

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

На правах рукописи

Зыонг Туан Мань



**АНАЛИЗ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ВЯЗКОУПРУГИХ
СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

Заслуженный деятель науки РФ, доктор
физико-математических наук,
профессор

Ю.А. Россихин

Доктор физико-математических наук,
профессор М.В. Шитикова

Воронеж –2017

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Обзор литературы, посвященной ударному взаимодействию вязкоупругих тел	10
Глава 2. Моделирование соударения двух сферических оболочек	19
2.1. Центральное соударение двух упругих сферических оболочек.....	19
2.1.1. Анализ распространения волновых поверхностей.....	19
2.1.2. Решение в случае соударения двух одинаковых сферических оболочек.....	31
2.1.3. Решение в случае соударения двух различных сферических оболочек без учета инерции контактной области.....	33
2.2. Центральное соударение двух одинаковых сферических оболочек, обладающих локальными вязкоупругими свойствами в зоне контакта.....	35
2.3. Центральное соударение двух различных вязкоупругих оболочек, свойства которых описываются моделью стандартного линейного тела.....	43
2.3.1. Постановка задачи и определяющие уравнения.....	43
2.3.2. Анализ соударения двух вязкоупругих сфер.....	49
2.4. Приближенные решения и численные исследования.....	57
2.5. Анализ динамического поведения вязкоупругой пластинки при ударе вязкоупругой сферической оболочкой.....	70
Глава 3. Частные случаи и их численное исследование	82
3.1. Удар вязкоупругой сферической оболочки по жесткой пластинке... ..	82
3.2. Сравнительный анализ двух задач ударного взаимодействия жесткой и вязкоупругой сферических оболочек.....	89

3.2.1. Удар вязкоупругой сферической оболочки по жесткой сферической оболочке, находящейся в состоянии покоя.....	89
3.2.2. Удар жесткой сферической оболочки по вязкоупругой сферической оболочке, находящейся в состоянии покоя.....	91
Заключение.....	100
Список использованных источников.....	102

Введение

Данная диссертационная работа посвящена моделированию и исследованию процессов ударного взаимодействия двух сферических оболочек, обладающих вязкоупругими свойствами или приобретающих такие свойства в течение времени контакта.

Актуальность темы. Изучение динамических контактных задач является актуальной задачей для тех отраслей науки и техники, где приходится иметь дело с ударными нагрузками. В процессе удара необходимо изучать такие физические явления, как динамическая реакция конструкции, продолжительность контактного взаимодействия, распространение поверхностей сильного разрыва, которые зарождаются в момент удара и затем распространяются вдоль соударяющихся тел. Для комплексного анализа таких явлений особенно важным является разработка аналитических методов исследования, которые позволяют получить оценки для предельных случаев и являются базой для дальнейшего развития и апробации численных методов.

Основными целями диссертационной работы являются:

1) обобщение волновой теории удара, построенной ранее профессорами Ю.А. Россихиным и М.В. Шитиковой для упругих тел, на случай ударного взаимодействия сферических оболочек, свойства которых могут быть упругими, вязкоупругими или приобретать вязкоупругие свойства в зоне контакта в процессе ударного взаимодействия;

2) получение определяющих интегро-дифференциальных уравнений контактного взаимодействия вязкоупругих сферических оболочек на основе моделей, содержащих дробные операторы, и приближенное аналитическое решение полученных уравнений, позволяющее определить такие основные характеристики ударного взаимодействия, как зависимость контактной силы

и локального смятия материалов соударяющихся тел от времени, а также время контактного взаимодействия.

Научная новизна. Впервые решены контактные динамические задачи, возникающие в процессе соударения двух сферических оболочек или при ударе оболочки по мишени в виде вязкоупругой или жесткой пластинки. При этом в области контакта применяется закон Герца, обобщенный для вязкоупругих тел на основе моделей с дробными операторами, а вне области контакта решение строится при помощи лучевого метода, который представляет собой один из методов малого параметра, и этим малым параметром является время. Для процессов, быстро протекающих во времени, метод лучевых рядов имеет неоспоримые преимущества перед другими методами, поскольку позволяет получать аналитические решения в виде временных зависимостей основных характеристик ударного процесса.

Достоверность базируется на корректной математической постановке задач. Полученные в работе результаты согласуются с общими физическими представлениями. Правильность полученных результатов определяется корректностью математических выкладок и сопоставлением с известными результатами других авторов.

Практическая значимость. Полученные результаты в виде аналитических зависимостей контактной силы и локального смятия от времени могут быть использованы в различных проектных организациях при расчетах ударных взаимодействий различных конструкций, свойства которых могут изменяться в процессе контакта, а также при разработке таких средств защиты как шлемы для спортсменов, пожарных, военных, которые могут испытывать ударные нагрузки в различных критических ситуациях.

На защиту выносятся следующие основные результаты работы:

- обобщение волновой теории удара, разработанной ранее Ю.А. Россихиным и М.В. Шитиковой на основе лучевого метода для анализа ударного взаимодействия упругих тел, на случай ударного взаимодействия вязкоупругих тел с вязкоупругой сферической оболочкой;
- анализ динамического поведения двух соударяющихся сферических оболочек, упругие свойства которых могут изменяться в зоне контакта в процессе удара, при помощи введения в рассмотрение нового структурного параметра за счет использования вязкоупругой модели, содержащей производные дробного порядка;
- приближенное аналитическое решение задач ударного взаимодействия вязкоупругих или упругих ударников в виде сферических оболочек с вязкоупругими или жесткими мишенями, в качестве которых могут выступать вязкоупругие или жесткие сферические оболочки или пластинки, с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались: 1) на научных конференциях профессорско-преподавательского состава Воронежского государственного архитектурно-строительного университета в 2014-2017 годах; 2) на семинарах международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук ВГТУ в 2014-2017 годах; 3) на 9й международной конференции по механике сплошных сред (9th International Conference on Continuum Mechanics CM '15), в Риме, Италия, 7-9 ноября 2015 года; 4) на 44й международной летней школе-конференции по современным проблемам механики (Advanced Problems in Mechanics APM-2016), в Санкт-Петербурге, 27 июня – 2 июля 2016 года; 5) на 7й международной конференции по математическим моделям в инженерных науках (7th International Conference on Mathematical Models for Engineering Science MMES'16), Дубровник, Хорватия, 28-30 сентября 2016 года.

Публикации. Основные результаты диссертации представлены в 6 научных работах, 2 из которых опубликованы в международных научных журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus.

Личное участие автора. Основные результаты исследований по теме диссертации были получены лично автором и опубликованы в соавторстве с научными руководителями, которые определили основные направления исследования в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ.

В диссертации отсутствует заимствованный материал без ссылок на автора или источник заимствования.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 116 страницах машинописного текста, содержит 21 рисунок, список использованных источников из 160 наименований.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе приводится обзор источников, в которых изучаются процессы ударного взаимодействия тел, по крайней мере, одно из которых обладает вязкоупругими свойствами, и существующие модели и методы для их анализа.

Вторая глава посвящена изучению ударного взаимодействия двух сферических оболочек на основе волновой теории удара. Решение вне области контакта строится при помощи лучевого метода, который позволяет определить основные динамические характеристики полей напряжений и деформаций при распространении поверхностей сильного разрыва,

зарождающихся в оболочках в момент удара и затем распространяющихся в виде расходящихся кругов.

На основе построенной теории решена задача о соударении двух упругих сферических оболочек, при этом контактная сила определяется при помощи классического контактного закона Герца. Предложена модель соударения двух сферических оболочек для случая, когда вязкоупругие свойства сталкивающихся тел проявляются только в месте контакта в результате изменения микроструктуры оболочек в процессе контактного взаимодействия и описываются с помощью модели стандартного линейного тела с дробными производными. Вне области контакта материал оболочек остается упругим с нерелаксированным значением модуля упругости. Используя принцип соответствия Вольтерра, разрешающие уравнения, описывающие процесс контактного взаимодействия упругих оболочек, были обобщены на случай соударения оболочек, приобретающих вязкоупругие свойства в пределах контактной области. С этой целью классический закон Герца был обобщен путем замены коэффициента жесткости при ударе на соответствующий вязкоупругий оператор, учитывающий геометрию соударяющихся тел и зависящие от времени вязкоупругие аналоги модулей упругости и коэффициентов Пуассона.

Решена задача о соударении двух вязкоупругих сферических оболочек, вязкоупругие свойства которых описываются моделью стандартного линейного тела с производными целого порядка. Изменение вязких свойств внутри контактной зоны описывается при помощи обобщенного закона, в котором вязкоупругий оператор, пропорциональный цилиндрической жесткости, расшифровывается при помощи алгебры безразмерных операторов Ю.Н. Работнова. Получены интегро-дифференциальные уравнения для контактной силы и величины локального смятия.

Получены приближенные аналитические решения, на основе которых определены основные характеристики ударного взаимодействия.

В третьей главе Рассмотрены частные случаи ударного взаимодействия вязкоупругой сферической оболочки по вязкоупругой или жесткой пластинке, а также удар сферической оболочки по второй оболочке, которая находится в состоянии покоя. Построены приближенные решения с использованием малого параметра, которым является время протекания ударного процесса. Проведены численные исследования, которые показывают, что при изменении параметра дробности от нуля до единицы, что соответствует увеличению вязкости ударника, максимум контактной силы уменьшается, а время контакта ударника и мишени увеличивается.

В заключении сформулированы основные результаты данного диссертационного исследования.

Глава 1. Обзор литературы, посвященной ударному взаимодействию вязкоупругих тел

Задачи, связанные с анализом ударного взаимодействия тонких тел (стержней, балок, пластинок и оболочек) с другими телами, имеют широкое применение в различных областях науки и техники. Физические явления, возникающие в случае ударного воздействия, включают структурные изменения материалов, контактные эффекты и распространение волн. Эти проблемы актуальны не только с точки зрения фундаментальных исследований в области прикладной механики, но и с точки зрения их приложений. Поскольку эти проблемы относятся к проблемам динамического контактного взаимодействия, их решение связано с серьезными трудностями математических вычислений. Чтобы преодолеть это препятствие, были предложены разнообразные подходы и методы, обзор которых можно найти в работах [2,4,6,7,22,29,35,36,45,53,79,80,87,94,99,102, 106,109,115]. При изучении этих обзоров и статей можно сделать вывод о том, что большинство статей посвящено изучению ударных воздействий по полупространствам [37,44,72,15,157], балкам и пластинкам [5,26,27,34,35, 51,60,67,73,91,106,112,114,124,125, 151,156], и только совсем незначительная часть работ освещает вопросы ударного взаимодействия тонких оболочек [49,90,97,116,119-123,126].

Так, динамические контактные задачи об ударе жестких тел по упругой сферической оболочке рассматривались несколькими авторами с использованием различных моделей ударного взаимодействия [90,97,116,119-123,126]. В работе Baghaei and Sadegh [90] исследовалась задача удара упругой сферической оболочки по упругой бесконечно протяженной преграде. Но насколько известно соискателю, нелинейное соударение двух оболочек не было проанализировано в литературе на данный момент другими авторами.

Попытки делались только для соударения сфер в статье [67], где исследуется задача о соударении вязкоупругих сельскохозяйственных продуктов с упругой пластинкой с целью оптимизации сортировки твердых и мягких единиц. Была предложена модель удара, включающая в себя две реологические модели, известные ранее. Модель Zener [156] о соударении упругого шара с упругой пластинкой дополнена моделью Hamann [70] о соударении вязкоупругого фрукта с твердой плоской поверхностью.

Соударение твердого тела со сферической контактной областью и вязкоупругого полупространства было исследовано в [72], где было получено тоже уравнение движения, что и в [70]:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \eta \left(\frac{dz}{dt} - V_0 \right) + D_1 z^{1.5} = 0. \quad (1.1)$$

В задаче соударения упругой сферы с упругой пластинкой Zener [156] определил нормальное перемещение центра пластинки в следующем виде:

$$U(t) = C \int_0^t F_p(t') dt'. \quad (1.2)$$

В результате сочетания уравнения (1.2) с решением уравнения (1.1) авторами получено следующее уравнение движения для обобщенной модели соударения вязкоупругого фрукта с упругой пластинкой:

$$\frac{d^2 \sigma}{d\tau^2} + \left(1 + \lambda \frac{d}{d\tau} \right) \left[\beta \left(\frac{d\sigma}{d\tau} - 1 \right) + \sigma^{1.5} \right] = 0 \quad (1.3)$$

где λ - параметр неупругости Zener, который описывает поглощение энергии в пластинке при ударе, β - параметр затухания, τ - переменная по времени и σ – переменная, соответствующая относительному перемещению.

В качестве частного примера рассматривался процесс отсеивания твердых камней от картофеля. За основной параметр классификации принимается коэффициент восстановления при ударе. Поглощение энергии удара и снижение коэффициента восстановления у камней, по сравнению с картофелем, позволяет уменьшить величину их отскока от упругой

пластинки и таким образом отделить камни от овощей. На основе данной модели может быть сконструирована машина, позволяющая отделить мягкие сельскохозяйственные продукты от твердых с учетом их свойств.

Справедливость данной модели подтверждена для различных продуктов. Исследователями проведен простейший эксперимент: несколько вязкоупругих продуктов были отпущены с заданной высоты для того, чтобы достичь упругой мишени с определенной начальной скоростью (по схеме маятника). По максимальной высоте подъема тела до и после удара определялся коэффициент восстановления при ударе. Полученные в ходе эксперимента результаты находятся в полном соответствии с теоретическими данными.

В работе [59] анализируются модели конечных элементов применительно к динамическим процессам соударения двух яблок друг с другом или с жесткой поверхностью. Получена информация о количестве потерь энергии при ударе, связанных с возбуждением упругих волн в соударяющихся телах и связанных с вязкоупругой природой материала. Подробно изучены эффекты вязкой диссипации, в особенности методы определения эффективного коэффициента вязкости для соударения двух вязкоупругих объектов (метод суммы обратных чисел и арифметический метод).

Рассматриваются две упругие сферы массой m_1 и m_2 , движущиеся навстречу друг другу с нормальными скоростями v_{n1} и v_{n2} , угловыми скоростями вращения ω_1 и ω_2 и тангенциальными скоростями на поверхности $v_{\tau1}$ и $v_{\tau2}$.

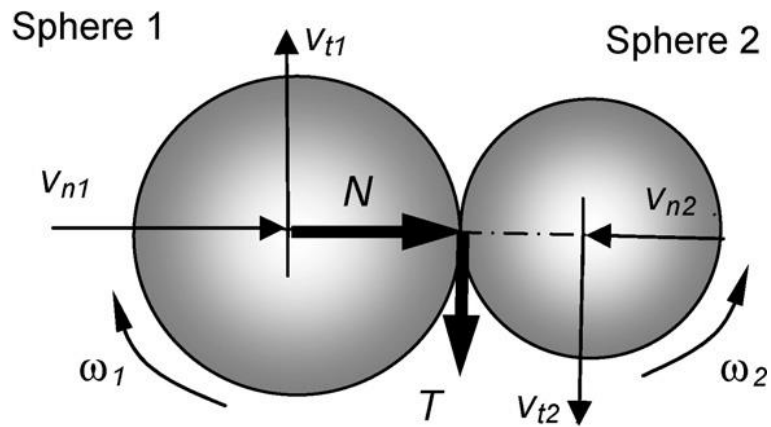


Рис.1.1. Соударение двух сфер

При столкновении каждая сфера будет подвержена влиянию нормальной силы N и касательной силы T , действующих на поверхности контакта. В случае соударения тел из упругих материалов единственным источником диссипации энергии является действие упругих волн, распространяющихся внутри тела. Так как в общем случае потери энергии, связанные с возникновением упругих волн, очень малы по сравнению с общей кинетической энергией системы, то большинство исследователей данной задачи пренебрегают этим динамическим эффектом. То есть если соударение считать квазистатическим (пренебрегая силами инерции в деформируемом материале), то можно записать следующее уравнение для соударения двух сфер:

$$m \frac{d^2 \delta_n}{dt} + K_H \delta_n^{3/2} = 0, \quad (1.4)$$

где $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – эффективная масса системы. Эффективная постоянная

жесткости K_H может быть найдена из статической контактной теории Герца.

Сельскохозяйственные продукты представляют собой, как правило, вязкоупругие материалы. Вязкоупругое поведение яблока характеризуется обобщенной моделью Максвелла. Согласно этой модели для описания поведения материалов используются не упругие константы, а зависящие от

времени функции (функции релаксации напряжений). Функции релаксации представлены через разложение в экспоненциальные ряды

$$E(t) = E^\infty + \sum_{n=1}^N E^n \exp\left(\frac{-t}{\tau_n^e}\right), \quad (1.5)$$

где τ_n^e - время релаксации, связанное с модулем упругости. Аналогичные выражения можно записать для модуля сдвига G и объемного модуля K .

При соударении вязкоупругих объектов в уравнении (1.4) появляется дополнительное слагаемое, описывающее диссипацию энергии в зависимости от времени:

$$m \frac{d^2 \delta_n}{dt} + K_H \delta_n^{3/2} + \gamma \delta_n^{1/2} \frac{d\delta_n}{dt} = 0, \quad (1.6)$$

где γ - эффективный коэффициент вязкости.

Авторами данной статьи [59] была предложена модель метода конечных элементов, описывающая соударения двух яблок с различными вязкоупругими свойствами, которая оценивает эффективный коэффициент вязкости и позволяет определить его соответствие с вышеизложенными теоретическими моделями. В ходе исследования было выявлено, что метод сумм обратных чисел показал более тесное сходство результатов с экспериментальными данными, чем арифметический метод. Однако существует систематическая разница между коэффициентом вязкости, определенным методом сумм обратных чисел и полученным из анализа методом конечных элементов. Таким образом, было показано, что оба метода не являются достаточно точными для определения эффективного коэффициента вязкости, поэтому необходимы детальные теоретические исследования этой задачи для выявления более надежного подхода.

Из динамических тестов на удар выявлено, что для мягких и относительно больших объектов, таких как яблоко, поглощение динамических волн, вызванных ударом, может привести к существенным потерям кинетической энергии. Количество потерь энергии зависит от

упругих свойств материала, геометрических размеров соударяющихся тел, а также начальной скорости удара. Поэтому очевидно, что для фруктов и других мягких материалов, квазистатические модели могут привести к существенным ошибкам.

Известные на данный момент экспериментальные методы для характеристики вязкоупругого поведения яблока найдены не достаточно точными для описания кратковременных процессов (таких как удар). Необходимы дополнительные исследования для уточнения методов и учета эффектов релаксации.

Что же касается работ, в которых бы изучался процесс соударении двух сферических оболочек, это единственная статья моих руководителей, профессоров Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой [116], в которой они рассматривали соударение голов спортсменов, занимающихся опасными видами спорта, как например, американский футбол, часто сопровождающиеся травматическими столкновениями спортсменов. В этой работе контактная сила моделировалась с использованием линейного подхода с помощью модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными. Предполагалось, что в процессе взаимодействия микроструктура материалов оболочек изменялась только в контактной области, то есть обе оболочки оставались упругими, за исключением частей, участвующих в контактном взаимодействии, которые обладали местными вязкоупругими свойствами.

Модели тонких тел на основе гипотезы Кирхгофа-Лява и гипотезы Эйлера позволяют достичь приемлемую точность при решении статических и квазистатических задач. Однако, в некоторых случаях эта схема оказывается неполной. Это особенно актуально для динамических процессов в тонких телах, связанных с распространением нестационарных волн деформаций. В общем случае деформация может вызываться при воздействии тем или иным образом в определенной зоне тонкого тела, а затем передаваться по разным направлениям его срединной поверхности с

помощью волновых движений. В этом случае, находясь в пределах классических понятий Кирхгофа-Лява и с учетом сил инерции, соответствующих перемещению по касательной к срединной поверхности, можно описать волновые процессы, связанные с укорачиванием и удлинением тонкого элемента тела в срединной поверхности. Но при этом описание передачи поперечных сил и поперечных деформаций, связанных с местным действием внезапно применяемых нормальных нагрузок, не рассматривается. Когда это происходит, следует учитывать два фактора: сдвиговые деформации, связанные с поперечными силами, и инерцию внезапного вращения элементов тонкого тела. Учет этих факторов, в дополнение к "классическим" деформациям и силам инерции приводит к тому, что в этом случае уравнения движения тонких тел становятся гиперболического типа. Родственная модель тонких тел, как правило, ассоциируется с именем С.П. Тимошенко, который предложил её в применении к теории изгиба балок [29]. Дальнейшие работы в этой области, посвященные ее применению к пластинам и оболочкам, проводили Уфлянд [31], Миндлин, Рейснер, Нагди, Амбарцумян и др. (смотри обзор в статье [103,104,111]).

В 2007 году Россихин Ю.А. и Шитикова М.В. [111] предложили новое обобщение лучевого метода для исследования распространения волновых поверхностей сильного и слабого разрыва в тонких упругих телах, для которых волновые фронты и лучи отнесены к криволинейной системе координат. Следует отметить, что лучевой метод в основном используется для получения аналитических решений. Новый подход основан на сведении трехмерных уравнений динамической теории упругости, которые сначала надо записать в скачках, к двумерным уравнениям при помощи интегрирования по координате, перпендикулярной к срединной поверхности тонкого тела. Полученные рекуррентные уравнения этого лучевого метода свободны от коэффициентов сдвига, которые присущи всем остальным

теориям типа Тимошенко, и зависят только от двух упругих констант: коэффициента Пуассона и модуля упругости.

Теория, предложенная в [111], применима для коротких временных интервалов после прохождения волнового фронта, но ей присуща простота «классической теории» тонких тел. Преимущества этого подхода были проиллюстрированы при решении многих краевых динамических задач, в том числе в задачах удара тонкими цилиндрическими и сферическими ударниками по упругой сферической оболочке. При этом внутри области контакта решение строилось при помощи нелинейной теории Герца, что позволило получить нелинейное уравнение относительно величины проникания ударника в мишень, аналитическое решение которого было получено при помощи ряда с целыми и дробными степенями по времени. Было показано, что время контакта и максимум контактной силы уменьшаются при увеличении кривизны оболочки.

Два подхода, применяемые для решения задач контактного взаимодействия вязкоупругих тел были подробно описаны в обзорной работе [115], а также в [35]. Было отмечено, что попытки обобщить классический контактный закон Герца для задач вязкоупругости делались уже давно разными исследователями, но в основном они касались либо квазистатических задач [69,71], либо удара по вязкоупругим полупространствам [44,53,66,72,77,78,96].

В последние три десятилетия возрос интерес к моделям вязкоупругости, основанных на применении операторов дробного порядка, которые интенсивно использовались российскими [9,11-15,23-25,26,28,33,] и зарубежными [41,56,65,84,85,88,89,100,155] учеными уже в 70е-годы прошлого столетия. Ретроспектива этих первых прикладных исследований была сделана профессором Росихиным Ю.А. [101].

Интерес к использованию дробного исчисления в последние годы все возрастает как в России [1,8,16-21,32,35,105,107-110,112-116,118-151,154], так и за рубежом [38-42,46-48,52, 54,55,57,58,61-64, 73-76,81-83,86, 89,92,93,

95,98, 153,158-160]. Однако следует отметить вклад научной школы под руководством профессора Ю.А. Россихина в решение динамических задач вязкоупругости, особенно это касается задач ударного взаимодействия с использованием моделей, содержащих дробные операторы. Подробные обзоры различных аспектов приложения дробного исчисления в механику сплошных сред и строительную механику приведены в [101,105,108,109,110, 113,115,118].

В данной диссертационной работе, выполненной соискателем под руководством Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В., делается обобщение предыдущих методов и подходов, разработанных в рамках этой школы, на решение задач соударения двух сферических оболочек с использованием модели стандартного линейного тела с дробными производными.

Глава 2. Моделирование соударения двух сферических оболочек

Для моделирования соударения двух вязкоупругих сферических оболочек (рис.2.1) рассмотрим сначала соударение двух упругих сферических оболочек и затем используем принцип соответствия Вольтерра, согласно которому упругие константы могут быть заменены соответствующими вязкоупругими операторами.

Результаты исследований, изложенные в данной главе, опубликованы в работах [119,122].

2.1. Центральное соударение двух упругих сферических оболочек

2.1.1. Анализ распространения волновых поверхностей

Рассмотрим две упругие сферические оболочки, которые движутся друг за другом вдоль прямой, соединяющей их центры тяжести, со скоростями V_{01} , V_{02} при условии, что $V_{01} < V_{02}$. Радиусы оболочек - R_1 и R_2 , их толщины - h_1 и h_2 , плотности - ρ_1 и ρ_2 , а упругие константы материалов имеют разные значения. Ударное взаимодействие происходит в момент времени $t = 0$.

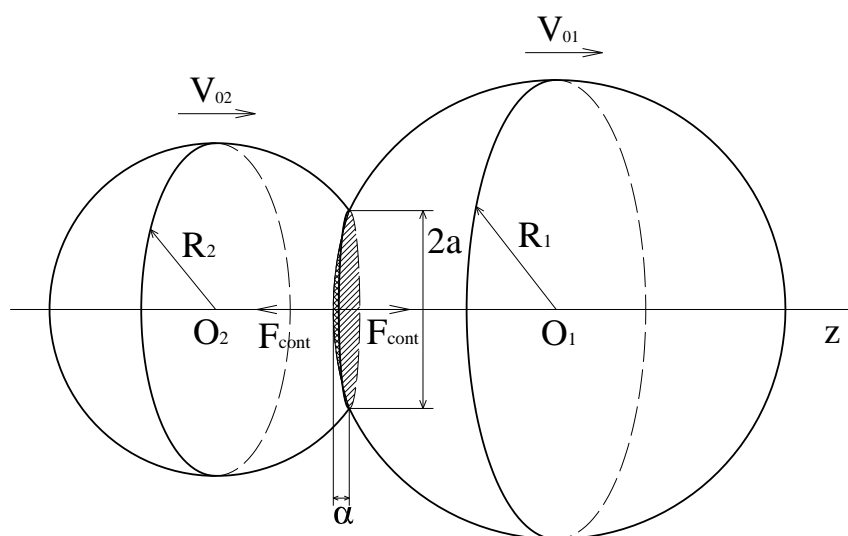


Рис. 2.1. Схема центрального соударения двух сферических оболочек

Решение в контактной области, которое в общем случае является функцией от времени, зависит от материала контактирующих тел. Таким образом, в случае соударения двух упругих сферических оболочек (рис. 2.1) решение в контактной области может быть найдено по теории Герца.

В момент удара в точке касания (или в точке контакта) двух сталкивающихся сфер зарождаются две нестационарные волновые линии (поверхности сильного разрыва), которые затем распространяются в виде расходящихся кругов вдоль сферических поверхностей со скоростями упругих волн. Позади волновых фронтов решение задачи может быть построено при помощи лучевых разложений на основе теории разрывов.

Геометрия волновой поверхности, распространяющейся вдоль тонкой сферической оболочки, была построена в работах Ю.А. Россихина и Шитиковой М.В. [116,126], где поверхность сильного разрыва интерпретировалась как “волна-полоска”, представляющая собой цилиндрическую поверхность с директрисой C - волновой линией, которая распространяется вдоль срединной поверхности оболочки, и семейством образующих, представляющих собой линейные отрезки длиной h , перпендикулярные к срединной поверхности оболочки и соответственно к волновой линии, делящей их пополам. Следуя [116,126], обозначим семейство образующих как u^1 -кривые, где u^1 - расстояние, измеряемое вдоль отрезка прямой линии от кривой C , а u^2 - расстояние, измеряемое вдоль кривой C (рис. 2.2). Семейство u^1 -кривых представляет собой геодезические линии. В этом случае выполняются все условия теоремы Мак-Коннела [10], а линейный элемент волновой поверхности принимает вид

$$ds^2 = (du^1)^2 + g_{22}(u^1, u^2)(du^2)^2, \quad (2.1)$$

причем

$$g_{22}(0, u^2) = 1, \quad (2.2)$$

где $g_{11} = 1$, g_{22} и $g_{12} = 0$ - ковариантные компоненты метрического тензора волновой поверхности.

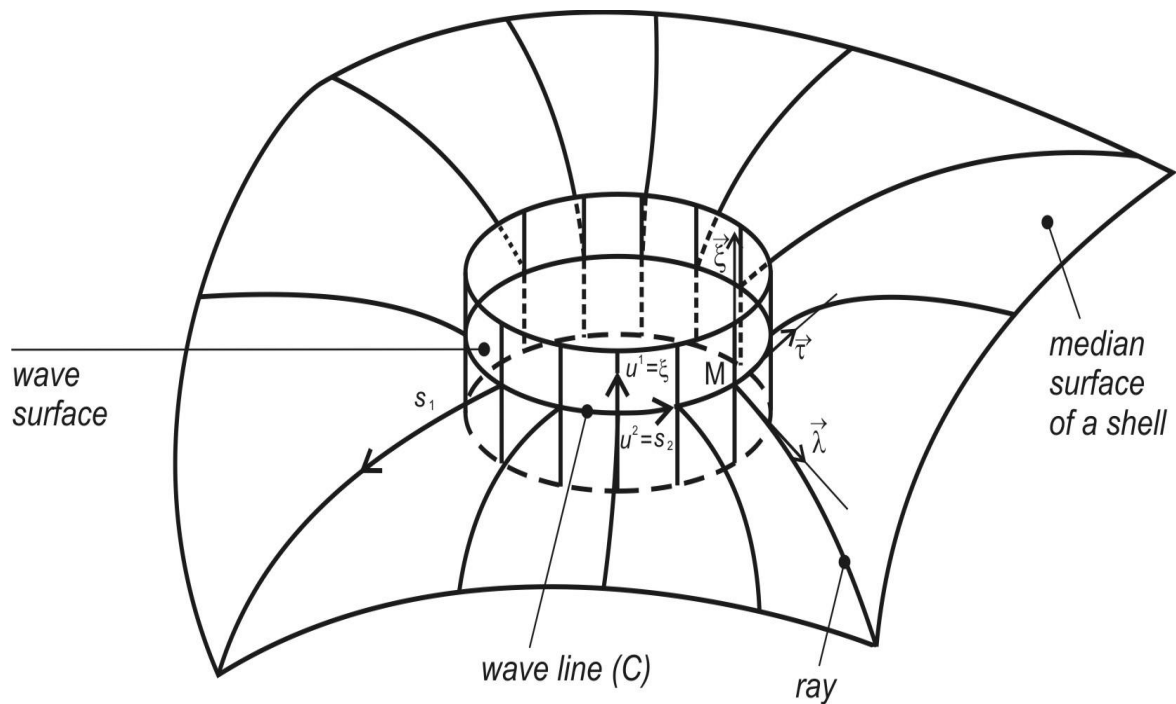


Рис. 2.2. Схема распространения волны-полоски вдоль поверхности сферической оболочки

Гауссова кривизна для линейного элемента (2.1) определяется следующей формулой [10]:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{(\partial u^1)^2} = 0. \quad (2.3)$$

В результате интегрирования уравнения (2.3) с учетом (2.2) получим

$$\sqrt{g_{22}} = 1 + cu^1, \quad (2.4)$$

где c – некоторая константа.

