

ФГБОУ ВО “Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”

На правах рукописи

МОСКАЛЕНКО Ольга Игоревна

ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ И
ПЕРЕМЕЖАЮЩЕЕСЯ ПОВЕДЕНИЕ В
НЕАВТОНОМНЫХ И СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ С
МАЛЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ,
ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СРЕДАХ И
СЕТЯХ СВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

01.04.03 – Радиофизика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Научный консультант
профессор, д.ф.–м.н.
А.А. Короновский

Саратов — 2017

Содержание

Введение	6
Актуальность исследуемой проблемы	6
Цель диссертационной работы	11
Научная новизна	12
Личный вклад	15
Научная и практическая значимость	16
Основные научные положения и результаты, выносимые на защиту	18
Структура и объем работы	23
Достоверность полученных результатов	38
Апробация результатов и публикации	38
1 Обобщенная синхронизация в однонаправлено связанных си- стемах	44
1.1 Традиционная концепция обобщенной синхронизации: определение, методы диагностики, механизмы возникнове- ния	44
1.2 Влияние шума на поведение нелинейных систем, находя- щихся в режиме обобщенной синхронизации	51
1.2.1 Методы диагностики и механизмы возникновения обобщенной синхронизации в присутствии шума	53
1.2.2 Влияние шума на установление режима обобщен- ной синхронизации в модельных системах: чис- ленное моделирование	55
1.2.2.1 Логистические отображения	55
1.2.2.2 Системы Ресслера	61
1.2.2.3 Однонаправлено связанные радиотехни- ческие генераторы	66
1.2.2.4 Уравнения Гинзбурга-Ландау	72
1.2.3 Экспериментальное исследование влияния шумов на порог возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации	77
1.3 Обобщенная синхронизация в случае воздействия хаоти- ческого сигнала на систему, демонстрирующую периоди- ческую динамику	83
1.3.1 Обобщенная синхронизация в модельных системах	84
1.3.2 Обобщенная синхронизация в системах пучково- плазменной природы	87

1.4	Бинарные обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом	92
1.4.1	Бинарная обобщенная синхронизация	92
1.4.2	Бинарная синхронизация, индуцированная шумом	103
1.5	Практические приложения обобщенной синхронизации	107
1.5.1	Способ скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума	108
1.5.2	Способ скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на периодическую систему	121
1.5.3	Способ скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на периодические генераторы	126
1.6	Выводы по главе 1	129
2	Обобщенная синхронизация в системах с взаимной связью и сетях связанных нелинейных элементов	134
2.1	Понятие обобщенной синхронизации и механизмы ее установления во взаимно связанных системах	135
2.2	Обобщенная синхронизация во взаимно связанных системах с малым числом степеней свободы	141
2.2.1	Системы Ресслера	142
2.2.2	Генераторы Кияшко–Пиковского–Рабиновича	148
2.2.3	Системы Лоренца	150
2.2.4	Логистические отображения и отображения Эно	158
2.3	Обобщенная синхронизация во взаимно связанных пространственно-распределенных средах	161
2.3.1	Метод расчета спектра пространственных показателей Ляпунова в пространственно-распределенных средах	163
2.3.2	Обобщенная синхронизация во взаимно связанных диодах Пирса	166
2.4	Обобщенная синхронизация в сетях связанных нелинейных элементов	169
2.5	Механизмы возникновения обобщенной синхронизации в сетях связанных нелинейных элементов	176
2.6	Выводы по главе 2	178
3	Новый подход к анализу обобщенной синхронизации: метод фазовых трубок	180
3.1	Пересмотр и уточнение существующей концепции обобщенной синхронизации применительно к потоковым системам	180
3.2	Обобщение разработанной концепции на системы с дискретным временем	189
3.2.1	Логистические отображения	194
3.2.2	Отображения Эно	198
3.3	Сильная и слабая обобщенная синхронизация	201

3.4	Уточненная концепция обобщенной синхронизации в пространственно-распределенных системах	203
3.5	Метод фазовых трубок применительно к сетям связанных нелинейных элементов	209
3.6	Выводы по главе 3	214
4	Переमेжающееся поведение на границах различных типов хаотической синхронизации	216
4.1	Перемежаемость типа “on-off” на границах синхронизации с запаздыванием, обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом	218
4.2	Перемежающееся поведение на границе фазовой хаотической синхронизации	230
4.3	Сопоставление перемежаемости “игольного ушка” и перемежаемости типа I в присутствии шума	239
4.3.1	Эквивалентность перемежаемости типа I в присутствии шума и перемежаемости “игольного ушка”: теория	240
4.3.2	Эквивалентность перемежаемости типа I в присутствии шума и перемежаемости “игольного ушка”: численное моделирование	244
4.3.3	Верхняя граница перемежающегося поведения	253
4.4	Проявление перемежающегося поведения на различных временных масштабах наблюдения	259
4.5	Проявление перемежаемости в бистабильных системах	269
4.5.1	Теория индуцированной шумом перемежаемости	270
4.5.2	Результаты численного моделирования	275
4.5.3	Перемежающееся поведение на границе обобщенной синхронизации в двух взаимно связанных осцилляторах Лоренца	279
4.6	Оценка степени синхронности перемежающейся синхронизации по временному ряду	281
4.6.1	Описание метода	284
4.6.2	Оценка величины условного нулевого показателя Ляпунова в модельных системах, находящихся в режиме фазовой синхронизации	289
4.6.2.1	Квадратичное отображение и отображение окружности	289
4.6.2.2	Автогенератор Ван дер Поля	293
4.6.2.3	Две связанные системы Ресслера	295
4.6.3	Применение разработанного метода для оценки степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации	298
4.7	Выводы по главе 4	303
5	Сосуществование различных типов перемежаемости в нелинейных системах	307
5.1	Общая теория сосуществования двух различных типов перемежаемости в нелинейных системах	308

5.2	Модельная система с дискретным временем, демонстрирующая два различных типа перемежаемости одновременно	310
5.3	Модельные системы с непрерывным временем, демонстрирующие два различных типа перемежаемости	316
5.4	Модели пространственно-распределенных систем, демонстрирующие “перемежаемость перемежаемостей”	322
5.5	“Перемежаемость перемежаемостей” на границе фазовой хаотической синхронизации в присутствии шума	330
5.6	“Перемежаемость перемежаемостей” в связанных хаотических осцилляторах с дополнительным полосовым фильтром	337
5.7	“Перемежаемость перемежаемостей” в реальных системах	342
5.7.1	Перемежающееся поведение при взаимодействии сердечно-сосудистой и дыхательной систем человека	342
5.7.2	Перемежающееся поведение при развитии эпилептической активности у человека и лабораторных животных	346
5.7.3	Перемежающееся поведение в легированном эрбием оптоволоконном лазере	352
5.8	Выводы по главе 5	366
Заключение		372
Благодарности		380
Список литературы		381

Введение

Актуальность исследуемой проблемы

Синхронизация хаотических колебаний связанных динамических систем представляет собой одно из наиболее интересных нелинейных явлений, активно изучаемых в последнее время [1–12]. Уже на протяжении многих десятилетий оно привлекает к себе пристальное внимание исследователей, работающих в области радиофизики, электроники сверхвысоких частот, химии, биологии, нейрофизиологии и др. (см., например, [8, 11, 13–20], что обусловлено как большим фундаментальным значением изучения этого явления [1, 6, 7], так и широким кругом практических приложений, где могут найти применение различные типы сложной динамики и хаотической синхронизации, например, в задачах построения систем связи на основе хаотической синхронизации [8, 12, 21–33], при анализе взаимодействия биологических [13, 34–40], физиологических [4, 41–49] и химических [50–54] систем, в задачах управления хаосом [55–59], при изучении процессов в радиоэлектронных устройствах радио- и микроволнового диапазонов [60–66] и т.д.

Интерес к проблеме изучения хаотической синхронизации и ее возможных практических приложений иллюстрирует рисунок 1, где приведены распределения числа цитирований работ, опубликованных в указанной области с 2003 по 2016 гг., по годам (по данным Web of Science). Рисунок 1,а соответствует работам по хаотической синхронизации, рисунок 1,б — изучению хаотической синхронизации в нейронауке, и рисунок 1,в — применению хаотической синхронизации в информационно-телекоммуникационных системах. Видно, что во всех случаях с течением

нием времени наблюдается значительный рост числа цитирований публикаций в указанной области, что свидетельствует о неугасающем интересе мировой научной общественности к явлению хаотической синхронизации и ее практическим приложениям, а также о важности и актуальности этого направления в радиофизике.

В то же самое время, несмотря на значительный интерес к явлению хаотической синхронизации и наличие достаточно большого количества активно цитируемых работ в данной области, говорить о том, что явление хаотической синхронизации в нелинейных системах полностью изучено, пока еще явно рано. Существует множество вопросов, требующих дальнейшего тщательного изучения. Решению некоторых из них и посвящена настоящая диссертационная работа.

Одним из наиболее интересных и наименее изученных типов хаотической синхронизации, результатам исследования которых посвящена настоящая диссертационная работа, является режим обобщенной синхронизации. Исследование этого режима берет свое начало с работ Н.Ф. Рулькова с соавторами, описавшего в 1995 году этот тип синхронного поведения в однонаправленно связанных радиотехнических генераторах, демонстрирующих хаотическую динамику [67,68]. Для диагностики этого режима ими же предложены метод ближайших соседей и метод вспомогательной системы [67, 69]. Дальнейшее развитие изучение режима обобщенной синхронизации получило в работах К. Пирагаса, предложившего рассчитывать старший условный показатель Ляпунова для диагностирования этого режима, а также давшего некую классификацию этого режима (сильная и слабая и обобщенная синхронизация) [70–72]. Обобщенная синхронизация нашла свое отражение и в других работах, например, в работе [73] предложена модификация метода ближайших соседей и проведено наблюдение этого режима в эксперименте. Позднее появились работы, направленные на разработку новых методов диагностики режима обобщенной синхронизации [66, 74–76], выявление механизмов возникновения этого режима [77–82], его взаимосвязи с другими типами синхронного поведения [83–86] и областей возможных

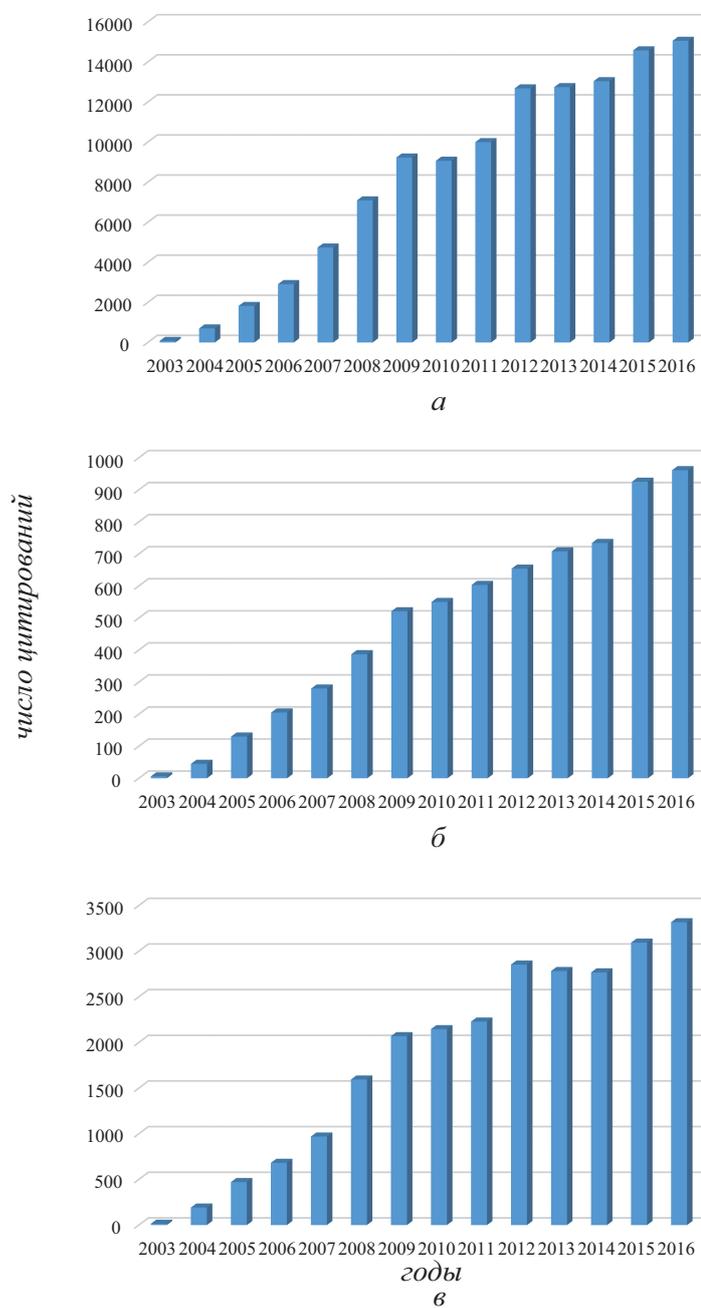


Рисунок 1 — Число цитирований публикаций в научных журналах, посвященных (а) хаотической синхронизации, (б) использованию хаотической синхронизации в нейронауке, и (в) применению хаотической синхронизации в информационно-телекоммуникационных системах, по годам (по данным Web of Science за февраль 2017 года)

практических применений этого режима [50, 74, 87–92]. Однако, результаты, полученные в этой области, ставили новые вопросы, касающиеся исследования обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах. Такими вопросами, которым и посвящена настоящая диссертационная работа, являются, например, влияние шума на установление режима обобщенной синхронизации, возможность возникновения этого режима в случае взаимодействия хаотических и периодических систем, практические приложения этих режимов, возможность наблюдения обобщенной синхронизации в бинарных системах и другие.

Позднее было обнаружено, что режим обобщенной синхронизации может наблюдаться не только в системах с однонаправленным типом связи, но и во взаимно связанных системах и сетях связанных нелинейных элементов. Однако, работы, известные в этом направлении (см., например, [93–96]), сводились лишь к констатации факта возможности существования этого режима, в то время как само понятие обобщенной синхронизации для систем с взаимным типом связи не обсуждалось и даже не вводилось в рассмотрение. Авторами упомянутых выше работ полагалось, что для систем с взаимным типом связи то же самое определение обобщенной синхронизации, что и для случая однонаправленного характера связи, должно быть справедливым, при этом наиболее эффективный метод диагностики этого режима, а именно, метод вспомогательной системы, был модифицирован применительно к системам с взаимным типом связи [93]. Следует особо подчеркнуть, что несмотря на то, что предложенная модификация метода вспомогательной системы была достаточно широко использована исследователями (см., например, [94, 97–99]), правомерность такого подхода и корректность полученных результатов нигде не обсуждались. В настоящей диссертационной работе этим вопросам уделено особое внимание: разработана непротиворечивая концепция обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи (в двух взаимно связанных системах и в сетях связанных нелинейных элементов) и доказана ее справедливость.

Разработанная концепция обобщенной хаотической синхронизации во взаимно связанных системах и сетях допускает предельный переход к хорошо известному случаю однонаправленной связи между системами. Однако, и здесь необходимы уточнения. В диссертационной работе установлено, что традиционная концепция обобщенной синхронизации нуждается в корректировке, что влечет за собой разработку новых методов диагностики этого режима, справедливых для систем с различным типом связи, и даже допускающих возможность их применения для анализа реальных систем. Кроме того, предложенная концепция вносит свои корректировки в теорию сильной и слабой синхронизации, при этом, к счастью, не влияя ни качественно, ни количественно на работоспособность большинства известных методов диагностики этих режимов.

Другим важным вопросом, результатам рассмотрения которого посвящена настоящая диссертационная работа, является исследование перемежающегося поведения, в том числе на границах возникновения синхронных режимов. В настоящее время известно, что перемежаемость является одним из наиболее распространенных нелинейных явлений в природе [100–102]. Она наблюдается, например, в гидродинамике (перемежающаяся структура течения при больших числах Рейнольдса) [103], в нейрофизиологии (при чередовании судорожной активности и “нормального” функционирования мозга у человека и животных, предрасположенных к эпилепсии) [104], в радиофизических системах [105]. Она является одним из классических сценариев при переходе от периодических колебаний к хаотическим [100, 106] и, как отмечалось выше, наблюдается вблизи границ различных типов хаотической синхронизации [107–111]. Не является исключением и режим обобщенной синхронизации, на границе которого в случае однонаправленной связи между системами имеет место перемежаемость типа “on–off” [110]. Однако, перемежающееся поведение на границах ряда других типов хаотической синхронизации изучено не столь подробно. Вызывают вопросы проблемы взаимосвязи режимов перемежаемости, имеющих место на границе фазовой синхронизации [112] связанных хаотических систем и синхрон-

ного режима, имеющего место в неавтономных периодических системах, подверженных дополнительному шумовому воздействию, проявления перемежающегося поведения на границах синхронных режимов в системах с бистабильным типом аттрактора, а также на различных временных масштабах наблюдения, тип перемежаемости, имеющей место на границе синхронизации, индуцированной шумом, количественные характеристики перемежаемости и другое. Особый интерес вызывает возможность одновременного существования нескольких различных типов перемежаемости в нелинейных системах, в том числе вблизи границ возникновения синхронных режимов, и выявление условий, при которых такая возможность возникает. Исследованию этих и некоторых других смежных с ними вопросов и посвящена настоящая диссертационная работа.

Таким образом, на основе приведенного рассмотрения можно сделать вывод о том, что актуальных вопросов, требующих дальнейшего изучения в области хаотической синхронизации и ее возможных приложений, оказывается достаточно много, а тема настоящей диссертационной работы является и по сей день актуальной и важной для современной радиофизики.

Цель диссертационной работы

Целью настоящей диссертационной работы является детальное изучение различных типов хаотической синхронизации (преимущественно обобщенной синхронизации) и перемежающегося поведения, имеющегося место на границах различных типов синхронного поведения, в неавтономных и связанных системах с малым числом степеней свободы, пространственно-распределенных средах и сетях связанных нелинейных элементов для выявления общих закономерностей возникновения синхронных режимов в таких системах, а также разработка новых методов их анализа и поиск возможных практических приложений.

В соответствии с поставленной целью определены основные задачи диссертационного исследования:

- изучение влияния шума на границу возникновения режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных хаотических системах;
- исследование возможности возникновения режима обобщенной синхронизации в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на систему, находящуюся в сложнопериодическом режиме;
- применение обобщенной синхронизации в присутствии шума для скрытой передачи информации;
- изучение режима обобщенной синхронизации в бинарных системах;
- анализ обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах и сетях нелинейных элементов;
- разработка новых методов диагностики обобщенной синхронизации;
- исследование перемежающегося поведения на границах различных типов хаотической синхронизации;
- анализ возможности одновременного существования двух различных типов перемежаемости в модельных и реальных системах;
- разработка методов оценки степени синхронности перемежающейся фазовой синхронизации по временным рядам.

Научная новизна

Диссертационная работа содержит принципиально новые научные результаты в области исследования хаотической синхронизации и ее возможных практических приложений. Результаты, изложенные в диссертационной работе позволяют существенно продвинуться в понимании глубинных механизмов изучаемой проблемы, заполняя существующие пробелы в теории хаотической синхронизации для систем с малым числом степеней свободы, пространственно-распределенных сред и сетей

связанных нелинейных элементов. В то же самое время, результаты диссертационной работы находятся в хорошем соответствии с уже существующими знаниями в этой области науки, гармонично расширяя и дополняя их. Свидетельством несомненной новизны полученных в диссертационной работе результатов является их публикация в целом ряде научных статей в рецензируемых отечественных и зарубежных научных журналах, входящих в международные системы цитирования Web of Science и Scopus, с высоким импакт-фактором. Диссертационная работа соответствует пп. 1,4 паспорта специальности “01.04.03 — Радиофизика”.

Впервые получены следующие научные результаты:

- Исследовано влияние шума на установление обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных хаотических системах. Показана высокая степень устойчивости этого режима по отношению к шумам.
- Обнаружена обобщенная синхронизация в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на систему с периодической динамикой. Показана возможность использования этого режима для скрытой передачи информации.
- Предложены способы скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума. Установлено, что они позволяют повысить конфиденциальность передачи информации и упростить возможность технической реализации таких схем и устройств.
- Обнаружены режимы обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом в бинарных системах, выявлена взаимосвязь между ними.
- Обнаружена обобщенная синхронизация в системах с взаимным типом связи: двух взаимно связанных системах и сетях связанных нелинейных элементов. Построена теория обобщенной синхронизации в данном случае и проведена ее численная верификация.

- Показано, что традиционная концепция обобщенной синхронизации нуждается в корректировке и уточнении. Предложен новый подход к анализу обобщенной синхронизации, основанный на рассмотрении трубок траекторий в фазовом пространстве взаимодействующих систем (метод фазовых трубок) и показана его эффективность на системах с малым числом степеней свободы, пространственно-распределенных средах и сетях нелинейных элементов.
- Установлено, что на границе синхронизации, индуцированной шумом имеет место перемежаемость типа “on-off”, а в режиме фазовой синхронизации на граничных временных масштабах наблюдается перемежаемость “кольца”.
- Исследована взаимосвязь режимов перемежаемости “игольного ушка” и типа I с шумом в закритической области значений управляющих параметров. Установлено, что эти режимы являются проявлениями одного и того же типа перемежаемости.
- Предложен метод оценки степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации по временным рядам, основанный на расчете нулевого условного показателя Ляпунова. Его эффективность проверена на модельных системах с малым числом степеней свободы. Применение метода к данным электроэнцефалограмм крыс линии WAG/Rij позволило выявить различную степень синхронности разных областей головного мозга крысы по отношению друг к другу.
- Обнаружен принципиально новый тип поведения взаимодействующих систем, при котором два и более типа перемежаемости наблюдаются одновременно (так называемый режим “перемежаемости перемежаемостей”). Построена теория “перемежаемости перемежаемостей” в нелинейных системах. Показано, что этот режим имеет место как в модельных системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах, в том числе вблизи

границ возникновения синхронных режимов, так и наблюдается в реальных физиологических и физических системах.

Личный вклад

Результаты, вошедшие в настоящую диссертационную работу, получены соискателем лично, либо под его научным руководством. Из работ, опубликованных в соавторстве, в диссертационную работу включены результаты и положения, выносимые на защиту, принадлежащие самому автору лично, либо полученные при его непосредственном участии. Выбор направления исследования, формулировка и постановка задач, проведение теоретических и численных исследований и расчетов, обработка и интерпретация полученных результатов осуществлены лично соискателем. Ряд работ, опубликованных в соавторстве с профессорами А.А. Короновским и А.Е. Храмовым, выполнены в равных долях, работы в соавторстве с к.ф.-м.н. С.А. Шурыгиной, к.ф.-м.н. А.С. Павловым, А.А. Косицыным, А.Д. Колосковой и часть работ в соавторстве с к.ф.-м.н. М.О. Журавлевым выполнены под научным руководством автора. Постановка эксперимента и получение экспериментальных временных реализаций при изучении влияния шума на обобщенную синхронизацию и определении характеристик перемежающегося поведения на граничных временных масштабах наблюдения осуществлены к.ф.-м.н. А.А. Овчинниковым. Записи сигналов дыхания и электрокардиограммы человека были получены в Саратовском отделении ФГБУН “Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН” в научной группе под руководством д.ф.-м.н. В.И. Пономаренко и М.Д. Прохорова, а данные сигналов электроэнцефалограмм крыс линии WAG/Rij — в Радбаут университете Наймегена (Нидерланды) в лаборатории профессора Ж. ван Люжетаалара. Временные реализации легированного эрбием оптоволоконного лазера, находящегося под внешним шумовым воздействием, были получены в центре оптических исследований (Centro de Investigaciones en Optica), Гуанахуато (Мексика) в научной группе под

руководством профессора А.Н. Писарчика. Обработка предоставленных экспериментальных сигналов осуществлялась автором лично.

Научная и практическая значимость

В диссертационной работе решена крупная научная задача в области радиофизики и разработаны теоретические положения, формулирующие общие закономерности различных типов хаотической синхронизации (преимущественно обобщенной синхронизации) и перемежающегося поведения, имеющего место на границах различных типов синхронного поведения в неавтономных и связанных системах и сетях нелинейных элементов, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение. Результаты, полученные в этой области, являются, прежде всего, фундаментальными. Они оказали и будут оказывать существенное влияние на дальнейшее развитие научного направления, связанного с изучением сложной динамики систем с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных сред, в том числе хаотической синхронизации и перемежающегося поведения в таких системах. В частности, разработанная и уточненная в рамках выполнения диссертационной работы концепция обобщенной синхронизации в системах с однонаправленным и взаимным типами связи, а также сетей нелинейных элементов существенным образом изменила существующую теорию обобщенной синхронизации, что имеет чрезвычайно важное значение для развития науки, поскольку именно на теории основаны все возможные методы, подходы и практические приложения. Например, разработанные в рамках диссертационной работы новые методы анализа поведения сложных систем такие, как, например, метод фазовых трубок и метод выделения характерных фаз поведения систем по временным рядам, смогут в перспективе найти применение при обработке экспериментальных данных радиофизических и физиологических систем.

Ряд объектов исследования представляет собой модели реальных систем СВЧ электроники (например, низковольтные виркаторы), что

делает возможным применение полученных результатов в высокотехнологичных отраслях экономики. В частности, полученные результаты по исследованию хаотической синхронизации в системах СВЧ диапазона могут быть использованы при разработке информационно-телекоммуникационных систем, а разработанные компьютерные программы могут найти применение при автоматизированном проектировании на предприятиях, специализирующихся на проектировании, разработке и выпуске электронных компонент для информационно-телекоммуникационных систем и устройств.

Кроме того, выявленные фундаментальные аспекты явления обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах (высокая устойчивость к шумам, возможность диагностирования этого режима при взаимодействии периодических и хаотических систем и др.) позволили предложить на основе этого явления ряд способов скрытой передачи информации, позволяющих наряду с высокой устойчивостью к шумам преодолеть еще два недостатка, свойственных схемам и устройствам аналогичного назначения: низкую степень конфиденциальности передачи информации и трудности технической реализации. На предложенные способы скрытой передачи данных получено 3 патента Российской Федерации на изобретения [113–115].

Результаты исследования перемежающегося поведения в модельных системах с малым числом степеней свободы, пространственно-распределенных средах и реальных системах радиофизической и физиологической природы также вносят существенный вклад в развитие современной радиофизики (в части теории нелинейных колебаний) и биофизики как с фундаментальной, так и практической точек зрения. В частности, полученные результаты по исследованию характеристик “перемежаемости перемежаемостей” в физиологических системах смогут найти практическое применение в клинической практике для диагностики различных заболеваний, в частности, эпилепсии. Необходимо также подчеркнуть, что предложенный метод оценки степени синхронности поведения взаимодействующих систем по временным рядам

является более быстрым и эффективным по сравнению с известными аналогами. Он позволяет определить степень синхронности поведения взаимодействующих систем по достаточно коротким временным рядам, что позволит в перспективе более эффективно осуществлять обработку экспериментальных данных и диагностировать наличие и степень синхронного режима по нейрофизиологическим данным, что, в свою очередь, может быть полезно при обнаружении/использовании данного эффекта в практических приложениях, в частности, при осуществлении медицинской диагностики. Разработанные методы анализа физиологических систем защищены 4 патентами Российской Федерации на изобретения [116–119]. На разработанные в рамках диссертационной работы методы обработки данных получено 15 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ [120–134].

Результаты, изложенные в диссертационной работе, внедрены в учебный процесс подготовки бакалавров и магистров, обучающихся на факультете нелинейных процессов федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования “Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского” (СГУ), по направлениям подготовки “Прикладные математика и физика”, “Радиофизика”, “Информационные системы и технологии”, а также при подготовке кадров высшей квалификации (аспирантов) по направлению “Физика и астрономия” (направленности “Радиофизика”, “Биофизика”, “Физическая электроника”). Результаты, полученные в рамках выполнения настоящей диссертационной работы, частично вошли в материалы двух монографий [12, 15].

Основные научные положения и результаты, выносимые на защиту

1. Режим обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных хаотических системах с диссипативным типом связи обладает высокой устойчивостью по отношению к шумам: если мощность шума

оказывается сопоставимой с мощностью сигнала ведущей системы, независимо от типа системы и характера распределения случайной величины, шум практически не оказывает влияния на порог возникновения синхронного режима. Поведение взаимодействующих систем при дальнейшем увеличении интенсивности шума определяется свойствами самих систем: если системы характеризуются неограниченными бассейнами притяжения хаотического аттрактора, порог возникновения синхронного режима начинает меняться, достигая при очень больших значениях интенсивности шума величины, не зависящей от параметров ведущей системы; в случае ограниченного бассейна притяжения взаимодействующих систем увеличение интенсивности шума приводит к разрушению синхронного режима.

2. Способ скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума позволяет повысить конфиденциальность передачи информации, а также избавиться от требования идентичности к генераторам, располагающимся на различных сторонах канала связи. Замена генераторов хаотических колебаний в принимающем устройстве на аналогичные генераторы периодических сигналов позволяет упростить техническую реализацию таких схем.
3. Режимы обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, могут наблюдаться как в аналоговых, так и бинарных системах, при этом методы диагностики синхронных режимов являются одинаковыми в обоих случаях. Режим бинарной обобщенной синхронизации обладает высокой устойчивостью по отношению к шумам, а режим бинарной синхронизации, индуцированной шумом, может быть рассмотрен как частное проявление этого режима.
4. Наряду с системами с однонаправленным типом связи, возможно возникновение обобщенной синхронизации в двух взаимно связанных хаотических системах и сетях связанных нелинейных элемен-

тов. При этом диагностика синхронного режима может осуществляться также при помощи расчета спектра показателей Ляпунова для исследуемых систем и метода ближайших соседей, как и в случае однонаправленно связанных систем, а обобщение метода вспомогательной системы на взаимный тип связи приводит, как правило, к некорректным результатам.

5. Традиционная концепция обобщенной синхронизации однонаправленно и взаимно связанных систем с малым числом степеней свободы, пространственно-распределенных сред и сетей связанных нелинейных элементов нуждается в корректировке и уточнении, так как состояния взаимодействующих систем, находящихся в этом режиме, в общем случае оказываются связанными между собой при помощи функционала, а не функционального соотношения. Введенная корректировка не влияет на корректность результатов, полученных ранее в данной области, и не приводит к существенной модификации методов диагностики этого режима. Метод расчета спектра показателей Ляпунова и метод вспомогательной системы (для однонаправленной связи) остаются по-прежнему справедливыми, а метод ближайших соседей должен быть модифицирован (с учетом предыстории состояний взаимодействующих систем) в метод фазовых трубок.
6. На границах различных типов хаотической синхронизации, как правило, наблюдается перемежающееся поведение, при этом тип перемежаемости зависит от типа реализуемого синхронного режима: на границах режимов полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием, обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, имеет место перемежаемость типа “on-off”, на границе фазовой синхронизации в зависимости от величины расстройки между системами наблюдается либо перемежаемость “игольного ушка”, либо перемежаемость “кольца”, описанные в научной литературе, в режиме синхронизации временных масштабов на граничных временных масштабах наблюдения имеет место пере-

межаемость “кольца”, впервые обнаруженная в рамках проведенных исследований.

7. Перемежаемость “игольного ушка”, имеющая место на границе фазовой синхронизации в случае относительно слабых значений расстройки управляющих параметров взаимодействующих систем, и перемежаемость типа I в присутствии шума, наблюдающаяся в закритической области значений управляющих параметров периодических систем, подверженных внешнему шумовому воздействию, являются проявлением одного и того же типа перемежающегося поведения: в обоих случаях имеет место экспоненциальный характер распределения длительностей ламинарных фаз, выражения для зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности могут быть сведены друг к другу, и для обоих типов перемежающегося поведения наблюдается одинаковое поведение верхней границы синхронного режима.
8. На границе обобщенной синхронизации в системах с бистабильным типом аттрактора наблюдается перемежающееся поведение, характеристики которого (экспоненциальный характер распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра связи) соответствуют индуцированной шумом перемежаемости в бистабильных системах, теория которой построена в рамках проведенных исследований.
9. Метод оценки величины нулевого условного показателя Ляпунова в закритической области значений управляющего параметра по временному ряду может быть использован для определения степени синхронности поведения взаимодействующих систем, находящихся в режиме фазовой синхронизации и перемежающейся фазовой синхронизации. Применение этого метода к данным электроэнцефалограмм крыс линии WAG/Rij позволяет установить, что разные области головного мозга крысы характеризуются различной степенью синхронности их динамики.

10. В модельных системах с непрерывным и дискретным временем, а также в моделях пространственно-распределенных систем возможно одновременное существование двух различных типов перемежаемости, так называемый режим “перемежаемости перемежаемостей”, причем характеристики этого типа могут быть получены на основе одной и той же теории, конкретизированной для типов перемежаемости, наблюдающихся одновременно. Аналогичный тип поведения наблюдается также вблизи границы фазовой хаотической синхронизации однонаправленно связанных хаотических систем в том случае, если на ведомую систему оказывается дополнительное шумовое воздействие или на ее выходе находится дополнительный полосовой фильтр, а также в реальных физиологических и физических системах.
11. При взаимодействии сердечно-сосудистой и дыхательной систем человека возможно наблюдать одновременное существование двух различных типов перемежаемости (перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”) при рассмотрении динамики на различных временных масштабах наблюдения. При развитии эпилептической активности в таламо-кортикальной сети головного мозга крыс линии WAG/Rij наблюдается перемежаемость перемежаемостей типа “on-off + on-off”, характеризующаяся степенным распределением длительностей ламинарных фаз с показателем степени “минус два”. В легированном эрбием оптоволоконном лазере с модулированным параметром, находящемся под действием шума, имеет место одновременное существование до четырех характерных колебательных режимов, статистические характеристики длительностей которых в общем случае не соответствуют ни одному из известных типов “перемежаемости перемежаемостей”.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из Введения, пяти глав и Заключения. Диссертационную работу условно можно разделить на три части. Первая часть (главы 1—3) посвящена исследованию особенностей режима обобщенной синхронизации в однонаправленно, взаимно связанных системах и сетях связанных нелинейных элементов. Во второй части (в главе 4) рассмотрены явления на границах различных типов хаотической синхронизации, включая режим обобщенной синхронизации, — различные типы перемежающейся синхронизации, — и выявлены некоторые неизвестные ранее закономерности возникновения этих режимов. В третьей части (в главе 5) рассмотрено новое явление — “перемежаемость перемежаемостей” и исследованы механизмы его возникновения, в том числе на границах синхронных режимов. Логика построения каждой главы подчиняется одному и тому же принципу: сначала описывается современное состояние исследуемой проблемы и результаты, известные в данной области, формулируются цели и задачи исследования, решению которых посвящаются остальные разделы главы диссертационной работы, содержащие оригинальные результаты автора.

Диссертационная работа содержит 435 страниц текста, включая 122 иллюстрации и 4 таблицы. Список литературы содержит 445 наименований.

Во **Введении** обоснована актуальность выбранной темы диссертационной работы, сформулирована цель работы, описаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Введение содержит основные положения и результаты, выносимые на защиту, сведения о достоверности и апробации результатов.

В **первой главе** диссертационной работы описаны результаты исследования обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных хаотических системах. В начале главы дается определение режима обобщенной синхронизации, описываются методы его диагностики и механизмы возникновения в системах с диссипативным и недиссипативным

типами связи, обсуждается взаимосвязь этого явления с режимом индуцированной шумом синхронизации. Дальнейшее изложение материала главы посвящено описанию результатов исследования влияния шума на возникновение синхронного режима. Путем теоретического, численного и экспериментального исследования модельных систем с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных сред, находящихся в режиме пространственно-временного хаоса, показано, что режим обобщенной синхронизации в диссипативно связанных динамических системах обладает высокой устойчивостью по отношению к шумам: даже если мощность шума оказывается сопоставимой с мощностью хаотического сигнала ведущей системы, шум практически не оказывает влияния на порог возникновения синхронного режима [135–139]. Причины устойчивости режима обобщенной синхронизации по отношению к шумам объяснены при помощи метода модифицированной системы. Показано, что поведение порогового значения возникновения синхронного режима при дальнейшем увеличении интенсивности шума определяется свойствами самих систем. Если системы характеризуются неограниченными бассейнами притяжения хаотических аттракторов, порог возникновения синхронного режима начинает меняться (либо монотонно снижаться, либо монотонно расти), достигая при очень больших значениях интенсивности шума величины, не зависящей от параметров ведущей системы, что соответствует переходу режима обобщенной синхронизации в режим синхронизации, индуцированной шумом. В случае ограниченного бассейна притяжения взаимодействующих систем при достаточно больших значениях интенсивности шума синхронный режим разрушается.

Еще одним вопросом, рассмотренным в первой главе, является изучение возможности возникновения обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах в том случае, когда ведущая система находится в хаотическом режиме, а ведомая демонстрирует сложнопериодическую динамику. Показано, что и в системах с малым числом степеней свободы, и пространственно-распределенных средах существует

возможность возникновения такого режима [140]. Выявлены механизмы возникновения режима обобщенной синхронизации в данном случае. Показано, что этот режим оказывается также устойчивым по отношению к шумам.

В этой же главе рассмотрена возможность возникновения режимов обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, в бинарных системах [141, 142]. Сконструированы модельные системы с непрерывным и дискретным временем, способные демонстрировать режимы бинарной обобщенной синхронизации или бинарной синхронизации, индуцированной шумом. Рассмотрены методы диагностики и механизмы возникновения этих режимов. Установлено, что они являются теми же, что и в случае традиционных режимов обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом.

Отдельно рассмотрен вопрос о практических приложениях режима обобщенной синхронизации в присутствии шума. Предложен ряд способов скрытой передачи информации на основе режимов обобщенной синхронизации хаотических осцилляторов в присутствии шума, обобщенной синхронизации в случае взаимодействия хаотической системы с генератором, демонстрирующим периодическую динамику, того же режима обобщенной синхронизации, но в присутствии дополнительных шумов [113–115, 140, 143–146]. Показано, что добавление шума приводит к повышению степени конфиденциальности передачи информации, в то время как замена хаотических генераторов принимающего устройства на аналогичные генераторы сложнопериодических колебаний позволяет ликвидировать проблему нестабильности работы схем при неидентичности управляющих параметров генераторов принимающего устройства. Таким образом, способ скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума в случае воздействия хаотического сигнала на периодические генераторы позволяет преодолеть две вышеуказанные проблемы одновременно. Показана возможность повышения конфиденциальности способов передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума путем модуляции ха-

рактик шумового сигнала заведомо ложным информационным сообщением.

Вторая глава диссертационной работы посвящена изложению результатов исследования обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи: двух взаимно связанных хаотических системах и сетях связанных нелинейных элементов. Как отмечалось выше, понятие обобщенной синхронизации было изначально введено в рассмотрение только для однонаправленно связанных динамических систем, а попытки “расширения” этого понятия на случай взаимной связи сводились лишь к диагностике этого режима при помощи метода вспомогательной системы [69], адаптированного на случай взаимной связи [93, 95, 96]. В настоящей главе диссертационной работы показано, что предложенная модификация метода вспомогательной системы оказывается некорректной и приводит к противоречивым результатам, что говорит о невозможности применения метода вспомогательной системы к системам с взаимным типом связи [147].

В рамках диссертационной работы разработана непротиворечивая концепция режима обобщенной синхронизации для случая двух взаимно связанных систем [148]. Показано, что данная концепция допускает предельный переход к случаю обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах, рассмотренному в первой главе, и устраняет концептуальные противоречия, отмеченные выше. Установлено, что для взаимодействующих хаотических осцилляторов¹ (каждый из которых в автономном режиме характеризуется одним положительным показателем Ляпунова) установление обобщенной синхронизации в случае взаимного типа связи связано с переходом второго (положительного) показателя Ляпунова, рассчитанного для общего совместного фазового пространства взаимодействующих систем, в область отрицательных значений. Полученные результаты подтверждены при помощи метода ближайших соседей [67]. При этом, как отмечалось выше, обнаруже-

¹Здесь и далее речь идет именно о случае хаотических колебаний (характеризующихся одним положительным показателем Ляпунова), а не гиперхаотических (где положительных показателей Ляпунова может быть несколько).

но, что обобщение метода вспомогательной системы на случай систем с взаимным типом связи, предложенное в [93], приводит к некорректным результатам, диагностируя установление обобщенной синхронизации уже после порогов наступления полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием, что противоречит самому определению режима обобщенной синхронизации. Полученные результаты проиллюстрированы на примерах связанных потоковых систем (осцилляторы Ресслера, Лоренца, Кияшко-Пиковского-Рабиновича) и дискретных отображений (логистические отображения, отображения Эно).

Предложенная концепция обобщена на пространственно-распределенные системы. В частности, на примере гидродинамических моделей диодов Пирса, связанных взаимно, обнаружено, что схожие закономерности установления синхронного режима имеют место и в данном случае. При этом, те же самые методы диагностики обобщенной синхронизации (метод расчета спектра показателей Ляпунова и метод ближайших соседей) могут быть применены к анализу синхронного режима в пространственно-распределенных системах. Однако, в виду специфики пространственно-распределенных систем, эти методы нуждаются в обобщении и адаптации. Предложена модификация метода ближайших соседей для исследуемых моделей пространственно-распределенных систем. Показано, что в данном случае он может быть применен к конечномерной системе, полученной из исходной пространственно-распределенной среды путем восстановления аттракторов взаимодействующих систем в отдельной точке пространства взаимодействия методом Такенса [149]. Такой подход позволяет установить, что критерии наличия обобщенной синхронизации в данном случае являются теми же, что и в случае рассмотрения взаимно связанных конечномерных систем с сосредоточенными параметрами.

Разработан метод расчета спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем, описываемых уравнениями в частных производных [150]. Метод представляет собой модификацию процедуры ортогонализации Грамма-Шмидта, традиционно используе-

мой для вычисления спектра ляпуновских показателей в системах с сосредоточенными параметрами. Основные отличия от известного ранее случая заключаются в том, что пространственно-распределенные системы характеризуются бесконечномерным фазовым пространством, а следовательно, количество показателей Ляпунова, однозначно характеризующих поведение пространственно-распределенной системы, должно быть также бесконечным. В таком случае вместо конечномерного вектора малой размерности поведение системы будет характеризоваться состоянием (зависящим как от времени, так и пространственной координаты), которое для каждой системы определяется по-своему, а процедура перенормировки и ортогонализации векторов возмущений, имеющая место для систем с конечномерным фазовым пространством, должна быть модифицирована для перенормировки и ортогонализации состояний. При этом, сама методология расчета показателей Ляпунова останется практически неизменной. Метод апробирован на автономных моделях пространственно-распределенных систем (диод Пирса [150, 151], лампа обратной волны с поперечным полем [150], полупроводниковая сверхрешетка [152, 153]), а также двух однонаправлено связанных гидродинамических моделях диодов Пирса, находящихся в режиме обобщенной синхронизации [150, 151]. Проведено исследование режима обобщенной хаотической синхронизации во взаимно связанных диодах Пирса, находящихся в режиме пространственно-временного хаоса. Показано, что при различных значениях управляющих параметров взаимодействующих систем переход второго (положительного) пространственного показателя Ляпунова, рассчитанного для общего фазового пространства взаимодействующих пространственно-распределенных хаотических осцилляторов, в область отрицательных значений соответствует порогу возникновения режима обобщенной синхронизации. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами метода ближайших соседей, также адаптированного на случай пространственно-распределенных систем.

Разработанная концепция обобщенной синхронизации в системах с малым числом степеней свободы с взаимным типом связи расширена на сети связанных нелинейных элементов, в узлах которых находятся хаотические динамические системы. Показано, что диагностирование обобщенной синхронизации в данном случае, также как и в случае двух связанных хаотических систем, возможно по моменту перехода второго по старшинству показателя Ляпунова, рассчитанного для общего фазового пространства взаимодействующих осцилляторов, в область отрицательных значений. Для подтверждения полученных результатов произведена адаптация метода ближайших соседей для сложных сетей. Показано, что метод расчета спектра показателей Ляпунова и метод ближайших соседей для сетей приводят к корректным результатам, а, следовательно, по аналогии со случаем двух связанных систем, эти методы могут быть с успехом использованы для диагностики обобщенной синхронизации в системах, состоящих из большого числа взаимодействующих друг с другом элементов. Выявлены механизмы возникновения обобщенной синхронизации в сетях связанных нелинейных элементов, для чего была предложена модификация метода модифицированной системы, обобщенная на случай сложных сетей.

В **третьей главе** диссертационной работы показана необходимость пересмотра и уточнения существующей концепции обобщенной синхронизации однонаправленно, взаимно связанных систем и сетей связанных нелинейных элементов. Путем рассмотрения различных классов динамических систем (поточные динамические системы, дискретные отображения, пространственно-распределенные среды) установлено, что состояния взаимодействующих систем в общем случае оказываются связанными между собой при помощи функционала, а не функционального соотношения, как это считалось ранее научным сообществом. Это означает, что в режиме обобщенной синхронизации состояние одной из взаимодействующих систем в определенный момент времени определяется не только состоянием другой системы в текущий момент времени, но и предысторией этого состояния на протяжении интервала време-

ни, длительность которого определяется абсолютной величиной самого старшего показателя Ляпунова из перешедших в область отрицательных значений. Показано, что по мере перехода от режима обобщенной синхронизации к полной синхронизации, абсолютная величина этого показателя Ляпунова увеличивается, а длина предыстории, необходимой для однозначного определения состояния другой системы, соответственно, уменьшается, и в режиме, близком к полной синхронизации, оказывается близкой к нулю. В этом случае функционал вырождается в функциональное соотношение, и все полученные ранее результаты по-прежнему оказываются справедливыми. В то же самое время, введенная корректировка определения обобщенной синхронизации не влияет на критерии диагностики синхронного режима: метод расчета спектра показателей Ляпунова останется по-прежнему справедливым. Однако, указанная корректировка ведет к модификации метода ближайших соседей: “подходящими” оказываются не все состояния, являющиеся близкими к опорному в заданный момент времени, а только те состояния, которые будут оставаться близкими на всей длине предыстории. Вместо метода ближайших соседей в диссертационной работе предложен метод фазовых трубок, позволяющий корректно учесть предысторию, и проведена его апробация на системах с непрерывным [154] и дискретным [155] временем. Для систем с дискретным временем установлено, что введенная модификация приводит к пересмотру существующей концепции сильной и слабой обобщенной синхронизации [70]. Метод обобщен на случай пространственно-распределенных систем [156] и сетей связанных нелинейных элементов [157, 158]. Для сетей связанных нелинейных элементов при помощи метода фазовых трубок выявлены механизмы, ответственные за последовательный переход показателей Ляпунова в область отрицательных значений.

Четвертая глава диссертационной работы посвящена изложению результатов исследования перемежающегося поведения, имеющего место на границах различных типов хаотической синхронизации, в том числе на границе обобщенной синхронизации. В этой главе описаны как

известные, так и новые, обнаруженные в рамках настоящей диссертационной работы типы перемежающегося синхронного поведения и дана их классификация. Так, до недавнего времени было известно, что на границах полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием и обобщенной синхронизации (для однонаправленно связанных хаотических систем) имеет место перемежаемость типа “on-off”. Аналогичный тип перемежаемости обнаружен в настоящей диссертационной работе на границе синхронизации, индуцированной шумом [159, 160]. Тип перемежаемости, реализующийся во взаимодействующих однонаправленно или взаимно связанных хаотических системах на границе фазовой синхронизации, зависит от величины расстройки между этими системами: в случае относительно слабой расстройки наблюдается перемежаемость “игольного ушка” [107, 161], при большой — имеет место перемежаемость “кольца” [111]. Установлено, что перемежаемость “игольного ушка” и перемежаемость типа I в присутствии шума, наблюдающаяся в неавтономных периодических системах, подверженных дополнительному шумовому воздействию, на границе синхронного режима в закритической области значений управляющих параметров, являются проявлением одного и того же типа перемежающегося поведения: распределения длительностей ламинарных фаз для обоих типов перемежаемости подчиняются экспоненциальному закону, теоретические закономерности для зависимостей средних длительностей ламинарных фаз от параметра надкритичности сводятся друг к другу, а верхние границы синхронных режимов демонстрируют одинаковое поведение [162, 163].

Изучено проявление перемежающегося поведения на различных временных масштабах наблюдения. При помощи аппарата непрерывного вейвлетного анализа путем численного моделирования и экспериментальных исследований установлена возможность наблюдения перемежаемости “кольца” в режиме фазовой синхронизации в определенном диапазоне временных масштабов наблюдения [164–166].

Отдельно рассмотрен вопрос о перемежаемости в мультистабильных системах, подверженных дополнительному шумовому воздействию.

Установлена возможность возникновения так называемой индуцированной шумом перемежаемости в данном случае, в результате чего мультистабильная система переходит в метастабильную, демонстрируя постоянные переключения между сосуществующими режимами. Предложена теория индуцированной шумом перемежаемости в бистабильных системах, получены теоретические закономерности для распределений длительностей наблюдения сосуществующих режимов и зависимостей их средних длительностей от управляющих параметров. Показано, что в обоих случаях имеет место экспоненциальный характер зависимостей. Полученные результаты подтверждены при помощи численного моделирования поведения модельной бистабильной системы. Обнаружено, что аналогичные закономерности наблюдаются на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных динамических системах с бистабильным типом аттрактора.

Предложен метод оценки степени синхронности перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду, основанный на оценке величины нулевого условного показателя Ляпунова [127]. Апробация метода проведена на модельных потоковых системах и дискретных отображениях, находящихся в режимах фазовой или перемежающейся фазовой синхронизации, допускающих расчет спектра показателей Ляпунова при помощи классических методов и алгоритмов. Произведена оценка точности разработанного метода для различных моделей динамических систем. Метод применен для определения степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации, устанавливающейся между различными областями головного мозга крыс линии WAG/Rij, имеющих генетическую предрасположенность к эпилепсии [167, 168].

В **пятой главе** диссертационной работы описан принципиально новый тип поведения нелинейных динамических систем, при котором в системе одновременно существуют (сосуществуют) два различных типа перемежающегося поведения. Такой режим назван “перемежаемостью перемежаемостей”. Построена общая теория данного типа поведения, получены аналитические выражения для распределения длительностей

ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности [169].

Осуществлен поиск систем с непрерывным и дискретным временем, способных при фиксированных значениях управляющих параметров одновременно демонстрировать два различных типа перемежающегося поведения. Поиск модельной системы с дискретным временем осуществлялся путем конструирования такой системы из эталонных моделей дискретных отображений — двух связанных между собой отображений окружности [170], одно из которых в отсутствие связи демонстрирует режим перемежаемости типа I, другое — перемежаемость “игольного ушка”. Добавление связи между ними приводит к тому, что в определенном диапазоне значений управляющих параметров в исследуемой системе эти два типа перемежаемости будут существовать одновременно. На основании разработанной общей теории сосуществования двух различных типов перемежаемости получены теоретические закономерности для распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности при перемежаемости перемежаемостей типа I и “игольного ушка”. Статистические характеристики длительностей ламинарных фаз получены также численно для исследуемой системы. Показано хорошее соответствие аналитически и численно полученных результатов.

В качестве модельных систем с непрерывным временем выбраны две однонаправленно связанные хаотические системы Ресслера и неавтономный автогенератор Ван дер Поля в присутствии шума, находящиеся вблизи границы (фазовой) синхронизации. Управляющие параметры взаимодействующих систем выбраны таким образом, чтобы в исследуемых системах реализовывалось перемежающееся поведение, перемежаемость “игольного ушка” в системах Ресслера и перемежаемость типа I в присутствии шума в автогенераторе Ван дер Поля, которые, как было установлено в главе 4, представляют собой один и тот же тип перемежаемости. В диссертационной работе установлено, что при рассмотрении поведения таких систем на граничных временных масштабах наблюде-

ния при определенных значениях параметра связи и на определенных временных масштабах возможно одновременное существование режимов перемежаемости “игольного ушка” (типа I с шумом) и “кольца”. Численно получены статистические характеристики длительностей ламинарных фаз (распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметров надкритичности (параметра связи и временного масштаба)) в данном случае, полученные результаты сопоставлены с аналитическими закономерностями, конкретизированными на основе общей теории для перемежаемости перемежаемостей “игольное ушко – кольцо” [171–173].

В роли моделей пространственно-распределенных сред, способных демонстрировать “перемежаемость перемежаемостей”, выбрана система двух однонаправленно связанных диодов Пирса, рассмотрение которой проводилось также при помощи непрерывного вейвлетного преобразования вблизи границы фазовой синхронизации на различных временных масштабах наблюдения. Показано, что, как и в случае систем с малым числом степеней свободы, в определенных диапазонах значений параметра связи и временного масштаба возможно одновременное наблюдение перемежаемости “игольного ушка”, имеющей место на границе фазовой синхронизации на основном временной масштабе, и перемежаемости “кольца”, наблюдающейся в режиме фазовой синхронизации на граничных временных масштабах. Для подтверждения полученных результатов произведен расчет статистических характеристик длительностей ламинарных фаз для всех типов перемежаемости, упомянутых выше. Полученные результаты сопоставлены с известными теоретическими закономерностями. Установлено, что теория сосуществования режимов перемежаемости “игольного ушка” и “кольца”, построенная для систем с малым числом степеней свободы, для пространственно-распределенных систем нуждается в уточнении, что связано с необходимостью корректировки (выполнение экспоненциального закона в широком, но ограниченном диапазоне) аналитической закономерности для распределения длительностей ламинарных фаз в режиме перемежаемости “игольного

ушка”, что было несущественно для систем с малым числом степеней свободы. На основе общей теории сосуществования двух различных типов перемежаемости в нелинейных системах получены аналитические закономерности для распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности в режиме перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” в пространственно-распределенных системах. Аналитические закономерности сопоставлены с результатами численного моделирования, получено хорошее соответствие между ними [174, 175].

Изучен вопрос о возможности возникновения “перемежаемости перемежаемостей” на границе фазовой хаотической синхронизации в присутствии шума [176, 177]. В качестве объектов исследования выбраны как системы с малым числом степеней свободы (две однонаправленно связанные хаотические системы Ресслера), так и пространственно-распределенные активные среды (гидродинамические модели диодов Пирса в случае однонаправленной связи), находящиеся под действием шума. Проведено численное моделирование таких систем. Показано, что в обоих рассмотренных случаях шум малой интенсивности практически не оказывает влияния на характеристики перемежаемости: в случае слабой расстройки между системами на границе синхронного режима имеет место перемежаемость “игольного ушка”. Увеличение интенсивности шума приводит к сдвигу порогового значения возникновения синхронного режима в сторону больших значений параметра связи, что обусловлено потерей фазовой когерентности хаотическим аттрактором ведомой системы. В результате на границе фазовой синхронизации в закритической области управляющих параметров возникает перемежаемость “кольца”, а в докритической области имеет место сосуществование перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” одновременно [176].

Еще одним классом сложных систем, рассмотренных в рамках пятой главы диссертационной работы, являются модели неавтономных систем с сосредоточенными параметрами, находящиеся вблизи границы фазовой синхронизации, на выходе которых находится дополнительный по-

лосовой фильтр, влияющий на характеристики снимаемого с генератора сигнала. В качестве модели такой системы рассмотрены однонаправленно связанные генераторы Кияшко-Пиковского-Рабиновича, моделирование которых проводилось с использованием профессиональной среды моделирования электронных схем NI Multisim 9.0 [178]. В ходе проведенных исследований установлено, что полосовой фильтр, находящийся на выходе системы, оказывает то же влияние на анализируемый сигнал, что и непрерывное вейвлетное преобразование. Иными словами, если сигнал от анализируемой системы, находящейся вблизи границы фазовой синхронизации, а, следовательно, демонстрирующей перемежающееся поведение, подвергается предварительной фильтрации, то в этом случае существует возможность наблюдать явление “перемежаемости перемежаемостей” без рассмотрения динамики системы на различных временных масштабах. Показано, что, если взаимодействующие системы находятся в режиме фазовой синхронизации, при фильтрации сигнала в случае значительной отстройки вырезаемой фильтром частоты относительно собственной частоты системы, на выходе системы возникает перемежаемость “кольца”, что аналогично типу перемежаемости, реализующемуся в режиме фазовой синхронизации на граничных временных масштабах наблюдения (см. главу 4). Если же исследуемая система находится вблизи границы фазовой синхронизации, и, при этом, происходит фильтрация сигнала со значительной отстройкой частоты, вырезаемой фильтром, относительно собственной частоты системы, то в данном случае возможно одновременно наблюдать два различных типа перемежающегося поведения, перемежаемость “кольца” и перемежаемость “игольного ушка”, что также аналогично типу поведения, реализующемуся на границе фазовой синхронизации на различных временных масштабах. В отсутствие фильтрации при тех же значениях управляющих параметров в системе наблюдается перемежаемость “игольного ушка”. В рамках диссертационной работы рассмотрены также реальные системы физиологической и физической природы. Показано, что при рассмотрении взаимодействия сердечно-сосудистой и дыхательной систем

человека на граничных временных масштабах наблюдения по аналогии с модельными системами с малым числом степеней свободы и моделями пространственно-распределенных систем возможно пронаблюдать совместное существование режимов перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”. Кроме того установлено, что при развитии эпилептической активности в таламо-кортикальной сети головного мозга крыс линии WAG/Rij, имеющих генетическую предрасположенность к эпилепсии, наблюдается перемежаемость перемежаемостей типа “on-off + on-off”. Общая теория сосуществования двух различных типов перемежаемости конкретизирована на данный случай. Показано, что распределение длительностей ламинарных фаз при таком типе поведения подчиняется степенному закону с показателем степени “минус два”. Получены численные распределения длительностей ламинарных фаз (интервалов времени между пик-волновыми разрядами или сонными веретенами) для электроэнцефалограмм пяти лабораторных животных. Во всех случаях получено хорошее соответствие численно полученных данных результатам теоретических предсказаний [179].

В качестве примера физической системы, в которой возможно наблюдать перемежающееся поведение между несколькими динамическими режимами, рассмотрен легированный эрбием оптоволоконный лазер с модулированным параметром, находящийся под действием шума. Для определения длительностей характерных режимов поведения разработан метод выделения характерных фаз, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании [180]. Обнаружено одновременное существование до четырех характерных колебательных режимов в такой системе. Показано, что в случае одновременного существования двух режимов статистические характеристики длительностей характерных фаз поведения удовлетворяют закономерностям, характерным для индуцированной шумом перемежаемости [181].

В **Заключении** подведены итоги диссертационной работы, сформулированы основные результаты и намечены направления возможных дальнейших исследований в данном направлении.

Достоверность полученных результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием строгих математических процедур, общеизвестных и общепринятых уравнений, описывающих динамику нелинейных систем, методов и подходов, строго обоснованных в научной литературе и хорошо зарекомендовавших себя при проведении научных исследований, обоснованным выбором параметров численных методов. Достоверность полученных результатов подтверждается их верификацией при сопоставлении результатов, полученных при помощи различных методов и подходов, друг с другом, включая аналитически, численно и экспериментально полученные данные, совпадением результатов при использовании различных методов диагностики колебательных режимов, воспроизводимостью результатов, а также отсутствием противоречий с известными в научной литературе достоверными общепризнанными результатами.

Апробация результатов и публикации

Настоящая диссертационная работа выполнена на кафедре физики открытых систем факультета нелинейных процессов ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» (СГУ).

Материалы диссертационной работы использовались при выполнении научно-исследовательских работ, проводимых в Отделении физики нелинейных систем НИИ Естественных наук СГУ и других организациях Российской Федерации, среди которых гранты Российского научного фонда (проекты №№ 14-12-00224, 14-12-00222, 14-12-00324), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 07-02-00044-а, 08-02-00102-а, 09-02-92421-КЭ_а, 09-02-00255-а, 10-02-90002-Бел_а, 11-02-00047-а, 12-02-33071-мол_а_вед, 12-02-90022-Бел_а, 12-02-00345-а, 12-02-00221-а, 13-02-90406-Укр_ф_а, 14-

02-00329-а, 15-32-20299-мол_а_вед, 15-52-45003-ИНД_а, 15-02-00624-а), Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых кандидатов (проекты №№ МК-672.2012.2, МК-807.2014.2, МК-4574.2016.2) и докторов (проект № МД-345.2013.2) наук, а также для государственной поддержки ведущих научных школ (проекты №№ НШ-355.2008.2, НШ-3407.2010.2, НШ-1430.2012.2, НШ-828.2014.2), Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.” (государственные контракты №№ 02.740.11.5068 от 20 июля 2009 г., П451 от 31 июля 2009 г., П1136 от 27 августа 2009 г., П1194 от 27 августа 2009 г., П1466 от 3 сентября 2009 г., П2492 от 20 ноября 2009 г., П586 от 18 мая 2010 г., соглашения №№ 14.В37.21.0059 от 16 июля 2012 г., 14.В37.21.0569 от 10 августа 2012 г., 14.В37.21.0751 от 27 августа 2012 г., 14.В37.21.0576 от 10 августа 2012 г., 14.В37.21.1289 от 21 сентября 2012 г., 14.В37.21.1207 от 18 сентября 2012 г.), Программ Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках базовой (проекты №№ 01201153911, 5.8146.2013, 1045) и конкурсной (проект № 23) частей Государственного задания, а также аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № 2.1.1/235).

Результаты, представленные в диссертационной работе, неоднократно докладывались на Всероссийских и Международных научных конференциях и семинарах и отражены в тезисах докладов: 18-ой Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”, 8-12 сентября 2008 г., Севастополь, Украина [182] (устный доклад), 12-ой Всероссийской школе-семинаре “Физика и применение микроволн (Волны-2009)”, 25-30 мая 2009 г., Москва, Российская Федерация [183] (приглашенный доклад), 17th International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, June 21-24, 2009, Rapperswil, Switzerland [184] (устный доклад), 2nd International Symposium “Topical problems of biophotonics”, July 19-24, 2009, Nizhny Novgorod, Russian Federation [185] (стендовый доклад), 19-ой Между-

народной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”, 14-18 сентября 2009 г., Севастополь, Украина [186] (устный доклад), International Workshop “Delayed Complex Systems”, October, 5-9, 2009, Max Planck Institute for Physics of Complex Systems, Dresden, Germany (устный доклад), 15-ой научной школе “Нелинейные волны - 2010”, 6–12 марта 2010 г., Нижний Новгород, Российская Федерация [187] (устный доклад), 18th IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Dresden University of Technology, May, 26-28, 2010, Dresden, Germany [188, 189] (устные доклады), 3rd Chaotic Modeling and Simulation International Conference, June, 1-4, 2010, Chania, Crete Greece [190, 191] (устные доклады), 20-ой Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”, 13-17 сентября 2010 г., Севастополь, Украина [192, 193] (устные доклады), 9-ой Международной школе “Хаотические автоколебания и образования структур (ХАОС-2010)”, 4-9 октября 2010 г., Саратов, Российская Федерация [194–198] (устные и стендовые доклады), 13-ой Всероссийской школе-семинаре “Физика и применение микроволн (Волны-2011)”, 23-28 мая 2011 г., Москва, Российская Федерация [199] (устный доклад), 15-ой Международной зимней школе-семинаре по электронике сверхвысоких частот и радиофизике, 6–11 февраля 2012 г., Саратов, Российская Федерация [200] (устный доклад), 13-ой Всероссийской школе-семинаре “Волновые явления в неоднородных средах (Волны-2012)”, 21-26 мая 2012 г., Москва, Российская Федерация [201, 202] (устные доклады), 22-ой Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”, 10-14 сентября 2012 г., Севастополь, Украина [203, 204] (устные доклады), 3-м Всероссийском научно-практическом форуме “Экология: синтез естественно-научного, технического и гуманитарного знания”, 10–12 октября 2012 г., Саратов, Российская Федерация [205, 206] (устные доклады), 14-ой Всероссийской школе-семинаре “Физика и применение микроволн (Волны-2013)”, 20-25 мая 2013 г., Москва, Российская Федерация [207–209] (стендовые доклады), 23th International Conference on Nonlinear Dynamics

of Electronic Systems, July 10-12, 2013, Bari, Italy [210–212] (устные доклады), 10-ой Международной школе “Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС-2013)”, 7-12 октября 2013 г., Саратов, Российская Федерация [213–215] (устные и стендовые доклады), Международной научно-технической конференции, приуроченной к 50-летию МРТИ–БГУИР, 18-19 марта 2014 г., Минск, Беларусь [216,217] (пленарный и устный доклады), 14-ой Всероссийской школе-семинаре “Волновые явления в неоднородных средах (Волны-2014)”, 26-31 мая 2014 г., Москва, Российская Федерация [218, 219] (устные и стендовые доклады), 8th European Nonlinear Dynamics Conference ENOC 2014, July 6-11, 2014, Vienna, Austria [220–222] (устные доклады), 9-ой Всероссийской научной конференции “Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”, 2-4 сентября 2014 г., Саратов, Российская Федерация [223] (устный доклад), 24-ой Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”, 7–13 сентября 2014 г., Севастополь, Российская Федерация [224] (устный доклад), 15-ой Всероссийской школе-семинаре “Физика и применение микроволн” имени А.П. Сухорукова (Волны-2015), 1-6 июня 2015 г., Москва, Российская Федерация [225–227] (стендовые доклады), UPM-BBVA Workshop “Recent Advances in Bioinformatics and Neuroscience”, June, 9-11, 2015, Madrid, Spain [228] (устный доклад), 17th International Conference on Nonlinear Dynamics and Control, August, 6-7, 2015, Amsterdam, The Netherlands [229] (устный доклад), X Всероссийской конференции “Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”, 8-10 сентября 2015, Саратов, Российская Федерация [230] (устный доклад), International Symposium Optics and Biophotonics-III “Saratov Fall Meeting 2015”, September 21-25, 2015, Saratov, Russian Federation [231] (устный доклад), International Russian-Indian Workshop, November 2-5, 2015, Saratov, Russian Federation [232–234] (приглашенная лекция и устные доклады), International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA-2015), December 1-4, 2015, Hong Kong, China [235] (устный доклад), 17-ой научной школе “Нелинейные волны - 2016”,

27 февраля - 4 марта 2016 г., Нижний Новгород, Российская Федерация [236] (стендовый доклад), 15-ой Всероссийской школе-семинаре “Волновые явления в неоднородных средах” имени профессора А.П. Сухорукова, 5-10 июня 2016 г., Москва, Российская Федерация [237, 238] (стендовые доклады), International Symposium Optics and Biophotonics-IV “Saratov Fall Meeting 2016”, September 27-30, 2016, Saratov, Russian Federation (устные доклады), International Workshop “Multistability and Tipping: From Mathematics and Physics to Climate and Brain”, October, 4-8, 2016, Max Planck Institute for Physics of Complex Systems, Dresden, Germany [239] (устный доклад), 11-ой Международной школе “Хаотические автоколебания и образование структур” (ХАОС-2016)”, 3-8 октября 2016 г., Саратов, Российская Федерация [240, 241] (стендовые доклады), всего 60 тезисов докладов или статей в материалах конференций. Результаты, изложенные в диссертационной работе, неоднократно обсуждались на научных семинарах кафедры электроники, колебаний и волн и факультета нелинейных процессов СГУ.

