Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods // J. of Math and Phys. Sciences. 1970, v.4, pp.64-73.
121. Nariboli G.A., Sedov A. Burgers's-Korteweg-de Vries equation for viscoelastic rods and plates // J. Math. Anal. And Appl.,1970, v.32, № 3, pp.661-667.

122. Porubov I.V., Samsonov A.M., Velarde M.G., Bukhanovsky A.V. Strain solitary waves in an elastic rod embedded in another elastic external medium with sliding // *Phys.Rev. E*, 1998, V.58, i3, pp.3854-3864.
123. Rudnick I., Wu J., Wheatley J., Putterman S. Flexural waves envelope solitons in a metallic cylindrical thin shell. // *Проблемы нелинейной акустики. Сб. трудов XI Международ. симп. по нелин. акустике. Ч.2.-Новосибирск, 1987, с. 208-212.*
124. Samsonov A.M., Dreiden G.V., Porubov I.V., Semenova I.V. Longitudinal strain soliton focusing in a narrowing nonlinearly elastic rod // *Phys.Rev. B*, 1998, V.57, № 10, pp.5778-5787.
125. Soerensen M.P., Christiansen P.L., Lomdahl P.S. Solitary waves on nonlinear elastic rods. I // *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1984, V. 76, № 3, pp. 871-879.
126. Soerensen M.P., Christiansen P.L., Lomdahl P.S., Scovgaard O. Solitary waves on nonlinear elastic rods. I // *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1987, V. 81, № 6, pp. 1718-1722.
127. Порубов А.В. Локализация нелинейных волн деформации. М.: Физматлит, 2009. 208 с.
128. Киселев В.В., Долгих Д.В. Нелинейно-упругие узоры из вмятин на поверхностях нагруженных пластин и оболочек. М.: Физматлит, 2012. 164 с.
129. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Нелинейные локализованные продольные волны в пластине, находящейся в произвольно ориентированном магнитном поле // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2012. Т.5, № 1. С.79-84.
130. Блинкова А.Ю., Блинков Ю.А., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними, с учетом рассеяния энергии // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2013. Т.6, № 3. С.336-345.
131. Ерофеев В.И., Кажяев В.В. Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в стержне // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2017. Т.10, № 2. С.127-136.

132. Бочкарев А.В., Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Уединенные волны в неоднородной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с упругой средой // Акустический журнал. 2017. Т.63, № 2. С.145-151.

133. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили – Москва : Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1966. – 708 с. : ил.