Известно, что малые расстояния вдоль координатных линий u^2 определяются выражением [10]

$$ds_2 = \sqrt{g_{22}} du^2,$$

или с учетом (2.4)

$$ds_2 = (1 + cu^1)du^2. \quad (2.5)$$

Запишем выражение (2.5) в виде

$$\frac{ds_2 - du^2}{du^2} = cu^1,$$

и проинтегрируем полученное соотношение по u^1 от $-h/2$ до $h/2$. В результате получим

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds_2 - du^2}{du^2} du^1 = 0,$$

или

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{ds_2}{du^2} du^1 = h. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) может быть записано как

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{g_{22}} du^1 = 1,$$

т.е. среднее значение величины $\sqrt{g_{22}}$ по толщине оболочки равно 1.

Если толщина оболочки мала, то можно приближенно считать, что

$$\sqrt{g_{22}} \approx 1 \quad (2.7)$$

в любой точке волновой поверхности.

Так как все величины для оболочки усредняются по ее толщине, то такую аппроксимацию для $\sqrt{g_{22}}$ нельзя назвать необоснованной.

Линейный элемент (2.1) с учетом (2.7) может быть приближенно представлен в виде

$$ds^2 \approx (du^1)^2 + (du^2)^2, \quad (2.8)$$

т.е. он похож на линейный элемент на плоскости в декартовой системе координат.

Теперь определим линейный элемент срединной поверхности оболочки. Так как лучи, пересекающие линию C (волновую линию) под прямыми углами, являются семейством геодезических линий, то условия

теоремы Мак-Коннела [10] опять выполняются, и поэтому выражение для определения длины линейного элемента этой поверхности принимает вид

$$ds^2 \approx (du_*^1)^2 + g_{22}(du^2)^2, \quad (2.9)$$

а с учетом формулы (2.7) оно может быть переписано в виде (2.8) с заменой du^1 на du_*^1 .

Основные кинематические и динамические характеристики волновой поверхности были также определены в [116,126]. Для этого прежде всего необходимо записать условие совместности на волновой поверхности сильного разрыва, которое исходя из соотношений (2.7)-(2.9), принимает вид

$$[u_{i,j(k)}] = -G^{-1}[v_{i,(k)}]\lambda_j + \frac{d[u_{i,(k)}]}{ds_1}\lambda_j + \frac{d[u_{i,(k)}]}{ds_2}\tau_j + \left[\frac{du_{i,(k)}\xi_j}{d\xi} \right], \quad (2.10)$$

где u_i - компоненты вектора перемещения, $v_i = \partial u_i / \partial t$, G - нормальная скорость волновой поверхности, $[u_{i,j}] = [\partial u_i / \partial x_j]$, x_j - пространственные прямоугольные декартовы координаты, $\xi = u^1$, $s_1 = u_*^1$, $[u_{i,(k)}] = [\partial^k u_i / \partial t^k]$, t - время, $v_i = u_{i,(1)}$, λ_i , τ_i и ξ_i - компоненты единичных векторов, направленных по касательной к лучу, касательной к волновой поверхности и по нормали к сферической поверхности соответственно, а латинские индексы принимают значения 1,2,3.

Полагая $k=0$ в (2.10), получим следующие условия совместности, которые выполняются на каждой из двух ударных волн [116,126]:

- геометрическое условие совместности [30]

$$[u_{i,j}] = \left[\frac{du_i}{dn} \right] \lambda_j + \left[\frac{d(u_i \xi_j)}{d\xi} \right], \quad (2.11)$$

- кинематическое условие совместности [116]

$$[v_i] = - \left[\frac{du_i}{dn} \right] G, \quad (2.12)$$

где d / dn - производная по нормали к волновой поверхности, ξ - координата вдоль нормали к сферической оболочке, $[Z] = Z^+ - Z^-$ - скачок искомого поля Z , а "+" и "-" обозначают, что данная величина вычисляется "перед" и "за" поверхностью сильного разрыва.

Исключая величину $[du_i / dn]$ из (2.11) и (2.12), находим

$$[u_{i,j}] = -G^{-1}[v_i]\lambda_j + \left[\frac{d(u_i\xi_j)}{d\xi} \right]. \quad (2.13)$$

Используя закон Гука для трехмерной среды, записанный в скачках, и условие совместности (2.13), получим

$$\begin{aligned} [\sigma_{ij}] = & -G^{-1}\lambda[v_\lambda]\delta_{ij} - G^{-1}\mu([v_i]\lambda_j + [v_j]\lambda_i) + \lambda[u_{\xi,\xi}]\delta_{ij} + \\ & + \mu \left(\left[\frac{d(u_i\xi_j)}{d\xi} + \frac{d(u_j\xi_i)}{d\xi} \right] \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $[\sigma_{ij}]$ - скачки компонентов тензора напряжений, λ и μ - постоянные Ламе, δ_{ij} - символ Кронекера, и

$$[v_\lambda] = [v_i]\lambda_i, \quad [u_{\xi,\xi}] = \left[\frac{d(u_i\xi_i)}{d\xi} \right] = \left[\frac{du_\xi}{d\xi} \right].$$

Умножая правую и левую части соотношения (2.14) на $\xi_i\xi_j$ и учитывая, что

$$[\sigma_{\xi\xi}] = [\sigma_{ij}]\xi_i\xi_j = 0,$$

что соответствует предположению о том, что нормальными напряжениями в сечениях, параллельных срединной поверхности сферической оболочки, можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями, получим

$$[u_{\xi,\xi}] = \frac{\lambda}{G(\lambda + 2\mu)}[v_\lambda]. \quad (2.15)$$

Умножая правую и левую части соотношения (2.14) на $\lambda_i\lambda_j$ и $\lambda_i\xi_j$, приходим к следующему уравнению:

$$[\sigma_{\lambda\lambda}] = [\sigma_{ij}] \lambda_i \lambda_j = -G^{-1}(\lambda + 2\mu)[v_\lambda] + \lambda[u_{\xi,\xi}]. \quad (2.16)$$

Подставляя (2.15) в (2.16), получим

$$[\sigma_{\lambda\lambda}] = -\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} G^{-1}[v_\lambda],$$

или

$$[\sigma_{\lambda\lambda}] = -\frac{E}{1-\nu^2} G^{-1}[v_\lambda], \quad (2.17)$$

где E и ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Аналогично умножая трехмерное уравнение движения, записанное в скачках,

$$[\sigma_{ij}] \lambda_j = -\rho G[v_i] \quad (2.18)$$

на λ_i , получим

$$[\sigma_{\lambda\lambda}] = -\rho G[v_\lambda], \quad (2.19)$$

где ρ - плотность материала оболочки.

Исключая теперь величину $[\sigma_{\lambda\lambda}]$ из (2.17) и (2.19), найдем скорость квазипродольной волны, распространяющейся в сферической оболочке,

$$G_1^{(i)} = \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i(1-\nu_i^2)}} \quad (i=1,2), \quad (2.20)$$

где $i=1,2$ относится к первой и второй сферическим оболочкам, E_i и ν_i - модули упругости и коэффициенты Пуассона каждой из оболочек соответственно.

Соотношение (2.17) с учетом (2.20) принимает вид

$$[\sigma_{\lambda\lambda}] = -\rho G_1^{(i)}[v_\lambda]. \quad (2.21)$$

Умножая (2.14) на $\lambda_i \xi_i$ и (2.18) на ξ_i , получим

$$[\sigma_{\lambda\xi}] = [\sigma_{ij}] \lambda_i \xi_j = -\mu G^{-1}[v_\xi], \quad (2.22)$$

$$[\sigma_{\lambda\xi}] = -\rho G^{-1}[v_\xi], \quad (2.23)$$

где $[v_\xi] = [v_i] \xi_i$.

Исключая величину $[\sigma_{\lambda\xi}]$ из (2.22) и (2.23), найдем скорости квазипоперечных волн

$$G_2^{(i)} = \sqrt{\frac{\mu_i}{\rho_i}}, \quad (2.24)$$

где μ_i - модули сдвига.

Соотношение (2.24) с учетом (2.22) принимает вид:

$$[\sigma_{\lambda\xi}] = -\rho G_2^{(i)} [v_\xi]. \quad (2.25)$$

Следует отметить, что в трехмерной среде только одна величина, а именно $[u_{\lambda,\lambda}]$, не равна нулю на квазипродольной волне, в то время как в двухмерной среде, где распространяется “волна-полоска”, на квазипродольной волне есть две величины, не равные нулю: $[u_{\lambda,\lambda}]$ и $[u_{\xi,\xi}]$. Между этими двумя величинами можно найти зависимость. С этой целью умножим правую и левую части соотношения (2.21) на $\lambda_i \lambda_j$ и выразим $[v_\lambda]$

$$[v_\lambda] = -G_1 [u_{\lambda,\lambda}],$$

и затем полученное выражение подставим в (2.23). В результате найдем искомую зависимость

$$[u_{\xi,\xi}] = -\frac{v_i}{1-v_i} [u_{\lambda,\lambda}]. \quad (2.26)$$

Однако, если рассмотреть деформации в тонком теле, например, в пластинке в прямоугольной декартовой системе координат, учитывая что

$$\sigma_{zz} = \frac{E[(1-v_i)u_{z,z} + v_i(u_{x,x} + u_{y,y})]}{(1+v_i)(1-2v_i)} = 0,$$

то тогда получим формулу, немного отличную от предыдущей:

$$u_{z,z} = -\frac{v_i}{1-v_i} (u_{x,x} + u_{y,y}). \quad (2.27)$$

Из сравнения формул (2.26) и (2.27) видно, что в правой части выражения (2.26) отсутствует величина $[u_{\tau,\tau}] = [u_{ij}] \tau_i \tau_j$, но ее отсутствие

связано с особенностями “волны-полоски”, а именно: она имеет свободные грани при $\xi = \pm h / 2$ и замкнутый контур по s_2 .

За волновыми фронтами до границы контактной области решение для величины Z может быть построено при помощи лучевого ряда [103,117]

$$Z(s, t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [Z_{,k}]^{(j)} \Big|_{t=\frac{s}{G_j}} \left(t - \frac{s}{G_j} \right)^k H \left(t - \frac{s}{G_j} \right), \quad (2.28)$$

где s - длина дуги, измеряемая от начальной точки удара вдоль луча (рис. 2.2), а $H(t)$ - функция Хевисайда.

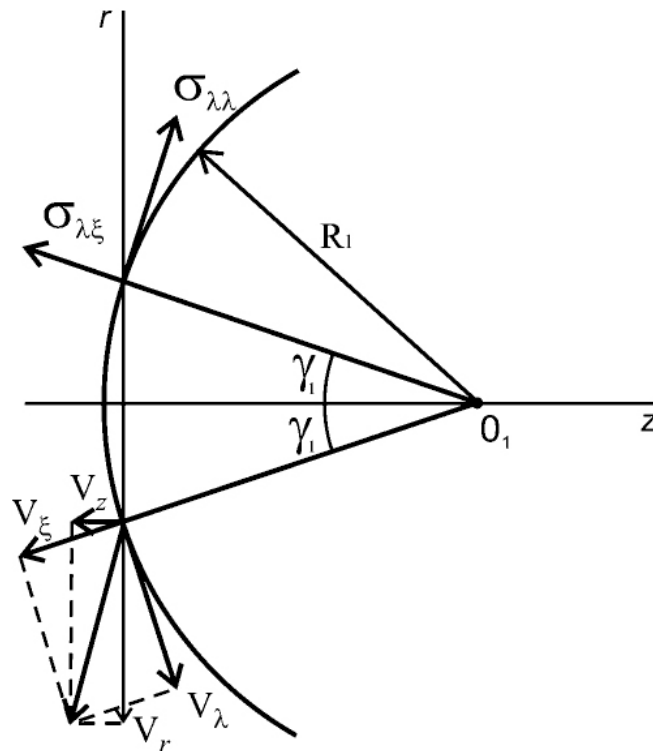


Рис. 2.3. Схема скоростей и напряжений в элементе оболочки на границе контактной области

На границе контактной области искомая функция принимает вид

$$Z(s_0, t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [Z_{,k}]^{(j)} \Big|_{t=\frac{s_0}{G_j}} \left(t - \frac{s_0}{G_j} \right)^k H \left(t - \frac{s_0}{G_j} \right), \quad (2.29)$$

где s_0 - граница контактной зоны.

Поскольку процесс ударного взаимодействия является кратковременным, то можно пренебречь членами порядка $\left(t - \frac{s_0}{G_j}\right)^k$ по сравнению с членами порядка t^0 , т.е. ограничиться первым членом лучевого разложения.

Другими словами, за фронтом каждой из двух нестационарных волн (поверхностей сильного разрыва) до границы контактной области (рис. 2.1) справедливы соотношения (2.21) и (2.25), которые являются первыми членами лучевых разложений (2.29) для величин $\sigma_{\lambda\lambda}$, $\sigma_{\lambda\xi}$, v_λ и v_ξ (рис. 2.3). Таким образом, внутри всей возмущенной области можно приближенно считать, что

$$\bar{\sigma}_{\lambda\lambda} = -\rho G_1 \bar{v}_\lambda, \quad (2.30)$$

$$\bar{\sigma}_{\lambda\xi} = -\rho G_2 \bar{v}_\xi. \quad (2.31)$$

Зная \bar{v}_λ , \bar{v}_ξ , $\bar{\sigma}_{\lambda\lambda}$ и $\bar{\sigma}_{\lambda\xi}$, можно вычислить \bar{v}_z , \bar{v}_r , и $\bar{\sigma}_{rz}$ в соответствии со следующими формулами:

$$\bar{v}_z = \bar{v}_\xi \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}} - \bar{v}_\lambda \frac{a}{R}, \quad (2.32)$$

$$\bar{v}_r = \bar{v}_\xi \frac{a}{R} + \bar{v}_\lambda \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}, \quad (2.33)$$

$$\bar{\sigma}_{rz} = -\bar{\sigma}_{\lambda\lambda} \frac{a}{R} \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}} + \bar{\sigma}_{\lambda\xi} \left(1 - 2 \frac{a^2}{R^2}\right), \quad (2.34)$$

где a - радиус контактного пятна.

Считая углы конуса контактного пятна $2\gamma_1$ и $2\gamma_2$ малыми величинами и полагая, что $\cos \gamma_i \approx 1$, $\sin \gamma_i \approx \gamma_i = aR_i^{-1}$ ($i = 1, 2$ относится к первой и второй сферической оболочке соответственно), из соотношений (2.32) - (2.34) получаем

$$v_z = v_\xi - v_\lambda \frac{a}{R}, \quad (2.35)$$

$$v_r = v_\xi \frac{a}{R} + v_\lambda, \quad (2.36)$$

$$\sigma_{rz} = \rho \left(G_1 v_\lambda \frac{a}{R} - G_2 v_\xi \right), \quad (2.37)$$

где тильда над величинами говорит о том, что соответствующее значение вычисляется на границе контактной области, т.е. при $r=a$, а $r, \theta, z = x_3$ - цилиндрическая система координат с центром в начальной точке контакта сферических оболочек (рис. 2.3).

В случае столкновения двух упругих сферических оболочек (рис. 2.1) решение в контактной области может быть найдено с помощью теории Герца. Согласно закону Герца контактная сила определяется как [3,4,7]

$$F_{cont} = k\alpha^{3/2}, \quad (2.38)$$

где α - местное смятие материалов оболочек, k - коэффициент жесткости при ударном взаимодействии

$$k = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{R'}}{k_1 + k_2}, \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad k_i = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} \quad (i=1,2), \quad (2.39)$$

а индексы 1 и 2, как это было уже указано выше, относятся к первой и второй оболочкам соответственно.

Тогда уравнения движения контактной области двух сферических оболочек могут быть записаны в виде

$$\rho_1 \pi a^2 h_1 \dot{v}_{z1} = 2\pi a h_1 \sigma_{rz1} + k\alpha^{3/2}, \quad (2.40)$$

$$\rho_2 \pi a^2 h_2 \dot{v}_{z2} = 2\pi a h_2 \sigma_{rz2} - k\alpha^{3/2}, \quad (2.41)$$

где точки над величинами обозначают производную по времени.

Для того чтобы вычислить значения σ_{rzi} , воспользуемся формулами (2.35) - (2.37), а также будем считать, что $v_r = \dot{a}$. В результате получим

$$\sigma_{rzi} = \rho_i \left(G_1^{(i)} - G_2^{(i)} \right) \frac{(a^2)^{\cdot}}{2R_i} - \rho_i \left(G_1^{(i)} \frac{a^2}{R_i^2} + G_2^{(i)} \right) v_{zi} \quad (2.42)$$

Подставляя соотношения (2.42) в уравнения (2.40) и (2.41) и учитывая, что $a^2 = R'\alpha$, находим

$$\begin{aligned} \rho_1 \pi R' \alpha h_1 \dot{v}_{z1} &= \\ &= 2\pi(R')^{1/2} \alpha^{1/2} h_1 \rho_1 \left[\left(G_1^{(1)} - G_2^{(1)} \right) \frac{R' \dot{\alpha}}{2R_1} - \left(G_1^{(1)} \frac{R'}{R_1^2} \alpha + G_2^{(1)} \right) v_{z1} \right] + k\alpha^{3/2}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \pi R' \alpha h_2 \dot{v}_{z2} &= \\ &= 2\pi(R')^{1/2} \alpha^{1/2} h_2 \rho_2 \left[\left(G_1^{(2)} - G_2^{(2)} \right) \frac{R' \dot{\alpha}}{2R_2} - \left(G_1^{(2)} \frac{R'}{R_2^2} \alpha + G_2^{(2)} \right) v_{z2} \right] - k\alpha^{3/2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

К уравнениям (2.43) и (2.44) следует добавить следующее уравнение:

$$v_{z2} - v_{z1} = \dot{\alpha} - V, \quad (2.45)$$

где

$$V = V_{02} - V_{01}.$$

Система трех уравнений (2.43) - (2.45) позволяет найти искомые величины: v_{z1} , v_{z2} и $\dot{\alpha}$.

Следует отметить, что система трех уравнений (2.43) - (2.45) может быть сведена к системе двух уравнений после подстановки независимой переменной, т.е. замены t на α . В этом случае, учитывая (2.45), можно записать

$$\dot{v}_{z1} = \frac{dv_{z1}}{d\alpha} \dot{\alpha} = \frac{dv_{z1}}{d\alpha} \left[(v_{z2} - v_{z1}) + V \right], \quad (2.46)$$

$$\dot{v}_{z2} = \frac{dv_{z2}}{d\alpha} \dot{\alpha} = \frac{dv_{z2}}{d\alpha} \left[(v_{z2} - v_{z1}) + V \right]. \quad (2.47)$$

Тогда с учетом соотношений (2.46) и (2.47) уравнения (2.43) и (2.44) принимают вид

$$\begin{aligned}
& \alpha^{1/2} \frac{dv_{z1}}{d\alpha} (v_{z2} - v_{z1} + V) = \\
& = 2(R')^{-1/2} \left[\left(G_1^{(1)} - G_2^{(1)} \right) \frac{R'}{2R_1} (v_{z2} - v_{z1} + V) - \left(G_1^{(1)} \frac{R'}{R_1^2} \alpha + G_2^{(1)} \right) v_{z1} \right] + \quad (2.48) \\
& + \frac{k\alpha}{\pi h_1 \rho_1 R'} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha^{1/2} \frac{dv_{z2}}{d\alpha} (v_{z2} - v_{z1} + V) = \\
& = 2(R')^{-1/2} \left[\left(G_1^{(2)} - G_2^{(2)} \right) \frac{R'}{2R_2} (v_{z2} - v_{z1} + V) - \left(G_1^{(2)} \frac{R'}{R_2^2} \alpha + G_2^{(2)} \right) v_{z2} \right] - \quad (2.49) \\
& - \frac{k\alpha}{\pi h_2 \rho_2 R'}
\end{aligned}$$

Уравнения (2.48) и (2.49) являются более подходящими для численного анализа, чем уравнения (2.43) и (2.44), и позволяют найти зависимости v_{z1} и v_{z2} от α .

2.1.2. Решение в случае соударения двух одинаковых сферических оболочек

Предположим, что две сферические оболочки выполнены из одного материала и имеют одинаковые размеры, то есть, $\rho = \rho_1 = \rho_2$, $h = h_1 = h_2$, $G_1 = G_1^{(1)} = G_1^{(2)}$, $G_2 = G_2^{(1)} = G_2^{(2)}$, и $R' = 1/2R$. Тогда, вычитая (2.43) из (2.44) с учетом (2.45), имеем

$$\begin{aligned}
& \alpha \ddot{\alpha} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R}} \left(G_1 \frac{1}{2R} \alpha + G_2 \right) \alpha^{1/2} \dot{\alpha} + \frac{4k}{\rho \pi h R} \alpha^{3/2} = \\
& = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R}} \left(G_1 \frac{1}{2R} \alpha + G_2 \right) \alpha^{1/2} V.
\end{aligned} \quad (2.50)$$

Будем искать решение уравнения (2.50) в виде следующего разложения в ряд по времени t :

$$\alpha = Vt + \sum_{i=1}^{\infty} c_i t^{(2i+1)/2} + \sum_{j=2}^{\infty} d_j t^j, \quad (2.51)$$

где c_i и d_j - коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя (2.51) в уравнение (2.50) и приравнявая коэффициенты при целых и дробных степенях t , приходим к системе уравнений для определения коэффициентов c_i и d_j . Например, первые семь из них имеют вид

$$\begin{aligned} c_1 = d_2 = 0, \quad c_2 &= -\frac{16}{15} \frac{kV^{1/2}}{\rho\pi hR} < 0, \\ d_3 &= \frac{8\sqrt{2}}{9} \frac{kG_2}{\rho\pi hR^{3/2}} > 0, \quad c_3 = -\frac{128}{105} \frac{kG_2^2 V^{-1/2}}{\rho\pi hR^2} < 0, \\ d_4 &= \frac{8}{45} \frac{k^2}{(\rho\pi hR)^2} + \frac{2\sqrt{2}}{9} \frac{kG_1 V}{\rho\pi hR^{5/2}} \left(1 + \frac{16}{5} \frac{G_2^3}{G_1 V^2}\right) > 0, \\ c_4 &= -\frac{64\sqrt{2}}{2835} \frac{k^2 G_2 V^{-1/2}}{(\rho\pi h)^2 R^{5/2}} - \frac{128}{567} \frac{kG_2 G_1 V^{1/2}}{\rho\pi hR^3} \left(\frac{5}{2} + \frac{16}{5} \frac{G_2^3}{G_1 V^2}\right) < 0, \end{aligned} \quad (2.52)$$

и, таким образом, функция α записывается в виде

$$\alpha = Vt + c_2 t^{5/2} + d_3 t^3 + c_3 t^{7/2} + d_4 t^4 + c_4 t^{9/2}. \quad (2.53)$$

Подстановка (2.53) в уравнение (2.38) позволяет определить контактную силу для данного случая.

Если ограничиться первыми двумя членами в (2.53), то есть использовать только квазистатическое приближение, то можно получить первые приближения для времени контакта t_{cont} и времени t_{max} , когда контактная сила достигает своего максимального значения $F_{max} = k\alpha_{max}^{3/2}$:

$$t_{cont} = \left(-\frac{V}{c_2}\right)^{2/3} = \left(\frac{15}{16} \frac{\rho\pi hRV^{1/2}}{k}\right)^{2/3}, \quad (2.54)$$

$$t_{max} = \left(\frac{3}{18} \frac{\rho\pi hRV^{1/2}}{k}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad (2.55)$$

$$F_{max} = \frac{9\sqrt{3}}{40\sqrt{5}} \rho \pi h R V^2 \approx 0,174 \rho \pi h R V^2. \quad (2.56)$$

Из уравнений (2.55) - (2.56) видно, что максимум контактной силы и время контакта зависят только от разности скоростей $V = V_{02} - V_{01}$ и не зависят от скоростей нестационарных волн, распространяющихся в соударяющихся телах. Для того чтобы их учесть, необходимо использовать ряд (2.53) для определения величины α с учетом, по крайней мере, его пяти или более членов.

2.1.3. Решение в случае различных оболочек без учета инерции контактной области

Если пренебречь инерцией контактного пятна в уравнениях (2.43) и (2.44), то их можно переписать в виде

$$a_1 \dot{\alpha} - v_{z1} + b_1 \alpha = 0, \quad (2.57)$$

$$a_2 \dot{\alpha} - v_{z2} + b_2 \alpha = 0, \quad (2.58)$$

где

$$a_i = \frac{(G_1^{(i)} - G_2^{(i)}) R' (2R_i)^{-1}}{G_1^{(i)} R' R_i^{-2} \alpha + G_2^{(i)}},$$

и

$$b_i = \frac{k}{2\pi \sqrt{R'} h_i \rho_i (G_1^{(i)} R' R_i^{-2} \alpha + G_2^{(i)})} \quad (i=1,2).$$

Вычитая уравнение (2.57) из уравнения (2.58), с учетом (2.45) получим

$$\dot{\alpha} + \frac{b_1 + b_2}{1 - (a_2 - a_1)} \alpha = \frac{V}{1 - (a_2 - a_1)}. \quad (2.59)$$

Так как α является малой величиной, то можно пренебречь величиной $G_1^{(i)} R' R_i^{-2} \alpha$ по сравнению с величиной G_2 ; значения a_1 и a_2 меньше единицы,

поэтому значением $a_2 - a_1$ можно пренебречь по сравнению с единицей. Тогда уравнение (2.59) принимает вид

$$\dot{\alpha} + (b_1 + b_2)\alpha = V, \quad (2.60)$$

где b_1 и b_2 – константы.

Интегрируя (2.60) с учетом начальных условий

$$\alpha|_{t=0} = 0, \quad \dot{\alpha}|_{t=0} = V, \quad (2.61)$$

находим

$$\alpha = \frac{V}{b_1 + b_2} \left(1 - e^{-(b_1 + b_2)t} \right). \quad (2.62)$$

Следует отметить, что закон, описывающий изменение местного смятия (закон изменения силы), определяемый формулой (2.62), качественно совпадает с формой кривой AGB, представленной на рис. 45 в монографии Голдсмита [4], где показан характеристический закон изменения силы при контакте двух стержней со сферическими головками.

Местное смятие двух соударяющихся сферических оболочек увеличивается до того момента, когда отраженные волны (волны “разгрузки”) возвращаются в контактную зону. Каждая из отраженных волн разгружает контактную область, в результате чего происходит отскок соударяющихся оболочек.

2.2. Центральное соударение двух одинаковых сферических оболочек, обладающих локальными вязкоупругими свойствами в зоне контакта

В этом разделе представлена модель соударения двух сферических оболочек для случая, когда вязкоупругие свойства сталкивающихся тел проявляются только в месте контакта в результате изменения микроструктуры оболочек в процессе контактного взаимодействия и описываются с помощью модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными [116,125]. Вне области контакта материал оболочек остается упругим с нерелаксированными величинами модуля упругости.

Используя принцип соответствия Вольтерра, согласно которому упругие константы в уравнении движения контактной области двух сферических оболочек (2.50) могут быть заменены соответствующими вязкоупругими операторами, можно довольно легко обобщить уравнение (2.50) для случая соударения двух одинаковых упругих оболочек, обладающих местными вязкоупругими свойствами в пределах контактной зоны. В этом случае коэффициент k в (2.39) переходит в оператор \tilde{k} , который определяется следующим образом:

$$\tilde{k} = \frac{2\sqrt{R'}}{3} \frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\nu}^2}, \quad (2.63)$$

и, следовательно, для вязкоупругих зон сфер необходимо вычислить оператор $\tilde{E}(1 - \tilde{\nu}^2)^{-1}$, пропорциональный цилиндрической жесткости, где \tilde{E} и $\tilde{\nu}$ являются зависимыми от времени функциями.

Экспериментальные данные показывают, что для большинства вязкоупругих материалов объемной релаксацией можно пренебречь по сравнению со сдвиговой релаксацией [24,25], т.е. считать, что объемный модуль упругости K остается постоянным в процессе механического

нагружения этого материала, следовательно, справедливо следующее соотношение [115,118]:

$$\frac{\tilde{E}}{1-2\tilde{\nu}} = \frac{E_{\infty}}{1-2\nu_{\infty}}, \quad (2.64)$$

где E_{∞} и ν_{∞} - нерелаксированные значения модуля упругости и коэффициента Пуассона соответственно.

Предположим, что одномерные процессы в вязкоупругом материале в контактной области описываются моделью стандартного линейного твердого тела с дробной производной [9,11,105], т.е.

$$\sigma + \tau_{\varepsilon}^{\gamma} D^{\gamma} \sigma = E_0 (\varepsilon + \tau_{\sigma}^{\gamma} D^{\gamma} \varepsilon), \quad (2.65)$$

где σ - напряжение, ε - деформация, E_0 - релаксированный модуль упругости, τ_{ε} и τ_{σ} - времена релаксации и ретардации, при этом выполняется следующее важное соотношение между параметрами вязкоупругой среды [9,33,105]:

$$\frac{\tau_{\sigma}^{\gamma}}{\tau_{\varepsilon}^{\gamma}} = \frac{E_{\infty}}{E_0}, \quad (2.66)$$

и

$$D^{\gamma} x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-t')^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} x(t') dt' \quad (2.67)$$

- дробная производная Римана-Лиувилля [105], $\Gamma(1-\gamma)$ - гамма-функция, $\gamma(0 < \gamma \leq 1)$ - параметр дробности и $x(t)$ - некоторая функция.