Результаты диссертационной работы опубликованы в центральных рецензируемых научных журналах, входящих в системы цитирования Web of Science, Scopus, РИНЦ, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук, среди которых Physical Review Letters [152], Applied Physics Letters [242], Physical Review B [153, 243], Physical Review E [147, 148, 154, 164, 179, 181, 244], Physics of Plasmas [150], CHAOS: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science [169, 245], Nonlinear Dynamics [175, 246], Physics Letters A [145, 163, 247], Chaos, Solitons & Fractals [141, 155, 176, 248, 249], European Physical Journal B [138], European Physical Journal Special Topics [250], Успехи физических наук [143], Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики [168], Журнал экспериментальной и теоретической физики [251], Письма в журнал технической физики [136, 142, 157, 170, 173, 252–260], Журнал технической физики [140, 144, 159, 165, 177], Радиотехника и электроника [137, 261–263], Известия РАН. Серия физиче-

ская [135, 158, 172, 174, 178, 180, 264–266], Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика [139, 146, 151, 162, 166, 171, 267], Нелинейная динамика [160], Proceedings of SPIE [167, 231, 268], Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики [269], Вестник Нижегородского государственного университета имени Н. И. Лобачевского [270, 271], Вестник Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина [156] (всего 76 статей). Автором получено 7 патентов Российской Федерации на изобретения [113–119] и 15 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ [120–134]. Результаты первой и четвертой глав диссертационной работы частично вошли в материалы двух монографий [12, 15].

Глава 1

Обобщенная синхронизация в однонаправлено связанных системах

[81, 85, 86, 113–115, 133, 135–146, 246, 250, 255, 272–276], [182–184, 186, 187, 204, 216, 217, 224, 235]

1.1 Традиционная концепция обобщенной синхронизации: определение, методы диагностики, механизмы возникновения

Настоящая глава диссертационной работы посвящена рассмотрению одного из наиболее интересных и наименее изученных типов синхронного поведения — режима обобщенной хаотической синхронизации [67]. Этот режим традиционно вводится в рассмотрение для системы двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов, ведущего \mathbf{x} и ведомого \mathbf{u} , и означает, что после завершения переходного процесса устанавливается функциональная зависимость $\mathbf{F}[\cdot]$ между их состояниями, такая что

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}[\mathbf{x}]. \quad (1.1)$$

Вид этой зависимости может быть сложным, а процедура ее нахождения — нетривиальной. В зависимости от характера функциональной зависимости $\mathbf{F}[\cdot]$, — гладкая или фрактальная, — выделяют сильную и слабую обобщенную синхронизацию, соответственно, [70]. При этом следует отметить, что в качестве взаимодействующих осцилляторов могут выступать две разные динамические системы, в том числе и с различной размерностью фазового пространства.

Режим обобщенной синхронизации характерен как для систем с малым числом степеней свободы (поточковых динамических систем и дискретных отображений), так и бесконечномерных систем (пространственно-распределенных сред, описываемых уравнениями в частных производных, или систем с запаздыванием, операторами эволюции которых являются уравнения с запаздывающим аргументом) [65, 79, 277, 278]. В то же самое время, независимо от типа динамических систем, для диагностики этого режима традиционно используются одни и те же методы и подходы¹. Среди известных в настоящее время методов диагностики обобщенной синхронизации наибольшее распространение получили метод ближайших соседей [67, 279], метод расчета условных показателей Ляпунова [71, 280] и метод вспомогательной системы [69]. Известно также, что в ряде случаев возможно диагностирование режима обобщенной синхронизации по изменению спектрального состава колебаний ведомой системы [66].

Перейдем к краткому описанию методов диагностики обобщенной синхронизации. Начнем рассмотрение с одного из наиболее удобных и точных методов диагностики этого режима — метода вспомогательной системы [69]. Согласно этому методу, наряду с ведомой системой \mathbf{u} рассматривается идентичная ей вспомогательная система \mathbf{v} . Начальные условия для вспомогательной системы \mathbf{v}_0 выбираются отличными от начального состояния ведомой системы \mathbf{u}_0 , однако лежащими в бассейне притяжения того же аттрактора. В отсутствие режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими системами векторы состояний ведомой \mathbf{u} и вспомогательной \mathbf{v} систем принадлежат одному и тому же хаотическому аттрактору, но в общем случае являются различными. В режиме обобщенной синхронизации, в силу выполнения соотношений $\mathbf{u} = \mathbf{F}[\mathbf{x}]$ и, соответственно, $\mathbf{v} = \mathbf{F}[\mathbf{x}]$, после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем должны стать

¹Понятно, что в ряде случаев методы должны быть адаптированы на конкретный класс динамических систем. Это касается, прежде всего, адаптации метода расчета спектра показателей Ляпунова на системы с пространственно-распределенными параметрами.

идентичными $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$, что является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущим и ведомым осцилляторами.

Для диагностики режима обобщенной синхронизации при помощи метода вспомогательной системы удобно осуществлять расчет зависимости степени близости состояний ведомой и вспомогательной систем от параметра связи, которая для потоковых систем запишется в виде:

$$s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| dt, \quad (1.2)$$

где T_0 — время переходного процесса, T — время наблюдения. Если $s \approx 0$, взаимодействующие системы находятся в режиме обобщенной синхронизации. Если же $s > 0$, системы демонстрируют асинхронное поведение.

Метод вспомогательной системы находит применение при проведении экспериментальных исследований. Только в данном случае в связи со сложностью создания идентичной копии ведомой системы в эксперименте, в качестве ведомого и вспомогательного генераторов используется одна и та же система, а сигнал с ведущей системы (в ряде случаев предварительно записанный) подается на ведомую систему дважды, тем самым имитируя первый раз ведомую, а второй раз — вспомогательную систему [281]. Далее производится сравнение откликов ведомой и вспомогательной систем друг с другом и в случае их идентичности, определяемой с заданной точностью, делается вывод о наличии обобщенной синхронизации между ведущим и ведомым генераторами.

В то же самое время, наибольшее распространение метод вспомогательной системы получил при численном моделировании в связи с легкостью его реализации и достаточно высокой точностью диагностирования. В то же самое время, в ряде случаев “прямое” применение метода вспомогательной системы может привести к ложному детектированию режима обобщенной синхронизации из-за попадания в так называемую “ловушку” численного счета (см., например, [282]), что особо актуально вблизи границы установления синхронного режима, где имеет место перемежающееся поведение (см. главу 4 настоящей диссертационной работы). Во избежание подобной ситуации во вспомогательную

систему можно ввести небольшую расстройку одного из управляющих параметров или добавить низкодисперсный шум. Однако, все же наиболее удобным является использование этого метода в совокупности с методом расчета условных показателей Ляпунова [71].

Для начала предположим, что размерности фазовых пространств взаимодействующих ведущей и ведомой систем равны N_x и N_u , соответственно. Тогда поведение однонаправлено связанных хаотических систем может быть охарактеризовано при помощи $N_x + N_u$ показателей Ляпунова. Так как поведение ведущей системы не зависит от силы связи с ведомой системой (в силу однонаправленного характера связи), то спектр показателей Ляпунова для исследуемой системы может быть разделен на две части: показатели Ляпунова ведущей системы $\lambda_1^x \geq \dots \geq \lambda_{N_x}^x$ и условные показатели Ляпунова $\lambda_1^u \geq \dots \geq \lambda_{N_u}^u$. Критерием существования обобщенной синхронизации в однонаправлено связанных системах [70,280] является отрицательность старшего условного показателя Ляпунова, то есть

$$\lambda_1^u < 0. \quad (1.3)$$

Еще одним методом диагностики обобщенной синхронизации в однонаправлено связанных хаотических системах является метод ближайших соседей [67]. Суть этого метода заключается в том, что наличие функционального соотношения между состояниями взаимодействующих систем и отрицательность старшего условного показателя Ляпунова означает, что все близкие состояния в фазовом пространстве ведущей системы \mathbf{x} соответствуют близким состояниям в фазовом пространстве ведомой системы \mathbf{u} [67]. Количественной характеристикой степени близости состояний взаимодействующих систем является среднее расстояние между двумя состояниями ведомой системы \mathbf{u}^k и \mathbf{u}^{kn} , нормированное на среднее расстояние δ между случайно выбранными состояниями ведущей системы [73]:

$$d = \frac{1}{N\delta} \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{kn}\|, \quad (1.4)$$

где N — число производимых итераций. В режиме обобщенной синхронизации d стремится к нулю, в отсутствие функционального соотношения между состояниями взаимодействующих систем d близко к единице.

Как видно из приведенного рассмотрения, метод ближайших соседей опирается на анализ временных реализаций, соответствующих взаимодействующим системам, а следовательно, он может быть применен к любым системам, независимо от типа связи между ними². Однако, он оказывается недостаточно точным и позволяет определить порог возникновения синхронного режима только приблизительно. Поэтому, как правило, он находит применение при обработке экспериментальных данных (где реализация других методов анализа представляется затруднительной) или используется для уточнения полученных результатов. Соответственно, в рамках настоящей главы диссертационной работы будут использованы в основном метод вспомогательной системы и метод расчета условных показателей Ляпунова для диагностики синхронного режима.

Рассмотрим механизмы возникновения режима обобщенной синхронизации в однонаправлено связанных хаотических системах. Прежде всего, отметим, что данный тип синхронного поведения может возникать в системах с диссипативным и недиссипативным типами связи, при этом механизмы, приводящие к возникновению синхронного режима, для данных типов связи могут отличаться. Наиболее типичным является диссипативный тип связи однонаправлено связанных хаотических систем. Поэтому начнем рассмотрение механизмов возникновения режима обобщенной синхронизации с этого случая. Для этого рассмотрим поведение двух однонаправлено связанных динамических систем с непрерывным временем, динамика которых описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_x) \\ \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{g}_u) + \varepsilon \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{u}), \end{aligned} \tag{1.5}$$

²Как будет показано в главе 2, метод ближайших соседей может быть легко обобщен на системы с взаимным типом связи, что может быть рассмотрено как доказательство возможности существования обобщенной синхронизации в системах с взаимной связью.

где \mathbf{G} и \mathbf{H} — операторы эволюции ведущей и ведомой систем, соответственно, \mathbf{g}_x и \mathbf{g}_u — векторы их управляющих параметров, $\mathbf{A} = \{\delta_{ij}\}$ — матрица связи, ε — параметр связи, $\delta_{ii} = 0$ или $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ ($i \neq j$). Как было показано в наших работах [81,85], ведомая система $\mathbf{u}(t)$ в данном случае может быть рассмотрена как некоторая *модифицированная* система

$$\dot{\mathbf{u}}_m = \mathbf{H}'(\mathbf{u}_m, \mathbf{g}_u, \varepsilon) = \mathbf{H}(\mathbf{u}_m, \mathbf{g}_u) - \varepsilon \mathbf{A} \mathbf{u}_m \quad (1.6)$$

с дополнительной диссипацией, находящаяся под внешним воздействием $\varepsilon \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$ со стороны ведущей системы

$$\dot{\mathbf{u}}_m = \mathbf{H}'(\mathbf{u}_m, \mathbf{g}_u, \varepsilon) + \varepsilon \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (1.7)$$

Режим обобщенной синхронизации, возникающий в системе (1.5) при увеличении параметра связи ε , может быть рассмотрен как следствие двух взаимосвязанных процессов, протекающих одновременно: увеличения диссипации в модифицированной системе (1.6) и возрастания амплитуды внешнего воздействия. Оба этих процесса связаны друг с другом посредством параметра ε и не могут быть реализованы в ведомой системе (1.5) независимо друг от друга. Однако, увеличение диссипации в модифицированной системе (1.6) приводит к упрощению ее динамики и переходу от хаотических колебаний к периодическим или даже к стационарному состоянию. Внешний сигнал, наоборот, стремится усложнить поведение модифицированной системы и навязать ей свою хаотическую динамику. Понятно, что режим обобщенной синхронизации может возникнуть лишь в том случае, когда собственная хаотическая динамика модифицированной системы будет подавлена за счет увеличения диссипации.

Если же связь между взаимодействующими системами оказывается недиссипативной, режим обобщенной синхронизации в такой системе может возникнуть лишь в том случае, когда внешний сигнал ведущей системы имеет значительно бóльшую амплитуду по сравнению с сигналом ведомой системы. Возникновение обобщенной синхронизации в данном случае обусловлено перемещением изображающей точки в области фазового пространства с сильной сходимостью фазовых траекторий [81].

Отдельного рассмотрения заслуживают механизмы возникновения обобщенной синхронизации в пространственно-распределенных системах. Так, в работах [65, 79, 277] на примере однонаправлено связанных пространственно-распределенных сред, описываемых уравнениями Гинзбурга–Ландау с различными типами связи, и пучково-плазменных систем, описываемых моделями диода Пирса в рамках гидродинамического приближения, было установлено, что за возникновение обобщенной синхронизации в таких системах могут быть ответственны сразу два механизма, описанных выше.

Режим обобщенной синхронизации имеет много сходств с режимом синхронизации, индуцированной шумом, как по методам диагностики, так и по механизмам возникновения синхронного режима. Поэтому эти два типа синхронного поведения иногда рассматривает как единый тип синхронной хаотической динамики связанных динамических систем [86, 274], причем это обобщение касается как систем с малым числом степеней свободы, так и пространственно-распределенных сред. Под режимом индуцированной шумом синхронизации традиционно понимается следующее явление: две независимые, но идентичные хаотические системы \mathbf{u} и \mathbf{v} (стартующие с различных начальных условий \mathbf{u}_0 и \mathbf{v}_0 , лежащих в бассейне притяжения одного и того же хаотического аттрактора), находящиеся под действием случайного шумового сигнала ξ , “синхронизируются” друг с другом, то есть после завершения переходного процесса они начинают демонстрировать идентичное поведение $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$ [283–286]. И в этом случае, как и для режима обобщенной синхронизации, установление синхронной динамики двух систем с общим источником шума возможно лишь в том случае, когда все условные показатели Ляпунова оказываются отрицательными [282, 287, 288].

Механизмы возникновения режима синхронизации, индуцированной шумом, также во многом сходны с механизмами обобщенной синхронизации. В частности, в работах [284, 285, 289] было показано, что существует два механизма, ответственных за возникновение синхронного режима. В первом случае случайный сигнал ξ , действующий на иден-

тичные хаотические системы, имеет ненулевое среднее, что, фактически, переводит систему в нехаотический режим [290–292], при котором состояние системы просто “следует” за внешним случайным возмущением $\xi(t)$. Во втором же случае внешний случайный сигнал большой амплитуды (с нулевым или ненулевым средним) переводит изображающую точку в области фазового пространства с большой степенью сжатия, что приводит к сходимости соседних траекторий [285, 293, 294]. Понятно, что в обоих случаях имеет место высокая степень сжатия фазового потока, то есть изначально положительные условные показатели Ляпунова хаотических систем переходят в область отрицательных значений.

В то же самое время, в хаотических системах синхронизация, индуцированная шумом, может наблюдаться далеко не всегда. Как было установлено в работах [295, 296], для этого хаотические системы должны обладать определенными свойствами, такими, как сильное сжатие фазового объема в фазовом пространстве, ограниченная область фазового пространства, где наблюдается увеличение фазового объема и др. В то же самое время, хаотических систем, способных демонстрировать этот режим, оказывается достаточно много. Более того, если в системах, способных демонстрировать режим обобщенной синхронизации, заменить детерминированное воздействие на случайное, в таких системах будет наблюдаться режим индуцированной шумом синхронизации [81, 86, 297].

1.2 Влияние шума на поведение нелинейных систем, находящихся в режиме обобщенной синхронизации

Одним из интересных и до конца не изученных вопросов, связанных с исследованием обобщенной синхронизации в различных классах динамических систем, является влияние шума на установление этого типа синхронного поведения. Одной из немногих работ, в которых бы-

ли проведены подобные исследования, является работа [298], в качестве объектов рассмотрения в которой выступают две совершенно разные динамические системы. В ходе проведённых исследований установлено, что в этом случае роль шума является “системозависимой”, то есть шум способен как усилить/вызвать, так и, наоборот, разрушить режим обобщенной синхронизации в таких системах. Системы, рассмотренные в работе [298], по значениям управляющих параметров близки к так называемой бифуркации кризиса аттрактора (см. [299]). В этом случае внешний шум малой интенсивности способен вывести систему в новый бассейн притяжения и, как следствие, привести к образованию нового аттрактора с качественно другой топологией, что приводит к изменению поведения систем в присутствии шума [299]. Иными словами, результаты, полученные в работе [298], могут быть отнесены только к одному достаточно узкому классу динамических систем, в то время как достаточно широкий класс других динамических систем, как правило, не попадает в эту категорию.

В настоящем разделе диссертационной работы приводятся результаты теоретических и экспериментальных исследований влияния шума на обобщенную синхронизацию в системах, аттракторы которых далеки от границы бифуркации кризиса или их бассейны притяжения являются неограниченными. Как будет показано ниже в этом разделе, в данном случае в достаточно широком диапазоне значений интенсивности шума он (шум) практически не оказывает влияния на порог возникновения обобщенной синхронизации, то есть, как в отсутствие, так и при наличии шума синхронный режим возникает практически при одних и тех же значениях параметра связи. При дальнейшем увеличении интенсивности шума пороговое значение возникновения режима обобщенной синхронизации начинает меняться, что обусловлено ограниченностью бассейна притяжения аттрактора или возникновением режима синхронизации, индуцированной шумом.

1.2.1 Методы диагностики и механизмы возникновения обобщенной синхронизации в присутствии шума

Обсудим методы диагностики и механизмы возникновения обобщенной синхронизации в присутствии шума. Понятно, что добавление дополнительного стохастического слагаемого в уравнения, описывающие динамику взаимодействующих систем, не должно существенно повлиять ни на методы диагностики синхронного режима, ни на механизмы его возникновения. В частности, метод вспомогательной системы и метод расчета условных показателей Ляпунова могут быть легко применены к анализу обобщенной синхронизации в системах с шумом, при этом все критерии диагностики синхронного режима останутся неизменными. Как отмечалось в разделе 1.1, режим обобщенной синхронизации может наблюдаться в системах с диссипативным и недиссипативным типами связи [70, 81], при этом диссипативный тип связи (который мы будем рассматривать далее) является наиболее распространенным и типичным. В этом случае уравнения, описывающие поведение систем, запишутся в виде (1.5) с дополнительным слагаемым $DB\xi(t)$ (где \mathbf{B} — матрица связи, аналогичная \mathbf{A} , D — интенсивность шумового воздействия), добавленным во второе уравнение системы, а механизмы возникновения синхронного режима могут быть выявлены при помощи метода модифицированной системы [78, 81] (см. также раздел 1.1). В данном случае ведомая система может быть по-прежнему рассмотрена как модифицированная система с дополнительно введенной диссипацией (1.6), а в роли внешнего воздействия будет выступать сигнал $\varepsilon(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + DB\xi(t))$, представляющий собой сумму детерминированного сигнала со стороны ведущей системы и внешнего шумового воздействия. Известно, что возникновение обобщенной синхронизации в системах с диссипативной связью определяется, прежде всего, свойствами самой модифицированной системы [78, 81]. Добавление внешнего шума $DB\xi(t)$ в уравнения системы (1.5) не должно приводить к существенному изменению характеристик модифицированной системы. Иными словами, если аддитив-

ный шум не меняет сильно характеристики модифицированной системы (1.6), то он и не должен оказывать существенного влияния на порог возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в системе (1.5).

Действительно, как упоминалось выше, анализ режима обобщенной синхронизации возможен с помощью расчета условных показателей Ляпунова. Очевидно, что ведомая и вспомогательная системы представляют собой две идентичные по управляющим параметрам системы, стартующие с различных слабо отличающихся друг от друга начальных условий. Вычисление производной от разности их состояний $\Delta = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ при наличии ($D > 0$) и отсутствии шума ($D = 0$) в виду идентичности детерминированных и стохастических сигналов, воздействующих на каждую из систем, приводит к одному и тому же уравнению:

$$\dot{\Delta} = (\mathbf{JH}(\mathbf{u}) - \varepsilon \mathbf{A})\Delta = \mathbf{JH}'(\mathbf{u})\Delta, \quad (1.8)$$

(где \mathbf{J} — матрица Якоби). Так как уравнение (1.8) может быть рассмотрено как уравнение в вариациях при вычислении условных показателей Ляпунова, можно заключить, что старшие условные показатели Ляпунова λ_1^u (определяющие порог возникновения режима обобщенной синхронизации) будут вести себя схожим образом как в отсутствие, так и при наличии шума, пересекая порог $\lambda_1^u = 0$ примерно при одних и тех же значениях ε , соответствующих установлению режима обобщенной синхронизации. Из (1.8) следует, что пороговое значение возникновения синхронного режима не должно сильно зависеть от интенсивности шумового воздействия, а, следовательно, сам режим обобщенной синхронизации должен обладать высокой устойчивостью по отношению к шумам. Тем не менее, следует обратить внимание на то, что вектор состояния ведомой системы \mathbf{u} в (1.8) все-таки зависит от случайного сигнала ξ , и, соответственно, шум большой интенсивности D может изменять свойства модифицированной системы, что, в конечном итоге, может приводить к изменению границы возникновения режима обобщенной синхронизации.

1.2.2 Влияние шума на установление режима обобщенной синхронизации в модельных системах: численное моделирование

Для подтверждения справедливости теоретических рассуждений, описанных в подразделе 1.2.1, проанализируем численно поведение нескольких динамических систем, находящихся в режиме обобщенной синхронизации, в том случае, когда они находятся под действием дополнительного источника шума. В качестве примеров выберем (а) системы дискретным временем — однонаправлено связанные логистические отображения, (б) хаотические осцилляторы — однонаправлено связанные системы Ресслера и радиотехнические генераторы с 1.5 степенями свободы, (в) пространственно-распределенные динамические системы — однонаправлено связанные одномерные комплексные уравнения Гинзбурга-Ландау.

1.2.2.1 Логистические отображения

В качестве первого примера рассмотрим поведение однонаправлено связанных логистических отображений [71] в случае, когда на ведомую систему дополнительно воздействует внешний источник шума:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, \lambda_x), \\y_{n+1} &= f(y_n, \lambda_y) + \varepsilon(f(x_n, \lambda_x) + Df(\xi, \lambda_x) - f(y_n, \lambda_y)),\end{aligned}\tag{1.9}$$

где $f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x)$, $\lambda_{x,y}$ — управляющие параметры ведущей и ведомой систем, соответственно, величина ε характеризует интенсивность связи между осцилляторами, ξ — случайный процесс с равномерно распределенной плотностью вероятности на единичном интервале $[0; 1]$, D — интенсивность шума. Для диагностики режима обобщенной синхронизации в исследуемой системе (1.9) использовался метод расчета условных показателей Ляпунова. Полученные результаты уточнялись при помощи метода вспомогательной системы.

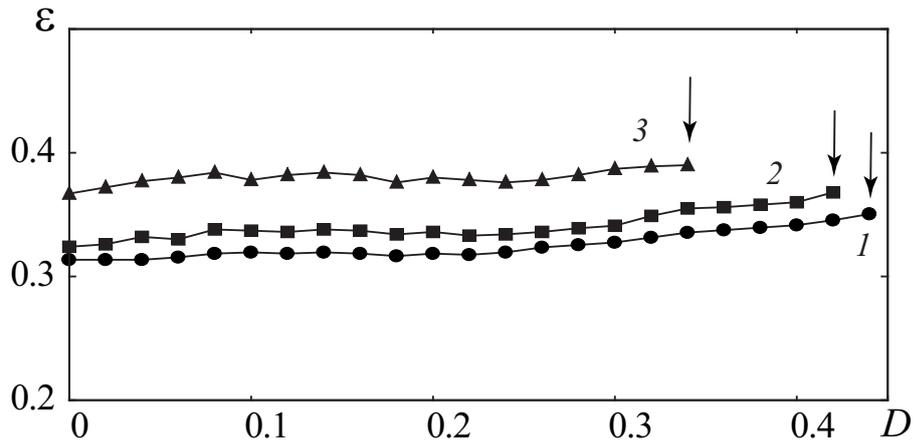


Рисунок 1.1 — Зависимость порога возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в двух однонаправлено связанных логистических отображениях (1.9) от интенсивности шума при различных значениях управляющих параметров: $\lambda_x = 3.75$, $\lambda_y = 3.75$ (кривая 1, ●), $\lambda_x = 3.75$, $\lambda_y = 3.79$ (кривая 2, ■), $\lambda_x = 3.75$, $\lambda_y = 3.9$ (кривая 3, ▲). Критические значения интенсивности шума D_c , до которых наблюдается режим обобщенной синхронизации в системе (1.9), показаны стрелками

Зависимость порога возникновения режима обобщенной синхронизации на плоскости управляющих параметров “интенсивность шума D — параметр связи ε ” при различных значениях управляющих параметров $\lambda_{x,y}$ приведена на рисунке 1.1. Из рисунка видно, что порог возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в (1.9) практически не зависит от интенсивности шума в диапазоне значений $D \in [0; D_c]$, причем значение D_c , показанное на рисунке 1.1 стрелками, зависит от значений управляющих параметров, $D_c = D_c(\lambda_x, \lambda_y)$. Для выбранных значений управляющих параметров $D_c \in [0.38; 0.44]$ (что соответствует отношению сигнал/шум $\text{SNR} \in [8.5; 7.2]^3$), то есть режим обобщенной синхронизации в однонаправлено связанных логистических отображениях (1.9) устойчив к шумам, пока мощность шума сравнима с мощностью хаотического сигнала.

³Здесь и далее отношение сигнал/шум вычислялось стандартным образом, то есть $\text{SNR} = 10 \lg \frac{P_{\text{sign}}}{P_{\text{noise}}}$, где P_{sign} — мощность хаотического сигнала, P_{noise} — мощность шума, воздействующего на хаотическую систему [300].

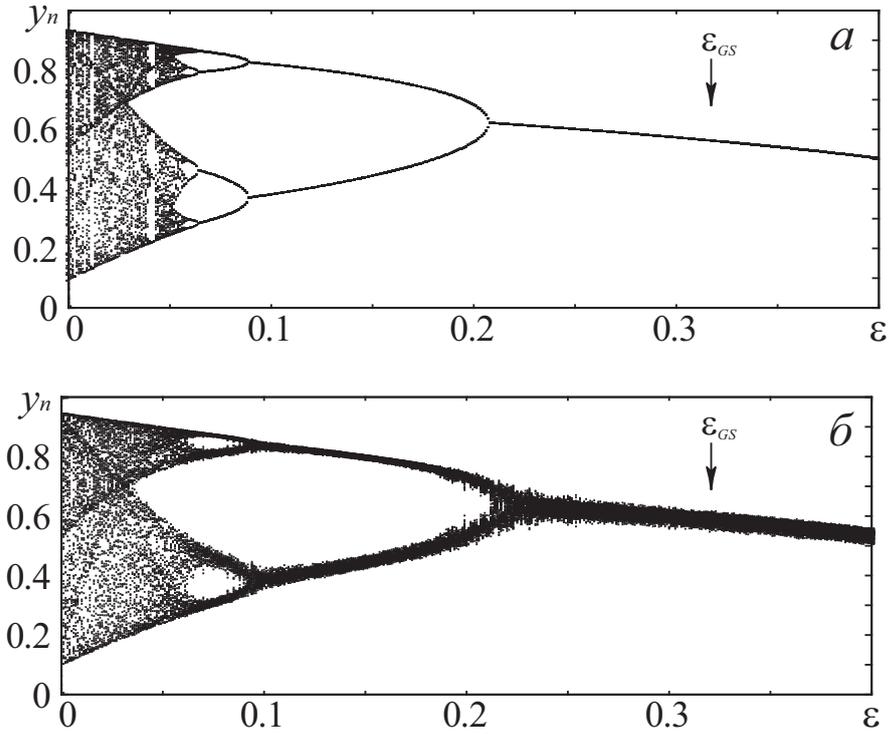


Рисунок 1.2 — Бифуркационная диаграмма модифицированного логистического отображения (1.10) в отсутствие (а) и при наличии (б) шума. Управляющий параметр $\lambda_y = 3.79$ в обоих случаях, интенсивность шума $D = 0.1$ в (б). Значения параметра связи $\varepsilon_{GS} = 0.32$, соответствующие порогу возникновения режима обобщенной синхронизации в (1.9), показаны стрелками в обоих случаях

Для объяснения причин устойчивости режима обобщенной синхронизации к шумам следует обратить внимание на модифицированную систему

$$z_{n+1} = (1 - \varepsilon)f(z_n, \lambda_y) = az_n(1 - z_n) \quad (1.10)$$

где $a = \lambda_y(1 - \varepsilon)$. Поведение этой системы при изменении параметра диссипации ε иллюстрирует бифуркационная диаграмма, приведенная на рисунке 1.2,а. Значение параметра ε , соответствующее порогу возникновения режима обобщенной синхронизации, показано на данном рисунке стрелкой. Видно, что для величины параметра связи, соответствующей порогу возникновения режима обобщенной синхронизации в системе (1.9), модифицированная система (1.10) демонстрирует периодические колебания. Внешнее шумовое воздействие практически не изменяет характеристики модифицированной системы, и, соответственно, практически не влияет на порог возникновения режима обобщенной синхрони-

зации. Бифуркационная диаграмма модифицированного логистического отображения при наличии шума интенсивности $D = 0.1$ представлена на рисунке 1.2,б. Уровень шума является достаточно высоким по сравнению с амплитудой сигнала, что можно отчетливо заметить по самому виду бифуркационной диаграммы. Однако, нетрудно заметить, что в этом случае внешний шум не сдвигает точки бифуркаций, а приводит только к небольшому зашумлению режима, реализующегося в системе. Поэтому, можно утверждать, что несмотря на достаточно большую амплитуду, в рассмотренном случае внешний шум практически не влияет на границу режима обобщенной синхронизации. Дальнейшее увеличение интенсивности шума $D > D_c$ приводит к уходу изображающей точки на бесконечность.

Причины ухода изображающей точки на бесконечность могут быть объяснены следующим образом. Известно, что автономное логистическое отображение

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda), \quad (1.11)$$

характеризуется ограниченным бассейном притяжения аттрактора, то есть в зависимости от выбора начальных условий для упомянутых выше значений параметра λ оно демонстрирует либо хаотический режим, либо разбегание траекторий [301]. Чтобы логистическое отображение (1.11) демонстрировало хаотические колебания, начальные условия должны быть заданы в диапазоне $x_0 \in [0; 1]$, при этом изображающая точка будет оставаться внутри этого диапазона в течение всего времени эволюции системы. В то же самое время, понятно, что внешний шум может вывести ее из этого диапазона.

Подобные эффекты наблюдаются в системе (1.9). Можно оценить интенсивность шума D_c , соответствующую разбеганию траекторий в ведомой системе как

$$D_c \simeq \frac{4 - 4\varepsilon_c \langle f_x \rangle - (1 - \varepsilon_c)\lambda_y}{\varepsilon_c \lambda_x}, \quad (1.12)$$

где $\langle f_x \rangle$ — статистическое среднее $f(x_n, \lambda_x)$, ε_c соответствует порогу обобщенной синхронизации в отсутствие шума. Наши оценки показыва-

ли, что $D_c \approx 0.5$ для значений управляющих параметров $\lambda_x = \lambda_y = 3.75$, $D_c \approx 0.48$ для $\lambda_x = 3.75$, $\lambda_y = 3.79$ и $D_c \approx 0.42$ для $\lambda_x = 3.75$, $\lambda_y = 3.9$, что хорошо согласуется с результатами численных вычислений. Поэтому режим обобщенной синхронизации в логистических отображениях, характеризующихся ограниченным бассейном притяжения аттрактора, испытывает устойчивость к шумам в большом, но ограниченном диапазоне интенсивности шума.

В рассмотренном случае разрушение режима обобщенной синхронизации связано с разбеганием траекторий, которое может быть рассмотрено как притяжение изображающей точки ко второму сосуществующему аттрактору, находящемуся на бесконечности [302]. Отметим, что если бы сосуществующий аттрактор характеризовался ограниченным бассейном притяжения, в зависимости от характера режима, реализующегося в ведомой системе (и, соответственно, во втором аттракторе), при увеличении интенсивности шума наблюдалось бы увеличение или уменьшение порогового значения параметра связи, соответствующего установлению синхронного режима в системе [298].

Другим важным вопросом является устойчивость режима обобщенной синхронизации к внешним шумам в случае, если статистически независимые источники шума воздействуют на ведущую и ведомую системы

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, \lambda_x) + \varepsilon Df(\zeta_n, \lambda_x), \\ y_{n+1} &= f(y_n, \lambda_y) + \varepsilon (f(x_n, \lambda_x) + Df(\xi_n, \lambda_x) - f(y_n, \lambda_y)), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где ζ_n — стохастический процесс, плотность вероятности которого распределена равномерно по интервалу $[0; 1]$. В этом случае режим обобщенной синхронизации также устойчив к влиянию шума при $D < D_c^d$, где D_c^d может быть оценено как

$$D_c^d = \frac{1 - \lambda_x/4}{\varepsilon_c \lambda_x/4} \approx 0.2. \quad (1.14)$$

Дальнейшее увеличение интенсивности шума $D > D_c^d$ приводит к разрушению хаотического режима в ведущей системе. В этом случае в ведущей системе (1.13) наблюдается уход изображающей точки на бесконечность.

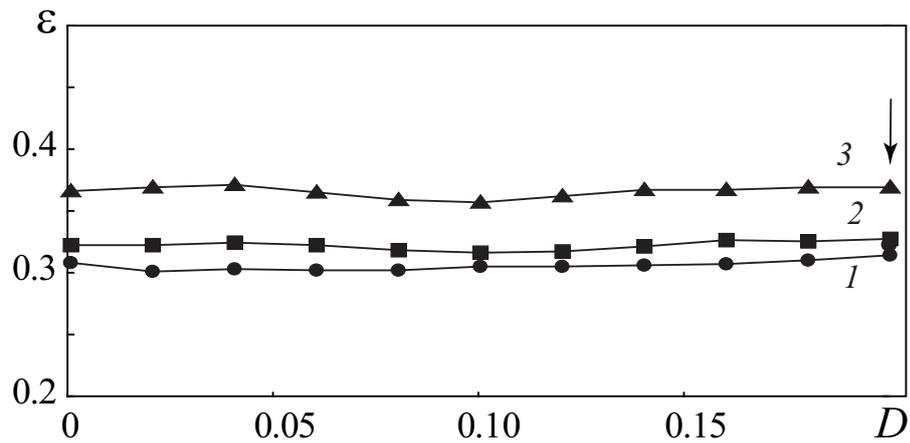


Рисунок 1.3 — Зависимость порога возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в двух однонаправлено связанных логистических отображениях (1.13) в случае, если статистически независимые источники шума воздействуют на ведущую и ведомую системы, от интенсивности шума при различных значениях управляющих параметров: $\lambda_x = 3.75$, $\lambda_y = 3.75$ (кривая 1, ●), $\lambda_x = 3.75$, $\lambda_y = 3.79$ (кривая 2, ■), $\lambda_x = 3.75$, $\lambda_y = 3.9$ (кривая 3, ▲)

Численные вычисления подтверждают аналитически полученные результаты. На рисунке 1.3 приведены зависимости пороговых значений установления режима обобщенной синхронизации от интенсивности шума для различных значений управляющих параметров. Как и в случае отсутствия шума в ведущей системе, внешний шум практически не влияет на порог возникновения режима обобщенной синхронизации. Подобные результаты были получены и в случае, когда ведущая и ведомая системы находились под воздействием общего источника шума, то есть $\xi_n \equiv \zeta_n$.

Следует отметить, что режим обобщенной синхронизации также устойчив в ограниченном диапазоне к возмущениям шумом управляющих параметров. Поэтому можно заключить, что для однонаправлено диссипативно связанных систем с дискретным временем режим обобщенной синхронизации оказывается устойчивым по отношению к шумам.

1.2.2.2 Системы Ресслера

В качестве второго примера рассмотрим две однонаправлено связанные системы Ресслера

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\omega_x x_2 - x_3 + D_1 \xi, \\ \dot{x}_2 &= \omega_x x_1 + a x_2, \\ \dot{x}_3 &= p + x_3(x_1 - c),\end{aligned}\tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= -\omega_u u_2 - u_3 + \varepsilon(x_1 + D_2 \zeta - u_1), \\ \dot{u}_2 &= \omega_u u_1 + a u_2, \\ \dot{u}_3 &= p + u_3(u_1 - c),\end{aligned}$$

где $\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2, x_3)^T$ и $\mathbf{u}(t) = (u_1, u_2, u_3)^T$ — векторы состояний ведущей и ведомой систем, соответственно, $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10$, ω_x и $\omega_u = 0.95$ — управляющие параметры. Параметры $\omega_{x,u}$ определяют собственные частоты колебаний ведущей и ведомой систем, слагаемые $D_1 \xi(t)$, $D_2 \zeta(t)$ задают внешнее шумовое воздействие на взаимодействующие системы, $\xi(t)$, $\zeta(t)$ являются случайными гауссовыми процессами с нулевым средним и единичной дисперсией. Для интегрирования уравнений (1.15) использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка, адаптированный для стохастических дифференциальных уравнений [303], с шагом по времени $\Delta t = 0.001$, диагностика режима обобщенной хаотической синхронизации осуществлялась с помощью метода вспомогательной системы (см. раздел 1.1).

Начнем рассмотрение с предположения, что шум действует только на ведомую систему, то есть $D_1 = 0$, $D_2 = D$. На рисунке 1.4 приведена зависимость порога возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации от интенсивности шума для трех различных значений управляющего параметра ω_x при фиксированных значениях остальных управляющих параметров. Для наиболее полной картины значения ω_x были выбраны следующими: $\omega_x = 0.99$ — относительно большая величина частотной расстройки взаимодействующих хаотических осцилляторов, $\omega_x = 0.95$ — идентичные осцилляторы, $\omega_x = 0.91$ — малые ча-

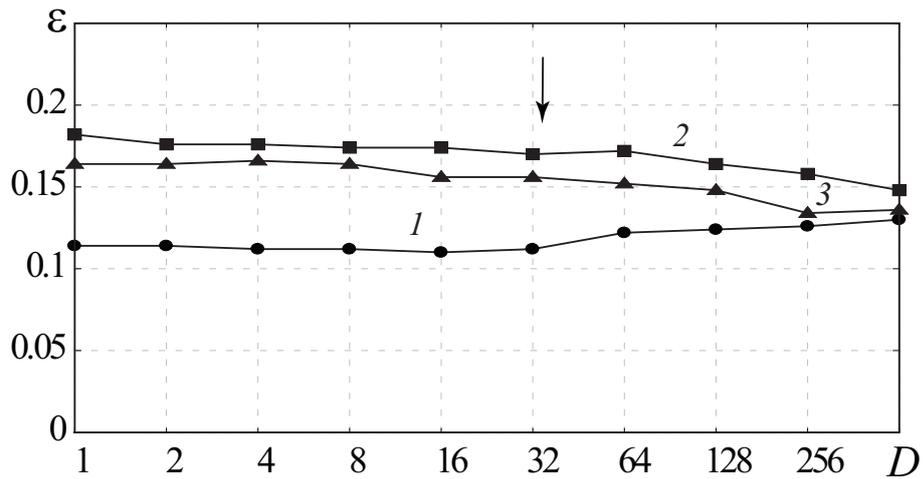


Рисунок 1.4 — Зависимости порога возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в двух однонаправленно связанных осцилляторах Ресслера (1.15) от интенсивности шума D для различных значений параметра ω_x ведущей системы: $\omega_x = 0.99$ (кривая 1, ●), $\omega_x = 0.95$ (кривая 2, ■), $\omega_x = 0.91$ (кривая 3, ▲). Критическое значение интенсивности шума $D_c = 40$, до которого наблюдается устойчивость режима обобщенной синхронизации к шумам, показано стрелкой

стотные расстройки. Нетрудно заметить, что, независимо от величины управляющего параметра ω_x , граница возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации практически не зависит от интенсивности шума $D \in [0; 40]$ ($\text{SNR} > -14.5$ дБ). Даже для достаточно больших значений интенсивности шума режим обобщенной синхронизации возникает примерно при тех же значениях параметра связи ε , что и в случае без шума.

На рисунке 1.5 приведены сигналы $s(t) = x_1(t) + D\xi(t)$ (a, e), воздействующие на ведомую и вспомогательную системы в отсутствии и при наличии шума, а также фазовые портреты ведомой системы и плоскости (u_1, v_1) , характеризующие поведение ведомой и вспомогательной систем до ($b, в, ж, з$) и после ($г, д, и, к$) порога возникновения режима обобщенной синхронизации. Рисунки ($a-d$) относятся к случаю отсутствия шума, в то время как ($e-k$) соответствуют наличию шума большой интенсивности $D = 40$, воздействующего на ведомую систему (в последнем случае, внешний сигнал подобен стохастическому, ср. рисунки 1.5, a, e). Из рисунков видно, что характеристики ведомой системы практически не меняются при изменении интенсивности шума (ср. рисунки 1.5, $b, г$ и $ж, и$,

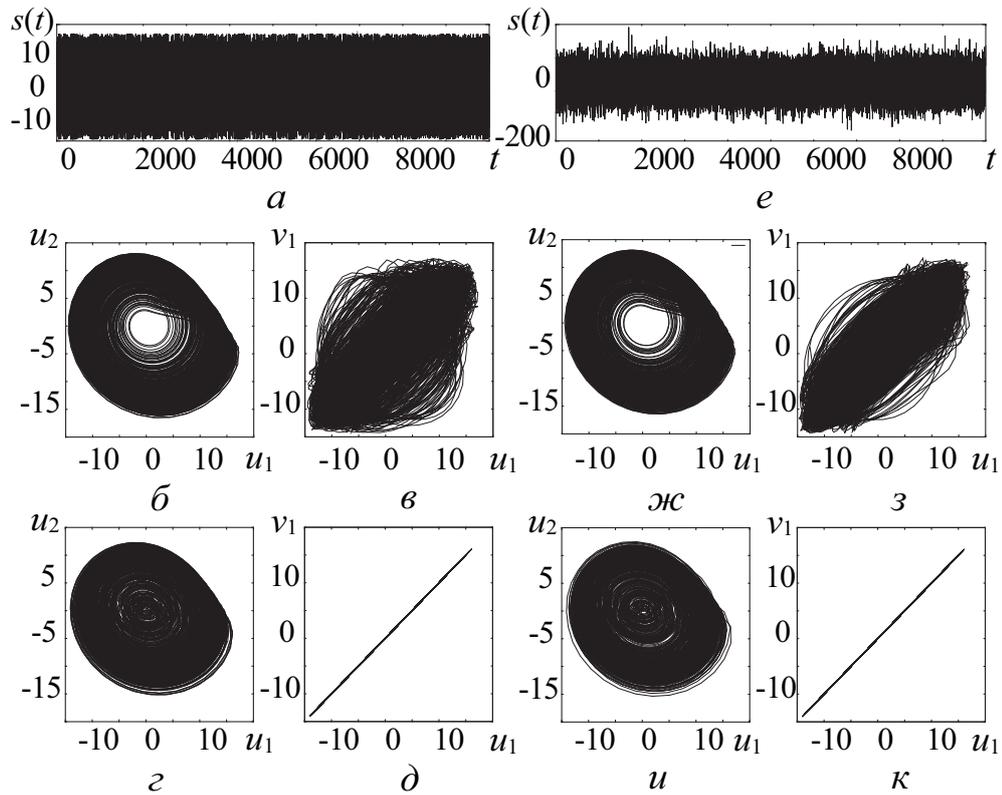


Рисунок 1.5 — Сигналы $s(t)$, воздействующие на ведомую и вспомогательную системы (a, e), фазовые портреты ($б, г, ж, u$) и плоскости (u_1, v_1) , характеризующие поведение ведомой и вспомогательной систем ($в, д, з, к$) до ($\varepsilon = 0.05$) и после ($\varepsilon = 0.114$) порога возникновения обобщенной синхронизации однонаправлено связанных систем Ресслера при $\omega_d = 0.99$, соответственно. Рисунки ($a-d$) соответствуют случаю отсутствия шума ($D = 0$), ($e-k$) — наличию шума интенсивности $D = 40$

соответственно). В этом случае можно говорить, что для однонаправлено связанных систем Ресслера шум большой интенсивности практически не меняет свойств устойчивости модифицированной системы

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= -\omega_u z_2 - z_3 - \varepsilon z_1, \\
 \dot{z}_2 &= \omega_u z_1 + a z_2, \\
 \dot{z}_3 &= p + z_3(z_1 - c),
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

(где $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$ — вектор ее состояния) и, как следствие, свойств ведомой системы. По аналогии с логистическими отображениями, на рисунке 1.6 приведены бифуркационные диаграммы модифицированной системы Ресслера. Рисунок 1.6, a соответствует случаю отсутствия шума ($D = 0$), в то время как на рисунках 1.6, $б, в$ показаны бифуркационные диаграммы модифицированной системы Ресслера в присутствии шума различной интенсивности ($D = 10$ и $D = 40$, соответственно). Как вид-

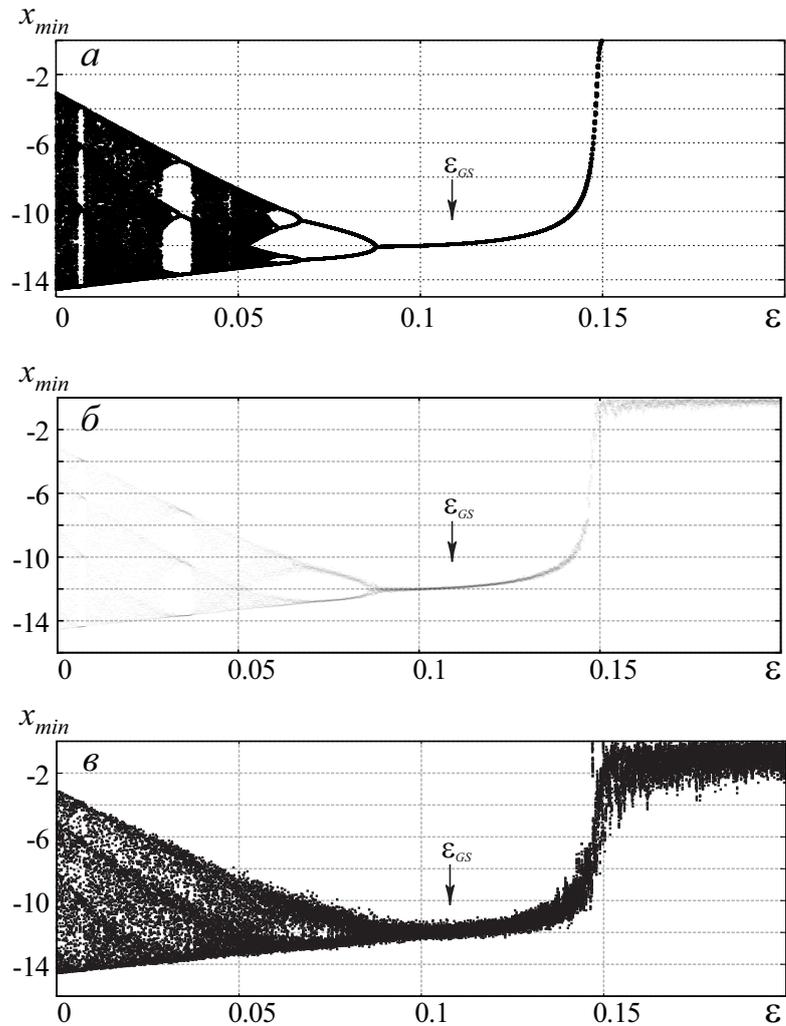


Рисунок 1.6 — Бифуркационные диаграммы модифицированной системы Ресслера (1.16) в отсутствие (а) и при наличии (б, в) шума. Управляющий параметр $\omega_x = 0.99$ во всех рассмотренных случаях, интенсивность шума $D = 10$ в (б) и $D = 40$ в (в). Значения параметра связи $\varepsilon_{GS} = 0.112$, соответствующие установлению режима обобщенной синхронизации, показаны стрелками

но из рисунка, независимо от величины интенсивности шума при указанных значениях управляющих параметров в модифицированной системе (1.16) реализуется устойчивый цикл периода один (см. также [78]).

Внешний шум не сдвигает бифуркационные точки и, следовательно, не влияет на пороговые значения установления режима обобщенной синхронизации. На основании этого мы можем заключить, что механизмы, определяющие устойчивость режима обобщенной синхронизации к шумам, оказываются теми же самыми, что и в системах с дискретным временем (1.9). В то же самое время, так как бассейн притяжения в системе Ресслера является неограниченным, эффекты, связанные с разрушением режима обобщенной синхронизации, описанные в разделе 1.2.2.1, в таких системах наблюдаться не будут.

Для очень больших значений интенсивности шума, когда мощность шума значительно превышает мощность сигнала в системе Ресслера ($D \gtrsim 400$, $\text{SNR} \lesssim -34.5$ дБ) диагностируемый синхронный режим может быть рассмотрен как синхронизация, индуцированная шумом (см. раздел 1.1), которая является проявлением режима обобщенной синхронизации в случае, когда стохастический сигнал (вместо детерминированного) воздействует на ведомую и вспомогательную системы. Другими словами, детерминированный сигнал от ведущей системы уже практически не играет роли по сравнению со стохастическим и может быть исключен из рассмотрения. В этом случае пороговое значение синхронного режима не должно зависеть от выбора управляющих параметров ведущей системы (в частности, ω_x) (см., рисунок 1.4 при больших D): оно целиком определяется характеристиками шумового сигнала. Поэтому, при $D \gtrsim D_c = 45$ ($\text{SNR} < -15.5$ дБ) (показано на рисунке 1.4 стрелкой) пороговое значение режима обобщенной синхронизации может увеличиваться или уменьшаться (в зависимости от величины расстройки управляющих параметров), стремясь к величине, определяемой синхронизацией, индуцированной шумом.

Важно отметить, что слабая зависимость порогового значения параметра связи, при котором устанавливается режим обобщенной хаоти-

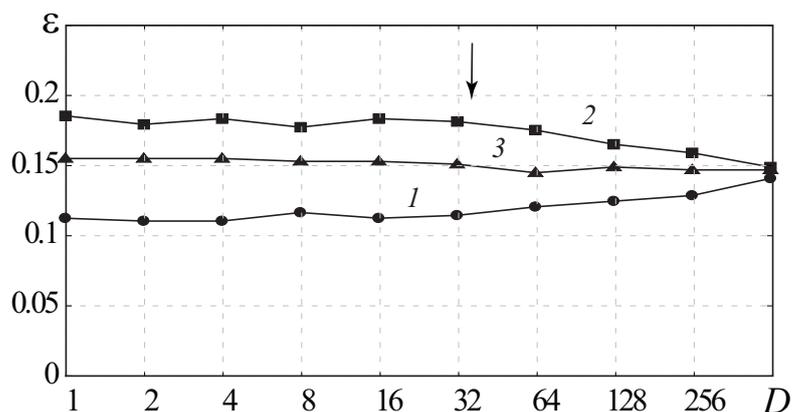


Рисунок 1.7 — Зависимость порога возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в двух однонаправлено связанных осцилляторах Ресслера (1.15), находящихся под воздействием общего источника шума, от интенсивности шума D для различных значений параметра ω_x ведущей системы $\omega_x = 0.99$ (кривая 1, ●), $\omega_x = 0.95$ (кривая 2, ■), $\omega_x = 0.91$ (кривая 3, ▲). Критические значения интенсивности шума D_c , до которых наблюдается устойчивость режима обобщенной синхронизации к шумам, показаны стрелками

ческой синхронизации, от интенсивности шума наблюдается также в широком диапазоне интенсивностей шума D и в случае, если дополнительный источник шума воздействует также и на первый осциллятор (то есть, при условии $D_1 \neq 0$). Значение этого параметра было выбрано равным $D_1 = \varepsilon D$. Границы режима обобщенной синхронизации на плоскости параметров “интенсивность шума — сила связи” в данном случае показаны на рисунке 1.7. Такое поведение взаимодействующих систем при наличии шума определяется полностью механизмами, выявленными в этом разделе настоящей главы при помощи метода модифицированной системы.

Таким образом, из приведенного рассмотрения следует, что в рассмотренном случае в достаточно широком диапазоне значений интенсивности шума, шум практически не влияет на порог возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации.

1.2.2.3 Однонаправлено связанные радиотехнические генераторы

Для общности рассмотрения проведем исследование влияния шума на установление режима обобщенной синхронизации в еще одной моде-

ли потоковых динамических систем — двух однонаправлено связанных радиотехнических генераторах [68]. Выбор этой системы обусловлен, в первую очередь, тем, что в зависимости от выбора управляющих параметров она способна демонстрировать различные режимы хаотических колебаний, характеризующиеся различной топологией аттракторов, что не характерно, например, для систем Ресслера, рассмотренных выше.

Исследуемая модель описывается следующими системами дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + D\xi, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - bx_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= c[\alpha_1 f(x_1) - x_3] - dx_2,\end{aligned}\tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 + \varepsilon(x_1 - y_1) + D\xi, \\ \dot{y}_2 &= -y_1 - by_2 + y_3, \\ \dot{y}_3 &= c[\alpha_2 f(y_1) - y_3] - dy_2,\end{aligned}$$

где $\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2, x_3)^T$ и $\mathbf{y}(t) = (y_1, y_2, y_3)^T$ — векторы состояний ведущего и ведомого генераторов, соответственно, $f(x)$ — нелинейная функция, задаваемая следующим образом [68]:

$$f(x) = \begin{cases} 0.528, & x \leq -1.2, \\ x(1 - x^2), & -1.2 < x < 1.2, \\ -0.528, & x \geq 1.2, \end{cases}\tag{1.18}$$

$b = 0.5182$, $c = 0.22439$, $d = 1.465$, $\alpha_{1,2}$ — управляющие параметры. Параметры $\alpha_{1,2}$ характеризуют режим, наблюдающийся в системе. В частности, при $\alpha_{1,2} = 14$ в автономной системе (1.17) реализуются хаотические колебания ленточного типа (см. рисунок 1.8,а), при $\alpha_{1,2} = 30$ — хаотические колебания с аттрактором типа двойной спирали (“double scroll”) (см. рисунок 1.8,б). Слагаемые $D\xi(t)$ задают внешнее шумовое воздействие на взаимодействующие системы, $\xi(t)$ — случайный гауссов процесс с нулевым средним и единичной дисперсией. Для интегрирования системы уравнений (1.17), также как и в случае однонаправлено связанных систем Ресслера, рассмотренных в подразделе 1.2.2.2,

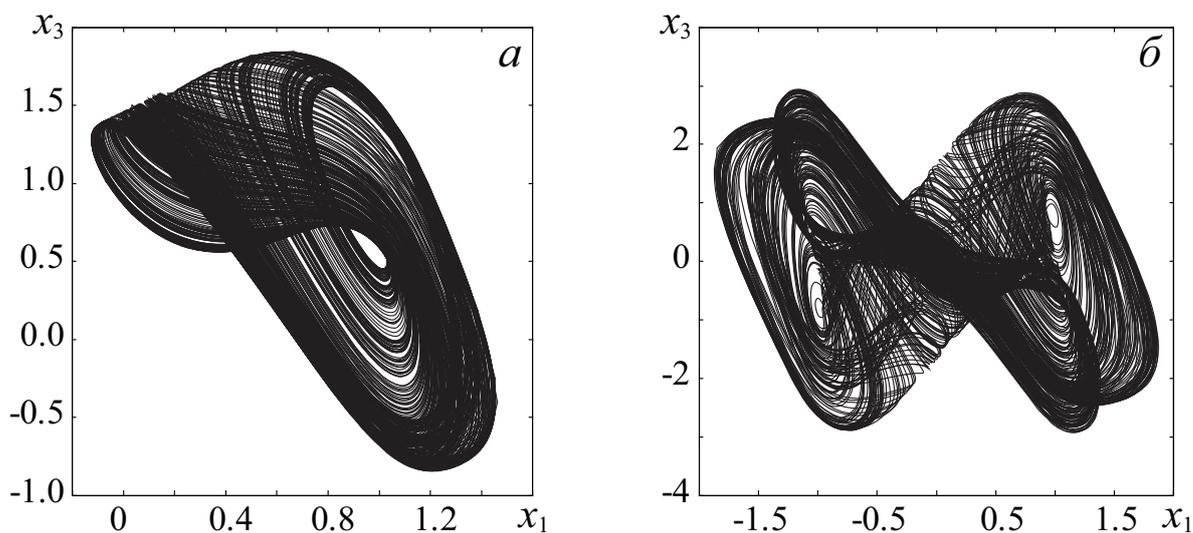


Рисунок 1.8 — Фазовые портреты ведущего радиотехнического генератора из (1.17) при (а) $\alpha_1 = 14$ — аттрактор ленточного типа, (б) $\alpha_1 = 30$ — аттрактор типа “double scroll”

использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка, адаптированный для стохастических дифференциальных уравнений, с шагом по времени $\Delta t = 0.01$, диагностика режима обобщенной хаотической синхронизации также осуществлялась при помощи метода вспомогательной системы.

На рисунке 1.9 приведены границы возникновения режима обобщенной синхронизации в системе (1.17) для четырех различных случаев:

- хаотические колебания в автономных ведущем и ведомом генераторах характеризуются аттракторами ленточного типа ($\alpha_{1,2} = 14$, кривая 1);
- в ведущем генераторе реализуется хаотический режим, характеризующийся аттрактором типа двойной спирали ($\alpha_1 = 30$), в то время как в ведомом генераторе наблюдается аттрактор ленточного типа ($\alpha_2 = 14$, кривая 2);
- в ведущем генераторе реализуется хаотический режим, характеризующийся аттрактором ленточного типа ($\alpha_1 = 14$), в то время как в ведомом генераторе наблюдается аттрактор типа “double scroll” ($\alpha_2 = 30$, кривая 3);

- хаотические колебания в автономных ведущем и ведомом генераторах характеризуются хаотическим аттрактором типа двойной спирали ($\alpha_{1,2} = 30$, кривая 4).

Видно, что, как и в однонаправлено связанных генераторах Ресслера, рассмотренных в подразделе 1.2.2.2, во всех случаях режим обобщенной синхронизации оказывается устойчивым к шумам в ограниченном диапазоне значений интенсивности шума $D \in [0, D_c]$, причем величина D_c зависит от управляющих параметров взаимодействующих систем. При $D > D_c$ пороговое значение режима обобщенной синхронизации начинает уменьшаться, при этом характер внешнего сигнала со стороны ведущей системы сначала перестает играть существенную роль (можно сказать, что в данном случае реализуется режим неавтономной индуцированной шумом синхронизации [304]); при дальнейшем увеличении интенсивности шума синхронный режим наступает даже при полном отсутствии влияния со стороны ведущей системы (параметр связи $\varepsilon = 0$), что соответствует установлению режима индуцированной шумом синхронизации [285]. При этом, в случае воздействия шума на систему с более простой топологией аттрактора (аттрактор ленточного типа) синхронный режим возникает при меньших значениях интенсивности шума, чем в случае воздействия на генератор, характеризующийся аттрактором типа двойной спирали.

Для объяснения причин устойчивости режима обобщенной синхронизации по отношению к шумам снова воспользуемся методом модифицированной системы. Модифицированный радиотехнический генератор с 1.5 степенями свободы для системы (1.17) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - \varepsilon z_1, \\ \dot{z}_2 &= -y_1 + bz_2 + z_3, \\ \dot{z}_3 &= c[\alpha_2 f(z_1) - z_3] - dz_2, \end{aligned} \tag{1.19}$$

где $\mathbf{z}(t) = (z_1, z_2, z_3)^T$ — вектор состояния модифицированной системы. На рисунке 1.10 приведены бифуркационные диаграммы для системы (1.19) в отсутствие (a) и при наличии (b) шума при $\alpha_2 = 14$. Видно,

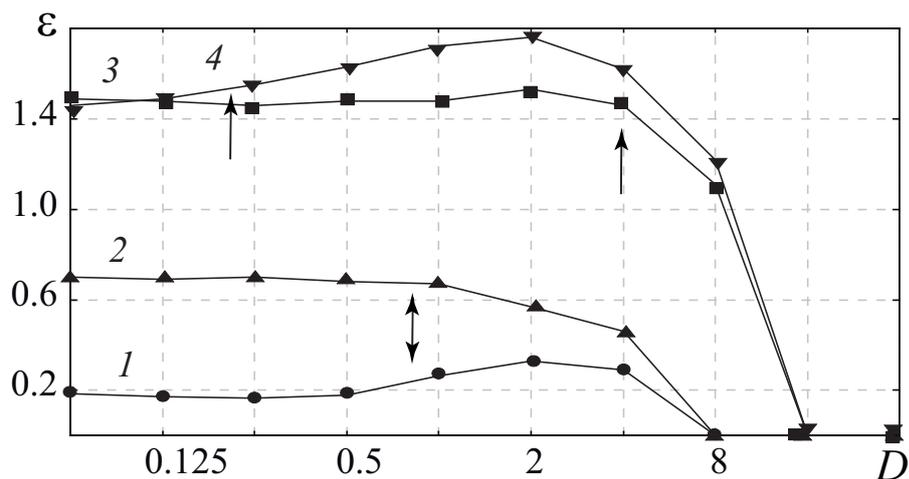


Рисунок 1.9 — Зависимость порога возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в двух однонаправленно связанных радиотехнических генераторах (1.17), находящихся под воздействием общего источника шума, от интенсивности шума D для различных случаев: 1 — хаотические колебания в автономных ведущем и ведомом генераторах характеризуются аттракторами ленточного типа ($\alpha_{1,2} = 14$) (●), 2 — в ведущем генераторе реализуется хаотический режим, характеризующийся аттрактором типа двойной спирали ($\alpha_1 = 30$), в то время как в ведомом генераторе наблюдается аттрактор ленточного типа ($\alpha_2 = 14$) (▲), 3 — в ведущем генераторе реализуется хаотический режим, характеризующийся аттрактором ленточного типа ($\alpha_1 = 14$), в то время как в ведомом генераторе наблюдается аттрактор типа “double scroll” ($\alpha_2 = 30$) (■), 4 — хаотические колебания в автономных ведущем и ведомом генераторах характеризуются хаотическим аттрактором типа двойной спирали ($\alpha_{1,2} = 30$) (▼). Критические значения интенсивности шума D_c , до которых наблюдается устойчивость режима обобщенной синхронизации к шумам, показаны стрелками

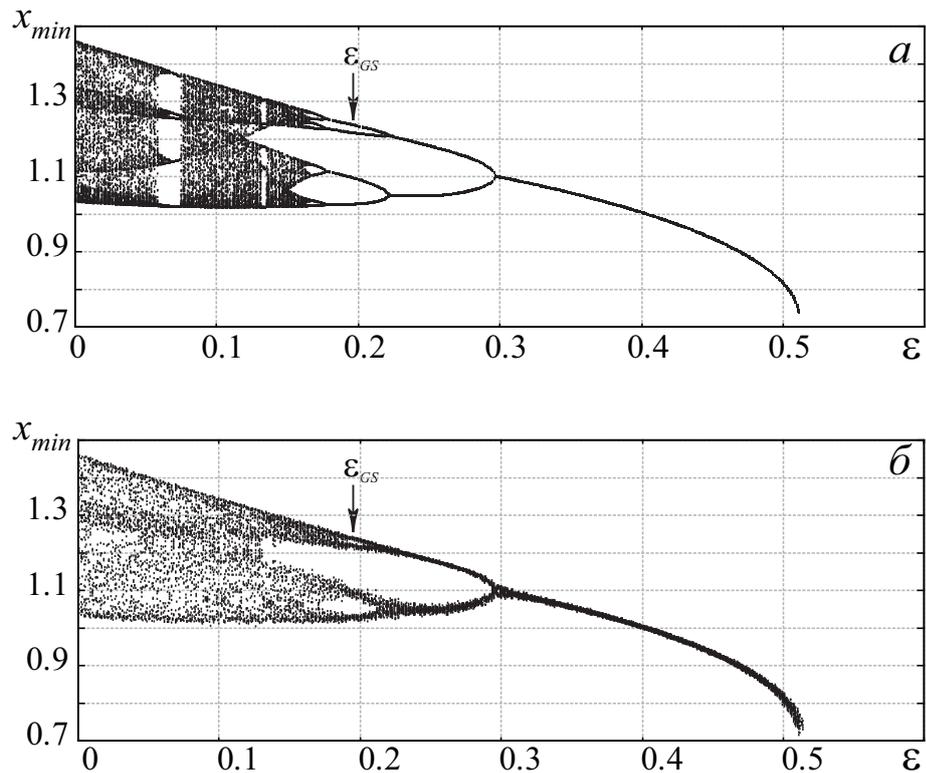


Рисунок 1.10 — Бифуркационные диаграммы модифицированного радиотехнического генератора (1.19) в отсутствие (а) и при наличии (б) шума интенсивности $D = 0.1$. Управляющий параметр $\alpha_2 = 14$ во всех рассмотренных случаях. Значения параметра связи $\varepsilon_{GS} \approx 0.18$, соответствующие установлению режима обобщенной синхронизации, показаны стрелками

что также, как и в случае систем Ресслера, внешний шум не сдвигает точки бифуркаций в модифицированной системе, а следовательно, и практически не влияет на порог возникновения обобщенной синхронизации в системе (1.17). Качественно аналогичная ситуация наблюдается при $\alpha_2 = 30$.

Таким образом, также как и в системах Ресслерах и логистических отображениях, рассмотренных в подразделах 1.2.2.1–1.2.2.2, если мощность шума сопоставима с мощностью детерминированного сигнала с ведущей системы, шум практически не влияет на порог возникновения режима обобщенной синхронизации в системе двух однонаправлено связанных радиотехнических генераторов. Вышесказанное свидетельствует об устойчивости режима обобщенной хаотической синхронизации по отношению к внешним шумам в сосредоточенных системах.

1.2.2.4 Уравнения Гинзбурга-Ландау

Рассмотрев вопрос об устойчивости к шумам режима обобщенной синхронизации в одномерных отображениях (раздел 1.2.2.1) и потоковых системах с малым числом степеней свободы (разделы 1.2.2.2–1.2.2.3), обсудим теперь устойчивость этого режима в пространственно-распределенных средах с бесконечномерным фазовым пространством. В качестве примера такой системы выберем взаимодействующие нелинейные активные среды, описываемые комплексными уравнениями Гинзбурга-Ландау [79, 305, 306], находящиеся под воздействием пространственно-распределенного источника шума

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - (1 - i\alpha_d)|u|^2u + (1 + i\beta_d)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{D}\zeta(x, t), \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v - (1 - i\alpha_r)|v|^2v + (1 + i\beta_r)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tilde{D}\zeta(x, t) + \varepsilon(u - v), \quad (1.21)$$

Уравнения (1.20) и (1.21) описывают поведение ведущей и ведомой систем, соответственно. Известно [79], что однонаправленно связанные уравнения Гинзбурга-Ландау могут демонстрировать режим обобщенной хаотической синхронизации. Значения управляющих параметров ведущей системы по аналогии с [79] выберем равными $\alpha_d = 1.5$, $\beta_d = 1.5$, а аналогичные параметры ведомой системы будем варьировать в диапазоне $\alpha_r \in [3; 5]$ и $\beta_r \in [3; 5]$. Выбор подобных значений управляющих параметров обеспечивает возникновение в автономных системах режима пространственно-временного хаоса, в то время как параметр ε определяет интенсивность однонаправленной связи между ведущей и ведомой системами. Слагаемое $\tilde{D}\zeta(x, t)$ описывает комплексный источник шума $\zeta(x, t)$ с нулевым средним, подчиняющийся распределению Гаусса

$$\begin{aligned} \langle \zeta(x, t) \rangle &= 0, \\ \langle \zeta(x, t)\zeta(x', t') \rangle &= \delta(x - x')\delta(t - t'), \end{aligned} \quad (1.22)$$

где \tilde{D} характеризует интенсивность шумового воздействия.

Уравнения (1.20)–(1.21) решались для периодических граничных условий $u(x, t) = u(x + L, t)$ и $v(x, t) = v(x + L, t)$, длина L , на которой проводилось рассмотрение, была фиксирована и выбрана равной

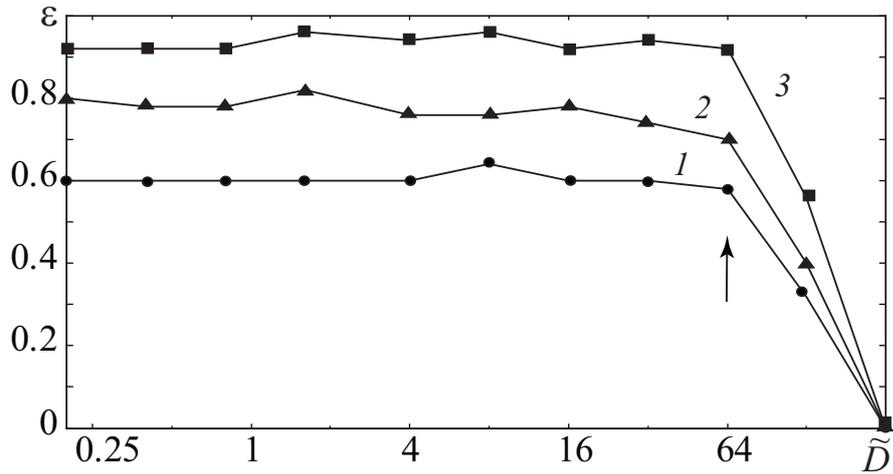


Рисунок 1.11 — Граница режима обобщенной хаотической синхронизации в двух однонаправлено связанных активных средах, описываемых комплексными уравнениями Гинзбурга-Ландау, на плоскости параметров (\tilde{D}, ε) для различных значений управляющих параметров ведомой системы: $\alpha_r = 3, \beta_r = 3$ (кривая 1, ●), $\alpha_r = 4, \beta_r = 4$ (кривая 2, ▲), $\alpha_r = 5, \beta_r = 5$ (кривая 3, ■). Критическое значение интенсивности шума \tilde{D}_c , до которого наблюдается устойчивость режима обобщенной синхронизации к шумам, показано стрелкой

$L = 40\pi$, начальные условия задавались случайным образом. При решении уравнений использовалась стандартная численная схема [307] с шагами по времени и по пространству $\Delta t = 0.0002$ и $\Delta x = L/1024$, соответственно.

Для диагностики режима обобщенной хаотической синхронизации в уравнениях Гинзбурга-Ландау использовался метод вспомогательной системы, когда помимо ведущей и ведомой систем рассматривалась еще и вспомогательная система $v_a(t)$, также описываемая уравнением (1.21), при этом случайные сигналы $\tilde{D}\zeta(x, t)$, воздействующие на ведомую и вспомогательную системы, были идентичными. В качестве критерия наличия режима обобщенной синхронизации использовалось условие

$$\frac{1}{T} \int_T \int_0^L |v(x, t) - v_a(x, t)|^2 < \delta, \quad (1.23)$$

где $\delta = 10^{-5}$.

На рисунке 1.11 приведена зависимость порога возникновения режима обобщенной синхронизации от интенсивности шумового воздействия для различных значений управляющих параметров ведомой системы. Видно, что в диапазоне $\tilde{D} \in [0; 64]$ ($\text{SNR} \geq -42\text{дБ}$), граница синхрон-

ного режима в пространственно-распределенных системах практически не изменяется с увеличением интенсивности шума. Поведение однонаправлено связанных пространственно-распределенных сред до и после порога возникновения режима обобщенной синхронизации в отсутствие и при наличии шума иллюстрирует рисунок 1.12, где приведены соответствующие пространственно-временные диаграммы. Рисунки (а–д) соответствуют случаю отсутствия шума в ведущей и ведомой системах, в то время как на рисунках (е–к) на ведущую и ведомую системы воздействует источник шума интенсивности $\tilde{D} = 0.4$. Рисунки (а, е) характеризуют поведение ведущей системы, а остальные соответствуют ведомой системе до (б, ж) и после (з, и) порога возникновения обобщенной синхронизации. На рисунке 1.12, в, д, з, к показаны распределения во времени и пространстве модуля разности состояний ведомой и вспомогательной систем $|v - v_a|$ для случаев отсутствия (в, з) и наличия (д, к) режима обобщенной синхронизации. Нетрудно заметить, что в последних случаях (д, к) разность состояний ведомой и вспомогательной систем после включения связи стремится к нулю в каждой точке пространства, что означает наличие обобщенной синхронизации между ведущим и ведомым уравнениями Гинзбурга-Ландау. Необходимо отметить, что длительность переходного процесса, предшествующего возникновению режима обобщенной синхронизации, оказывается немного больше в случае наличия шума, в то время как пороговое значение параметра связи оказывается одинаковым в обоих случаях. Кроме того, нетрудно видеть, что пространственно-временные диаграммы, характеризующие поведение ведомой системы, оказываются похожими в случаях наличия и отсутствия шума (ср. рисунки (б, з) и (и, к), соответственно). Такое поведение пространственно-распределенных систем в режиме обобщенной синхронизации в присутствии шума, также как и в случае систем с малым числом степеней свободы, может быть объяснено при помощи метода модифицированной системы. Шумовой сигнал достаточно большой

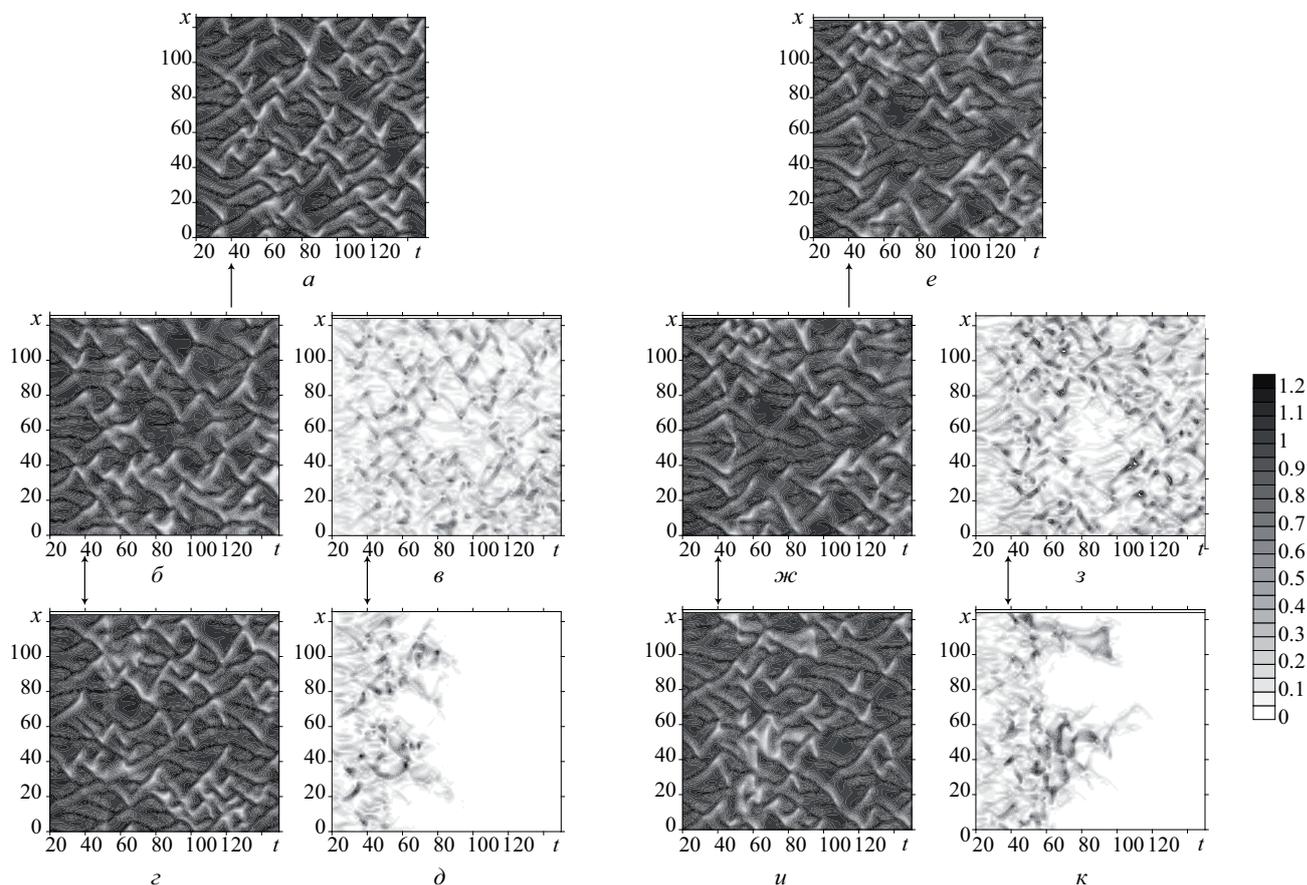


Рисунок 1.12 — Пространственно-временные диаграммы, характеризующие поведение ведущей (a, e) и ведомой ($б, г, ж, u$) систем (1.20)–(1.21), а также зависимости модуля разности состояний ведомой и вспомогательной систем $|v - v_a|$ ($в, д, з, к$) для случаев отсутствия ($в, з$) ($\varepsilon = 0.2$) и наличия ($г, к$) ($\varepsilon = 0.8$) обобщенной синхронизации во времени t и пространстве x . Значения управляющих параметров для ведомой системы были выбраны равными $\alpha_r = \beta_r = 3$. В моменты времени $t = 40$ включалась связь между ведущей и ведомой системами. Рисунки ($a-d$) соответствуют случаю отсутствия шума ($\tilde{D} = 0$), ($e-k$) — наличию шума интенсивности $\tilde{D} = 0.4$

амплитуды практически не влияет на характеристики модифицированного уравнения Гинзбурга-Ландау

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} = v_m - (1 - i\alpha_r)|v_m|^2 v_m + (1 + i\beta_r)\frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} - \varepsilon v_m, \quad x \in [0, L], \quad (1.24)$$

(и, как следствие, на характеристики ведомого) и, соответственно, величина параметра связи, при которой возникает режим обобщенной синхронизации, также не претерпевает существенных изменений. В то же самое время, как это обсуждалось в подразделе 1.2.1, граница обобщенной синхронизации может сдвигаться в сторону больших/меньших значений по параметру связи ε при воздействии шума очень большой интенсивности ($\tilde{D} > 64$ SNR < -42 дБ). Как видно из рисунка 1.11, при таких значениях интенсивности шума пороговое значение режима обобщенной синхронизации начинает уменьшаться. При очень больших интенсивностях \tilde{D} значение параметра связи ε_{GS} , соответствующее границе обобщенной синхронизации, также как и в случае радиотехнических генераторов, рассмотренных в разделе 1.2.2.3, стремится к нулю для любых значений управляющих параметров α и β пространственно-распределенных сред. Такое поведение границы обобщенной синхронизации, как и в случае однонаправлено связанных систем с малым числом степеней свободы, рассмотренных в подразделах 1.2.2.2–1.2.2.3, связано с наступлением режима индуцированной шумом синхронизации [297, 308].

Тем не менее, шум достаточно большой амплитуды практически не меняет пороговое значение параметра связи между однонаправлено связанными уравнениями Гинзбурга-Ландау. В этом случае можно говорить об устойчивости режима обобщенной синхронизации к шумам в пространственно-распределенных автоколебательных системах.

Таким образом, основываясь на рассмотрении поведения нелинейных динамических систем, принадлежащих к различным классам, можно говорить о достаточно высокой стабильности режима обобщенной хаотической синхронизации по отношению к внешнему шуму.

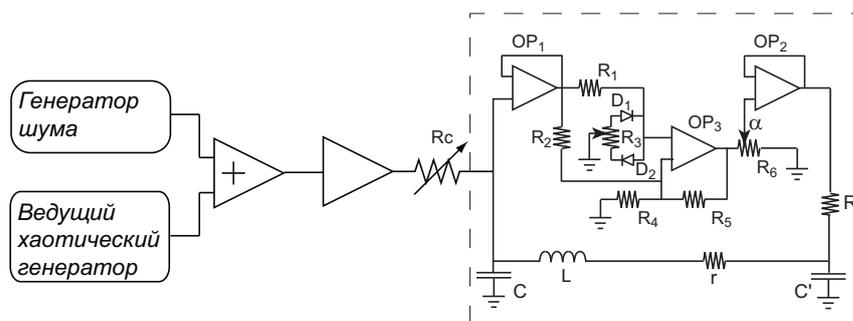


Рисунок 1.13 — Схема экспериментальной установки по изучению влияния шумов на устойчивость режима обобщенной хаотической синхронизации. Принципиальная схема генератора хаоса показана пунктирным прямоугольником. Номинальные значения элементов $C=330$ нФ, $C'=150$ нФ, $R=630$ Ω , $r=56$ Ω , $L=3.3$ мГн, $OP_{1,2}$ – TL082, OP_3 – LF356N, $D_{1,2}$ – 1N4148, $R_1=2.7$ к Ω , $R_2=R_4=7.4$ к Ω , $R_3=100$ Ω , $R_5=186$ к Ω , $R_6=4.7$ к Ω , RC' , α – параметр, характеризующий нелинейный преобразователь, R_c – сопротивление связи

1.2.3 Экспериментальное исследование влияния шумов на порог возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации

Чтобы подтвердить результаты теоретических предсказаний и численного моделирования, изложенные в предыдущих подразделах, было также проведено экспериментальное исследование влияния шума на устойчивость режима обобщенной синхронизации в связанных хаотических осцилляторах. В качестве объектов экспериментальных исследований были выбраны простые радиотехнические генераторы, демонстрирующие хаотическую динамику, модель которых была численно исследована в подразделе 1.2.2.3. Все параметры этих генераторов (включая интенсивность внешнего воздействия) могли легко контролироваться.

Схема экспериментальной установки приведена на рисунке 1.13. В качестве базового элемента схемы использовался радиотехнический генератор с нелинейным элементом и петлей обратной связи, аналогичный описанному в [68, 309] (показан на рисунке 1.13 пунктирным прямоугольником). Этот генератор, в зависимости от установленных параметров, может демонстрировать различные режимы колебаний, как периодические, так и хаотические, поэтому значение параметра α нелинейного элемента было выбрано таким образом, чтобы исследуемый генера-

тор находился в режиме хаотических колебаний (номинальные значения всех элементов приведены в подписи к рисунку 1.13). Хаотический генератор был подключен к ЦАП-АЦП LCard L-783, встроенному в персональный компьютер, посредством которого фиксировалась динамика напряжения на конденсаторах C и C' . Дальнейшая обработка полученных сигналов осуществлялась численно.

В качестве ведущего сигнала использовался предварительно оцифрованный и записанный с помощью АЦП сигнал этого же генератора, преобразованный в аналоговый сигнал с помощью ЦАП. Ввод сигнала в систему осуществлялся при помощи однонаправленной диссипативной связи (см. рисунок 1.13). Шумовой сигнал, производимый при помощи функционального генератора Agilent 33220, суммировался при помощи сумматора с сигналом ведущей системы и подавался на устройство связи. Шумовой сигнал представлял собой δ -коррелированный шумовой процесс с гауссовым распределением плотности вероятности. Сигнал, регистрирующий колебания ведомой системы, также оцифровывался и передавался на компьютер для последующих обработки и анализа.

Как отмечалось выше, одним из наиболее простых и эффективных способов детектирования режима обобщенной хаотической синхронизации является метод вспомогательной системы, заключающийся в одновременном рассмотрении динамики ведомой системы и ее точной копии (вспомогательной системы), стартующей с немного отличающихся начальных условий. В то же самое время, создание ведомого и вспомогательного радиотехнических генераторов с полностью идентичными параметрами оказывается, как правило, сложной и практически невозможной задачей. Основным препятствием к этому является разброс параметров, присущий всем сериям электронных устройств. Для решения подобной проблемы обычно проводится подбор электронных устройств с максимально близкими параметрами, но такой способ позволяет получить только систему, приближенную по параметрам к первоначальной, а не ее точную копию. В то же самое время, как отмечалось в разделе 1.1, достаточно часто при проведении экспериментальных исследований ис-

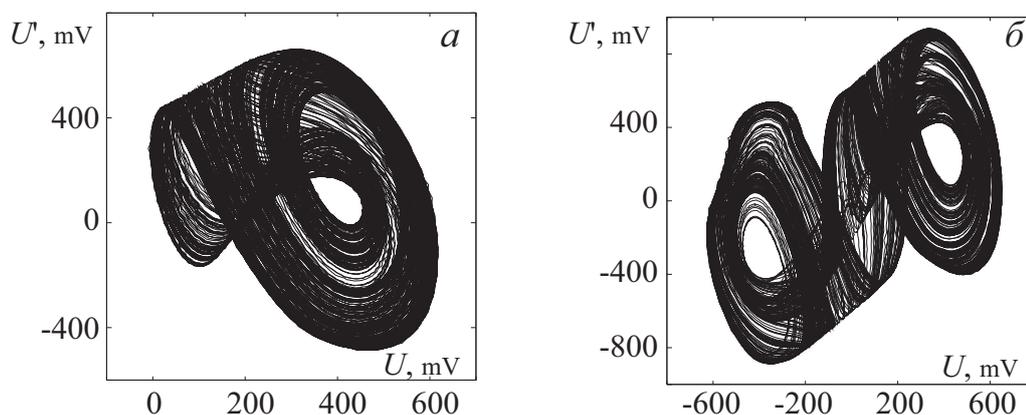


Рисунок 1.14 — Характерные фазовые портреты хаотических колебаний в автономном генераторе, наблюдаемые в радиотехническом эксперименте: (а) аттрактор ленточного типа ($\alpha \sim 15$), (б) аттрактор типа двойной спирали ($\alpha \sim 25$) (ср. с рисунком 1.8)

пользуют следующий подход (см., например, [281]): оцифрованный заранее сигнал ведущей системы подается на ведомую систему дважды: первый раз система рассматривается как ведомый генератор, а второй — как вспомогательный, при этом разница в начальных условиях оказывается заданной автоматически. Обе полученные временные реализации оцифровываются и после ликвидации начальных участков, соответствующих переходным процессам, сравниваются друг с другом. В случае совпадения временных реализаций друг с другом в четком соответствии с идеологией метода вспомогательной системы диагностируется режим обобщенной хаотической синхронизации.

Рассматриваемый радиотехнический генератор, также как и его модель, подробно исследованная в подразделе 1.2.2.3, может демонстрировать два характерных режима хаотической генерации: с аттрактором ленточного типа и аттрактором типа двойной спирали (double scroll). Характерные фазовые портреты колебаний автономного генератора, соответствующие этим режимам, приведены на рисунке 1.14 (ленточный аттрактор показан на рисунке 1.14, а и аттрактор типа двойной спирали — на рисунке 1.14, б) (ср. с рисунком 1.8).

Экспериментальные исследования проводились для трех различных случаев:

- хаотические колебания в автономных ведущем и ведомом генераторах характеризуются аттракторами ленточного типа;
- в ведущем генераторе реализуется хаотический режим, характеризующийся аттрактором ленточного типа, в то время как в ведомом генераторе наблюдается хаотический аттрактор типа двойной спирали;
- хаотические колебания в автономных ведущем и ведомом генераторах характеризуются хаотическим аттрактором типа двойной спирали.

Все случаи рассматривались при наличии шума различной интенсивности. Для экспериментальных данных в роли интенсивности шума выступало отношение $D = P_N/P_{CS}$ мощности шума P_N к мощности хаотического сигнала P_{CS} .

Рисунок 1.15 иллюстрирует зависимость порогового значения параметра связи $\varepsilon = 1/R_c\sqrt{L/C}$, соответствующего границе режима обобщенной синхронизации, от интенсивности шума для трех вышеописанных случаев. Видно, что в диапазоне интенсивности шума $[0; 0.5]$, достижимом в условиях натурального эксперимента, граница установления режима обобщенной хаотической синхронизации, фактически, остается неизменной, что хорошо согласуется с результатами численного моделирования, рассмотренными в разделе 1.2.2.3.

На рисунке 1.16 приведены типичные сигналы ведущей системы как в отсутствие, так и при наличии шума, воздействующего на ведомую систему, а также фазовые портреты ведомой системы и плоскости (U, V) , характеризующие состояния ведомой и вспомогательной систем, в отсутствие и при наличии режима обобщенной синхронизации в радиотехнических генераторах с аттракторами ленточного типа. Из рисунка видно, что характеристики ведомой системы в отсутствие и при наличии шума оказываются практически одинаковыми. Аналогичная ситуация имеет место в системе двух однонаправлено связанных радиотехнических генераторов, характеризующихся в автономном режиме аттракторами типа

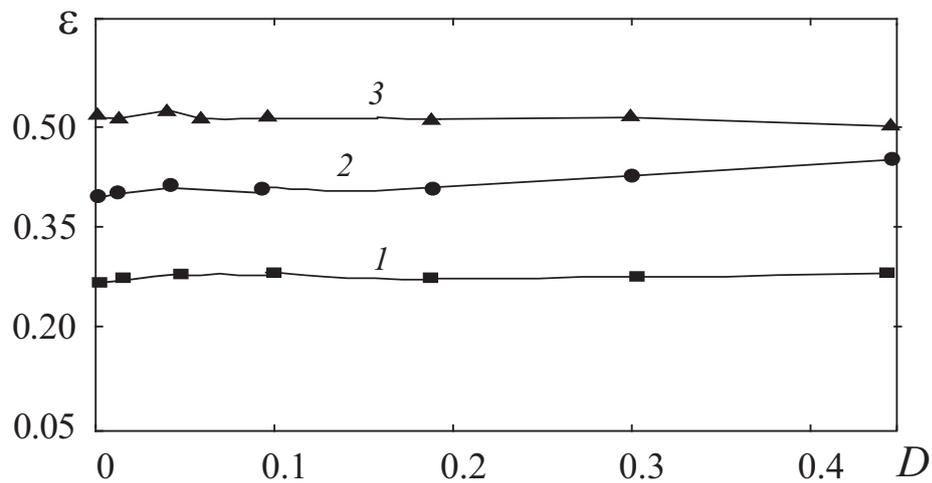


Рисунок 1.15 — Величина параметра связи, соответствующая установлению режима обобщенной хаотической синхронизации, как функция интенсивности шума: (кривая 1, ■) — оба рассматриваемых генератора в автономном режиме характеризуются ленточными хаотическими аттракторами; (кривая 2, ●) — ведущая система характеризуется ленточным хаотическим аттрактором, ведомый осциллятор демонстрирует хаотические колебания типа двойной спирали; (кривая 3, ▲) — ведущий и ведомый генераторы в автономном режиме характеризуются хаотическими аттракторами типа двойной спирали

двойной спирали в одном или в обоих из них. Можно утверждать, что во всех рассмотренных случаях модифицированная система (то есть рассматриваемый радиотехнический генератор с дополнительно введенной диссипацией) находится в периодическом режиме. Дальнейшее увеличение интенсивности шума (когда она становится больше интенсивности детерминированного сигнала) может приводить к изменению величины параметра связи, при котором устанавливается режим обобщенной хаотической синхронизации, с последующим переходом наблюдаемого режима в режим синхронизации, индуцированной шумом.

Таким образом, на основе приведенного рассмотрения можно сделать вывод о том, что результаты экспериментальных исследований хорошо согласуются с данными теоретического анализа и численного моделирования, что является дополнительным доказательством устойчивости режима обобщенной хаотической синхронизации к внешним шумам.

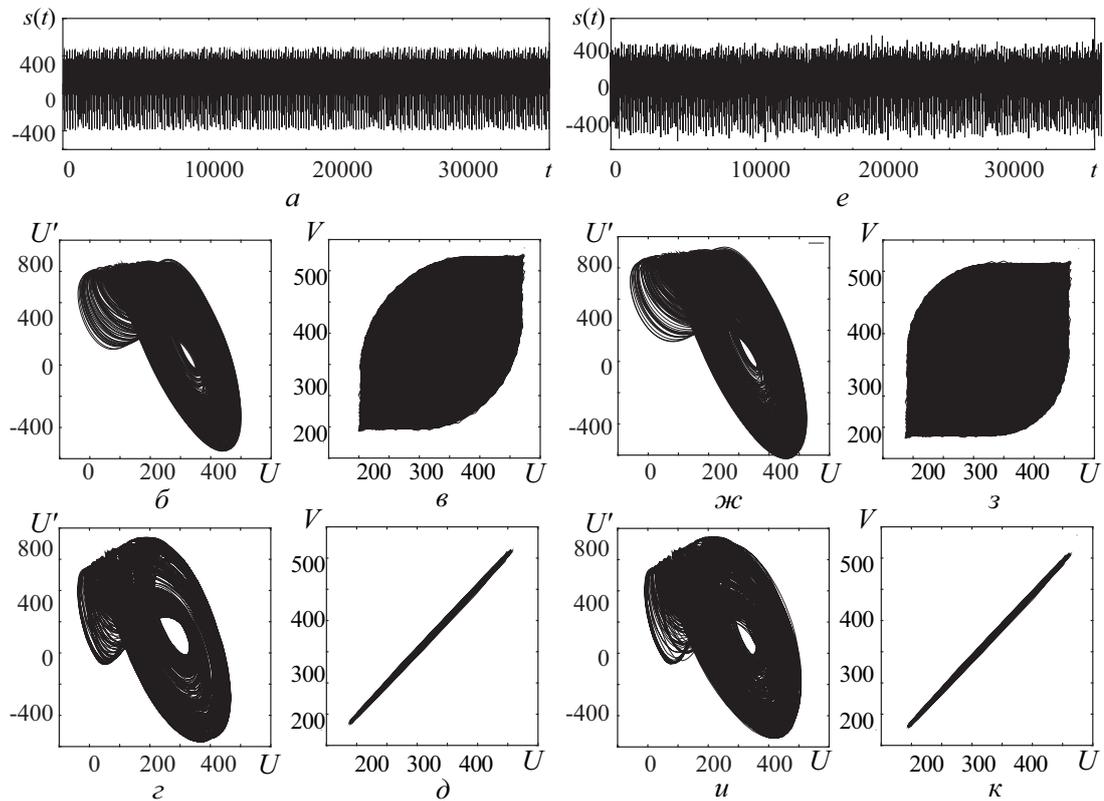


Рисунок 1.16 — Сигналы с ведущего хаотического генератора в отсутствие (а) и при наличии (е) источника шума, воздействующего на ведомый генератор, а также фазовые портреты ведомой системы (б, г, ж, и) и плоскости (U, V) , характеризующие поведение ведомой и вспомогательной систем (в, д, з, к) до ($\varepsilon = 0.22$) и после ($\varepsilon = 0.34$) установления режима обобщенной синхронизации. Управляющие параметры радиотехнических генераторов были выбраны таким образом, чтобы в обеих системах в автономном режиме реализовывались хаотические колебания ленточного типа. Рисунки (а–д) соответствуют случаю отсутствия шума ($D = 0$), (е–к) — наличию шума интенсивности $D = 0.4$

1.3 Обобщенная синхронизация в случае воздействия хаотического сигнала на систему, демонстрирующую периодическую динамику

Результаты по исследованию режима обобщенной синхронизации, описанные выше в разделе 1.2, относятся к случаю взаимодействия двух однонаправлено связанных систем, демонстрирующих хаотическую динамику. В то же самое время, теоретически не исключена ситуация возникновения этого режима в том случае, когда ведущая система находится по-прежнему в хаотическом режиме, а ведомая система демонстрирует периодическую динамику. Действительно, как обсуждалось в разделе 1.1, возникновение обобщенной синхронизации в двух связанных хаотических системах независимо от типа связи между ними (диссипативная или недиссипативная) обусловлено, в первую очередь, подавлением собственной хаотической динамики ведомой системы. Понятно, что в данном случае “собственная хаотическая динамика” в ведомой системе отсутствует, а следовательно, ведущая система может легко навязать ей свою хаотическую динамику, что приведет к возникновению обобщенной синхронизации. При этом, очевидно, что режим обобщенной синхронизации в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на периодическую систему должен возникать при меньших значениях параметра связи по сравнению со случаем двух однонаправлено связанных хаотических систем, а методы диагностики синхронного режима (в частности, метод расчета спектра условных показателей Ляпунова и метод вспомогательной системы) останутся неизменными. Однако, при диагностике обобщенной синхронизации при помощи расчета условных показателей Ляпунова нужно обращать внимание на тот факт, что в силу того, что ведомая система находится в периодическом режиме, старший условный показатель Ляпунова изначально будет нулевым, и переход именно этого показателя Ляпунова в область отрицательных значений является критерием возникновения синхронного режима. Ес-

ли расстройка параметров взаимодействующих систем будет достаточно малой, режим обобщенной синхронизации в данном случае будет близок к режиму фазовой синхронизации [112, 310, 311].

Рассмотрим вопрос о поведении границы обобщенной синхронизации при изменении параметров ведущей системы. Известно, что для однонаправлено связанных хаотических систем поведение границы обобщенной синхронизации на плоскости параметров “частота ведущей системы — параметр связи” существенным образом отличается от поведения границ других известных типов хаотической синхронизации: в области относительно больших значений расстройки собственных частот порог возникновения синхронного режима практически не зависит от параметров ведущей системы [79, 83], в то время как в области относительно слабых расстроек порог обобщенной синхронизации в некоторых системах начинает резко расти [85, 255]. Проанализируем поведение границы обобщенной синхронизации в том случае, когда внешний хаотический сигнал с ведущего осциллятора воздействует на ведомую систему, находящуюся в периодическом режиме, на примерах сосредоточенных и пространственно-распределенных систем. Начнем рассмотрение с модельной системы.

1.3.1 Обобщенная синхронизация в модельных системах

В качестве примера модельной системы рассмотрим два однонаправлено связанных осциллятора Ресслера. Значения управляющих параметров выберем таким образом, чтобы в ведущей системе наблюдалась хаотическая динамика, а в ведомой системе — периодические колебания. Данная модель в безразмерном виде описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, & \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\
 \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a_d y_d, & \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a_r y_r, \\
 \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), & \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c),
 \end{aligned}
 \tag{1.25}$$

где $a_d = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10$ — управляющие параметры, параметр ε характеризует величину связи между осцилляторами. Управляющий параметр ведомой системы $\omega_r = 0.95$, характеризующий основную частоту колебаний, был фиксирован, а аналогичный параметр ведущей системы ω_d варьировался в диапазоне от 0.86 до 1.04 для того, чтобы задать расстройку взаимодействующих осцилляторов. При выборе управляющего параметра ведомой системы $a_r = 0.08$ в системе реализуется цикл периода 2, аналогично, при $a_r = 0.09$ — цикл периода 4, при $a_r = 0.094$ — цикл периода 8.

На рисунке 1.17 показано расположение границы обобщенной синхронизации системы (1.25) на плоскости управляющих параметров (ω_d, ε) . Линия 1 соответствует границе установления режима обобщенной синхронизации при $a_r = 0.08$, линия 2 — при $a_r = 0.09$, а линия 3 — при $a_r = 0.094$. Порог возникновения синхронного режима определялся по моменту перехода нулевого условного показателя Ляпунова в область отрицательных значений, а затем уточнялся при помощи метода вспомогательной системы. Из рисунка видно, что чем проще режим, реализующийся в системе, тем ниже пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению обобщенной синхронизации. Более того, границы возникновения синхронного режима в данном случае проходят значительно ниже аналогичной границы в случае взаимодействия двух связанных хаотических систем (ср. рисунок 1.17 и рисунок 1 в [85], где приведена граница обобщенной синхронизации в системе (1.25) с теми же значениями управляющих параметров и $a_r = 0.15$), что подтверждает теоретические рассуждения, приведенные выше в этом разделе. В то же самое время, как и в случае двух связанных хаотических систем, во всех рассмотренных случаях порог возникновения режима обобщенной синхронизации в области относительно больших значений расстройки собственных частот практически не зависит от параметра ω_d ведущей системы. Однако, при относительно малых значениях расстройки собственных частот взаимодействующих систем граница обобщенной син-

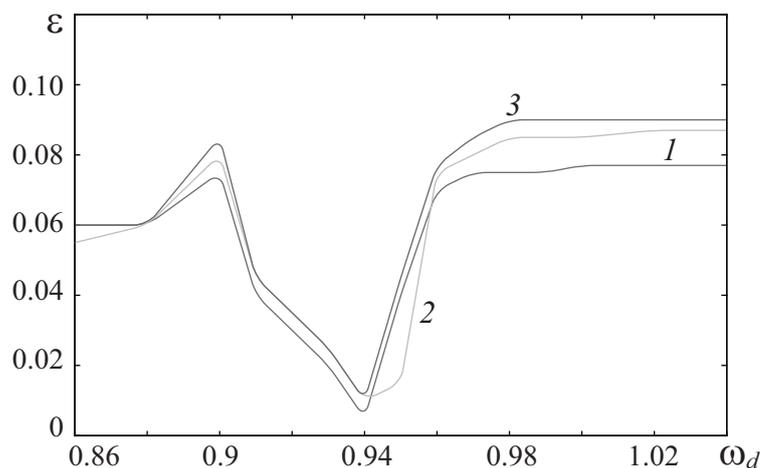


Рисунок 1.17 — Границы возникновения режима обобщенной синхронизации: 1 — $a_r = 0.08$; 2 — $a_r = 0.09$; 3 — $a_r = 0.094$ для двух однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера (1.25) на плоскости управляющих параметров (ω_d, ε)

хронизации демонстрирует относительно сильный “провал”, что не характерно для систем, находящихся в хаотической режиме.

Наличие характерного “провала” можно объяснить из следующих соображений. Если частота внешнего хаотического воздействия близка к собственной частоте колебаний ведомой системы, происходит захват частот, а следовательно, установление режима фазовой синхронизации. Так как ведомая система находится в режиме периодических колебаний, ведущая система, демонстрирующая хаотические колебания, может легко навязать ей свою динамику. В этом случае границы фазовой и обобщенной синхронизации будут примерно совпадать, а граница обобщенной синхронизации будет демонстрировать “нормальное” поведение⁴. К аналогичному выводу можно прийти, исходя из теоретических рассуждений, представленных выше. В области относительно слабых значений расстройки собственных частот режиму фазовой синхронизации предшествует переход условного нулевого показателя Ляпунова в область отрицательных значений. Так как этот показатель Ляпунова является старшим для ведомой системы, момент его перехода в область отрицательных значений соответствует порогу обобщенной синхрони-

⁴Под “нормальным” поведением в данном случае понимается рост порогового значения параметра связи, соответствующего установлению синхронного режима, при увеличении величины расстройки между системами.

зации. Очевидно, что при относительно слабых значениях расстройки параметров взаимодействующих систем границы режимов обобщенной и фазовой синхронизации должны располагаться очень близко друг к другу.

Если же параметры взаимодействующих систем расстроены достаточно сильно, механизмы возникновения обобщенной синхронизации в данном случае оказываются иными. Как и для двух однонаправленно связанных хаотических систем, синхронный режим в данном случае возникает за счет подавления собственной динамики ведомой системы и навязывания ей хаотической динамики под действием ведущей системы.

В то же самое время, несмотря на качественно отличное поведение границ обобщенной синхронизации в случае взаимодействия двух хаотических систем и системы, демонстрирующей периодическое поведение, находящейся под действием хаотического осциллятора, и в том и в другом случае в определенной области управляющих параметров порог обобщенной синхронизации меняется достаточно резко при слабом изменении параметров внешнего хаотического сигнала (в частности, при переходе из области относительно больших в область относительно слабых значений расстройки собственных частот взаимодействующих систем критическое значение параметра связи, соответствующее установлению синхронного режима, меняется более чем в 2 раза), что делает возможным использование этих систем для скрытой передачи информации [143–145] (более подробно см. раздел 1.5).

1.3.2 Обобщенная синхронизация в системах пучково-плазменной природы

Теперь рассмотрим установление режима обобщенной синхронизации в системах электронно-волновой природы — цепочке из двух однонаправленно связанных низковольтных виркаторов [312].

Низковольтный виркатор представляет собой плоский диодный промежуток, пронизываемый электронным потоком со сверхкритическим

первеансом [313]. Для создания сверхкритического первеанса на выходную сетку системы подается тормозящий потенциал, с увеличением которого в электронном потоке формируется виртуальный катод (потенциальный барьер, отражающий часть электронов обратно к плоскости инжекции и модулирующий проходящий поток).

Для моделирования нелинейных нестационарных процессов в пучке заряженных частиц с виртуальным катодом использовалась одномерная модель пролетного промежутка с тормозящим полем. Моделирование осуществлялось при помощи метода крупных частиц [314]. Согласно этому методу, электронный поток представляется в виде совокупности крупных частиц (заряженных листов), инжектируемых через равные промежутки времени с постоянной скоростью в пространство взаимодействия. Для каждой крупной частицы решаются нерелятивистские уравнения движения, которые в безразмерных переменных записываются в виде:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -E(x_i), \quad (1.26)$$

где x_i – координата i -той частицы, $E(x_i)$ – напряженность поля пространственного заряда в точке с координатой x_i .

Напряженность и потенциал поля пространственного заряда определяются на равномерной пространственной сетке с шагом Δx , покрывающей межсеточное пространство. Потенциал поля пространственного заряда в квазистатическом приближении определяется уравнением Пуассона, которое в одномерном приближении имеет вид:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \alpha^2 \rho(x), \quad (1.27)$$

где $\alpha = \omega_p L / v_0$ – параметр Пирса (ω_p – плазменная частота, L – длина пролетного промежутка, v_0 – невозмущенная скорость электронного потока). Граничным условием для уравнения Пуассона является условие подачи тормозящей разности потенциалов между сетками системы: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \Delta\varphi$. Напряженность поля пространственного заряда E в данном случае определяется путем численного дифференцирования полученных значений потенциала.

Расчет плотности электронного потока осуществлялся методом частиц в ячейке, который заключается в том, что осуществляется билинейное взвешивание заряда крупных частиц на сетке для нахождения пространственного заряда [314]. В этом методе плотность пространственного заряда в j -том узле пространственной сетки ($x_j = j\Delta x$) выражается как

$$\rho(x_j) = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^N \Theta(x_i - x_j), \quad (1.28)$$

где N — полное число крупных частиц, n_0 — параметр вычислительной схемы, равный числу частиц на ячейку в невозмущенном состоянии,

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 - |x|/\Delta x, & |x| < \Delta x, \\ 0, & |x| > \Delta x \end{cases} \quad (1.29)$$

— кусочно-линейная функция, определяющая процедуру “взвешивания” крупной частицы на пространственной сетке с шагом Δx .

Для вывода мощности СВЧ колебаний виртуального катода в низковольтном виркаторе использовался отрезок спиральной замедляющей системы (ОСЗС), который моделировался методом эквивалентных схем [315]. Согласно этому методу ОСЗС описывается телеграфными уравнениями, дополненными слагаемым, описывающим возбуждение электромагнитных волн пучком:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial U_{out}}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_{out}}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{C} \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (1.30)$$

где U_{out} — выходной сигнал низковольтного виркатора (интегральная величина, характеризующая состояние системы). Телеграфные уравнения решались численно в предположении согласования линии передачи на левом $x = 0$ и правом $x = l$ концах ОСЗС. Распределение величины заряда пучка $q(t, x)$, возбуждающего электромагнитные волны в линии передачи, бралось из решения задачи методом крупных частиц (см. выше).

Для исследования обобщенной синхронизации в цепочке из двух однонаправлено связанных низковольтных виркаторов, осуществлялось

численное моделирование динамики ведущего (далее индекс 1) и ведомого (далее индекс 2) генераторов согласно описанным выше уравнениям (1.26)–(1.30). Однонаправленная связь между низковольтными виркаторами реализовывалась путем подачи СВЧ сигнала с выхода ведущего генератора на вход ведомого генератора [312]. Ввод сигнала в пучок в ведомом генераторе осуществлялся за счет модуляции потока, входящего в диодный промежуток, отрезком спирали, расположенным между электронной пушкой и входной сеткой пространства взаимодействия, на который подавался выходной сигнал ведущего виркатора. В канале связи между генераторами предполагалось наличие аттенюатора, который позволял управлять мощностью СВЧ сигнала, воздействующего на ведомый генератор. В исследуемой модели это учитывалось путем добавления к уравнениям для ведомого генератора дополнительных уравнений, описывающих модулирующую спираль:

$$\frac{\partial I_{2in}}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial U_{2in}}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_{2in}}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial I_{2in}}{\partial x}, \quad (1.31)$$

с граничным условием:

$$U_{2in}(0, t) = \sqrt{\varepsilon} U_{1out}(1, t - T), \quad (1.32)$$

где ε — коэффициент связи в системе, который вводится как отношение мощности сигнала, поданного на модулятор, к выходной мощности ведущего генератора.

Управляющими параметрами в системе связанных низковольтных виркаторов являются тормозящая разность потенциалов $\Delta\varphi_{1,2}$ между сетками пролетного промежутка, ток пучка $\alpha_{1,2}$ и коэффициент связи ε . Варьированием тормозящего потенциала выходной сетки и параметра Пирса можно добиться изменения динамики электронного пучка в генераторе и смены режима колебаний виртуального катода.

Также, как и в случае модельных систем, рассмотренных в подразделе 1.3.1, ведущий генератор, характеризующийся выходным сигналом $x(t) = U_{out1}(t)$, был настроен на хаотический режим, а ведомый генератор, характеризующийся выходным сигналом $u(t) = U_{out2}(t)$, — на сложнопериодический режим. Значения управляющих параметров в

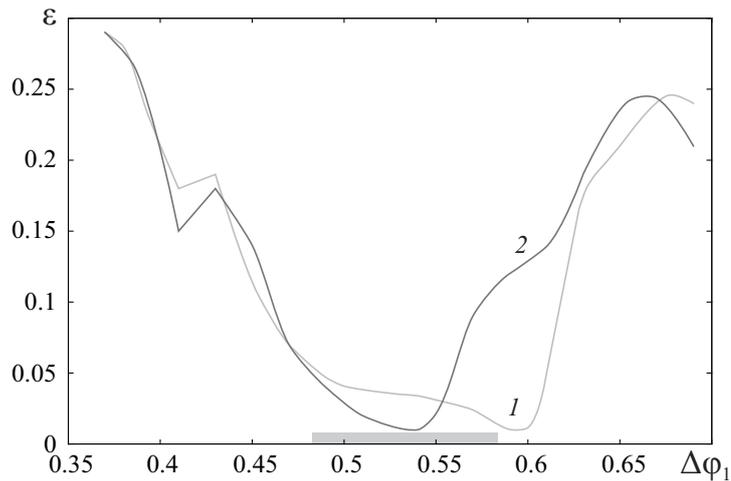


Рисунок 1.18 — Границы обобщенной синхронизации в системе двух однонаправлено связанных низковольтных виркаторов на плоскости параметров $(\Delta\varphi_1, \varepsilon)$ при $\Delta\varphi_2 = 0.6$ (сложнопериодический режим, кривая 1) и $\Delta\varphi_2 = 0.525$ (хаотический режим, кривая 2)

этом случае были выбраны следующими: тормозящий потенциал ведомой системы $\Delta\varphi_2 = 0.6$ и токи пучков $\alpha_{1,2} = 0.9$ фиксировались, при этом тормозящий потенциал ведущей системы варьировался в диапазоне $\Delta\varphi_1 \in [0.48; 0.58]$, обеспечивая реализацию хаотических колебаний в системе.

На рисунке 1.18 (кривая 1) приведена граница обобщенной синхронизации на плоскости параметров “тормозящий потенциал ведущей системы $\Delta\varphi_1$ — параметр связи ε ” при значениях управляющих параметров, упомянутых выше. На этом же рисунке (кривая 2) приведена аналогичная граница при $\Delta\varphi_2 = 0.525$ и тех же значениях остальных управляющих параметров, что соответствует реализации хаотических колебаний в ведомой системе. Для определения порогового значения установления синхронного режима в обоих случаях использовался метод вспомогательной системы. Обе границы представлены в более широком диапазоне изменения параметра $\Delta\varphi_1 \in [0.37; 0.7]$, что соответствует различным режимам колебаний в ведущей системе (более подробно см. [313]), область хаоса отмечена серым. Из рисунка видно, что поведение границы обобщенной синхронизации в данном случае качественно аналогично расположению границ синхронных режимов в модельных системах (см. рисунок 1.17). Собственная частота колебаний ведущей систе-

мы близка к частоте ведомого генератора во всем диапазоне изменения $\Delta\varphi_1 \in [0.48; 0.58]$, что в силу аргументов, приведенных выше, говорит о близости границ режимов обобщенной и фазовой синхронизации в исследуемой системе. При этом, для обоих случаев порог возникновения синхронного режима меняется достаточно резко при малом изменении параметра $\Delta\varphi_1$, что делает возможным применение однонаправлено связанных низковольтных виркаторов для скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации [145]. Этот вопрос рассмотрен более детально в разделе 1.5.

1.4 Бинарные обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом

1.4.1 Бинарная обобщенная синхронизация

Перед тем, как перейти к возможным практическим приложениям режима обобщенной синхронизации, рассмотрим вопрос о возможности реализации этого режима в бинарных системах — системах, сигналы которых содержат только биты “0” и “1” (см., например, [316, 317]). При этом, под бинарной обобщенной синхронизацией будем понимать такой режим, при котором при некотором значении параметра связи ε две однонаправленно связанные динамические системы x и y , генерирующие апериодические последовательности x и y (принимающие только значения “0” или “1”), могут находиться в режиме обобщенной синхронизации, то есть между состояниями этих систем выполняется функциональное соотношение

$$y = F[x]. \quad (1.33)$$

Для диагностики бинарной обобщенной синхронизации, как и в случае аналоговых систем, будем использовать метод вспомогательной си-

стемы [69] и расчет старшего условного показателя Ляпунова [70], адаптированные под бинарные системы.

В качестве первого примера рассмотрим установление режима бинарной обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах с дискретным временем, описываемых следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= H(\eta_{n+1}), \quad \eta_{n+1} = f(\eta_n, \lambda_d), \\ y_{n+1} &= H(\zeta_{n+1}), \quad \zeta_{n+1} = f(\zeta_n, \lambda_r) + \varepsilon \zeta_n^2 x_n, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где x_n, y_n — бинарные последовательности, η_n и ζ_n — внутренние (скрытые) переменные, динамика которых описывается при помощи оператора эволюции — логистического отображения

$$f(\xi, \lambda) = 1 - \lambda \xi^2, \quad (1.35)$$

$\lambda_d = 1.6$ и $\lambda_r = 1.54$ — управляющие параметры ведущей и ведомой систем, соответственно, обеспечивающие реализацию хаотической динамики в исследуемых системах в отсутствие связи, ε — параметр связи,

$$H(\xi) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} \quad (1.36)$$

— функция Хевисайда.

Для диагностики бинарной обобщенной синхронизации при помощи метода вспомогательной системы параллельно с ведомой системой рассматривалась вспомогательная система z_n , описываемая уравнением

$$z_{n+1} = H(\varsigma_{n+1}), \quad \varsigma_{n+1} = f(\varsigma_n, \lambda_r) + \varepsilon \varsigma_n^2 x_n, \quad (1.37)$$

полностью идентичная ведомой системе y_n , но стартующая с других начальных условий, то есть $\varsigma_0 \neq \zeta_0$.

Поведение двух связанных систем (1.34), генерирующих бинарные сигналы, иллюстрируют рисунки 1.19 и 1.20 для двух различных значений параметра связи ε . Рисунок 1.19 соответствует относительно слабой связи $\varepsilon = 0.2$ между системами, когда режим бинарной обобщенной синхронизации отсутствует. Из рисунка видно, что бинарные последовательности, производимые ведущей, ведомой и вспомогательной

системами, оказываются различными (рисунок 1.19, *а-в*). Дополнительным подтверждением того, что при $\varepsilon = 0.2$ взаимодействующие системы находятся в асинхронном режиме, является зависимость разности состояний ведомой и вспомогательной систем $E = y_n - z_n$ от времени, приведенная на рисунке 1.19, *г*. Нетрудно заметить, что она отлична от нуля на протяжении практически всего времени наблюдения.

При увеличении параметра связи ε взаимодействующие системы переходят в режим бинарной обобщенной синхронизации (рисунок 1.20). Несмотря на то, что динамика ведущей и ведомой систем остается по-прежнему различной (рисунок 1.20, *а, б*), после короткого переходного процесса (порядка 100 единиц дискретного времени) ведомая и вспомогательная системы начинают демонстрировать идентичное поведение (рисунок 1.20, *б-г*), что свидетельствует о наличии обобщенной синхронизации между бинарными ведущей и ведомой системами (1.34).

Дополнительным доказательством наличия бинарной обобщенной синхронизации является зависимость показателя Ляпунова, рассчитанного для ведомой системы, от параметра связи ε [70]. Несмотря на то, что для бинарных систем расчет показателей Ляпунова не представляется возможным (так как выходные сигналы могут принимать только два значения, “0” или “1”), можно вычислить показатели Ляпунова для системы (1.34), то есть

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |2(\varepsilon x_i - \lambda_r) \zeta_i|, \quad (1.38)$$

так как значение скрытой переменной ζ оказывается известным.

Зависимости условного показателя Ляпунова Λ , рассчитанного для ведомой системы, от параметра связи ε для трех различных значений управляющего параметра λ_r приведены на рисунке 1.21. Нетрудно заметить, что для значения $\lambda_r = 1.54$, рассмотренного выше, величина условного показателя Ляпунова уменьшается при увеличении параметра связи и при $\varepsilon_{BGS} \approx 0.35$ переходит в область отрицательных значений, что соответствует установлению бинарной обобщенной синхронизации (линия 1 на рисунке 1.21). при увеличении управляющего параметра λ_r

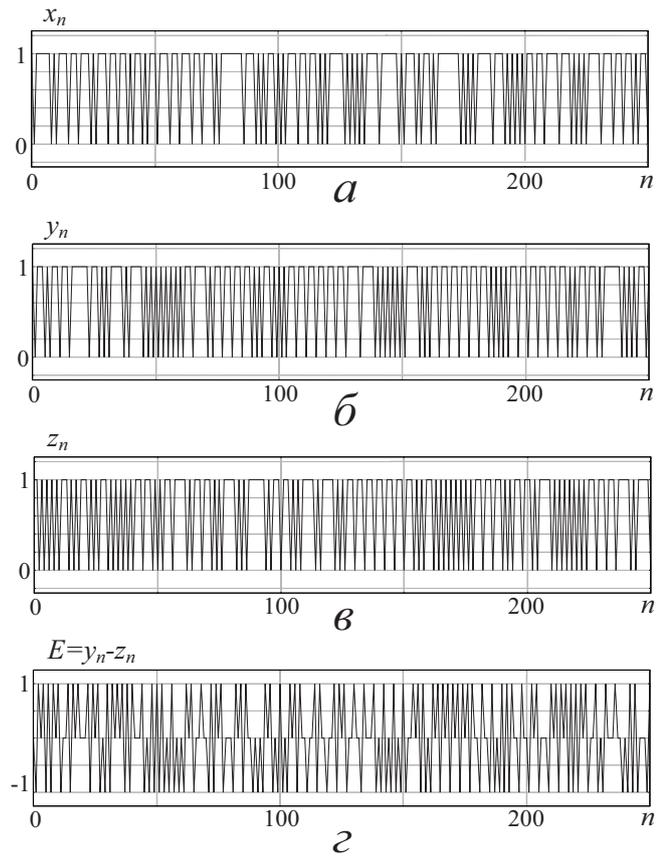


Рисунок 1.19 — Временные зависимости ведущей (а), ведомой (б) и вспомогательной (в) бинарных систем с дискретным временем (1.34), а также разности E между ними (г) при $\varepsilon = 0.2$ (асинхронный режим)

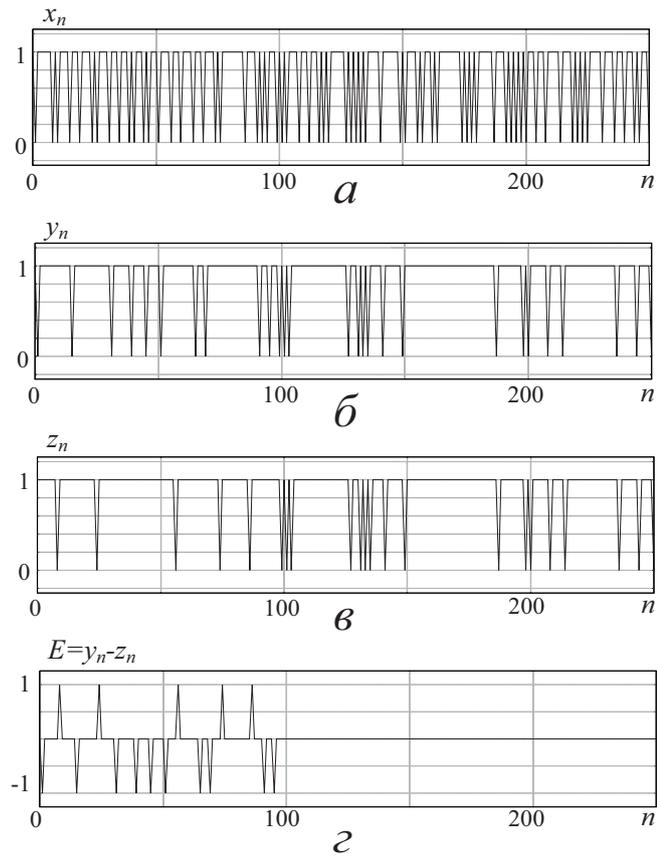


Рисунок 1.20 — Временные зависимости ведущей (а), ведомой (б) и вспомогательной (в) бинарных систем с дискретным временем (1.34), а также разности E между ними (г) при $\varepsilon = 0.54$ (режим бинарной обобщенной синхронизации)

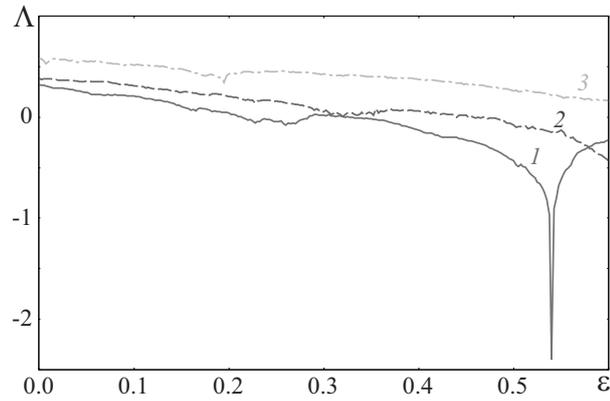


Рисунок 1.21 — Зависимости условного показателя Ляпунова Λ , рассчитанного для ведомой системы (1.34), от параметра связи ε при трех различных значениях параметра λ_r : $\lambda_r = 1.54$ — кривая 1, $\lambda_r = 1.62$ — кривая 2, $\lambda_r = 1.95$ — кривая 3

(кривые 2 и 3 на рисунке 1.21), динамика ведомой системы усложняется, что приводит к росту величины показателя Ляпунова в отсутствие связи, а следовательно, к увеличению порогового значения установления режима обобщенной синхронизации. Так, при $\lambda_r = 1.62$ режим бинарной обобщенной синхронизации наступает при $\varepsilon_{BGS2} \approx 0.48$ (линия 2 на рисунке 1.21), а при $\lambda_r = 1.95$ (линия 3 на рисунке 1.21) бинарная обобщенная синхронизация не наблюдается вовсе в рассматриваемом диапазоне значений параметра связи.

Рассмотрение условного показателя Ляпунова позволяет также выявить взаимосвязь между синхронной (с точки зрения обобщенной синхронизации) динамикой скрытых и бинарных переменных. Очевидно, что обобщенная синхронизация скрытых переменных (то есть η_n и ζ_n) подразумевает наличие обобщенной синхронизации с точки зрения бинарных переменных, то есть x_n и y_n . В то же самое время, обратная взаимосвязь далеко не очевидна, но условные показатели Ляпунова позволяют решить эту проблему. В самом деле, увеличение/уменьшение разности скрытых переменных ведомой и вспомогательной систем $\delta = \zeta - \varsigma$ полностью определяется знаком условного показателя Ляпунова. Когда условный показатель Ляпунова положительный (режим обобщенной синхронизации не наблюдается), разность δ между значениями скрытых переменных ведомой и вспомогательной систем увеличивается, а так как значения скрытых переменных оказываются ограниченными

$(-\zeta_m < \zeta < \zeta_m, -\zeta_m < \varsigma < \zeta_m, 0 < \zeta_m \leq 1)$, переменная δ демонстрирует хаотическое поведение, при этом ее значения оказываются сосредоточенными в диапазоне $(-2\zeta_m, 2\zeta_m)$. Очевидно, когда $-2\zeta_m < \delta < -\zeta_m$ и $\zeta_m < \delta < 2\zeta_m$, скрытые переменные ζ и ς характеризуются различными знаками, а следовательно, переменные y и z , соответствующие ведомой и вспомогательной системам, оказываются также различными. Таким образом, бинарные переменные оказываются синхронными (с точки зрения обобщенной синхронизации) тогда и только тогда, когда скрытые переменные находятся в режиме обобщенной синхронизации.

Необходимо отметить, что с практической точки зрения бинарные системы могут быть в некоторой степени не идентичными [318, 319]. Смоделировать влияние подобной неидентичности можно при помощи добавления шума в исследуемые системы или путем расстройки их управляющих параметров [320]. В то же самое время, как и обобщенная синхронизация однонаправленно связанных хаотических систем (см. раздел 1.2), режим бинарной обобщенной синхронизации обладает достаточно высокой устойчивостью по отношению к шумам. В этом случае устойчивость синхронного режима определяется устойчивостью режима обобщенной синхронизации, устанавливаемого между скрытыми переменными взаимодействующих систем, точно также, как и в случае классической обобщенной синхронизации [138]. Однако, так как тип связи между взаимодействующими системами, рассмотренными в подразделе 1.2.2.1, отличается от исследуемой системы, численные значения границ устойчивости режимов обобщенной синхронизации и бинарной обобщенной синхронизации будут также различными.

Для иллюстрации устойчивости режима бинарной обобщенной синхронизации в исследуемой бинарной системе (1.34) по отношению к шумам проанализируем зависимости пороговых значений установления синхронного режима от интенсивности шума. По аналогии с разделом 1.2, предположим, что ведомая и вспомогательная система подвергаются дополнительному шумовому воздействию $D\xi$ (шум добавляется аддитивно в уравнения, описывающие динамику скрытых перемен-

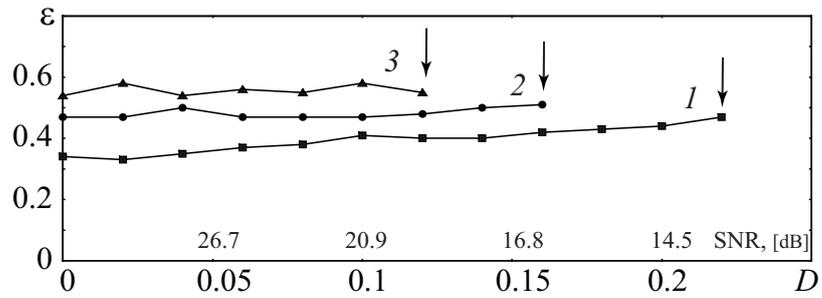


Рисунок 1.22 — Зависимости порогового значения установления режима бинарной обобщенной синхронизации в системе (1.34) от интенсивности шумового воздействия (отношения сигнал/шум) при различных значениях управляющих параметров: 1 — $\lambda_r = 1.54$, 2 — $\lambda_r = 1.62$, 3 — $\lambda_r = 1.7$. Критические значения интенсивности шума D_c , до которых наблюдается режим бинарной обобщенной синхронизации в системе (1.34), показаны стрелками

ных), где ξ — стохастический процесс с равномерно распределенной на интервале $[0; 1]$ плотностью вероятности, D — интенсивность шума. Рисунок 1.22 иллюстрирует зависимости порога установления режима бинарной обобщенной синхронизации от интенсивности шума при трех различных значениях управляющего параметра λ_r и фиксированных значениях остальных управляющих параметров. На горизонтальной оси приведены также значения отношения сигнал/шум, соответствующие этим значениям интенсивности шума. Расчет отношения сигнал/шум осуществлялся также, как и в разделе 1.2. Нетрудно заметить, что во всех рассмотренных случаях граничные значения бинарной обобщенной синхронизации практически не зависят от интенсивности шума в диапазоне $D \in [0, D_c]$, где величина D_c (показана стрелками на рисунке 1.22) зависит от выбора управляющих параметров также, как и в случае логистических отображений, рассмотренных в подразделе 1.2.2.1. Дальнейшее увеличение интенсивности шума $D > D_c$ приводит к уходу изображающих точек на бесконечность, что обусловлено свойствами самого логистического отображения (см. выше). В то же самое время, при выбранных значениях управляющих параметров критическое значение интенсивности шума оказывается достаточно большим: $D_c \in [0.12; 0.22]$ ($\text{SNR} \in [19.07; 13.95]\text{dB}$, соответственно). Иными словами, режим бинарной обобщенной синхронизации в исследуемой системе с дискретным

временем обладает высокой, но ограниченной устойчивостью по отношению к шумам.