Выражая напряжение σ через деформацию ε или деформацию ε через напряжение σ из соотношения (2.65) с учетом (2.66), находим

$$\sigma = E_{\infty} \left(1 - \nu_{\varepsilon} \frac{1}{1 + \tau_{\varepsilon}^{\gamma} D^{\gamma}} \right) \varepsilon, \quad (2.68)$$

или

$$\varepsilon = J_{\infty} \left(1 + \nu_{\sigma} \frac{1}{1 + \tau_{\sigma}^{\gamma} D^{\gamma}} \right) \sigma, \quad (2.69)$$

где $J_0 = E_0^{-1}$ и $J_\infty = E_\infty^{-1}$ - релаксированное и нерелаксированное значения податливости материала соответственно, а параметры вязкоупругого материала ν_ε и ν_σ представляют собой дефекты модулей

$$\nu_\varepsilon = \frac{J_0 - J_\infty}{J_0} = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty}, \quad \nu_\sigma = \frac{J_0 - J_\infty}{J_\infty} = \frac{E_\infty - E_0}{E_0}.$$

Следует отметить, что в соотношения (2.68) и (2.69) входит один и тот же оператор, который далее будем обозначать через $\mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_i^\gamma)$ ($i = \varepsilon, \sigma$) и называть безразмерным оператором Ю.Н. Работнова [115,118], т.е.

$$\mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_i^\gamma) = \frac{1}{1 + \tau_i^\gamma D^\gamma}. \quad (2.70)$$

Оператор (2.70) удобно записать в другом виде. Для этой цели умножим числитель и знаменатель дроби в правой части соотношения (2.70) на $I^\gamma \tau_i^{-\gamma}$, где

$$I^\gamma x(t) = \int_0^t \frac{(t-t')^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} x(t') dt' \quad (2.71)$$

-дробный интеграл, и примем во внимание, что $D^\gamma I^\gamma = 1$. В результате получим

$$\mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_i^\gamma) = \frac{I^\gamma \tau_i^{-\gamma}}{1 - (-I^\gamma \tau_i^{-\gamma})}. \quad (2.72)$$

Если предположить, что правая часть формулы (2.72) представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $d = -I^\gamma \tau_i^{-\gamma}$, а первый ее член равен $I^\gamma \tau_i^{-\gamma}$, то выражение (2.72) может быть переписано в виде

$$\mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_i^\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tau_i^{-\gamma(n+1)} I^{\gamma(n+1)}. \quad (2.73)$$

Если подействовать оператором (2.73) на произвольную функцию $x(t)$, то в результате получим

$$\mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_i^\gamma) x(t) = \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma (-t' / \tau_i) x(t-t') dt', \quad (2.74)$$

где

$$\mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t}{\tau_i} \right) = \frac{t^{\gamma-1}}{\tau_i^\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau_i)^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \quad (2.75)$$

- дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова, предложенная им в 1948 году [23].

Учитывая (2.74) и (2.75), формулы (2.68) и (2.69) принимают вид

$$\sigma = E_\infty \left[\varepsilon - \nu_\varepsilon \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t'}{\tau_\varepsilon} \right) \varepsilon(t-t') dt' \right], \quad (2.76)$$

$$\varepsilon = J_\infty \left[\sigma + \nu_\sigma \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t'}{\tau_\sigma} \right) \sigma(t-t') dt' \right]. \quad (2.77)$$

Уравнения (2.76) и (2.77) являются соотношениями Больцмана-Вольтерра со слабо сингулярными ядрами наследственности $\mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t}{\tau_i} \right)$, которые затухают при $t \rightarrow \infty$, при этом резольвентные ядра определяются одной и той же функцией (2.75). Только экспоненциальное ядро, которое является предельным случаем (2.75) при $\gamma = 1$, то есть,

$$\mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t}{\tau_i} \right) = \tau_i^{-1} \exp\left(\frac{t}{\tau_i}\right),$$

обладает этой особенностью.

Эти особенности $\mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t}{\tau_i} \right)$ -функции позволили Работнову назвать ее дробно-экспоненциальной [23-25].

Для дальнейших вычислений операторы, входящие в уравнения (2.76) и (2.77), удобно переписать в виде

$$\tilde{E} = E_\infty \left[1 - \nu_\varepsilon \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) \right], \quad (2.78)$$

$$\tilde{J} = J_\infty \left[1 + \nu_\sigma \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_\sigma^\gamma) \right]. \quad (2.79)$$

В работах Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой [115,118] была развита алгебра безразмерных операторов Ю.Н. Работнова(2.70). Так, была доказана теорема их умножения

$$\mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_\sigma^\gamma) = \frac{\tau_\varepsilon^\gamma \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) - \tau_\sigma^\gamma \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_\sigma^\gamma)}{\tau_\varepsilon^\gamma - \tau_\sigma^\gamma}. \quad (2.80)$$

Действительно,

$$\mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_\sigma^\gamma) = \frac{1}{(1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma)(1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma)} = \frac{A_1}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma} + \frac{A_2}{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma}, \quad (2.81)$$

где

$$A_1 = \frac{\tau_\varepsilon^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma - \tau_\sigma^\gamma}, \quad A_2 = -A_1 \frac{\tau_\sigma^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma} = -\frac{\tau_\sigma^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma - \tau_\sigma^\gamma}.$$

Теперь подставляя оператор (2.78) в соотношение (2.64), получим оператор Пуассона для вязкоупругого материала

$$\tilde{\nu} = \nu_\infty + \frac{1}{2}(1 - 2\nu_\infty)\nu_\varepsilon \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma). \quad (2.82)$$

В дальнейшем будем использовать также следующие операторы [115]:

$$\frac{1}{1 + \tilde{\nu}} = \frac{1}{1 + \nu_\infty + \frac{1}{2}(1 - 2\nu_\infty)\nu_\varepsilon \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma)}, \quad (2.83)$$

$$\frac{1}{1 - \tilde{\nu}} = \frac{1}{1 - \nu_\infty - \frac{1}{2}(1 - 2\nu_\infty)\nu_\varepsilon \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma)}, \quad (2.84)$$

Следуя [115,118], для вычисления операторов в правой части формул (2.83) и (2.84) предположим, что они имеют следующий вид:

$$\frac{1}{1 + \tilde{\nu}} = \frac{1}{1 + \nu_\infty} \left[1 - B \mathfrak{D}_\gamma^* (t_1^\gamma) \right], \quad (2.85)$$

$$\frac{1}{1 - \tilde{\nu}} = \frac{1}{1 - \nu_\infty} \left[1 + D \mathfrak{D}_\gamma^* (t_2^\gamma) \right], \quad (2.86)$$

где B , t_1^γ и D , t_2^γ - пока неопределенные константы.

Приравнивая правые части соотношений (2.83) и (2.85), а также (2.84) и (2.86), далее приводя полученные выражения к общему знаменателю и применяя теорему умножения безразмерных дробных операторов (2.80), находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{(1-2\nu_\infty)\nu_\varepsilon}{1+\nu_\infty} \left[1 - B \frac{\tau_\varepsilon^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma - t_1^\gamma} \right] \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) - \\ & - B \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(1-2\nu_\infty)\nu_\varepsilon}{1+\nu_\infty} \frac{t_1^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma - t_1^\gamma} \right] \mathfrak{D}_\gamma^* (t_1^\gamma) = 0, \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{(1-2\nu_\infty)\nu_\varepsilon}{1+\nu_\infty} \left[1 + D \frac{\tau_\varepsilon^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma - t_2^\gamma} \right] \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_\varepsilon^\gamma) - \\ & - D \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(1-2\nu_\infty)\nu_\varepsilon}{1-\nu_\infty} \frac{t_2^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma - t_2^\gamma} \right] \mathfrak{D}_\gamma^* (t_2^\gamma) = 0. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Приравнивая выражения в квадратных скобках в соотношениях (2.87) и (2.88) к нулю, определяем неизвестные постоянные

$$B = \frac{(1-2\nu_\infty)\nu_\varepsilon}{2(1+\nu_\infty) + \nu_\varepsilon(1-2\nu_\infty)} = \frac{\tau_\varepsilon^\gamma - t_1^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma}, \quad (2.89)$$

$$t_1^{-\gamma} = \tau_\varepsilon^{-\gamma} \left[1 + \frac{(1-2\nu_\infty)\nu_\varepsilon}{2(1+\nu_\infty)} \right], \quad t_1^\gamma = \frac{\tau_\varepsilon^\gamma}{A}, \quad (2.90)$$

$$D = \frac{(1-2\nu_\infty)\nu_\varepsilon}{2(1-\nu_\infty) - \nu_\varepsilon(1-2\nu_\infty)} = -\frac{\tau_\varepsilon^\gamma - t_2^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma}, \quad (2.91)$$

$$t_2^{-\gamma} = \tau_\varepsilon^{-\gamma} \left[1 - \frac{(1-2\nu_\infty)\nu_\varepsilon}{2(1-\nu_\infty)} \right], \quad t_2^\gamma = \frac{\tau_\varepsilon^\gamma}{C}, \quad (2.92)$$

где

$$A = \frac{2(1+\nu_\infty) + \nu_\varepsilon(1-2\nu_\infty)}{2(1+\nu_\infty)} > 1, \quad C = \frac{2(1-\nu_\infty) - \nu_\varepsilon(1-2\nu_\infty)}{2(1-\nu_\infty)} < 1.$$

Теперь вычислим искомый оператор

$$\frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\nu}^2} = \frac{\tilde{E}}{2} \left(\frac{1}{1 + \tilde{\nu}} - \frac{1}{1 - \tilde{\nu}} \right). \quad (2.93)$$

Для этого подставим соотношения (2.78), (2.85) и (2.86) в выражение (2.93) с учетом формулы (2.80). В результате получим

$$\frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{v}^2} = \frac{E_\infty}{1 - v_\infty^2} \left[1 - m_1 \mathfrak{D}_\gamma^* \left(\frac{t'}{t_1} \right) - m_2 \mathfrak{D}_\gamma^* \left(\frac{t'}{t_2} \right) \right], \quad (2.94)$$

где

$$m_1 = \frac{3}{2} \frac{B(1 - v_\infty)}{1 - 2v_\infty} = \frac{3}{2} \frac{(1 - v_\infty)v_\varepsilon}{2(1 + v_\infty) + v_\varepsilon(1 - 2v_\infty)} > 0,$$

$$m_2 = \frac{1}{2} \frac{D(1 + v_\infty)}{1 - 2v_\infty} = \frac{1}{2} \frac{(1 + v_\infty)v_\varepsilon}{2(1 - v_\infty) - v_\varepsilon(1 - 2v_\infty)} > 0.$$

Подставляя теперь найденный оператор (2.94) в уравнение (2.50), получаем

$$\begin{aligned} & \alpha \ddot{\alpha} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R}} \left(G_1 \frac{1}{2R} \alpha + G_2 \right) \alpha^{1/2} \dot{\alpha} + \\ & + \mathfrak{a} \left[\alpha^{3/2} - m_1 \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t'}{t_1} \right) \alpha^{3/2} (t - t') dt' - m_2 \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t'}{t_2} \right) \alpha^{3/2} (t - t') dt' \right] = \quad (2.95) \\ & = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R}} \left(G_1 \frac{1}{2R} \alpha + G_2 \right) \alpha^{1/2} V, \end{aligned}$$

где скорости квазипродольной G_1 и квазипоперечной G_2 волн, распространяющихся в оболочках вне области контакта, определяются соотношениями (2.20) и (2.24), а

$$\mathfrak{a} = \frac{4\sqrt{2}}{3\rho\pi h\sqrt{R}} \frac{E_\infty}{1 - v_\infty^2} = \frac{4\sqrt{2}G_1^2}{3\pi h\sqrt{R}}.$$

Так как процесс соударения двух оболочек является кратковременным, т.е. если выполняется условие $(t/\tau_i \ll 1)$, то, как это было показано в работах Ю.Н. Работнова [24,25] и К.С. Cole и Р.Н. Cole [50], дробно-экспоненциальную функцию (2.75) можно с достаточной точностью заменить более простым выражением

$$\mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t}{t_i} \right) \approx \frac{t^{\gamma-1}}{t_i^\gamma \Gamma(\gamma)}, \quad (2.96)$$

т.е. учесть первый член ряда в формуле (2.75). Более того, из (2.70) и (2.71) следует, что

$$\mathfrak{D}_{\gamma_2}^* (\tau^\gamma) \approx \tau^{-\gamma} I^\gamma,$$

где I^γ - дробный интеграл.

В этом случае уравнение (2.95) принимает вид

$$\begin{aligned} & \alpha \ddot{\alpha} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R}} \left(G_1 \frac{1}{2R} \alpha + G_2 \right) \alpha^{1/2} \dot{\alpha} + \\ & + \mathfrak{a} \left[\alpha^{3/2} - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{m_1}{t_1^\gamma} + \frac{m_2}{t_2^\gamma} \right) \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right] = \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R}} \left(G_1 \frac{1}{2R} \alpha + G_2 \right) \alpha^{1/2} V.$$

В предельном случае, соответствующем обычной вязкоупругости, то есть, когда $\gamma = 1$, уравнение (2.97) сводится к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} & \alpha \ddot{\alpha} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R}} \left(G_1 \frac{1}{2R} \alpha + G_2 \right) \alpha^{1/2} \dot{\alpha} + \\ & + \mathfrak{a} \left[\alpha^{3/2} - \left(\frac{m_1}{t_1} + \frac{m_2}{t_2} \right) \int_0^t \alpha^{3/2}(t') dt' \right] = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{R}} \left(G_1 \frac{1}{2R} \alpha + G_2 \right) \alpha^{1/2} V, \end{aligned} \quad (2.98)$$

решение которого можно записать в виде ряда (2.53), где

$$\begin{aligned} c_1 = d_2 = 0, \quad c_2 = -\frac{4}{15} \mathfrak{a} V^{\frac{1}{2}} < 0, \quad d_3 = \frac{2\sqrt{2}}{9} \frac{G_2 \mathfrak{a}}{R^{1/2}} > 0, \\ c_3 = -\frac{32}{105} \frac{G_2^2 V^{-1/2} \mathfrak{a}}{R} + \frac{8}{175} V^{1/2} \mathfrak{a} \left(\frac{m_1}{t_1} + \frac{m_2}{t_2} \right), \\ d_4 = \frac{\mathfrak{a}^2}{90} + \frac{\sqrt{2}}{18} \frac{G_1 V \mathfrak{a}}{R^{3/2}} \left(1 + \frac{16}{5} \frac{G_2^3}{G_1 V^2} \right) - \frac{2\sqrt{2}}{75} \frac{G_2 V \mathfrak{a}}{R^{1/2}} \left(\frac{m_1}{t_1} + \frac{m_2}{t_2} \right), \\ c_4 = -\frac{4\sqrt{2}}{2835} \frac{\mathfrak{a}^2 G_2 V^{-1/2}}{R^{1/2}} - \frac{32}{567} \frac{\mathfrak{a} G_2 G_1 V^{1/2}}{R^2} \left(\frac{5}{2} + \frac{16}{5} \frac{G_2^3}{G_1 V^2} \right) + \\ + \frac{8\sqrt{2}}{4725} \frac{G_2 V \mathfrak{a}}{R^{1/2}} \left(\frac{m_1}{t_1} + \frac{m_2}{t_2} \right). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Из сравнения двух наборов констант (2.52) и (2.99) видно, что зависимость силы от времени контакта при $\gamma = 1$ (обычная вязкость)

отличается от зависимости при $\gamma = 0$ (упругий случай) большим максимумом контактной силы и увеличением времени контакта по сравнению со случаем $\gamma = 0$, когда они определяются по формулам (2.56) и (2.55) соответственно.

Можно показать, что при $0 < \gamma < 1$ кривые величины локального смятия α от времени, соответствующие дробному параметру γ , лежат между кривыми в двух предельных случаях, когда $\gamma = 0$ (упругий случай) и $\gamma = 1$ (обычная вязкость). Данное утверждение будет подтверждено ниже численными исследованиями и соответствующими графиками, представленными в параграфе 2.4.

2.3. Центральное соударение двух различных вязкоупругих оболочек, свойства которых описываются моделью стандартного линейного тела

2.3.1. Постановка задачи и определяющие уравнения

Далее рассмотрим соударение двух вязкоупругих оболочек, вязкоупругие свойства которых описываются моделью стандартного линейного твердого тела с обычными целыми производными. В процессе удара происходит разрушение поперечных межмолекулярных связей в пределах контактной области сталкивающихся тел, что приводит к более свободным перемещениям молекул по отношению друг к другу и, наконец, к снижению вязкости материала оболочки в зоне контакта. Это обстоятельство позволяет описать поведение материалов сталкивающихся сферических оболочек внутри контактной области при помощи модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными, так как изменение параметра дробности (порядка дробной производной) позволяет

регулировать вязкость материалов оболочек. Поэтому параметр дробности можно рассматривать в качестве структурного параметра.

При изучении ударных взаимодействий вязкоупругих тел необходимо использовать обобщенный закон Герца [115], в котором упругие модули и коэффициенты Пуассона соударяющихся тел являются зависящими от времени операторами. В этом случае оператор жесткости при ударном взаимодействии \tilde{k} принимает вид [119]

$$\tilde{k} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{R'}}{(1 - \tilde{v}_1^2) \tilde{E}_1^{-1} + (1 - \tilde{v}_2^2) \tilde{E}_2^{-1}}. \quad (2.100)$$

Для того чтобы найти оператор \tilde{k} , сначала необходимо вычислить оператор $(1 - \tilde{v}^2) \tilde{E}^{-1}$ (здесь нижние индексы $i = 1, 2$, указывающие на номер оболочки, опущены), который может быть представлен в виде

$$\frac{1 - \tilde{v}^2}{\tilde{E}} = \frac{1 - v_\infty^2}{E_\infty} \left[1 + n_1 \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_1^\gamma) + n_2 \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_2^\gamma) \right], \quad (2.101)$$

где n_1, n_2, τ_1^γ и τ_2^γ - неизвестные величины.

Перемножив левые и правые части операторов (2.94) и (2.101) и учитывая, что $(1 - \tilde{v}^2) \tilde{E}^{-1} \cdot (1 - \tilde{v}^2)^{-1} \tilde{E} = 1$, получим

$$1 = \left[1 + n_1 \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_1^\gamma) + n_2 \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_2^\gamma) \right] \left[1 - m_1 \mathfrak{D}_\gamma^* (t_1^\gamma) - m_2 \mathfrak{D}_\gamma^* (t_2^\gamma) \right]. \quad (2.102)$$

Раскрывая скобки в соотношении (2.102) и применяя теорему умножения операторов (2.80), имеем

$$\sum_{i=1}^2 n_i \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_i^\gamma) \left[1 + \sum_{j=1}^2 \frac{m_j t_j^{-\gamma}}{\tau_i^{-\gamma} - t_j^{-\gamma}} \right] - \sum_{j=1}^2 m_j \mathfrak{D}_\gamma^* (t_j^\gamma) \left[1 + \sum_{i=1}^2 \frac{n_i \tau_i^{-\gamma}}{\tau_i^{-\gamma} - t_j^{-\gamma}} \right] = 0. \quad (2.103)$$

Из уравнения (2.103) следует, что

$$1 + \sum_{j=1}^2 \frac{m_j t_j^{-\gamma}}{\tau_i^{-\gamma} - t_j^{-\gamma}} = 0, \quad (2.104)$$

$$1 + \sum_{i=1}^2 \frac{n_i \tau_i^{-\gamma}}{\tau_i^{-\gamma} - t_j^{-\gamma}} = 0, \quad (2.105)$$

Учитывая формулы (2.90) и (2.92), а также выражения для величин m_1 и m_2 из (2.104), получим квадратное уравнение

$$x^2 - (\tau_\varepsilon^{-\gamma} + \tau_\sigma^{-\gamma})x + \tau_\varepsilon^{-\gamma}\tau_\sigma^{-\gamma} = 0, \quad (2.106)$$

где $x = \tau^{-\gamma}$, откуда следует, что

$$x_1 = \tau_1^{-\gamma} = \tau_\varepsilon^{-\gamma}, \quad x_2 = \tau_2^{-\gamma} = \tau_\sigma^{-\gamma}. \quad (2.107)$$

Здесь τ_ε и τ_σ - соответственно времена релаксации и ретардации вязкоупругого оператора \tilde{E} .

Соотношение (2.105) определяет систему двух линейных уравнений:

$$\frac{2(1+\nu_\infty)}{\nu_\varepsilon(1-2\nu_\infty)}n_1 + \frac{2}{3}\frac{1+\nu_\infty}{\nu_\sigma}n_2 = 1, \quad (2.108)$$

$$\frac{2(1-\nu_\infty)}{\nu_\varepsilon(1-2\nu_\infty)}n_1 - \frac{2(1-\nu_\infty)}{\nu_\sigma}n_2 = -1, \quad (2.109)$$

из которых находим n_1 и n_2 :

$$n_1 = \frac{(1-2\nu_\infty)^2\nu_\varepsilon}{4(1-\nu_\infty^2)}, \quad n_2 = \frac{3\nu_\sigma}{4(1-\nu_\infty^2)}. \quad (2.110)$$

Таким образом,

$$\frac{1-\tilde{\nu}_i^2}{\tilde{E}_i} = \frac{1-\nu_{i\infty}^2}{E_{i\infty}} + \frac{(1-2\nu_{i\infty})^2\nu_{i\varepsilon}}{4E_{i\infty}}\mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_{i\varepsilon}^\gamma) + \frac{3\nu_{i\sigma}}{4E_{i\infty}}\mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_{i\sigma}^\gamma), \quad (2.111)$$

где, как и прежде, нижние индексы $i=1$ и 2 указывают, что данные значения относятся к первой и второй оболочкам соответственно, и

$$\nu_{i\varepsilon} = \frac{E_{i\infty} - E_{i0}}{E_{i\infty}}, \quad \nu_{i\sigma} = \frac{E_{i\infty} - E_{i0}}{E_{i0}}.$$

Тогда с учетом соотношений (2.111), оператор, стоящий в знаменателе формулы (2.100), можно записать в виде

$$\frac{1-\tilde{\nu}_1^2}{\tilde{E}_1} + \frac{1-\tilde{\nu}_2^2}{\tilde{E}_2} = \mathfrak{a}_\infty \left[1 + \sum_{i=1}^4 N_i \mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_i^\gamma) \right], \quad (2.112)$$

где

$$\mathbf{a}_\infty = \frac{1 - v_{1\infty}^2}{E_{1\infty}} + \frac{1 - v_{2\infty}^2}{E_{2\infty}}, \quad \tau_1^\gamma = \tau_{1\varepsilon}^\gamma, \quad \tau_2^\gamma = \tau_{1\sigma}^\gamma, \quad \tau_3^\gamma = \tau_{2\varepsilon}^\gamma, \quad \tau_4^\gamma = \tau_{2\sigma}^\gamma,$$

$$N_1 = \frac{(1 - 2v_{1\infty})^2 v_{1\varepsilon}}{4E_{1\infty} \mathbf{a}_\infty}, \quad N_2 = \frac{3v_{1\sigma}}{4E_{1\infty} \mathbf{a}_\infty},$$

$$N_3 = \frac{(1 - 2v_{2\infty})^2 v_{2\varepsilon}}{4E_{2\infty} \mathbf{a}_\infty}, \quad N_4 = \frac{3v_{2\sigma}}{4E_{2\infty} \mathbf{a}_\infty}.$$

Найдем оператор, резольвентный к оператору (2.112), в виде

$$\left(\frac{1 - \tilde{v}_1^2}{\tilde{E}_1} + \frac{1 - \tilde{v}_2^2}{\tilde{E}_2} \right)^{-1} = \mathbf{a}_\infty^{-1} \left[1 - \sum_{j=1}^4 M_j \vartheta_\gamma^* (t_j^\gamma) \right]. \quad (2.113)$$

Аналогичным образом, как это было сделано для трехчленных резольвентных операторов (2.94) и (2.101), можем получить выражения для пятичленных резольвентных операторов (2.112) и (2.113)

$$1 + \sum_{j=1}^4 \frac{M_j t_j^{-\gamma}}{\tau_i^{-\gamma} - t_j^{-\gamma}} = 0, \quad (2.114)$$

$$1 + \sum_{i=1}^4 \frac{N_i \tau_i^{-\gamma}}{\tau_i^{-\gamma} - t_j^{-\gamma}} = 0, \quad (2.115)$$

но в этом случае константы M_j и t_j^γ ($j=1,2,3,4$) являются величинами, подлежащими определению.

Из выражения (2.115) можем найти значения $t_j^{-\gamma}$. Для этого запишем (2.115) в виде

$$1 + \sum_{i=1}^4 \frac{N_i}{1 - x \tau_i^\gamma} = 0, \quad (2.116)$$

где $x = t^{-\gamma}$.

В результате приведения всех слагаемых в выражении (2.116) к общему знаменателю получим

$$x^4 + f_1 x^3 + f_2 x^2 + f_3 x + f_4 = 0, \quad (2.117)$$

где

$$f_4 = \frac{1 + \prod_{i=1}^4 N_i}{\prod_{i=1}^4 \tau_i^\gamma} . \quad (2.118)$$

С помощью одной из формул теоремы Виета, а именно формулы для f_4 , получим

$$f_4 = \prod_{j=1}^4 t_j^{-\gamma} . \quad (2.119)$$

Приравнивая правые части уравнений (2.118) и (2.119) друг к другу, приходим к соотношению

$$\left(\frac{\prod_{i=1}^4 \tau_i}{\prod_{j=1}^4 t_j} \right)^\gamma = 1 + \sum_{i=1}^4 N_i , \quad (2.120)$$

которое является обобщением формулы $\left(\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon} \right)^\gamma = 1 + \nu_\sigma$.

Значения величин M_j ($j = 1, 2, 3, 4$) определяются из системы четырех линейных уравнений (2.114) при условии, что значения $t_j^{-\gamma}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) уже известны.

Если, наоборот, необходимо найти значения $\tau_i^{-\gamma}$, то перепишем уравнение (2.114) в виде

$$1 - \sum_{j=1}^4 \frac{M_j}{1 - yt_j^\gamma} = 0 , \quad (2.121)$$

где $y = \tau^{-\gamma}$.

В результате приведения всех слагаемых в выражении (2.121) к общему знаменателю находим

$$y^4 + l_1 y^3 + l_2 y^2 + l_3 y + l_4 = 0 , \quad (2.122)$$

где

$$l_4 = \frac{1 - \prod_{j=1}^4 M_j}{\prod_{j=1}^4 t_j^\gamma} . \quad (2.123)$$

Используя одну из формул теоремы Виета, а именно формулу для l_4 , получим

$$l_4 = \prod_{i=1}^4 \tau_i^{-\gamma}. \quad (2.124)$$

Приравнивая правые части уравнений (2.123) и (2.124) друг к другу, приходим к соотношению

$$\left(\frac{\prod_{j=1}^4 t_j}{\prod_{i=1}^4 \tau_i} \right)^\gamma = 1 - \sum_{j=1}^4 M_j, \quad (2.125)$$

которое является обобщением формулы $\left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \right)^\gamma = 1 - v_\varepsilon$.

При $\gamma = 0$, как следует из формул (2.120) и (2.125),

$$\sum_{i=1}^4 N_i = \sum_{j=1}^4 M_j = 0. \quad (2.126)$$

С учетом соотношения (2.113) система уравнений, описывающих динамическое поведение вязкоупругих сфер во время их соударения, принимает вид

$$\begin{aligned} \rho_1 \pi R' \alpha h_1 \dot{v}_{z1} - \frac{4 (R')^{1/2}}{3 \mathfrak{a}_\infty} \left[\alpha^{3/2} - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t'}{t_j} \right) \alpha^{3/2} (t-t') dt' \right] = \\ = -2\pi (R')^{1/2} \alpha^{1/2} h_1 \rho_1 \left[\left(G_1^{(1)} - G_2^{(1)} \right) \frac{R'}{2R_1} \dot{\alpha} - \left(G_1^{(1)} \frac{R'}{R_1^2} \alpha + G_2^{(1)} \right) v_{z1} \right], \end{aligned} \quad (2.127)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \pi R' \alpha h_2 \dot{v}_{z2} + \frac{4 (R')^{1/2}}{3 \mathfrak{a}_\infty} \left[\alpha^{3/2} - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t'}{t_j} \right) \alpha^{3/2} (t-t') dt' \right] = \\ = -2\pi (R')^{1/2} \alpha^{1/2} h_2 \rho_2 \left[\left(G_1^{(2)} - G_2^{(2)} \right) \frac{R'}{2R_2} \dot{\alpha} - \left(G_1^{(2)} \frac{R'}{R_2^2} \alpha + G_2^{(2)} \right) v_{z2} \right]. \end{aligned} \quad (2.128)$$

В этом случае замкнутая система трех уравнений (2.127), (2.128) и (2.45) позволяет определить искомые функции v_{z1} , v_{z2} и α .

Поскольку процесс ударного взаимодействия является кратковременным, то функцию $\vartheta_\gamma\left(-\frac{t}{t_1}\right)$ можно аппроксимировать

выражением (2.96). Тогда уравнения (2.127) и (2.128) принимают вид

$$\begin{aligned} \rho_1 \pi R' \alpha h_1 \dot{v}_{z1} - \frac{4 (R')^{1/2}}{3 \mathfrak{a}_\infty} \left[\alpha^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=1}^4 \frac{M_j}{t_j^\gamma} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{\frac{3}{2}}(t') dt' \right] = \\ = 2\pi (R')^{1/2} \alpha^{1/2} h_1 \rho_1 \left[\left(G_1^{(1)} - G_2^{(1)} \right) \frac{R'}{2R_1} \dot{\alpha} - \left(G_1^{(1)} \frac{R'}{R_1^2} \alpha + G_2^{(1)} \right) v_{z1} \right], \end{aligned} \quad (2.129)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \pi R' \alpha h_2 \dot{v}_{z2} + \frac{4 (R')^{1/2}}{3 \mathfrak{a}_\infty} \left[\alpha^{3/2} - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=1}^4 \frac{M_j}{t_j^\gamma} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right] = \\ = 2\pi (R')^{1/2} \alpha^{1/2} h_2 \rho_2 \left[\left(G_1^{(2)} - G_2^{(2)} \right) \frac{R'}{2R_2} \dot{\alpha} - \left(G_1^{(2)} \frac{R'}{R_2^2} \alpha + G_2^{(2)} \right) v_{z2} \right], \end{aligned} \quad (2.130)$$

в то время как уравнение (2.45) остается без изменения.