В качестве второго примера рассмотрим установление режима бинарной обобщенной синхронизации в потоковых динамических системах, генерирующих непрерывные бинарные сигналы с переменной продолжительностью передаваемого бита. Для этого проанализируем потоковую бинарную систему, в основу которой положен осциллятор Ресслера, находящийся в хаотическом режиме. Предположим, что нерегулярный сигнал $m(t)$ ведущей системы получается из системы Ресслера

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c)\end{aligned}\tag{1.39}$$

как

$$m(t) = H(x_{th} - x_d(t)),\tag{1.40}$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда (1.36), $x_{th} = 5.0$ — пороговое значение, отвечающее за переключение между битами “0” и “1”, управляющие параметры системы (1.39) по аналогии с разделом 1.2 выбраны следующими: $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$, $\omega_d = 0.93$. Ведомый бинарный сигнал $n(t)$ получается из ведомой потоковой системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r - \varepsilon m x_r, \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c)\end{aligned}\tag{1.41}$$

как

$$n(t) = H(z_r(t) - z_{th}),\tag{1.42}$$

где $\omega_r = 0.95$, $z_{th} = 3.0$ — пороговое значение, ε — параметр связи, от значения которого зависит динамика ведомой системы. Для диагностики бинарной обобщенной синхронизации вместе в ведомой системой рассматривалась также вспомогательная система, уравнения которой в точности совпадают с уравнениями (1.41)–(1.42), но начальные условия оказываются различными.

Поведение двух связанных систем (1.39)–(1.42), генерирующих бинарные сигналы, иллюстрирует рисунок 1.23 для двух различных значений параметра связи ε . Бинарный сигнал $m(t)$ ведущей системы показан на рисунке 1.23, *а*. Переключения между состояниями “0” и “1” происходят практически мгновенно (в численном моделировании их продолжительность равна одному шагу по времени $h = 10^{-3}$). Из-за однонаправленного характера связи между взаимодействующими системами динамика ведущей системы не зависит от силы связи, в следовательно, является одинаковой для всех ε . Бинарные последовательности $n(t)$ и $l(t)$, генерируемые ведомой и вспомогательной системами, соответственно, показаны на рисунках 1.23, *б* ($\varepsilon = 0.05$) и 1.23, *в* ($\varepsilon = 0.13$). Нетрудно заметить, что при малом значении параметра связи $\varepsilon = 0.05$ бинарные сигналы, порождаемые ведомой и вспомогательной системами, не совпадают друг с другом (рисунок 1.23, *б*), что свидетельствует об отсутствии синхронного режима (в смысле обобщенной синхронизации). При увеличении параметра связи ($\varepsilon = 0.13$) возникает бинарная обобщенная синхронизация, что подтверждается как идентичным поведением бинарных сигналов от ведомой и вспомогательной систем (рисунок 1.23, *в*), так и поведением старшего условного показателя Ляпунова, вычисленного для скрытых переменных ведомой системы (рисунок 1.24).

Механизм, приводящий к возникновению режима бинарной обобщенной синхронизации может быть объяснен при помощи метода модифицированной системы (см. раздел 1.1, а также [78]). Как упоминалось выше, существует два основных механизма, ответственных за возникновение обобщенной синхронизации: (1) появление дополнительной диссипации, обусловленной связью между системами, которая подавляет собственную хаотическую динамику ведомой системы, и (2) разрушение собственной хаотической динамики ведомой системы сигналом ведущей системы с большой амплитудой и перемещением фазовой траектории ведомой системы в области фазового пространства с сильной сходимостью фазовых траекторий. Нетрудно заметить, что возникновение бинарной обобщенной синхронизации обусловлено первым механизмом. Действи-

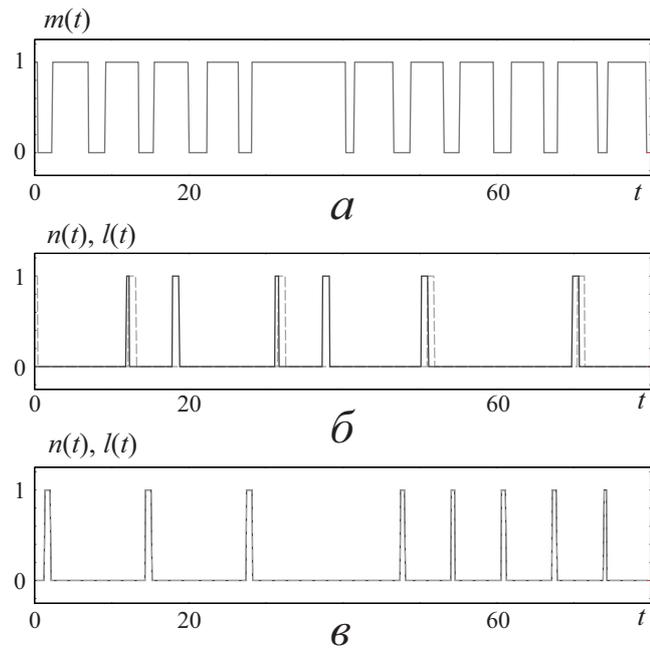


Рисунок 1.23 — (а) Бинарный сигнал ведущей системы (1.39)–(1.40), (б) асинхронные бинарные сигналы ведомой и вспомогательной систем (1.41)–(1.42), $\varepsilon = 0.05$, (в) бинарные сигналы ведомой и вспомогательной систем (1.41)–(1.42) в режиме бинарной обобщенной синхронизации, $\varepsilon = 0.13$

тельно, слагаемое, отвечающее за связь между системами, изменяет свойства как систем с дискретным временем (1.34), так и потоковых динамических систем (1.39)–(1.42) так, что диссипация ведомой системы увеличивается (что приводит к отрицательности старшего условного показателя Ляпунова) и наступает режим обобщенной синхронизации.

Необходимо отметить, что как и в случае систем с дискретным временем, режим бинарной обобщенной синхронизации в потоковых системах также обладает высокой устойчивостью по отношению к шумам. В частности, при добавлении дополнительных шумовых слагаемых $D\xi$ в первые уравнения ведомой и вспомогательной систем Ресслера (1.41), граничные значения установления синхронного режима будут практически теми же самыми, что и в отсутствие шума. На рисунке 1.25 приведены зависимости пороговых значений бинарной обобщенной синхронизации в системе (1.39)–(1.42) от интенсивности шума для различных значений управляющих параметров. Нетрудно заметить, что во всех рассмотренных случаях порог бинарной обобщенной синхронизации несильно меняется при увеличении интенсивности шумового воздействия и, даже в

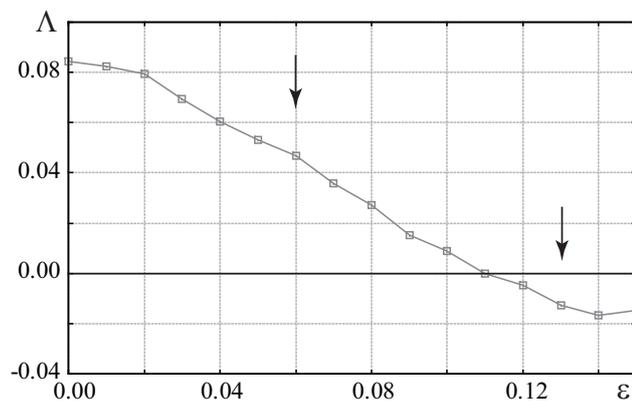


Рисунок 1.24 — Зависимость старшего условного показателя Ляпунова Λ ведомой системы Ресслера (1.41) от параметра связи ε . Значения параметра связи, соответствующие рисунку 1.23, показаны стрелками

случае, когда мощность шумового сигнала значительно превышает мощность сигнала системы, граница бинарной обобщенной синхронизации остается практически на том же уровне, что и в отсутствие шума.

Таким образом, наряду с классической обобщенной синхронизацией возможно возникновение этого режима в бинарных системах. Режим бинарной обобщенной синхронизации обладает высокой устойчивостью к шумам и характеризуется теми же механизмами установления синхронного режима, что и режим обобщенной синхронизации.

1.4.2 Бинарная синхронизация, индуцированная шумом

Как отмечалось в разделе 1.1, режим обобщенной синхронизации имеет ряд сходств с режимом синхронизации, индуцированной шумом (см. также [86, 274]) как по методам диагностики, так и механизмам возникновения синхронного режима. Принимая во внимание тот факт, что механизмы возникновения режима бинарной обобщенной синхронизации оказываются теми же, что и в случае классической обобщенной синхронизации, можно допустить возможность существования режима индуцированной шумом синхронизации в бинарных системах, то есть режима бинарной синхронизации, индуцированной шумом.

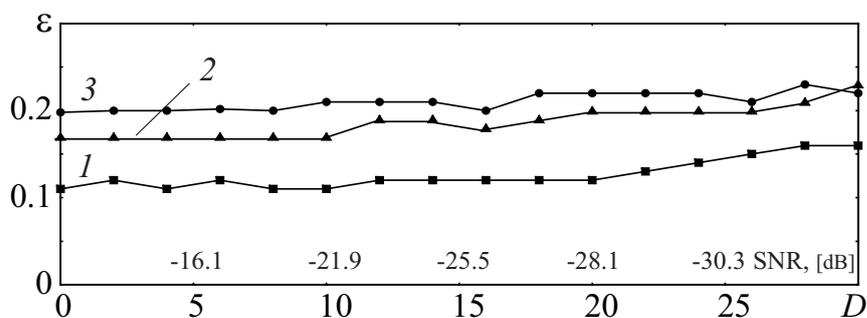


Рисунок 1.25 — Зависимости пороговых значений установления режима обобщенной синхронизации в системах Ресслера (1.39)–(1.42) от интенсивности шума (отношения сигнал/шум) при различных значениях управляющих параметров: 1 — $\omega_r = 0.95$, 2 — $\omega_r = 0.99$, 3 — $\omega_r = 0.89$

Под режимом бинарной синхронизации, индуцированной шумом, будем понимать следующее явление. Рассмотрим две независимые, идентичные по управляющим параметрам, системы \mathbf{x} и \mathbf{y} с непрерывным или дискретным временем, находящиеся под действием общего источника шума $\varepsilon f(\xi)$ (параметр ε характеризует интенсивность шумового сигнала, f — линейная или нелинейная функция, ξ — стохастический процесс). Предположим, что эти системы генерируют аperiodические бинарные последовательности $x = h[\mathbf{x}]$ и $y = h[\mathbf{y}]$, причем в отсутствие шума $x \neq y$, если $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{y}_0$ ($\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ — векторы начальных условий). Здесь h — некоторая функция, принимающая только два значения (0 или 1). Соответственно, переменные x и y могут принимать также только значения “ноль” и “единица”. Как и в случае традиционного режима индуцированной шумом синхронизации, под режимом бинарной синхронизации, индуцированной шумом, понимается такой режим, при котором при превышении интенсивностью шума некоторого критического значения ε_c бинарные последовательности x и y , генерируемые рассматриваемыми системами, после завершения переходного процесса становятся полностью идентичными, $x = y$.

Проиллюстрируем явление бинарной индуцированной шумом синхронизации на примере двух несвязанных логистических отображений

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= g(X_n, \lambda) + \varepsilon(g(\xi_n, \lambda) - g(X_n, \lambda)), \\ Y_{n+1} &= g(Y_n, \lambda) + \varepsilon(g(\xi_n, \lambda) - g(Y_n, \lambda)), \end{aligned} \quad (1.43)$$

где переменные X и Y характеризуют состояния взаимодействующих систем, $g(x, \lambda) = 1 - \lambda x^2$, $\lambda = 1.6$ — управляющий параметр, ξ_n — стохастический гауссов процесс со средним $\xi_0 = 0.5$ и дисперсией $\sigma = 0.12$, ε — параметр, характеризующий интенсивность шумового воздействия (аналог параметра связи в случае рассмотрения бинарной обобщенной синхронизации). Бинарные последовательности получаются из исходных аналоговых сигналов X_n, Y_n логистических отображений (1.43) путем применения к ним функции Хевисайда $H(\zeta)$, аналогично тому, как это было сделано в подразделе 1.4.1 для детерминированных систем:

$$\begin{aligned} x &= H(X_n), \\ y &= H(Y_n), \end{aligned} \tag{1.44}$$

Так как при выбранном значении управляющего параметра λ логистические отображения (1.43) демонстрируют хаотическое поведение, аperiodические бинарные последовательности x_n и y_n в отсутствие связи (шума) ($\varepsilon = 0$) будут различными (рисунок 1.26,а). При увеличении интенсивности шумового воздействия эти сигналы становятся близкими друг к другу и, при достижении некоторого критического значения становятся полностью идентичными (рисунок 1.26,б), что соответствует наступлению режима бинарной индуцированной шумом синхронизации.

Наличие бинарной индуцированной шумом синхронизации подтверждается также зависимостью условного показателя Ляпунова Λ , рассчитанного для одной из взаимодействующих систем (1.43), от интенсивности шумового воздействия ε . Также, как и в случае бинарной обобщенной синхронизации, критерием наличия бинарной синхронизации, индуцированной шумом, является отрицательность старшего условного показателя Ляпунова. Такая зависимость приведена на рисунке 1.27. Из рисунка видно, что при увеличении параметра ε старший условный показатель Ляпунова переходит в область отрицательных значений, что свидетельствует о наступлении режима индуцированной шумом синхронизации в исследуемой системе.

Механизмы возникновения режима бинарной синхронизации, индуцированной шумом, аналогичны механизмам индуцированной шумом

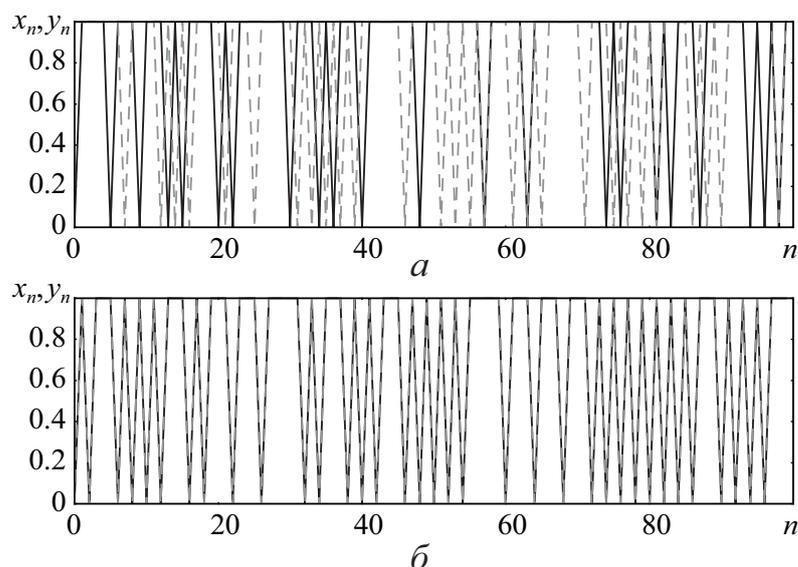


Рисунок 1.26 — Аperiodические бинарные последовательности, полученные путем численного решения системы (1.43)-(1.44) при различных значениях амплитуды внешнего шумового воздействия: (а) $\varepsilon = 0$ — асинхронный режим; (б) $\varepsilon = 0.2$ — режим бинарной индуцированной шумом синхронизации

синхронизации [86,274]. Так как в уравнениях (1.43) присутствуют диссипативные слагаемые $-\varepsilon g(X, \lambda)$, как и в случае бинарной обобщенной синхронизации, возникновение синхронного режима в данном случае обусловлено, прежде всего, подавлением собственной хаотической динамики систем, подверженных внешнему шумовому воздействию. Увеличение диссипации приводит к отрицательности старшего условного показателя Ляпунова, что является критерием возникновения как режима обобщенной синхронизации, так и синхронизации, индуцированной шумом.

Таким образом, наряду с бинарной обобщенной синхронизацией существует возможность возникновения синхронного режима, индуцированного шумом, в бинарных системах. При этом, методы диагностики и механизмы возникновения этих режимов оказываются теми же, что и в случае реализации аналогичных режимов в аналоговых системах.

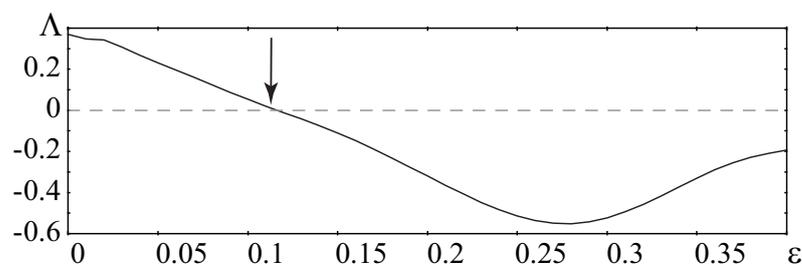


Рисунок 1.27 — Зависимость условного показателя Ляпунова Λ , рассчитанного для одной из систем (1.43), от интенсивности шумового воздействия ε . Момент возникновения бинарной синхронизации, индуцированной шумом, показан стрелкой

1.5 Практические приложения обобщенной синхронизации

Рассмотрим вопрос о практических приложениях режима обобщенной хаотической синхронизации. Известно, что одним из наиболее важных приложений этого режима является его применение для скрытой передачи информации. В то же самое время, существует всего несколько способов скрытой передачи данных на основе этого явления (см., например, [87, 276, 321]), при этом способ [276] обладает несомненными достоинствами по сравнению с известными аналогами, основанными как на режиме обобщенной синхронизации, так и других типах хаотического синхронного поведения (более подробно см. наш обзор [143]). Однако, и способ [276] не свободен от недостатков. Несмотря на высокую степень устойчивости по отношению к шумам и флуктуациям в канале связи и упрощение возможности технической реализации (отсутствие требования идентичности к генераторам, располагающимся на различных сторонах канала связи), для этого способа характерно два принципиальных недостатка: (1) низкая степень конфиденциальности передачи информации и (2) нестабильность работы при неидентичности параметров генераторов принимающего устройства. В настоящем разделе будут рассмотрены пути устранения вышеперечисленных недостатков и предложены способы скрытой передачи данных, свободные от них.

1.5.1 Способ скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума

Начнем рассмотрение со способа скрытой передачи информации, обладающего высокой степенью конфиденциальности. Принципиальная схема для реализации этого способа приведена на рисунке 1.28. Этот способ основан на режиме обобщенной синхронизации в присутствии шума и заключается в следующем. Информационный сигнал $m(t)$ (позиция 1 на рисунке 1.28) кодируется в виде бинарного кода. Этот сигнал используется для модуляции одного или нескольких управляющих параметров генератора хаоса $\mathbf{x}(t)$ (2), располагающегося на передающей стороне канала связи. Модуляция параметров должна осуществляться таким образом, чтобы характеристики полученного хаотического сигнала (в частности, его амплитуда и частота) менялись незначительно, причем изменения не были бы заметны ни во временном, ни в спектральном представлении сигнала. Для обеспечения дополнительной маскировки информационного сигнала, а следовательно, и повышения конфиденциальности передачи информации используется генератор шума 3. Сигнал, сгенерированный передающей хаотической системой, примешивается в сумматоре 4 к шумовому сигналу, производимому генератором шума, и далее передается по каналу связи 5 принимающей стороне. В канале связи также неизбежно наличие шумов и флуктуаций, но их влияние оказывается незначительным (так как сигнал оказывается уже достаточно зашумленным), и не существенным (так как описываемый способ передачи информации обладает, как будет показано далее, хорошей устойчивостью к шумам).

На принимающей стороне канала связи находятся два идентичных между собой генератора хаоса $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$. Эти генераторы не идентичны передающему генератору $\mathbf{x}(t)$, но способны находиться в режиме обобщенной синхронизации с ним. Принцип работы принимающего устройства основан на диагностике режима обобщенной синхронизации при помощи метода вспомогательной системы [69] (см. также раздел 1.1).

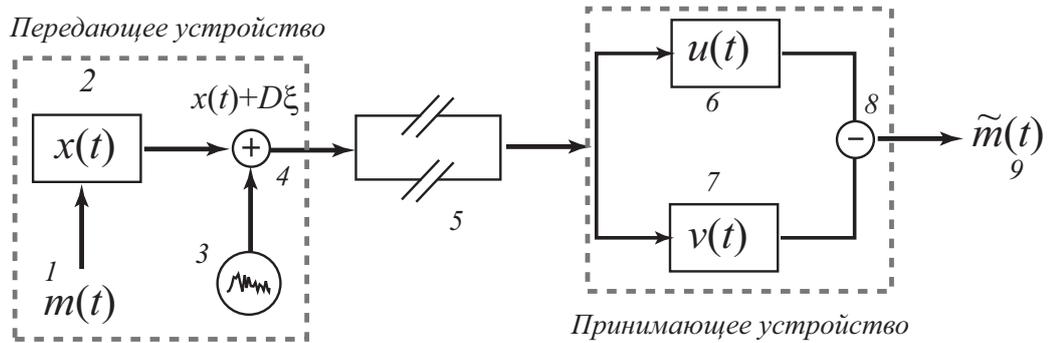


Рисунок 1.28 — Схема для скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума. Позициями на рисунке отмечены: 1 — бинарный информационный сигнал $m(t)$, 2 — передающий генератор, 3 — генератор шума, 4 — сумматор, 5 — канал связи, 6 и 7 — первый и второй принимающие генераторы, соответственно, 8 — восстановленный сигнал $\tilde{m}(t)$

Поступающий на генераторы $u(t)$ и $v(t)$ сигнал обеспечивает возникновение режима обобщенной синхронизации между ними в случае передачи бита 0 (сигналы $u(t)$ и $v(t)$ будут одинаковыми) и отсутствие синхронного режима при передаче бита 1 (сигналы $u(t)$ и $v(t)$ будут различными). Полученные сигналы $u(t)$ и $v(t)$ проходят через вычитающее устройство 8, и на выходе получается восстановленный сигнал $\tilde{m}(t)$ (9), представленный последовательностью участков с синхронным (отсутствие колебаний) и несинхронным (хаотические колебания ненулевой амплитуды) поведением, по которому исходный информационный сигнал может быть легко детектирован.

Понятно, что управляющие параметры генераторов передающего и принимающего устройств должны быть выбраны таким образом, чтобы при передаче бита 0 режим обобщенной синхронизации наблюдался, а при передаче бита 1 отсутствовал, но при этом характеристики передаваемого сигнала, как отмечалось выше, менялись незначительно при изменении передаваемого бита. Для этого расположение границы обобщенной синхронизации на плоскости параметров “параметр модуляции — параметр связи” должно обладать определенной особенностью: при малом изменении управляющего параметра пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению режима обобщенной синхронизации, должно меняться достаточно резко. Кроме того, режим обобщенной

синхронизации должен обладать высокой устойчивостью к шумам (что и было показано в разделе 1.2 настоящей диссертационной работы). В данном случае шумовой сигнал, добавляемый к сигналу, несущему на себе хоть и незаметные следы модуляции управляющего параметра, полностью скрывает их, делая сигнал практически неотличимым от шумового, особенно во временном представлении, что не оставляет третьей стороне никакой возможности дешифрации информационного сообщения по сигналу, передаваемому по каналу связи.

Среди систем, рассмотренных в разделе 1.2, всеми вышперечисленными особенностями обладают системы Ресслера (1.15), которые могут быть также реализованы в виде радиотехнических генераторов [322]. Поэтому рассмотрим их в качестве генераторов передающего и принимающего устройств в предложенной схеме скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума⁵. Значения управляющих параметров a , p , c , ω_u , характеристики случайной величины ζ и шаг интегрирования h оставим неизменными, величину параметра связи зафиксируем равной $\varepsilon = 0.14$, интенсивность шумового сигнала, воздействующего на ведущую систему положим равной $D_1 = 0$, а суммарную амплитуду шумовых сигналов, производимых генератором шума на передающей стороне канала связи и появляющихся в канале связи, выберем равной $D_2 = D = 10$. В качестве параметра модуляции будем использовать параметр ω_x : если в заданный интервал времени передается бит 1, то $\omega_x = 0.91$ на протяжении всего этого интервала; при передаче бинарного бита 0 параметр ω_x принимает случайное значение из диапазона $\omega_x \in [0.9, 0.91)$, что обеспечивает чрезвычайно малую расстройку (порядка 1.1%) параметров модуляции.

Выбор значений управляющих параметров обусловлен характером расположения границы обобщенной синхронизации, изученным в [85]. Отметим, что параметр ω_x может быть выбран достаточно произволь-

⁵Другие системы также могут быть пригодны для передачи информации предложенным способом, но в виду отсутствия резкого скачка в пороговом значении параметра связи, соответствующего установлению синхронного режима, обеспечить слабое изменение характеристик передаваемого сигнала только при малом изменении параметра ведущей системы, оказывается проблематичным.

но: необходимым условием является лишь чередование областей с асинхронной динамикой и режимом обобщенной хаотической синхронизации. Величина параметра ε , выбранная примерно в середине расстояния между границами возникновения синхронного режима при различных значениях параметра модуляции, при необходимости может быть тоже скорректирована.

Для проверки эффективности предложенного способа передачи информации в случае использования систем Ресслера с вышеуказанными значениями управляющих параметров рассмотрим передачу информационного сигнала, представленного простой последовательностью битов 0/1, по каналу связи этим способом. Исходная цифровая последовательность приведена на рисунке 1.29,а. На этом рисунке приведены также (б) сигнал $x_1(t)$, генерируемый передающей хаотической системой, (в) сигнал $s(t) = x_1(t) + D\zeta(t)$, передаваемый по каналу связи, (г) восстановленный $\tilde{m}(t) = (u_1 - v_1)^2$ и детектированный сигналы.

Из рисунка 1.29,б видно, что модуляция управляющего параметра ω_x практически не меняет характеристики сигнала, производимого передающей системой Ресслера. Кроме того, шум достаточно большой амплитуды сильно искажает передаваемый сигнал (см. рисунок 1.29,в). Спектр мощности такого сигнала, как при наличии, так и при отсутствии шума, содержит только одну четко выраженную спектральную компоненту (см. рисунок 1.30). Понятно, что в данном случае третья сторона не сможет декодировать исходное информационное сообщение, не имея полной информации о характеристиках генераторов принимающего устройства. В то же самое время, качество информации, восстановленной на принимающей стороне канала связи, является достаточно высоким. Нетрудно заметить, что сигналы, приведенные на рисунках 1.29,а (исходный информационный сигнал) и г, пунктирная линия (детектированный информационный сигнал) в точности совпадают, что и свидетельствует о высоком качестве передачи информации. Аналогичная ситуация имеет место при дальнейшем увеличении интенсивности шума D .

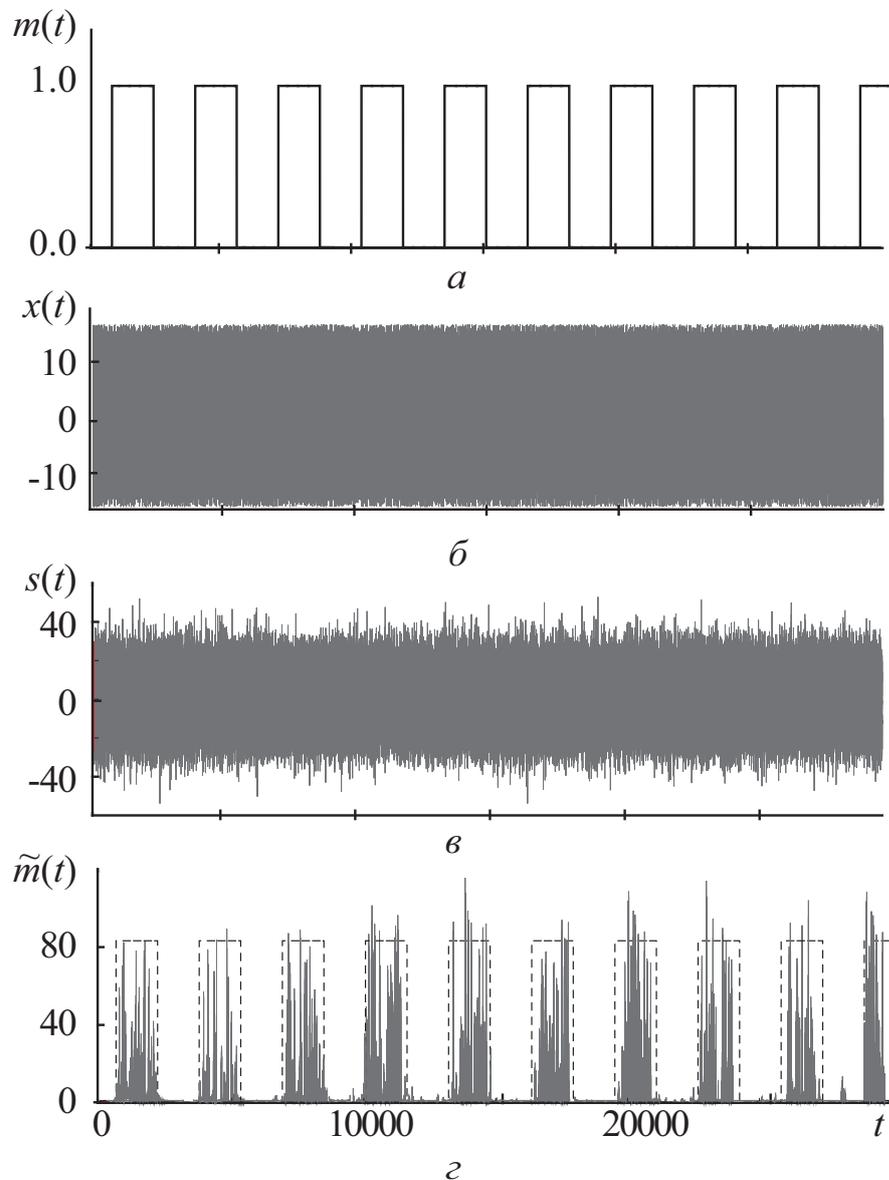


Рисунок 1.29 — Работоспособность способа скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума в случае использования систем Ресслера (1.15) в качестве генераторов передающего и принимающего устройств: (а) информационный сигнал $m(t)$, представленный последовательностью битов 0/1, (б) сигнал $x_1(t)$, генерируемый передающей хаотической системой, (в) сигнал $s(t)$, передаваемый по каналу связи, (г) восстановленный $\tilde{m}(t)$ (сплошная линия) и детектированный (пунктирная линия) сигналы

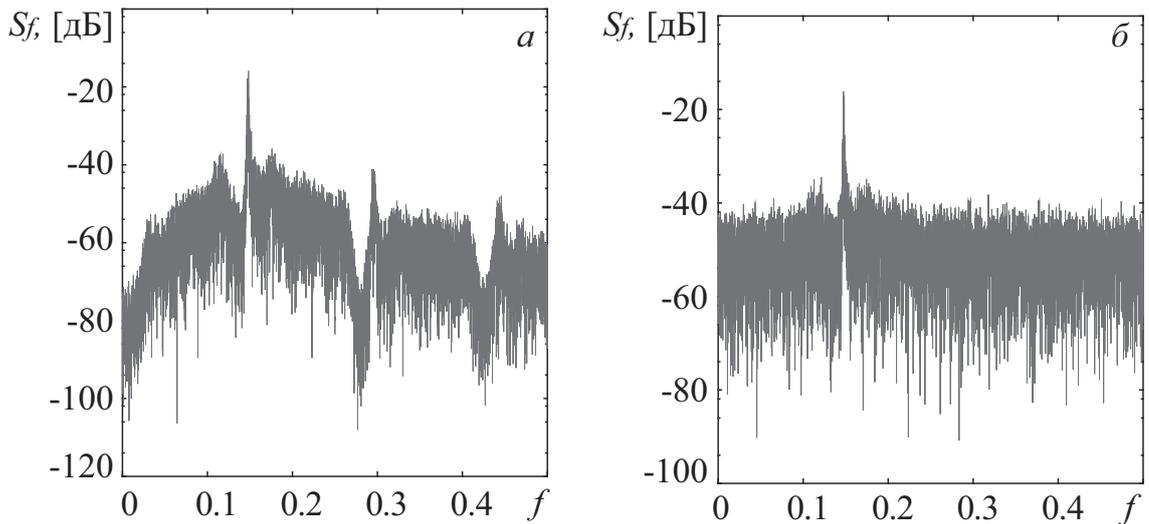


Рисунок 1.30 — Спектры мощности сигнала $x_1(t)$, генерируемого передающей системой Ресслера (а), и сигнала $s(t)$, передаваемого по каналу связи (б)

Для количественной оценки степени устойчивости предложенного способа скрытой передачи информации по отношению к шумам и его сопоставления с другими схемами скрытой коммуникации введем в рассмотрение количественные характеристики работоспособности схем и устройств в присутствии шума. При передаче цифровых сигналов такой характеристикой является отношение средней энергии хаотического сигнала, приходящейся на один бит передаваемой информации, E_b к спектральной плотности мощности шума N_0 , при котором схема скрытой передачи информации остается работоспособной [300, 323]. Энергия на бит вычисляется следующим образом:

$$E_b = P_{sign}T, \quad (1.45)$$

где P_{sign} — мощность передаваемого сигнала (без шума), T — время передачи одного бита информации. Спектральная мощность шума определяется как:

$$N_0 = \frac{P_{noise}}{B}, \quad (1.46)$$

где P_{noise} — мощность шума в канале связи, B — ширина полосы пропускания канала. Мощность сигнала, как детерминированного, так и стохастического, вычислялась по его временной реализации. Ширина полосы пропускания канала связи определялась как $B = f_2 - f_1 = 0.2$,

где $f_1 = 0.05$, $f_2 = 0.25$ — границы полосы пропускания в случае использования систем Ресслера в качестве генераторов передающего и принимающего устройств.

Оценка величины E_b/N_0 производилась как для предложенной схемы, так и ряда других способов и устройств аналогичного назначения, предложенных в более ранних работах [22, 87, 321, 324–327]. Эти схемы наиболее близки по своему принципу работы к схеме, предложенной в рамках настоящей главы диссертационной работы, и могут быть в некоторой степени рассмотрены как ее аналоги, в настоящее время ставшие уже классическими. Это, прежде всего, схемы, на основе режима полной хаотической синхронизации (хаотическая маскировка [22], переключение хаотических режимов [324], нелинейное подмешивание информационного сигнала к хаотическому [325] и др.), а также ряд схем, основанных на режимах обобщенной и фазовой хаотической синхронизации. Во всех случаях в качестве генераторов передающего и принимающего устройств были выбраны однонаправлено связанные системы Ресслера с близкими значениями управляющих параметров. Результаты расчета представлены в таблице 1.1. Из таблицы видно, что все рассмотренные схемы становятся неработоспособными при положительных значениях E_b/N_0 , то есть когда мощность шума оказывается значительно меньше мощности сигнала, передаваемого по каналу связи. Диаметрально противоположная ситуация наблюдается для предложенной схемы: она становится неработоспособной при $E_b/N_0 = -10.01$ дБ. Другими словами, в данном случае шум играет конструктивную роль для увеличения конфиденциальности передачи информации без потери качества. На данный способ передачи информации получен патент Российской Федерации на изобретение [113].

Для объяснения высокой степени устойчивости предложенного способа скрытой передачи информации по отношению к шумам обратимся к следующим рассуждениям. Прежде всего, следует обратить внимание на тот факт, что в предложенном способе оба генератора принимающего устройства подвергаются влиянию одного и того же сигнала, что не ха-

Таблица 1.1 — Отношения энергии на бит к спектральной плотности мощности шума (E_b/N_0 , [дБ]), соответствующие случаям полного отсутствия возможности восстановления информационного сигнала

№	Схема	Ссылка	E_b/N_0 , [дБ]
1	Хаотическая маскировка	[22]	56.48
2	Переключение хаотических режимов	[324]	30.76
3	Нелинейное подмешивание	[325]	64.99
4	Модулирование управляющих параметров	[326]	30.76
5	Схема на основе режима фазовой синхронизации	[327]	32.40
6	Схема на основе обобщенной синхронизации	[87]	23.66
7	Схема на основе обобщенной и полной синхронизации	[87]	39.52
8	Схема с комбинированным сигналом	[321]	39.24
9	Предложенная схема	[145]	-10.01

рактенно ни для одной другой схемы скрытой передачи информации, основанной на использовании хаотической синхронизации. Как было показано в разделе 1.2, режим обобщенной синхронизации обладает высокой степенью устойчивости по отношению к шумам: если мощность шума оказывается сопоставимой или немного больше мощности передаваемого сигнала, пороговое значение установления синхронного режима практически не меняется. При дальнейшем увеличении интенсивности шума порог обобщенной синхронизации в зависимости от величины расстройки начинает уменьшаться или, наоборот, расти и при больших значениях D перестает зависеть от параметров системы. В данном случае режим обобщенной синхронизации переходит в режим синхронизации, индуцированной шумом [86], являющийся проявлением обобщенной синхронизации, когда стохастический сигнал вместо детерминированного воздействует на две идентичные по своим управляющим параметрам системы. Рост интенсивности шумового воздействия оказывает также влияние на спектральный состав сигнала в канале связи. Как отмечалось выше, в спектре мощности этого сигнала присутствует одна четко выраженная спектральная компонента (совокупность нескольких практически неразличимых спектральных компонент) (см. рисунок 1.30). Когда интенсивность шума станет настолько большой, что спектральные компоненты

исчезнут, предложенный способ перестанет работать из-за возникновения режима синхронизации, индуцированной шумом.

Совершенно противоположная ситуация наблюдается в других схемах скрытой передачи информации, приведенных в таблице 1.1. Принципиальным требованием каждой из них является наличие идентичных генераторов на различных сторонах канала связи, при этом во всех схемах восстановленный сигнал получается как разность сигнала в канале связи и отклика генератора принимающего устройства на этот сигнал. Понятно, что в случае влияния стохастического сигнала на детерминированный генератор приемника получение того же самого стохастического сигнала оказывается невозможным в принципе. Поэтому для таких схем скрытой передачи информации их эффективность в присутствии шума ограничена уровнем шума, который может поддерживать передающий генератор. В случае использования систем Ресслера с близкими значениями управляющих параметров в качестве генераторов передающего и принимающего устройств в соответствии с теоремой Шеннона [328] для цифровых сигналов эта величина составляет $E_b/N_0 = -1.46$ дБ. Нетрудно заметить, что наши оценки хорошо согласуются с результатами теоретических предсказаний.

Справедливость вышеописанных аргументов может быть также подтверждена зависимостью вероятности ошибки на бит (BER - Bit Error Rate) [329] от отношения энергии на бит к спектральной плотности мощности шума. Вероятность ошибки на бит характеризует качество передачи информации и представляет собой количество ошибок, отнесенное к числу переданных битов. Предположим, что схема передает корректно бинарный бит 0 с вероятностью P_{00} и бинарный бит 1 с вероятностью P_{11} . Тогда ошибочное диагностирование бинарного бита 1 при передаче бинарного бита 0 характеризуется вероятностью $P_{01} = 1 - P_{00}$, а вероятность $P_{10} = 1 - P_{11}$ характеризует ошибочное диагностирование бинарного бита 0 при передаче бинарного бита 1. Если символы появляются в передаваемой последовательности с вероятностями P_0 и P_1 ,

соответственно, вероятность ошибки на бит будет вычисляться следующим образом:

$$\text{BER} = 2(P_{01}P_0 + P_{10}P_1), \quad (1.47)$$

причем вероятности P_{01} и P_{10} зависят от типа и параметров системы связи.

Зависимости вероятности ошибки на бит от величины E_b/N_0 для различных схем скрытой коммуникации приведены на рисунке 1.31. При вычислении ошибки на бит пороговое значение, позволяющее детектировать исходный информационный сигнал по сигналу $\tilde{m}(t)$ выбиралось фиксированным, независимо от интенсивности шумового воздействия, в то время как оно менялось при вычислении характеристик, представленных в таблице 1.1. В то же самое время, нетрудно заметить, что для различных схем скрытой передачи информации ошибка достаточно быстро становится равно единице, в то время как для предложенной схемы она остается близкой к нулю, независимо от интенсивности шумового воздействия. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами, приведенными в таблице 1.1.

Необходимо отметить, что изменение значений управляющих параметров, уравнений генераторов и характеристик шумового сигнала может привести к изменению количественных значений отношения энергии на бит к спектральной плотности мощности шума, но порядок этих величин и соотношение между ними будут оставаться примерно теми же самыми. Для подтверждения вышесказанного рассмотрим вопрос о влиянии характеристик шумового сигнала на эффективность предложенного способа скрытой передачи информации. В проведенном ранее рассмотрении шум, производимый генератором шума на передающей стороне канала связи, характеризовался нормальным распределением плотности вероятности. В то же самое время, согласно результатам теоретического и численного рассмотрения, приведенным в разделе 1.2, устойчивость режима обобщенной синхронизации, а следовательно, и способа скрытой передачи информации, основанного на этом режиме, не должна

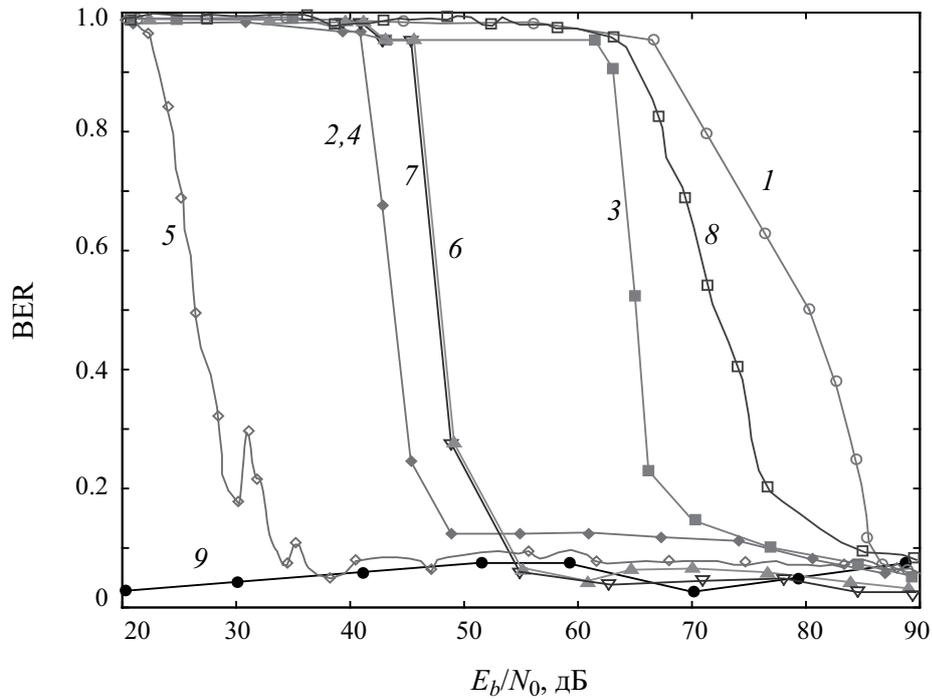


Рисунок 1.31 — Зависимости вероятности ошибки на бит (BER) от отношения энергии на бит к спектральной плотности мощности шума (E_b/N_0) для различных схем скрытой передачи информации: 1 — хаотическая маскировка, 2,4 — переключение хаотических режимов (модулирование управляющих параметров), 3 — нелинейное подмешивание, 5 — схема на основе режима фазовой синхронизации (кривая частично перенесена из работы [327]), 6 — схема на основе режима обобщенной синхронизации, 7 — схема на основе обобщенной и полной синхронизации, 8 — схема с “комбинированным” сигналом, 9 — предложенная схема

сильно зависеть от характеристик шумового сигнала, воздействующего на ведомую систему (генераторы хаоса принимающего устройства).

Для проверки справедливости вышеприведенных рассуждений проанализируем эффективность способа скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума в том случае, когда генератор шума производит сигнал, характеризующийся равномерным распределением плотности вероятности на интервале $[-1; 1]$, а интенсивность шумового сигнала и управляющие параметры генераторов передающего и принимающего устройств остаются неизменными. В качестве информационного сигнала выберем последовательность битов, приведенную на рисунке 1.32,а. Нетрудно заметить, что в отличие от рассмотренного выше случая она представляет собой не простое чередование битов, а имеет более сложный вид. Работоспособность способа в данном случае иллюстрирует рисунок 1.32,б,в. Как и на рисунке 1.29,

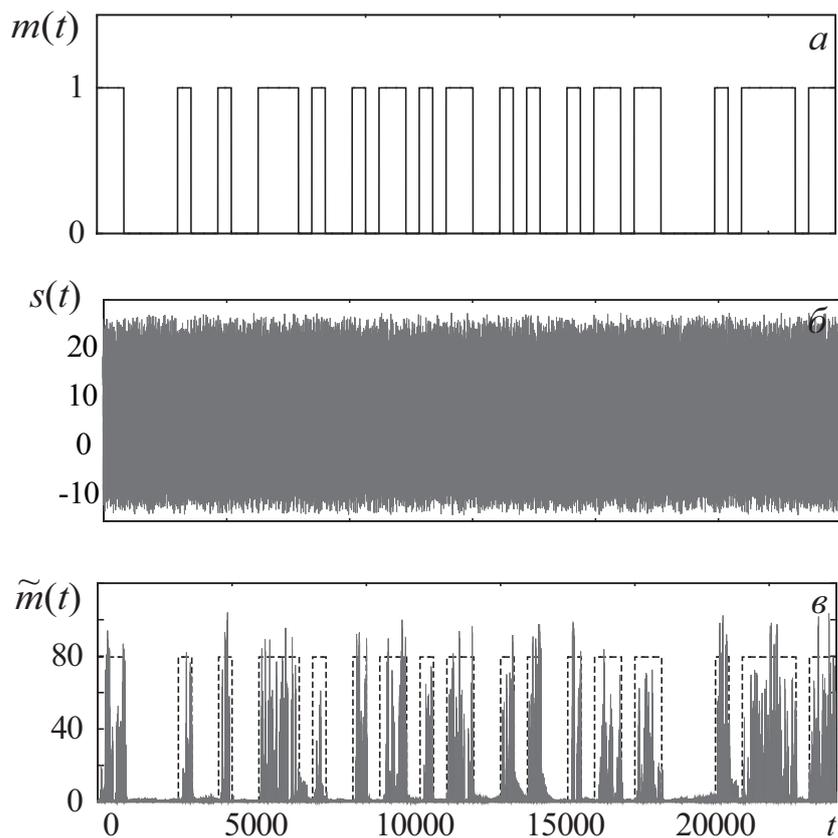


Рисунок 1.32 — Иллюстрация работоспособности способа скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума в случае, если генератор шума производит стохастический сигнал, подчиняющийся равномерному распределению плотности вероятности, интенсивность стохастического сигнала $D = 10$: информационный сигнал $m(t)$, представленный последовательностью битов 0/1 (а), сигнал $s(t)$ в канале связи (б), восстановленный $\tilde{m}(t)$ (сплошная линия) и детектированный (пунктирная линия) сигналы (в)

здесь представлены сигнал $s(t)$ в канале связи и восстановленный сигнал $\tilde{m}(t)$. Нетрудно заметить, что предложенный метод работает и в этом случае, и по восстановленному сигналу $\tilde{m}(t)$ исходная последовательность битов может быть легко детектирована.

Как показывают проведенные расчеты, увеличение амплитуды шумового сигнала и в этом случае практически не оказывает влияния на эффективность способа скрытой передачи информации. Более того, изменение характера распределения случайной величины, амплитуды, среднего и дисперсии также слабо влияет на работоспособность способа. Эта особенность позволяет менять характеристики сигнала, производимого генератором шума, случайным образом в течение всего времени передачи сигнала, тем самым обеспечивая в некоторых случаях созда-

ние “ложной” модуляции и, следовательно, наталкивая третью сторону на дешифрацию ложного сообщения. Передача ложного сообщения может интерпретироваться также как нескрытая передача информации по каналу связи. В этом случае предложенный способ “расширяет” пропускную способность канала связи, то есть позволяет передавать сразу два информационных сообщения, содержащих полезную и ложную (либо открытую) информацию, соответственно. Рисунок 1.33 иллюстрирует вышесказанное. По аналогии с рисунком 1.32 здесь приведены (а) исходный информационный сигнал $m(t)$, тот же, что и в случае использования генератора шума с неизменными характеристиками, (б) сигнал $s(t)$ в канале связи, (в) восстановленный сигнал $\tilde{m}(t)$. Характеристики генератора шума модулируются здесь простой последовательностью битов, являющейся в данном случае ложным сообщением с неверной информацией: если передается бит 0 – генератор шума производит сигнал с равномерным распределением плотности вероятности, в случае передачи бита 1 – δ -коррелированный гауссов шум с нулевым средним. Интенсивность шумовых сигналов в обоих случаях $D = 10$. Возможно также модулирование характеристик шумового сигнала более сложным информационным сообщением. Как видно из рисунка 1.33,б, в виду наличия амплитудной модуляции в сигнале $s(t)$, третья сторона дешифрует простую последовательность битов, в то время как исходное информационное сообщение по-прежнему останется для нее недоступным. В то же самое время, на принимающей стороне канала связи, изменение характера шума останется по-прежнему незаметным, а качество передачи информации будет таким же высоким, как и при изменении характеристик сигнала генератором шума с постоянными характеристиками или при отсутствии такового вообще.

Таким образом, возможно совершенствование способа скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума путем изменения характеристик генератора шума заведомо ложным (или открытым) информационным сообщением, что повышает конфиденциальность передачи информации предложенным способом. На

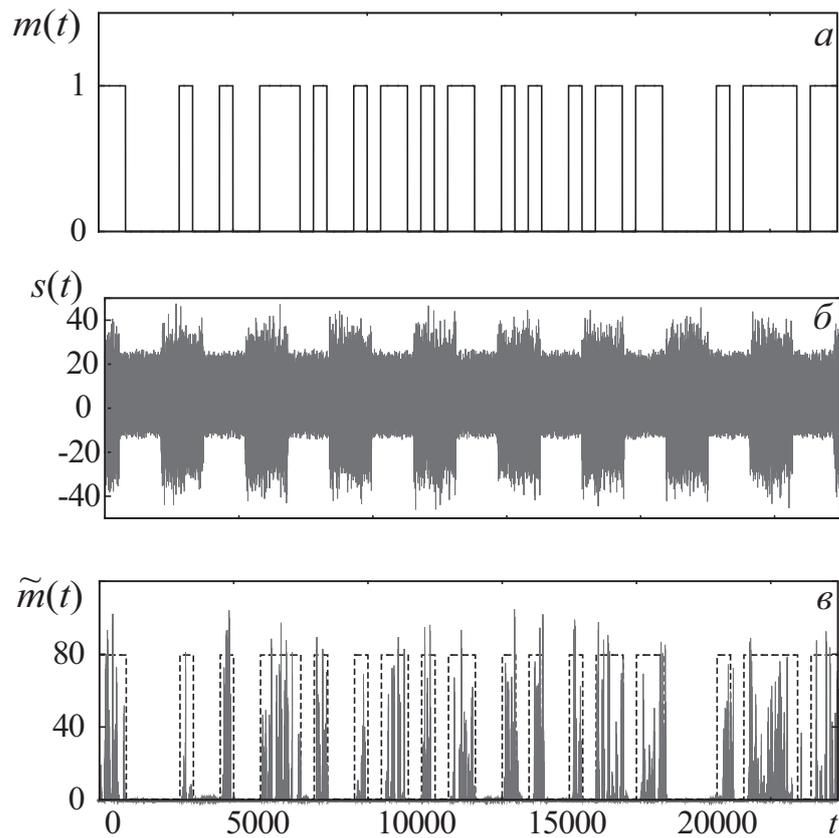


Рисунок 1.33 — Иллюстрация работоспособности способа скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума в случае, если характеристики генератора шума модулируются простой последовательностью битов: информационный сигнал $m(t)$, представленный последовательностью битов 0/1 (а), сигнал $s(t)$ в канале связи (б), восстановленный $\tilde{m}(t)$ (сплошная линия) и детектированный (пунктирная линия) сигналы (в)

данный способ передачи информации получен патент Российской Федерации на изобретение [114].

1.5.2 Способ скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на периодическую систему

Перейдем к рассмотрению способа скрытой передачи информации, позволяющего преодолеть второй из упомянутых в начале раздела 1.5 недостатков — нестабильность работы при неидентичности управляющих параметров генераторов принимающего устройства. Несмотря на то, что в способе [276] и рассмотренной в подразделе 1.5.1 его модификации идентичные генераторы располагаются на одной стороне канала

связи, для достижения высокой степени его эффективности идентичность этих систем должна сохраняться в течение длительного времени, что требует их постоянной юстировки.

Юстировка генераторов хаотических колебаний в целом ряде случаев оказывается проблематичной. Кроме того, эта проблема усугубляется в процессе длительной эксплуатации устройств, что делает упомянутые выше способы неработоспособными в долгосрочной перспективе [140]. В то же самое время, как было установлено в разделе 1.3, режим обобщенной синхронизации может наблюдаться не только в случае воздействия хаотического сигнала на хаотические генераторы, но и при воздействии того же хаотического сигнала на генераторы периодических колебаний. Создание полностью идентичных генераторов периодических сигналов оказывается более простой задачей по сравнению с разработкой генераторов хаоса. При этом, нестабильность работы генераторов при неидентичности их управляющих параметров оказывается выраженной намного меньше по сравнению со случаем использования генераторов хаоса в принимающем устройстве. Вышесказанное свидетельствует о повышении стабильности и работоспособности схемы передачи информации в течение длительного времени ее эксплуатации. При этом, качество передачи информации будет более высоким.

Принципиальная схема для реализации способа передачи информации на основе обобщенной синхронизации в случае воздействия хаотического сигнала на периодические генераторы отличается от схемы 1.28 только заменой генераторов хаоса $6,7$ на аналогичные генераторы периодических колебаний, а также отсутствием генератора шума 3 и сумматора 4^6 . Работоспособность такого способа скрытой передачи информации иллюстрируют рисунки 1.34 и 1.35. Рисунок 1.34 соответствует случаю, когда в роли генераторов передающего и принимающего устройств выступают системы Ресслера (1.25) со значениями управляющих параметров a_d, p, c, ω_r , указанными в подразделе 1.3.1, а рисунок 1.35 — случаю использования низковольтных виркаторов (1.26)–(1.30), рассмотренных

⁶Эти конструктивные элементы будут учтены в модификации разработанной схемы, позволяющей преодолеть сразу два вышеупомянутых недостатка (см. подраздел 1.5.3)

в подразделе 1.3.2, с теми же значениями параметров α и $\Delta\varphi_2$, в качестве генераторов передающего и принимающего устройств. Значение параметра связи между системами выбрано равным $\varepsilon = 0.06$ для систем Ресслера [$\varepsilon = 0.1$ для низковольтных виркаторов]⁷. В качестве параметра модуляции выбрана частота ведущего генератора ω_d [тормозящая разность потенциалов $\Delta\varphi_1$]: при передаче бита 1 $\omega_d = 0.95$ [$\Delta\varphi_1 = 0.52$], в случае передачи бита 0 — $\omega_d = 0.96$ [$\Delta\varphi_1 = 0.54$].

По аналогии с рисунками 1.29, 1.32, 1.33 на рисунках 1.34, 1.35 представлены информационный сигнал $m(t)$ (а), сигнал $s(t)$ в канале связи (б), восстановленный $\tilde{m}(t)$ и детектированный сигналы (в). Понятно, что, как и в способе передачи информации на основе обобщенной синхронизации хаотических систем, модуляция параметра ω_d [$\Delta\varphi_1$] практически не меняет характеристики сигнала $s(t)$ (см. рисунок 1.34–1.35, б), производимого передающим хаотическим генератором, что свидетельствует о невозможности дешифрации информационного сообщения третьей стороной без полной информации об используемом способе передачи информационного сигнала, а следовательно, и о конфиденциальности передачи информации. При этом, качество информации, восстановленной в принимающем устройстве, является достаточно высоким. Нетрудно заметить, что сигналы, приведенные на рисунках 1.34–1.35, а (исходный информационный сигнал) и в, пунктирная линия (детектированный информационный сигнал) практически в точности совпадают друг с другом, что как раз и свидетельствует о высоком качестве передачи информации. Аналогичная ситуация имеет место и в случае наличия шума в канале связи, при этом степень устойчивости способа по отношению к шумам оказывается значительно выше, чем в случае использования хаотических генераторов в принимающем устройстве. В частности, как упоминалось в подразделе 1.5.1, способ передачи информации на основе обобщенной синхронизации хаотических колебаний в случае использования систем Ресслера в качестве генераторов передающего и принимающего устройств становится неработоспособным при

⁷Здесь и далее по тексту указаны значения параметров для систем Ресслера, в квадратных скобках — для низковольтных виркаторов.

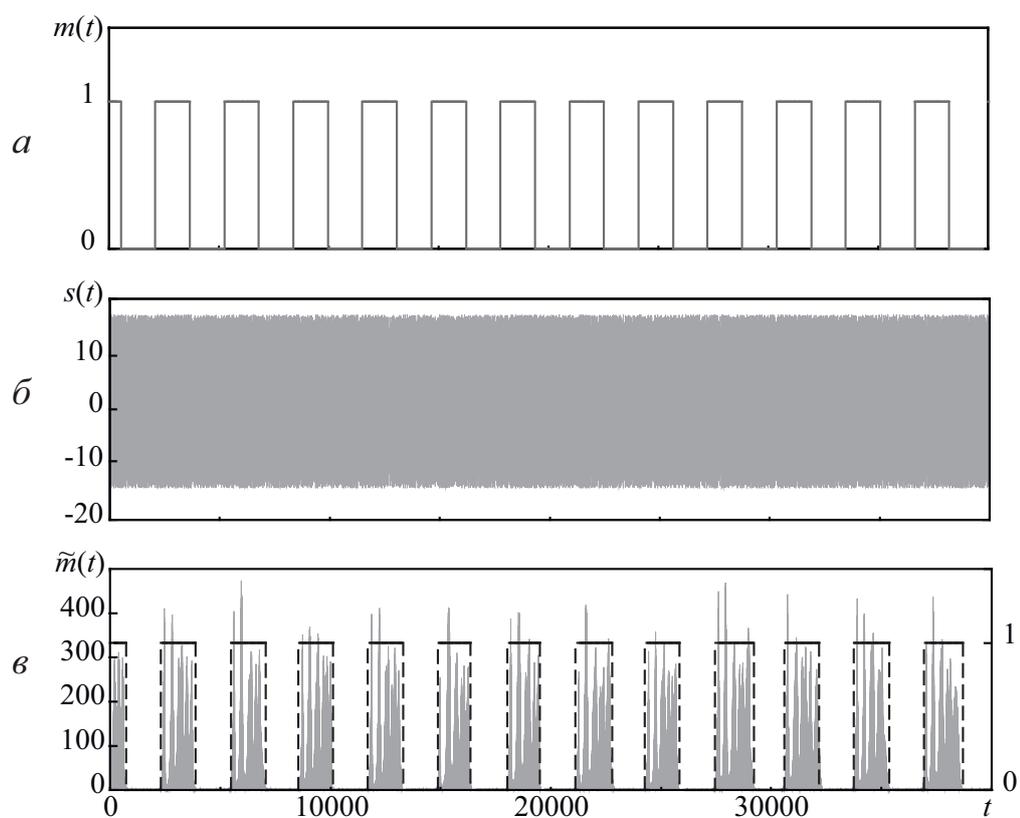


Рисунок 1.34 — Иллюстрация работоспособности способа скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на периодическую систему, в качестве генераторов передающего и принимающего устройств выступают системы Ресслера (1.25): информационный сигнал $m(t)$ (а), сигнал $s(t)$, передаваемый по каналу связи (б), восстановленный $\tilde{m}(t)$ (сплошная линия) и детектированный (пунктирная линия) сигналы (в)

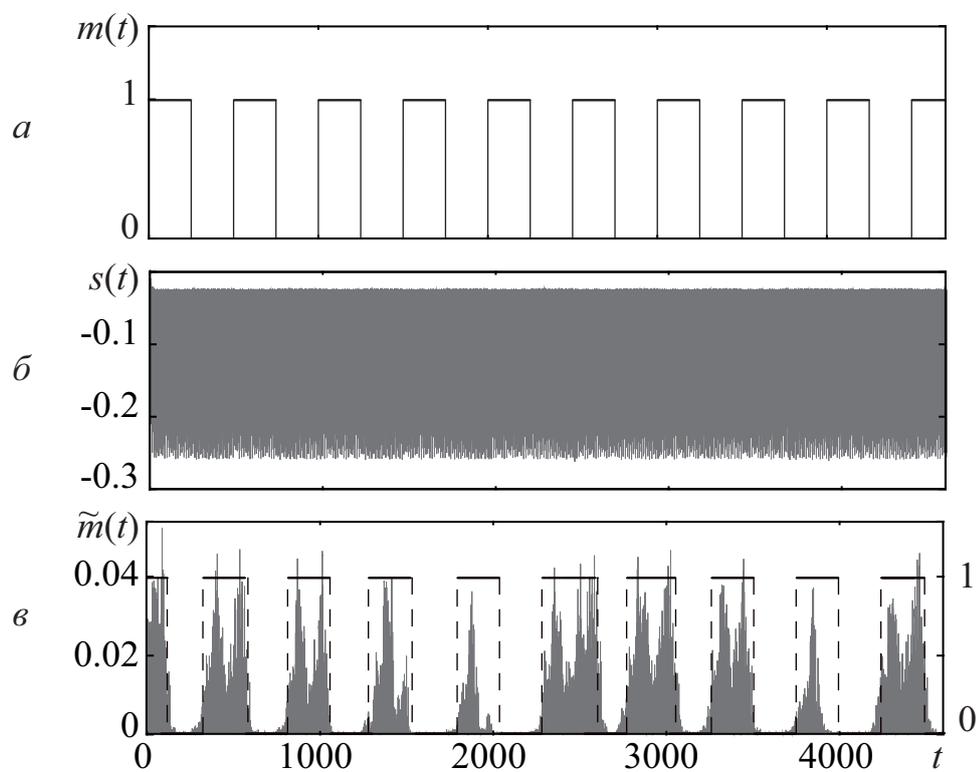


Рисунок 1.35 — Иллюстрация работоспособности способа скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на периодическую систему, в качестве генераторов передающего и принимающего устройств выступают низковольтные виркаторы: информационный сигнал $m(t)$ (а), сигнал $s(t)$, передаваемый по каналу связи (б), восстановленный $\tilde{m}(t)$ (сплошная линия) и детектированный (пунктирная линия) сигналы (в)

отношении энергии на бит к спектральной плотности мощности шума $E_b/N_0 = -10.01$ дБ, в то время как рассматриваемый способ в случае использования тех же систем Ресслера со значениями управляющих параметров для принимающих генераторов, соответствующих реализации в них периодических колебаний периода 8, работает эффективно до $E_b/N_0 = -22.75$ дБ.

Таким образом, способ передачи информации на основе обобщенной синхронизации в случае воздействия хаотического сигнала на периодические генераторы позволяет ликвидировать проблему нестабильности работы при неидентичности параметров передающего и принимающего устройств, а также повысить устойчивость к шумам и качество передачи информации. Последний аргумент может использоваться для повышения конфиденциальности передачи информации путем добавления на передающую сторону канала связи дополнительного генератора шума и сумматора, аналогично тому, как это сделано в подразделе 1.5.1. На описанный способ скрытой передачи и его модификации получен патент Российской Федерации на изобретение [115].

1.5.3 Способ скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на периодические генераторы

В этом подразделе рассмотрим способ передачи информации, позволяющий преодолеть сразу два недостатка, свойственных известным схемам коммуникации: низкую степень конфиденциальности передачи информации и нестабильность работы при неидентичности параметров генераторов принимающего устройства. Как следует из подразделов 1.5.1–1.5.2, такой способ может быть основан на использовании режима обобщенной синхронизации в присутствии шума в том случае, когда внешний хаотический сигнал воздействует на генераторы принимающего устройства, находящиеся в периодическом режиме. Действительно, как упомина-

лось в предыдущем разделе, использование генераторов периодических колебаний в принимающем устройстве позволяет повысить устойчивость способа по отношению к шумам, ликвидируя при этом проблему неустойчивости работы схемы при неидентичности параметров принимающего устройства.

Принципиальная схема для реализации способа скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на периодические генераторы отличается от схемы 1.28 только заменой генераторов хаоса принимающего устройства на аналогичные генераторы периодических колебаний. При этом, принцип работы схемы остается неизменным. Кроме того, как и в способе, рассмотренном в подразделе 1.5.1, ввиду высокой устойчивости способа по отношению к шумам и отсутствию его чувствительности к характеристикам шумового сигнала возможна модификация этого способа путем модуляции характеристик шумового сигнала заведомо ложным или открытым информационным сообщением $r(t)$.

Работоспособность такого способа передачи информации в случае использования систем Ресслера в качестве генераторов передающего и принимающего устройств с теми же значениями управляющих параметров, что и в отсутствие шума (подраздел 1.5.2), иллюстрируют рисунки 1.36–1.37. На рисунке 1.36 характеристики шумового сигнала не меняются в процессе передачи сигнала (шум подчиняется гауссовому распределению плотности вероятности с нулевым средним и единичной дисперсией, интенсивность шумового сигнала $D = 10$), на рисунке 1.37 — они модулируются простой последовательностью битов: если передается бит “0”, то шум подчиняется равномерному распределению плотности вероятности, при передаче бита “1” генерируется тот же гауссов шум с нулевым средним, интенсивность шумового сигнала $D = 10$ в обоих случаях. По аналогии с рисунками 1.29, 1.32, 1.33, 1.34 на рисунках 1.36–1.37 представлены информационный сигнал $m(t)$ (а), сигнал $s(t)$, передаваемый по каналу связи, представляющий

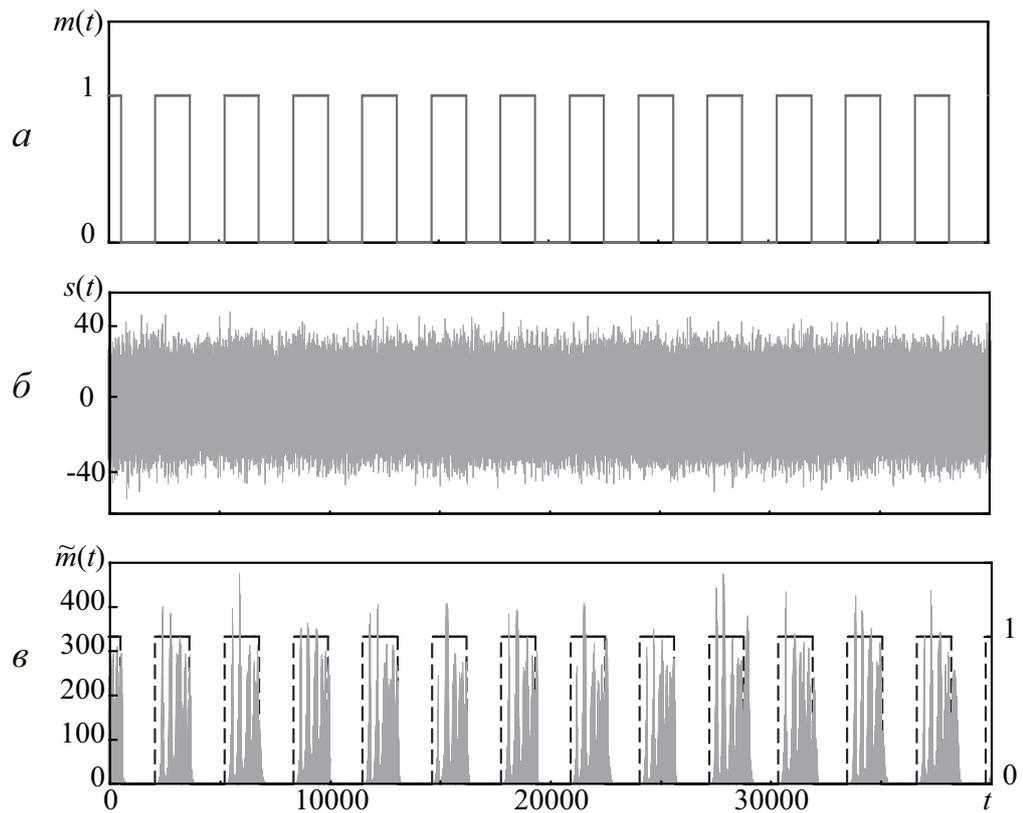


Рисунок 1.36 — Иллюстрация работоспособности способа скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на периодические генераторы при использовании систем Ресслера в качестве генераторов передающего и принимающего устройств: информационный сигнал $m(t)$ (*a*), сигнал $s(t)$, передаваемый по каналу связи (*б*), восстановленный $\tilde{m}(t)$ (сплошная линия) и детектированный (пунктирная линия) сигналы (*в*)

собой сумму детерминированного сигнала, генерируемого передающей хаотической системой, и стохастического сигнала, производимого генератором шума (δ), а также восстановленный $\tilde{m}(t)$ и детектированный сигналы (ϵ). Нетрудно заметить, что в обоих рассмотренных случаях сигналы $m(t)$ и $\tilde{m}(t)$ практически в точности совпадают друг с другом, что аналогично случаю отсутствия генератора шума на передающей стороне канала связи. Таким образом, можно говорить о высоком качестве передачи информации таким способом.

1.6 Выводы по главе 1

Таким образом, в настоящей главе диссертационной работы рассмотрена традиционная концепция режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных хаотических системах. Рассмотрены методы диагностики и механизмы возникновения этого режима в случае различного типа связи между системами. Показана возможность их применения к однонаправленно связанным системам, находящимся под внешним шумовым воздействием.

Проведено теоретическое, численное и экспериментальное исследование влияния шума на установление режима обобщенной синхронизации в случае диссипативной связи между системами. Показано, что если мощность шумового сигнала оказывается сопоставимой с мощностью хаотического сигнала ведущей системы, независимо от типа системы и характера распределения случайной величины шум практически не оказывает влияния на порог возникновения синхронного режима в этом случае. Результаты теоретического рассмотрения подтверждены данными численного моделирования и/или экспериментального исследования однонаправленно связанных потоковых систем и дискретных отображений, а также пространственно-распределенных сред, находящихся в режимах пространственно-временного хаоса.

Установлено, что выявленная устойчивость режима обобщенной синхронизации по отношению к внешним шумам может найти практическое

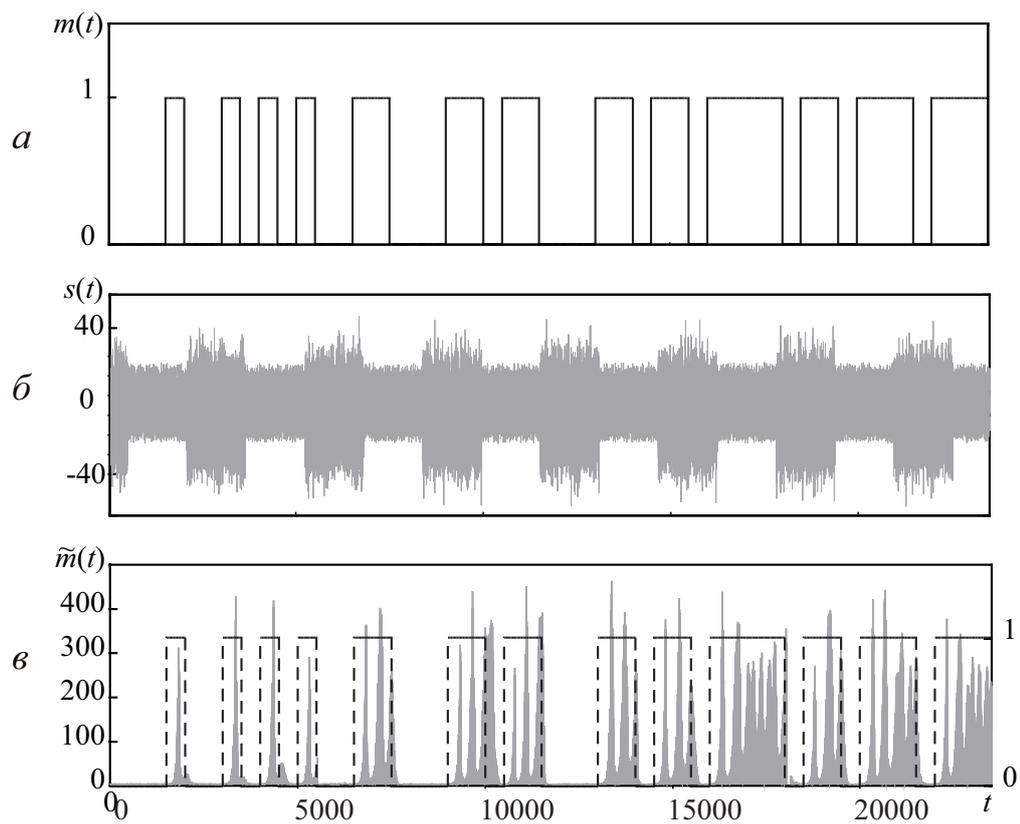


Рисунок 1.37 — Иллюстрация работоспособности способа скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума, характеристики которого модулируются ложным информационным сообщением, в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на периодические генераторы при использовании систем Ресслера в качестве генераторов передающего и принимающего устройств: информационный сигнал $m(t)$ (*a*), сигнал $s(t)$, передаваемый по каналу связи (*б*), восстановленный $\tilde{m}(t)$ (сплошная линия) и детектированный (пунктирная линия) сигналы (*в*)

применение в ряде областей науки и техники, например, при скрытой передаче информации по каналам связи с высоким уровнем шумов. Предложен способ скрытой передачи информации на основе режима обобщенной синхронизации в присутствии шума. Показано, что такой способ позволяет преодолеть проблему конфиденциальности передачи информации: шумовой сигнал большой амплитуды скрывает следы модуляции управляющих параметров информационным сигналом, не оставляя возможности восстановления информационного сигнала третьей стороной по сигналу, передаваемому по каналу связи. Кроме того, как и его предшественник, предложенный в нашей работе [276], этот способ обладает высокой устойчивостью к шумам и позволяет избавиться от требования идентичности генераторов на различных сторонах канала связи. Проведено сопоставление предложенного способа скрытой передачи информации со способами и устройствами аналогичного назначения. Путем расчета предельных значений отношения энергии на бит к спектральной плотности мощности шума, при которых схемы и устройства становятся неработоспособными, и зависимости вероятности ошибки на бит от отношения энергии на бит к спектральной плотности мощности шума для различных схем скрытой коммуникации установлены принципиальные преимущества предложенного способа по сравнению с известными аналогами. Установлено, что характеристики шумового сигнала (характер распределения, амплитуда, среднее, дисперсия) практически не оказывают влияния на работоспособность способа скрытой передачи информации, что позволяет изменять характеристики случайного сигнала в процессе передачи информационного сообщения. Предложен способ скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации с изменяющимися характеристиками генератора шума. Показано, что конфиденциальность способа скрытой передачи данных может быть увеличена за счет модуляции характеристик шумового сигнала заведомо ложным информационным сообщением.

Обнаружена обобщенная синхронизация в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на систему, демонстрирующую периодическое

поведение. Показано, что режим обобщенной синхронизации в данном случае возникает значительно раньше, чем в случае взаимодействия двух однонаправленно связанных хаотических систем. Изучен характер расположения границы синхронного режима при изменении параметров расстройки между системами, выявлены механизмы возникновения обобщенной синхронизации в области относительно больших и относительно слабых значений расстройки собственных частот. Установлено, что обнаруженный режим может найти применение для скрытой передачи информации. При этом показано, что использование генераторов периодических колебаний в принимающем устройстве позволяет преодолеть один из существенных недостатков, свойственных способам и устройствам аналогичного назначения, — нестабильность работы при неидентичности управляющих параметров взаимодействующих систем. Кроме того, показано, что такой способ характеризуется высокой устойчивостью по отношению к шумам, причем устойчивость способа в данном случае оказывается выше, чем в способе скрытой передачи данных на основе обобщенной синхронизации хаотических систем.

Выявленная особенность позволила предложить способ скрытой передачи информации, позволяющий преодолеть сразу два вышеупомянутых недостатка. Установлено, что способ скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на периодические генераторы позволяет избавиться от проблемы нестабильности работы способа при неидентичности управляющих параметров принимающего устройства, а также повысить конфиденциальность и качество передачи информации.

Обнаружены режимы обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, в бинарных системах. Показано, что диагностика обоих режимов может осуществляться как при помощи метода вспомогательной системы, так и расчета старшего условного показателя Ляпунова, а механизмы возникновения этих режимов оказываются теми же, что и для аналогичных режимов в аналоговых системах. Режим бинарной обобщенной синхронизации также характеризуется высокой

устойчивостью по отношению к шумам, а режим бинарной синхронизации, индуцированной шумом, может быть рассмотрен как частное проявление этого режима, когда вместо детерминированного бинарного сигнала с ведущей системы ведомая система подвергается внешнему шумовому воздействию. В виду сохранения всех особенностей режима обобщенной синхронизации в бинарных системах можно ожидать, что этот режим может найти практическое применение в цифровых системах связи для обеспечения скрытой коммуникации.

Глава 2

Обобщенная синхронизация в системах с взаимной связью и сетях связанных нелинейных элементов

[121, 125, 126, 128–132, 147, 148, 150–153, 231, 245, 247, 249, 252, 254, 256, 258, 261, 262, 264, 269, 271], [188, 190, 192, 193, 195, 196, 199, 200, 203, 209, 212, 222]

В настоящей главе диссертационной работы проведено обобщение традиционной концепции обобщенной синхронизации [67, 69, 70] (см. также главу 1) на системы с взаимным типом связи — две связанные динамические системы и сети со сложной топологией межэлементных связей. Как отмечалось в главе 1, понятие обобщенной синхронизации изначально было введено в рассмотрение только для однонаправлено связанных хаотических систем. Позднее появились попытки обобщения этого режима на случай взаимной связи (см., например, [93, 95, 96]). Однако, работы, известные в этом направлении, были ориентированы только на установление факта существования такого синхронного режима, в то время как даже само понятие обобщенной синхронизации для таких систем, как правило, в рассмотрение не вводится. В таких работах почему-то по умолчанию предполагается, что в системах с взаимным типом связей обобщенная синхронизация является абсолютно той же самой, что и в системах с однонаправленным характером взаимодействия и не обладает никакими особенностями, а все вопросы, которые возникают при вдумчивом рассмотрении ситуации (например, даже такое простое обстоятельство, что в подобном случае нет ведущей и ведомой систем) молчаливо обходятся авторами. Более того, во всех известных работах диагностика обобщенной синхронизации производится при помощи модификации метода вспомогательной системы [69], явля-

ющего эффективным средством анализа обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной связью, однако, вопрос о корректности применения этого метода к системам с взаимным типом связи авторами даже не обсуждается; точно также по умолчанию полагается, что этот метод работает и во взаимосвязанных системах (что, опять-таки, отнюдь не очевидно при вдумчивом рассмотрении) и корректность его применения для систем с взаимным характером связи не подвергается и доли сомнения.

В этой главе, как отмечалось выше, впервые предлагается универсальная концепция обобщенной синхронизации, справедливая как для двух систем, связанных однонаправлено или взаимно, так и для сетей хаотических осцилляторов со сложной топологией межэлементных связей. Как будет показано ниже, диагностирование обобщенной синхронизации в таких системах можно осуществлять путем расчета спектра показателей Ляпунова или при помощи метода ближайших соседей, при этом метод вспомогательной системы для систем с взаимным типом связи является неприменимым, поскольку его использование в данном случае приводит к некорректным результатам.

2.1 Понятие обобщенной синхронизации и механизмы ее установления во взаимно связанных системах

Прежде всего, обобщим понятие обобщенной синхронизации (1.1) на случай взаимной связи между системами. Для учета взаимного влияния систем друг на друга, уравнение (1.1) для двух взаимно связанных систем заменим на соотношение

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = 0. \quad (2.1)$$

Отметим, что соотношение (1.1) может быть рассмотрено как частный случай соотношения (2.1), при этом основные свойства обобщенной синхронизации однонаправлено и взаимно связанных систем должны сохраняться. Таким образом, под обобщенной синхронизацией взаимно

связанных систем, также как и в случае однонаправленной связи, мы будем понимать такой режим, при котором имеет место установление уникального функционального соотношения между состояниями этих систем, но функциональное соотношение в данном случае будет иметь вид (2.1) вместо (1.1).

Как отмечалось в главе 1, для диагностики обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной связью традиционно используют метод ближайших соседей [67,73], метод расчета условных показателей Ляпунова [71] и метод вспомогательной системы [69]. Логично предположить, что некоторые из них могут быть применены к анализу обобщенной синхронизации в системах с взаимной связью. В виду того, что метод вспомогательной системы для однонаправлено связанных систем получил наибольшее распространение на практике в связи с простотой его реализации и высокой точностью определения порогового значения установления синхронного режима, именно этот метод и был впервые использован для диагностики режима обобщенной хаотической синхронизации в случае взаимной связи между системами [93].

Основная идея метода вспомогательной системы при рассмотрении осцилляторов со взаимным характером связи заключается в следующем [93]. Наряду с исходными системами \mathbf{x} и \mathbf{u} рассматриваются два вспомогательных осциллятора \mathbf{x}' и \mathbf{u}' , идентичных по управляющим параметрам осцилляторам \mathbf{x} и \mathbf{u} , соответственно, но стартующих с различных начальных условий, принадлежащих одному и тому же бассейну притяжения хаотического аттрактора. Тип связи между исходными \mathbf{x} , \mathbf{u} и вспомогательными \mathbf{x}' , \mathbf{u}' системами в соответствии с предложенной в [93] методологией должен быть однонаправленным (см. рисунок 2.1).

Когда одна из пар идентичных по управляющим параметрам систем (например, \mathbf{u} и \mathbf{u}') начинает демонстрировать идентичное поведение, считается, что в системе реализуется режим частичной обобщенной синхронизации [93]. Как только состояния обеих пар идентичных систем начнут совпадать (то есть, $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}'$ и $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}'$), полагают, что в системе возникнет режим полной обобщенной синхронизации [93].

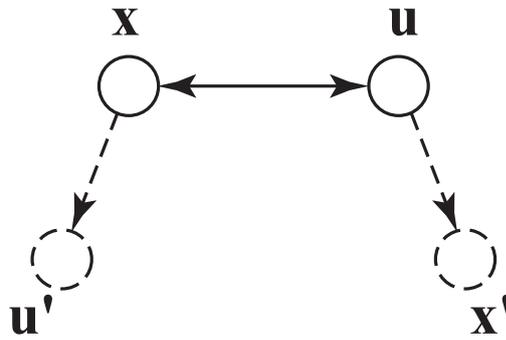


Рисунок 2.1 — Иллюстрация метода вспомогательной системы для случая двух взаимно связанных осцилляторов, предложенного в [93]

Такое обобщение метода вспомогательной системы на случай взаимной связи, на первый взгляд, кажется достаточно очевидным. В то же самое время, детальное рассмотрение этого метода выявляет ряд противоречий и свидетельствует о некорректности его применения к системам с взаимной связью. В частности, предположим, что взаимодействующие взаимно связанные системы x и u идентичны. Тогда между состояниями этих систем возможно установление режима полной хаотической синхронизации [280, 330], когда $x \equiv u$. Ввиду идентичности вспомогательных систем, введенных в рассмотрение согласно методу, описанному выше, границы режимов частичной и полной обобщенной синхронизации должны совпадать друг с другом. Понятно также, что режим обобщенной синхронизации, реализуемый между состояниями взаимно связанных систем, в данном случае эквивалентен режиму полной синхронизации между исходной системой и вспомогательной. В то же самое время, в силу однонаправленного типа связи между ними, режим полной синхронизации в таких системах будет возникать в два раза позже (при увеличении параметра связи), чем в исходных системах, связанных взаимно [320]. То есть, в терминологии работы [93], режим обобщенной синхронизации в данном случае оказывается сильнее режима полной синхронизации, что противоречит самому определению режима обобщенной синхронизации.

Если параметры взаимодействующих систем немного расстроены, вместо полной синхронизации имеет место режим синхронизации с за-

паздыванием. В этом случае, как будет показано ниже, применение метода вспомогательной системы для осцилляторов с взаимным характером связи снова приводит к противоречию: режим обобщенной синхронизации концепции [93] оказывается сильнее синхронизации с запаздыванием.

Другим методом диагностики обобщенной синхронизации в однонаправлено связанных системах является метод расчета условных показателей Ляпунова [71] (см. также раздел 1.1). Понятно, что расчет спектра показателей Ляпунова можно осуществлять и для систем с взаимной связью. Однако, в силу взаимного влияния систем друг на друга, разделение спектра ляпуновских показателей на две части (показатели Ляпунова, соответствующие поведению ведущей системы и условные показатели Ляпунова, характеризующие динамику ведомого осциллятора) не представляется возможным, а следовательно, условие (1.3) должно быть модифицировано.

Далее, для удобства предположим, что мы имеем дело с потоковыми динамическими системами с хаотической динамикой, размерности фазовых пространств которых $N_x = N_u = 3^1$. Тогда, как отмечалось выше, в любой момент времени t уравнение (2.1) может быть рассмотрено как обобщение функционального соотношения между состояниями взаимодействующих систем, записанного в явном виде. Тогда, согласно теореме о неявной функции [331], локально, в определенные моменты времени, явное функциональное соотношение между состояниями взаимодействующих систем оказывается также справедливым, то есть $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{F}}[\mathbf{u}(t)]$ или $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{F}}[\mathbf{x}(t)]$. Предположим без потери общности, что для $t^* - \delta < t < t^* + \delta$ (где δ — бесконечно мало) явное функциональное соотношение

$$\mathbf{x}(t^*) = \tilde{\mathbf{F}}[\mathbf{u}(t^*)] \quad (2.2)$$

определяется с помощью уравнения (2.1). В этом случае, локально, в заданном диапазоне $t^* - \delta < t < t^* + \delta$, мы имеем дело с хорошо изу-

¹Следует отметить, что рассуждения, приведенные ниже, могут быть обобщены на любые системы с произвольной размерностью фазового пространства.

ченным случаем уравнения (1.1). Уравнение (2.2) означает, что (в предположении, что $N_x = N_u = 3$) динамика системы может быть охарактеризована локальными показателями Ляпунова $\lambda_1^u > 0$, $\lambda_2^u = 0$, $\lambda_3^u < 0$, $\lambda_{1,2,3}^x < 0$. Другими словами, в выбранной области шестимерного фазового пространства многообразие, соответствующее режиму обобщенной синхронизации, характеризуется одним неустойчивым направлением e^u и одним направлением с нейтральной устойчивостью e^0 , лежащими внутри этого многообразия, в то время как все остальные направления оказываются устойчивыми. Эти направления соответствуют одному положительному, одному нулевому и четырем отрицательным показателям Ляпунова. Аналогичное утверждение оказывается также справедливым для других моментов времени t^* , хотя явное функциональное соотношение для этих моментов времени может принять вид $\mathbf{u}(t^*) = \tilde{\mathbf{F}}[\mathbf{x}(t^*)]$ вместо (2.2). Таким образом, можно сделать вывод о том, что в случае взаимной связи между двумя системами, многообразие, соответствующее режиму обобщенной синхронизации, в каждый момент времени характеризуется одним неустойчивым направлением, одним направлением с нейтральной устойчивостью и четырьмя устойчивыми направлениями. То есть, на языке спектра показателей Ляпунова это означает, что в режиме обобщенной синхронизации взаимодействующие системы характеризуются одним положительным, одним нулевым и четырьмя отрицательными показателями Ляпунова. Так как для взаимно связанных систем мы не можем выделить условные показатели Ляпунова, критерий наличия обобщенной синхронизации в системе двух хаотических осцилляторов, каждый из которых характеризуется трехмерным фазовым пространством, должен быть переписан в виде

$$\lambda_3 < 0, \tag{2.3}$$

в то время как $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для динамических систем с большей размерностью фазового пространства.

Таким образом, также как и в случае однонаправленной связи между системами, возникновение режима обобщенной синхронизации в систе-

мах с взаимной связью может быть диагностировано по моменту перехода одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений. В то же самое время, известны работы (см., например, [332]), в которых подобный переход в поведении двух осцилляторов со взаимной связью связывают с моментом наступления режима синхронизации с запаздыванием, когда взаимодействующие системы демонстрируют идентичные колебания, сдвинутые на некоторый временной интервал τ , то есть $\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}(t - \tau)$. Однако, разность между критическими значениями параметра связи, соответствующими переходу положительного показателя Ляпунова в область отрицательных значений и моменту установления режима синхронизации с запаздыванием, может быть достаточно большой, что было объяснено в [332] наличием перемежаемости (режимом так называемой перемежающейся синхронизации с запаздыванием). Так как режим синхронизации с запаздыванием является частным случаем режима обобщенной синхронизации и представляет ее более сильную форму [70], возникает вопрос о существовании режима обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах, отличного от режима синхронизации с запаздыванием: существует ли такой режим или отличие в пороговых значениях, упомянутых выше, действительно можно объяснить наличием перемежаемости?

Диагностика обобщенной синхронизации в системах как с однонаправленным, так и взаимным типом связи, как отмечалось в разделе 1.1, может осуществляться при помощи метода ближайших соседей. Суть этого метода для систем с взаимным типом связи оказывается той же, что и для однонаправленной связи, однако, в данном случае обе системы оказываются равноправными. Иными словами, в режиме обобщенной синхронизации все близкие состояния в фазовом пространстве первой системы \mathbf{x} соответствуют близким состояниям в фазовом пространстве второй системы \mathbf{u} также, как все близкие состояния в фазовом пространстве второй системы \mathbf{u} должны соответствовать близким состояниям в фазовом пространстве первой системы \mathbf{x} . Для количественной характеристики степени близости состояний систем можно

по-прежнему использовать соотношение (1.4) с сохранением всех критериев наличия/отсутствия синхронного режима, а также его достоинств и недостатков (см. раздел 1.1). Поэтому в рамках настоящей главы мы будем использовать метод ближайших соседей для верификации факта наступления обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи по моменту перехода второго (положительного) показателя Ляпунова в область отрицательных значений. Чтобы показать, что диагностируемый режим отличается от режима синхронизации с запаздыванием, в этой главе проводится также диагностика этого режима при помощи традиционных методов и подходов.

2.2 Обобщенная синхронизация во взаимно связанных системах с малым числом степеней свободы

Чтобы проверить справедливость рассуждений, приведенных в разделе 2.1, применим традиционные методы и подходы для диагностики обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах с малым числом степеней свободы, демонстрирующих хаотическую динамику. В качестве примеров таких хаотических систем рассмотрим системы с непрерывным (осцилляторы Ресслера, Лоренца, Кияшко-Пиковского-Рабиновича) и дискретным (логистические отображения, отображения Эно) временем. Начнем рассмотрение с потоковых динамических систем.

2.2.1 Системы Ресслера

В качестве первого примера рассмотрим поведение двух взаимно связанных систем Ресслера

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= p + z_{1,2}(x_{1,2} - c),\end{aligned}\tag{2.4}$$

где $\mathbf{x}_{1,2}(t) = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})^T$ — векторы состояния взаимодействующих систем, ε — параметр связи, $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10$ — управляющие параметры. Параметр ω_2 , характеризующий собственную частоту колебаний второй системы, был выбран равным $\omega_2 = 0.95$, в то время как аналогичный параметр первой системы варьировался в диапазоне $[0.89; 1.01]$, чтобы обеспечить расстройку между взаимодействующими осцилляторами.

Известно, что при увеличении силы связи ε взаимно связанные системы Ресслера (2.4) демонстрируют переход от асинхронного состояния к режиму синхронизации с запаздыванием [332] через режим фазовой синхронизации и синхронизации временных масштабов. Как отмечалось выше, режим синхронизации с запаздыванием является частным случаем режима обобщенной синхронизации и представляет собой его более сильную форму, то есть, если в системе реализуется режим синхронизации с запаздыванием, в ней обязательно существует и режим обобщенной синхронизации. В то же самое время, как это обсуждалось в разделе 2.1, диагностика режима обобщенной синхронизации при помощи метода вспомогательной системы, предложенная в [93], приводит к некорректным результатам. Для подтверждения этого факта произведем сравнение друг с другом пороговых значений параметра связи ε , соответствующих границам возникновения этих типов синхронного поведения.

На рисунке 2.2 приведена граница возникновения режима синхронизации с запаздыванием в системе (2.4) на плоскости параметров (ω_1, ε) (кривая 1). Здесь также показаны границы режимов частичной (кривая

2) и полной (кривая 3) обобщенной синхронизации, для диагностики которых использовался метод вспомогательной системы (см. раздел 2.1), в соответствии с идеологией работы [93]. Для определения границ этих режимов, как и в случае однонаправлено связанных хаотических систем, производился расчет средних расстояний

$$D_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}'_i(t)\| dt, \quad (2.5)$$

между состояниями исходных $\mathbf{x}_i(t)$ и вспомогательных $\mathbf{x}'_i(t)$ систем для различных значений параметра связи ε (ср. с формулой (1.2)). Здесь $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, i — номер осциллятора ($i = 1, 2$ для случая взаимной связи, $i = 2$ для однонаправлено связанных систем), $T - T_0 = 2 \times 10^4$ — время расчета, $T_0 = 10^5$ — время переходного процесса. При приближении D_i к нулю, векторы состояний исходных и вспомогательных систем начинают совпадать, что соответствует наличию частичной ($D_i = 0$ при $i=1$ или $i=2$) или полной ($D_i = 0$ и при $i = 1$, и при $i = 2$) обобщенной синхронизации. При диагностике синхронизации с запаздыванием принимался во внимание тот факт, что режим синхронизации с запаздыванием в потоковых системах соответствует режиму полной синхронизации в дискретных отображениях, полученных из потоковых систем при помощи сечения Пуанкаре [333]. В виду достаточно простой топологии аттракторов взаимодействующих систем для определения порога возникновения синхронного режима в системе (2.4) анализировалось установление полной синхронизации в отображениях, полученных из исходной системы с помощью построения сечения Пуанкаре, и рассчитывалось среднее расстояние между этими системами.

Из рисунка 2.2 видно, что в общем случае режимы частичной и полной обобщенной синхронизации возникают после момента возникновения синхронизации с запаздыванием (отметим, что в области достаточно больших значений расстройки собственных частот, возможно наступление этих режимов до наступления синхронизации с запаздыванием).

Таким образом, проведенные численные расчеты подтверждают теоретические рассуждения, приведенные в разделе 2.1, о некорректности

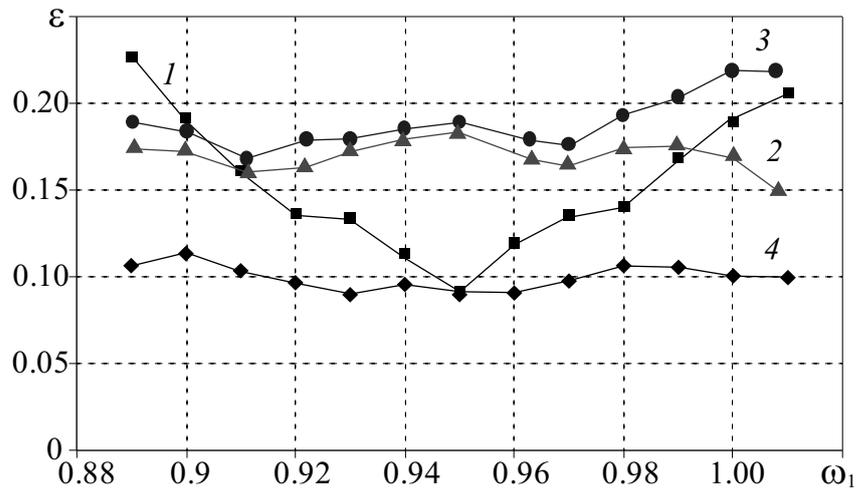


Рисунок 2.2 — Границы режимов синхронизации с запаздыванием (кривая 1), частичной (кривая 2) и полной (кривая 3) обобщенной синхронизации (в терминологии работы [93]) в системе двух взаимно связанных осцилляторов Ресслера (2.4). Здесь приведена также кривая, соответствующая моменту перехода одного из положительных показателей Ляпунова системы (2.4) в область отрицательных значений (кривая 4)

применения метода вспомогательной системы к анализу поведения хаотических осцилляторов, связанных взаимно. Покажем, что режим обобщенной синхронизации в этом случае может быть диагностирован по моменту перехода одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений.

На рисунке 2.2 приведена также граница перехода второго показателя Ляпунова через ноль в системе (2.4) (кривая 4). Видно, что указанная граница не совпадает ни с одной из критических кривых (границами синхронизации с запаздыванием, частичной и полной обобщенной синхронизаций в терминологии работы [93]), приведенных на рисунке. Более того, она проходит ниже границы синхронизации с запаздыванием и практически не зависит от величины частотной расстройки между взаимодействующими системами.

Переход одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений, как упоминалось выше в разделе 2.1, объяснялся в работе [332] возникновением синхронизации с запаздыванием, а различие между критическими значениями параметра связи, соответствующими этим режимам, — наличием перемежающегося поведения — перемежающейся синхронизации с запаздыванием [109]. Однако, из

рисунка 2.2 видно, что границы этих типов синхронного поведения никак не связаны между собой: критическое значение параметра связи, соответствующее порогу синхронизации с запаздыванием, резко увеличивается с ростом расстройки собственных частот взаимодействующих систем, в то время как пороговая кривая, характеризующая переход второго показателя Ляпунова в отрицательную область, практически не зависит от величины частотной расстройки. Более того, как было выявлено в ходе проведенных исследований, при различных значениях управляющих параметров взаимодействующих систем перемежающаяся синхронизация с запаздыванием может наблюдаться как до, так и после момента перехода положительного показателя Ляпунова через ноль.

Таким образом, переход одного из положительных показателей Ляпунова во взаимно связанных системах в область отрицательных значений никак не связан с возникновением синхронизации с запаздыванием и перемежаемости вблизи ее границ. Можно предположить, что по аналогии со случаем однонаправлено связанных систем этот режим может быть интерпретирован как переход к обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи. Для проверки сделанных предположений применим метод ближайших соседей для диагностики обобщенной синхронизации в системе (2.4) при $\omega_1 = 0.99$. На рисунке 2.3,б приведена зависимость количественной меры d от параметра связи ε . На рисунке 2.3,а показана также зависимость четырех старших показателей Ляпунова для системы (2.4), $\omega_1 = 0.99$. Момент перехода второго (положительного) показателя Ляпунова в область отрицательных значений $\varepsilon_{GS} = 0.106$ отмечен стрелкой на обоих рисунках. Видно, что в этот момент количественная мера d оказывается близкой к нулю, что говорит о возникновении обобщенной синхронизации в системе (2.4).

Рассмотрим зависимость $d(\varepsilon)$ более детально. Из рисунка 2.3,б видно, что плоскость $(\varepsilon; d)$ может быть условно разделена на четыре области: I – $\varepsilon \in [0; 0.04)$, мера d уменьшается достаточно резко, характеризуя переход от асинхронного состояния к режиму фазовой синхронизации при $\varepsilon_{PS} = 0.04$; II – $\varepsilon \in [0.04; 0.09)$, d практически не меняется, что сви-

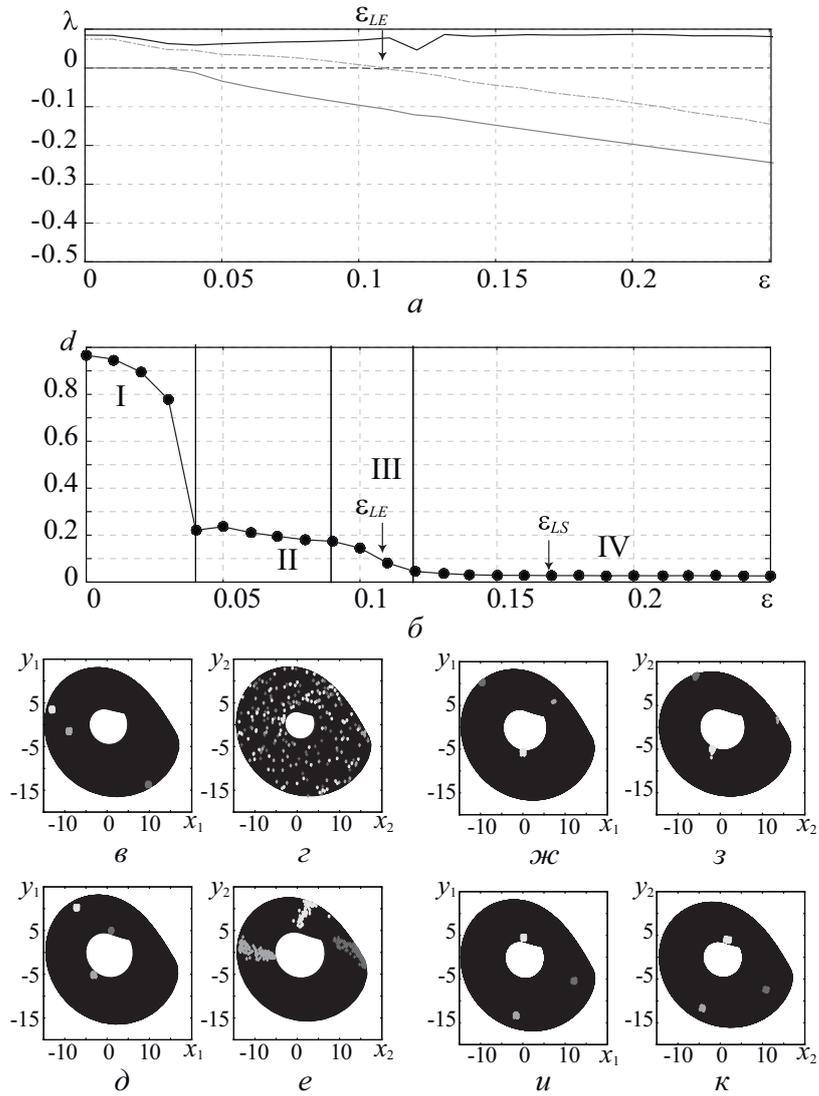


Рисунок 2.3 — Зависимость четырех старших показателей Ляпунова (*a*) и количественной меры *d* (1.4) от параметра связи ε для системы (2.4), $\omega_1 = 0.99$. Критические значения параметра связи $\varepsilon_{LE} = 0.106$ (момент перехода одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений) и $\varepsilon_{LS} = 0.169$ (момент возникновения синхронизации с запаздыванием) показаны стрелками. (*в*–*к*) Фазовые портреты осцилляторов Ресслера для различных значений параметра связи: (*в*–*з*) $\varepsilon = 0.01$ (асинхронное состояние); (*д*–*е*) $\varepsilon = 0.05$ (режим фазовой синхронизации); (*ж*–*з*) $\varepsilon = 0.12$ (режим обобщенной синхронизации); (*и*–*к*) $\varepsilon = 0.18$ (режим синхронизации с запаздыванием). На рисунках (*в*, *д*, *ж*, *и*) приведены хаотические аттракторы первой системы $\mathbf{x}(t)$ с тремя случайно выбранными точками \mathbf{x}^k и их ближайшими соседями \mathbf{x}^{kn} . Рисунки (*з*, *е*, *з*, *к*) иллюстрируют соответствующие им состояния $\mathbf{u}^{k, kn}$ в фазовом пространстве второй системы $\mathbf{u}(t)$

детельствует о существовании режима фазовой синхронизации; III – $\varepsilon \in [0.09; 0.12)$, мера d плавно убывает, что отвечает возникновению режима обобщенной синхронизации (граница установления которого, как установлено в результате исследований, приходится на середину отрезка, где происходит плавный спад меры d [66, 73, 148]); IV – $\varepsilon > 0.12$, $d \approx 0$. Следует отметить, что в области IV численное значение количественной меры d меняется незначительно: как до, так и после момента возникновения синхронизации с запаздыванием ($\varepsilon_{LS} \approx 0.169$, показано стрелкой на рисунке), она оказывается близкой к нулю. Приведенные расчеты свидетельствуют также о том, что режимы частичной и полной обобщенной синхронизации (в терминологии работы [93]) не приводят ни к качественным, ни к количественным изменениям количественной меры d и спектра ляпуновских показателей, в то время как все остальные типы синхронного поведения находят свое отражение и в той, и в другой характеристике.

На рисунке 2.3, в–к приведены фазовые портреты взаимодействующих систем Ресслера (2.4) при различных значениях параметра связи ε . На фазовых портретах первой системы $\mathbf{x}(t)$ (рисунок 2.3, в, д, ж, и) приведены также три случайно выбранные точки \mathbf{x}^k и их ближайшие соседи \mathbf{x}^{kn} . Рисунки 2.3, г, е, з, к иллюстрируют соответствующие им состояния $\mathbf{u}^{k, kn}$ в фазовом пространстве второй системы $\mathbf{u}(t)$.

Нетрудно заметить, что при относительно слабых значениях силы связи между системами ($\varepsilon = 0.01$) образы ближайших соседей в фазовом пространстве второй системы распределены случайно по всему аттрактору (рисунок 2.3, г). При увеличении параметра связи образы ближайших соседей начинают группироваться в ограниченной области аттрактора, при этом ее радиус уменьшается при увеличении силы связи между системами (сравните рисунки 2.3, е, з). При $\varepsilon > \varepsilon_{LE}$ все образы ближайших соседей первого осциллятора в фазовом пространстве второй системы оказываются также близкими и наоборот (рисунок 2.3, ж, з и рисунок 2.3, и, к), что является неопровержимым доказательством наличия обобщенной синхронизации. В то же самое время, между ре-

жимирами обобщенной синхронизации и синхронизации с запаздыванием существует небольшое отличие, заключающееся в том, что в режиме синхронизации с запаздыванием ближайшие соседи и их образы располагаются в одних и тех же областях хаотического аттрактора (рисунки 2.3, *и,к*), в то время как в режиме обобщенной синхронизации они могут находиться в немного разных частях аттрактора (рисунок 2.3, *ж,з*).

2.2.2 Генераторы Кияшко–Пиковского–Рабиновича

Аналогичные результаты были получены для системы двух взаимосвязанных генераторов Кияшко–Пиковского–Рабиновича [334], которые мы рассмотрим в качестве второго примера. Уравнения, описывающие динамику системы, имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_1^2 [h(x_1 - \varepsilon(y_2 - y_1)) + y_1 - z_1], \\ \dot{y}_1 &= -x_1 + \varepsilon(y_2 - y_1), \\ \mu \dot{z}_1 &= x_1 - f(z_1), \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \omega_2^2 [h(x_2 - \varepsilon(y_1 - y_2)) + y_2 - z_2], \\ \dot{y}_2 &= -x_2 + \varepsilon(y_1 - y_2), \\ \mu \dot{z}_2 &= x_2 - f(z_2), \end{aligned}$$

где $h = 0.2$, $\mu = 0.1$ — управляющие параметры, ε — параметр связи, $f(\xi) = -\xi + 0.002 \sinh(5\xi - 7.5) + 2.9$ — безразмерная характеристика нелинейного элемента.

На рисунке 2.4 приведены границы режимов обобщенной синхронизации (диагностируемой по моменту перехода второго положительного показателя Ляпунова в область отрицательных значений) и синхронизации с запаздыванием в системе (2.6). Из рисунка видно, что поведение этих границ качественно аналогично границам в системе двух осцилляторов Ресслера, связанных взаимно (рисунок 2.2): пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению обобщенной синхронизации, практически не зависит от величины расстройки между системами, в то время как порог синхронизации с запаздыванием при

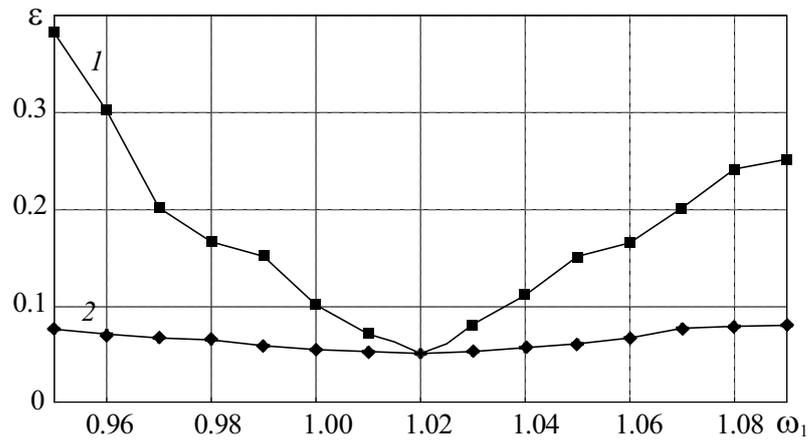


Рисунок 2.4 — Границы синхронизации с запаздыванием (кривая 1) и обобщенной синхронизации (кривая 2) для системы (2.6)

увеличении расстройки начинает монотонно расти. Таким образом, по аналогии с взаимно связанными системами Ресслера можно говорить о возникновении обобщенной синхронизации в системе двух взаимно связанных генераторов Кияшко–Пиковского–Рабиновича.

Для подтверждения сделанных выводов рассмотрим поведение спектра показателей Ляпунова для системы (2.6). На рисунке 2.5,а показана зависимость четырех старших показателей Ляпунова от параметра связи ε при $\omega_1 = 1.09$. Момент перехода одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений $\varepsilon_{GS} = 0.078$ показан стрелкой.

На рисунке 2.5,б-и приведены фазовые портреты генераторов Кияшко–Пиковского–Рабиновича (2.6) для различных значений параметра связи. По аналогии с системами Ресслера на фазовых портретах первой системы $\mathbf{x}(t)$ (рисунки 2.5,б,г,е,з) случайным образом выбраны три точки \mathbf{x}^k и найдены их ближайшие соседи \mathbf{x}^{kn} . Их образы (\mathbf{u}^k и \mathbf{u}^{kn} , соответственно) в фазовом пространстве второй системы $\mathbf{u}(t)$ показаны на рисунках 2.5,в,д,ж,и. Видно, что расположение образов ближайших соседей в фазовом пространстве второй системы при различных значениях параметра связи ε аналогично случаю взаимно связанных осцилляторов Ресслера (2.4). Более того, в режимах обобщенной синхронизации и синхронизации с запаздыванием поведение ближайших соседей и их

образов также немного отличается друг от друга (рисунки 2.5, *е, ж* и *з, и*).

Таким образом, на основании полученных результатов, можно сделать вывод о том, что, как и в случае двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов [70], в двух взаимно связанных хаотических системах возникновение режима обобщенной синхронизации связано со сменой знака изначально положительного показателя Ляпунова.

2.2.3 Системы Лоренца

В качестве третьего примера рассмотрим установление режима обобщенной синхронизации в системе двух взаимно связанных осцилляторов Лоренца:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= \sigma(y_{1,2} - x_{1,2}) + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= r_{1,2}x_{1,2} - y_{1,2} - x_{1,2}z_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= -bz_{1,2} + x_{1,2}y_{1,2}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\mathbf{x}_{1,2}(t) = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})^T$ — векторы состояний взаимодействующих систем, ε — параметр связи. Выбор систем Лоренца связан с тем, что именно эта система (и именно в таком виде) использовалась в работе [93] для изучения режима обобщенной синхронизации при помощи метода вспомогательной системы. Подобный выбор позволяет осуществить сопоставление результатов проведенных исследований с выводами, сделанными в работе [93]. Кроме того, из-за бистабильного характера хаотического аттрактора системы Лоренца в системе (2.7) могут возникнуть некоторые особенности, связанные с установлением режима обобщенной синхронизации, которые не наблюдаются в системах с хаотическими аттракторами типа аттрактора Ресслера.

Для удобства сравнения результатов, полученных в работе [93], с результатами проведенных исследований выберем значения управляющих параметров в системе (2.7) такими же, как и в работе [93]: $\sigma = 10.0$, $b = 8/3$, $r_1 = 40.0$ и $r_2 = 35.0$. Для диагностики обобщенной синхронизации при помощи метода вспомогательной системы в соответствии

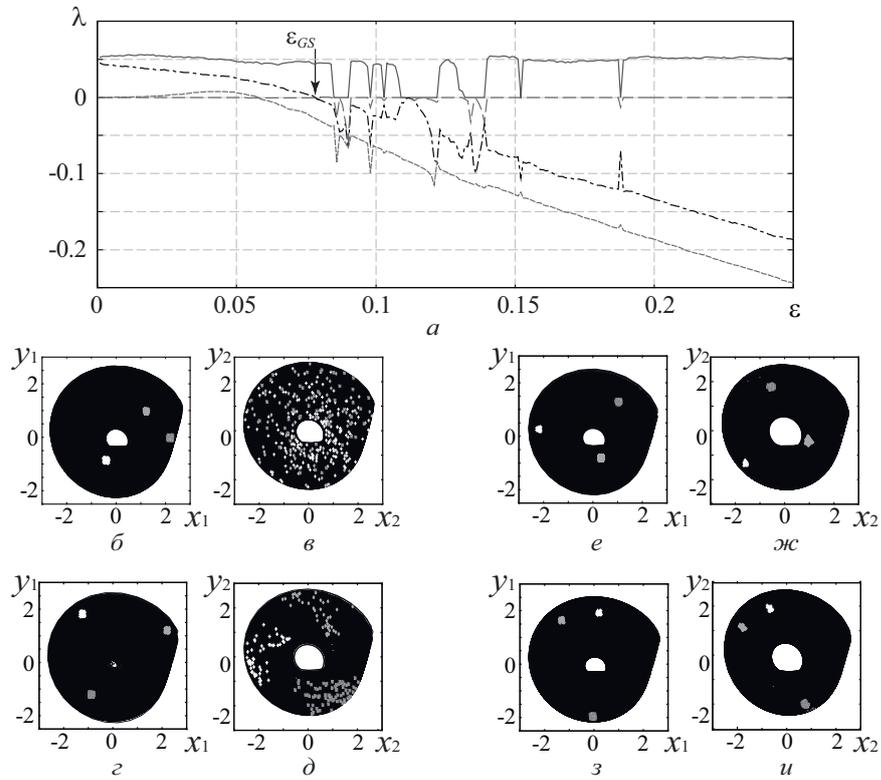


Рисунок 2.5 — Зависимость четырех старших показателей Ляпунова (*a*) от параметра связи ε для системы (2.6), $\omega_1 = 1.09$. Критическое значение параметра связи $\varepsilon_{GS} = 0.078$ (момент перехода одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений) показано стрелкой. (*б–и*) Фазовые портреты генераторов на туннельном диоде для различных значений параметра связи: (*б–в*) $\varepsilon = 0.02$ (асинхронное состояние); (*z–д*) $\varepsilon = 0.071$ (режим, близкий к фазовой синхронизации); (*е–ж*) $\varepsilon = 0.10$ (режим обобщенной синхронизации); (*з–и*) $\varepsilon = 0.18$ (режим, близкий к синхронизации с запаздыванием). На рисунках (*б, z, e, з*) приведены хаотические аттракторы первой системы $\mathbf{x}(t)$ с тремя случайно выбранными точками \mathbf{x}^k и их ближайшими соседями \mathbf{x}^{kn} . Рисунки (*в, д, ж, и*) иллюстрируют соответствующие им состояния $\mathbf{u}^{k, kn}$ в фазовом пространстве второй системы $\mathbf{u}(t)$

с методологией работы [93] произведем расчет средних расстояний D_i между состояниями исходных систем $\mathbf{x}_i(t)$ и их “копиями” $\mathbf{x}'_i(t)$ по формуле (2.5). Соответствующие зависимости D_i от параметра связи ε приведены на рисунке 4.3, *а*.

Для сравнения границ частичной и полной обобщенной синхронизации (в терминологии работы [93]) с моментом возникновения режима синхронизации с запаздыванием [332] была вычислена зависимость минимума функции подобия

$$S_{min} = \min_{\tau} \frac{\langle [x_2(t + \tau) - x_1(t)]^2 \rangle}{\sqrt{\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle}} \quad (2.8)$$

от параметра связи ε . При увеличении параметра связи минимум функции подобия S_{min} уменьшается монотонно (см. рисунок 4.3, *б*) и, когда он становится близким к нулю, возникает режим синхронизации с запаздыванием. Значение минимума функции подобия, соответствующее установлению режима синхронизации с запаздыванием, было выбрано равным $\Delta = 3.5 \times 10^{-3}$. Нетрудно заметить, что момент установления режима синхронизации с запаздыванием отличается достаточно сильно от значений параметров связи, соответствующих установлению так называемых режимов частичной и полной обобщенной синхронизации (ср. рисунок 4.3, *а, б*). Кроме того, также, как и в случае двух взаимно связанных осцилляторов Ресслера, режим синхронизации с запаздыванием предшествует режимам частичной и полной обобщенной синхронизации, что противоречит общепринятой концепции обобщенной синхронизации.

Как было показано в предыдущих разделах, возникновение обобщенной синхронизации в системах с взаимной связью связано с переходом одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений при $\varepsilon = \varepsilon_{LE}$ (см. рисунок 4.3, *в*). Покажем, что аналогичная ситуация имеет место во взаимно связанных системах Лоренца (2.7), для подтверждения чего будем использовать метод ближайших соседей как ниже (рисунок 2.7, *а, б*), так и выше (рисунок 2.7, *в, г*) критического значения ε_{LE} . Для этого выберем в фазовом пространстве первой системы опорную точку \mathbf{x}^n и ее ближайших соседей \mathbf{x}^{nn}

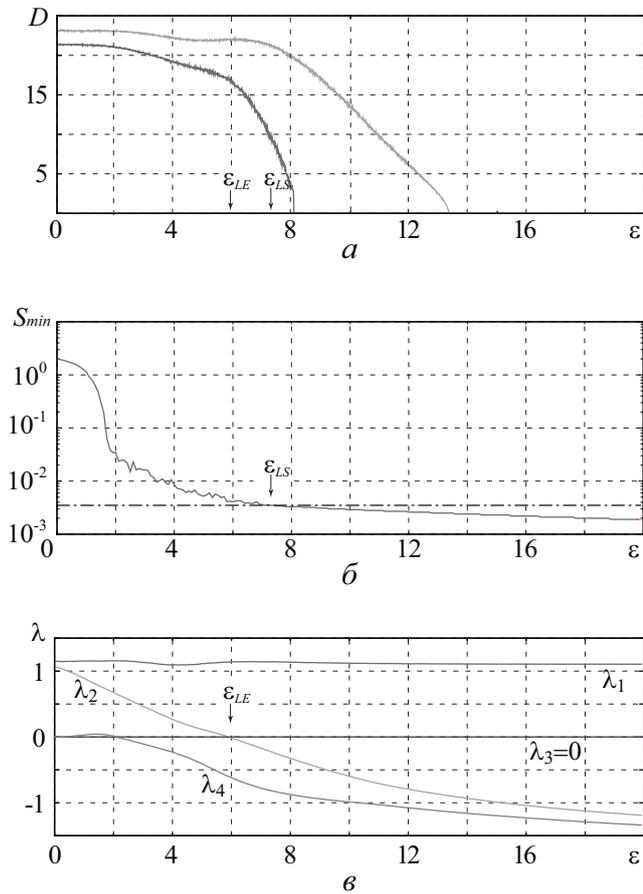


Рисунок 2.6 — (а) Зависимость среднего расстояния D_i , ($i = 1, 2$) между состояниями самой системы и ее копии от параметра связи ε . Моменты перехода одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений ε_{LE} и установления синхронизации с запаздыванием ε_{LS} показаны стрелками. (б) Зависимость минимума функции подобия S_{min} от параметра связи ε . Значение Δ , соответствующее установлению режима синхронизации с запаздыванием, показано штриховой линией. Ось ординат приведена в логарифмическом масштабе. (в) Зависимость четырех старших показателей Ляпунова от параметра связи ε

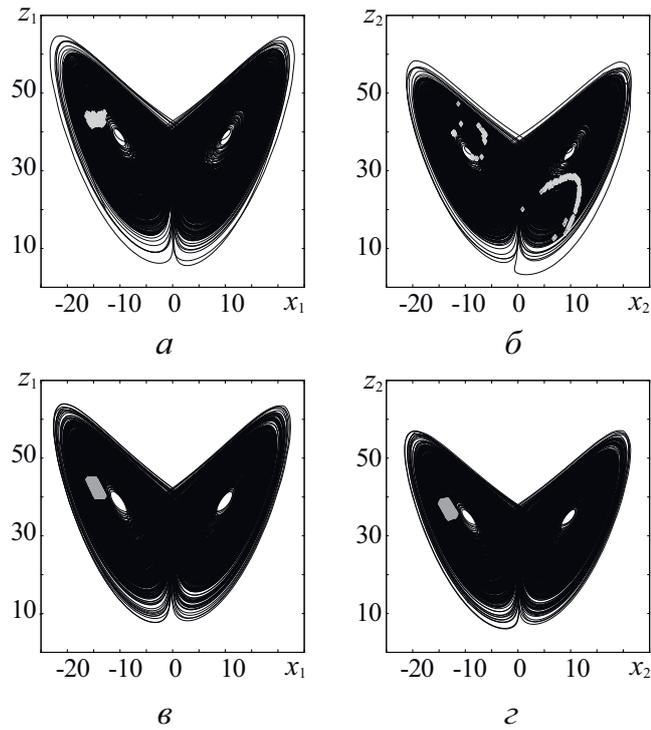


Рисунок 2.7 — Фазовые портреты двух взаимно связанных осцилляторов Лоренца (2.7) при $\varepsilon = 5.7$ (а,б) и $\varepsilon = 6.1$ (в,г). Рисунки (а,в) иллюстрируют хаотические аттракторы первой системы $\mathbf{x}(t)$, а также опорные точки \mathbf{x}^n и их ближайших соседей \mathbf{x}^{nn} . На рисунках (б,г) показаны соответствующие им состояния $\mathbf{u}^{n,nn}$ в фазовом пространстве второй системы $\mathbf{u}(t)$

(Fig. 2.7, а,в) и найдем соответствующие им точки $\mathbf{u}^{n,nn}$ в фазовом пространстве второй системы Лоренца (рисунок 2.7, б,г). О наличии обобщенной синхронизации при $\varepsilon > \varepsilon_{LE}$ свидетельствует тот факт, что все состояния второго осциллятора Лоренца, соответствующие ближайшим соседям в первой системе, оказываются также близкими (рисунок 2.7, г). Напротив, ниже порога ε_{LE} точки во второй системе распределены на обоих листах хаотического аттрактора (рисунок 2.7, б), что свидетельствует о разрушении режима обобщенной синхронизации.

Следствием сравнения результатов, полученных в работе [93] и в настоящей диссертационной работе, является доказательство как невозможности применения метода вспомогательной системы к осцилляторам с взаимным типом связи, так и подтверждение справедливости предложенной нами концепции обобщенной синхронизации. Другими словами, возможно диагностирование режима обобщенной синхронизации в системах с взаимной связью по моменту перехода одного из поло-

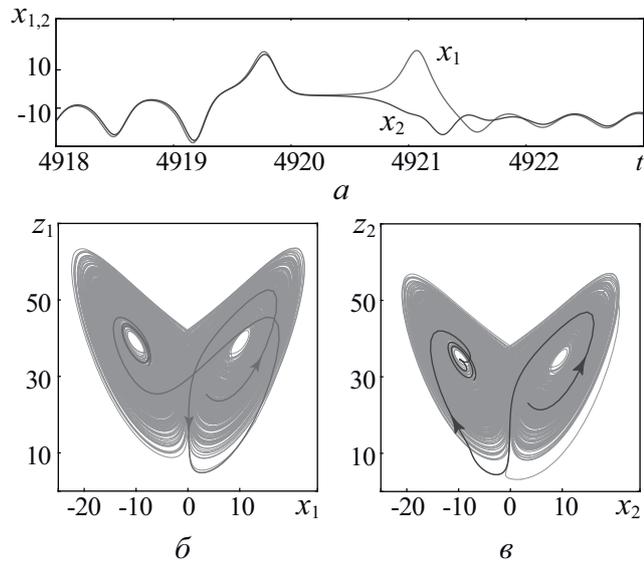


Рисунок 2.8 — (а) Фрагменты временных реализаций двух взаимно связанных осцилляторов Лоренца (2.7), соответствующие кратковременным расхождениям фазовых траекторий. (б) Фазовые портреты систем Лоренца и фазовые траектории, соответствующие временным интервалам, показанным на рисунке 2.8, а. Параметр связи $\varepsilon = 5.7$, режим обобщенной синхронизации не наблюдается

жительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений. Как видно из рисунка 4.3, в, порог возникновения режима обобщенной синхронизации в данном случае приходится на $\varepsilon_{LE} \approx 6.0$. Нетрудно заметить, что обобщенная синхронизация предшествует синхронизации с запаздыванием в данном случае. Таким образом, при увеличении параметра связи взаимно связанные системы Лоренца (2.7) переходят из асинхронного состояния в режим синхронизации с запаздыванием через режим обобщенной синхронизации.

В то же самое время, в динамике взаимно связанных осцилляторов Лоренца (2.7) наблюдаются некоторые особенности, связанные с установлением обобщенной синхронизации, обусловленные бистабильным типом аттрактора системы Лоренца². Нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае значения параметра связи, соответствующие установлению режимов обобщенной синхронизации и синхронизации с запаздыванием, значительно превышают аналогичные значения для взаимно связанных осцилляторов Ресслера (2.4) (сравните рисунок 2.3, а и рисунок 4.3, а). Будучи сильно связанными друг с другом, вблизи грани-

²Эта особенность требует особого выбора опорной точки при реализации метода ближайших соседей.

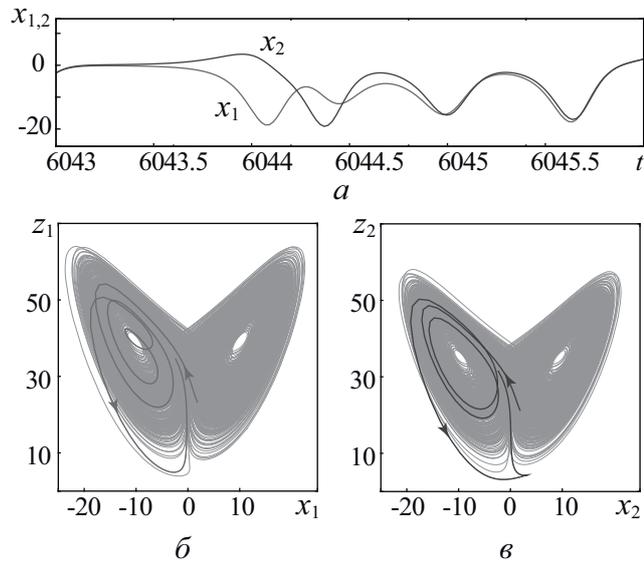


Рисунок 2.9 — (а) Фрагменты временных реализаций двух взаимно связанных осцилляторов Лоренца (2.7), соответствующие кратковременным расхождениям фазовых траекторий. (б) Фазовые портреты систем Лоренца и фазовые траектории, соответствующие временным интервалам, показанным на рисунке 2.9, а. Параметр связи $\varepsilon = 6.1$, в системе имеет место режим обобщенной синхронизации

цы обобщенной синхронизации (ниже бифуркационной точки ε_{LE}) две взаимодействующие системы Лоренца оказываются синхронизованными друг с другом почти все время за исключением коротких интервалов времени, когда изображающая точка одной из связанных систем остается на одном листе аттрактора, в то время как аналогичная точка для второго осциллятора перескакивает на другой лист (см. рисунок 2.8). После такого короткого скачка обе фазовые траектории приближаются друг к другу и осцилляторы начинают демонстрировать синхронную динамику снова. Такие кратковременные скачки являются причиной отсутствия обобщенной синхронизации в исследуемой системе. Выше критической точки ε_{LE} фазовые траектории также иногда расходятся, но в данном случае изображающие точки всегда будут оставаться в пределах одного и того же листа (рисунок 2.9).

Различия в типах динамики, наблюдаемых ниже и выше критического значения ε_{LE} , позволяют объяснить возникновение режима обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах Лоренца (2.7). Когда изображающие точки находятся на одном листе хаотического аттрак-

тора, функциональное соотношение между векторами состояний взаимодействующих систем (2.1) вероятно существует. При этом, наблюдаемый режим очень близок к режиму синхронизации с запаздыванием (или полной синхронизации) из-за достаточно большой величины силы связи между системами ε . С другой стороны, расхождение фазовых траекторий на различные листы хаотического аттрактора разрушает функциональное соотношение, и, соответственно, режим обобщенной синхронизации также разрушается. Таким образом, ниже критической точки ε_{LE} режим обобщенной синхронизации отсутствует из-за наличия кратковременных интервалов, соответствующих расхождению фазовых траекторий на различные листы. Точнее говоря, вблизи границы обобщенной синхронизации наблюдается перемежающееся поведение (также как и вблизи границ других типов хаотической синхронизации, таких как синхронизация с запаздыванием [109, 335], фазовая синхронизация [111, 161] и обобщенная синхронизация в однонаправленно связанных системах [110]), что может быть рассмотрено в качестве дополнительного подтверждения корректности полученных результатов. Заметим, что выше границы обобщенной синхронизации (ε_{LE}) также имеют место расхождения фазовых траекторий (которые не разрушают режим обобщенной синхронизации, так как изображающие точки остаются в пределах одного и того же листа хаотического аттрактора и, как следствие, функциональное соотношение (2.1) выполняется), предшествующие установлению режима синхронизации с запаздыванием. Эти возмущения исчезают выше критической точки ε_{LS} и в системе устанавливается режим синхронизации с запаздыванием.