2.3.2. Анализ процесса соударения двух вязкоупругих сфер

Предположим для простоты, что $a \ll R$. Тогда из формул (2.32) - (2.34) следует, что

$$\bar{v}_z \approx \bar{v}_\xi, \quad \bar{v}_r \approx \bar{v}_\lambda, \quad \bar{\sigma}_{rz} \approx \bar{\sigma}_{\lambda\xi}. \quad (2.131)$$

Так как в процессе удара напряжения сдвига (2.131), которые входят в определяющие уравнения (2.40) и (2.41) с константой k , замененной на зависящий от времени оператор \tilde{k} , играют главную роль, то для описания вязкоупругих свойств оболочек достаточно ограничиться реологическим уравнением

$$\sigma_{\lambda\xi} = \tilde{\mu} \varepsilon_{\lambda\xi}, \quad (2.132)$$

где $\tilde{\mu}$ - оператор сдвига, зависящий от времени,

$$\varepsilon_{\lambda\xi} = \frac{\partial u_\xi}{\partial \lambda}, \quad \dot{\varepsilon}_{\lambda\xi} = \frac{\partial v_\xi}{\partial \lambda}, \quad (2.133)$$

поскольку v_λ не зависит от ξ .

Если использовать модель стандартного линейного твердого тела с обычными производными в качестве модели для описания вязкоупругих свойств соударяющихся сферических оболочек, тогда соотношение (2.133) принимает вид

$$\sigma_{\lambda\xi} = \mu_\infty \left[\varepsilon_{\lambda\xi}(t) - \frac{v_\mu^\varepsilon}{\tau_\mu^\varepsilon} \int_0^t e^{-(t-t')/\tau_\mu^\varepsilon} \varepsilon_{\lambda\xi}(t') dt' \right] = \tilde{\mu} \varepsilon_{\lambda\xi}, \quad (2.134)$$

где $v_\mu^\varepsilon = (\mu_\infty - \mu_0) \mu_\infty^{-1}$, μ_0 и μ_∞ - релаксированный и нерелаксированный модули сдвига соответственно, а τ_μ^ε - время релаксации при сдвиге.

Дифференцируя (2.134) по времени t , получим

$$\dot{\sigma}_{\lambda\xi} = \mu_\infty \left[\dot{\varepsilon}_{\lambda\xi}(t) - \frac{v_\mu^\varepsilon}{\tau_\mu^\varepsilon} \varepsilon_{\lambda\xi}(t) + \frac{v_\mu^\varepsilon}{(\tau_\mu^\varepsilon)^2} \int_0^t e^{-(t-t')/\tau_\mu^\varepsilon} \varepsilon_{\lambda\xi}(t') dt' \right]. \quad (2.135)$$

Исключая $\int_0^t \exp[-(t-t')/\tau_\mu^\varepsilon] \varepsilon_{\lambda\xi}(t') dt'$ из уравнений (2.134) и (2.135) и

учитывая формулу

$$\frac{\mu_0}{\mu_\infty} = \frac{\tau_\mu^\varepsilon}{\tau_\mu^\sigma}, \quad (2.136)$$

где τ_μ^σ - время ретардации при сдвиге, находим

$$\sigma_{\lambda\xi} + \tau_\mu^\varepsilon \dot{\sigma}_{\lambda\xi} = \mu_0 (\varepsilon_{\lambda\xi} + \tau_\mu^\sigma \dot{\varepsilon}_{\lambda\xi}). \quad (2.137)$$

Выразив величину $\sigma_{\lambda\xi}$ из (2.137), имеем

$$\sigma_{\lambda\xi} = \mu_0 \frac{1 + \tau_\mu^\sigma \frac{d}{dt}}{1 + \tau_\mu^\varepsilon \frac{d}{dt}} \varepsilon_{\lambda\xi},$$

или с учетом формулы (2.136)

$$\sigma_{\lambda\xi} = \mu_{\infty} \frac{\mu_0 \mu_{\infty}^{-1} + \tau_{\mu}^{\varepsilon} \frac{d}{dt}}{1 + \tau_{\mu}^{\varepsilon} \frac{d}{dt}} \varepsilon_{\lambda\xi} . \quad (2.138)$$

Прибавим и вычтем единицу в числителе выражения (2.138) и разделим полученное выражение почленно на знаменатель. В результате находим

$$\sigma_{\lambda\xi} = \mu_{\infty} \left(1 - \nu_{\mu}^{\varepsilon} \frac{1}{1 + \tau_{\mu}^{\varepsilon} \frac{d}{dt}} \right) \varepsilon_{\lambda\xi} . \quad (2.139)$$

Сравнивая (2.134) и (2.138), получаем

$$\frac{1}{1 + \tau_{\mu}^{\varepsilon} \frac{d}{dt}} \varepsilon_{\lambda\xi}(t) = \frac{1}{\tau_{\mu}^{\varepsilon}} \int_0^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau_{\mu}^{\varepsilon}}} \varepsilon_{\lambda\xi}(t') dt' . \quad (2.140)$$

Введем в рассмотрение оператор

$$\mathfrak{D}_1^* (\tau_{\mu}^{\varepsilon}) = \frac{1}{1 + \tau_{\mu}^{\varepsilon} \frac{d}{dt}} , \quad (2.141)$$

и перепишем соотношения (2.140) и (2.139) соответственно как

$$\mathfrak{D}_1^* (\tau_{\mu}^{\varepsilon}) \varepsilon_{\lambda\xi}(t) = \frac{1}{\tau_{\mu}^{\varepsilon}} \int_0^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau_{\mu}^{\varepsilon}}} \varepsilon_{\lambda\xi}(t') dt'$$

и

$$\sigma_{\lambda\xi}(t) = \mu_{\infty} \left[1 - \nu_{\mu}^{\varepsilon} \mathfrak{D}_1^* (\tau_{\mu}^{\varepsilon}) \right] \varepsilon_{\lambda\xi}(t) . \quad (2.142)$$

Теперь можем найти $\varepsilon_{\lambda\xi}$ из уравнения (2.137)

$$\varepsilon_{\lambda\xi} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1 + \tau_{\mu}^{\varepsilon} \frac{d}{dt}}{1 + \tau_{\mu}^{\sigma} \frac{d}{dt}} \sigma_{\lambda\xi} ,$$

или с учетом соотношения (2.136)

$$\varepsilon_{\lambda\xi} = \frac{1}{\mu_\infty} \frac{\mu_0 \mu_\infty^{-1} + \tau_\mu^\sigma \frac{d}{dt}}{1 + \tau_\mu^\sigma \frac{d}{dt}} \sigma_{\lambda\xi}. \quad (2.143)$$

Прибавим и вычтем единицу в числителе уравнения (2.143) и разделим полученное выражение почленно на знаменатель. В результате получим

$$\varepsilon_{\lambda\xi} = \frac{1}{\mu_\infty} \left(1 + \nu_\mu^\sigma \frac{1}{1 + \tau_\mu^\sigma \frac{d}{dt}} \right) \sigma_{\lambda\xi}, \quad (2.144)$$

где $\nu_\mu^\varepsilon = (\mu_\infty - \mu_0) \mu_0^{-1}$.

Введя в рассмотрение оператор

$$\mathfrak{D}_1^* (\tau_\mu^\sigma) = \left(1 + \tau_\mu^\sigma \frac{d}{dt} \right)^{-1}, \quad (2.145)$$

можем переписать соотношение (2.144) в виде

$$\varepsilon_{\lambda\xi}(t) = \frac{1}{\mu_\infty} \left[1 + \nu_\mu^\sigma \mathfrak{D}_1^* (\tau_\mu^\sigma) \right] \sigma_{\lambda\xi}(t). \quad (2.146)$$

Для операторов $\mathfrak{D}_1^* (\tau_\mu^\varepsilon)$ и $\mathfrak{D}_1^* (\tau_\mu^\sigma)$ можно доказать теорему умножения, которая записывается в виде

$$\mathfrak{D}_1^* (\tau_\mu^\varepsilon) \mathfrak{D}_1^* (\tau_\mu^\sigma) = \frac{\tau_\mu^\varepsilon \mathfrak{D}_1^* (\tau_\mu^\varepsilon) - \tau_\mu^\sigma \mathfrak{D}_1^* (\tau_\mu^\sigma)}{\tau_\mu^\varepsilon - \tau_\mu^\sigma}. \quad (2.147)$$

Действительно

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1^* (\tau_\mu^\varepsilon) \mathfrak{D}_1^* (\tau_\mu^\sigma) &= \frac{1}{\left(1 + \tau_\mu^\varepsilon \frac{d}{dt} \right) \left(1 + \tau_\mu^\sigma \frac{d}{dt} \right)} = \\ &= \frac{A_1}{1 + \tau_\mu^\varepsilon \frac{d}{dt}} + \frac{B_1}{1 + \tau_\mu^\sigma \frac{d}{dt}} = A_1 \mathfrak{D}_1^* (\tau_\mu^\varepsilon) + B_1 \mathfrak{D}_1^* (\tau_\mu^\sigma), \end{aligned}$$

где

$$A_1 = \frac{\tau_\mu^\varepsilon}{\tau_\mu^\varepsilon - \tau_\mu^\sigma}, \quad B_1 = \frac{\tau_\mu^\sigma}{\tau_\mu^\varepsilon - \tau_\mu^\sigma}.$$

Таким образом, согласно выражениям (2.142) и (2.146), операторы $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\mu}^{-1}$ принимают вид

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} &= \mu_{\infty} \left[1 - \nu_{\mu}^{\varepsilon} \mathfrak{D}_1^* \left(\tau_{\mu}^{\varepsilon} \right) \right], \\ \tilde{\mu}^{-1} &= \frac{1}{\mu_{\infty}} \left[1 + \nu_{\mu}^{\sigma} \mathfrak{D}_1^* \left(\tau_{\mu}^{\sigma} \right) \right].\end{aligned}\quad (2.148)$$

Используя соотношения (2.148), а также принимая во внимание, что согласно экспериментальным данным оператор объемного сжатия-расширения $\tilde{K} = K_{\infty}$ [24,25], можно вычислить оператор \tilde{E} , используя следующую формулу:

$$\tilde{E} = \frac{9K_{\infty}\tilde{\mu}}{3K_{\infty} + \tilde{\mu}}. \quad (2.149)$$

Сначала запишем оператор

$$3K_{\infty} + \tilde{\mu} = (3K_{\infty} + \mu_{\infty}) \left[1 - M_{\varepsilon} \mathfrak{D}_1^* \left(\tau_{\mu}^{\varepsilon} \right) \right], \quad (2.150)$$

где $M_{\varepsilon} = \mu_{\infty} \nu_{\mu}^{\varepsilon} (3K_{\infty} + \mu_{\infty})^{-1}$.

Затем найдем оператор $(3K_{\infty} + \mu_{\infty})^{-1}$, используя следующее свойство операторов:

$$(3K_{\infty} + \mu_{\infty})(3K_{\infty} + \mu_{\infty})^{-1} = 1$$

а также формулу (2.150) и теорему умножения операторов (2.147). В результате получим

$$(3K_{\infty} + \mu_{\infty})^{-1} = \frac{1}{3K_{\infty} + \mu_{\infty}} \left[1 + M_{\sigma} \mathfrak{D}_1^* \left(t_{\sigma} \right) \right], \quad (2.151)$$

где

$$M_{\sigma} = \frac{M_{\varepsilon}}{1 - M_{\varepsilon}}, \quad t_{\sigma} = \frac{\tau_{\mu}^{\varepsilon}}{1 - M_{\varepsilon}}, \quad \frac{t_{\sigma}}{\tau_{\mu}^{\varepsilon}} = \frac{M_{\sigma}}{M_{\varepsilon}}.$$

Наконец, переходим к определению оператора \tilde{E} . Для этого подставим операторы (2.148) и (2.151) в формулу (2.149)

$$\tilde{E} = E_{\infty} \left[1 - \nu_{\mu}^{\varepsilon} \mathfrak{D}_1^* \left(\tau_{\mu}^{\varepsilon} \right) \right] \left[1 + M_{\sigma} \mathfrak{D}_1^* \left(t_{\sigma} \right) \right], \quad (2.152)$$

где $E_\infty = 9K_\infty\mu_\infty(3K_\infty + \mu_\infty)^{-1}$.

Умножая почленно операторы, входящие в (2.152), и применяя теорему умножения операторов (2.147), имеем

$$\tilde{E} = E_\infty \left[1 - \nu_\varepsilon \mathfrak{D}_1^* (\tau_\varepsilon) \right], \quad (2.153)$$

где $\nu_\varepsilon = M_\sigma 3K_\infty\mu_\infty^{-1}$ и $\tau_\varepsilon = t_\sigma$.

Следует отметить, что в результате столкновения двух вязкоупругих сферических оболочек в соударяющихся телах образуются поверхности сильного разрыва в виде расходящихся кругов. Далее будем интерпретировать поверхность сильного разрыва как некоторый ударный слой малой толщины δ , внутри которого напряжение $\sigma_{\lambda\xi}$ и деформация $\varepsilon_{\lambda\xi}$ изменяются монотонно и непрерывно от значений $\sigma_{\lambda\xi}^-$, $\varepsilon_{\lambda\xi}^-$ к значениям $\sigma_{\lambda\xi}^+$, $\varepsilon_{\lambda\xi}^+$.

Предположим, что в момент t передний фронт ударного слоя приходит в точку М на одной из сфер, а в момент $t + \Delta t$, где Δt мало, задний фронт ударного слоя достигает той же точки М. Тогда

$$\sigma_{\lambda\xi}^- = \mu_\infty \left[\varepsilon_{\lambda\xi}^-(t) - \frac{\nu_\mu^\varepsilon}{\tau_\mu^\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau_\mu^\varepsilon}} \varepsilon_{\lambda\xi}(t') dt' \right], \quad (2.154)$$

$$\sigma_{\lambda\xi}^+ = \mu_\infty \left[\varepsilon_{\lambda\xi}^+(t) - \frac{\nu_\mu^\varepsilon}{\tau_\mu^\varepsilon} \int_0^{t+\Delta t} e^{-\frac{(t+\Delta t-t')}{\tau_\mu^\varepsilon}} \varepsilon_{\lambda\xi}(t') dt' \right]. \quad (2.155)$$

Раскладывая интеграл (2.155) в ряд Тейлора по малому параметру Δt и ограничиваясь нулевым и первым приближениями, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{t+\Delta t} e^{-\frac{(t+\Delta t-t')}{\tau_\mu^\varepsilon}} \varepsilon_{\lambda\xi}(t') dt' = \\ & = \int_0^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau_\mu^\varepsilon}} \varepsilon_{\lambda\xi}(t') dt' + \varepsilon_{\lambda\xi}(t) \Delta t - \Delta t \frac{1}{(\tau_\mu^\varepsilon)^2} \int_0^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau_\mu^\varepsilon}} \varepsilon_{\lambda\xi}(t') dt'. \end{aligned} \quad (2.156)$$

Вычитая уравнение (2.154) из уравнения (2.155) с учетом выражения (2.156) и устремляя Δt к нулю, находим

$$[\sigma_{\lambda\xi}] = \mu_{\infty} [\varepsilon_{\lambda\xi}]. \quad (2.157)$$

Используя условие совместности [Rossi]

$$\left[\frac{\partial u_{\xi}}{\partial \lambda} \right] = -G^{-1} [v_{\xi}], \quad (2.158)$$

выражение (2.157) можно записать в виде

$$[\sigma_{\lambda\xi}] = -\mu_{\infty} G^{-1} [v_{\xi}]. \quad (2.159)$$

Добавив динамическое условие совместности [116]

$$[\sigma_{\lambda\xi}] = -\rho G [v_{\xi}] \quad (2.160)$$

к соотношению (2.159), получим

$$G_{2\infty} = \sqrt{\frac{\mu_{\infty}}{\rho}}. \quad (2.161)$$

Учитывая выражение (2.161), соотношение (2.159) можно записать в виде

$$[\sigma_{\lambda\xi}] = -\rho G_{2\infty} [v_{\xi}]. \quad (2.162)$$

Ограничиваясь первым членом лучевого ряда для $\sigma_{\lambda\xi}$, получим

$$\sigma_{\lambda\xi} = -\rho G_{2\infty} v_{\xi}, \quad (2.163)$$

и тогда в разрешающих уравнениях (2.40) и (2.41) можно использовать значения $-\rho G_{2\infty}^{(1)} v_{\xi 1}$ и $-\rho G_{2\infty}^{(2)} v_{\xi 2}$ вместо σ_{rz1} и σ_{rz2} соответственно.

Следует отметить, что внутри контактной области двух сферических оболочек вязкость их материалов может изменяться в результате ударного взаимодействия этих оболочек, что приводит к разрушению поперечных связей длинных молекул и, наконец, к снижению вязкости в зоне контакта [116].

Снижение вязкости внутри контактной области может быть учтено, если операторы $\tilde{\mu}$ и \tilde{E} выбираются в виде

$$\tilde{\mu} = \mu_{\infty} \left\{ 1 - \nu_{\mu}^{\varepsilon} \mathfrak{D}_{\gamma}^* \left(\tau_{\mu}^{\varepsilon} \right)^{\gamma} \right\}, \quad (2.164)$$

$$\tilde{E} = E_{\infty} \left[1 - \nu_{\varepsilon} \mathfrak{D}_{\gamma}^* \left(\tau_{\varepsilon}^{\gamma} \right) \right], \quad (2.165)$$

где

$$\left(\frac{\tau_{\varepsilon}}{\tau_{\mu}} \right)^{\gamma} = \frac{M_{\sigma}}{M_{\varepsilon}}.$$

Заметим, что оператор $\mathfrak{D}_{\gamma}^* \left(\tau_i^{\gamma} \right)$ при $\gamma \rightarrow 1$ переходит в оператор $\mathfrak{D}_1^* \left(\tau_i \right)$, в то время как при $\gamma \rightarrow 0$ он переходит в оператор $\delta(t)$, что соответствует упругому материалу,

$$\sigma_{\lambda\xi} = \mu_{\infty} \left(1 - \nu_{\mu}^{\varepsilon} \right) \varepsilon_{\lambda\xi}(t),$$

или

$$\sigma_{\lambda\xi} = \mu \varepsilon_{\lambda\xi}(t),$$

где $\mu = \mu_0 = \mu_{\infty}$.

С учетом этого замечания уравнения (2.127) и (2.128) остаются справедливыми; однако предположение (2.131) позволяет упростить их. Таким образом,

$$\begin{aligned} \pi R' \alpha \dot{v}_{\xi_1} - \frac{4 (R')^{1/2}}{3 \mathfrak{a}_{\infty} \rho_1 h_1} \left[\alpha^{3/2} - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^t \mathfrak{D}_{\gamma} \left(-\frac{t'}{t_j} \right) \alpha^{3/2} (t-t') dt' \right] = \\ = -2\pi (R')^{1/2} \alpha^{1/2} G_{2\infty}^{(1)} v_{\xi_1}, \end{aligned} \quad (2.166)$$

$$\begin{aligned} \pi R' \alpha \dot{v}_{\xi_2} + \frac{4 (R')^{1/2}}{3 \mathfrak{a}_{\infty} \rho_2 h_2} \left[\alpha^{3/2} - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^t \mathfrak{D}_{\gamma} \left(-\frac{t'}{t_j} \right) \alpha^{3/2} (t-t') dt' \right] = \\ = -2\pi (R')^{1/2} \alpha^{1/2} G_{2\infty}^{(2)} v_{\xi_2}, \end{aligned} \quad (2.167)$$

в то время как уравнение (2.45) остается без изменения.

2.4. Приближенные решения и численные исследования

Пренебрегая инерцией контактной области ввиду ее малости в уравнениях (2.166) и (2.167), получим

$$v_{\xi_1} = \mathfrak{a}_1 \left[\alpha - \Delta_\gamma \alpha^{-1/2} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right], \quad (2.168)$$

$$v_{\xi_2} = -\mathfrak{a}_2 \left[\alpha - \Delta_\gamma \alpha^{-1/2} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right], \quad (2.169)$$

где

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{2}{3} \frac{1}{\mathfrak{a}_\infty \rho_1 h_1 G_{2\infty}^{(1)}}, \quad \mathfrak{a}_2 = \frac{2}{3} \frac{1}{\mathfrak{a}_\infty \rho_2 h_2 G_{2\infty}^{(2)}}, \quad \Delta_\gamma = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=1}^4 \frac{M_j}{t_j^\gamma}.$$

Подставляя соотношения (2.168) и (2.169) в уравнение (2.45), имеем

$$\dot{\alpha} = V - (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \alpha + (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \Delta_\gamma \alpha^{-1/2} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt'. \quad (2.170)$$

В качестве первого приближения решения уравнения возьмем значение $\alpha \approx Vt$ и подставим его в правую часть уравнения (2.170), в результате получим

$$\dot{\alpha} \approx V - (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) Vt + (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \Delta_\gamma (Vt)^{-1/2} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} (Vt)^{3/2} dt'. \quad (2.171)$$

Если $\gamma = 0$, то

$$\dot{\alpha} \approx V - (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) Vt + (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \sum_{j=1}^4 M_j Vt, \quad (2.172)$$

поскольку

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} (t-t')^{\gamma-1} = \delta(t-t').$$

Но так как при $\gamma = 0$

$$\sum_{j=1}^4 M_j = 0,$$

тогда

$$\alpha \approx Vt - \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)Vt^2 . \quad (2.173)$$

Из соотношения (2.173) легко находится время контакта

$$t_{cont}^0 \approx 2(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^{-1} , \quad (2.174)$$

а также максимальное значение смятия

$$\alpha_{max}^0 \approx \frac{1}{2}V(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^{-1} , \quad (2.175)$$

которое достигается в момент времени

$$t_{max}^0 \approx (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^{-1} . \quad (2.176)$$

Если $\gamma = 1$, то

$$\dot{\alpha} \approx V - (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)Vt + \frac{2}{5}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)\Delta Vt^2 , \quad (2.177)$$

и

$$\alpha \approx Vt - \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)Vt^2 + \frac{2}{15}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)\Delta Vt^3 , \quad (2.178)$$

где $\Delta = \sum_{j=1}^4 M_j t_j^{-1}$.

В этом случае время контакта t_{cont}^1 можно определить следующим образом:

$$t_{cont}^1 \approx t_{cont}^0 + \varepsilon_1 , \quad (2.179)$$

где ε_1 - малая величина.

Подставляя (2.179) в уравнение

$$1 - \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)t + \frac{2}{15}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)\Delta t^2 = 0,$$

получим

$$1 - \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)t_{cont}^0 - \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)\varepsilon_1 + \frac{2}{15}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)\Delta (t_{cont}^0)^2 = 0, \quad (2.180)$$

откуда следует, что

$$\varepsilon_1 \approx \frac{4}{15} \Delta(t_{cont}^0)^2. \quad (2.181)$$

Принимая во внимание (2.174) и (2.181), соотношение для t_{cont}^1 (2.179) можно переписать в виде

$$t_{cont}^1 \approx t_{cont}^0 \left[1 + \frac{2}{15} (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \Delta(t_{cont}^0)^2 \right]. \quad (2.182)$$

Для того чтобы найти t_{max}^1 , необходимо приравнять $\dot{\alpha}$ к нулю, т.е.

$$\dot{\alpha} \approx V \left[1 - (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) t_{max}^1 + \frac{2}{5} (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \Delta(t_{max}^1)^2 \right] = 0. \quad (2.183)$$

Предположим, что

$$t_{max}^1 \approx t_{max}^0 + \varepsilon_2, \quad (2.184)$$

где ε_2 - малая величина.

Подставляя (2.184) в (2.183), получим

$$1 - (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) t_{max}^0 - (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \varepsilon_2 + \frac{2}{5} (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \Delta(t_{max}^0)^2 = 0, \quad (2.185)$$

откуда следует, что

$$\varepsilon_2 \approx \frac{2}{5} \Delta(t_{max}^0)^2. \quad (2.186)$$

С учетом (2.174) и (2.186), соотношение для t_{max}^1 записывается в виде

$$t_{max}^1 \approx t_{max}^0 \left[1 + \frac{4}{5} (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \Delta(t_{max}^0)^2 \right]. \quad (2.187)$$

Тогда выражение для α_{max}^1 можно записать следующим образом:

$$\alpha_{max}^1 \approx \alpha_{max}^0 + \frac{2}{15} (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \Delta(t_{max}^0)^3. \quad (2.188)$$

Из выражений (2.182), (2.187) и (2.188) видно, что увеличение вязкости материалов сферических оболочек приводит к увеличению величин t_{cont} , t_{max} и α_{max} .

При других значениях параметра дробности $0 < \gamma < 1$ величина $\alpha(t)$ может быть найдена численным методом.

Для того чтобы оценить влияние сил инерции на процесс соударения двух вязкоупругих сфер, вычислим разность двух уравнений (2.167) и (2.166) и при этом учтем формулы (2.45) и (2.96). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{R'}}{2G_{2\infty}} \alpha^{1/2} \ddot{\alpha} + (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \left[\alpha - \Delta_\gamma \alpha^{-1/2} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right] = \\ = -(\dot{\alpha} - V), \end{aligned} \quad (2.189)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = V - (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \alpha + \\ + (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \Delta_\gamma \alpha^{-1/2} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' - \frac{\sqrt{R'}}{2G_{2\infty}} \alpha^{1/2} \ddot{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.190)$$

Если принять

$$\alpha \approx Vt \quad (2.191)$$

в качестве первого приближения, то уравнение (2.190) с учетом

$$(t-t')^\gamma = t^\gamma \left(1 - \frac{t'}{t}\right)^\gamma \approx \left(1 - \gamma \frac{t'}{t}\right) t^\gamma \quad (2.192)$$

принимает вид

$$\dot{\alpha} = V - (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) Vt + (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \Delta_\gamma V \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) t^{\gamma+1}. \quad (2.193)$$

Уравнение (2.193) не включает в себя члены, которые появляются, когда учитываются силы инерции соударяющихся сфер, так как при выборе начального приближения в виде (2.191) силы инерции автоматически исчезают. Кроме того, уравнение (2.193) совпадает с уравнением (2.171), если интеграл в его правой части вычисляется с учетом соотношения (2.192). Действительно,

$$\begin{aligned}
V^{3/2} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} (t')^{3/2} dt' &= -\frac{V^{3/2}}{\gamma} \int_0^t (t')^{3/2} d(t-t')^\gamma = \\
&= -\frac{V^{3/2}}{\gamma} \left[(t')^{3/2} (t-t')^\gamma \Big|_0^t - \frac{3}{2} \int_0^t (t-t')^\gamma (t')^{1/2} dt' \right] = \\
&= \frac{3}{2} \frac{V^{3/2}}{\gamma} \int_0^t t'^\gamma \left(1 - \gamma \frac{t'}{t} \right) (t')^{1/2} dt' = 3 \frac{V^{3/2}}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) t^{\gamma+3/2}.
\end{aligned} \tag{2.194}$$

Интегрируя (2.193), получаем

$$\alpha = Vt - \frac{1}{2} (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) Vt^2 + (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \Delta_\gamma V \frac{3}{\gamma(2+\gamma)} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) t^{\gamma+2}. \tag{2.195}$$

Уравнения (2.173) и (2.178) могут быть получены из уравнения (2.195) при $\gamma=0$ и $\gamma=1$ соответственно. Кроме того, соотношение (2.195) подтверждает выводы, которые сделаны для дробных значений γ .

Теперь для того чтобы оценить влияние сил инерции на величину $\alpha(t)$, необходимо принять соотношение (2.195) в качестве второго приближения для $\alpha(t)$, подставляя его в правую часть уравнения (2.190) и ограничиваясь значениями α порядка $t^{3/2}$ и $t^{\gamma+3/2}$. В результате получим

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= V - (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) Vt + \\
&+ \frac{\sqrt{R'} (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)}{2G_{2\infty}} V^{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{3(1+\gamma)}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \Delta_\gamma t^\gamma \right],
\end{aligned} \tag{2.196}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}
\alpha &= Vt \left[1 - \frac{1}{2} (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) t \right] + \\
&+ \frac{\sqrt{R'} (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)}{3G_{2\infty}} V^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{9(1+\gamma)}{2\gamma \left(\frac{3}{2} + \gamma \right)} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \Delta_\gamma t^\gamma \right].
\end{aligned} \tag{2.197}$$

Из уравнения (2.197) видно, что вид выражения для величины α незначительно меняется в связи с учетом сил инерции соударяющихся вязкоупругих сфер. Тем не менее, характер поведения остается неизменным.

Приведем несколько численных примеров, иллюстрирующих аналитические исследования.

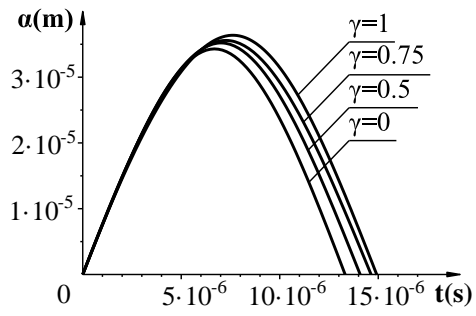
Сначала рассмотрим случай соударения двух одинаковых вязкоупругих сферических оболочек, т.е. двух оболочек с одинаковыми геометрическими размерами и реологическими параметрами: $h_1 = h_2 = 0.05$ м, $v_{1\infty} = v_{2\infty} = 0.25$, $\rho_1 = \rho_2 = 2600$ кг/м³, $E_{10} = E_{20} = 100$ ГПа, $E_{1\infty} = E_{2\infty} = 110$ ГПа, $\tau_1 = \tau_2 = 0.001$ с.

На рис. 2.4 и 2.5 приведены зависимости локального смятия и контактной силы от времени при начальной скорости удара $V_0 = 10$ м/с для случаев, когда радиусы оболочек равны а) $R_1 = R_2 = 1$ м, б) $R_1 = R_2 = 3$ м, в) $R_1 = R_2 = 5$ м, г) $R_1 = R_2 = 7$ м.

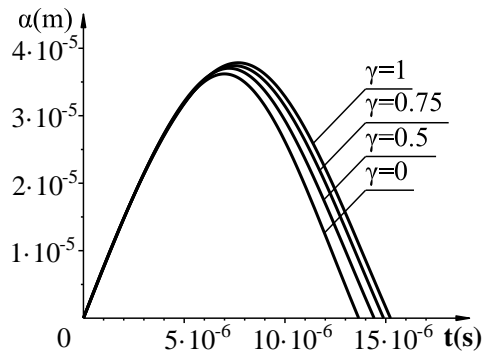
Из рис. 2.4 и 2.5 видно, что с увеличением радиусов оболочек величины локального смятия и максимального значения контактной силы возрастают, при этом время контакта возрастает с увеличением параметра дробности от нуля до единицы. Из рис. 2.4 и 2.5 следует, что чем больше параметр дробности, т.е. чем сильнее проявляются вязкие свойства материалов оболочек в зоне контактного взаимодействия, тем больше максимальное значение смятия и меньше максимум контактной силы.