Таким образом, в рамках настоящего раздела разработана универсальная концепция режима обобщенной синхронизации, справедливая как для однонаправленно, так и взаимно связанных систем. Апробация этой концепции осуществлена на системах с малым числом степеней свободы с непрерывным временем (взаимно связанных осцилляторах Ресслера, Лоренца и Кияшко–Пиковского–Рабиновича). Установлено, что возникновение режима обобщенной синхронизации во взаимо-

действующих трехмерных динамических системах связано с переходом второго показателя Ляпунова в область отрицательных значений. Справедливость полученных результатов подтверждена при помощи метода ближайших соседей. При этом показано, что метод вспомогательной системы, широко используемый для диагностики обобщенной синхронизации, для взаимно связанных систем приводит к некорректным результатам и, соответственно, не может быть использован в подобных случаях.

2.2.4 Логистические отображения и отображения Эно

Рассмотрим вопрос о применимости разработанной концепции обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах к дискретным отображениям. При этом по-прежнему будем подразумевать, что в этом режиме между состояниями взаимодействующих систем должно устанавливаться функциональное соотношение (2.1), а его диагностика может осуществляться при помощи расчета спектра показателей Ляпунова для системы двух связанных отображений и метода ближайших соседей.

В качестве первого примера систем с дискретным временем рассмотрим два взаимно связанных логистических отображения

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, \lambda_x) + \varepsilon(f(y_n, \lambda_y) - f(x_n, \lambda_x)), \\y_{n+1} &= f(y_n, \lambda_y) + \varepsilon(f(x_n, \lambda_x) - f(y_n, \lambda_y)),\end{aligned}\tag{2.9}$$

где $f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x)$, $\lambda_x = 3.92$, $\lambda_y = 3.98$ — управляющие параметры, ε — параметр связи. На рисунке 2.10,а приведены зависимости спектра показателей Ляпунова для системы (2.9) от параметра связи. На рисунке 2.10,б показана зависимость количественной меры d , определяемой точно также, как и для потоковых динамических систем по формуле (1.4), от силы связи между системами. Момент перехода одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений $\varepsilon_{GS} = 0.213$ отмечен стрелкой на обоих рисунках. Из сопоставления рисунков видно, что как и в случае взаимно связанных осцилляторов Ресслера, рассмотренных в подразделе 2.2.1, момент перехода одного из

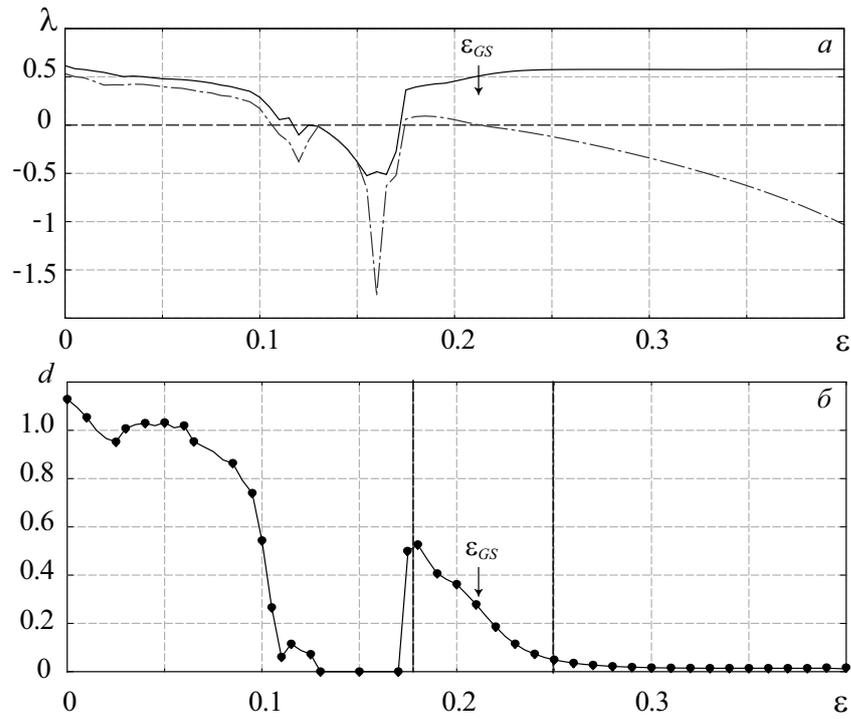


Рисунок 2.10 — Зависимости спектра показателей Ляпунова (а) и количественной меры d для системы двух взаимно связанных логистических отображений (2.9) от параметра связи ϵ . Момент установления режима обобщенной синхронизации $\epsilon_{GS} = 0.213$ показан стрелкой на обоих рисунках

положительных показателей Ляпунова в отрицательную область, приходится примерно на середину падающего участка характеристики $d(\epsilon)$. При дальнейшем увеличении параметра связи величина d практически не меняется, оставаясь близкой к нулю. Таким образом, по аналогии с результатами, полученными для потоковых динамических систем, можно заключить, что в системах с дискретным временем, связанных взаимно, переход одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений связан с установлением режима обобщенной синхронизации.

В качестве второго примера рассмотрим два взаимно связанных отображения Эно:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1}^1 &= f(x_n^1, x_n^2, \lambda_x) + \epsilon(f(y_n^1, y_n^2, \lambda_y) - f(x_n^1, x_n^2, \lambda_x)), \\
 x_{n+1}^2 &= bx_n^1, \\
 y_{n+1}^1 &= f(y_n^1, y_n^2, \lambda_y) + \epsilon(f(x_n^1, x_n^2, \lambda_x) - f(y_n^1, y_n^2, \lambda_y)), \\
 y_{n+1}^2 &= by_n^1,
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

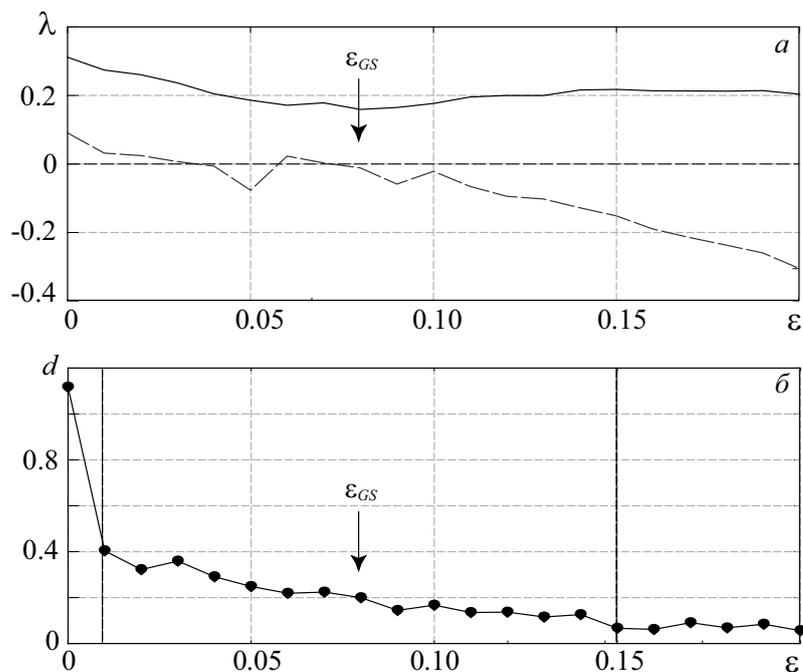


Рисунок 2.11 — Зависимости двух старших показателей Ляпунова (а) и количественной меры d (б) для системы двух взаимно связанных отображений Эно (3.30) от параметра связи ϵ . Момент установления обобщенной синхронизации в системе (3.30) показан стрелкой на обоих рисунках (3.30)

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ — векторы состояний взаимодействующих систем, соответственно, $f(x, y, \lambda) = \lambda(1 - x_1) + x_2$ — нелинейная функция, $\lambda_x = 3.15$, $\lambda_y = 3.05$, $b = 0.22$ — управляющие параметры, ϵ — параметр связи [71, 72]. Также, как и для двух связанных логистических отображений, на рисунке 2.11,а приведены зависимости двух старших показателей Ляпунова для системы (3.30) от параметра связи, а на рисунке 2.11,б показана зависимость количественной меры d от силы связи между системами. Момент перехода одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений $\epsilon_{GS} = 0.078$ показан стрелкой на обоих рисунках. Из рисунков видно, что как и в логистических отображениях (2.9), переход одного из положительных показателей Ляпунова в отрицательную область приходится примерно на середину падающего участка характеристики d , что является дополнительным подтверждением аргументов, приведенных выше в этом разделе.

Таким образом, во взаимно связанных системах с малым числом степеней свободы возможно установление режима обобщенной синхрони-

зации, отличного от полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием. Как и в случае однонаправлено связанных хаотических систем, диагностику этого режима можно осуществлять по моменту перехода одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений. Покажем справедливость разработанного подхода для систем с пространственно-распределенными параметрами в следующем разделе настоящей главы диссертационной работы.

2.3 Обобщенная синхронизация во взаимно связанных пространственно-распределенных средах

Как было показано в предыдущих разделах, основным методом анализа обобщенной синхронизации в сосредоточенных системах с взаимным типом связи является расчет спектра показателей Ляпунова. Логично предположить, что тот же метод расчета должен быть использован для диагностики обобщенной синхронизации в пространственно-распределенных системах. В то же самое время, расчет показателей Ляпунова для систем с пространственно-распределенными параметрами является нетривиальной задачей, что связано, в первую очередь, с невозможностью применения стандартных методов и алгоритмов, разработанных для систем с малым числом степеней свободы, к таким системам. Среди проблем, возникающих при этом, можно выделить следующие:

- бесконечность фазового пространства пространственно-распределенной системы;
- бесконечное число показателей Ляпунова, характеризующих динамику пространственно-распределенной системы;
- характеристика поведения пространственно-распределенной системы при помощи состояния, определяемого по-своему для каждой системы.

Понятно, что для пространственно-распределенной системы возможно рассчитать лишь ограниченное число старших показателей Ляпунова, что достаточно для диагностики различных типов поведения в пространственно-распределенных системах, включая режимы обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом [65, 277, 297]. В настоящее время известно лишь небольшое количество работ, посвященных разработке методов расчета показателей Ляпунова в пространственно-распределенных системах (см., например, [336–338]). Большинство из них так или иначе сводится в конечном итоге к расчету показателей Ляпунова теми же самыми способами, что и для систем с малым числом степеней свободы. Возможно также вычисление старшего показателя Ляпунова по временной реализации, полученной по сигналу, регистрируемому в одной из точек пространства взаимодействия (см., например, [339]), аналогично тому, как это делается для систем с сосредоточенными параметрами [340]. Кроме того, возможно рассчитать спектр показателей Ляпунова при помощи алгоритма Бенеттина [341], работая с дискретной моделью распределенной системы. В этом случае дискретизованная распределенная система рассматривается как конечномерная динамическая система с очень большой размерностью, а, соответственно, будет характеризоваться спектром показателей Ляпунова, содержащим большое, но ограниченное число показателей Ляпунова [338]. При этом возникает целый ряд особенностей, связанных с большой размерностью фазового пространства такой дискретизованной системы.

Кажется логичным перейти к разработке метода расчета спектра показателей Ляпунова для изучения динамики пространственно-распределенных систем, в котором бы не проводилась дискретизация анализируемой системы. В этом случае в основу метода должно быть положено понятие состояния пространственно-распределенной системы, которое, как отмечалось выше, для каждой системы должно определяться по-своему. Понятно, что в данном случае процедура перенормировки и ортогонализации векторов возмущений, используемая при расче-

та спектра показателей Ляпунова конечномерных систем, должна быть модифицирована для перенормировки и ортогонализации состояний. Подобный подход позволяет избавиться от целого ряда проблем, связанных с дискретизацией исходной пространственно-распределенной системы.

2.3.1 Метод расчета спектра пространственных показателей Ляпунова в пространственно-распределенных средах

Перейдем к описанию разработанного метода расчета спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем, основанного на использовании понятия “состояние”. Предположим, что динамика пространственно-распределенной системы описывается при помощи оператора \hat{L} такого, что

$$\hat{L}(\mathbf{U}(x, t)) = 0, \quad (2.11)$$

где $\mathbf{U}(x, t)$ — состояние системы, величина, зависящая от пространственной координаты x и времени t . Состояние системы включает в себя набор величин, однозначно характеризующих ее пространственно-временную динамику. Следует отметить, что в ряде случаев величины, производные от которых по времени не входят в оператор эволюции, могут быть исключены из состояния, что не влияет ни качественно, ни количественно на результаты расчета спектра показателей Ляпунова (см. наши работы [150, 264]). Однако, неправильное определение состояния или исключение из него нужных величин может приводить к ошибочным результатам расчета [150].

Как отмечалось выше, любая пространственно-распределенная система характеризуется бесконечным набором показателей Ляпунова, но вычислить возможно только первые N из них. В данном случае состояние $\mathbf{U}(x, t)$ является опорным состоянием, относительно которого будут задаваться N малых возмущений $\mathbf{V}_i(x, t)$, $i = 1, \dots, N$. Понятно, что малые возмущения также должны быть состояниями. Кроме того, по аналогии со случаем сосредоточенных систем они должны удовлетворять

условиям ортогонализации и нормировки (выражения (2.12) и (2.13), соответственно):

$$(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\|\mathbf{V}_i(x, t_r)\| = 1, \quad (2.13)$$

где (\mathbf{U}, \mathbf{V}) — скалярное произведение состояний, $\|\mathbf{V}_i\| = \sqrt{(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_i)}$.

Набор возмущений $\mathbf{V}_i(x, t)$, удовлетворяющих условиям (2.12) и (2.13) в момент времени $t = t_r$ может быть получен с помощью процедуры ортогонализации Грамма–Шмидта [342]

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i &= \frac{\tilde{\mathbf{V}}_i(x, t_r)}{\|\tilde{\mathbf{V}}_i(x, t_r)\|} = \frac{\tilde{\mathbf{V}}_i(x, t_r)}{\sqrt{(\tilde{\mathbf{V}}_i(x, t_r), \tilde{\mathbf{V}}_i(x, t_r))}} \\ \tilde{\mathbf{V}}_1(x, t_r) &= \varphi_1(x) \\ \tilde{\mathbf{V}}_{i+1}(x, t_r) &= \varphi_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^i (\mathbf{V}_k, \varphi_{i+1}) \mathbf{V}_k(x, t_r), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $i = 1, 2, \dots, N - 1$, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)$ — набор линейно независимых произвольных состояний, определенных на длине L рассматриваемой системы.

Понятно, что как и в случае систем с малым числом степеней свободы, для вычисления спектра показателей Ляпунова пространственно-распределенной системы необходимо рассматривать эволюцию во времени как состояния $\mathbf{U}(x, t)$ исследуемой системы, так и всех возмущений $\mathbf{V}_i(x, t)$. Эволюция состояния $\mathbf{U}(x, t)$ определяется соотношением (2.11), в то время как эволюция возмущений $\mathbf{V}_i(x, t)$ будет определяться оператором эволюции

$$\partial \hat{L}(\mathbf{U}(x, t), \mathbf{V}_i(x, t)) = 0, \quad (2.15)$$

который получается путем линеаризации оператора (2.11) в окрестности состояния $\mathbf{U}(x, t)$.

По истечении интервала времени определенной длительности Γ полученный набор возмущений $\mathbf{V}_i(x, \Gamma)$ снова подвергается процедуре ортогонализации и нормализации по Грамму–Шмидту, при этом в качестве

набора функций $\varphi_i(x)$ выступает рассматриваемое множество возмущений $\mathbf{V}_i(x, \Gamma)$, то есть,

$$\varphi_i(x) = \mathbf{V}_i(x, \Gamma). \quad (2.16)$$

Описанная последовательность действий повторяется достаточно большое число раз M , при этом по ходу вычислений подсчитываются суммы S_i , в которых используются возмущения $\tilde{\mathbf{V}}_i(x, t_r)$, $t_r = j\Gamma$, $j = 1, \dots, M$ до перенормировки, но после ортогонализации

$$S_i = \sum_{j=1}^M \ln \|\tilde{\mathbf{V}}_i(x, j\Gamma)\|. \quad (2.17)$$

Оценка значений показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем определяется также, как и в случае систем с малым числом степеней свободы:

$$\Lambda_i = \frac{S_i}{M\Gamma}. \quad (2.18)$$

Предложенный метод был использован при исследовании автономной и неавтономной динамики диода Пирса, лампы обратной волны с поперечным полем, полупроводниковой сверхрешетки, находящейся под внешним воздействием, и полупроводниковой сверхрешетки во внешнем резонаторе (см. наши работы [150–153]). Он также успешно применен к двум однонаправлено связанным гидродинамическим моделям диодов Пирса, способным демонстрировать режим обобщенной синхронизации [150, 151]. Следует отметить, что порог возникновения синхронного режима, определенный таким способом, в точности совпадает с результатами диагностики этого режима при помощи метода вспомогательной системы [65, 343], известными ранее, что подтверждает его корректность и делает возможным его применение для обнаружения новых явлений и закономерностей. В настоящей главе диссертационной работы он применяется для исследования возможности возникновения обобщенной синхронизации во взаимно связанных пространственно-распределенных системах (см. следующий подраздел).

2.3.2 Обобщенная синхронизация во взаимно связанных диодах Пирса

В качестве примера пространственно-распределенных систем, связанных взаимно, рассмотрим два взаимно связанных диода Пирса, являющихся классическими моделями пучково-плазменных систем, демонстрирующих сложные пространственно-временные колебания, включая хаотические [344, 345]. Динамика диодов Пирса в рамках гидродинамического приближения описывается самосогласованной системой уравнений Пуассона, непрерывности и движения [346]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial x^2} &= -(\alpha_{1,2})^2 (\rho_{1,2} - 1), \\ \frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial t} &= -\frac{\partial(\rho_{1,2} v_{1,2})}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_{1,2}}{\partial t} &= -v_{1,2} \frac{\partial v_{1,2}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

с граничными условиями

$$v_{1,2}(0, t) = 1, \quad \rho_{1,2}(0, t) = 1, \quad \varphi_{1,2}(0, t) = 0, \quad (2.20)$$

где $\varphi_{1,2}(x, t)$ — безразмерный потенциал электрического поля, $\rho_{1,2}(x, t)$ и $v_{1,2}(x, t)$ — безразмерные плотность и скорость электронного потока ($0 \leq x \leq 1$), индексы “1” и “2” соответствуют первой и второй связанным пучково-плазменным системам, соответственно, $\alpha_1 = 2.858\pi$, $\alpha_2 = 2.860\pi$ — управляющие параметры. Взаимный тип связи между взаимодействующими диодами Пирса осуществлялся путем модификации граничных условий на правой границе системы, аналогично тому, как это делалось в работах [65, 347]

$$\varphi_{1,2}(1, t) = \varepsilon(\rho_{1,2}(x = 1, t) - \rho_{2,1}(x = 1, t)), \quad (2.21)$$

где ε — безразмерный параметр связи. Уравнения движения и непрерывности из (5.19) интегрировались численно при помощи одношаговой явной двухуровневой численной схемы с разностями против потока, а уравнение Пуассона решалось методом распространения вектора ошибки [348]. Шаги по времени и по координате были выбраны равными $\Delta t = 0.003$ и $\Delta x = 0.005$, соответственно.

Для диагностики режима обобщенной синхронизации, как и в случае систем со сосредоточенными параметрами, использовались метод расчета спектра показателей Ляпунова, описанный в подразделе 2.3.1, и метод ближайших соседей, также адаптированный с учетом пространственной распределенности взаимодействующих систем. На рисунке 2.12,а приведены зависимости четырех старших показателей Ляпунова от параметра связи ε , рассчитанных при помощи предложенного метода. Из рисунка видно, что также, как и в случае взаимно связанных систем с сосредоточенными параметрами, при изменении параметра связи между системами два показателя Ляпунова практически не меняются: один показатель Ляпунова Λ_1 всегда (за исключением окон периодичности) остается положительным и всегда имеется один нулевой показатель Ляпунова Λ_3 . В то же самое время, два показателя Ляпунова (изначально положительный Λ_2 и изначально нулевой Λ_4) зависят от параметра связи и при превышении параметром связи некоторых критических значений становятся отрицательными. Можно предположить, что по аналогии с системами с малым числом степеней свободы переход положительного показателя Ляпунова Λ_2 в область отрицательных значений (что происходит в исследуемой системе при $\varepsilon = \varepsilon_c = 0.078$) связан с возникновением режима обобщенной синхронизации во взаимно связанных диодах Пирса.

Для подтверждения сделанного предположения воспользуемся методом ближайших соседей. Для характеристики степени близости состояний взаимодействующих систем, как и в случае сосредоточенных систем, использовалась количественная мера d , определяемая выражением (1.4). В качестве векторов состояния взаимодействующих систем были выбраны $\mathbf{u}_{1,2}(x, t) = (\rho_{1,2}, v_{1,2}, \varphi_{1,2})^T$, норма которых $\|\cdot\|$ вычислялась следующим образом

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\int_0^L \rho^2 dx + \int_0^L \varphi^2 dx + \int_0^L v^2 dx}. \quad (2.22)$$

На рисунке 2.12,б приведена зависимость количественной меры d от параметра связи ε . Нетрудно заметить, что при увеличении ε величина

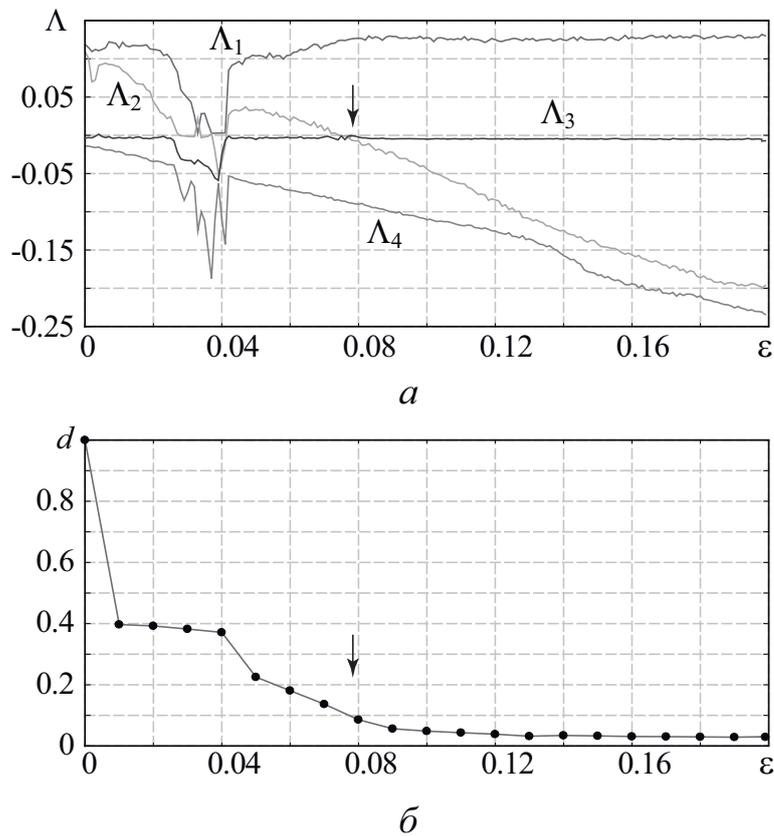


Рисунок 2.12 — Зависимость четырех старших показателей Ляпунова (а) и количественной меры d (б) от параметра связи ε . Значение параметра связи $\varepsilon_c = 0.078$, соответствующее возникновению обобщенной синхронизации, отмечено стрелкой на обоих рисунках

d монотонно уменьшается от 1 до 0, при этом ε_c приходится примерно на середину спадающего участка $\varepsilon \in [0.04; 0.12]$, что свидетельствует о наступлении режима обобщенной синхронизации в системе. При этом, следует отметить, что режим обобщенной синхронизации в данном случае отличается от режима полной синхронизации (при указанных значениях управляющих параметров полная синхронизация наступает при $\varepsilon \approx 0.17$).

Важным дополнительным доказательством существования режима обобщенной синхронизации во взаимно связанных пространственно-распределенных системах является поведение ближайших соседей в фазовом пространстве взаимодействующих систем. На рисунке 2.13 приведены восстановленные аттракторы взаимодействующих диодов Пирса на плоскости $(\rho_{1,2}(x = 0.2, t), \rho_{1,2}(x = 0.6, t))$ при различных значениях параметра связи ε . Также, как и в случае систем с малым числом степеней свободы, на аттракторах первой системы (рисунок 2.13, а, в, д) при-

ведены три случайно выбранные точки и их ближайшие соседи³. Рисунки 2.13,б,г,е иллюстрируют соответствующие им состояния в фазовом пространстве второй системы.

Нетрудно заметить, что при малых значениях параметра связи ($\varepsilon = 0.002$) все точки в фазовом пространстве второй системы распределены случайным образом по всему аттрактору (рисунок 2.13,б). При увеличении силы связи эти точки начинают группироваться в ограниченной области аттрактора (что соответствует реализации фазовой синхронизации), причем с ростом параметра связи радиус этой области уменьшается (сравните рисунки 2.13,г,е). При $\varepsilon > \varepsilon_{LE}$ все состояния второй пучково-плазменной системы, соответствующие ближайшим соседям первого диода Пирса, оказываются также близкими и наоборот (рисунок 2.13,д,е), что еще раз подтверждает возникновение обобщенной синхронизации.

Таким образом, в рассмотренном случае пространственно-распределенных систем с взаимным типом связи, также, как и в случае взаимно связанных систем с малым числом степеней свободы, возникновение режима обобщенной синхронизации обусловлено переходом второго по старшинству показателя Ляпунова в область отрицательных значений. Как и в случае систем с однонаправленным типом связи, порог возникновения обобщенной синхронизации во взаимно связанных диодах Пирса ε_{LE} предшествует установлению полной синхронизации.

2.4 Обобщенная синхронизация в сетях связанных нелинейных элементов

Теперь рассмотрим объекты более высокого уровня сложности — сети связанных нелинейных элементов и проанализируем возможность возникновения обобщенной синхронизации в таких системах. Как отме-

³Поиск ближайших соседей осуществлялся в каждой точке пространства взаимодействия исследуемых бесконечномерных систем.

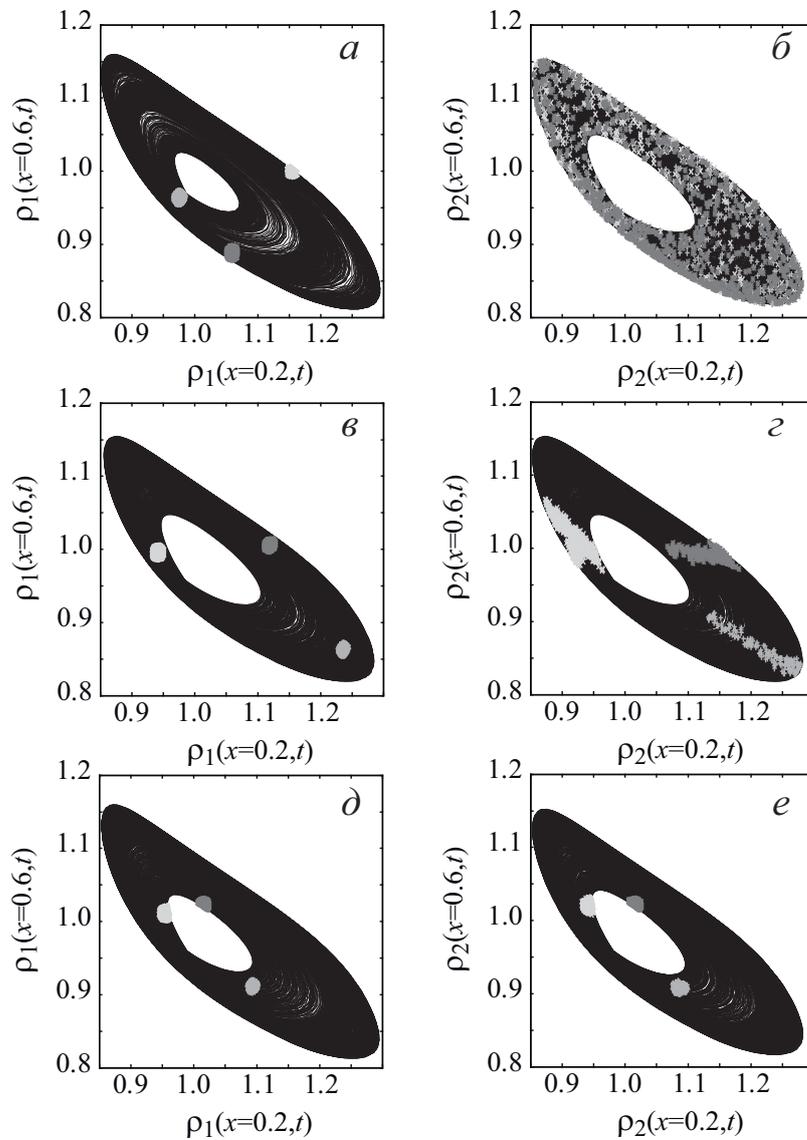


Рисунок 2.13 — Восстановленные аттракторы взаимно связанных диодов Пирса на плоскости $(\rho_{1,2}(x = 0.2, t), \rho_{1,2}(x = 0.6, t))$ при различных значениях параметра связи: $(a, б)$ $\varepsilon = 0.002$ (асинхронное состояние), (b, z) $\varepsilon = 0.05$ (режим фазовой синхронизации), (d, e) $\varepsilon = 0.10$ (режим обобщенной синхронизации). На рисунках (a, b, d) приведены восстановленные аттракторы первого диода Пирса с тремя случайно выбранными точками и их ближайшими соседями. Рисунки (b, z, e) иллюстрируют соответствующие им состояния в фазовом пространстве второй системы

чалось во введении, в сетях связанных нелинейных элементов присутствует, как правило, взаимный тип межэлементных связей (если только не рассматривается специально сконструированный тип сетей с односторонними связями [349]), так как все элементы сети действуют друг на друга, если не непосредственно, то, по крайней мере, опосредованно, через соседние (промежуточные) элементы. Соответственно, анализ сложных сетей может быть рассмотрен как расширение разработанной концепции обобщенной синхронизации в двух системах с взаимным типом связей на более общий случай. Поэтому, как и в случае двух односторонне и взаимно связанных систем, под обобщенной синхронизацией сети будем понимать установление уникального функционального соотношения между всеми элементами этой сети, которое в данном случае переписывается в виде

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_i(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)] = 0, \quad (2.23)$$

где N — число элементов сети, $\mathbf{x}_i(t)$ — вектор состояния i -того элемента сети. Понятно, что соотношения (1.1) и (2.1) могут быть рассмотрены как частные случаи (2.23), когда $N = 2$, а вся концепция обобщенной синхронизации в двух системах с взаимным типом связи — как упрощенный случай концепции обобщенной синхронизации в сложных сетях.

Распространяя концепцию обобщенной синхронизации в двух взаимно связанных системах на сети связанных нелинейных элементов, можно сказать, что под явлением обобщенной синхронизации в сложных сетях понимается такое состояние всей сети, когда координаты всех осцилляторов этой сети определяются единым образом координатами только одного произвольно выбранного узла \mathbf{x}_k . Основываясь на аргументах, приведенных в разделе 2.1, можно полагать, что для режима обобщенной синхронизации можно использовать явную форму функционального соотношения между состояниями узлов сети, которое в данном случае запишется в виде

$$\mathbf{x}_i(t^*) = \tilde{\mathbf{F}}[\mathbf{x}_k(t^*)], \quad \forall i \neq k, \quad (2.24)$$

где $t^* - \delta < t < t^* + \delta$ (δ бесконечно мало). Снова, локально в рассматриваемом диапазоне $t^* - \delta < t < t^* + \delta$ мы имеем дело с уже известным случаем. При сделанном в разделе 2.1 предположении трехмерности фазового пространства рассматриваемой системы $N_x = 3$ динамика сети будет характеризоваться следующими локальными показателями Ляпунова: $\lambda_1^k > 0$, $\lambda_2^k = 0$, $\lambda_3^k < 0$, $\lambda_{1,2,3}^i < 0 \forall i \neq k$. Другими словами, в выбранной области $3N$ -мерного фазового пространства множество, соответствующее режиму обобщенной синхронизации, характеризуется одним неустойчивым направлением \mathbf{e}^u и одним направлением с нейтральной устойчивостью \mathbf{e}^0 , лежащими внутри этого множества, в то время как все другие направления являются неустойчивыми. Эти направления соответствуют одному положительному, одному нулевому и $(3N - 2)$ отрицательным показателям Ляпунова. То же самое утверждение также корректно для других моментов времени t^* , следовательно, для сложной сети множество, соответствующее режиму обобщенной синхронизации, в каждый момент времени характеризуется одним неустойчивым направлением, одним направлением с нейтральной устойчивостью и $(3N - 2)$ устойчивыми направлениями. Таким образом, сеть связанных нелинейных элементов, демонстрирующих хаотическую динамику, находящихся в режиме обобщенной синхронизации, характеризуется спектром показателей Ляпунова, содержащим один положительный, один нулевой и $(3N - 2)$ отрицательных показателей Ляпунова.

Для подтверждения теоретических рассуждений, приведенных выше, рассмотрим сеть, состоящую из $N = 5$ осцилляторов Ресслера со слегка различающимися значениями параметра ω . Эволюция i -того узла сети ($i = 1, \dots, N$) описывается следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\omega_i y_i - z_i + \varepsilon \sum_{j=1}^N G_{ij} x_j, \\ \dot{y}_i &= \omega_i x_i + a y_i, \\ \dot{z}_i &= p + z_i (x_i - c), \end{aligned} \tag{2.25}$$

где значения управляющих параметров a , p , c выбраны теми же, что и в случае двух связанных систем Ресслера (2.4), $\omega_1 = 0.95$, $\omega_2 = 0.9525$, $\omega_3 = 0.955$, $\omega_4 = 0.9575$, $\omega_5 = 0.96$, $\mathbf{x}_i(t) = (x_i, y_i, z_i)^T$ — вектор состояния

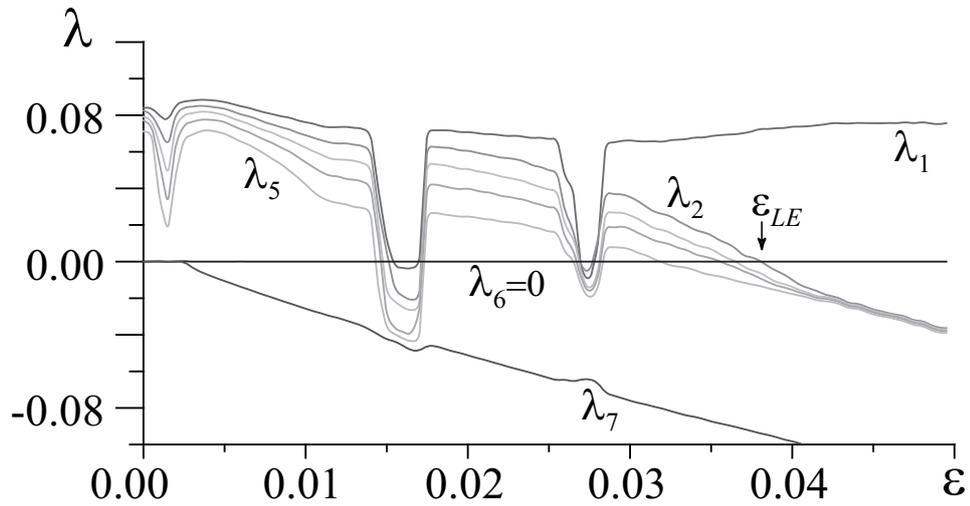


Рисунок 2.14 — Зависимости семи старших показателей Ляпунова от параметра связи ε для сети, состоящей из пяти осцилляторов Ресслера (2.25). Момент возникновения режима обобщенной синхронизации в сети ε_{LE} показан стрелкой

i -того узла сети, ε — параметр связи, G_{ij} — элемент матрицы связи \mathbf{G} . \mathbf{G} — симметричная матрица, сумма элементов в каждой строке которой равна нулю, причем G_{ij} ($i \neq j$) равен 1, если существует связь i -того и j -того узлов и равен 0 в противном случае, $G_{ii} = -\sum_{j \neq i} G_{ij}$. Топология связей между узлами сети выбрана таким образом, чтобы каждый элемент сети был связан со всеми остальными элементами этой сети.

Динамика рассматриваемой сети характеризуется $3N = 15$ показателями Ляпунова. Если связь между элементами сети отсутствует ($\varepsilon = 0$), N показателей оказываются положительными, N — отрицательными и N — нулевыми. При увеличении параметра связи ε нулевые показатели Ляпунова, а затем и положительные показатели Ляпунова, начинают постепенно переходить в область отрицательных значений. Зависимости семи старших показателей Ляпунова от параметра связи ε для рассматриваемой сети из пяти осцилляторов Ресслера приведены на рисунке 2.14. Нетрудно заметить, что при $\varepsilon_{LE} \approx 0.0385$ второй показатель Ляпунова λ_2 переходит через ноль и становится отрицательным. Можно предположить, что режим обобщенной синхронизации в рассматриваемой сети будет наблюдаться при значениях параметра связи $\varepsilon > \varepsilon_{LE}$.

Для подтверждения сделанных предположений также, как и в случае двух взаимно связанных систем, воспользуемся методом ближай-

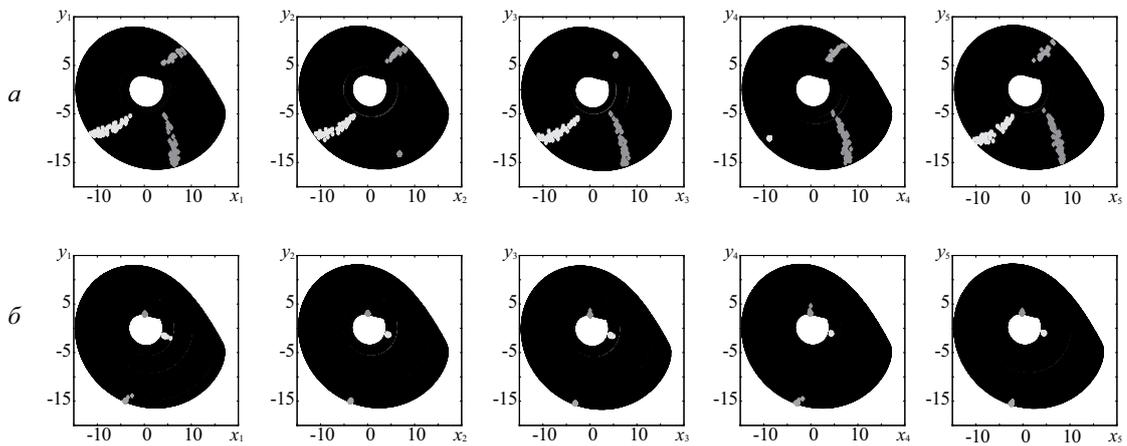


Рисунок 2.15 — Фазовые портреты пяти осцилляторов Ресслера для двух различных значений параметра связи: (а) $\varepsilon = 0.03$ (режим фазовой синхронизации) и (б) $\varepsilon = 0.04$ (режим обобщенной синхронизации)

ших соседей. На рисунке 2.15 приведены фазовые портреты всех систем Ресслера, располагающихся в узлах сети, при двух различных значениях параметра связи, ниже (рисунок 2.15, а, $\varepsilon = 0.03$) и выше (рисунок 2.15, б, $\varepsilon = 0.04$) критической точки ε_{LE} .

На фазовых портретах трех систем $\mathbf{x}_i(t)$, $i = 2 \div 4$ случайным образом выбирались три точки (одна точка для каждой системы) и находились их ближайшие соседи и соответствующие им точки во всех остальных связанных системах. При $\varepsilon = 0.03$ (рисунок 2.15, а) все точки сконцентрированы в ограниченном диапазоне аттрактора и распределены вдоль его радиуса, что свидетельствует о наличии фазовой синхронизации, но отсутствии обобщенной синхронизации. Для $\varepsilon > \varepsilon_{LE}$ (рисунок 2.15, б) все состояния всех осцилляторов оказываются близкими, что подтверждает наличие обобщенной синхронизации между элементами сети.

Покажем, что режим обобщенной синхронизации в рассматриваемой сети (2.25) отличается от режимов полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием. В виду того, что управляющие параметры взаимодействующих систем расстроены достаточно слабо, режим синхронизации с запаздыванием в данной сети оказывается близким к режиму полной синхронизации, когда состояния взаимодействующих систем полностью совпадают (с определенной степенью точности). Для диагно-

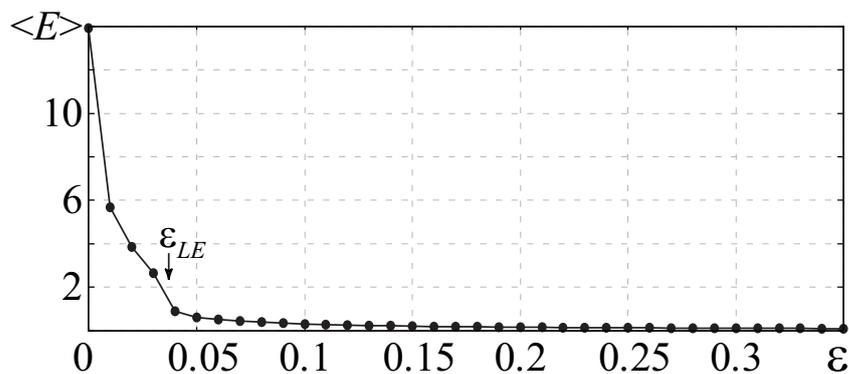


Рисунок 2.16 — Зависимость ошибки синхронизации $\langle E \rangle$ от параметра связи ε для сети из пяти осцилляторов Ресслера (2.25). Момент возникновения обобщенной синхронизации в сети ε_{LE} показан стрелкой

стики полной синхронизации в исследуемой сети производился расчет ошибки синхронизации

$$\langle E \rangle = \frac{1}{T(N-1)} \sum_{j>1} \int_t^{t+T} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1\| dt', \quad (2.26)$$

где $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — норма вектора, T — время расчета (предполагается, что переходной процесс исключен из рассмотрения). Понятно, что по аналогии со случаем двух связанных систем (формулы (1.2), (2.5)), обращение ошибки синхронизации в ноль свидетельствует о наступлении синхронного режима, в то время как в отсутствие синхронизации $\langle E \rangle > 0$. На рисунке 2.16 представлена зависимость ошибки синхронизации от параметра связи ε для рассматриваемой сети. Нетрудно заметить, что ошибка синхронизации становится близкой к нулю значительно позже порога возникновения обобщенной синхронизации. В момент наступления обобщенной синхронизации $\langle E \rangle$ оказывается положительной, что свидетельствует об отсутствии полной синхронизации в сети.

Таким образом, режим обобщенной синхронизации в сетях связанных нелинейных элементов может быть диагностирован по моменту перехода второго (положительного) показателя Ляпунова в область отрицательных значений. Теперь проанализируем влияние количества элементов и топологии сети на установление режима обобщенной синхронизации. На рисунке 2.17 приведены границы обобщенной синхронизации на плоско-

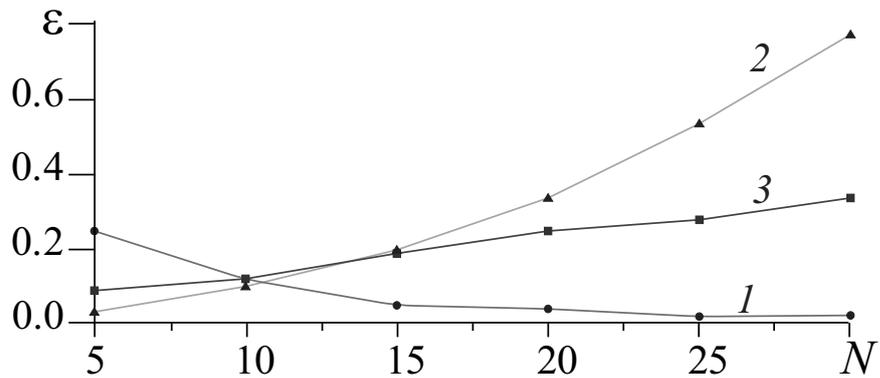


Рисунок 2.17 — Границы обобщенной синхронизации на плоскости параметров “число элементов сети N — параметр связи ε ” для случайной сети (кривая 1), регулярной сети (кривая 2) и сети типа “малый мир” (кривая 3)

сти параметров “число элементов сети N — параметр связи ε ” для сетей с различной топологией межэлементных связей. Кривая 1 соответствует случайной сети, а кривые 2 и 3 — регулярной сети и сети типа “малый мир”, соответственно. Для всех рассмотренных случаев значения управляющих параметров ω_i выбирались случайно таким образом, чтобы плотность распределения вероятности значений ω_i подчинялась гауссову закону со средним $\omega_0 = 0.95$ и дисперсией $\Delta\omega = 0.017$, что соответствует случаю относительно слабых значений параметров расстройки. Из рисунка 2.17 видно, что топология сети оказывает сильное влияние на возникновение обобщенной синхронизации. В частности, порог обобщенной синхронизации уменьшается для случайной сети, а для регулярной сети и сети типа “малый мир” он монотонно растет. Причем, для регулярной сети рост происходит значительно быстрее по сравнению с сетью типа “малый мир”.

2.5 Механизмы возникновения обобщенной синхронизации в сетях связанных нелинейных элементов

Рассмотрим механизмы, приводящие к возникновению режима обобщенной синхронизации в сложных сетях. Понятно, что все рассмот-

рения, приведенные ниже, будут справедливы также для двух взаимно связанных систем, способных демонстрировать режим обобщенной синхронизации, поскольку две взаимодействующие системы могут рассматриваться как частный (предельный) случай общего рассмотрения. Как и в случае систем с однонаправленным типом связи, для выявления механизмов возникновения синхронного режима в сложных сетях воспользуемся методом модифицированной системы (см. главу 1, а также [78, 81]).

Без потери общности для простоты рассмотрения вместо набора векторов $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$, $i = \overline{1, N}$ будем характеризовать состояние всей сети одним вектором $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_{N \cdot N_d})^T$, где $u_{3i-2} = x_i$, $u_{3i-1} = y_i$, $u_{3i} = z_i$. Размерность каждого элемента сети, как и полагалось ранее, будем считать равной $N_x = 3$, при этом все аналитическое рассмотрение может быть легко обобщено на случай систем с произвольной размерностью N_x фазового пространства динамической системы, выступающей в качестве элемента сети. Тогда рассматриваемая сеть связанных нелинейных элементов может быть рассмотрена как автономная динамическая система большой размерности, эволюция которой с течением времени определяется уравнением

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \varepsilon \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{U}. \quad (2.27)$$

Здесь вектор-функция $\mathbf{L}(\cdot)$ определяет эволюцию элементов сети в отсутствии связи, в то время как дополнительное слагаемое $\varepsilon \tilde{\mathbf{G}}$ описывает влияние топологии и силы межэлементных связей на эволюцию сети. Матрица $\tilde{\mathbf{G}}$, как и ранее, определяет структуру диссипативных связей между узлами сети, и представляет собой симметричную матрицу, сумма элементов в каждой строке которой равна нулю, $\tilde{G}_{ii} = -\sum_{j \neq i} \tilde{G}_{ij}$, а \tilde{G}_{ij} ($i \neq j$) равен 1, если u_i воздействует на u_j , и равен 0 в противном случае.

Анализируя уравнение (2.27) нетрудно заметить, что слагаемое $\varepsilon \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{U}$ вносит дополнительную диссипацию в систему. Действительно, сжатие фазового объема характеризуется дивергенцией векторного поля

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} \right) = \operatorname{div} \mathbf{L} + \varepsilon \sum_{i=1}^{N_d N} \tilde{G}_{ii}, \quad (2.28)$$

где ΔV — элементарный объем фазового пространства системы (2.27). Так как $\tilde{G}_{ii} \leq 0$, слагаемое $\varepsilon \sum_{i=1}^{N_d N} \tilde{G}_{ii}$ оказывается также отрицательным, причем диссипация в рассматриваемой сети увеличивается с ростом параметра связи ε , что приводит к упрощению собственной хаотической динамики системы (2.27).

Для характеристики сложности движения обычно рассматривают спектр показателей Ляпунова. В рассматриваемом случае предположим, что поведение системы (2.27) изначально характеризуется набором $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N N_x}$ показателей Ляпунова, причем N из них оказываются положительными (что отвечает за наличие хаотической динамики каждого элемента сети в отсутствие связи). С увеличением диссипации ε в системе часть изначально положительных показателей Ляпунова становится отрицательной, причем переход показателей Ляпунова через ноль происходит последовательно, свидетельствуя об упрощении хаотической динамики рассматриваемой системы. Когда λ_2 становится отрицательным, “степень хаотичности” сети становится минимальной, остается только один положительный показатель Ляпунова, что приводит к установлению обобщенной синхронизации в рассматриваемой сети. Действительно, как только λ_2 стал отрицательным, все системы “подстроили” свою эволюцию таким образом, что стало устанавливаться функциональное соотношение (2.23) между ними.

2.6 Выводы по главе 2

Таким образом, в настоящей главе диссертационной работы проанализирована возможность установления режима обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи — двух взаимно связанных

системах и сетях со сложной топологией межэлементных связей. Введено понятие обобщенной синхронизации в таких системах. Показано, что традиционная концепция обобщенной синхронизации однонаправленно связанных хаотических систем является частью разработанной концепции. Установлено, что возникновение обобщенной синхронизации в системах, демонстрирующих хаотическую динамику, связано с переходом второго показателя Ляпунова в область отрицательных значений, что может быть интерпретировано как переход динамической системы с большой размерностью фазового пространства от гиперхаотических колебаний к хаотическим. Полученные результаты подтверждены при помощи метода ближайших соседей. При этом установлено, что метод вспомогательной системы, являющийся одним из распространенных методов анализа обобщенной синхронизации в системах с однонаправленным типом связи, для взаимно связанных систем приводит к некорректным результатам.

Разработанная теория оказывается справедливой для различных систем как с малым числом степеней свободы (поточковые динамические системы, дискретные отображения), так и пространственно-распределенных сред, находящихся в режиме пространственно-временного хаоса, характеризующихся одним положительным показателем Ляпунова (связанные гидродинамические модели диодов Пирса). Для систем с пространственно-распределенными параметрами разработан метод расчета спектра показателей Ляпунова, благодаря применению которого к системе двух взаимно связанных диодов Пирса, удалось диагностировать обобщенную синхронизацию в этой системе.

Полученные результаты свидетельствуют об их высокой степени общности. Можно ожидать, что те же самые механизмы будут наблюдаться в реальных системах. В частности, полученные результаты могут быть обобщены на системы с любой размерностью фазового пространства.

Глава 3

Новый подход к анализу обобщенной синхронизации: метод фазовых трубок

[122, 154–158, 259, 263, 265], [202, 205, 221, 227, 236, 237]

Как упоминалось в главах 1-2, традиционная концепция обобщенной синхронизации однонаправлено и взаимно связанных систем и сетей связанных нелинейных элементов подразумевает наличие функционального соотношения между их состояниями. В настоящей главе диссертационной работы изложены результаты исследований, показывающие, что традиционная концепция обобщенной синхронизации таких систем нуждается в корректировке и уточнении, что, к счастью, не влияет ни качественно, ни количественно на корректность и работоспособность методов диагностики этого режима и механизмов его возникновения, а следовательно, и на результаты, изложенные в предыдущих главах. Покажем необходимость пересмотра и уточнения существующей концепции обобщенной синхронизации путем рассмотрения различных классов динамических систем, демонстрирующих хаотическую динамику.

3.1 Пересмотр и уточнение существующей концепции обобщенной синхронизации применительно к потокowym системам

Начнем рассмотрение с потокowych динамических систем. Для этого рассмотрим поведение двух однонаправлено связанных хаотических

систем, ведущей $\mathbf{x}(t)$ и ведомой $\mathbf{u}(t)$, динамика которых описывается системой уравнений (1.5). Как отмечалось в главе 1, если взаимодействующие однонаправленно связанные системы находятся в режиме обобщенной синхронизации, между ними устанавливается функциональное соотношение (1.1), которое для потоковых динамических систем запишется в виде

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)]. \quad (3.1)$$

Покажем необходимость пересмотра и уточнения существующей концепции обобщенной синхронизации в данном случае. Для этого предположим, что взаимодействующие системы находятся в режиме обобщенной синхронизации и рассмотрим в качестве опорного состояния две точки $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ и $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$, принадлежащие аттракторам ведущей и ведомой систем, соответственно. Тогда, согласно методу ближайших соседей (см. главу 1), для ближайшей точки $\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i$ ведущей системы такой, что $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ ее образ $\mathbf{u}(t_i) = \mathbf{u}_i$ в ведомой системы оказывается также близким к опорной точке \mathbf{u}_0 (более подробно см. [67] или главу 1), то есть $\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0\| < \delta(\varepsilon)$. Линеаризуя уравнение (3.1) в окрестности опорного состояния, можно получить следующее уравнение

$$\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0 = J\mathbf{F}[\mathbf{x}_0](\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0), \quad (3.2)$$

где $J\mathbf{F}[\mathbf{x}_0]$ — матрица Якоби. Так как вид функционального соотношения $\mathbf{F}[\cdot]$ в большинстве случаев не может быть найден в явном виде, уравнение (3.2) можно переписать в виде

$$\delta\mathbf{u}_i = \mathbf{A}\delta\mathbf{x}_i, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{A} = J\mathbf{F}[\mathbf{x}_0]$ — неизвестная матрица, а $\delta\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$, $\delta\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0$ — векторы, характеризующие отклонение рассматриваемых точек \mathbf{x}_i , \mathbf{u}_i от опорных состояний \mathbf{x}_0 и \mathbf{u}_0 , соответственно. Далее, без потери общности предположим, что размерности фазового пространства ведущей и ведомой систем одинаковы и равны m .

Несмотря на то, что коэффициенты матрицы \mathbf{A} оказываются неизвестными, справедливость соотношения (3.3) может быть легко проверена, если существует $N > m$ ближайших соседей \mathbf{x}_i опорной точки

\mathbf{x}_0 ведущей системы и соответствующие им точки \mathbf{u}_i ведомой системы. Проверив наличие обобщенной синхронизации (например, при помощи метода вспомогательной системы или расчета спектра условных показателей Ляпунова), можно выбрать m ближайших соседей \mathbf{x}_i ($i = 1, \dots, m$) и соответствующие им векторы \mathbf{u}_i для определения коэффициентов a_{ij} матрицы \mathbf{A} при помощи соотношения (3.3). Чтобы минимизировать вычислительную ошибку, нужно выбрать такие векторы $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})^T$ (и $\delta\mathbf{x}_i = (\delta x_{i1}, \dots, \delta x_{im})^T$, соответственно) из всего набора N векторов, для которых

$$|\det(\mathbf{X})| = \max, \quad (3.4)$$

где

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \delta x_{11} & \delta x_{12} & \dots & \delta x_{1m} \\ \delta x_{21} & \delta x_{22} & \dots & \delta x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta x_{m1} & \delta x_{m2} & \dots & \delta x_{mm} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Зная матрицу \mathbf{A} , можно найти векторы $\delta\mathbf{z}_i$, ($i = m + 1, \dots, N$) как

$$\delta\mathbf{z}_i = \mathbf{A}\delta\mathbf{x}_i, \quad (3.6)$$

и сравнить их с векторами $\delta\mathbf{u}_i$ ведомой системы (можно также сравнивать векторы $\mathbf{z}_i = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{z}_i$ с векторами \mathbf{u}_i) для проверки справедливости соотношения (3.3).

Несмотря на кажущееся на первый взгляд отсутствие фундаментальных причин, приводящих к невыполнению соотношения (3.3), на самом деле уравнение (3.3) оказывается несправедливым. Для иллюстрации этой особенности, рассмотрим поведение двух однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера (1.15) при тех же значениях управляющих параметров a, p, c, ω_u (см. стр. 61), $\omega_x = 0.99$ и $D_1 = D_2 = 0$. Как было показано в подразделе 1.2.2.2, при выбранных значениях управляющих параметров режим обобщенной синхронизации возникает при $\varepsilon_{GS} \approx 0.11$.

Выберем случайным образом опорную точку \mathbf{x}_0 на хаотическом аттракторе ведущей системы и найдем ее ближайших соседей \mathbf{x}_i ($i =$

$1, \dots, N$) и их образы \mathbf{u}_i в фазовом пространстве ведомой системы. Далее в соответствии с соотношениями (3.4) и (3.5)) найдем векторный базис \mathbf{x}_{1-3} для определений коэффициентов матрицы \mathbf{A} и проверки выполнения условия (3.3) при помощи соотношения (3.6) и оставшихся векторов $\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, (i = 4, \dots, N)$.

На рисунке 3.1 приведены векторы $\mathbf{z}_i (i = 4, \dots, 10)$, полученные при помощи соотношения (3.6), и векторы \mathbf{u}_i ведомой системы при значении параметра связи $\varepsilon = 0.3$. Величина параметра связи значительно превосходит пороговое значение ε_{GS} установления обобщенной синхронизации, синхронный режим является устойчивым, а следовательно, соотношение (3.3) должно выполняться. Однако, как видно из рисунка 3.1, вопреки ожиданиям, векторы \mathbf{z}_i и \mathbf{u}_i достаточно сильно отличаются друг от друга, что говорит о невыполнении соотношения (3.3). В самом деле, невыполнение соотношения (3.3) наблюдается также для других опорных точек ведущей системы Ресслера, а также для других хаотических динамических систем (например, осцилляторов Лоренца). Так как уравнение (3.3) является линеаризацией уравнения (3.1), невыполнение соотношения (3.3) является следствием несправедливости соотношения (3.1), являющегося основным определением концепции обобщенной синхронизации. Однако, множество результатов в области обобщенной синхронизации находится в хорошем соответствии с традиционной концепцией обобщенной синхронизации [67], что говорит о том, что эта концепция работает при определенных условиях, но, в общем случае, должна быть пересмотрена.

Основная идея этой корректировка следующая. Состояние ведомой системы $\mathbf{u}(t)$ зависит не только от состояния ведущей системы $\mathbf{x}(t)$ в момент времени t , но и от истории эволюции ведущей системы в течение интервала времени $(t - \tau, t]$. В самом деле, в соответствии с концепцией обобщенной синхронизации, наличие синхронизации означает, что ведомая система $\mathbf{u}(t)$ приходит в состояние, однозначно определяемое ведущей системой, причем время установления синхронного режима τ связано с величиной старшего условного показателя Ляпунова λ_1^u , то

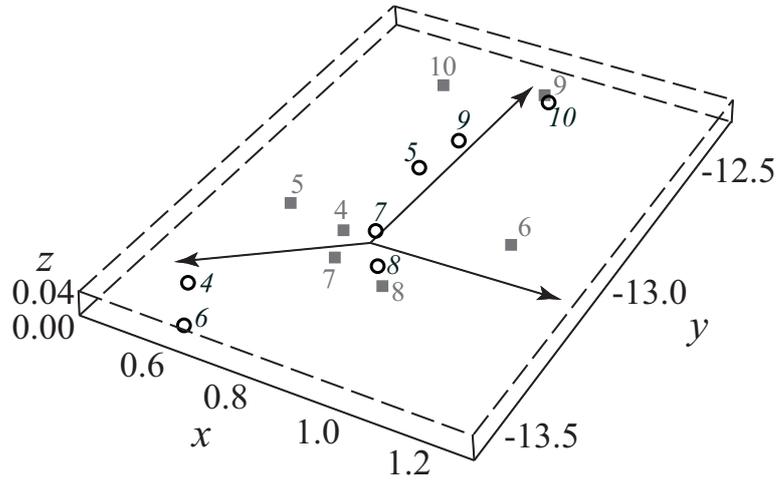


Рисунок 3.1 — Векторы \mathbf{u}_i (■) и \mathbf{z}_i (○) ведомой системы Ресслера (1.15) при $\varepsilon = 0.3$. Номера i векторов показаны прямым шрифтом и курсивом, соответственно

есть $\tau \sim 1/|\lambda_1^x|$. Другими словами, $\mathbf{F}[\cdot]$ в соотношении (3.1) должно рассматриваться как функционал, а не как функциональное соотношение. Понятно, что в данном случае соотношение (3.3), полученное при предположении, что $\mathbf{F}[\cdot]$ является функциональным соотношением, как было показано выше, не выполняется (см. рисунок 3.1).

Если рассматривать $\mathbf{F}[\cdot]$ как функционал, нужно заменить уравнение (3.2) уравнением

$$\delta \mathbf{u}_i(t) = \int_{t-\tau}^t J\mathbf{F}[\mathbf{x}_0(s)] \delta \mathbf{x}_i(s) ds. \quad (3.7)$$

Полагая, что отклонение $\delta \mathbf{x}_i(s)$ от опорной траектории $\mathbf{x}_0(s)$ ($t - \tau < s \leq t$) является малым, в силу линейности можно записать

$$\delta \mathbf{x}_i(s) = \mathbf{B}(s) \delta \mathbf{x}_i(t), \quad t - \tau < s < t, \quad (3.8)$$

(где $\mathbf{B}(s)$ — матрица с коэффициентами, зависящими от времени), что приводит к

$$\delta \mathbf{u}_i(t) = \int_{t-\tau}^t J\mathbf{F}[\mathbf{x}_0(s)] \mathbf{B}(s) \delta \mathbf{x}_i(t) ds \quad (3.9)$$

и, как следствие, к

$$\delta \mathbf{u}_i(t) = \mathbf{C}(t) \delta \mathbf{x}_i(t), \quad (3.10)$$

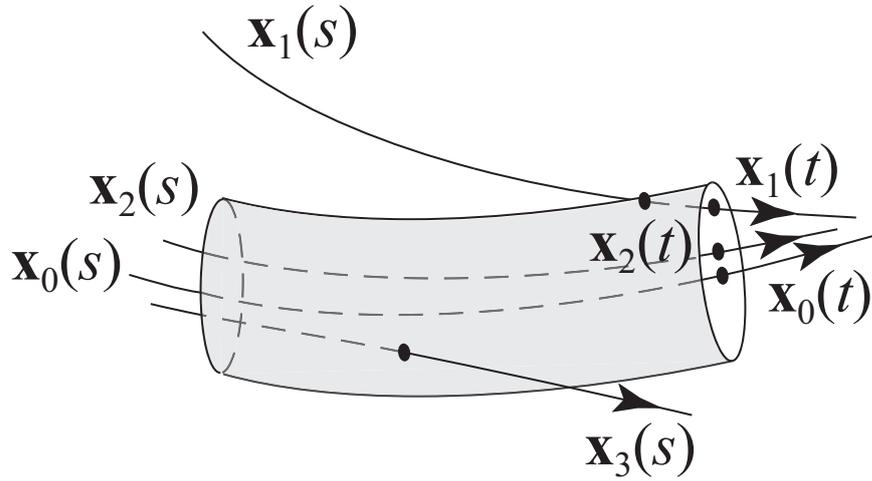


Рисунок 3.2 — Схематическое представление близких векторов $\mathbf{x}_i(t)$, фазовых траекторий $\mathbf{x}_i(s)$ и фазовой трубки $\mathbb{T}_\tau(t)$

где $\mathbf{C}(t)$ — квадратная матрица размерности $(m \times m)$, определяемая как

$$\mathbf{C}(t) = \int_{t-\tau}^t \mathbf{JF}[\mathbf{x}_i(s)] \mathbf{B}(s) ds. \quad (3.11)$$

Таким образом, уравнение (3.10) по своей форме совпадает с уравнением (3.3), а следовательно, может быть проверено путем вычисления векторов \mathbf{z}_i также, как это делалось для уравнения (3.3). В то же самое время, уравнение (3.3) было получено при предположении, что векторы $\mathbf{x}_0(t)$ и $\mathbf{x}_i(t)$ близки друг к другу, в то время как уравнение (3.10) получено при более строгом ограничении, требующем близости траекторий $\mathbf{x}_0(s)$ и $\mathbf{x}_i(s)$ в течение интервала времени $t - \tau < s \leq t$. Так как для хаотических динамических систем фазовые траектории могут сходиться в одном направлении фазового пространства, а расходиться в другом, близкие векторы $\mathbf{x}_0(t)$ и $\mathbf{x}_i(t)$ могут характеризоваться совершенно различными фазовыми траекториями $\mathbf{x}_0(s)$ и $\mathbf{x}_i(s)$ для $t - \tau < s \leq t$. Схематическое представление такой ситуации представлено на рисунке 3.2. Хотя векторы $\mathbf{x}_1(t)$ и $\mathbf{x}_2(t)$ близки к опорной точке $\mathbf{x}_0(t)$, только вектор $\mathbf{x}_2(t)$ подчиняется соотношению (3.10) в связи с близостью фазовых траекторий $\mathbf{x}_0(s)$ и $\mathbf{x}_2(s)$, в то время как для вектора $\mathbf{x}_1(t)$ соотношение (3.10) не выполняется, так как фазовая траектория $\mathbf{x}_1(s)$ не является близкой к опорной траектории $\mathbf{x}_0(s)$ в течение всего интервала времени $t - \tau < s \leq t$. Следовательно, для подтверждения соотношения (3.10)

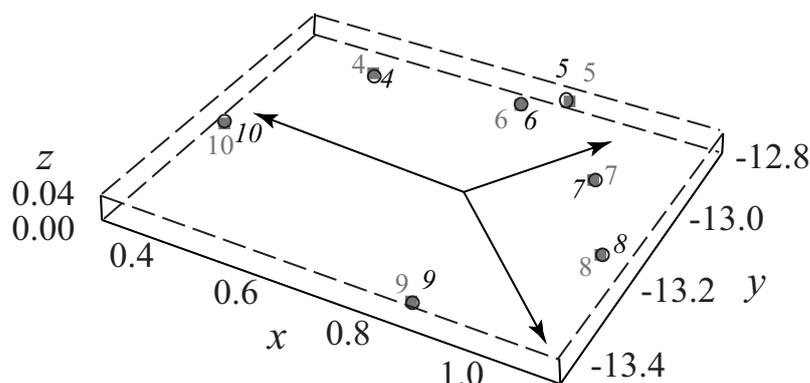


Рисунок 3.3 — Векторы \mathbf{u}_i (■) и \mathbf{z}_i (○) ведомой системы Ресслера (1.15) при $\varepsilon = 0.3$, длина фазовой трубки $\tau = 100$. Номера i векторов показаны прямым шрифтом и курсивом, соответственно

необходимо рассматривать не все векторы $\mathbf{x}_i(t)$, близкие к опорной точке $\mathbf{x}_0(t)$, а только те векторы, которые характеризуются фазовыми траекториями $\mathbf{x}_i(s)$, оказывающимися близкими к опорной траектории $\mathbf{x}_0(s)$. Основываясь на идее петель в фазовом пространстве [350, 351], для исключения ненужных векторов (аналогичных $\mathbf{x}_1(t)$ на рисунке 3.2) введем в рассмотрение понятие фазовой трубки

$$\mathbb{T}_\tau(t) = \{\mathbf{x} : |x_{0j}(s) - x_j| < d_j|_{j=1}^m, s \in [t - \tau; t]\} \quad (3.12)$$

и будем рассматривать только те векторы, фазовые траектории которых проходят через эту фазовую трубку (как, например, $\mathbf{x}_2(t)$ на рисунке 3.2).