На рис. 2.6 и 2.7 показаны зависимости локального смятия и контактной силы от времени в случае, когда радиусы оболочек равны $R_1 = R_2 = 1$ м, а начальная скорость удара принимает следующие значения: а) $V_0 = 5$ м/с, б) $V_0 = 10$ м/с, в) $V_0 = 15$ м/с, г) $V_0 = 20$ м/с. Из рис. 2.6 и 2.7 видно, что увеличение начальной скорости удара приводит к возрастанию максимальных значений и локального смятия, и контактной силы.

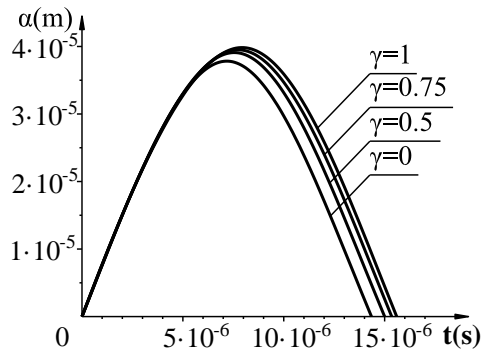
Рисунки 2.4 и 2.6 подтверждают наше замечание о том, что все кривые для локального смятия, соответствующие параметрам дробности $0 < \gamma < 1$, находятся между кривыми, построенными для двух предельных случаев: $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$.



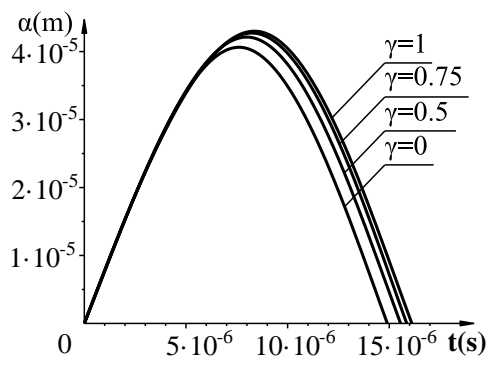
a)



б)

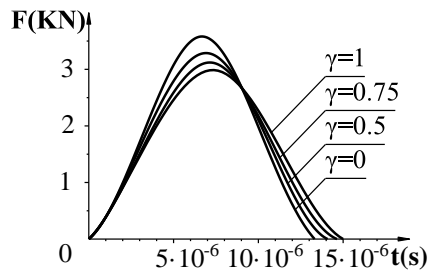


в)

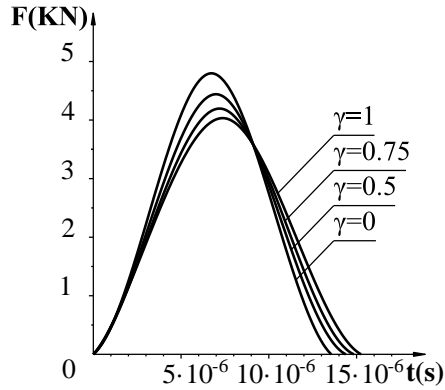


г)

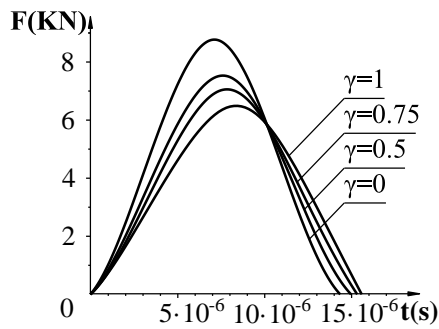
Рис. 2.4. Зависимость локального смятия от времени при начальной скорости удара $V_0 = 10\text{м/с}$ в случае, когда радиусы оболочек а) $R_1 = R_2 = 1\text{м}$, б) $R_1 = R_2 = 3\text{м}$, в) $R_1 = R_2 = 5\text{м}$, г) $R_1 = R_2 = 7\text{м}$



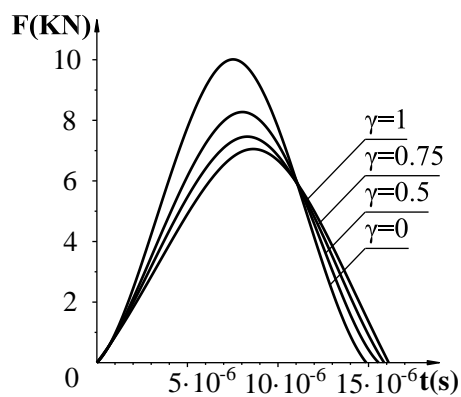
a)



б)

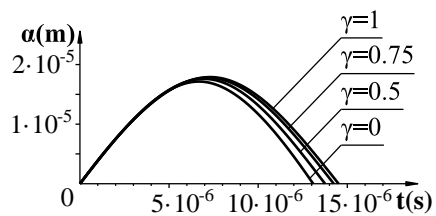


в)

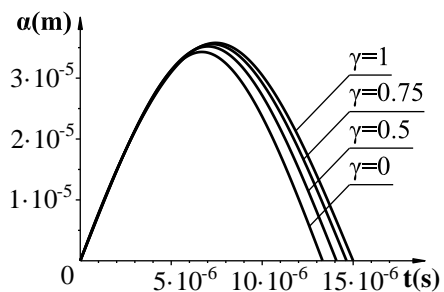


г)

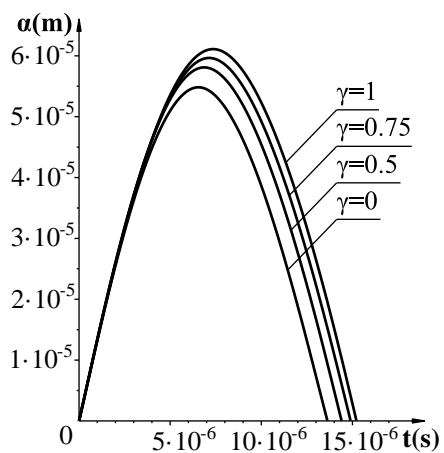
Рис. 2.5. Зависимость контактной силы от времени при начальной скорости удара $V_0 = 10 \text{ м/с}$ в случае, когда радиусы оболочек а) $R_1 = R_2 = 1 \text{ м}$, б) $R_1 = R_2 = 3 \text{ м}$, в) $R_1 = R_2 = 5 \text{ м}$, г) $R_1 = R_2 = 7 \text{ м}$



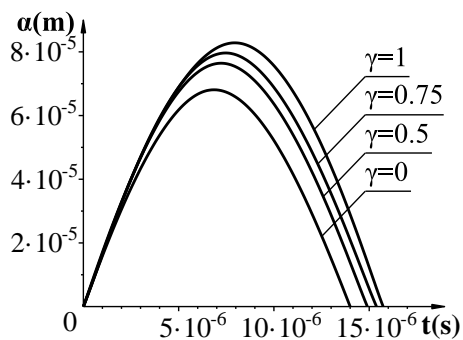
а)



б)

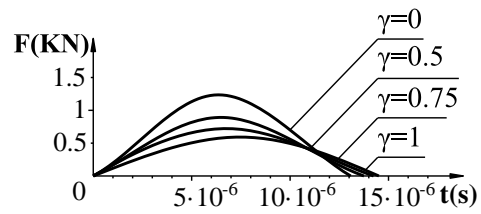


в)

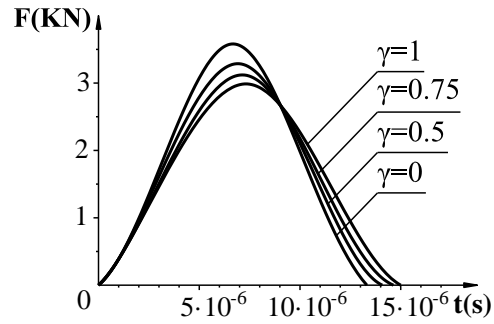


г)

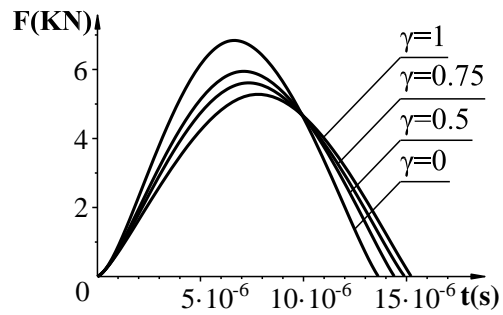
Рис. 2.6. Зависимость локального смятия от времени для радиусов оболочек $R_1 = R_2 = 1$ м при начальных скоростях удара а) $V_0 = 5$ м/с, б) $V_0 = 10$ м/с, в) $V_0 = 15$ м/с, г) $V_0 = 20$ м/с



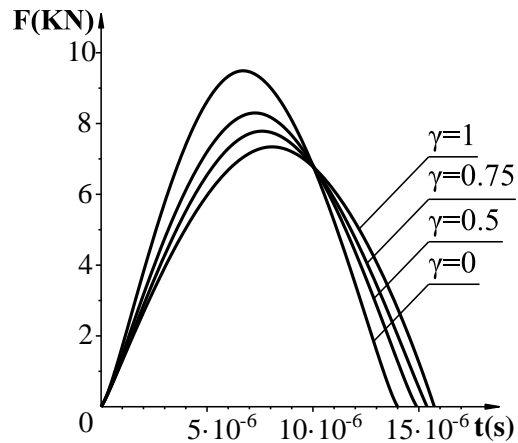
а)



б)



в)

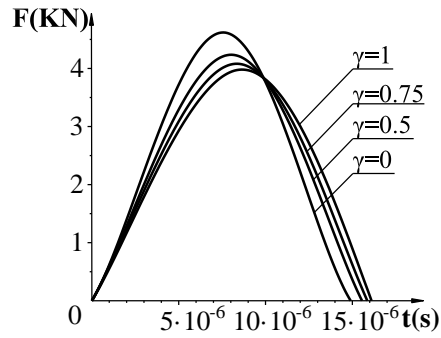
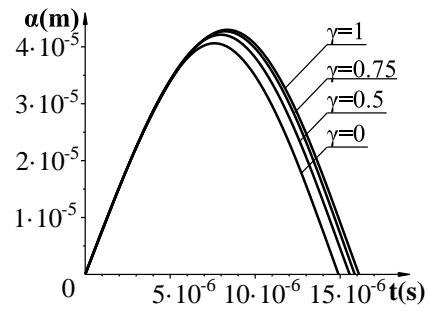


г)

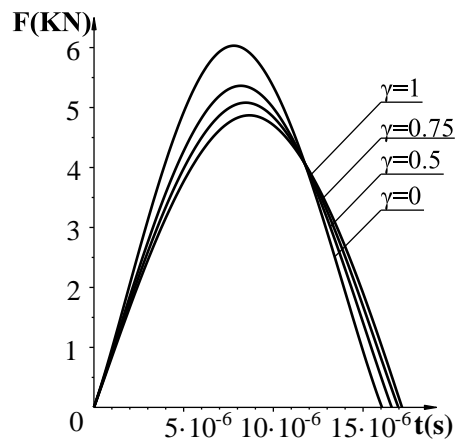
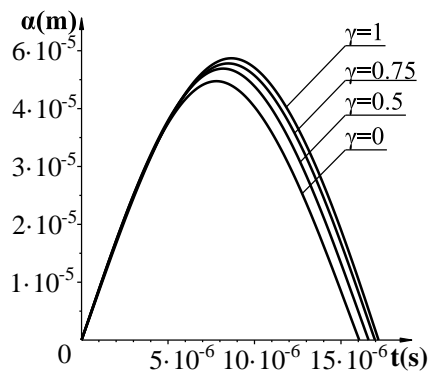
Рис. 2.7. Зависимость контактной силы от времени в случае радиусов оболочек $R_1 = R_2 = 1$ м при начальных скоростях удара а) $V_0 = 5$ м/с, б) $V_0 = 10$ м/с, в) $V_0 = 15$ м/с, г) $V_0 = 20$ м/с

А теперь перейдем к случаю соударения двух вязкоупругих сферических оболочек с различными геометрическими и реологическими параметрами: $h_1 = 0.05$ м, $h_2 = 0.06$ м, $\nu_{1\infty} = 0.25$, $\nu_{2\infty} = 0.3$, $\rho_1 = 2600$ кг/м³, $\rho_2 = 4500$ кг/м³, $E_{10} = 100$ ГПа, $E_{20} = 105$ ГПа, $E_{1\infty} = 110$ ГПа, $E_{2\infty} = 120$ ГПа, $\tau_1 = 0.001$ с, $\tau_3 = 0.002$ с.

На рис. 2.8 приведены зависимости локального смятия и контактной силы от времени для фиксированного значения начальной скорости удара $V_0 = 10$ м/с и разных сочетаний радиусов оболочек: а) $R_1 = 1$ м, $R_2 = 0.7$ м и б) $R_1 = 1.5$ м, $R_2 = 2$ м. А на рис. 2.9 при фиксированных значениях радиусов оболочек $R_1 = 1.5$ м, $R_2 = 2$ м показаны зависимости локального смятия и контактной силы от времени для двух различных значений начальных скоростей удара: а) $V_0 = 10$ м/с, б) $V_0 = 15$ м/с. Из рисунков 2.8 и 2.9 можно сделать аналогичные выводы, что были сделаны выше для оболочек с одинаковыми геометрическими размерами.

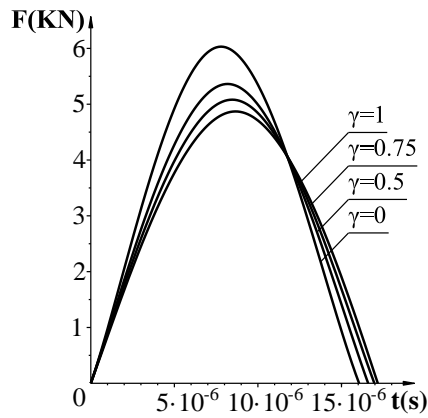
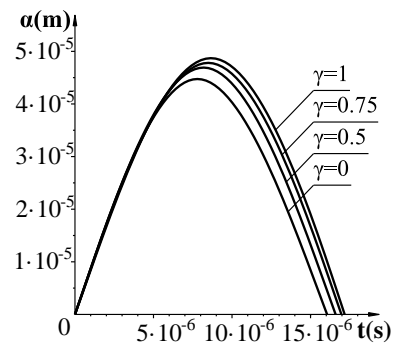


a)

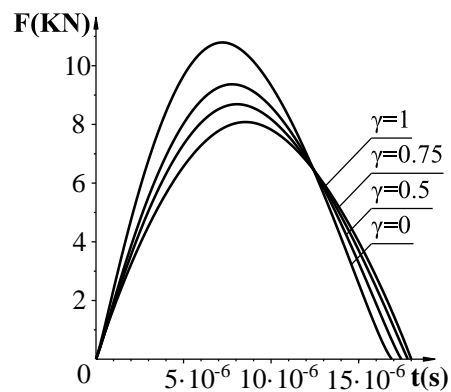
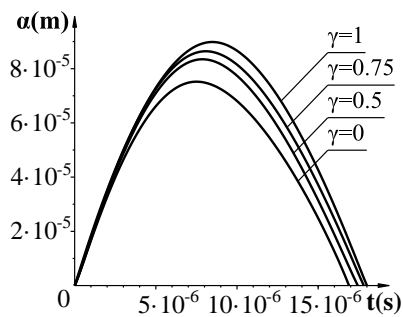


б)

Рис. 2.8. Зависимость локального смятия и контактной силы от времени при начальной скорости удара $V_0 = 10 \text{ м/с}$, когда радиусы оболочек равны: а) $R_1 = 1 \text{ м}$, $R_2 = 0.7 \text{ м}$; б) $R_1 = 1.5 \text{ м}$, $R_2 = 2 \text{ м}$



а)



б)

Рис. 2.9. Зависимость локального смятия и контактной силы от времени для радиусов оболочек $R_1 = 1.5$ м, $R_2 = 2$ м при начальной скорости удара а) $V_0 = 10$ м/с, б) $V_0 = 15$ м/с

2.5. Анализ динамического поведения вязкоупругой пластинки при ударе вязкоупругой сферической оболочкой

Рассмотрим вязкоупругую сферическую оболочку радиусом R , которая падает на вязкоупругую пластинку со скоростью V_0 . Вязкоупругие свойства соударяющихся тел описываются моделью стандартного линейного тела. Плотности пластинки и сферической оболочке - ρ_1 и ρ_2 , толщины h_1 и h_2 соответственно, $E_{\infty i}$ и E_{0i} - нерелаксированные и релаксированные значения модулей Юнга, $\nu_{\infty i}$ - нерелаксированные значения коэффициентов Пуассона материалов оболочки $i=1$ и пластинки $i=2$ соответственно. Удар происходит в момент $t=0$ (рис. 2.10).

В разделе 2.2 было найдено решение для двух одинаковых вязкоупругих сферических оболочек. В данной задаче можно использовать уравнения (2.43) и (2.44), принимая во внимание, что $a^2 = R\alpha$, $R_2 = R$, $R_1 = \infty$ и коэффициент k переходит в оператор \tilde{k} . Тогда получаем следующую систему уравнений:

$$\rho_1 \pi R \alpha h_1 \dot{v}_{z1} = -2\pi R^{1/2} \alpha^{1/2} h_1 \rho_1 G_2^{(1)} v_{z1} + \tilde{k} \alpha^{3/2}, \quad (2.198)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \pi R \alpha h_2 \dot{v}_{z2} = \\ = 2\pi R^{1/2} \alpha^{1/2} h_2 \rho_2 \left[\left(G_1^{(2)} - G_2^{(2)} \right) \frac{\dot{\alpha}}{2} - \left(G_1^{(2)} \frac{\alpha}{R} + G_2^{(2)} \right) v_{z2} \right] - \tilde{k} \alpha^{3/2}, \end{aligned} \quad (2.199)$$

где оператор жесткости в случае удара сферической оболочкой по пластинке имеет вид

$$\tilde{k} = \frac{2\sqrt{R}}{3} \frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\nu}^2}, \quad (2.200)$$

где $\tilde{E}(1 - \tilde{\nu}^2)^{-1}$ - оператор, пропорциональный цилиндрической жесткости, \tilde{E} и $\tilde{\nu}$ - зависящие от времени функции.

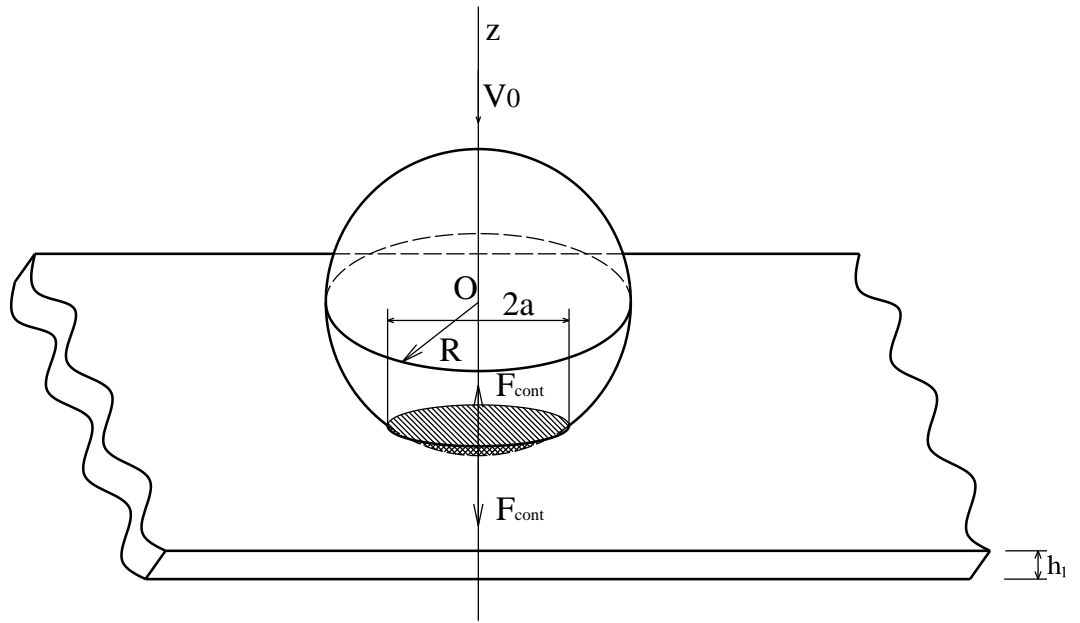


Рис. 2.10. Схема нормального удара сферической оболочки о бесконечную вязкоупругую пластинку

К уравнениям (2.198) и (2.199) необходимо добавить следующее соотношение:

$$v_{z2} - v_{z1} = \dot{\alpha} - V_0, \quad (2.201)$$

Учитывая (2.201), можно записать

$$\dot{v}_{z1} = \frac{dv_{z1}}{d\alpha} \dot{\alpha} = \frac{dv_{z1}}{d\alpha} \left[(v_{z2} - v_{z1}) + V_0 \right], \quad (2.202)$$

$$\dot{v}_{z2} = \frac{dv_{z2}}{d\alpha} \dot{\alpha} = \frac{dv_{z2}}{d\alpha} \left[(v_{z2} - v_{z1}) + V_0 \right], \quad (2.203)$$

Тогда, в силу (2.202) и (2.203), уравнения (2.198) и (2.199) принимают вид

$$\alpha^{1/2} \frac{dv_{z1}}{d\alpha} (v_{z2} - v_{z1} + V_0) = -2\pi R^{1/2} \alpha^{1/2} h_1 \rho_1 G_2^{(1)} v_{z1} + \tilde{k} \alpha^{3/2}, \quad (2.204)$$

$$\begin{aligned}
& \alpha^{1/2} \frac{dv_{z2}}{d\alpha} (v_{z2} - v_{z1} + V_0) = \\
& = 2R^{-1/2} \left[\left(G_1^{(2)} - G_2^{(2)} \right) \frac{1}{2} (v_{z2} - v_{z1} + V_0) - \left(G_1^{(2)} \frac{\alpha}{R} + G_2^{(2)} \right) v_{z2} \right] - \\
& - \frac{\tilde{k}\alpha}{\pi h_2 \rho_2 R'} \quad (2.205)
\end{aligned}$$

Предположим, что сферическая оболочка и пластинка выполнены из одного и того же материала и имеют одинаковую толщину, то есть, $\rho = \rho_1 = \rho_2$, $h = h_1 = h_2$, $G_1 = G_1^{(1)} = G_1^{(2)}$, $G_2 = G_2^{(1)} = G_2^{(2)}$ и $\alpha \ll R$. Тогда, вычитая (2.204) из (2.205), с учетом (2.201) имеем

$$\alpha \ddot{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{R}} (G_1 - 3G_2) \alpha^{1/2} \dot{\alpha} + \frac{2\tilde{k}}{\rho \pi h R} \alpha^{3/2} = \frac{2}{\sqrt{R}} G_2 \alpha^{1/2} V_0. \quad (2.206)$$

Подставляя оператор (2.94) в уравнение (2.206), получим

$$\begin{aligned}
& \alpha \ddot{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{R}} (G_1 - 3G_2) \alpha^{1/2} \dot{\alpha} + \\
& + \frac{\mathfrak{a}}{2} \left[\alpha^{3/2} - m_1 \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t'}{t_1} \right) \alpha^{3/2} (t-t') dt' - m_2 \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t'}{t_2} \right) \alpha^{3/2} (t-t') dt' \right] = \\
& = \frac{2}{\sqrt{R}} G_2 \alpha^{1/2} V_0. \quad (2.207)
\end{aligned}$$

где

$$\mathfrak{a} = \frac{4}{3\rho \pi h \sqrt{R}} \frac{E_\infty}{(1-\nu_\infty^2)} = \frac{4G_1^2}{3\pi h \sqrt{R}}.$$

Далее с учетом (2.96), уравнение (2.207) принимает вид

$$\begin{aligned}
& \alpha \ddot{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{R}} (G_1 - 3G_2) \alpha^{1/2} \dot{\alpha} + \\
& + \frac{\mathfrak{a}}{2} \left[\alpha^{3/2} - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{m_1}{t_1^\gamma} + \frac{m_2}{t_2^\gamma} \right) \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2} (t') dt' \right] = \frac{2}{\sqrt{R}} G_2 \alpha^{1/2} V_0. \quad (2.208)
\end{aligned}$$

Если инерцией контактного пятна пренебречь в уравнениях (2.198) и (2.199), то можно записать (2.208) в виде

$$\dot{\alpha} = \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{2(G_1 - 3G_2)} \left[\alpha - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{m_1}{t_1^\gamma} + \frac{m_2}{t_2^\gamma} \right) \alpha^{-\frac{1}{2}} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{\frac{3}{2}}(t') dt' \right] - \frac{2}{(G_1 - 3G_2)} G_2 V_0. \quad (2.209)$$

Подставляя приближенное значение $\alpha \approx V_0 t$ в правую часть (2.209), получим

$$\dot{\alpha} \approx \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{2(G_1 - 3G_2)} V_0 t - \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{2(G_1 - 3G_2)} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{m_1}{t_1^\gamma} + \frac{m_2}{t_2^\gamma} \right) (V_0 t)^{-1/2} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} (V_0 t)^{\frac{3}{2}}(t') dt' - \frac{2}{(G_1 - 3G_2)} G_2 V_0 \quad (2.210)$$

Если $\gamma = 0$, что соответствует упругому материалу соударяющихся тел, то

$$\dot{\alpha} \approx \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{2(G_1 - 3G_2)} V_0 t - \frac{2}{(G_1 - 3G_2)} G_2 V_0, \quad (2.211)$$

$$\alpha \approx \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{4(G_1 - 3G_2)} V_0 t^2 - \frac{2}{(G_1 - 3G_2)} G_2 V_0 t. \quad (2.212)$$

Тогда

$$t_{cont}^0 \approx \frac{8G_2}{\mathfrak{a}\sqrt{R}}, \quad (2.213)$$

$$t_{max}^0 \approx \frac{4G_2}{\mathfrak{a}\sqrt{R}}, \quad (2.214)$$

$$\alpha_{max}^0 \approx \frac{4G_2^2}{(3G_2 - G_1)\mathfrak{a}\sqrt{R}} V_0. \quad (2.215)$$

Если $\gamma = 1$, что соответствует вязкоупругому материалу с традиционной вязкостью, то

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} \approx & \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{2(G_1 - 3G_2)} V_0 t - \\ & - \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{5(G_1 - 3G_2)} \left(\frac{m_1}{t_1} + \frac{m_2}{t_2} \right) V_0 t^2 - \frac{2}{(G_1 - 3G_2)} G_2 V_0 \end{aligned} \quad (2.216)$$

и

$$\begin{aligned} \alpha \approx & \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{4(G_1 - 3G_2)} V_0 t^2 - \\ & - \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{15(G_1 - 3G_2)} \left(\frac{m_1}{t_1} + \frac{m_2}{t_2} \right) V_0 t^3 - \frac{2}{(G_1 - 3G_2)} G_2 V_0 t . \end{aligned} \quad (2.217)$$

Время контакта в этом случае t_{cont}^1 можно определить следующим образом:

$$t_{cont}^1 \approx t_{cont}^0 + \varepsilon_1 , \quad (2.218)$$

где ε_1 - малая величина.

Подставляя (2.218) в уравнение

$$\frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{4(G_1 - 3G_2)} t - \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{15(G_1 - 3G_2)} \left(\frac{m_1}{t_1} + \frac{m_2}{t_2} \right) t^2 - \frac{2}{(G_1 - 3G_2)} G_2 = 0 ,$$

получаем

$$2G_2 - \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{4} t_{cont}^0 - \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{4} \varepsilon_1 + \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{15} \left(\frac{m_1}{t_1} + \frac{m_2}{t_2} \right) (t_{cont}^0)^2 = 0 , \quad (2.219)$$

откуда следует, что

$$\varepsilon_1 \approx \frac{4}{15} \left(\frac{m_1}{t_1} + \frac{m_2}{t_2} \right) (t_{cont}^0)^2 \quad (2.220)$$

и

$$t_{cont}^1 \approx \frac{8G_2}{\mathfrak{a}\sqrt{R}} \left[1 + \left(\frac{m_1}{t_1} + \frac{m_2}{t_2} \right) \frac{32G_2}{15\mathfrak{a}\sqrt{R}} \right] . \quad (2.221)$$

Подставим

$$t_{max}^1 \approx t_{max}^0 + \varepsilon_2 , \quad (2.222)$$

где ε_2 - малая величина, в уравнение (2.217)

$$\frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{2}t_{max}^0 + \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{2}\varepsilon_2 - \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{5}\left(\frac{m_1}{t_1} + \frac{m_2}{t_2}\right)(t_{max}^0)^2 - 2G_2 = 0,$$

откуда следует, что

$$\varepsilon_2 \approx \frac{2}{5}\Delta(t_{max}^0)^2 \quad (2.223)$$

и

$$t_{max}^1 \approx \frac{4G_2}{\mathfrak{a}\sqrt{R}}\left[1 + \left(\frac{m_1}{t_1} + \frac{m_2}{t_2}\right)\frac{16G_2}{5\mathfrak{a}\sqrt{R}}\right]. \quad (2.224)$$

Тогда α_{max}^1 запишется в виде

$$\alpha_{max}^1 \approx \frac{4G_2^2}{(3G_2 - G_1)\mathfrak{a}\sqrt{R}}V_0 + \frac{64G_2^3}{15(G_1 - 3G_2)\mathfrak{a}^2R}\left(\frac{m_1}{t_1} + \frac{m_2}{t_2}\right)V_0. \quad (2.225)$$

При других значениях параметра дробности, $0 < \gamma < 1$, величина $\alpha(t)$ может быть вычислена по формуле, которая получается путем интегрирования уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = & \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{2(G_1 - 3G_2)}V_0t - \\ & - \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{2(G_1 - 3G_2)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{m_1}{t_1^\gamma} + \frac{m_2}{t_2^\gamma}\right)V_0\frac{3}{\gamma}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma\right)t^{\gamma+1} - \frac{2}{(G_1 - 3G_2)}G_2V_0, \end{aligned} \quad (2.226)$$

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{4(G_1 - 3G_2)}V_0t^2 - \\ & - \frac{\mathfrak{a}\sqrt{R}}{2(G_1 - 3G_2)}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{m_1}{t_1^\gamma} + \frac{m_2}{t_2^\gamma}\right)V_0\frac{3}{\gamma(\gamma+2)}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma\right)t^{\gamma+2} - \\ & - \frac{2}{(G_1 - 3G_2)}G_2V_0t \end{aligned} \quad (2.227)$$

Время контакта t_{cont}^γ может определить следующим образом:

$$t_{cont}^\gamma \approx t_{cont}^0 + \varepsilon, \quad (2.228)$$

где ε - малая величина,

$$\varepsilon \approx \frac{2}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{m_1}{t_1^\gamma} + \frac{m_2}{t_2^\gamma} \right) \frac{3}{\gamma(\gamma+2)} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma \right) (t_{cont}^0)^{\gamma+1} \quad (2.229)$$

Для определения максимального значения локального смятия необходимо сначала найти время, при котором достигается максимум:

$$t_{max}^\gamma \approx t_{max}^0 + \varepsilon_\gamma, \quad (2.230)$$

где

$$\varepsilon_\gamma \approx \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{m_1}{t_1^\gamma} + \frac{m_2}{t_2^\gamma} \right) \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma \right) t^{\gamma+1}, \quad (2.231)$$

$$\alpha_{max}^\gamma \approx \alpha_{max}^0 + \frac{2}{(3G_2 - G_1)} G_2 V_0 \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{m_1}{t_1^\gamma} + \frac{m_2}{t_2^\gamma} \right) \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma \right) t^{\gamma+1} \quad (2.232)$$

Если материалы ударника и мишени обладают различными реологическими характеристиками, тогда оператор жесткости обобщенного закона Герца имеет вид

$$\tilde{k} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{R}}{(1 - \tilde{\nu}_1^2) \tilde{E}_1^{-1} + (1 - \tilde{\nu}_2^2) \tilde{E}_2^{-1}}. \quad (2.233)$$

Тогда уравнения (2.198) и (2.199) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \rho_1 \pi R \alpha h_1 \dot{v}_{z1} - \frac{4}{3} \frac{R^{1/2}}{\mathfrak{a}_\infty} \left[\alpha^{3/2} - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t'}{t_1} \right) \alpha^{3/2} (t - t') dt' \right] = \\ = -2\pi R^{1/2} \alpha^{1/2} h_1 \rho_1 G_2^{(1)} v_{z1}, \end{aligned} \quad (2.234)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \pi R \alpha h_2 \dot{v}_{z2} + \frac{4}{3} \frac{R^{1/2}}{\mathfrak{a}_\infty} \left[\alpha^{3/2} - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t'}{t_1} \right) \alpha^{3/2} (t - t') dt' \right] = \\ = 2\pi R^{1/2} \alpha^{1/2} h_2 \rho_2 \left[(G_1^{(2)} - G_2^{(2)}) \frac{\dot{\alpha}}{2} - \left(G_1^{(2)} \frac{\alpha}{R} + G_2^{(2)} \right) v_{z2} \right], \end{aligned} \quad (2.235)$$

где

$$\mathfrak{a}_\infty = \frac{1 - \nu_{1\infty}^2}{E_{1\infty}} + \frac{1 - \nu_{2\infty}^2}{E_{2\infty}}.$$

Как уже отмечалось выше функцию $\mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t'}{t_1} \right)$ можно заменить более простой функцией помощью соотношения (2.96). Тогда уравнения (2.234) и (2.235) сводятся к уравнениям

$$\begin{aligned} \rho_1 \pi R \alpha h_1 \dot{v}_{z_1} - \frac{4 R^{1/2}}{3 \mathfrak{a}_\infty} \left[\alpha^{3/2} - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=1}^4 \frac{M_j}{t_j^\gamma} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right] = \\ = -2\pi R^{1/2} \alpha^{1/2} h_1 \rho_1 G_2^{(1)} v_{z_1}, \end{aligned} \quad (2.236)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \pi R \alpha h_2 \dot{v}_{z_2} + \frac{4 R^{1/2}}{3 \mathfrak{a}_\infty} \left[\alpha^{3/2} - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=1}^4 \frac{M_j}{t_j^\gamma} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right] = \\ = 2\pi R^{1/2} \alpha^{1/2} h_2 \rho_2 \left[\left(G_1^{(2)} - G_2^{(2)} \right) \frac{\dot{\alpha}}{2} - \left(G_1^{(2)} \frac{\alpha}{R} + G_2^{(2)} \right) v_{z_2} \right]. \end{aligned} \quad (2.237)$$

Чтобы найти приближенное решение поставленной задачи учтем тот факт, что $a \ll R$, в результате получим

$$\begin{aligned} \pi R' \alpha \dot{v}_{z_1} - \frac{4 R^{1/2}}{3 \mathfrak{a}_\infty \rho_1 h_1} \left[\alpha^{3/2} - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t'}{t_1} \right) \alpha^{3/2}(t-t') dt' \right] = \\ = -2\pi R^{1/2} \alpha^{1/2} G_{1\infty}^{(1)} v_{z_1}, \end{aligned} \quad (2.238)$$

$$\begin{aligned} \pi R' \alpha \dot{v}_{z_2} + \frac{4 R^{1/2}}{3 \mathfrak{a}_\infty \rho_2 h_2} \left[\alpha^{3/2} - \sum_{j=1}^4 M_j \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma \left(-\frac{t'}{t_1} \right) \alpha^{3/2}(t-t') dt' \right] = \\ = -2\pi R^{1/2} \alpha^{1/2} G_{2\infty}^{(2)} v_{z_2}, \end{aligned} \quad (2.239)$$

где

$$G_{2\infty} = \sqrt{\frac{\mu_\infty}{\rho}}.$$

Вычисляя разность двух уравнений (2.238) и (2.239) с учетом формул (2.201) и (2.96), находим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = V - (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \alpha + \\ + (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \Delta_\gamma \alpha^{-1/2} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' - \frac{\sqrt{R}}{2G_{2\infty}} \alpha^{1/2} \ddot{\alpha}, \end{aligned} \quad (2.240)$$

где

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{2}{3} \frac{1}{\mathfrak{a}_\infty \rho_1 h_1 G_{2\infty}^{(1)}}, \quad \mathfrak{a}_2 = \frac{2}{3} \frac{1}{\mathfrak{a}_\infty \rho_2 h_2 G_{2\infty}^{(2)}}, \quad \Delta_\gamma = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=1}^4 \frac{M_j}{t_j^\gamma}.$$

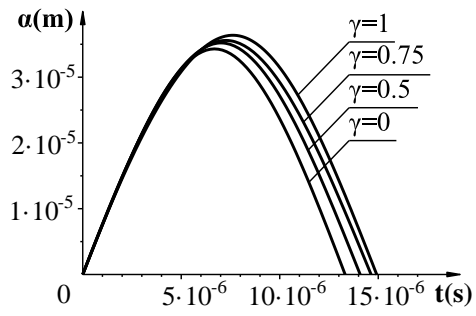
В результате вычислений видно, что уравнения (2.240) и (2.190) совпадают. Тогда из уравнения (2.240) получим

$$\alpha = Vt \left[1 - \frac{1}{2} (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) t \right] + \frac{\sqrt{R} (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)}{3G_{2\infty}} V^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{9(1+\gamma)}{2\gamma \left(\frac{3}{2} + \gamma \right)} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma \right) \Delta_\gamma t^\gamma \right]. \quad (2.241)$$

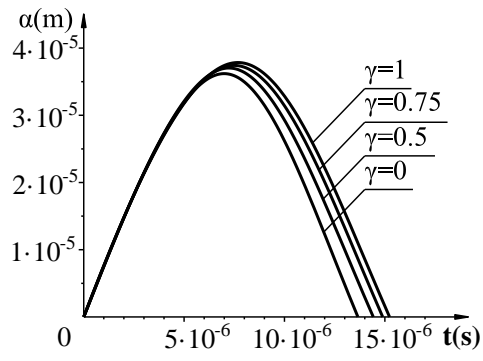
Для иллюстрации полученных формул приведем результаты вычислений при одинаковых значениях параметров материалов ударника и мишени: $h_1 = h_2 = 0.05$ м, $\nu_{1\infty} = \nu_{2\infty} = 0.25$, $\rho_1 = \rho_2 = 2600$ кг/м³, $E_{10} = E_{20} = 100$ ГПа, $E_{1\infty} = E_{2\infty} = 110$ ГПа, $\tau_1 = \tau_3 = 0.001$ с – на рис. 2.11 и 2.12.

А во втором примере рассмотрим соударение сферической оболочки с пластинкой, параметры которых различны (рис. 2.13 и 2.14): $h_1 = 0.05$ м, $h_2 = 0.06$ м, $\nu_{1\infty} = 0.25$, $\nu_{2\infty} = 0.3$, $\rho_1 = 2600$ кг/м³, $\rho_2 = 4500$ кг/м³, $E_{10} = 100$ ГПа, $E_{20} = 105$ ГПа, $E_{1\infty} = 110$ ГПа, $E_{2\infty} = 120$ ГПа, $\tau_1 = 0.001$ с и $\tau_3 = 0.002$ с.

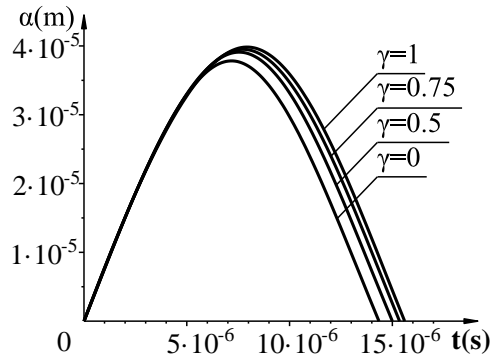
Сравнение временных зависимостей локального смятия и контактной силы в случае соударения двух сферических оболочек и удара сферической оболочки по вязкоупругой пластинке показывает, что механическая система «сферическая оболочка-ударник+пластинка-мишень» является более жесткой, чем механическая система, состоящая из двух контактирующих сферических оболочек. Другими словами, в первом случае время контакта меньше, а значения локального смятия и контактной силы больше, чем в случае ударного взаимодействия двух вязкоупругих сферических оболочек.



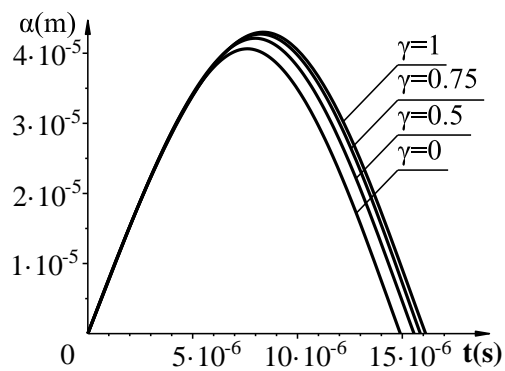
а)



б)



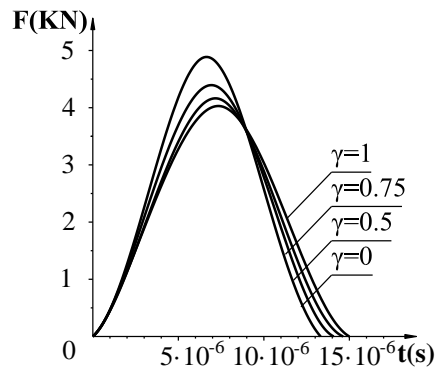
в)



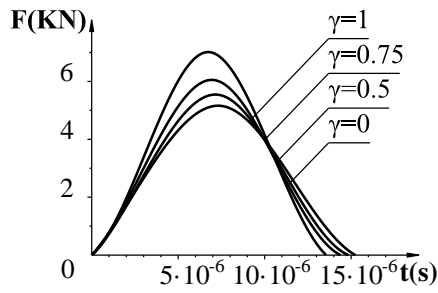
г)

Рис. 2.11. Зависимость локального смятия от времени в случае начальной скорости удара $V_0 = 10\text{м/с}$ и радиуса оболочки

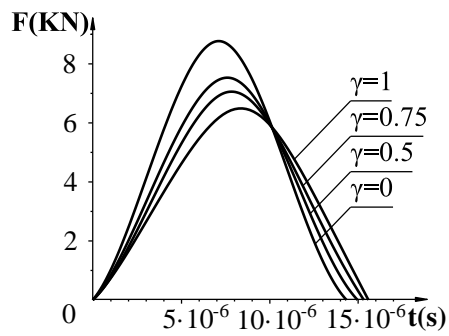
а) $R = 1\text{ м}$, б) $R = 2\text{ м}$, в) $R = 3\text{ м}$, г) $R = 4\text{ м}$



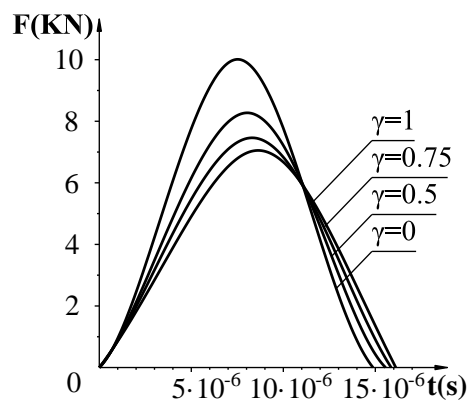
a)



б)

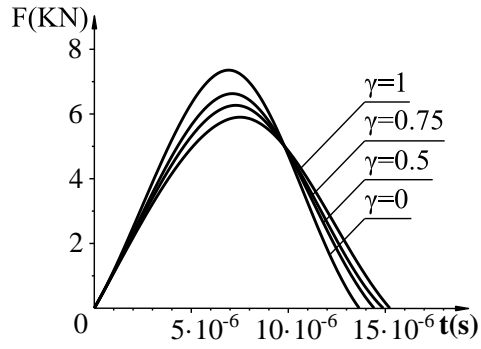
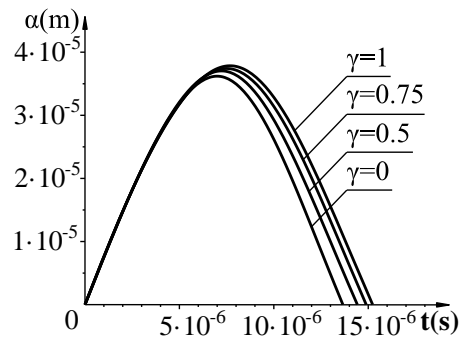


в)

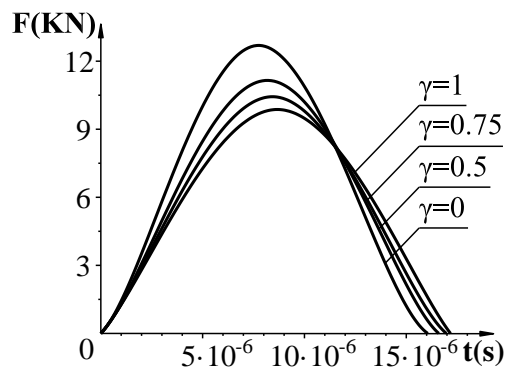
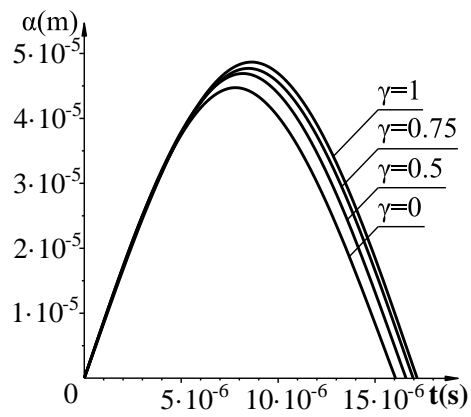


г)

Рис. 2.12. Зависимость контактной силы от времени в случае начальной скорости удара $V_0 = 10\text{м/с}$, радиуса оболочек а) $R = 1\text{ м}$, б) $R = 2\text{ м}$, в) $R = 3\text{ м}$, г) $R = 4$



a)



б)

Рис. 2.13. Зависимость локального смятия и контактной силы от времени в случае радиуса оболочки $R = 1$ м и начальной скорости удара

а) $V_0 = 10$ м/с, б) $V_0 = 15$ м/с

Глава 3. Частные случаи и их численное исследование

В данной главе рассмотрим некоторые частные случаи, которые могут иметь важное практическое значение: удар вязкоупругой сферической оболочки по жесткой пластинке [121] и соударение одной сферической оболочки по другой, находящейся в покое [120], при этом ударяющиеся тела могут обладать различными свойствами.

3.1. Удар вязкоупругой сферической оболочки по жесткой пластинке

Рассмотрим задачу о нормальном ударе вязкоупругой сферической оболочки с начальной скоростью V_0 по жесткой пластинке (рис. 3.1), т.е. пластинке, модуль упругости которой намного больше модуля упругости материала оболочки, когда вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного твердого тела с обычными производными целого порядка.

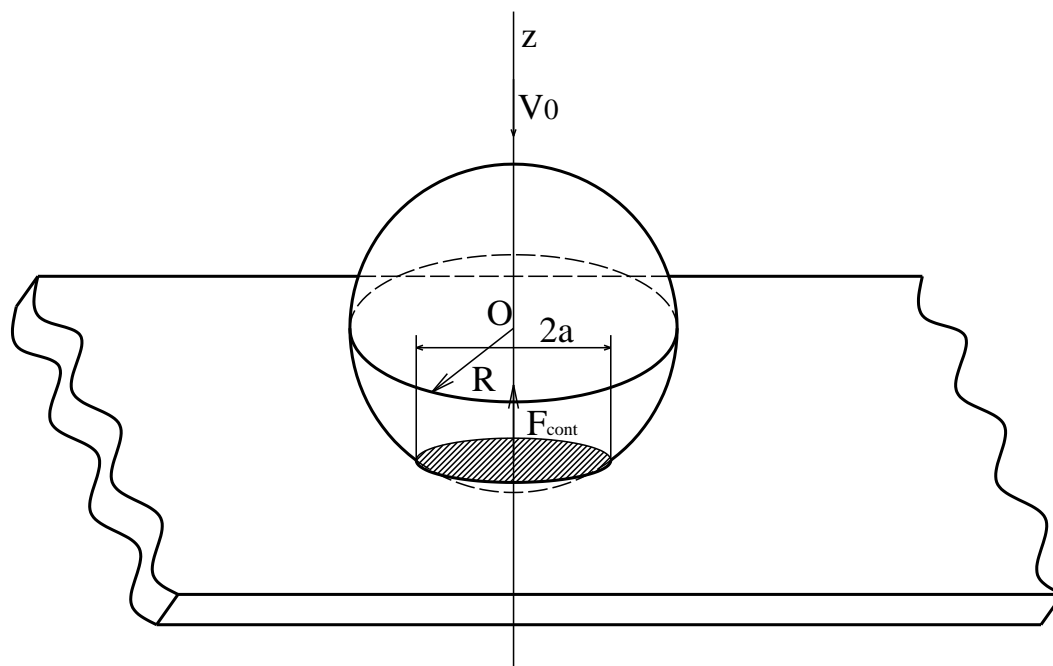


Рис. 3.1. Схема нормального удара вязкоупругой сферической оболочки о бесконечную жесткую пластинку

Для этого будем исходить из уравнений движения двух соударяющихся вязкоупругих сферических оболочек, полученных во второй главе, устремив радиус и модуль упругости второй оболочки к бесконечности. В результате получим следующее уравнение движения контактной области с радиусом a :

$$\rho \pi a^2 h \dot{v}_z = 2 \pi a h \sigma_{rz} \Big|_{r=a} + F_{cont} \quad (3.1)$$

которая движется под действием поперечной силы $2 \pi a h \sigma_{rz} \Big|_{r=a}$ и контактной силы F_{cont} , определяемой с помощью обобщенного контактного закона Герца

$$F_{cont} = \tilde{k} \alpha^{3/2}, \quad (3.2)$$

где α - местное смятие материала оболочки (рис. 3.1), \tilde{k} - оператор, зависящий в данной задаче от радиуса сферической оболочки R и ее вязкоупругих свойств, которые определяются зависящими от времени функциями \tilde{E} и $\tilde{\nu}$,

$$\tilde{k} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{R \tilde{E}}}{(1 - \tilde{\nu}^2)}. \quad (3.3)$$

Следующее уравнение

$$V_0 - v_z \Big|_{r=a} = \dot{\alpha}, \quad (3.4)$$

следует добавить к уравнениям (3.1) и (3.2).

Во второй главе было показано, что с учетом $v_z \Big|_{r=a} = \dot{\alpha}$ величину $\sigma_{rz} \Big|_{r=a}$ (рис. 3.2) можно записать в следующем виде в соответствии с динамическим условием совместности:

$$\sigma_{rz} \Big|_{r=a} = \rho (G_1 - G_2) \frac{(a^2)^{\cdot}}{2R} - \rho \left(G_1 \frac{a^2}{R^2} + G_2 \right) v_z \Big|_{r=a}, \quad (3.5)$$

где G_1 и G_2 - скорости квазипродольной и квазипоперечной волн (поверхностей сильного разрыва) соответственно, которые возникают в момент удара при касании (или контакте) с мишенью, а затем распространяются в виде расходящихся кругов вдоль сферической поверхности и определяются как

$$G_1 = \sqrt{\frac{E_\infty}{\rho(1-\nu_\infty^2)}}, \quad (3.6)$$

$$G_2 = \sqrt{\frac{\mu_\infty}{\rho}}, \quad (3.7)$$

где E_∞ , μ_∞ и ν_∞ - нерелаксированные модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно.

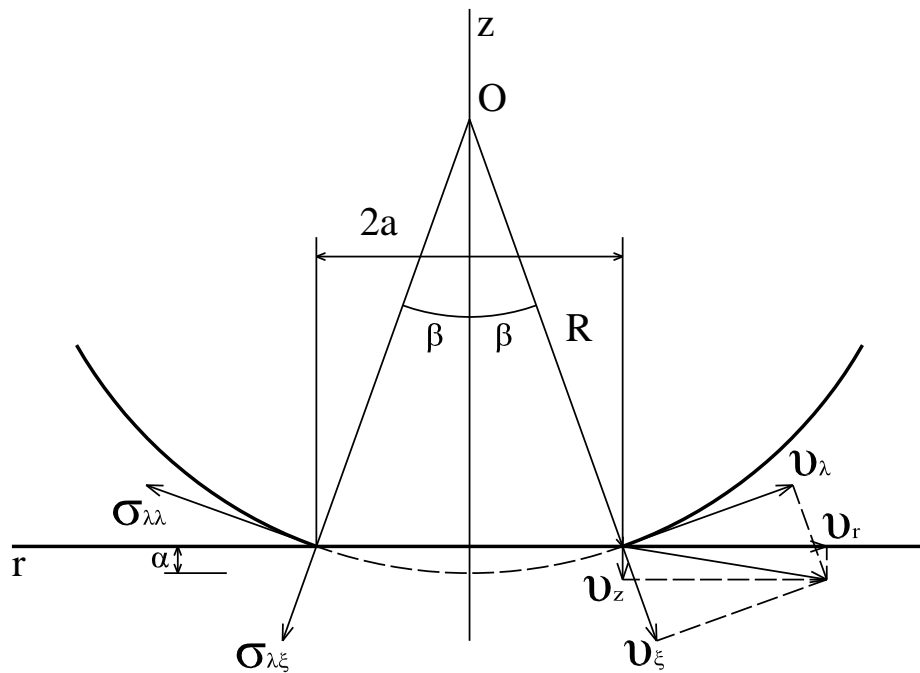


Рис. 3.2. Схема скоростей и напряжений в элементе оболочки на границе контактной области

Учитывая, что $a / R \ll 1$, уравнение (3.5) можно свести к

$$\sigma_{rz}|_{r=a} = -\rho G_2 v_z|_{r=a} . \quad (3.8)$$

Подставляя (3.2) и (3.8) в (3.1) и учитывая, что $a^2 = R\alpha$, получим

$$\rho\pi R\alpha h \dot{v}_z|_{r=a} = -2\pi(R\alpha)^{1/2} h\rho G_2 v_z|_{r=a} + \tilde{k}\alpha^{3/2} . \quad (3.9)$$

Для решения уравнения (3.9) нужно определить оператор \tilde{k} , а для этого надо расшифровать оператор $\tilde{E} / (1 - \tilde{\nu}^2)$.

Следуя Ю.Н. Работнову и основываясь на экспериментальных данных, приведенных в его монографиях [1], будем считать, что объемный модуль упругости K остается постоянным во время процесса механического нагружения, откуда следует, что

$$\frac{\tilde{E}}{1 - 2\tilde{\nu}} = \frac{E_\infty}{1 - 2\nu_\infty} . \quad (3.10)$$

В работе [3] показано, что в процессе удара может произойти разрушение поперечных связей внутри контактной области, что приводит к более свободным перемещениям молекул по отношению друг к другу и, наконец, к снижению вязкости материала оболочки в контактной зоне. Это обстоятельство позволяет описать поведение материала сферической оболочки в контактной области с помощью модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными

$$\sigma + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \sigma = E_0 (\varepsilon + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma \varepsilon) , \quad (3.11)$$

где σ - напряжение, ε - деформация, E_0 - релаксированный модуль упругости, τ_ε и τ_σ - времена релаксации и ретардации соответственно.

Для модели (3.11) справедливо соотношение

$$\frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\nu}^2} = \frac{E_\infty}{1 - \nu_\infty^2} \left[1 - m_1 \mathfrak{D}_\gamma^* (t_1^\gamma) - m_2 \mathfrak{D}_\gamma^* (t_2^\gamma) \right] , \quad (3.12)$$

где $\mathfrak{D}_\gamma^* (t_i^\gamma)$ ($i=1,2$) - безразмерный оператор Работнова [1]

$$\ni_{\gamma}^* (\tau_i^{\gamma}) = \frac{1}{1 + \tau_i^{\gamma} D^{\gamma}},$$

и

$$\begin{aligned} t_1^{\gamma} &= \frac{2(1 + \nu_{\infty})\tau_{\varepsilon}^{\gamma}}{2(1 + \nu_{\infty}) + \nu_{\varepsilon}(1 - 2\nu_{\infty})}, \\ t_2^{\gamma} &= \frac{2(1 - \nu_{\infty})\tau_{\varepsilon}^{\gamma}}{2(1 - \nu_{\infty}) - \nu_{\varepsilon}(1 - 2\nu_{\infty})}, \\ m_1 &= \frac{3}{2} \frac{(1 - \nu_{\infty})\nu_{\varepsilon}}{2(1 + \nu_{\infty}) + \nu_{\varepsilon}(1 - 2\nu_{\infty})}, \\ m_2 &= \frac{3}{2} \frac{(1 + \nu_{\infty})\nu_{\varepsilon}}{2(1 - \nu_{\infty}) - \nu_{\varepsilon}(1 - 2\nu_{\infty})}, \\ \nu_{\varepsilon} &= \frac{E_{\infty} - E_0}{E_{\infty}}. \end{aligned}$$

Уравнение (3.9) с учетом (3.4) и (3.12), а также начальных условий

$$\alpha|_{t=0} = 0, \quad \dot{\alpha}|_{t=0} = V_0, \quad (3.13)$$

сводится к

$$\ddot{\alpha} + \mathfrak{a} \left[\alpha^{\frac{1}{2}}(t) - \Delta_{\gamma} \alpha^{-1} \int_0^t (t - t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right] = 0, \quad (3.14)$$

где

$$\mathfrak{a} = \frac{4E_{\infty}}{3\pi\sqrt{R\rho h}(1 - \nu_{\infty}^2)}, \quad \Delta_{\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{t_j^{\gamma}}.$$

Чтобы найти приближенное решение уравнения (3.14), в качестве первого приближения примем, как и в предыдущих задачах,

$$\alpha \approx V_0 t. \quad (3.15)$$

Тогда уравнение (3.14) с учетом

$$\int_0^t (t - t')^{\gamma-1} t'^{3/2} dt' = \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) t^{3/2+\gamma} \quad (3.16)$$

принимает вид

$$\ddot{\alpha} = -\mathfrak{a}V_0^{\frac{1}{2}} \left[t^{\frac{1}{2}} - \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma \right) t^{\frac{1}{2}+\gamma} \right]. \quad (3.17)$$

В результате интегрирования (3.14) получим

$$\dot{\alpha} = V_0 - \frac{2}{3} \mathfrak{a}V_0^{1/2} t^{3/2} + \mathfrak{a}V_0^{1/2} \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma \right) \frac{t^{3/2+\gamma}}{(3/2+\gamma)} \quad (3.18)$$

и

$$\alpha = V_0 t - \frac{4}{15} \mathfrak{a}V_0^{1/2} t^{5/2} + \mathfrak{a}V_0^{1/2} \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma \right) \frac{t^{5/2+\gamma}}{(3/2+\gamma)(5/2+\gamma)}. \quad (3.19)$$

В частном случае, когда $\gamma = 0$, и следовательно,

$$\sum_{j=1}^2 m_j = 0,$$

соотношения (3.15) и (3.19) принимают вид

$$\dot{\alpha} = V_0 \left(1 - \frac{2}{3} \mathfrak{a}V_0^{-1/2} t^{3/2} \right), \quad (3.20)$$

$$\alpha = V_0 t \left(1 - \frac{4}{15} \mathfrak{a}V_0^{-1/2} t^{3/2} \right), \quad (3.21)$$

откуда можно найти время контакта $t_{cont}^{(0)}$ и время $t_{max}^{(0)}$, при котором происходит максимальное местное смятие $\alpha_{max}^{(0)}$:

$$t_{cont}^{(0)} \approx \left(\frac{15 V_0^{1/2}}{4 \mathfrak{a}} \right)^{2/3}, \quad (3.22)$$

$$t_{max}^{(0)} \approx \left(\frac{3 V_0^{1/2}}{2 \mathfrak{a}} \right)^{2/3}, \quad (3.23)$$

$$\alpha_{max}^{(0)} \approx \frac{3}{5} V_0 t_{max}^{(0)}. \quad (3.24)$$

Когда параметр дробности принимает значения в интервале $0 < \gamma < 1$, то время контакта $t_{cont}^{(\gamma)}$ может быть определено следующим образом:

$$t_{cont}^{(\gamma)} \approx t_{cont}^{(0)} + \epsilon, \quad (3.25)$$

где ϵ - малая величина.