Результаты исследования систем Ресслера (1.15) при тех же значениях управляющих параметров и силы связи между системами приведены на рисунке 3.3, длина фазовой трубки была выбрана $\tau = 100$. Видно, что вычисленные векторы $\mathbf{z}_i(t)$ находятся в отличном соответствии с векторами $\mathbf{u}_i(t)$ ведомой системы Ресслера, что подтверждает как справедливость соотношения (3.10), так и, как следствие, утверждение о том, что $\mathbf{F}[\cdot]$ является функционалом, а не функциональным соотношением.

При увеличении силы связи между хаотическими системами абсолютная величина старшего условного показателя Ляпунова λ_1^u увеличивается, в то время как временной интервал τ (необходимая длина фазовой трубки $\mathbb{T}_\tau(t)$), наоборот, уменьшается. В режимах полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием величина τ стремится

к нулю. Поэтому, в этих режимах соотношение (3.3) выполняется для всех ближайших соседей $\mathbf{x}_i(t)$ без каких-либо дополнительных требований к близости фазовых траекторий. Иными словами, векторы состояний любых хаотических динамических систем, находящихся в режиме обобщенной синхронизации (но не в режиме полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием), связаны друг с другом при помощи функционала, в то время как в режимах полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием (которые являются сильными формами обобщенной синхронизации) они связаны между собой при помощи функционального соотношения.

Хотя метод фазовых трубок был применен к модельным системами, можно ожидать, что он сможет найти применение и в других фундаментальных и практических задачах. Так как статистика разностей между векторами $\delta \mathbf{u}_i(t)$ и $\delta \mathbf{z}_i(t)$ оказывается абсолютно различной для синхронных и асинхронных режимов (см. рисунок 3.4), важной особенностью этого подхода является возможность рассмотрения соотношения между векторами (3.10) для анализа экспериментальных данных (векторных или скалярных, при помощи метода Таккенса [149]), когда другие классические методы диагностики обобщенной синхронизации оказываются неприменимыми или неточными. Более того, предложенный подход может использоваться как метод диагностики обобщенной синхронизации даже в том случае, когда взаимодействующие системы связаны взаимно (см. главу 2), так как все вышеприведенные аргументы также применимы и к случаю взаимной связи.

Для подтверждения общности приведенных рассуждений рассмотрим поведение двух взаимно связанных генераторов Кияшко-Пиковского-Рабиновича (2.6), рассмотренных в главе 2, с теми же значениями управляющих параметров. Как отмечалось в подразделе 2.2.2, режим обобщенной синхронизации в данном случае возникает при $\varepsilon_{GS} = 0.078$. Как и в случае систем Ресслера, рассмотренных выше, выберем случайным образом опорную точку \mathbf{x}_0 хаотического аттрактора первой системы и проанализируем поведение ее ближайших соседей \mathbf{x}_i ($i = 1, \dots, N$) и

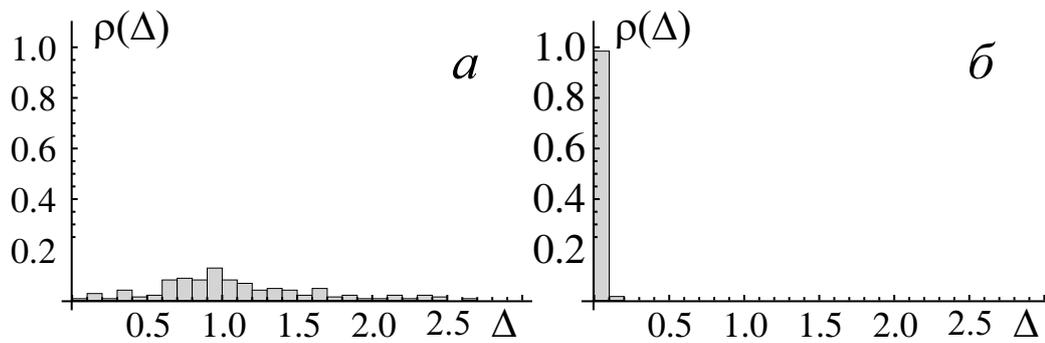


Рисунок 3.4 — Гистограммы нормированных разностей $\Delta = \|\delta \mathbf{u}_i(t) - \delta \mathbf{z}_i(t)\| / \|\delta \mathbf{u}_i(t)\|$ для (а) асинхронного режима, $\varepsilon = 0.06$ и (б) режима обобщенной синхронизации, $\varepsilon = 0.3$. Гистограммы получены для ведомой системы Ресслера (1.15), длина фазовой трубки $\tau = 100$

соответствующих им векторов \mathbf{u}_i и \mathbf{z}_i . Выбор векторного базиса \mathbf{x}_{1-3} осуществлялся также, как и в рассмотренном выше случае.

На рисунке 3.5 приведены векторы \mathbf{u}_i (■) и \mathbf{z}_i (○) второго генератора Кияшко-Пиковского-Рабиновича (2.6) при значении параметра связи $\varepsilon = 0.15$, значительно превышающим пороговое значение ε_{GS} установления режима обобщенной синхронизации. Рисунок 3.5,а соответствует случаю, когда используются все ближайшие соседи, в то время как на рисунке 3.5,б приведены только те векторы, фазовые траектории которых проходят через фазовую трубку длиной $\tau = 110$. Видно, что в первом случае векторы \mathbf{z}_i и \mathbf{u}_i достаточно сильно отличаются друг от друга, что говорит об отсутствии функционального соотношения между взаимодействующими системами. Однако, напротив, для фазовой трубки длиной $\tau = 110$ (рисунок 3.5,б) вычисленные векторы $\mathbf{z}_i(t)$ находятся в отличном соответствии с векторами $\mathbf{u}_i(t)$ второго генератора, что подтверждает результаты, полученные выше для однонаправлено связанных систем Ресслера. Таким образом, в потоковых системах с взаимной связью векторы состояния взаимодействующих систем также связаны между собой при помощи функционала (см. также [154]).

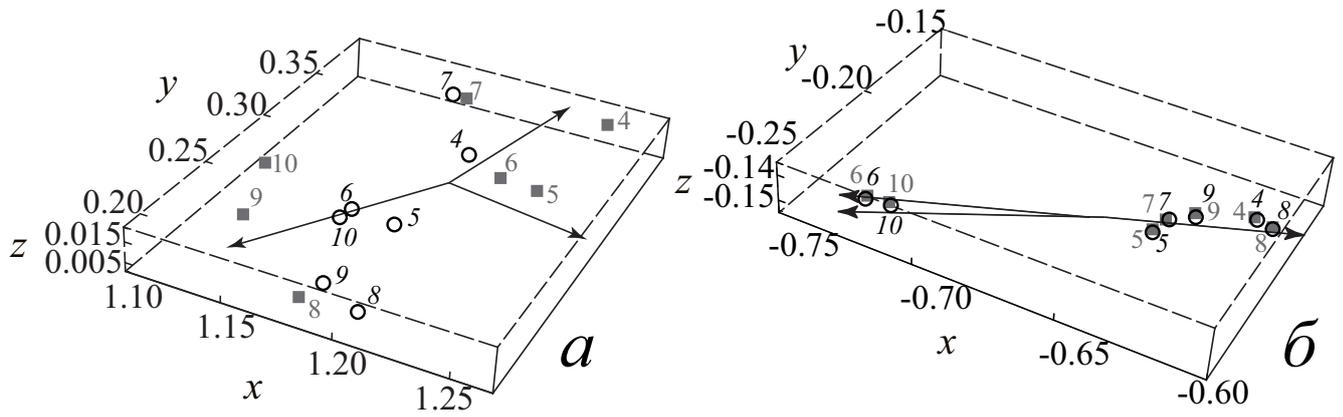


Рисунок 3.5 — Векторы \mathbf{u}_i (■) и \mathbf{z}_i (○) второго генератора Кияшко-Пиковского-Рабиновича (2.6) при $\varepsilon = 0.15$. Номера i векторов показаны прямым шрифтом и курсивом, соответственно. (а) Используются все ближайшие соседи; (б) используются только те векторы, фазовые траектории которых проходят через трубку длиной $\tau = 110$

3.2 Обобщение разработанной концепции на системы с дискретным временем

Расширим подход к анализу обобщенной синхронизации, изложенный в разделе 3.1, на случай систем с дискретным временем, связанных как однонаправлено, так и взаимно. Можно предположить, что как и в случае потоковых динамических систем, состояния взаимодействующих дискретных отображений, находящихся в режиме обобщенной синхронизации, будут связаны между собой при помощи функционала.

Прежде всего, по аналогии с предыдущим разделом модифицируем теорию обобщенной синхронизации в дискретных отображениях. В этом случае соотношение

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{F}[\mathbf{x}_n], \quad (3.13)$$

(являющееся частным случаем (1.1) применительно к дискретным отображениям), традиционно используемое для определения обобщенной синхронизации в однонаправлено связанных системах, должно быть переписано в виде

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{F}[\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}, \dots, \mathbf{x}_{n-K}], \quad (3.14)$$

где \mathbf{x}_n и \mathbf{u}_n — векторы состояния ведущей и ведомой систем, соответственно, K — дискретная длина предыстории, достаточная для определения состояния ведомого отображения \mathbf{u}_n . Эволюция векторов \mathbf{x}_n и \mathbf{u}_n описывается в общем виде системой уравнений

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_n, \mathbf{g}_x), \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{G}(\mathbf{u}_n, \mathbf{g}_u) + \sigma \mathbf{P}(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n),\end{aligned}\tag{3.15}$$

где \mathbf{H} и \mathbf{G} — операторы эволюции рассматриваемых систем с дискретным временем, \mathbf{g}_x и \mathbf{g}_u — векторы управляющих параметров, \mathbf{P} — оператор связи, σ — параметр связи. Далее без потери общности предположим, что размерности фазового пространства взаимодействующих систем являются идентичными и равными m .

Пусть \mathbf{x}_N и \mathbf{u}_N — опорные состояния, принадлежащие аттракторам ведущего и ведомого отображений, находящихся в режиме обобщенной синхронизации, соответственно. Предположим также, что $\delta \mathbf{u}_{Jk} = \mathbf{u}_{J-k} - \mathbf{u}_{N-k}$ и $\delta \mathbf{x}_{Jk} = \mathbf{x}_{J-k} - \mathbf{x}_{N-k}$ ($k = 0, \dots, K$) — векторы, характеризующие отклонения рассматриваемых траекторий \mathbf{x}_{J-k} , \mathbf{u}_{J-k} от опорных траекторий \mathbf{x}_{N-k} и \mathbf{u}_{N-k} . Для ближайшей точки \mathbf{x}_J ведущей системы такой, что $\|\delta \mathbf{x}_J\| = \|\delta \mathbf{x}_{J0}\| < \varepsilon$ ее образ \mathbf{u}_J в ведомой системе будет также близким к опорному состоянию \mathbf{u}_N (более подробно см. [67]), то есть, $\|\delta \mathbf{u}_J\| = \|\delta \mathbf{u}_{J0}\| < \delta(\varepsilon)$. Полагая, что

$$\|\delta \mathbf{x}_{Jk}\| < \varepsilon, \quad k = 0, \dots, K\tag{3.16}$$

и линеаризуя уравнение (3.14), можно получить, что

$$\delta \mathbf{u}_J = \sum_{k=0}^K J_{\mathbf{x}_{N-k}} \mathbf{F}[\mathbf{x}_N, \dots, \mathbf{x}_{N-K}] \delta \mathbf{x}_{Jk},\tag{3.17}$$

где $J_{\mathbf{x}_{N-k}}$ — оператор Якоби для k -той переменной. Так как соотношение $\mathbf{F}[\cdot]$ не может быть найдено в явном виде, уравнение (3.17) можно переписать в виде

$$\delta \mathbf{u}_J = \sum_{k=0}^K \mathbf{A}_k \delta \mathbf{x}_{Jk},\tag{3.18}$$

где $\mathbf{A}_k = J_{\mathbf{x}_{N-k}} \mathbf{F}[\mathbf{x}_N, \dots, \mathbf{x}_{N-K}]$ ($k = 0, \dots, K$) — неизвестные матрицы. Очевидно, что коэффициенты матрицы \mathbf{A}_k определяются полным

набором векторов $\mathbf{x}_{N-K}, \dots, \mathbf{x}_N$, но, так как элементы этой последовательности однозначно связаны друг с другом при помощи оператора эволюции (3.15), можно предположить, что \mathbf{A}_k зависит только от \mathbf{x}_{N-K} , то есть $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k(\mathbf{x}_{N-K})$.

При сделанном предположении (3.16) в силу линейности можно записать

$$\delta \mathbf{x}_{Jk} = \mathbf{B}_k(\mathbf{x}_{N-K}) \delta \mathbf{x}_J \quad (3.19)$$

[где $\mathbf{B}_k(\mathbf{x}_{N-K})$ — неизвестная матрица¹, коэффициенты которой зависят как от опорного вектора \mathbf{x}_{N-K} , так и k рассматриваемых векторов отклонений $\delta \mathbf{x}_{Jk}$], что приводит к

$$\delta \mathbf{y}_J = \sum_{k=0}^K \mathbf{A}_k(\mathbf{x}_{N-K}) \mathbf{B}_k(\mathbf{x}_{N-K}) \delta \mathbf{x}_J, \quad (3.20)$$

и, как следствие, к

$$\delta \mathbf{u}_J = \mathbf{C} \delta \mathbf{x}_J, \quad (3.21)$$

где \mathbf{C} — матрица, определяемая как

$$\mathbf{C} = \sum_{k=0}^K \mathbf{A}_k(\mathbf{x}_{N-K}) \mathbf{B}_k(\mathbf{x}_{N-K}). \quad (3.22)$$

Следует отметить, что в рамках традиционной концепции обобщенной синхронизации, подразумевающей, что состояния взаимодействующих систем связаны друг с другом при помощи функционального соотношения (3.13), можно получить аналогичное (3.21) соотношение

$$\delta \mathbf{u}_J = \tilde{\mathbf{C}} \delta \mathbf{x}_J, \quad (3.23)$$

с единственным отличием, что

$$\tilde{\mathbf{C}} = J\mathbf{F}[\mathbf{x}_n]. \quad (3.24)$$

Несмотря на одинаковую форму соотношений (3.21) и (3.23), между ними имеется большая разница. Действительно, соотношение (3.21) получено при предположении, что фазовые траектории \mathbf{x}_{N-k} и \mathbf{x}_{J-k}

¹Кроме $\mathbf{B}_0(\mathbf{x}_{N-K}) = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} — единичная матрица.

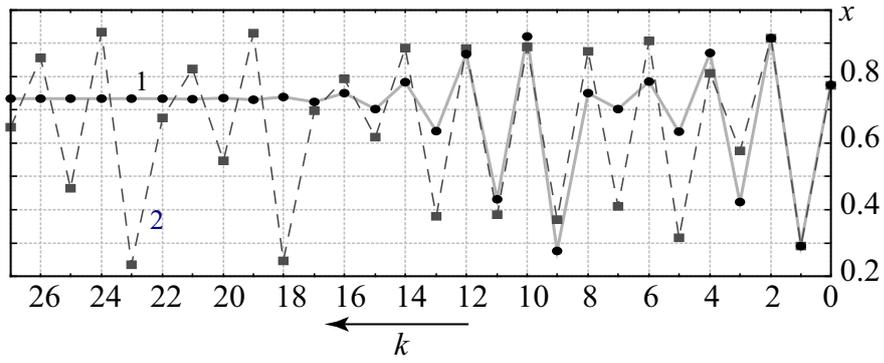


Рисунок 3.6 — Зависимость переменной x логистического отображения (3.26) от времени предыстории k . Опорная траектория x_{N-k} показана жирной линией, две других траектории x_{J_1-k} и x_{J_2-k} (конечные точки которых x_{J_1} и x_{J_2} близки к x_N) показаны символами \bullet (линия 1) и пунктирной линией с символами \blacksquare (линия 2), соответственно. Горизонтальная ось отложена в противоположном направлении

($k = 0, \dots, K$) оказываются близкими друг к другу на всей длине предыстории K (см. соотношение (3.16)), в то время как соотношение (3.23) требует только близости двух состояний, x_N и x_J , то есть вместо соотношения (3.16) нужно использовать

$$\|\delta x_J\| < \varepsilon. \quad (3.25)$$

Так как для хаотических систем фазовые траектории могут как отклоняться, так и сближаться, близость состояний x_N и x_J (соотношение (3.25)) не означает выполнение требования (3.16), то есть среди векторов x_J , близких к x_N , в общем случае только очень малая часть удовлетворяет требованию (3.16). Это утверждение проиллюстрировано на рисунке 3.6 для логистического отображения

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), \quad a = 3.75. \quad (3.26)$$

Нетрудно заметить, что несмотря на то, что обе точки x_{J_1} и x_{J_2} близки к опорному состоянию x_N (и для каждой из них выполняется соотношение (3.25)), только точка x_{J_1} удовлетворяет требованию (3.16) из-за близости всей траектории x_{J_1-k} (\bullet) к x_{N-k} , в то время как для точки x_{J_2} (\blacksquare) условие (3.16) не выполняется, так как ее траектория x_{J_2-k} не является близкой к опорной траектории x_{N-k} на всей длине предыстории K .

Несмотря на то, что коэффициенты матриц \mathbf{C} и $\tilde{\mathbf{C}}$ оказываются, как правило, неизвестными, справедливость соотношений (3.21) и (3.23) может быть проверена, если существует $N > m$ ближайших соседей \mathbf{x}_{J_i} опорного вектора \mathbf{x}_N и соответствующих ему векторов \mathbf{u}_{J_i} ведомого отображения. Отметим также, что все векторы \mathbf{x}_{J_i} , близкие к \mathbf{x}_N могут быть использованы для проверки соотношения (3.23), в то время как для проверки выполнения соотношения (3.21) должны использоваться только те векторы \mathbf{x}_{J_i} , для которых выполняется соотношение (3.16) на всей длине предыстории.

Как и в случае систем с непрерывным временем, рассмотренных в разделе 3.1, проверив наличие обобщенной синхронизации (например, при помощи метода вспомогательной системы), можно выбрать m ближайших соседей \mathbf{x}_{J_i} ($i = 1, \dots, m$) и соответствующие им векторы \mathbf{u}_{J_i} для определения коэффициентов матрицы \mathbf{C} (или $\tilde{\mathbf{C}}$) при помощи соотношения (3.21) (или (3.23)), соответственно). Затем, определив коэффициенты матрицы \mathbf{C} (или $\tilde{\mathbf{C}}$), можно найти векторы $\delta\mathbf{z}_{J_i}$, ($i = m + 1, \dots, N$) как

$$\delta\mathbf{z}_{J_i} = \mathbf{C}\delta\mathbf{x}_{J_i} \quad \text{или} \quad \delta\mathbf{z}_{J_i} = \tilde{\mathbf{C}}\delta\mathbf{x}_{J_i} \quad (3.27)$$

и сравнить их с векторами $\delta\mathbf{u}_{J_i}$ ведомой системы для проверки выполнения соотношения (3.21) (или (3.23)). Для характеристики степени близости векторов $\delta\mathbf{u}_{J_i}$ и $\delta\mathbf{z}_{J_i}$ друг с другом можно произвести расчет характеристики

$$\Delta_{J_i} = \frac{\|\delta\mathbf{u}_{J_i} - \delta\mathbf{z}_{J_i}\|}{\|\delta\mathbf{u}_{J_i}\|} \quad (3.28)$$

для каждой пары векторов и построить распределения этих характеристик, аналогично тому, как это было сделано для потоковых (рисунки 3.4).

Таким образом, для исследования свойств обобщенной синхронизации в дискретных отображениях нужно выполнить следующую последовательность действий. Во-первых, нужно проверить выполнение соотношения (3.23) для набора векторов \mathbf{x}_{J_i} , близких к опорному состоянию

\mathbf{x}_N , то есть нужно использовать все точки, удовлетворяющие соотношению (3.25). Если соотношение (3.23) выполняется, то это означает, что в режиме обобщенной синхронизации состояния дискретных отображений связаны друг с другом при помощи функционального соотношения (3.13). С другой стороны, нарушение соотношения (3.23) свидетельствует о том, что уравнение (3.13), являющееся по сути дела определением обобщенной синхронизации согласно традиционной концепции, должно быть пересмотрено. В этом случае нужно осуществить следующий шаг, заключающийся в проверке соотношения (3.21) (и (3.14), соответственно) путем рассмотрения только векторов \mathbf{x}_{J_i} , траектории \mathbf{x}_{J_i-k} которых удовлетворяют требованию (3.16), при этом остальные векторы \mathbf{x}_{J_i} , используемые ранее для проверки соотношения (3.23) должны быть исключены из рассмотрения². Так как длина предыстории K (или длина фазовой трубки) обратно пропорциональна абсолютной величине старшего условного показателя Ляпунова $\lambda_1^u < 0$, она может быть оценена как $K \sim 1/|\lambda_1^u|$.

Проиллюстрируем явление обобщенной синхронизации в системах с дискретным временем на примере двух различных систем: логистических отображений и отображений Эно.

3.2.1 Логистические отображения

Начнем рассмотрение с системы двух однонаправленно связанных логистических отображений:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, a_x), \\ u_{n+1} &= f(u_n, a_u) + \sigma(f(x_n, a_x) - f(u_n, a_u)), \end{aligned} \tag{3.29}$$

где $f(x, a) = ax(1 - x)$, $a_x = 3.75$, $a_u = 3.79$ — управляющие параметры ведущей и ведомой систем, соответственно, σ — параметр связи между ними [70]. Из-за одномерного характера взаимодействующих систем все векторы в вышеприведенных рассуждениях должны быть заменены

²Эта процедура аналогична методу фазовых трубок для потоковых систем (см. раздел 3.1).

на скалярные величины, при этом все теоретические и аналитические выводы останутся неизменными.

Для диагностики границы режима обобщенной синхронизации производился расчет условного показателя Ляпунова для системы (3.29) с последующим уточнением полученных результатов при помощи метода вспомогательной системы [69]. На рисунке 3.7 приведена зависимость условного показателя Ляпунова от параметра связи σ . Нетрудно заметить, что условный показатель Ляпунова оказывается отрицательным в двух областях, при $\sigma \in [0.12; 0.18]$ и $\sigma \geq 0.265$, что свидетельствует о наличии обобщенной синхронизации при указанных значениях параметра σ ³. При этом, обобщенная синхронизация близка к полной (сильной) синхронизации (в терминах работы [70]), если величина параметра связи оказывается достаточно большой, то есть $\sigma \geq 0.265$, в то время как для диапазона $\sigma \in [0.12; 0.18]$ детектированный режим соответствует так называемой слабой обобщенной синхронизации [70]. Понятно, что, как и в случае потоковых систем, в режиме сильной обобщенной синхронизации нет необходимости учета предыстории, так как состояния ведущей и ведомой систем оказываются связанными друг с другом простым функциональным соотношением $u_n \approx x_n$ [70], в то время как случай слабой синхронизации ($\sigma \in [0.12; 0.18]$) как раз и представляет наибольший интерес и требует всестороннего рассмотрения.

Далее, без потери общности зафиксируем значение параметра связи $\sigma = 0.14$, что соответствует минимальному отрицательному значению условного показателя Ляпунова (показано стрелкой на рисунке 3.7,а). Задав точность в выражении (3.16) $\varepsilon = 0.01$, проанализируем влияние длины предыстории K на состояния δu_{J_i} и характер распределения величин (3.28), при этом опорное состояние x_N должно быть выбрано случайно⁴. Очевидно, как и в случае потоковых динамических систем,

³Аналогичные результаты получены также при помощи метода вспомогательной системы.

⁴Необходимо отметить, что величина точности должна быть достаточно малой по сравнению с амплитудой сигнала изучаемой системы и, в то же самое время, она должна быть достаточно большой для обеспечения разумной статистики при заданном времени вычислений.

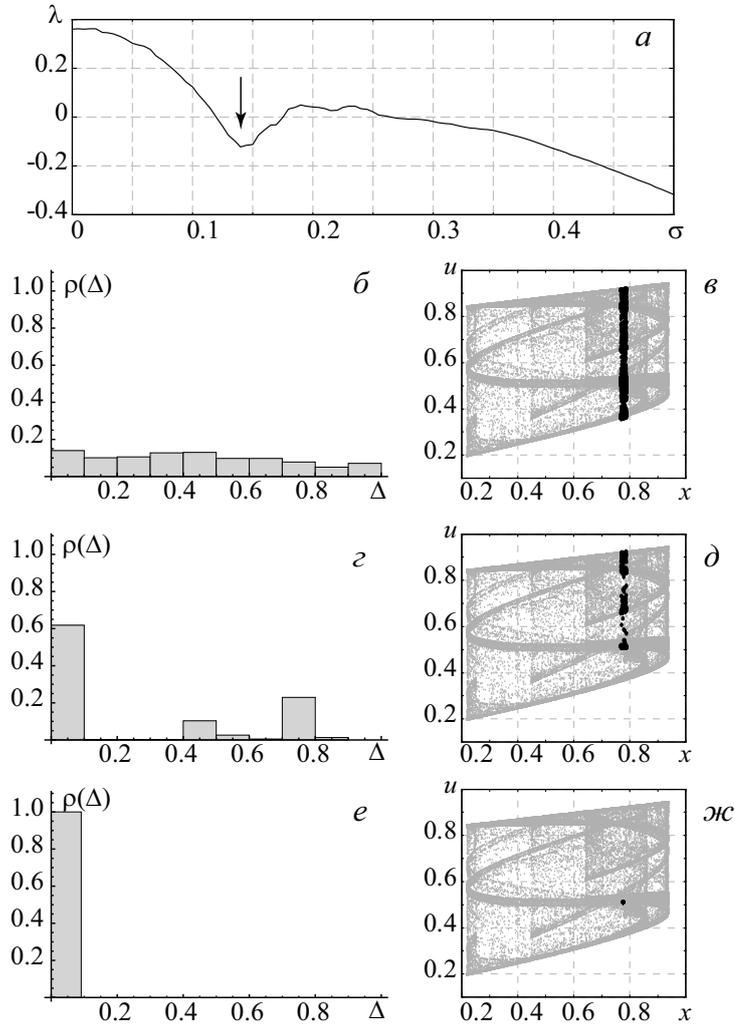


Рисунок 3.7 — Зависимость условного показателя Ляпунова от параметра связи σ (a); гистограммы нормированных разностей Δ_{J_i} , построенные по $N = 1000$ ближайших соседей (б,г,е) и плоскости (x, u) (в,д,ж) для двух однонаправленно связанных логистических отображений (3.29), находящихся в режиме обобщенной синхронизации ($\sigma = 0.14$, показано стрелкой на рисунке (a)) для различной длины предыстории: $K = 0$ (число итераций, необходимое для достижения разумной статистики, составляет $L \sim 3.3 \times 10^4$) (б,в), $K = 10$ ($L \sim 5.5 \times 10^6$) (г,д), $K = 28$ ($L \sim 6.06 \times 10^{10}$) (е,ж). На рисунках 3.7,в,д,ж показаны также состояния взаимодействующих систем, удовлетворяющие условию (3.16)

когда соотношение (3.21) (или (3.23)) оказывается справедливым, распределение Δ_{J_i} должно представлять собой δ -функцию.

Рисунок 3.7,б,г,е иллюстрирует гистограммы Δ_{J_i} при увеличении длины предыстории K . Гистограммы построены по $N = 1000$ ближайших соседей, остающихся близкими друг к другу в течении всего временного интервала предыстории длиной K . Для достижения разумной статистики при заданном значении точности ε было проведено L итераций, численные значения которых приведены в подрисуночной подписи к рисунку 3.7. На рисунке 3.7,в,д,ж приведены также плоскости (x, u) , характеризующие состояния ведущей и ведомой систем при выбранных значениях управляющих параметров. На каждом из этих рисунков также показаны точки (x_{J_i}, u_{J_i}) , соответствующие состояниям взаимодействующих систем, для которых выполняется соотношение (3.16). Рисунок 3.7,б,в соответствует случаю без учета предыстории, то есть $K = 0$. Такое рассмотрение соответствует традиционной концепции обобщенной синхронизации. Из рисунка видно, что в данном случае величины Δ_{J_i} распределены почти равномерно по всему интервалу $[0; 1]$ (рисунок 3.7,б), при этом все точки на плоскости состояний взаимодействующих систем также разбросаны равномерно в широком диапазоне изменения переменной u (рисунок 3.7,в). На основании приведенных аргументов можно сделать вывод о том, что условие (3.23) не выполняется и, как следствие, традиционная концепция обобщенной синхронизации в дискретных отображениях нуждается в уточнении.

При увеличении длины предыстории, например, при $K = 10$ (рисунок 3.7,г,д), на распределении величин Δ_{J_i} появляются отдельные пики (их появление обусловлено неоднородностью хаотического аттрактора), при этом все точки u_{J_i} оказываются по-прежнему распределенными по широкому диапазону изменения переменной u . Наконец, рисунок 3.7,е,ж иллюстрирует аналогичные распределения для оптимальной длины предыстории ($K = 28$). В этом случае распределение Δ_{J_i} становится δ -функцией (рисунок 3.7,е), а все рассматриваемые состояния взаимодействующих систем (x_{J_i}, u_{J_i}) , удовлетворяющие соотноше-

нию (3.16), сжимаются в малую окрестность опорной точки (x_N, u_N) (рисунок 3.7, ж).

Таким образом, очевидно, что по аналогии с потоковыми системами, при рассмотрении поведения логистических отображений с точки зрения установления обобщенной синхронизации необходимо учитывать предысторию.

3.2.2 Отображения Эно

В качестве следующего примера рассмотрим два взаимно связанных отображения Эно. Как и в случае потоковых систем, взаимный тип связи в данном случае был выбран с точки зрения доказательства универсальности полученных результатов, чтобы показать, что одни и те же методы и подходы могут быть использованы для диагностики режима обобщенной синхронизации, независимо от типа связи между системами. Исследуемая система описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}x_{n+1}^1 &= f(x_n^1, x_n^2, a_x) + \sigma(f(y_n^1, y_n^2, a_y) - f(x_n^1, x_n^2, a_x)), \\x_{n+1}^2 &= bx_n^1, \\u_{n+1}^1 &= f(u_n^1, u_n^2, a_u) + \sigma(f(x_n^1, x_n^2, a_x) - f(u_n^1, u_n^2, a_u)), \\u_{n+1}^2 &= bu_n^1,\end{aligned}\tag{3.30}$$

где $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$ [$\mathbf{u} = (u^1, u^2)$] — вектор состояния первой [второй] системы, $f(x_1, x_2, a) = ax_1(1 - x_1) + x_2$ — нелинейная функция, $a_x = 3.16779$, $a_u = 2.9$, $b = 0.3$ — управляющие параметры, σ — параметр связи [71, 72]. При выбранных значениях управляющих параметров режим обобщенной синхронизации, диагностируемый по моменту перехода второго положительного показателя Ляпунова в область отрицательных значений (см. главу 2), возникает при $\sigma \approx 0.035$.

Далее зафиксируем значение параметра связи $\sigma = 0.2$ и проведем исследование обобщенной синхронизации в системе (3.30) при помощи предложенного выше подхода. При выбранных значениях управляющих параметров в исследуемой системе имеет место режим слабой обобщенной синхронизации. Как и в случае логистических отображений, будем

характеризовать степень близости векторов \mathbf{u}_{J_i} и \mathbf{z}_{J_i} при помощи распределений величины Δ_{J_i} , определяемой выражением (3.28), построенных по $N = 100$ ближайших состояний (как и в случае логистических отображений, число итераций, необходимое для достижения разумной статистики, приведено в подрисуночной подписи к рисунку 3.8). Однако, в отличие от логистических отображений размерность исследуемой системы позволяет визуализировать поведение векторов \mathbf{u}_{J_i} и \mathbf{z}_{J_i} на плоскости. Поэтому на рисунке 3.8 вместе с гистограммами распределений Δ_{J_i} (рисунок 3.8,а,в) приведены также вектора состояний \mathbf{u}_{J_i} (○) и \mathbf{z}_{J_i} (■) (рисунок 3.8,б,г) второго отображения Эно (3.30). Рисунок 3.8,а,б соответствует случаю, когда используются все ближайшие векторы \mathbf{x}_{J_i} , удовлетворяющие условию (3.25), при выбранной точности $\varepsilon = 0.01$ (то есть длина предыстории $K = 0$ и рассматривается уравнение (3.23)), в то время как на рисунке 3.8,в,г приведены только векторы, соответствующие случаю, когда предыстория длиной $K = 40$ принимается во внимание (в этом случае выполняется условие (3.16) при $\varepsilon = 0.01$ и уравнение (3.21) должно быть справедливым). Нетрудно заметить, что в первом случае величины Δ_{J_i} распределены равномерно по единичному интервалу (как и в случае логистических отображений, рассмотренных выше), а векторы \mathbf{z}_{J_i} и \mathbf{u}_{J_i} достаточно сильно отличаются друг от друга, что свидетельствует об отсутствии функционального соотношения между состояниями взаимодействующих систем. Напротив, во втором случае, когда учитывается предыстория, распределение Δ_{J_i} представляет собой δ -функцию, а вычисленные векторы \mathbf{z}_{J_i} находятся в хорошем соответствии с векторами \mathbf{u}_{J_i} второго отображения, что подтверждает теоретические рассуждения и результаты, полученные для логистических отображений. Таким образом, в двумерных отображениях, связанных взаимно, векторы состояний взаимодействующих хаотических систем не связаны друг с другом функциональным соотношением, а при их рассмотрении нужно также учитывать предысторию.

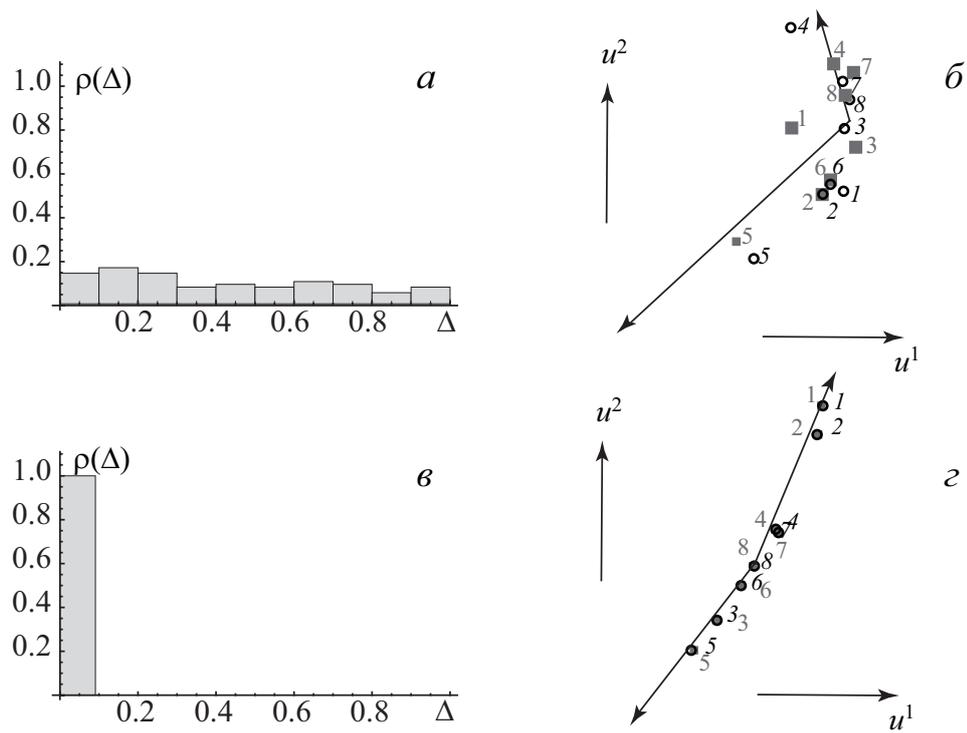


Рисунок 3.8 — Гистограммы величин Δ_{J_i} , построенные по $N = 100$ ближайшим соседям (а,в) и векторы \mathbf{u}_{J_i} (○) и \mathbf{z}_{J_i} (■) (б,г) второго отображения Эно (3.30), $\sigma = 0.2$, для различной длины предыстории: $K = 0$ (число итераций, необходимое для достижения разумной статистики, $L \sim 5.9 \times 10^4$) (а,б), $K = 40$ ($L \sim 6.2 \times 10^{11}$) (в,г). Номера i векторов \mathbf{u}_{J_i} и \mathbf{z}_{J_i} показаны курсивом и прямым шрифтом, соответственно

3.3 Сильная и слабая обобщенная синхронизация

В данном разделе диссертационной работы рассмотрим кратко существующую концепцию сильной и слабой обобщенной синхронизации (см. также [70]). Как упоминалось во Введении, согласно традиционной концепции обобщенной синхронизации отличие между режимами сильной и слабой обобщенной синхронизации заключается в свойствах функционального соотношения, устанавливаемого между состояниями взаимодействующих систем. Предполагается, что в режиме слабой синхронизации, реализуемом при относительно малых значениях параметра связи, функциональное соотношение \mathbf{F} является негладким или даже фрактальным. Режим сильной синхронизации наблюдается, как правило, при достаточно больших значениях силы связи между системами и характеризуется гладким функциональным соотношением, устанавливаемым между состояниями исследуемых систем. Частными случаями сильной обобщенной синхронизации, как отмечалось выше, являются режимы полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием. Аргументы, приведенные в работе [70] основаны на результатах вычисления корреляционной размерности (и других характеристик) аттракторов в объединенном фазовом пространстве взаимодействующих однонаправленно связанных систем. В случае реализации фрактального функционального соотношения между состояниями систем размерность странного аттрактора в объединенном фазовом пространстве оказывается больше размерности аттрактора ведущей системы, в то время как для гладкого соотношения эти размерности должны совпадать. Действительно, если рассмотреть аттрактор двух связанных логистических отображений в объединенном фазовом пространстве этих систем (см. рисунок 3.7,в), нетрудно заметить его фрактальные свойства. В то же самое время, фрактальность соотношения \mathbf{F} , устанавливаемого между состояниями взаимодействующих систем, обусловлена предположением о том, что \mathbf{F} является простой функцией (3.13) без какого либо учета предыстории. Как обсуждалось выше, состояния взаимодействующих

систем, находящихся в режиме слабой обобщенной синхронизации не связаны между собой функциональным соотношением, при их рассмотрении нужно учитывать предысторию состояния ведущей системы. Чтобы ввести учет предыстории в объединенном фазовом пространстве взаимодействующих систем нужно учитывать только те состояния ведомой системы \mathbf{u}_{Ji} , которые удовлетворяют условию (3.16) (см. рисунок 3.7,ж). Как видно из рисунка, в данном случае все рассматриваемые состояния (x_{Ji}, y_{Ji}) в объединенном фазовом пространстве взаимодействующих систем, удовлетворяющие условию (3.16), сжимаются в малую окрестность опорного состояния (x_N, y_N) , все фрактальные свойства исчезают, а соотношение \mathbf{F} между ведущей и ведомой системами становится гладким. К тому же самому выводу можно придти не только для логистических отображений (3.29), но и для любых других систем с непрерывным и дискретным временем, связанных как однонаправленно, так и взаимно. Тем не менее, концепция сильной и слабой обобщенной синхронизации может быть использована в скорректированном виде. Эта корректировка заключается в следующем. Когда состояние ведомой системы \mathbf{u}_n зависит от предыстории (см. соотношение (3.14)) длиной K , этот тип синхронной динамики должен быть рассмотрен как слабая синхронизация. С ростом параметра связи необходимая длина предыстории K уменьшается и при некотором значении параметра связи σ она становится равной нулю ($K = 0$), и в системе возникает режим полной синхронизации. Так как в однонаправленно связанных системах длина предыстории K зависит от абсолютной величины максимального условного показателя Ляпунова λ_1^u , поведение длины предыстории находится в хорошем соответствии с известными результатами, заключающимися в том, что сильная синхронизация возникает тогда, когда максимальный условный показатель Ляпунова становится меньше минимального показателя Ляпунова ведущей системы [352]. Когда это происходит, ведомая система становится в некотором смысле достаточно устойчивой для того, чтобы следовать за внешним сигналом, в то время как необходимая длина предыстории K становится равной нулю. В этом случае состояния вза-

имодействующих систем оказываются связанными друг с другом при помощи функционального соотношения (3.13), что можно классифицировать как сильную обобщенную синхронизацию.

Таким образом, разделение обобщенной синхронизации в системах с дискретным временем на сильную и слабую формы оказывается достаточно обоснованным. В то же самое время, различие между ними определяется не типом функционального соотношения F , устанавливаемого между состояниями взаимодействующих систем (гладкое оно или фрактальное): оно оказывается гладким в обоих случаях. Однако, в случае сильной синхронизации состояния взаимодействующих систем связаны друг с другом при помощи функционального соотношения (3.13), в то время как для слабой синхронизации необходимо учитывать предысторию.

3.4 Уточненная концепция обобщенной синхронизации в пространственно-распределенных системах

Настоящий раздел диссертационной работы посвящен обобщению метода фазовых трубок, предложенного и апробированного на модельных системах с малым числом степеней свободы (см. разделы 3.1–3.2), на пространственно-распределенные системы. Как отмечалось в главах 1–2, согласно традиционной концепции под режимом обобщенной синхронизации в данном случае понимается установление функционального соотношения между состояниями взаимодействующих пространственно-распределенных систем в каждой точке пространства взаимодействия.

Как отмечалось в главах 1–2, обобщенная синхронизация в связанных системах едина для всех классов динамических систем, что подтверждается колоссальным количеством работ, опубликованных в этой области. В то же самое время, если для потоковых систем и отображений традиционная концепция потребовала уточнения, следует полагать,

что при рассмотрении динамики пространственно-распределенных систем нужно также учитывать предысторию. Однако, в этих системах есть своя специфика, чтобы понять которую рассмотрим две системы, состояние которых однозначно характеризуется функциями (которые могут быть как действительными, так и комплексными) $u(x, t)$ и $v(x, t)$, $x \in [0, L]$, $t \in [0, \infty)$, а их поведение с течением времени в автономном состоянии определяется оператором эволюции \hat{L}

$$u(x, t) = \hat{L} u(x, t) \quad (3.31)$$

и

$$v(x, t) = \hat{L} v(x, t). \quad (3.32)$$

Будем считать, что при соответствующем выборе значений управляющих параметров и граничных условий в системах возможно установление хаотических колебаний.

В качестве примера подобных систем, например, можно рассматривать нелинейные активные среды, описываемые комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - \alpha |u|^2 u + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v - \alpha |v|^2 v + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad (3.34)$$

с периодическими граничными условиями:

$$u(x, t) = u(x + L, t), \quad v(x, t) = v(x + L, t), \quad (3.35)$$

где L – пространственный период системы.

Если системы $u(x, t)$ и $v(x, t)$ однонаправленно связаны между собой⁵, и в них установился режим обобщенной хаотической синхронизации, как отмечалось выше, состояния взаимодействующих систем связаны друг с другом с помощью функционала $F[\cdot]$

$$u = F[v]. \quad (3.36)$$

⁵Далее считается, что $v(x, t)$ является ведущей системой, а $u(x, t)$ – ведомой.

Согласно концепции обобщенной хаотической синхронизации, синхронный режим означает, что под влиянием ведущей системы $v(x, t)$ ведомая система $u(x, t)$ приходит в состояние, однозначно определяемое состоянием ведущей системы, при этом этот процесс “сходимости” определяется величиной старшего условного показателя Ляпунова $\lambda_u^1 < 0$. Иными словами, за определенный интервал времени τ ведущая система вынуждает ведомую систему прийти в состояние, которое не зависит от начальных условий. Состояние ведомой системы $u(x_*, t)$ в некоторой выбранной точке с координатой x_* в момент времени t при этом определяется не только состоянием ведущей системы $v(x, t)$ в этот же самый момент времени на всей длине L рассматриваемой системы, но и всей предысторией состояния ведущей системы на протяжении интервала времени длительностью $\tau \sim 1/|\lambda_u^1|$.

Выберем некоторый произвольный момент времени t_* и зафиксируем состояние ведущей системы $v(x, t)$ на интервале времени $(t_* - \tau, t_*]$ в качестве опорного состояния $v(x, t)|_{t=t_*-\tau}^{t_*} = v(x, t_* + s)|_{s=-\tau}^0$. Далее, будем отслеживать эволюцию взаимодействующих систем и фиксировать моменты времени t_i ($i = 1, 2, \dots$), когда выполняется соотношение

$$\|v(x, t_i + s) - v(x, t_* + s)\| < \varepsilon, \quad \forall s \in [-\tau, 0) \quad \& \quad \forall x \in [0, L], \quad (3.37)$$

(где ε — наперед заданная малая величина), то есть те моменты времени, когда состояние ведущей системы $v(x, t)|_{t=t_i-\tau}^{t_i}$ оказывается близким к зафиксированному опорному состоянию $v(x, t)|_{t=t_*-\tau}^{t_*}$ на всем интервале времени длительностью τ .

Введем в рассмотрение малые функции

$$\delta v_i(x, s) = v(x, t_i + s) - v_*(x, s), \quad s \in [-\tau, 0), \quad (3.38)$$

и

$$\delta u_i(x) = u(x, t_i) - u(x, t_*), \quad (3.39)$$

характеризующие малые отклонения состояний ведущей и ведомой систем от выбранных опорных состояний $v_*(x, s)|_{s=-\tau}^0 = v(x, t_* + s)|_{s=-\tau}^0$ и $u(x, t_*)$. Очевидно, что количество пар функций $\delta v_i(x, s)$ и $\delta u_i(x)$ определяется значениями управляющих параметров системы, величиной ε ,

задающей степень близости состояний системы к опорным состояниям и длительностью интервала времени T , на котором анализируется эволюция взаимодействующих систем.

С учетом введенных обозначений для найденных моментов времени t_i и фиксированной точки $x_* = y$ соотношение (3.36) может быть записано в виде

$$u(y) + \delta u_i(y) = F[v_*(x, s) + \delta v_i(x, s), y] \Big|_{x=0}^L \Big|_{s=-\tau}^0. \quad (3.40)$$

С учетом малости отклонения $\delta v_i(x, s)$ функционал F может быть разложен в ряд

$$F[v_*(x, s) + \delta v_i(x, s), y] \approx F[v_*(x, s), y] + \int_{-\tau}^0 \int_0^L \frac{\delta F[v_*(x, s), y]}{\delta v} \delta v_i(x, s) dx ds, \quad (3.41)$$

и, принимая во внимание, что

$$u(y) = F[v_*(x, s), y], \quad (3.42)$$

можно получить

$$\delta u_i(y) = \int_{-\tau}^0 \int_0^L \frac{\delta F[v_*(x, s), y]}{\delta v} \delta v_i(x, s) dx ds. \quad (3.43)$$

Отметим, что динамика во времени $v(x, t)$ определяется оператором эволюции \hat{L} (см. соотношение (3.32)) и начальными условиями, поэтому для $v_i(x, s)$ можно записать, что

$$v_i(x, s) = \Phi[v_i(\xi, 0), x, s] \Big|_{\xi=0}^L. \quad (3.44)$$

Очевидно, что

$$v_*(x, s) = \Phi[v_*(\xi, 0), x, s] \Big|_{\xi=0}^L. \quad (3.45)$$

С учетом малости возмущения $\delta v_i(x, s)$ соотношение (3.44) переписывается в виде

$$\begin{aligned} v_*(x, s) + \delta v_i(x, s) &= \Phi[v_*(\xi, 0) + \delta v_i(\xi, 0), x, s] \approx \\ &\approx \Phi[v_*(\xi, 0), x, s] + \\ &+ \int_0^L \frac{\delta \Phi[v_*(\xi, 0), x, s]}{\delta v} \delta v_i(\xi, 0) d\xi, \end{aligned} \quad (3.46)$$

откуда, с учетом (3.45) получаем

$$\delta v_i(x, s) = \int_0^L \frac{\delta \Phi[v_*(\xi, 0), x, s]}{\delta v} \delta v_i(\xi, 0) d\xi. \quad (3.47)$$

Теперь, с учетом (3.47), соотношение (3.43) может быть записано в виде

$$\delta u_i(y) = \int_{-\tau}^0 \int_0^L \int_0^L \frac{\delta F[v_*(x, s), y]}{\delta v} \frac{\delta \Phi[v_*(\xi, 0), x, s]}{\delta v} \delta v_i(\xi, 0) dx ds d\xi. \quad (3.48)$$

Обозначая

$$K(y, \xi) = \int_{-\tau}^0 \int_0^L \frac{\delta F[v_*(x, s), y]}{\delta v} \frac{\delta \Phi[v_*(\xi, 0), x, s]}{\delta v} ds dx, \quad (3.49)$$

получим, что малые возмущения опорного состояния в ведущей $\delta v_i(x, 0)$ и ведомой $\delta u_i(y)$ системах в момент времени t_i связаны друг с другом интегральным уравнением Фредгольма I-го рода

$$\delta u_i(y) = \int_0^L K(y, \xi) \delta v_i(\xi, 0) d\xi, \quad (3.50)$$

однако ядро $K(y, \xi)$ этого интегрального уравнения является неизвестным, поскольку изначально неизвестны F и Φ . В то же самое время, из эволюции рассматриваемых систем известны функции $\delta u_i(y)$ и $\delta v_i(\xi, 0)$.

Одним из возможных способов проверки того, что соотношение (3.50) выполняется (а следовательно, рассматриваемые пространственно-распределенные системы находятся в режиме обобщенной хаотической синхронизации) является переход к дискретному представлению. Подобный переход, конечно, является приближенным рассмотрением, однако он может позволить численно решить проблему верификации соотношения (3.50).

Дискретизируем рассматриваемое пространство и выделим на нем фиксированный набор точек с координатами $x_j \in [0, L]$, $j = 0, \dots, N$. Тогда, для точки x_j соотношение (3.50) приближенно может быть записано как

$$\delta u_i(y_j) = \sum_{k=0}^N a_{jk} \delta v_i(\xi_k, 0). \quad (3.51)$$

Очевидно, что для всех N точек по пространству будет получено матричное соотношение

$$\begin{pmatrix} \delta u_i(y_1) \\ \delta u_i(y_2) \\ \vdots \\ \delta u_i(y_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_i(\xi_1, 0) \\ \delta v_i(\xi_2, 0) \\ \vdots \\ \delta v_i(\xi_N, 0) \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

которое можно записать в виде

$$\delta \mathbf{u}_i = \mathbf{A} \delta \mathbf{v}_i, \quad (3.53)$$

где $\delta \mathbf{u}_i = (\delta u_i(y_1), \delta u_i(y_2), \dots, \delta u_i(y_N))^T$, $\delta \mathbf{v}_i = (\delta v_i(y_1, 0), \delta v_i(y_2, 0), \dots, \delta v_i(y_N, 0))^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Таким образом, из приведенных рассуждений следует, что для двух пространственно-распределенных систем, находящихся в режиме обобщенной синхронизации, должно выполняться соотношение (3.53). Очевидно, что для каждого выбранного фиксированного момента времени t_* матрица $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ будет своя, при этом, конечно, явный вид ее коэффициентов a_{ij} будет неизвестен. Тем не менее, если для двух взаимодействующих пространственно-распределенных сред для выбранного фиксированного момента времени t_* известны $m > N$ пар функций $\delta u_i(x)$ и $\delta v_i(x, 0)$, для которых выполняется соотношение (3.37), то выполнение соотношения (3.53) может быть проверено, аналогично тому, как это было сделано при реализации метода фазовых трубок для систем с конечным числом степеней свободы (см. разделы 3.1—3.2).

Действительно, можно выбрать N пар функций $\delta u_i(x)$ и $\delta v_i(x, 0)$ (из m существующих), при этом для каждой i -ой пары должно выполняться соотношение (3.53). Иными словами, эти N пар функций дают N^2 линейных уравнений с N^2 неизвестными величинами (в роли которых

выступают коэффициенты a_{ij} матрицы \mathbf{A}). Тогда, решив эту систему линейных уравнений, можно определить значения коэффициентов a_{ij} матрицы \mathbf{A} и на оставшихся неиспользованным $(m - N)$ состояний проверить выполнение (3.53). Понятно, что решение рассматриваемой системы линейных уравнений существует всегда и оказывается единственным только тогда, когда N пар функций $\delta u_i(x)$ и $\delta v_i(x, 0)$, использованные для составления данной системы, не являются линейно зависимыми. Очевидно также, что при достаточно большом наборе пар функций (m значительно превосходит N) выбрать N линейно независимых пар не составляет труда, что означает, что, при наличии достаточно длинной временных реализаций задача нахождения коэффициентов a_{ij} матрицы \mathbf{A} может быть решена всегда, и, соответственно, также всегда может быть проверена корректность соотношения (3.53). Для этого необходимо вычислить вектора

$$\delta \mathbf{w}_k = \mathbf{A} \delta \mathbf{v}_k, \quad (3.55)$$

где $k = m - N, \dots, m$ и сравнить их с векторами $\delta \mathbf{u}_k$, полученными из временной реализации.

3.5 Метод фазовых трубок применительно к сетям связанных нелинейных элементов

Применим метод фазовых трубок для диагностики обобщенной синхронизации в сетях связанных нелинейных элементов. При этом, с учетом введенной корректировки для двух связанных динамических систем и результатов, изложенных в главе 2 (раздел 2.4), под обобщенной синхронизацией сети будем понимать такой режим, при котором состояния всех элементов сети оказываются связанными между собой некоторым функционалом \mathbf{F} , то есть при определении функциональной связи между элементами сети нужно учитывать не только близость состояний взаимодействующих систем, но и предысторию этих состояний. Иными

словами, \mathbf{F} в соотношении (2.23) должно считаться функционалом, а не функцией, как предполагалось ранее.

По аналогии с результатами, изложенными в главе 2, а также разделах 3.1–3.2 для двух связанных нелинейных систем, можно предположить, что диагностику режима обобщенной синхронизации в сложных сетях можно осуществлять при помощи метода расчета спектра показателей Ляпунова для всей сети. При этом, как было установлено в разделе 2.4, если в качестве элемента сети выступает динамическая система, находящаяся в хаотическом режиме, установление режима обобщенной синхронизации в сети соответствует переходу второго положительного показателя Ляпунова в область отрицательных значений.

Наряду с потоковыми динамическими системами, рассмотренными в главе 2, проанализируем установление режима обобщенной синхронизации в сети связанных систем с дискретным временем. В качестве исследуемой сети выберем небольшую группу из $N = 5$ взаимно связанных логистических отображений со слегка различающимися значениями управляющих параметров. Эволюция i -того элемента сети ($i = 1, \dots, N$) описывается уравнением:

$$x_{n+1}^i = f(x_n^i, \mu^i) + \varepsilon \sum_{j=1}^N c_{ij} f(x_n^j, \mu^j), \quad (3.56)$$

где оператор эволюции $f(x, \mu)$ определяется также, как и для двух взаимно связанных систем, рассмотренных в подразделе 2.2.4, $\mu_1 = 3.75$, $\mu_2 = 3.76$, $\mu_3 = 3.77$, $\mu_4 = 3.78$, $\mu_5 = 3.79$ — управляющие параметры, c_{ij} — элемент матрицы связи с сети. Топология связей между элементами сети, как отмечалось выше, выбрана таким образом, чтобы каждый элемент сети оказывался связанным со всеми остальными элементами.

Динамику сети (3.56) можно характеризовать при помощи N показателей Ляпунова. В отсутствие связи между элементами сети в силу одномерного характера взаимодействующих систем и их хаотической динамики все N показателей Ляпунова оказываются положительными. При увеличении параметра связи ε один из показателей Ляпунова по-прежнему остается положительным, а остальные четыре показателя Ля-

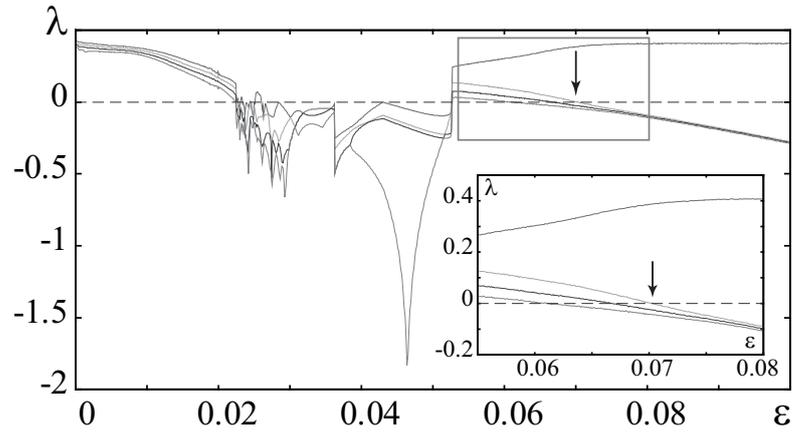


Рисунок 3.9 — Зависимость спектра показателей Ляпунова для сети из пяти логистических отображений (3.56) от параметра связи ε . На врезке показан увеличенный фрагмент зависимости. Момент установления обобщенной синхронизации в сети показан стрелкой

пунова постепенно, один за другим, переходят в область отрицательных значений, что аналогично поведению сети из пяти осцилляторов Ресслера (раздел 2.4). Зависимость спектра показателей Ляпунова от параметра связи ε для сети из пяти взаимно связанных логистических отображений приведена на рисунке 3.9. Область перехода четырех показателей Ляпунова в область отрицательных значений показана на врезке в увеличенном масштабе. Из рисунка видно, что при $\varepsilon > 0.0702$ все показатели Ляпунова за исключением одного, отвечающего за хаотическую динамику исследуемой сети, становятся отрицательными. Подобный переход связан с установлением обобщенной синхронизации в исследуемой сети из логистических отображений.

Проанализируем установление режима обобщенной синхронизации в исследуемой сети при помощи метода фазовых трубок. По аналогии со случаем двух однонаправленно или взаимно связанных систем, рассмотренных в разделе 3.2, выберем опорную точку x_n^l в фазовом пространстве одного из элементов сети и зафиксируем ее предысторию x_{n-k}^l ($k = 0, 1, \dots, K$) длиной K (для исследуемой системы $K = 28$). Следующим шагом является поиск таких ближайших соседей x_j^l этой опорной точки, фазовые траектории x_{j-k}^l которых будут оставаться близкими на всей длине предыстории K (все траектории находятся внутри фазовой трубки длиной K). Зафиксируем образы x_j^m таких ближайших соседей

Таблица 3.1 — Значения величин дисперсии для параметра связи $\varepsilon_1 = 0.058$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	–	$3.021 \cdot 10^{-7}$	$3.788 \cdot 10^{-7}$	$2.005 \cdot 10^{-7}$	$6.002 \cdot 10^{-7}$
x_2	$1.232 \cdot 10^{-6}$	–	$4.622 \cdot 10^{-6}$	$1.103 \cdot 10^{-6}$	$1.061 \cdot 10^{-6}$
x_3	$2.402 \cdot 10^{-6}$	$2.310 \cdot 10^{-6}$	–	$2.190 \cdot 10^{-6}$	$3.133 \cdot 10^{-6}$
x_4	$5.664 \cdot 10^{-6}$	$3.720 \cdot 10^{-6}$	$1.232 \cdot 10^{-6}$	–	$7.023 \cdot 10^{-6}$
x_5	$2.891 \cdot 10^{-6}$	$5.152 \cdot 10^{-6}$	$7.617 \cdot 10^{-6}$	$3.686 \cdot 10^{-6}$	–

в фазовых пространствах остальных отображений и проанализируем их разброс (дисперсию) относительно образа опорного состояния x_n^m . Полученная численная величина может быть рассмотрена как характеристика степени синхронизма анализируемых осцилляторов. В виду взаимного типа связи между элементами сети в режиме обобщенной синхронизации она должна быть примерно одинаковой для всех элементов ансамбля вне зависимости от выбора опорной системы.

Интерес представляют те значения параметра связи, при которых синхронный (в смысле обобщенной синхронизации) режим еще не установился, но часть изначально положительных показателей Ляпунова уже перешла в область отрицательных значений. Зафиксируем два таких значения параметра связи $\varepsilon_1 = 0.058$, соответствующий случаю, когда только один показатель Ляпунова перешел в область отрицательных значений, и $\varepsilon_2 = 0.068$, когда три показателя Ляпунова оказываются уже отрицательными (см. рисунок 3.9), и применим метод фазовых трубок к исследуемой сети. В таблицах 3.1–3.2 приведены значения дисперсии распределений расстояний между образами ближайших соседей для различных элементов сети в случае последовательного выбора каждого из них в качестве опорного (см. также [157]). В столбцах указаны элементы сети, в которых была зафиксирована опорная точка x_n^l , в строках — те элементы, для которых считались образы ближайших соседей.

Анализ данных таблицы показывает, что значения дисперсии для некоторых пар элементов сети резко отличаются от остальных. Можно ожидать, что при малых значениях дисперсии (порядка 10^{-7} для исследуемого случая) рассматриваемые элементы синхронизованы меж-

Таблица 3.2 — Значения величин дисперсии для параметра связи $\varepsilon_1 = 0.068$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	–	$1.326 \cdot 10^{-7}$	$1.533 \cdot 10^{-7}$	$2.513 \cdot 10^{-7}$	$2.763 \cdot 10^{-7}$
x_2	$1.099 \cdot 10^{-7}$	–	$1.592 \cdot 10^{-7}$	$2.990 \cdot 10^{-7}$	$3.102 \cdot 10^{-7}$
x_3	$2.264 \cdot 10^{-7}$	$1.278 \cdot 10^{-7}$	–	$4.980 \cdot 10^{-7}$	$3.565 \cdot 10^{-7}$
x_4	$8.002 \cdot 10^{-7}$	$7.393 \cdot 10^{-7}$	$6.773 \cdot 10^{-7}$	–	$5.745 \cdot 10^{-7}$
x_5	$3.348 \cdot 10^{-6}$	$3.960 \cdot 10^{-6}$	$3.496 \cdot 10^{-6}$	$3.841 \cdot 10^{-6}$	–

ду собой с точки зрения обобщенной синхронизации, в то время как при относительно больших величинах дисперсии (порядка 10^{-6}) синхронный режим отсутствует. На основании проведенного рассмотрения можно сделать вывод о том, что при значении параметра связи $\varepsilon_1 = 0.058$ четыре системы из пяти демонстрируют поведение, синхронное с первой системой, в то время как первая система не синхронна с остальными. Прямо противоположную ситуацию можно наблюдать при $\varepsilon_2 = 0.068$, где пятая система демонстрирует асинхронную динамику, тогда как остальные элементы сети синхронизованы друг с другом.