Подставляя (3.25) в уравнение

$$0 = \alpha = V_0 t - \frac{4}{15} \mathfrak{a} V_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{5}{2}} + \mathfrak{a} V_0^{\frac{1}{2}} \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \frac{t^{\frac{5}{2} + \gamma}}{\left(\frac{3}{2} + \gamma \right) \left(\frac{5}{2} + \gamma \right)}, \quad (3.26)$$

получим

$$\epsilon = \frac{5}{2} \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \frac{t_{cont}^{(0) 1 + \gamma}}{(3/2 + \gamma)(5/2 + \gamma)}.$$

Если предположить, что

$$t_{max}^{(\gamma)} \approx t_{max}^{(0)} + \epsilon_1, \quad (3.27)$$

где ϵ_1 - малая величина, и подставляя (3.27) в уравнение

$$0 = \dot{\alpha} = V_0 - \frac{2}{3} \mathfrak{a} V_0^{1/2} t^{3/2} + \mathfrak{a} V_0^{1/2} \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \frac{t^{3/2 + \gamma}}{3/2 + \gamma}, \quad (3.28)$$

получим

$$\epsilon_1 = \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \frac{t_{max}^{(0) 1 + \gamma}}{(3/2 + \gamma)}.$$

Теперь подставляя (3.27) в (3.19), можно найти

$$\alpha_{max}^{(\gamma)} = \alpha_{max}^{(0)} + \frac{9}{2} V_0 \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \frac{t_{max}^{(0) 1 + \gamma}}{(3/2 + \gamma)(5/2 + \gamma)}. \quad (3.29)$$

В частном случае $\gamma = 1$ характерные величины принимают вид

$$t_{cont}^{(1)} = t_{cont}^{(0)} + \frac{4}{35} \Delta_1 t_{cont}^{(0) 2}, \quad (3.30)$$

$$t_{max}^{(1)} = t_{max}^{(0)} + \frac{4}{25} \Delta_1 t_{max}^{(0) 2}, \quad (3.31)$$

$$\alpha_{max}^{(1)} = \alpha_{max}^{(0)} + \frac{12}{175} \Delta_1 t_{max}^{(0) 2}, \quad (3.32)$$

где $\Delta_1 = \Delta_\gamma \Big|_{\gamma=1}$.

3.2. Сравнительный анализ двух задач ударного взаимодействия жесткой и вязкоупругой сферических оболочек

3.2.1. Удар вязкоупругой сферической оболочки по жесткой сферической оболочке, находящейся в состоянии покоя

Рассмотрим задачу о нормальном ударе вязкоупругой сферической оболочки с начальной скоростью V_0 по жесткой сферической оболочке, находящейся в покое на жесткой пластине (рис. 3.3), когда вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного твердого тела с обычными производными целого порядка.

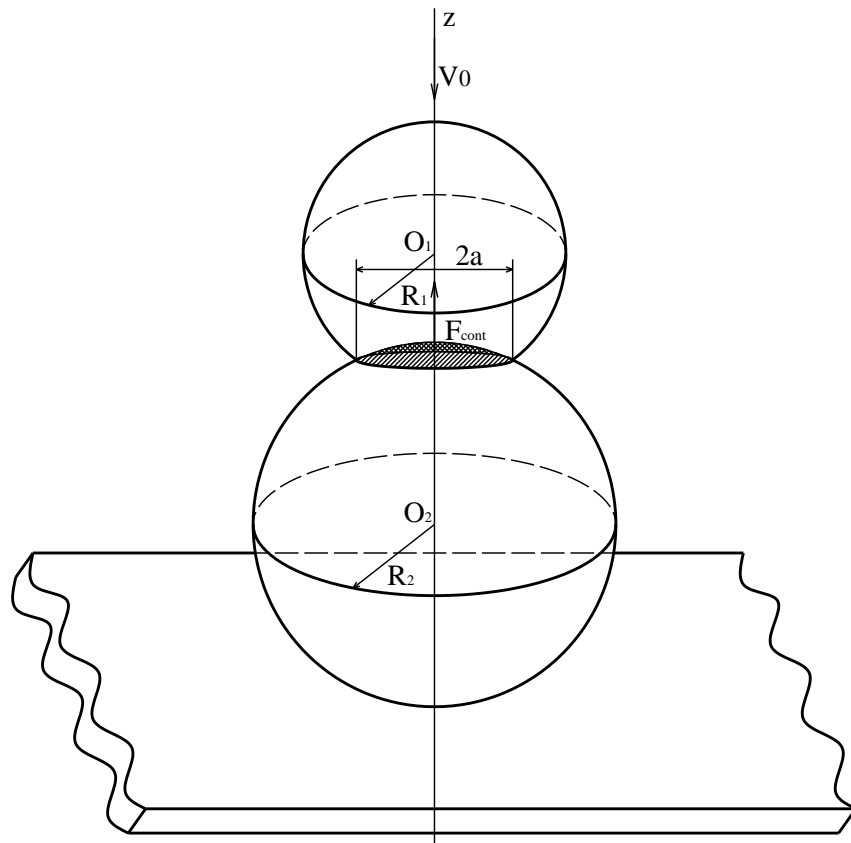


Рис. 3.3. Схема нормального удара вязкоупругой сферической оболочки по жесткой сферической оболочке

Для этого будем исходить из уравнений движения двух соударяющихся вязкоупругих сферических оболочек, полученных во второй главе, устремив модуль упругости второй оболочки к бесконечности. В результате получим уравнение движения контактной области (3.1) под действием поперечной силы $2\pi ah\sigma_{rz}|_{r=a}$ и контактной силы F_{cont} , которая определяется с помощью обобщенного контактного закона Герца (3.2), где α - местное смятие материала вязкоупругой оболочки-ударника (рис. 3.5), а \tilde{k} - оператор, зависящий от геометрии, т.е. радиусов вязкоупругой R_1 и жесткой R_2 сферических оболочек соответственно, а также от вязкоупругих свойств ударника, определяемых зависящими от времени функциями \tilde{E} и $\tilde{\nu}$,

$$\tilde{k} = \frac{4\sqrt{R'\tilde{E}}}{3(1-\tilde{\nu}^2)}, \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (3.34)$$

К уравнениям (3.1) и (3.2) следует добавить уравнение

$$V_0 - v_z|_{r=a} = \dot{\alpha}. \quad (3.35)$$

Во второй главе было показано, что с учетом соотношения $v_z|_{r=a} = \dot{\alpha}$, величину $\sigma_{rz}|_{r=a}$ можно записать в следующем виде в соответствии с динамическим условием совместности:

$$\sigma_{rz}|_{r=a} = \rho(G_1 - G_2)\frac{(a^2)}{2R_1} - \rho\left(G_1\frac{a^2}{R_1^2} + G_2\right)v_z|_{r=a}, \quad (3.36)$$

где скорости G_1 и G_2 определяются формулами (3.6) и (3.7).

Учитывая, что $a/R \ll 1$, уравнение (3.36) сводится к

$$\sigma_{rz}|_{r=a} = -\rho G_2 v_z|_{r=a}. \quad (3.37)$$

Подставляя (3.37) и (3.2) в (3.1) и учитывая, что $a^2 = R\alpha$, получим

$$\rho\pi R_1\alpha h\dot{v}_z|_{r=a} = -2\pi(R_1\alpha)^{1/2}h\rho G_2 v_z|_{r=a} + \tilde{k}\alpha^{3/2}. \quad (3.38)$$

Для решения уравнения (3.38) опять будем описывать поведение материала сферической оболочки в области контакта с помощью модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными.

Тогда уравнение (3.38) с учетом (3.35) сводится к следующему виду:

$$\ddot{\alpha} + \mathfrak{a} \left[\alpha^{\frac{1}{2}}(t) - \Delta_{\gamma} \alpha^{-1} \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{\frac{3}{2}}(t') dt' \right] = 0, \quad (3.39)$$

где

$$\mathfrak{a} = \frac{4E_{\infty}}{3\pi\sqrt{R_1}\rho h(1-\nu_{\infty}^2)}, \quad (3.40)$$

$$\Delta_{\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{t_j^{\gamma}}. \quad (3.41)$$

3.2.2. Удар жесткой сферической оболочки по вязкоупругой сферической оболочке, находящейся в состоянии покоя

Теперь рассмотрим вторую задачу, когда жесткая сферическая оболочка ударяет по вязкоупругой сферической оболочке, расположенной на жесткой пластине (рис. 3.4). В этом случае уравнение движения жесткой сферической оболочки

$$m\ddot{z} = -\tilde{k}\alpha^{3/2} \quad (3.42)$$

следует добавить к уравнению (3.38), где m - масса жесткой сферы и

$$\dot{z} = v_z|_{r=a} + \dot{\alpha}. \quad (3.43)$$

Из уравнений (3.42) и (3.43) находим

$$m\dot{v}_z|_{r=a} = -m\ddot{\alpha} - \tilde{k}\alpha^{3/2}. \quad (3.44)$$

Складывая уравнения (3.38) и (3.44), получим

$$(\rho\pi R_1\alpha h + m)\dot{v}_z|_{r=a} = -m\ddot{\alpha} - 2\pi(R_1\alpha)^{1/2} h\rho G_2 v_z|_{r=a}. \quad (3.45)$$

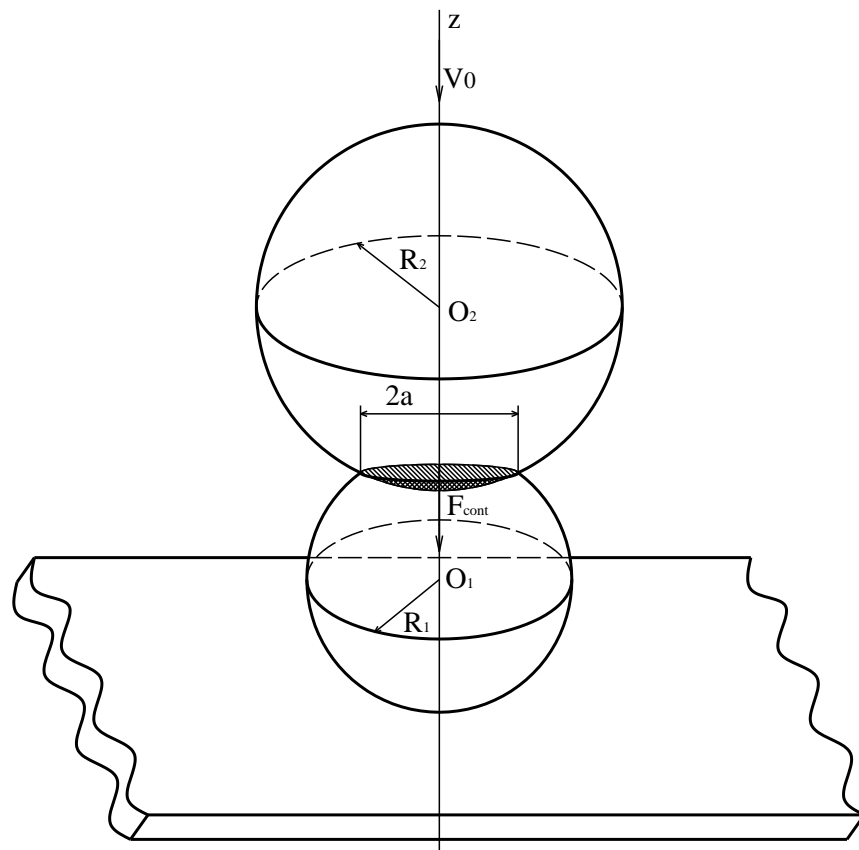


Рис. 3.4. Схема нормального удара жесткой сферической оболочки по вязкоупругой сферической оболочке

Чтобы найти решение в первом приближении, можно опустить второй член в правой части уравнения (3.45) по аналогии с первой задачей. В результате получим

$$\dot{v}_z|_{r=a} = -\frac{m}{\rho\pi R_1\alpha h + m}\ddot{\alpha}. \quad (3.46)$$

Подставляя (3.46) в уравнение (3.44), получим

$$m\left(1 - \frac{m}{\rho\pi R_1\alpha h + m}\right)\ddot{\alpha} = -\tilde{k}\alpha^{3/2}. \quad (3.47)$$

Учитывая малость значения величины a , из уравнения (3.47) имеем

$$\rho\pi R_1\alpha h\ddot{\alpha} + \tilde{k}\alpha^{3/2} = 0. \quad (3.48)$$

Если ввести коэффициент \mathfrak{a} , определенный в соотношении (3.40), в уравнение (3.48) с учетом выражения для контактной силы, приходим к уравнению(3.39).

Таким образом, две задачи, которые изначально описываются разными системами интегро-дифференциальных уравнений, имеют одинаковые решения. Это говорит о том, что эти задачи взаимнообратные.

Применяя к уравнению (3.48) методику, изложенную в предыдущем параграфе, получим

$$\ddot{\alpha} = -\mathfrak{a}V_0^{1/2} \left[t^{1/2} - \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) t^{1/2+\gamma} \right], \quad (3.49)$$

$$\dot{\alpha} = V_0 - \frac{2}{3} \mathfrak{a}V_0^{1/2} t^{3/2} + \mathfrak{a}V_0^{1/2} \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \frac{t^{3/2+\gamma}}{3/2+\gamma}, \quad (3.50)$$

$$\alpha = V_0 t - \frac{4}{15} \mathfrak{a}V_0^{1/2} t^{5/2} + \mathfrak{a}V_0^{1/2} \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \frac{t^{5/2+\gamma}}{(3/2+\gamma)(5/2+\gamma)}. \quad (3.51)$$

В частном случае, когда $\gamma = 0$, и следовательно, $\sum_{j=1}^2 m_j = 0$,

соотношения (3.50) и (3.51) принимают вид

$$\dot{\alpha} = V_0 \left(1 - \frac{2}{3} \mathfrak{a}V_0^{-1/2} t^{3/2} \right), \quad (3.52)$$

$$\alpha = V_0 t \left(1 - \frac{4}{15} \mathfrak{a}V_0^{-1/2} t^{3/2} \right), \quad (3.53)$$

откуда можно найти время контакта $t_{cont}^{(0)}$, и время $t_{max}^{(0)}$, при котором происходит максимальное местное смятие $\alpha_{max}^{(0)}$

$$t_{cont}^{(0)} \approx \left(\frac{15 V_0^{1/2}}{4 \mathfrak{a}} \right)^{2/3}, \quad (3.54)$$

$$t_{max}^{(0)} \approx \left(\frac{3 V_0^{1/2}}{2 \mathfrak{a}} \right)^{2/3}, \quad (3.55)$$

$$\alpha_{max}^{(0)} \approx \frac{3}{5} V_0 t_{max}^{(0)} . \quad (3.56)$$

Когда параметр дробности принимает значения в интервале $0 < \gamma < 1$, то время контакта $t_{cont}^{(\gamma)}$ может быть определено следующим образом:

$$t_{cont}^{(\gamma)} \approx t_{cont}^{(0)} + \epsilon , \quad (3.57)$$

где ϵ – малая величина.

Подставляя (3.57) в уравнение

$$0 = \alpha = V_0 t - \frac{4}{15} \mathfrak{a} V_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{5}{2}} + \mathfrak{a} V_0^{\frac{1}{2}} \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \frac{t^{\frac{5}{2} + \gamma}}{\left(\frac{3}{2} + \gamma \right) \left(\frac{5}{2} + \gamma \right)} ,$$

получим

$$\epsilon = \frac{5}{2} \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \frac{t_{cont}^{(0) 1 + \gamma}}{(3/2 + \gamma)(5/2 + \gamma)} . \quad (3.58)$$

Если предположить, что

$$t_{max}^{(\gamma)} \approx t_{max}^{(0)} + \epsilon_1 , \quad (3.59)$$

где ϵ_1 – малая величина и подставить (3.59) в уравнение

$$0 = \dot{\alpha} = V_0 - \frac{2}{3} \mathfrak{a} V_0^{1/2} t^{3/2} + \mathfrak{a} V_0^{1/2} \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \frac{t^{3/2 + \gamma}}{3/2 + \gamma} ,$$

получим

$$\epsilon_1 = \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \frac{t_{max}^{(0) 1 + \gamma}}{(3/2 + \gamma)} . \quad (3.60)$$

Подставляя (3.59) в (3.51), можно определить

$$\alpha_{max}^{(\gamma)} = \alpha_{max}^{(0)} + \frac{9}{2} V_0 \Delta_\gamma \frac{3}{\gamma} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \gamma \right) \frac{t_{max}^{(0) 1 + \gamma}}{(3/2 + \gamma)(5/2 + \gamma)} . \quad (3.61)$$

В частном случае $\gamma = 1$ характеристические величины принимают вид

$$t_{cont}^{(1)} = t_{cont}^{(0)} + \frac{4}{35} \Delta_1 t_{cont}^{(0) 2} , \quad (3.62)$$

$$t_{max}^{(1)} = t_{max}^{(0)} + \frac{4}{25} \Delta_1 t_{max}^{(0)2}, \quad (3.63)$$

$$\alpha_{max}^{(1)} = \alpha_{max}^{(0)} + \frac{12}{175} \Delta_1 t_{max}^{(0)2}, \quad (3.64)$$

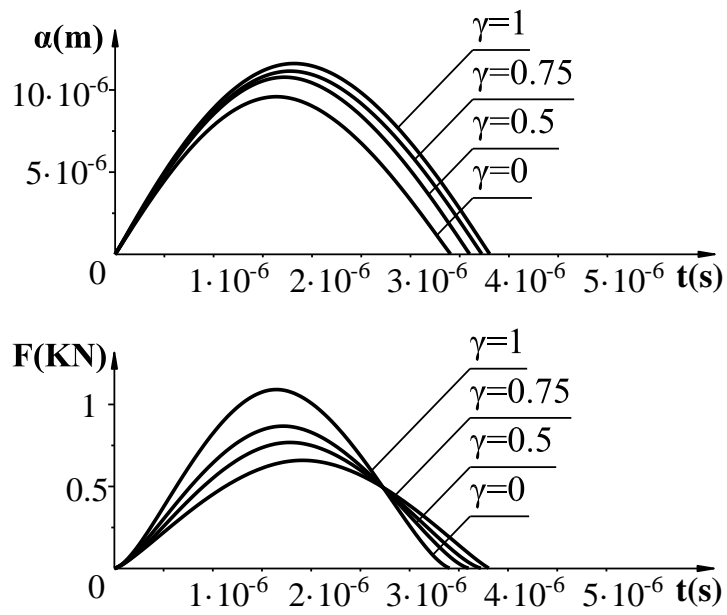
где $\Delta_1 = \Delta_\gamma \Big|_{\gamma=1}$.

В качестве иллюстрации полученных приближенных решений для рассмотренных в данной главе частных случаев приведем результаты численных исследований при следующих значениях параметров вязкоупругой оболочки: $h = 0.05$ м, $\nu_\infty = 0.25$, $\rho = 2600$ кг/м³, $E_0 = 100$ ГПа, $E_\infty = 110$ ГПа, $\tau_\varepsilon = 0.001$ с.

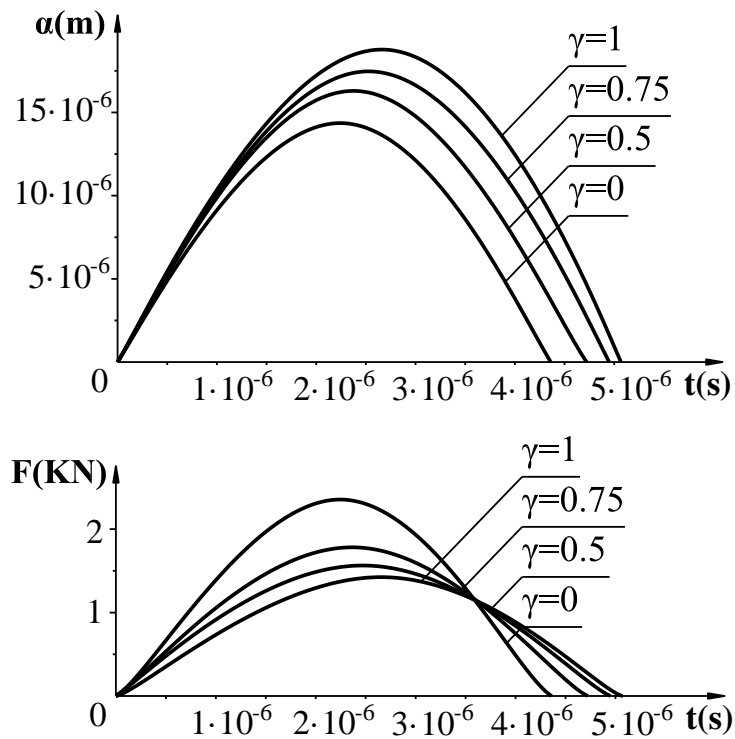
На рис. 3.4 приведены зависимости локального смятия и контактной силы от времени в случае, когда вязкоупругая оболочка падает на жесткую оболочку с начальной скоростью удара $V_0 = 10$ м/с, для двух сочетаний радиусов оболочек: а) $R_1 = 1$ м, $R_2 = 7$ м; б) $R_1 = 1.5$ м, $R_2 = 2$; а на рис. 3.5 – радиусы оболочек равны $R_1 = 1$ м, $R_2 = 7$ м при начальной скорости удара: а) $V_0 = 10$ м/с и б) $V_0 = 20$ м/с.

На рис. 3.6 и 3.7 приведены зависимости локального смятия и контактной силы от времени соответственно для случая, когда вязкоупругая оболочка ударяет с начальной скоростью $V_0 = 20$ м/с по жесткой пластинке для двух значений радиусов оболочки а) $R = 1$ м, б) $R = 2$ м (рис. 3.6), и для случая, когда радиус оболочки $R = 1$ м, и двух значений начальной скорости удара: а) $V_0 = 10$ м/с и б) $V_0 = 20$ м/с.

Из сравнения рис. 3.5 и 3.7 видно, что при стремлении радиуса жесткой мишени к бесконечности, что соответствует случаю жесткой пластины, время контакта увеличивается, при этом максимумы локального смятия и контактной силы возрастают. Все тенденции, отмеченные ранее, при изменении параметра дробности от нуля до единицы, сохраняются.

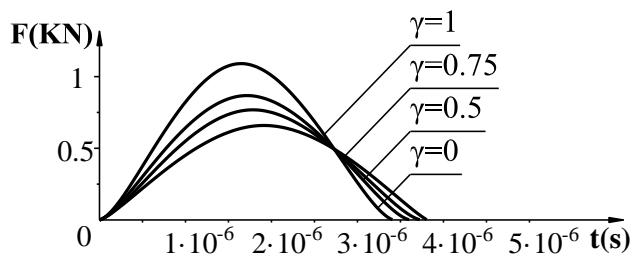
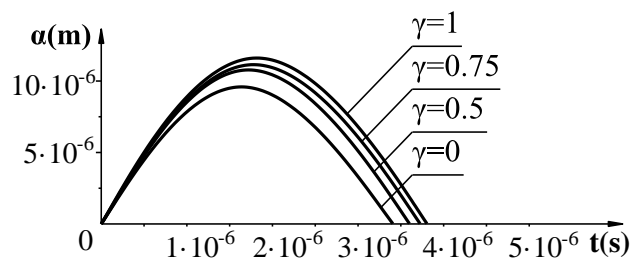


a)

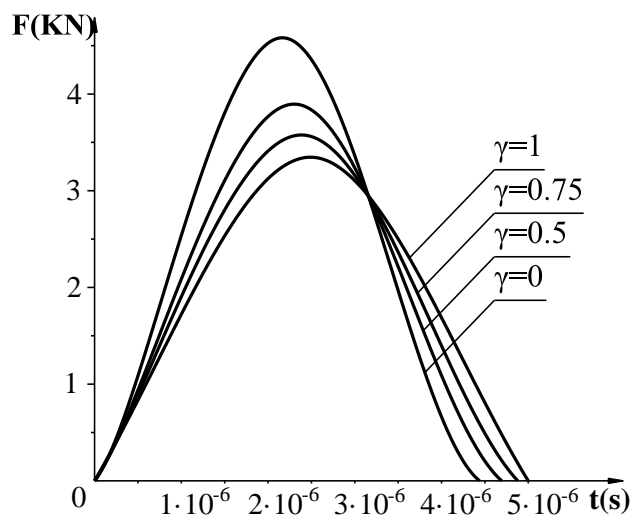
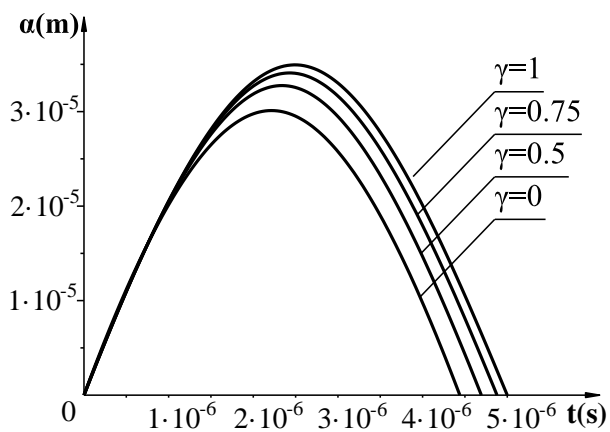


б)

Рис. 3.4 Зависимость локального смятия и контактной силы от времени в случае начальной скорости удара $V_0 = 10 \text{ м/с}$, радиусы оболочек
 а) $R_1 = 1 \text{ м}$, $R_2 = 7 \text{ м}$; б) $R_1 = 1.5 \text{ м}$, $R_2 = 2$



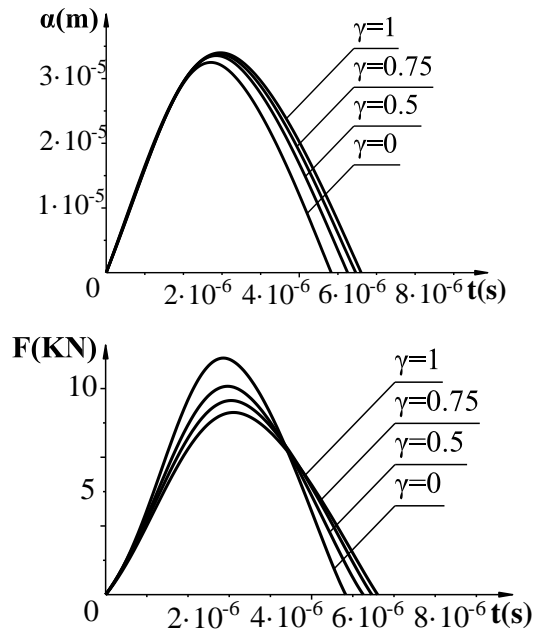
a)



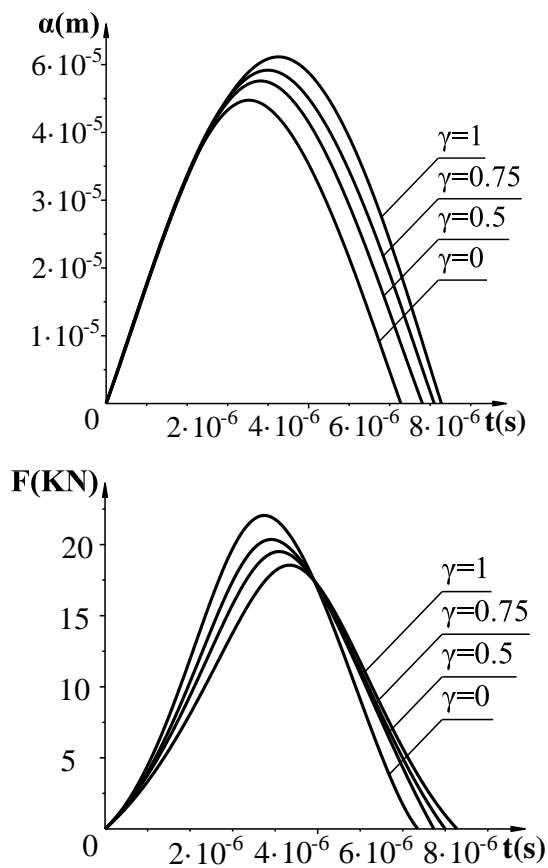
б)

Рис. 3.5. Зависимость локального смятия и контактной силы от времени в случае радиусов оболочек $R_1 = 1$ м, $R_2 = 7$ м, начальная скорость удара

а) $V_0 = 10$ м/с, б) $V_0 = 20$ м/с



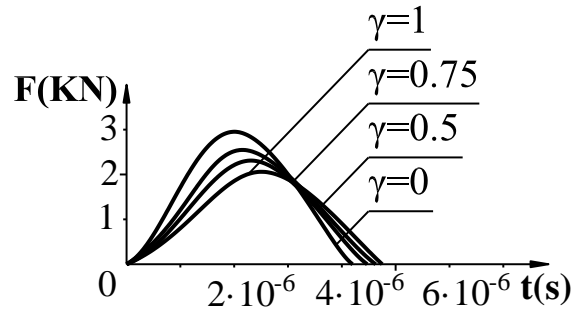
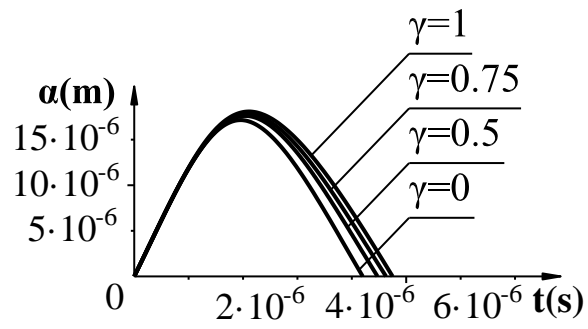
a)



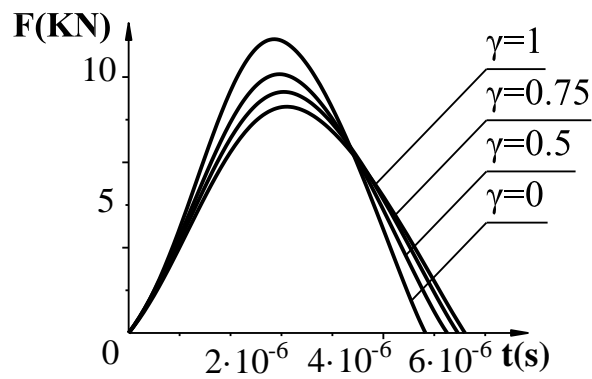
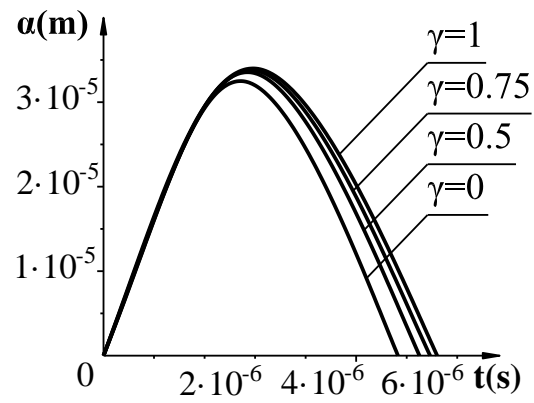
б)

Рис. 3.6. Зависимость локального смятия и контактной силы от времени в случае начальной скорости удара $V_0 = 20$ м/с и радиуса оболочки

а) $R = 1$ м, б) $R = 2$ м



a)



б)

Рис. 3.7. Зависимость локального смятия и контактной силы от времени в случае радиуса оболочки $R = 1$ и начальной скорости удара

а) $V_0 = 10$ м/с, б) $V_0 = 20$ м/с

Заключение

По результатам проведенных исследований можно сделать следующие основные выводы:

1. Волновая теория удара обобщена на случай соударения двух сферических оболочек. При помощи лучевого метода определены основные динамические характеристики полей напряжений и деформаций при распространении поверхностей сильного разрыва, зарождающихся в оболочках в момент удара и затем распространяющихся в виде расходящихся кругов.

2. На основе построенной теории решена задача о соударении двух упругих сферических оболочек, при этом контактная сила определяется при помощи классического контактного закона Герца.

3. Предложена модель соударения двух сферических оболочек для случая, когда вязкоупругие свойства сталкивающихся тел проявляются только в месте контакта в результате изменения микроструктуры оболочек в процессе контактного взаимодействия и описываются с помощью модели стандартного линейного тела с дробными производными. Вне области контакта материал оболочек остается упругим с нерелаксированным значением модуля упругости. Используя принцип соответствия Вольтерра, разрешающие уравнения, описывающие процесс контактного взаимодействия упругих оболочек, были обобщены на случай соударения оболочек, приобретающих вязкоупругие свойства в пределах контактной области. С этой целью классический закон Герца был обобщен путем замены коэффициента жесткости при ударе на соответствующий вязкоупругий оператор, учитывающий геометрию соударяющихся тел и зависящие от времени вязкоупругие аналоги модулей упругости и коэффициентов Пуассона. Параметр дробности, т.е. порядок дробного оператора, являющийся дополнительным структурным параметром, позволяет

управлять изменением вязкости внутри контактной зоны при ударных взаимодействиях.

4. Решена задача о соударении двух вязкоупругих сферических оболочек, вязкоупругие свойства которых описываются моделью стандартного линейного тела с производными целого порядка. Изменение вязких свойств внутри контактной зоны описывается при помощи обобщенного закона, в котором вязкоупругий оператор, пропорциональный цилиндрической жесткости, расшифровывается при помощи алгебры безразмерных операторов Ю.Н. Работнова. Получены интегро-дифференциальные уравнения для контактной силы и величины локального смятия.

5. Кратковременность процесса ударного взаимодействия позволила получить приближенные аналитические решения, на основе которых определены основные характеристики ударного взаимодействия: время контакта, время, при котором контактная сила и локальное смятие достигают своих максимальных значений и сами максимальные значения.

6. Рассмотрены частные случаи ударного взаимодействия вязкоупругой сферической оболочки по вязкоупругой или жесткой пластинке, а также удар сферической оболочки по второй оболочке, которая находится в состоянии покоя. Построены приближенные решения с использованием малого параметра, которым является время протекания ударного процесса.

7. Полученные временные зависимости контактной силы и локального смятия могут быть использованы в различных проектных организациях при расчетах ударных взаимодействий различных конструкций, свойства которых могут изменяться в процессе контакта.

8. Проведены численные исследования, которые показывают, что при изменении параметра дробности от нуля до единицы, что соответствует увеличению вязкости ударника, максимум контактной силы уменьшается, а время контакта ударника и мишени увеличивается.

Список литературы

1. Анофрикова Н. С. Асимптотические методы построения решений в окрестностях фронтов волн в вязкоупругом стержне при больших значениях времени / Н. С. Анофрикова, Л. Ю. Коссович, В. П. Черненко // Известия Саратовского университета. - 2005. - Т. 5, N 1. - С. 82-88.
2. Бойков В. Г. Ударные взаимодействия / В. Г. Бойков. - ЗАО Автомеханика, 2005. - Режим доступа : [/http://www.euler.ru/distr/euler/simulation/impacts.pdf](http://www.euler.ru/distr/euler/simulation/impacts.pdf).
3. Болотин В. В. Прочность, устойчивость, колебания / В. В. Болотин. – Москва : Машиностроение, 1968. - Т. 3. - 567 с.
4. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит. – Москва. : Изд-во литер. по стр-ву, 1965. - 448 с.
5. Гонсовский В. Л. Удар вязкоупругого стержня о жесткую преграду/ В. Л. Гонсовский, С. И. Мешков, Ю. А. Россихин // Прикладная механика. - 1972. – Т. 8, N 10. - С. 71-76.
6. Грещук Л. Б. Разрушение композитных материалов при ударах с малыми скоростями / Л. Б. Грещук // Динамика удара; пер. с англ. / Зукас Дж.А. и др. – Москва : Мир, 1985. - С. 8-46.
7. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – Пер. с англ. - М.: Мир, 1989. - 510 с.
8. Журавков М. А. О перспективах использования теории дробного исчисления в механике / М. А. Журавков, Н. С. Романова. – Электрон. текстовые дан. – Минск : БГУ, 2013. – 53 с.: ил. –Библиогр.: 36–53. – Загл. с экрана. – №000413032013. - Деп. в БГУ 13.03.2013.
9. Зеленев В. М. Затухающие колебания упруго наследственных систем со слабо-сингулярными ядрами / В. М. Зеленев, С. И. Мешков, Ю. А. Россихин // Прикладная механика и техническая физика. - 1970. – Т. 1, N 2. - С. 104-108.

10. Мак-Коннел А. Д. Введение в тензорный анализ: с приложениями к геометрии, механике и физике / А. Д. Мак-Коннел, Г. В. Корнев. - Москва : Физматгиз, 1963.
11. Мешков С. И. Описание внутреннего трения в наследственной теории упругости при помощи ядер, имеющих слабую сингулярность / С. И. Мешков // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1967. - Т. 1, N 4. - С. 147-151.
12. Мешков С. И. Интегральное представление дробно-экспоненциальных функций и их приложение к динамическим задачам линейной вязкоупругости / С. И. Мешков // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1970. - Т. 1. - С. 103-110.
13. Мешков С. И. Вязкоупругие свойства металлов / С. И. Мешков. – Москва : Metallurgy, 1974. - 193 с.
14. Мешков С. И. К описанию внутреннего трения при помощи дробно-экспоненциальных ядер / С. И. Мешков, В. С. Постников, Т. Д. Шермегор // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1966. - Т. 1, N 3. - С. 102-106.
15. Мешков С. И. О распространении звуковых волн в наследственно-упругой среде / С. И. Мешков, Ю. А. Россихин // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1968. - Т. 1, N 5. – С. 89-93.
16. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применения / А. М. Нахушев – Москва : Физматлит, 2003. - 272 с.
17. Огородников Е. Н. Вынужденные колебания дробных осцилляторов / Е. Н. Огородников, Н. С. Яшагин // Математическое моделирование и краевые задачи. - 2008. - Часть 1. - С. 215-221.
18. Огородников Е. Н. Математические модели дробных осцилляторов, постановка и структура решения задачи Коши / Е. Н. Огородников // Математическое моделирование и краевые задачи. - 2009. - Часть 1. - С. 177-181.

19. Огородников Е. Н. Об одном классе дробных дифференциальных уравнений математических моделей динамических систем с памятью / Е. Н. Огородников // Вестник Самарского государственного технического университета. - 2013. - Т. 1, N 30. - С. 245-252.
20. Огородников Е. Н. Математическое моделирование наследственно-упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Риммана-Лиувилля / Е. Н. Огородников, В. П. Радченко, Л. Г. Унгарова // Вестник Самарского государственного технического университета. - 2016. - Т. 20, N 1. - С. 167-194.
21. Огородников Е. Н. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов / Е. Н. Огородников, В. П. Радченко, Н. С. Яшагин // Вестник Самарского государственного технического университета. - 2011. – Т. 1, N 22. - С. 255-268.
22. Попов В. Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения / В. Л. Попов – Москва: Физматлит, 2013. – 352 с.
23. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием / Ю. Н. Работнов // Прикладная математика и механика. - 1948. - Т. 12, N 1. - С. 53-62.
24. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. - Москва : Наука, 1966. – 752 с.
25. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов. - Москва : Наука, 1977. - 384 с.
26. Розовский М. И. Об интегро-дифференциальном уравнении динамической контактной задачи вязкоупругости / М. И. Розовский // Прикладная математика и механика. - 1973. - Т. 37, N 2. - С. 359-363.
27. Россихин Ю. А. Удар упругого шара по балке Тимошенко и пластинке Уфлянда-Миндлина с учётом растяжения срединной поверхности / Ю. А.

- Россихин, М. В. Шитикова // Известия вузов. Строительство. - 1996. - N 6. - С. 28-34.
28. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. - Минск : Наука и техника, 1987.
29. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. - Москва : Изд-во Физматгиз, 1959. - 439 с.
30. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твёрдых телах / Т. Томас. - Москва : Мир, 1964. - 308 с.
31. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин / Я. С. Уфлянд // Прикладная математика и механика. - 1948. - Т. 12, N 3. - С. 287-300.
32. Учайкин В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. - Ульяновск : Артишок, 2008. - 512 с.
33. Шермергор Т. Д. Об использовании операторов дробного дифференцирования для описания наследственных свойств материалов / Т. Д. Шермергор // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1966. - Т. 18, N 1. - С. 118-121.
34. Шитикова М. В. Лучевой метод в задачах динамического контактного взаимодействия упругих тел : дис. д-ра физ.-мат. наук : 01.02.04 / Шитикова Марина Вячеславовна. - Москва : Институт проблем механики РАН, 1995.
35. Эстрада Меза М.Г. Анализ динамического поведения вязкоупругих балок при ударных воздействиях с использованием моделей, содержащих дробные операторы : дис. канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 / Эстрада Меза М.Г. – Саратов : Саратовский государственный университет, 2017.
36. Abrate S. Modeling of impacts on composite structures / S. Abrate // Composite Structures. - 2001. - Vol. 51. - P. 129–138.
37. Aksel N. On the impact of a rigid sphere on a viscoelastic half-space / N. Aksel // Ingenieur-Archiv. - 1986. – Vol. 56, N 1. - P. 38-54.

38. Arena P. *Nonlinear Noninteger Order Circuits and Systems: an Introduction* / P. Arena. - Singapore-New Jersey-London-Hong Kong : World Scientific, 2002. - 212 p.
39. Arikoglu A. A. *New fractional derivative model for linearly viscoelastic materials and parameter identification via genetic algorithms* / A. A. Arikoglu [etc.] // *Rheologica Acta*. - 2014. - Vol. 53. - P. 219-233.
40. Atanacković T. M. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Wave Propagation, Impact and Variational Principles* / T. M. Atanacković. - New York : Wiley, 2014. - 406 p.
41. Bagley R.L. *A theoretical basis for the application of fractional calculus* / R. L. Bagley, P. J. Torvik // *Journal of Rheology*. - 1983. - Vol. 27. – P. 201-210.
42. Baleanu D. *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods* / D Baleanu [etc] . - New York : World Scientific, 2016. - 476 p.
43. Blatner M. S. *Internal friction in metallic materials* / M. S. Blatner [etc]. - [S. l.] : Springer Series in Material Science, 2007. - Vol. 90. – 542 p.
44. Calvit H. H. *Numerical solution of the problem of impact of a rigid sphere onto a linear viscoelastic half-space and comparison with experiment* / H. H. Calvit // *International Journal of Solids and Structures*. - 1967. - Vol. 3, Issue 6. - P. 951-960.
45. Cantwell W. J. *The impact resistance of composite materials* / W. J. Cantwell, J. Morton // *Composites*. - 1991. - Vol. 22, Issue 5. - P. 347-362.
46. Carpinteri A. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* / A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.). - Wien : Springer-Verlag, 1997. – 348 p.
47. Cattani C. *Fractional Dynamics* / C. Cattani, H. M. Srivastava, X.-J. Yang. - Berlin : De Gruyter Open, 2015.
48. Chen C.P. *Design of viscoelastic impact absorbers: optimal material properties* / C. P. Chen, R. S. Lakes // *International Journal of Solid Structures*. - 1990. - Vol. 26. - Issue 12. - P. 1313-1328.

49. Christoforou A. P. Analysis of simply-supported orthotropic cylindrical shells subject to lateral impact loads / A. P. Christoforou, S. R. Swanson // *Journal of Applied Mechanics*. - 1990. - Vol. 57, Issue 2. - P. 376-382.
50. Cole K.S. Dispersion and absorption in dielectrics. II. Direct current characteristics / K.S. Cole, R.H. Cole // *Journal of Chemical Physics*. - 1942. Vol. 10. – P. 98-105.
51. Conway H.D. Impact of an indenter on a large plate / H. D. Conway, H. C. Lee // *Journal of Applied Mechanics*. - 1970. - Vol. 37, Issue 1. - P. 234-235.
52. Costa M.F.P. AIP Generalized Fractional Maxwell Model: Parameter Estimation of a Viscoelastic Material / M.F.P Costa, C. Ribeiro // *Conference Proceedings of the American Institute of Physics*. - 2012. - Vol. 1479. - P. 790-793.
53. D'Acunto B. On the motion of a viscoelastic solid in the presence of a rigid wall - Part II. Impact laws for the hereditary case. Solution of the unilateral problem / B. D'Acunto, A. D'Anna, P. Penno // *International Journal of Non-linear Mechanics*. - 1988. - Vol. 23, Issue 1. - P. 67-85.
54. Daou R. *Fractional Calculus: History, Theory and Applications* / R. Daou, M. Xavier . - New York : Nova Science Publishers, 2015.
55. Debnath L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering / L. Debnath // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. - 2003. - Vol. 54. - P. 3413–3442.
56. Debnath L. A brief historical introduction to fractional calculus / L. Debnath // *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. – Vol. 35, № 4. - 2013. - P. 487-501.
57. Diethelm K. Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods / K. Diethelm [etc.] // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. - 2005. - Vol. 194, Issue 6-8. - P. 743-773.
58. Diethelm K. *The Analysis of Fractional Differential Equations* / K. Diethelm. - Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2010.

59. Dintwa E. Finite element analysis of the dynamic collision of apple fruit / E. Dintwa // M. Van Zeebroeck et al., Postharvest Biology and Technology. - 2008. - No.49. - Pp.260-276.
60. Dobyns A. L. Analysis of simply-supported orthotropic plates subject to static and dynamic loads / A. L. Dobyns // AIAA Journal. - 1981. - Vol. 19, Issue 5. - P. 642-650.
61. Drăgănescu G. E. Application of a variational iteration method to linear and nonlinear viscoelastic models with fractional derivatives / G. E. Drăgănescu // Journal of Mathematical Physics. - 2006. - Vol. 47, Issue 8. - P. 082902.
62. Dupac M. FEM modeling and dynamical behavior of a flexible cracked linkage mechanisms with clearance / M. Dupac, S. Noorozi // The 10th International Conference on Vibration Problems ICOVP. - Prague: Springer Netherlands, 2011. - Vol. 139. - P. 275-280.
63. Escalante-Martinez J. E. Experimental evaluation of viscous damping coefficient in the fractional underdamped oscillator / J. E. Escalante-Martinez [etc.] // Advances in Mechanical Engineering. - 2016. - Vol. 8, Issue 4. - P. 1-12.
64. Espindola J. J. A generalised fractional derivative approach to viscoelastic material properties measurement / J. J. Espindola, J. M. Silva Neto, E.M.O. Lopes // Applied Mathematics and Computation. - 2005. – Vol. 164. - P. 493-506.
65. Frech M. A survey of fractional calculus for structural dynamics applications / M. Frech, J. Rogers // IMAC-IX: A Conference on Structural Dynamics. - Kissimmee : [s. n.], 2001. - Vol. 4359. - P. 305-309.
66. Fujii Y. Proposal for material viscoelasticity evaluation method under impact load / Y. Fujii, T. Yamaguchi // Journal of Materials Science. - 2005. - Vol. 40, Issue 18. - P. 4785-4790.
67. Gan-Mor S. Rheological model of fruit collision with an elastic plate / S. Gan-Mor, N. Galili // Journal of Agricultural Engineering Research. – 2000. - Vol. 75. – Pp.139-147.

68. Gorenflo R. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications / R. Gorenflo [etc.]. – Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2014. - 443 p.
69. Graham G.A.C. The contact problem in the linear theory of viscoelasticity when the time dependent contact area has any number of maxima and minima / G.A.C. Graham // International Journal of Engineering Science. - 1966. - Vol. 5, Issue 6. - P. 495-514.
70. Hamann D.D. (1970). Analysis of stress during impact of fruit considered to be viscoelastic / D.D. Hamann // Transactions of the ASAE. - 1970. Vol.13, Issue 6/ - P. 893-900.
71. Huang W. The dynamic response of an elastic circular plate on a viscoelastic Winkler foundation impacted by a moving rigid body /W. Huang, Y-D. Zou // JSME International Journal Series III. - 1992. - Vol. 35, Issue 2. – P. 274-278.
72. Hunter S. C. The Hertz problem for a rigid spherical indenter and a viscoelastic half-space / S. C. Hunter // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. - 1960. - Vol.8, Issue 4. - P. 219-234.
73. Ingman D. Response of viscoelastic plate to impact / D. Ingman, J. Suzdalnitsky // ASME Journal of Vibration and Acoustics. - 2008. - Vol. 130, Issue 1. - 8 pages.
74. Jung B. A statistical characterization method for damping material properties and its application to structural-acoustic system design / B. Jung [etc.] // Journal of Mechanical Science and Technology. - 2011. - Vol. 25, Issue 8. - P. 1893-1904.
75. Kaminsky A. A. Mechanics of the delayed fracture of viscoelastic bodies with cracks: Theory and experiment (Review) / A. A. Kaminsky // International Applied Mechanics. - 2014. - Vol. 50, Issue 5. - P. 485–548.
76. Kilbas A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations /A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J.Trujillo . - Amsterdam : Elsevier Science, 2006. - 523 p.

77. Kim H.S. Model for thickness effect with impact testing of viscoelastic materials / H. S. Kim, R. M. Shafiq // Journal of Applied Polymer Science. - 2001. - Vol. 81. – P. 1762-1767.
78. Kren A. P. Determination of the relaxation function for viscoelastic materials at low velocity impact / A. P. Kren, A. O. Naumov // International Journal of Impact Engineering. - 2010. - Vol. 37. - P. 170-176.
79. Lee E. H. The contact problem for viscoelastic bodies / E. H. Lee, J. R. M. Radok // Journal of Applied Mechanics. - 1960.- Vol. 27, Issue 3. - P. 438-444.
80. Lee Y. The lumped parameter method for elastic impact problem / Y. Lee, J. F. Hamilton, J. W. Sullivan // ASME Journal of Applied Mechanics. - 1983. - Vol. 50, Issue 4a. - P. 823-827.
81. Li G. G. Dynamical stability of viscoelastic column with fractional derivative constitutive relation / G. G. Li, Z. Y. Zhu, C. J. Cheng // Applied Mathematics and Mechanics. - 2001. - Vol. 22, Issue 3. - P. 294-303.
82. Liu L. C. Analysis of vertical vibrations of a pile in saturated soil described by fractional derivative model / L. C. Liu, X. Yang // Rock and Soil Mechanics. - 2011. - Vol. 32, Issue 2. - P. 526-532.
83. Lu Y. C. Fractional derivative viscoelastic model for frequency-dependent complex moduli of automotive elastomers / Y. C. Lu // International Journal of Mechanics and Materials in Design. - 2006. - Vol. 3, Issue 4. - P. 329-336.
84. Machado J. A. T. On development of fractional calculus during the last fifty years / J. A. T. Machado, A. M. S. F. Galhano, J. J. Trujillo // Scientometrics. - 2014. - Vol. 98, Issue 1. - P. 577-582.
85. Machado J. A. T. Recent history of fractional calculus / J. A. T. Machado, V. Kiryakova, F. Mainardi // Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation. - 2011. - Vol. 16, Issue 3. - P. 1140-1153.
86. Magin R. L. Fractional calculus in bioengineering / R. L. Magin // Reviews in Biomechanics - 2004. - Vol. 32. - 684 p.

87. Mahajan P. Adaptive computation of impact force under low velocity impact / P. Mahajan, A. Dutta // *Computers and Structures*. - 1999. - Vol. 70, Issue 2. - P. 229-241.
88. Mainardi F. An historical perspective on fractional calculus in linear viscoelasticity / F. Mainardi // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. - 2012. - Vol. 15, Issue 4. - P. 712-717.
89. Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models* / F. Mainardi - London : Imperial College Press, 2009. - 368 p.
90. Mansoor Baghaei S. Elastic spherical shell impacted with an elastic barrier: A closed form solution / S. Mansoor Baghaei, A. M. Sadegh // *International Journal of Solids and Structures*. – 2011. – Vol. 48. - Pp. 3257–3266.
91. Markopoulos Y. P. On the low velocity impact response of laminated composite plates utilizing the p-version Ritz method / Y. P. Markopoulos, V. Kostopoulos // *Advanced Composite Letters*. - 2003. - Vol. 12, Issue 5. - P. 177-190.
92. Meral F. C. Fractional calculus in viscoelasticity: An experimental study / F. C. Meral, T. J. Royston, R. Magin // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. - 2010. - Vol. 15, Issue 4. - P. 939-945.
93. Näsholm S. P. On a fractional Zener elastic wave equation / S. P. Näsholm, S. Holm // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. - 2013. - Vol. 16, Issue 1. – P. 26-50.
94. Nairn J.A. Measurement of polymer viscoelastic response during an impact experiment / J. A. Nairn // *Polymer Engineering and Science*. - 1989. - Vol. 29, Issue 10. - P. 654-661.
95. Oeser M. Visco-elastic modeling of virgin and asphalt binders / M. Oeser // *Computer Methods for Geomechanics: Frontiers and Applications*; Eds. Oeser Nasser Khalili, Markus. - Melbourne : IACMAG 2011 . - Vol. 1. - P. 313-319.
96. Pao Y.-H. Extension of the Hertz theory of impact to the viscoelastic case / Y.-H. Pao // *Journal of Applied Physics*. - 1955. - Vol. 26. - P. 1083.

97. Pauchard L. Contact and compression of elastic spherical shells: The physics of a 'ping-pong' ball / L. Pauchard, S. Rica // *Philosophical Magazine*. - 1998. - Vol. 78, № 2. – Pp. 225-233.
98. Podlubny I. *Fractional Differential Equations* / I. Podlubny. - New York : Academic Press, 1999. - 340 p.
99. Popov, V. L. *Contact Mechanics and Friction* / V. L. Popov. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. – 362 p.
100. Rogosin S. George William Scott Blair – the pioneer of fractional calculus in rheology / S. Rogosin, F. Mainardi // *Communications in Applied and Industrial Mathematics*. - 2014. - Vol. 6, Issue 1.
101. Rossikhin Yu. A. Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids / Yu. A. Rossikhin // *Applied Mechanics Reviews*. - 2010. - Vol. 63, № 1. - 12 pages.
102. Rossikhin Yu. A. A ray method of solving problems connected with a shock interaction / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Acta Mechanica*. - 1994. Vol. 102, Issue 1. - Pp. 103-121.
103. Rossikhin Yu. A. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Applied Mechanics Reviews*. - 1995. - Vol. 48, Issue 1. - P. 39.
104. Rossikhin Yu. A. The ray method for solving boundary problems of wave dynamics for bodies having curvilinear anisotropy / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Acta Mechanica*. - 1995. - Vol. 109. - P. 49-64.
105. Rossikhin Yu. A. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Applied Mechanics Reviews*. - 1997. - Vol. 50, Issue 1. - P. 15-67.
106. Rossikhin Yu. A. The impact of a sphere on a Timoshenko thin-walled beam of open section with due account for middle surface extension / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*. - 1999. - Vol. 12. - P. 375-383.

107. Rossikhin Yu. A. Analysis of dynamic behaviour of viscoelastic rods whose rheological models contain fractional derivatives of two different orders / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. - 2001. - Vol. 81, Issue 6. - P. 363-376.
108. Rossikhin Yu. A. Analysis of the viscoelastic rod dynamics via models involving fractional derivatives or operators of two different orders / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // The Shock and Vibration Digest. – 2004. – Vol. 36, № 1. – P. 3-26.
109. Rossikhin Yu. A. Transient response of thin bodies subjected to impact: Wave approach / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // The Shock and Vibration Digest. - 2007. - Vol. 39, Issue 4. - P. 273-309.
110. Rossikhin Yu. A. Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Fractional Calculus and Applied Analysis. - 2007. -Vol. 10, Issue 2. - P. 111-121.
111. Rossikhin Yu. A. The method of ray expansions for investigating transient wave processes in thin elastic plates and shells / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Acta Mechanica. - 2007. - Vol. 189, Issue 1 - P. 87-121.
112. Rossikhin Yu. A. Fractional-derivative viscoelastic model of the shock interaction of a rigid body with a plate / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Journal of Engineering Mathematics. - 2008. -Vol. 60. - P. 101-113.
113. Rossikhin Yu. A. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Applied Mechanics Reviews. - 2010. - Vol. 63, № 1. – Paper ID 010801.
114. Rossikhin Yu. A. The analysis of the impact response of a thin plate via fractional derivative standard linear solid model / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Journal of Sound and Vibration. - 2011 - Vol. 330. - P. 1985-2003.

115. Rossikhin Yu. A. Two approaches for studying the impact response of viscoelastic engineering systems: An overview / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Computers & Mathematics with Applications*. - 2013. - Vol. 66. - P. 755-773.
116. Rossikhin Yu. A. Analysis of two colliding fractionally damped spherical shells in modelling blunt human head impacts / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Central European Journal of Physics*. - 2013. - Vol. 11. Pp. 760-778.
117. Rossikhin Yu. A. Ray expansion theory / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Encyclopedia of Thermal Stresses*. - Heidelberg: Springer, 2014.
118. Rossikhin Yu. A. Features of fractional operators involving fractional derivatives and their applications to the problems of mechanics of solids / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Chapter 8 in: *Fractional Calculus: Applications* (Roy Abi Zeid Daou and Xavier Moreau, Eds.), New York: NOVA Publishers, USA, 2015. - P. 165-226.
119. Rossikhin Yu. A. Modelling of the collision of two viscoelastic spherical shells / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, T. M. Duong // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. – 2016. – Vol. 20, Issue 4. – P. 481-509.
120. Rossikhin Yu. A. Comparative analysis of two problems of the impact interaction of rigid and viscoelastic spherical shells / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, T. M. Duong // *International Journal of Mechanics*. – 2017. - Vol. 11. – P. 6-11.
121. Rossikhin Yu. A. Normal impact of a viscoelastic spherical shell against a rigid plate / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, T. M. Duong // *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*. – 2016. Vol. 11. – P. 125-128.
122. Rossikhin Yu. A. Analysis of the collision of two elastic spherical shells / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, T. M. Duong // *Mechanics, Energy, Environment* (ISBN: 978-1-61804-346-7) / Energy, Environment and

Structural Engineering Series (ISSN: 2227-4359). - Vol.42. - P. 107-111, WSEAS Publishers, 2015.

123. Rossikhin Yu. A. Modeling of the dynamic response of a viscoelastic plate by a viscoelastic spherical shell / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, T. M. Duong // *Advanced Problems in Mechanics: XLIV International Summer School-Conference*. - Saint-Petersburg : Institute of Problems of Mechanics RAS, 2016. - P. 42.
124. Rossikhin Yu. A. Impact response of a Timoshenko-type viscoelastic beam with due account for the extension of its middle surface / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, M. G. Meza Estrada // *SpringerPlus*. - 2016. - Vol. 5, Issue 1. – 18 pages.
125. Rossikhin Yu. A. Dynamic response of a viscoelastic beam impacted by a viscoelastic sphere / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, I. I. Popov // *Computers & Mathematics with Applications*. - 2017. – Vol. 73, № 6. – P. 970-984.
126. Rossikhin Yu. A. Dynamic response of spherical shells impacted by falling objects / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, V. Shamarin // *International Journal of Mechanics*. – 2011. – Vol. 5, Issue 3. – P. 166-181.
151. Rossikhin Yu. A. Application of the fractional derivative Kelvin-Voigt model for the analysis of impact response of a Kirchhoff-Love plate / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, P. T. Trung // *WSEAS Transactions on Mathematics*. - 2016. - V. 15. - P. 498-501.
152. Sabin G. C. W. The impact of a rigid axisymmetric indenter on a viscoelastic half-space / G. G. W. Sabin // *International Journal of Engineering Science*. - 1987. - Vol. 25, Issue 2. - P. 235-251.
153. Sasso M. Application of fractional derivative models in linear viscoelastic problems / M. Sasso, G. Palmieri, D. Amodio // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. - 2011. - Vol. 15, Issue 4. - P. 367-387.
154. Uchaikin V. V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers* / V. V. Uchaikin. - Berlin - Higher Education Press, Beijing : Springer, 2013.

155. Valério D. Some pioneers of the applications of fractional calculus / D. Valério, J. T. Machado, V. Kiryakova // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. - 2014. - Vol. 17, Issue 2. - P. 552–578.
156. Zener C (1941). The intrinsic inelasticity of large plates / C. Zener // *Physical Review*. – 1941. – Vol. 59. – P. 669-673.
157. Zhang Yu. N. Validation of nonlinear viscoelastic contact force models for low speed impact / Yu N. Zhang, I. Sharf // *Journal of Applied Mechanics*. - 2009. - Vol. 76. - 12 pages.
158. Zhou X. Q. Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review / X. Q. Zhou [etc.] // *Composite Structures*. - 2016. - Vol. 136. - P. 460-480.
159. Zhou Y. *Basic Theory of Fractional Differential Equations* / Y. Zhou. - Singapore : World Scientific, 2014. - 304 p.
160. Zhuravkov M. A. Review of methods and approaches for mechanical problem solutions based on fractional calculus / M. A. Zhuravkov, N. S. Romanova // *Mathematics and Mechanics of Solids*. - 2014. - Vol. 21, Issue 5. - P. 595-620.