Схожая ситуация имеет место для малых групп хаотических систем с непрерывным временем. В частности, для сети из пяти осцилляторов Ресслера, рассмотренной в разделе 2.4, при тех же значениях управляющих параметров имеют место аналогичные закономерности возникновения синхронного режима [158]. Однако, при увеличении числа элементов ансамбля ситуация меняется радикально. Проведенные исследования показывают, что переход положительных показателей Ляпунова в отрицательную область в данном случае оказывается по-прежнему ответственным за установление обобщенной синхронизации в целом, но он никак не связан с формированием отдельных кластеров осцилляторов, находящихся в синхронном режиме. Последовательный переход показателей Ляпунова в отрицательную область связан с вовлечением все большего числа состояний отдельного осциллятора в синхронный режим. Иными словами, когда самый младший изначально положительный показатель Ляпунова становится отрицательным, в ансамбле взаимодействующих осцилляторов появляются синхронные состояния,

то есть возникает режим перемежающейся обобщенной синхронизации, степень которого увеличивается по мере уменьшения числа положительных показателей Ляпунова. Когда остается только один положительный показатель Ляпунова, режим перемежающейся обобщенной синхронизации переходит в режим полной обобщенной синхронизации ансамбля взаимодействующих осцилляторов.

3.6 Выводы по главе 3

Таким образом, в настоящей главе диссертационной работы установлено, что традиционная концепция обобщенной синхронизации двух одинаково направленных и взаимно связанных систем, а также сетей связанных нелинейных элементов нуждается в корректировке и уточнении, так как состояния взаимодействующих систем, находящихся в этом режиме, оказываются связанными друг с другом при помощи функционала, а не функционального соотношения, как это считается традиционно, то есть должна быть принята во внимание предыстория состояний систем. Такое утверждение оказывается справедливым как для систем с малым числом степеней свободы (поточковых динамических систем и дискретных отображений), так и пространственно-распределенных сред, находящихся в режиме пространственно-временного хаоса. При этом, необходимо отметить, что, к счастью, сделанная модификация концепции обобщенной синхронизации не затрагивает большинство результатов, полученных ранее в области исследования обобщенной синхронизации, но имеет важное фундаментальное значение с точки зрения понимания ключевых механизмов рассматриваемого явления и потенциальных возможностей их применения в различных областях науки и техники.

Для систем с дискретным временем сделанная модификация приводит к пересмотру существующей концепции сильной и слабой обобщенной синхронизации. В диссертационной работе установлено, что в режиме сильной синхронизации состояния взаимодействующих систем оказываются связанными между собой при помощи непрерывно диффе-

ренцируемого функционального соотношения, в то время как для слабой синхронизации необходимо учитывать предысторию динамики систем. При этом, и в режиме сильной, и в режиме слабой обобщенной синхронизации соотношение, устанавливаемое между состояниями взаимодействующих систем, оказывается гладким, а так называемая “фрактальность” исчезает при корректном учете предыстории.

Предложен подход для анализа обобщенной синхронизации в нелинейных динамических системах с учетом введенной корректировки, названный методом фазовых трубок. Эффективность метода проверена путем численного моделирования систем с непрерывным (однаправленно связанные системы Ресслера, взаимно связанные генераторы Кияшко-Пиковского-Рабиновича) и дискретным (однаправленно связанные логистические отображения, взаимно связанные отображения Эно) временем, находящихся в режиме обобщенной синхронизации. Разработанный подход расширен на пространственно-распределенные системы и сети связанных нелинейных элементов. Для сложных сетей данный подход применен для выявления характера взаимодействия элементов сети при переходе от асинхронного состояния к режиму обобщенной синхронизации. По всей видимости, подобный переход связан с установлением перемежающейся обобщенной синхронизации в ансамбле, причем степень синхронности установившегося режима определяется числом положительных показателей Ляпунова: чем меньше положительных показателей Ляпунова в спектре, тем выше степень синхронности режима перемежающейся обобщенной синхронизации.

Глава 4

Переमेжающееся поведение на границах различных типов хаотической синхронизации

[116–120, 124, 127, 159, 160, 162–168, 244, 248, 253, 257, 266], [185, 189, 191, 194, 197, 198, 207, 215, 218, 228, 232, 238–241, 260, 268]

Настоящая глава диссертационной работы посвящена рассмотрению характеристик перемежающегося поведения, наблюдающегося вблизи границ возникновения синхронных режимов. Перед тем как перейти к изложению основных результатов, полученных в рамках диссертационной работы в этой области, с точки зрения общности, рассмотрим понятие перемежаемости в целом.

Известно, что перемежающееся поведение характерно для систем различной природы и является универсальным явлением. Впервые явление перемежаемости было обнаружено при изучении сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим. В настоящее время переход к хаосу через перемежаемость является одним из классических сценариев [100]. При таком переходе в режиме перемежаемости сигнал представляет собой чередующуюся последовательность регулярных (ламинарных) фаз и хаотических всплесков (турбулентных фаз). При увеличении управляющего параметра, называемого параметром надкритичности, турбулентные всплески становятся все более частыми до тех пор, пока движение полностью не хаотизируется. В зависимости от характера потери устойчивости периодическим режимом (определяемого мультипликаторами предельного цикла) выделяют перемежаемость типов I-III [101, 102].

Однако, как отмечалось выше, явление перемежаемости далеко не ограничено вышеупомянутыми переходами от регулярных колебаний к нерегулярным в нелинейных системах. Перемежающееся поведение широко распространено в природе и технике и одним из больших классов явлений, которые оказываются тесно связанными с перемежаемостью, является как раз синхронизация [1, 6, 7, 353]. Перемежающееся поведение наблюдается вблизи границ различных типов хаотической синхронизации, причем механизмы возникновения и характеристики перемежаемости оказываются различными для разных типов синхронного поведения, в связи с чем выделяют перемежающуюся фазовую [107, 111], перемежающуюся обобщенную [110] синхронизацию, перемежающуюся синхронизацию с запаздыванием [109] и, как будет показано ниже, перемежающуюся синхронизацию, индуцированную шумом [159]. Для перемежающегося поведения существует определенная классификация, обуславливаемая типом синхронного режима. Переход к обобщенной синхронизации, синхронизации, индуцированной шумом, и синхронизации с запаздыванием характеризуется как перемежаемость “on-off” типа [109, 110], при переходе к фазовой синхронизации в зависимости от величины расстройки управляющих параметров имеет место либо перемежаемость типа I и перемежаемость “игольного ушка” (eyelet intermittency) [107, 108], либо перемежаемость “кольца” (ring intermittency) [111]. Как будет показано ниже (см. также [164, 165]), перемежающееся поведение наблюдается также в режиме фазовой синхронизации на граничных временных масштабах наблюдения. Более того, на границе фазовой синхронизации на граничных временных масштабах наблюдения возможно сосуществование двух различных типов перемежаемости одновременно¹.

Рассмотрим различные типы перемежающегося поведения, наблюдающиеся вблизи границ синхронных режимов, более подробно. Начнем рассмотрение с перемежаемости типа “on-off”.

¹Этот вопрос будет подробно рассмотрен в главе 5 настоящей диссертационной работы.

4.1 Перемежаемость типа “on-off” на границах синхронизации с запаздыванием, обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом

Перемежаемость типа “on-off” является одним из наиболее распространенных типов перемежаемости, возникающих в системах с флуктуирующим параметром [354], при развитии эпилептической активности у человека и лабораторных животных [104], а также вблизи границ возникновения режимов полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием и обобщенной синхронизации [109, 110]. Динамика системы, находящейся в таком режиме, характеризуется наличием достаточно длинных ламинарных фаз (соответствующих периодической динамике системы или фазам синхронного поведения взаимодействующих систем), прерывающихся относительно быстрыми и короткими турбулентными всплесками.

Перемежаемость типа “on-off” характеризуется следующими характеристиками длительностей ламинарных фаз: распределение длительностей ламинарных фаз в данном случае подчиняется степенному закону

$$N(L) \sim L^{-3/2}, \quad (4.1)$$

а зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle L \rangle$ от параметра надкритичности $\varepsilon_c - \varepsilon$ удовлетворяет степенной зависимости

$$\langle L \rangle \sim (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1}. \quad (4.2)$$

Определить характеристики перемежаемости, реализующейся в системе, возможно при помощи выделения ламинарных фаз поведения из временной реализации системы и проведения статистического анализа их длительностей. В роли анализируемого временного ряда $\Delta(t)$ должна выступать разность сигналов взаимодействующих систем $\Delta(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{u}(t)$ в случае анализа характеристик перемежающейся полной синхронизации, разность сдвинутых на время запаздывания τ состояний

взаимодействующих систем $\Delta(t) = \mathbf{x}(t+\tau) - \mathbf{u}(t)$ при анализе перемежающейся синхронизации с запаздыванием и разность $\Delta(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)$ между сигналами, снятыми с ведомой и вспомогательной систем, при анализе перемежающейся обобщенной синхронизации. Во всех вышеописанных случаях сигнал представляет собой последовательность случайно чередующихся регулярных (ламинарных) фаз и нерегулярных (турбулентных) всплесков. При этом, под ламинарной фазой понимается интервал времени, в течении которого $\|\Delta(t)\| \approx 0$. Для турбулентных фаз имеют место хаотические колебания ненулевой амплитуды. Иными словами, можно утверждать, что в режиме перемежаемости типа “on-off” анализируемый сигнал $\Delta(t)$ подвержен резким вариациям большой амплитуды. Число нерегулярных всплесков уменьшается с увеличением параметра связи, а вышеописанные режимы перемежающегося синхронного поведения переходят в режимы полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием и обобщенной синхронизации, соответственно.

Для выделения характерных фаз в режиме перемежаемости типа “on-off” традиционно используются следующие методы и подходы. Во-первых, поскольку в данном случае турбулентная фаза характеризуется существенно большей амплитудой по сравнению с ламинарной фазой, для выделения характерных фаз поведения систем можно использовать классический метод, основанный на анализе амплитуды колебаний системы. В этом случае обычно задается некоторое пороговое значение Δ_0 и производится сравнение текущего значения сигнала $\Delta(t)$ с этим порогом. Если величина, характеризующая состояние системы по абсолютной величине превышает этот порог, то есть $\|\Delta(t)\| > \Delta_0$, то считается, что в системе реализуется турбулентная фаза. Когда значение, описывающее состояние системы оказывается ниже порогового ($\|\Delta(t)\| < \Delta_0$), в системе наблюдается ламинарная фаза поведения. Основным недостатком этого метода является то, что в течение турбулентной фазы анализируемый сигнал может многократно пересекать (и пересекает) нулевое значение, то есть оказываться как выше, так и ниже порога Δ_0 . Это приводит к погрешности выделения турбулентных фаз, так как каж-

дая турбулентная фаза оказывается разделенной на несколько частей и, плюс ко всему, появляются ошибочно диагностированные короткие ламинарные фазы. Таким образом, получается погрешность при анализе статистических свойств перемежающегося поведения (определение средней длительности, законов распределения ламинарных и турбулентных фаз). Уменьшить влияние некорректно диагностированных коротких ламинарных фаз можно с помощью дополнительного анализа, выделяя и исключая из рассмотрения ламинарные фазы, длительность которых оказывается меньше определенного предела и, одновременно, объединяя друг с другом турбулентные фазы, разделяемые такими аномально короткими ламинарными фазами (с добавлением к длительности турбулентной фазы длительности этой короткой ламинарной фазы). Как правило, этот метод позволяет получить разумную статистику длительностей ламинарных фаз и определить тип перемежаемости, реализующийся в системе.

Другим более точным методом выделения ламинарных и турбулентных фаз является метод [355], основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании [356]:

$$W(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - t_0}{s} \right) dt, \quad (4.3)$$

где $x(t)$ — анализируемый сигнал, в роли которого в данном случае должна выступить одна из координат вектора $\Delta(t)$,

$$\psi(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\Omega_0\eta) \exp\left(\frac{-\eta^2}{2}\right) \quad (4.4)$$

— материнский вейвлет Морле (“*” в соотношении (4.3) обозначает комплексное сопряжение), s — временной масштаб, Ω_0 — параметр вейвлета. Значение параметра вейвлета целесообразно выбрать $\Omega_0 = 2\pi$, что обусловлено в первую очередь тем, что, такой выбор параметра обеспечивает хорошее соотношение между локализациями вейвлетной функции во времени и фурье-пространстве [356], а также позволяет легко сопоставлять временные масштабы s вейвлетного преобразования (4.3) с ча-

стотами f спектрального представления сигнала, поскольку для данного значения параметра Ω_0 выполняется соотношение $s \approx 1/f$ [356, 357].

Вейвлетная поверхность

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| e^{j\varphi_s(t_0)} \quad (4.5)$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе s в любой момент времени t_0 . Величина $|W(s, t_0)|$ характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба s в момент времени t_0 . Как правило, в рассмотрение также вводят мгновенное

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \quad (4.6)$$

и интегральное

$$\langle E(s) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |W(s, t_0)|^2 dt_0 \quad (4.7)$$

распределения энергии по временным масштабам.

Поскольку поведение системы во время ламинарных и турбулентных фаз существенно различается, то и структура вейвлетной поверхности $W(s, t_0)$ в области ламинарных и турбулентных фаз должна быть также различной [356]. Иными словами, энергия вейвлетного спектра $E(s, t_0)$, определяемого соотношением (4.6), будет распределена по характерным временным масштабам s , которые будут для разных фаз временной реализации $x(t)$ разными, причем доля энергии, приходящейся на эти характерные временные масштабы также будет различаться. Таким образом, можно перейти от анализа структуры вейвлетной поверхности $W(s, t_0)$ к анализу распределения энергии вейвлетного спектра по характерным временным масштабам. Для выделения ламинарных и турбулентных фаз в каждый момент времени t определяется суммарное значение энергии вейвлетного спектра $w(t)$, приходящейся на выбранный диапазон характерных временных масштабов $s \in S = (s_1; s_2)$.

$$w(t) = \int_S E(s, t) ds. \quad (4.8)$$

Диапазон характерных временных масштабов s , по которым будет определяться величина $w(t)$, обуславливается рассматриваемой системой, и в каждом конкретном случае должен выбираться на основании мгновенных распределений энергии вейвлетного спектра для различных фаз перемежающегося поведения. В ряде случаев может сложиться ситуация, что необходимо рассматривать несколько диапазонов временных масштабов S_i , которые однозначно позволяли бы охарактеризовать поведение системы. В этом случае интегрирование (4.8) должно проводиться по объединению $S = \bigcup_i S_i$ соответствующих диапазонов временных масштабов.

Применим вышеописанные методы для определения характеристик перемежаемости, имеющей место на границе синхронизации, индуцированной шумом (см. главу 1, а также [283–285]). В этом случае в качестве анализируемого сигнала должна быть рассмотрена разность $\Delta(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)$ между сигналами, подверженными внешнему шумовому воздействию. Как отмечалось в разделе 1.1, режим синхронизации, индуцированной шумом, имеет ряд сходств с режимом обобщенной хаотической синхронизации как по методам диагностики, так и механизмам возникновения, что позволяет рассматривать эти два типа хаотической синхронизации как единый тип синхронного поведения связанных динамических систем [86, 274]. Единство режимов обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, ставит вопрос о взаимосвязи явлений, имеющих место на границах их возникновения. Поскольку на границе обобщенной синхронизации, как упоминалось выше, имеет место перемежающееся поведение типа “on-off”, то можно ожидать, что аналогичный тип перемежаемости будет иметь место и при переходе к режиму синхронизации, индуцированной шумом. По аналогии с перемежающейся обобщенной синхронизацией будем называть этот режим перемежающейся синхронизацией, индуцированной шумом [159, 160].

Для подтверждения наличия перемежаемости типа “on-off” на границе синхронизации, индуцированной шумом, рассмотрим поведение модельных систем с непрерывным и дискретным временем, находящихся

под воздействием шума. Начнем рассмотрение с одномерных отображений. В качестве первого примера рассмотрим логистические отображения, исследованные в [86]:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(u_n) + \varepsilon(f(\xi_n) - f(u_n)), \\ v_{n+1} &= f(v_n) + \varepsilon(f(\xi_n) - f(v_n)), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где u_n, v_n — состояния систем, на которые воздействует шум, $f(x) = \lambda x(1 - x)$ — нелинейная функция, λ — управляющий параметр, ξ_n — случайная величина, подчиняющаяся нормальному распределению плотности вероятности:

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4.10)$$

где $\xi_0 = 0.5$, $\sigma = 0.12$ — среднее и среднеквадратичное отклонение, соответственно. Слагаемое $\varepsilon(f(\xi_n) - f(u_n))$ отвечает за однонаправленную диссипативную связь стохастического сигнала и рассматриваемой системы, ε — параметр интенсивности связи. Начальные условия для систем u_n и v_n выбираются различными.

Следует обратить внимание на способ введения шума в исследуемую систему. Как видно из уравнений (4.9), шум не является аддитивным, что обеспечивает изменение случайной величины в диапазоне $[0; 1]$. Такой способ введения шума является достаточно типичным для логистических отображений (см., например, [70, 86, 137]), поскольку в связи с особенностями поведения системы аддитивное введение стохастического сигнала с нулевым средним приводит к “уходу” фазовой траектории на бесконечность [285].

Известно, что в отсутствии внешнего воздействия логистическое отображение в зависимости от выбора управляющего параметра λ может демонстрировать различные режимы колебаний, в том числе и хаотические [358]. Выберем значение управляющего параметра $\lambda = 3.75$, что соответствует реализации хаотического режима в системе (4.9).

При выбранных значениях управляющих параметров и увеличении значения параметра ε система (4.9) демонстрирует переход от асинхронного состояния к режиму индуцированной шумом синхронизации [86].

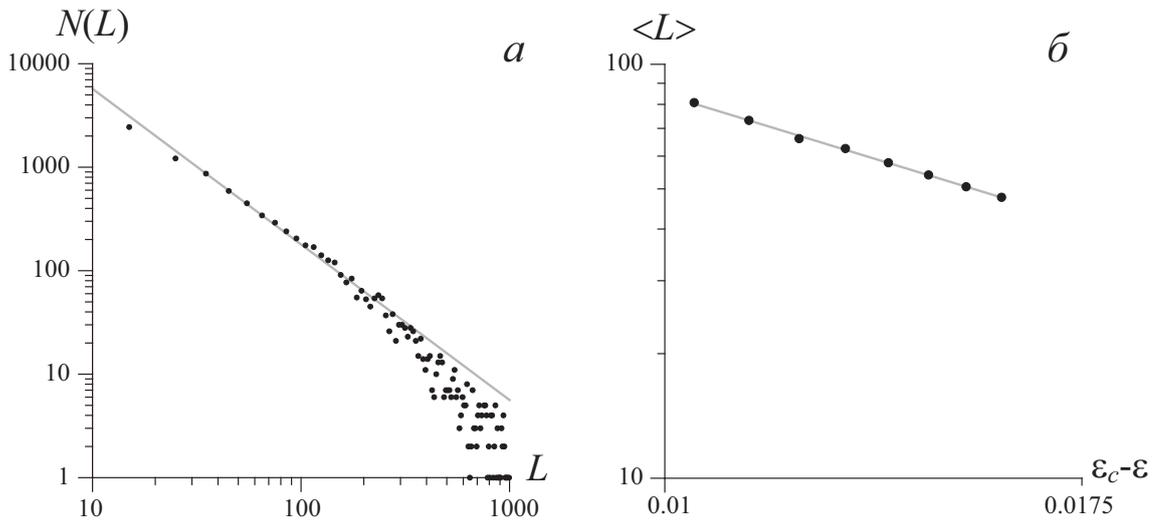


Рисунок 4.1 — Распределение длительностей ламинарных фаз при $\varepsilon = 0.1525$ (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle L \rangle$ от параметра надкритичности $(\varepsilon_c - \varepsilon)$ ($\varepsilon_c = 0.1625$) (б) логистических отображений (4.9), находящихся вблизи границы индуцированной шумом синхронизации, и соответствующие аппроксимации степенными законами (4.1) (а) и (4.2) (б). Данные, полученные путем численного моделирования, показаны точками, теоретические зависимости — сплошными линиями. Отклонение численно полученных значений от степенной зависимости в области больших длительностей фаз синхронного поведения на рисунке (а) является хорошо известным фактом для “on-off” перемежаемости (см., например, [72])

При этом, синхронный режим наблюдается при $\varepsilon > \varepsilon_c = 0.1625$. Критическое значение параметра ε определялось по моменту перехода показателя Ляпунова, рассчитанного для одной из систем (4.9), в область отрицательных значений [86], а также путем непосредственного сравнения состояний систем, подверженных внешнему шумовому воздействию, на плоскости (u, v) . Во избежание “ловушки численного счета” [282] в каждую из исследуемых систем дополнительно вводился шум (ψ_n^u и ψ_n^v , соответственно) малой амплитуды $D = 5 \times 10^{-20}$, подчиняющийся равномерному распределению плотности вероятности амплитуд.

Рассмотрим поведение системы (4.9) вблизи границы возникновения индуцированной шумом синхронизации, где, как упоминалось выше, имеет место перемежающееся поведение — перемежающаяся синхронизация, индуцированная шумом. Для определения типа перемежаемости проведем анализ статистических характеристик длительностей ламинарных фаз: распределения длительностей ламинарных фаз при заданном значении управляющего параметра (в данном случае, параметра ε) и

зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности $(\varepsilon_c - \varepsilon)$.

На рисунке 4.1 приведены распределение длительностей ламинарных фаз $N(L)$ при $\varepsilon = 0.1525$ (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности $\varepsilon_c - \varepsilon$ (б), а также их аппроксимации закономерностями (4.1) и (4.2), соответственно. Из рисунков видно, что результаты численного моделирования находятся в хорошем соответствии с теоретическими закономерностями, характерными для перемежаемости типа “on-off”. Несмотря на то, что на рисунке 4.1,а заметно отклонение численно полученных значений от степенной зависимости (4.1) в области больших длительностей ламинарных фаз, подобное отклонение не противоречит сделанному выводу, поскольку является хорошо известным фактом для дискретных отображений, демонстрирующих перемежаемость типа “on-off”. В частности, в работе [72] обращалось внимание на существование так называемого “экспоненциального хвоста” в распределении длительностей ламинарных фаз на границе обобщенной синхронизации в системе двух однонаправлено связанных дискретных отображений.

В качестве второго примера рассмотрим модельные системы с дискретным временем, исследованные в [285]:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(u_n) + \varepsilon \xi_n, \\ v_{n+1} &= f(v_n) + \varepsilon \xi_n, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где, как и в случае логистических отображений, u_n, v_n — состояния систем, на которые воздействует шум, $f(x) = \exp[-((x - 0.5)/\omega)^2]$ — экспоненциальная функция, $\omega = 0.3$ — управляющий параметр, ξ_n — случайная величина, подчиняющаяся нормальному распределению плотности вероятности (4.10), где $\xi_0 = 0$, $\sigma = 1$, ε — параметр, управляющий интенсивностью внешнего случайного воздействия. Начальные условия для систем u_n и v_n выбираются различными. В силу экспоненциального характера функции $f(x)$ в уравнениях (4.11) исследуемая система носит название экспоненциальных отображений.

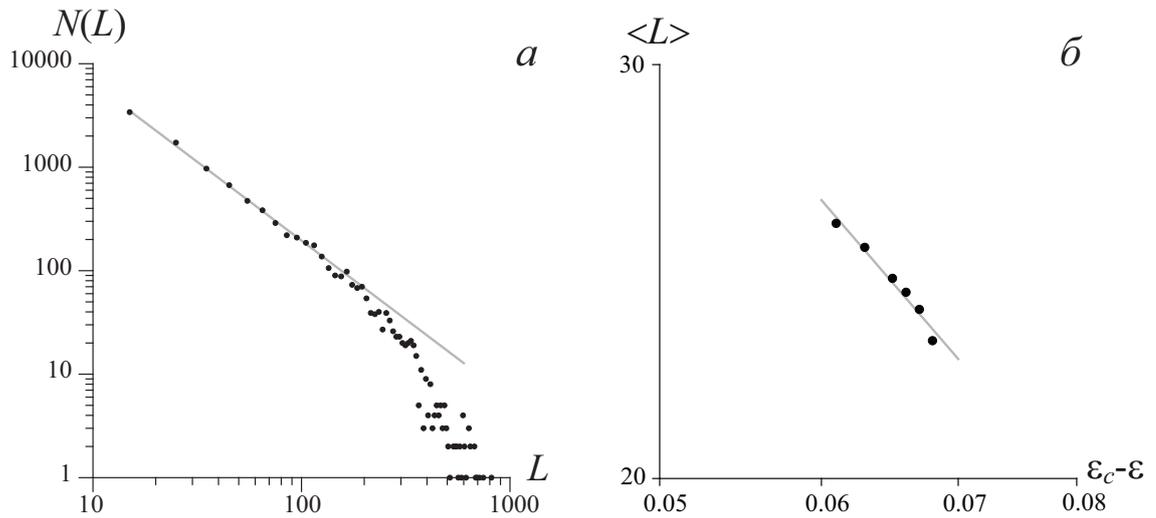


Рисунок 4.2 — Распределение длительностей ламинарных фаз при $\varepsilon = 0.165$ (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle L \rangle$ от параметра надкритичности $(\varepsilon_c - \varepsilon)$ ($\varepsilon_c = 0.17$) (б) экспоненциальных отображений (4.11), находящихся вблизи границы индуцированной шумом синхронизации, и соответствующие аппроксимации степенными законами (4.1) (а) и (4.2) (б). Данные, полученные путем численного моделирования, показаны точками, теоретические зависимости — сплошными линиями. Отклонение численно полученных значений от степенной зависимости в области больших длительностей ламинарных фаз на рисунке (а) является хорошо известным фактом для “on-off” перемежаемости (см., например, [72])

Порог возникновения режима индуцированной шумом синхронизации также, как и в случае логистических отображений (4.11), определялся с помощью расчета показателей Ляпунова для системы (4.11), а также путем непосредственного сравнения состояний систем, на которые воздействует шум. По аналогии со случаем, рассмотренным выше, во избежание “ловушки численного счета” в каждую из систем дополнительно вводился разный шум малой амплитуды $D = 9 \times 10^{-20}$. Как показывают проведенные расчеты, в данном случае, режим синхронизации, индуцированной шумом, наступает при $\varepsilon_c = 0.17$.

Вблизи границы синхронного режима наблюдается перемежающееся поведение. Аналогично случаю, рассмотренному выше, для определения типа перемежаемости проведем анализ статистических характеристик длительностей ламинарных фаз. На рисунке 4.2,а приведено распределение длительностей ламинарных фаз $N(L)$ при $\varepsilon = 0.165$ и его аппроксимация степенным законом (4.1), а на рисунке 4.2,б — зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности

$(\varepsilon_c - \varepsilon)$ и соответствующая аппроксимация (4.2). Видно, что обе характеристики с высокой степенью точности соответствуют известным аналитическим закономерностям. При этом, также как и в логистических отображениях, на рисунке 4.2,*a* имеет место отклонение численно полученных данных от теоретической зависимости (4.1) при больших значениях L , что обусловлено теми же причинами.

Таким образом, как в логистических, так и экспоненциальных отображениях, находящихся под общим источником шума с нулевым или ненулевым средним, на границе индуцированной шумом синхронизации имеет место перемежающееся поведение, статистические характеристики которого соответствуют перемежаемости типа “on-off”. Покажем, что аналогичные закономерности проявляются и в потоковых динамических системах, демонстрирующих хаотическую динамику, подверженных общему шумовому воздействию. Для этого рассмотрим модель несвязанных идентичных по управляющим параметрам², осцилляторов Лоренца [81, 285] в случае воздействия на них общего источника шума с нулевым средним.

Исследуемая система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= -x_1 z_1 + r x_1 - y_1 + \varepsilon \xi, \\ \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - b z_1, \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= p(y_2 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= -x_2 z_2 + r x_2 - y_2 + \varepsilon \xi, \\ \dot{z}_2 &= x_2 y_2 - b z_2, \end{aligned}$$

где $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$ — векторы состояния систем, на которые воздействует общий источник шума $\xi(t)$, $p = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ — управляющие параметры, ε — параметр, характеризующий интенсивность внешне-

²Во избежание “ловушки численного счета” введем в одну из систем небольшую расстройку по параметру r , то есть положим $r = r + \Delta$, где $\Delta = 0.1$.

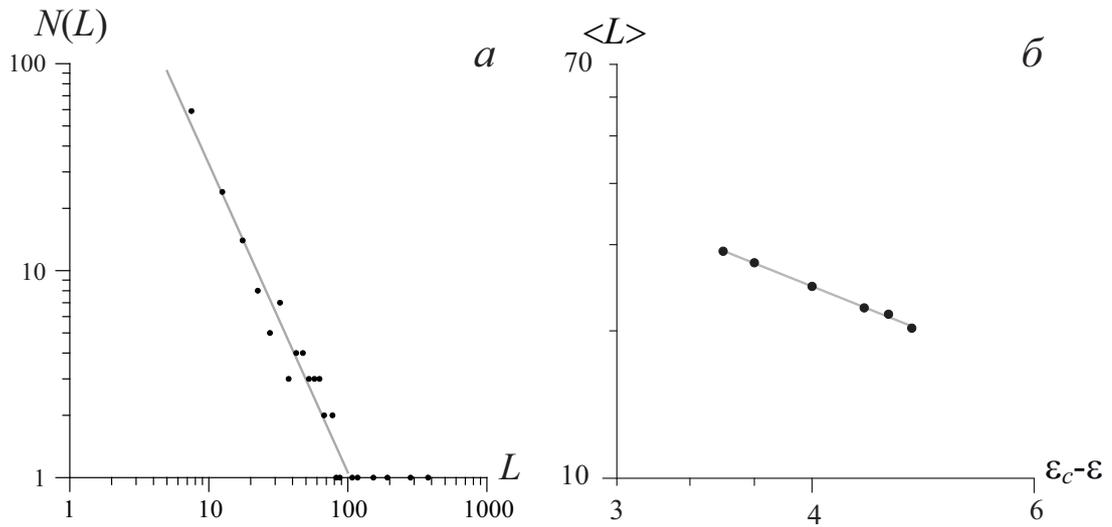


Рисунок 4.3 — Распределение длительностей ламинарных фаз при $\varepsilon = 29.3$ (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle L \rangle$ от параметра надкритичности $(\varepsilon_c - \varepsilon)$ (б), $\varepsilon_c = 30.4$ систем Лоренца (4.12), находящихся вблизи границы индуцированной шумом синхронизации, и соответствующие аппроксимации степенными законами (4.1) (а) и (4.2) (б). Данные, полученные путем численного моделирования, показаны точками, теоретические зависимости — сплошными линиями. Отклонение численно полученных значений от степенной зависимости в области больших длительностей ламинарных фаз на рисунке (а) обусловлено бедностью статистики

го воздействия, ξ — случайная величина, подчиняющаяся нормальному распределению плотности вероятности (4.10), где $\xi_0 = 0$, $\sigma = 25^3$.

Порог возникновения режима синхронизации, индуцированной шумом, определялся с помощью расчета спектра показателей Ляпунова для одной из систем (4.12). При переходе старшего показателя Ляпунова через нуль диагностировалось наступление синхронного режима. Проведенные расчеты показали, что режим синхронизации, индуцированной шумом, в системе (4.12) возникает при величине параметра $\varepsilon_c = 30.4$, что находится в хорошем соответствии с результатами работы [285]. Следует отметить, что в виду недиссипативного характера воздействия шума на исследуемую систему, значение ε должно быть достаточно высоким для того, чтобы синхронизовать системы [78, 86].

³Такое значение среднеквадратичного отклонения обеспечивает примерное совпадение амплитуд собственных колебаний системы Лоренца и шумового сигнала.

Также, как и в случае отображений (4.9) и (4.11), на границе синхронного режима наблюдается перемежающееся поведение. Чтобы определить тип перемежаемости в данном случае по аналогии с дискретными отображениями был проведен статистический анализ длительностей ламинарных фаз.

На рисунке 4.3,*a* показано распределение длительностей ламинарных фаз для параметра связи $\varepsilon = 29.3$. Видно, что данное распределение хорошо аппроксимируется степенным законом (4.1), однако, заметно отклонение численно полученных данных от теоретической зависимости (4.1) при больших значениях L , что обусловлено бедностью статистики.

Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности $(\varepsilon_c - \varepsilon)$ показана на рисунке 4.3,*б*. Видно, что и в данном случае численно полученные результаты удовлетворяет с достаточно высокой степенью точности известной закономерности (4.2).

Таким образом, и в случае потоковых динамических систем, демонстрирующих хаотическую динамику, на границе синхронизации индуцированной шумом с нулевым средним имеет место перемежаемость типа “on-off”. Можно сделать вывод, что эта закономерность является универсальной при переходе к режиму индуцированной шумом синхронизации: и в потоковых системах, и в отображениях, находящихся под воздействием общего источника шума.

Суммируя все вышеизложенное, можно сделать вывод о том, что вблизи границ возникновения режимов полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием, обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом имеет место перемежающееся поведение типа “on-off”.

4.2 Перемежающееся поведение на границе фазовой хаотической синхронизации

Перейдем к рассмотрению характеристик перемежающегося поведения, имеющего место на границе фазовой хаотической синхронизации. При этом, по аналогии с работами [112, 359–361] под фазовой синхронизацией будем понимать такой режим, при котором происходит захват фаз хаотических сигналов при отсутствии какой-либо корреляции между их амплитудами.

Как видно из приведенного определения, понятие фазовой синхронизации тесно связано с понятием фазы хаотического сигнала [310, 359, 360, 362]. В настоящее время существует несколько способов введения фазы хаотического сигнала, дающих одинаково корректные результаты для систем с достаточно хорошей топологией аттрактора (систем с фазово-когерентным аттрактором⁴). Наиболее распространенным из них является способ введения фазы $\phi(t)$ как угла порота на плоскости (x, y) [332, 361]

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x}. \quad (4.13)$$

При этом все траектории на плоскости (x, y) должны вращаться вокруг начала координат, то есть на данной плоскости аттрактор должен быть фазово-когерентным. Мгновенная фаза хаотического сигнала может быть введена в рассмотрение также с помощью преобразования Гильберта [310, 359] и процедуры сечения Пуанкаре [310, 359]. В ряде случаев возможно избавиться от фазовой некогерентности аттрактора при помощи преобразования координат (как делалось, например, для системы Лоренца) [361, 363] или путем перехода на плоскость скоро-

⁴Под системой с фазово-когерентным аттрактором понимается система, для которой существует такая плоскость состояний (x, y) , проекция фазовой траектории на которую все время будет вращаться вокруг начала координат, не пересекая, и не огибая его. Также существуют системы с плохо определенной фазой (системы с фазово-некогерентным хаотическим аттрактором). Для такого аттрактора проекция фазовой траектории на какую-либо плоскость ведет себя так, что в какие-то моменты времени она огибает начало координат, не делая полного оборота вокруг него, что приводит к тому, что начало координат “замазывается” участками фазовой траектории.

стей (\dot{x}, \dot{y}) . В последнем случае фаза может быть введена в рассмотрение как угол в полярных координатах на плоскости (\dot{x}, \dot{y}) , то есть $\operatorname{tg} \phi = \dot{y}/\dot{x}$ [364].

Режим фазовой хаотической синхронизации между сигналами $\mathbf{x}_{1,2}(t)$ возникает тогда, когда разность мгновенных фаз этих сигналов (введенных в рассмотрение одним из вышеперечисленных способов) оказывается ограниченной во времени

$$|\Delta\phi(t)| = |\phi_1(t) - \phi_2(t)| < \operatorname{const}. \quad (4.14)$$

Независимо от способа введения фазы хаотического сигнала, эти фазы считают монотонно возрастающими (убывающими) от 0 до $+\infty$ (от 0 до $-\infty$). При этом следует отметить, что фаза хаотического сигнала, каким бы образом она ни вводилась в рассмотрение, может быть представлена как в интервале значений $\phi \in (-\infty; \infty)$, так и в полосе шириной 2π (например, $\phi \in [-\pi; \pi)$ или $\phi \in [0; 2\pi)$). Для анализа условия захвата фаз (4.14) фаза сигнала должна расти монотонно и, соответственно, принимать значения $\phi \in (-\infty; \infty)$. В то же самое время, в ряде случаев можно использовать и ограниченные значения фазы, например, $\phi \in [0; 2\pi)$, при этом переход от первого случая ко второму легко выполняется с помощью определения фазы по модулю 2π

$$\phi_{[0; 2\pi)} = \phi_{(-\infty; \infty)} \bmod 2\pi. \quad (4.15)$$

В работах [334, 365] было показано, что в зависимости от величины расстройки управляющих параметров взаимодействующих систем существуют два различных сценария возникновения фазовой синхронизации хаотических осцилляторов. Существование двух типов установления фазовой синхронизации приводит к наличию двух различных сценариев разрушения этого режима. При достаточно малой расстройке параметров взаимодействующих осцилляторов разрушение режима фазовой синхронизации связано с нарушением общего ритма хаотических колебаний. В этом случае хаотические аттракторы взаимодействующих систем всегда остаются фазово-когерентными. Если же расстройка управляющих

параметров достаточно велика, то с уменьшением значения параметра связи между взаимодействующими системами (или при уменьшении амплитуды внешнего воздействия) по крайней мере один из аттракторов взаимодействующих осцилляторов теряет фазовую когерентность и ниже порога разрушения (возникновения) фазовой синхронизации является фазово–некогерентным [365].

Наличие двух различных сценариев разрушения фазовой синхронизации говорит о наличии двух разных типов поведения на границе ее возникновения. Известно, что переход к фазовой синхронизации в обоих случаях осуществляется через перемежаемость. В этом случае (независимо от величины расстройки собственных частот взаимодействующих систем) зависимость разности фаз $\Delta\phi(t)$ этих систем от времени характеризуется наличием участков синхронного поведения (ламинарных фаз), прерывающихся внезапными скачками, когда значения разности фаз меняются на величину 2π (турбулентные фазы). При определении типа перемежаемости, реализующегося в системе, играет роль статистика длительностей ламинарных (турбулентных) фаз. Если параметры взаимодействующих систем расстроены достаточно слабо, при фиксированном значении расстройки управляющих параметров взаимодействующих осцилляторов с увеличением параметра связи, по мере приближения к границе фазовой синхронизации наблюдается режим перемежаемости I-типа [108, 161, 366, 367], а в непосредственной близости к границе хаотической фазовой синхронизации существует режим сверхдолгого ламинарного поведения, названного перемежаемостью “игольного ушка” [107]. Если же собственные частоты взаимодействующих систем достаточно сильно отличаются друг от друга, вблизи границы фазовой синхронизации имеет место перемежаемость “кольца” [111].

Также, как и перемежаемость типа “on-off”, перемежаемости “игольного ушка” и “кольца” характеризуются своими статистическими характеристиками длительностей ламинарных фаз. В то же самое время, в обоих случаях распределение длительностей ламинарных фаз $N(L) n(l)$

при фиксированных значениях управляющих параметров удовлетворяет экспоненциальному закону

$$n(L) = \frac{1}{\langle L \rangle} \exp\left(-\frac{L}{\langle L \rangle}\right), \quad (4.16)$$

где $n(L)$ — плотность распределения вероятности, $\langle L \rangle$ — средняя длительность ламинарных фаз при перемежаемости “игольного ушка” или “кольца”⁵, но теоретические зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности оказываются различными для этих типов перемежаемости. Так, в режиме перемежаемости “кольца” зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности удовлетворяет закономерности

$$\langle L \rangle = T - \frac{T}{\ln(1-p)}, \quad (4.17)$$

где $T \approx 1/|f_r - f_d|$, $f_{d,r}$ — основные частоты ведущей и ведомой систем, соответственно, $p = p(\varepsilon)$ — вероятность появления фазового проскока, зависящая от величины параметра связи ε и определяемая как $p(\varepsilon) = (\varepsilon_c - \varepsilon)/(\varepsilon_c - \varepsilon_t)$, где ε_c — порог возникновения фазовой синхронизации, ε_t — момент потери фазовой когерентности хаотическим аттрактором одной из взаимодействующих систем. Для режима перемежаемости “игольного ушка” имеет место другая закономерность

$$\langle L \rangle \sim \exp(k|\varepsilon_c - \varepsilon|^{-1/2}) \quad (4.18)$$

или

$$\ln(1/\langle L \rangle) = c_0 - c_1|\varepsilon_c - \varepsilon|^{-1/2}, \quad (4.19)$$

где c_0 , c_1 и k — некоторые константы, ε_c по-прежнему соответствует порогу возникновения фазовой синхронизации. Указанные выражения (4.18)–(4.19) впервые получены в работе [302] для статистики переходного процесса, предшествующего точке бифуркации слияния пары неустойчивых орбит.

⁵Указанная закономерность для перемежаемости “игольного ушка” получена в рамках рассмотрения этого типа перемежающегося поведения как перемежаемости типа I в присутствии шума в закритической области значений управляющего параметра [309, 368]. Как будет показано в разделе 4.3, подобное рассмотрение оказывается правомерным.

Различными являются и механизмы возникновения перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”. Отличить один тип поведения от другого можно путем анализа поведения одной из взаимодействующих систем на плоскости (x', y') , вращающейся вокруг начала координат с частотой другой системы (так называемого метода вращающейся плоскости) [111, 365, 369]:

$$\begin{aligned} x' &= \tilde{x}_2 \cos \tilde{\phi}_1 + \tilde{y}_2 \sin \tilde{\phi}_1, \\ y' &= -\tilde{x}_2 \sin \tilde{\phi}_1 + \tilde{y}_2 \cos \tilde{\phi}_1, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ — плоскость состояний одной из взаимодействующих систем, на которой возможно ввести фазу хаотического сигнала, $\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_1(t)$ — фаза другой системы (или фаза внешнего воздействия). В том случае, если взаимодействующие системы находятся в режиме фазовой синхронизации, фазовая траектория на плоскости (x', y') выглядит как “зашумленная устойчивая точка” [334, 365]. Возникновение режима перемежаемости “игольного ушка” сопровождается исчезновением устойчивой точки и появлением предельного цикла достаточно большой амплитуды, причем каждый оборот предельного цикла соответствует фазовому проскоку [365, 369]. В режиме перемежаемости “кольца” фазовая траектория выглядит как “зашумленный предельный цикл” малой амплитуды, охватывающий начало координат [111]. При этом, каждый обхват начала координат соответствует проскоку фазы.

Для выделения участков ламинарного (синхронного) и турбулентного (асинхронного) поведения из перемежающихся временных реализаций систем, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации, предложены различные методы и подходы. Все они базируются на рассмотрении динамики разности фаз $\Delta\phi(t)$ с течением времени⁶. Типичная зависимость такой разности фаз представлена на рисунке 4.4, *a*. Участки, где разность фаз $\Delta\phi(t)$ изменяется в пределах 2π , соответствуют синхронному (ламинарному) поведению, когда наблюдается захват фазы. Остальные участки соответствуют асинхронным участкам движения (турбулентному поведению), где происходит проскок фазы.

⁶При этом, как упоминалось выше, фазы хаотических сигналов считаются монотонно возрастающими (убывающими) от 0 до $+\infty$ (от 0 до $-\infty$).

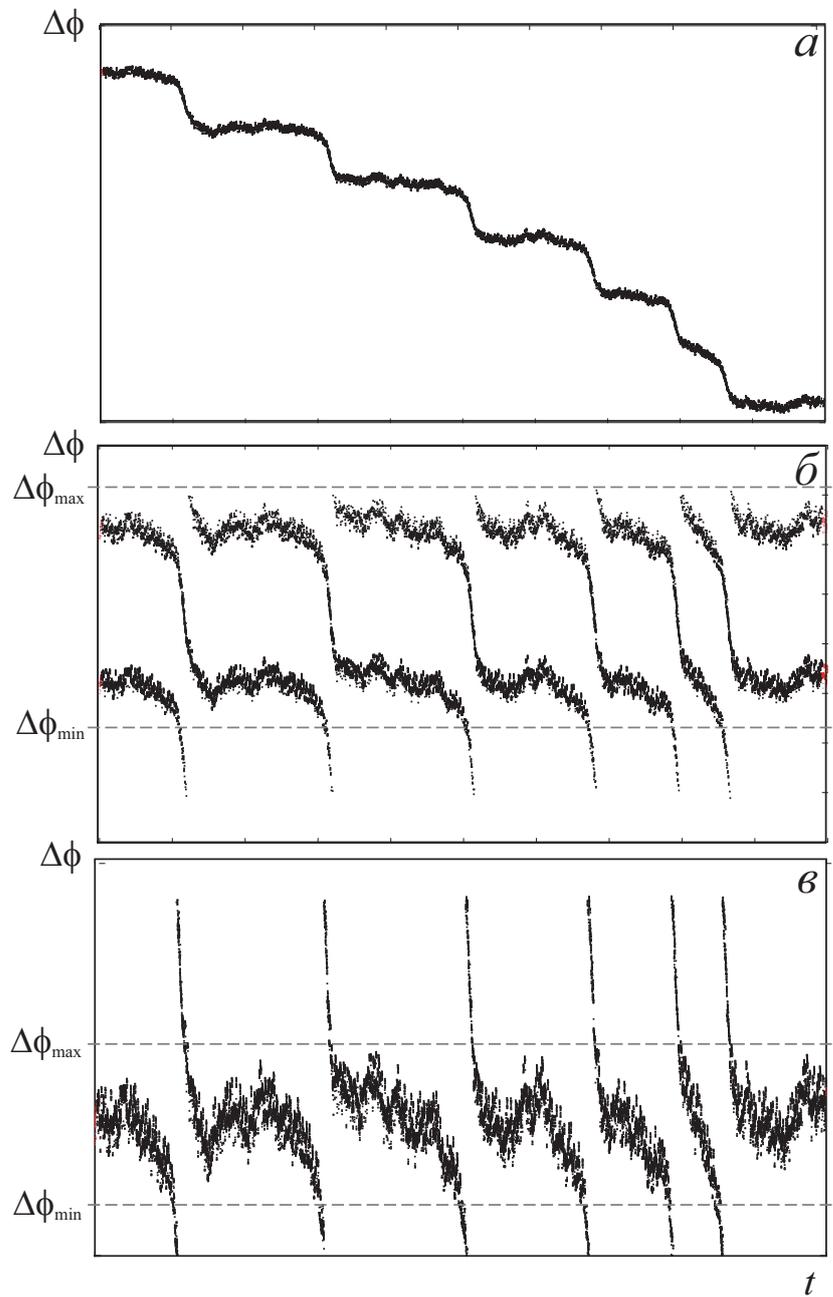


Рисунок 4.4 — Типичные зависимости разности фаз $\Delta\phi(t)$ для случаев: (а) когда мгновенные фазы монотонно убывают от 0 до $-\infty$; (б) когда мгновенные фазы лежат в диапазоне $[-2\pi; 2\pi]$; (в) когда диапазон изменения разности мгновенных фаз составляет 2π

Несмотря на то, что участки ламинарного и турбулентного поведения на временной зависимости $\Delta\phi(t)$ легко определяются визуально, при численном выделении этих фаз возникает целый ряд проблем, связанных с хаотическими флуктуациями, которые приводят к ложному детектированию возникновения ламинарных или турбулентных фаз. Для того чтобы избавиться от ложно определенных фаз, которые возникают при численном выделении участков турбулентного и ламинарного поведения, можно использовать метод, предложенный нами в [116, 253].

Суть метода заключается в том, что нужно считать мгновенные фазы $\phi_{1,2}(t)$ не монотонно возрастающими (убывающими), а лежащими в пределах $[0; 2\pi]$. В этом случае разность фаз $\Delta\phi(t)$ будет изменяться в диапазоне $[-2\pi; 2\pi]$ и иметь вид, показанный на рисунке 4.4, б. Из сопоставления рисунков 4.4, а и 4.4, б видно, что на рисунке 4.4, б существует некоторый диапазон значений разности фаз $[\Delta\phi_{\min}; \Delta\phi_{\max}]$, выход значения $\Delta\phi(t)$ за пределы которого соответствует началу турбулентной фазы. При этом важно отметить, что все флуктуации величины $\Delta\phi(t)$, обусловленные хаотическим характером колебаний взаимодействующих систем, оказываются локализованными в области ламинарных участков поведения систем, в то время как изменение разности фаз во время турбулентного (асинхронного) участка поведения практически не демонстрирует существенных флуктуаций. Это позволяет во время численного анализа временных реализаций однозначно и достаточно точно диагностировать начало и конец турбулентной фазы по значению величины $\Delta\phi(t)$.

Очевидно, что если величины $\phi_{1,2}(t)$ изменяются в диапазоне $[0; 2\pi]$, то разность фаз $\Delta\phi(t)$ будет лежать в интервале $[-2\pi; 2\pi]$. При этом зависимость будет являться многозначной, что не очень удобно для анализа поведения изучаемых систем. Чтобы избавиться от этого недостатка метода, можно использовать факт 2π -периодичности фазы, и перевести величину разности фаз из диапазона значений шириной 4π к аналогичному диапазону шириной 2π . При этом нужно стремиться к тому, чтобы значения разности фаз, соответствующие ламинарному участку

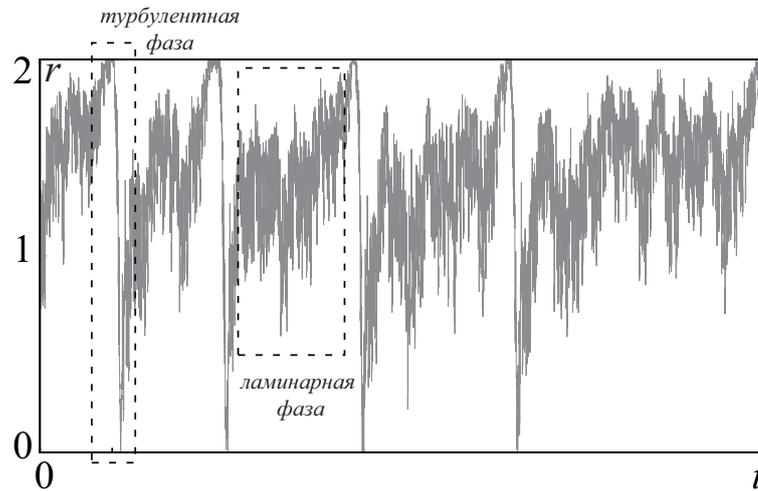


Рисунок 4.5 — Типичный вид зависимости характеристики $r(t)$ от времени в режиме перемежаемости

поведения системы приходилось примерно на середину диапазона значений (рисунок 4.4, в). В этом случае диагностировать начало и конец участка турбулентной (асинхронной) динамики можно по пересечению величиной $\Delta\phi(t)$ некоторых установленных пороговых значений $\Delta\phi_{\min}$ и $\Delta\phi_{\max}$. Важно отметить, что и в этом случае все флуктуации, обычно препятствующие точному детектированию начала и конца ламинарных и турбулентных фаз, оказываются сосредоточенными, как правило, в области значений $[\Delta\phi_{\min}; \Delta\phi_{\max}]$, соответствующей ламинарному характеру поведения систем, а во время быстрых турбулентных фаз эти флуктуации не играют существенной роли и не препятствуют точному нахождению моментов начала и конца участков синхронной и асинхронной динамики.

Думаю, что правильнее и безопаснее сказать не то, что все флуктуации оказываются сосредоточенными в области ламинарных фаз, а то, что во время турбулентных фаз, которые очень быстрые, эти флуктуации не играют важного значения и не препятствуют точному нахождению моментов начала и конца соответствующих участков поведения.

Другим способом выделения ламинарных (турбулентных) фаз, дающим корректные результаты в области относительно слабых значений расстройки собственных частот (где разрушение синхронного режима происходит без потери фазовой когерентности хаотического аттрактора

и реализуется через перемежаемость “игольного ушка”) является введение в рассмотрение характеристики

$$r = \sqrt{(\cos \phi_2 - \cos \phi_1)^2 + (\sin \phi_2 - \sin \phi_1)^2}, \quad (4.21)$$

(где $\phi_{1,2} = \phi_{1,2}(t)$ – по-прежнему фазы взаимодействующих систем, введенные в рассмотрение одним из традиционных способов (см. выше)), являющейся, фактически, расстоянием на фазовой плоскости между двумя осцилляторами с единичными амплитудами. Здесь следует обратить внимание на тот факт, что диапазон изменения фазы в данном случае не имеет значения, что позволяет избежать излишних временных затрат на сведение фазы в нужный диапазон изменения. Путем несложных математических преобразований можно показать, что выражение (4.21) сводится к следующему:

$$r = 2 \sin \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}, \quad (4.22)$$

откуда следует, что в случае появления изменения разности фаз на величину 2π , то есть при возникновении фазового проскока (появлении турбулентной фазы), величина $r(t)$ будет изменяться в диапазоне от 0 до 2 и совершать скачок с 0 на 2 (или с 2 на 0). Когда зависимость $r(t)$ оказывается локализованной вблизи какого-либо значения в течение некоторого интервала времени, в системе наблюдается участок синхронного поведения (ламинарная фаза). Типичный вид зависимости $r(t)$ в режиме перемежаемости приведен на рисунке 4.5. На нем отмечены характерные ламинарная и турбулентная фазы.

Следует отметить, что оба описанных выше метода выделения ламинарных (турбулентных) фаз могут быть использованы также для определения границы фазовой синхронизации, однако, наибольшее применение они нашли при анализе перемежающегося поведения, имеющего место на границе возникновения этого режима.

4.3 Сопоставление перемежаемости “игольного ушка” и перемежаемости типа I в присутствии шума

Рассмотрим вопрос о характеристиках перемежаемости “игольного ушка”, имеющей место вблизи границы фазовой синхронизации при малых расстройках собственных частот взаимодействующих систем, более подробно. Одним из неизученных вопросов, связанных с рассмотрением этого режима, является вопрос о сопоставлении характеристик этого типа перемежающегося поведения с характеристиками перемежаемости типа I в присутствии, шума, имеющей место в периодических системах, подверженных дополнительному шумовому воздействию, в закритической области значений управляющих параметров. Исследование этого вопроса связано, в первую очередь с тем, что системы, демонстрирующие периодическую динамику, в присутствии шума, и хаотические системы, находящиеся вблизи границ возникновения синхронных режимов, демонстрируют сходные черты. В частности, известны работы (см., например, [11, 370–373]), в которых было показано, что хаотическая динамика системы в ряде случаев может быть рассмотрена как “зашумленные” периодические колебания. Позднее было обнаружено, что в связанных хаотических системах и системах, демонстрирующих периодическую динамику, реализуются одни и те же сценарии разрушения синхронного режима [334, 365]. Более того, при определенных условиях динамика хаотических систем вблизи границы синхронного режима может рассматриваться как случайные возмущения периодического поведения [361, 368, 374]. В частности, для двух связанных хаотических систем поведение одного из условных показателей Ляпунова в окрестности границы режима фазовой синхронизации подчиняется тем же закономерностям, что и в случае неавтономного поведения систем, демонстрирующих периодическую динамику, находящихся под действием шума [248, 375]. Кроме того, как будет показано ниже (см. также [162, 163]), выражения для зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности в режимах перемежае-

мости типа I в присутствии шума и перемежаемости “игольного ушка” могут быть сведены друг к другу, при этом, верхние границы перемежающегося поведения обоих типов ведут себя одинаково (см. также [163]).

4.3.1 Эквивалентность перемежаемости типа I в присутствии шума и перемежаемости “игольного ушка”: теория

Перед тем, как перейти к описанию полученных результатов, кратко рассмотрим особенности режима перемежаемости типа I в присутствии шума. Как упоминалось в начале главы, режим перемежаемости типа I (без шума) представляет собой один из классических сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим. Он наблюдается вблизи точки седло–узловой (касательной) бифуркации, при этом зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle L \rangle$ от параметра надкритичности $(\varepsilon_b - \varepsilon)$ подчиняется степенному закону

$$\langle L \rangle \sim (\varepsilon_b - \varepsilon)^{-1/2}, \quad (4.23)$$

где ε — управляющий параметр, ε_b — его бифуркационное значение (порог седло–узловой бифуркации) [376]. Добавление шума в исследуемую систему приводит к трансформации характеристик перемежаемости [309, 368, 377], при этом перемежающееся поведение будет наблюдаться как ниже, так и выше точки седло–узловой бифуркации ε_b . В докритической области значений управляющего параметра (то есть при $\varepsilon < \varepsilon_b$) зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности будет по-прежнему подчиняться закономерности (4.23), в то время как в закритической области ($\varepsilon > \varepsilon_b$), представляющей интерес для проводимых исследований, указанная зависимость сильно трансформируется и, как было показано в работе [309], подчиняется закону

$$\langle L \rangle = \frac{1}{k\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_b}} \exp\left(\frac{4(\varepsilon - \varepsilon_b)^{3/2}}{3D}\right), \quad (4.24)$$

(где D — интенсивность шумового воздействия ξ_n ($\langle \xi_n \rangle = 0$, $\langle \xi_n \xi_m \rangle = D\delta(n - m)$)), который оказывается справедливым при

$$D^{2/3} \ll |\varepsilon - \varepsilon_b| \ll 1 \quad (4.25)$$

(см. также [375, 377]). Так как в этой области параметр надкритичности $(\varepsilon - \varepsilon_b)$ оказывается достаточно большим, вместо (4.24) можно использовать приближенное уравнение

$$\ln 1/\langle L \rangle = \ln k - B(\varepsilon - \varepsilon_b)^{3/2} \quad (4.26)$$

(см. также [368]). При этом, распределение длительностей ламинарных фаз при перемежаемости типа I в присутствии шума подчиняется экспоненциальному закону (4.16).

Покажем, что перемежаемость типа I в присутствии шума в закритической области значений управляющего параметра и перемежаемость “игольного ушка” могут быть рассмотрены как один тип перемежающегося поведения. Для того, чтобы доказать это математически, покажем, что зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности (4.26) и (4.19), известные для этих типов перемежаемости, являются различными аппроксимациями выражения (4.24). Тогда уравнение (4.19) должно быть выведено из уравнения (4.26) и наоборот. Как следствие, коэффициенты B , k и c_0 , c_1 в (4.26) и (4.19) должны быть связаны друг с другом. Очевидно, что средняя длительность ламинарных фаз должна подчиняться уравнениям (4.26) и (4.19) одновременно, независимо от того, считается ли поведение системы перемежаемостью “игольного ушка” или перемежаемостью типа I в присутствии шума. Кроме того, распределение длительностей ламинарных фаз для рассматриваемых типов поведения должно подчиняться экспоненциальному закону (4.16).

Чтобы найти связь коэффициентов в уравнениях (4.26) и (4.19), введем вспомогательную переменную $\kappa = (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2}$ и разложим $\ln(1/\langle L \rangle)$, определяемый выражением (4.26) (для перемежаемости типа I в присут-

ствии шума) в ряд Тейлора в окрестности точки $\kappa_0 = (\varepsilon_c - \varepsilon_0)^{-1/2}$, где $\varepsilon_b < \varepsilon_0 < \varepsilon_c$, то есть

$$\begin{aligned}
\ln(1/\langle L \rangle) &= (\ln k - B(\varepsilon_0 - \varepsilon_b)^{3/2}) - \\
&- 3 \left(B\sqrt{\varepsilon_0 - \varepsilon_b} (\varepsilon_c - \varepsilon_0)^{3/2} \right) (\kappa - \kappa_0) + \\
&+ \frac{3B(\varepsilon_c - \varepsilon_0)^2(4\varepsilon_0 - \varepsilon_c - 3\varepsilon_b)}{2\sqrt{\varepsilon_0 - \varepsilon_b}} (\kappa - \kappa_0)^2 + o((\kappa - \kappa_0)^3) = \\
&= \ln k - \frac{B(20\varepsilon_0^2 - 21\varepsilon_0\varepsilon_c + 3\varepsilon_c^2 - 19\varepsilon_b\varepsilon_0 + 15\varepsilon_b\varepsilon_c + 2\varepsilon_b^2)}{2\sqrt{\varepsilon_0 - \varepsilon_b}} \quad (4.27) \\
&- \frac{3B(\varepsilon_c - \varepsilon_0)^2(5\varepsilon_0 - \varepsilon_c - 4\varepsilon_b)}{\sqrt{\varepsilon_0 - \varepsilon_b}\sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_0}} (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2} + \\
&+ \frac{3B(\varepsilon_c - \varepsilon_0)^2(4\varepsilon_0 - \varepsilon_c - 3\varepsilon_b)}{2\sqrt{\varepsilon_0 - \varepsilon_b}} (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1} + o((\kappa - \kappa_0)^3).
\end{aligned}$$

Пренебрегая членом $o((\kappa - \kappa_0)^3)$ в (4.27), можно переписать выражение (4.27) в виде

$$\ln(1/\langle L \rangle) = c_0 - c_1(\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2} + c_2(\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1}. \quad (4.28)$$

Накладывая дополнительное требование

$$c_2 = \frac{3B(\varepsilon_c - \varepsilon_0)^2(4\varepsilon_0 - \varepsilon_c - 3\varepsilon_b)}{2\sqrt{\varepsilon_0 - \varepsilon_b}} \equiv 0 \quad (4.29)$$

получаем:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_c + 3\varepsilon_b}{4}, \quad \varepsilon_b < \varepsilon_0 < \varepsilon_c \quad (4.30)$$

и тогда выражение (4.28), описывающее зависимость средней длительности $\langle L \rangle$ ламинарных фаз от параметра надкритичности для перемежаемости типа I в присутствии шума совпадает точно с выражением (4.19), соответствующим перемежаемости “игольного ушка”. При этом, с уче-

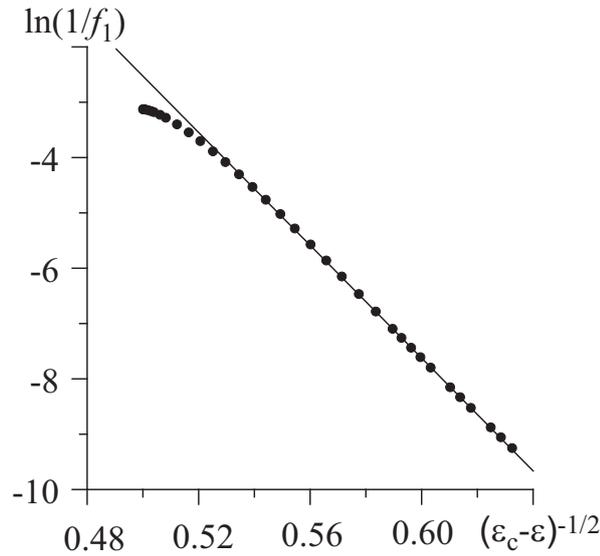


Рисунок 4.6 — Зависимость $f_1(\varepsilon) = k^{-1} \exp(B\varepsilon^{3/2})$, моделирующая теоретический закон (4.26), и его аппроксимация кривой $f_2(x) = c_0 - c_1(\varepsilon - \varepsilon_c)^{-1/2}$, соответствующей закономерности (4.19) для перемежаемости “игольного ушка”. Значения параметров: $k^{-1} = 23$, $B = 3.33$, $c_0 = 23.5$, $c_1 = 51.9$, $\varepsilon_c = 4.0$. Точки, соответствующие $f_1(x)$, показаны символами \bullet . Теоретический закон (4.19) для перемежаемости “игольного ушка” показан сплошной линией

том выражения (4.30) коэффициенты B , k и c_0 , c_1 в (4.26) и (4.19) будут связаны между собой следующим образом:

$$c_0 = \ln k + B(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^{3/2},$$

$$c_1 = \frac{9\sqrt{3}}{16} B(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2.$$
(4.31)

Рисунок 4.6 иллюстрирует взаимосвязь двух теоретических законов (4.26) и (4.19) в области $\varepsilon > \varepsilon_b$. Здесь функция $f_1(x) = k^{-1} \exp(B\varepsilon^{3/2})$ моделирует теоретический закон (4.26) (критическая точка предполагается равной $\varepsilon_b = 0$), в то время как кривая $f_2(x) = c_0 - c_1(\varepsilon - \varepsilon_c)^{-1/2}$ соответствует закономерности (4.19) для перемежаемости “игольного ушка”. Значения коэффициентов B , k , c_0 и c_1 выбраны в соответствии с выражением (4.31). Видно, что в исследуемой области обе кривые совпадают друг с другом. Это означает, что средняя длительность ламинарных фаз подчиняется закономерностям (4.26) и (4.19) одновременно, независимо от того, классифицируется ли поведение системы как перемежаемость типа I с шумом, или перемежаемость “игольного ушка”.

4.3.2 Эквивалентность перемежаемости типа I в присутствии шума и перемежаемости “игольного ушка”: численное моделирование

Для подтверждения эквивалентности режимов перемежаемости типа I в присутствии шума в закритической области значений управляющего параметра и перемежаемости “игольного ушка” рассмотрим несколько примеров систем, демонстрирующих как перемежаемость “игольного ушка” (связанные системы Ресслера), так и перемежаемость типа I в присутствии шума (неавтономный автогенератор Ван дер Поля). Как будет показано ниже, во всех рассмотренных случаях закономерности (4.19) и (4.26) будет одинаково справедливы, при этом во всех случаях также имеет место экспоненциальный характер распределения длительностей ламинарных фаз.

Начнем рассмотрение с систем, демонстрирующих вблизи границы установления режима фазовой синхронизации, перемежаемость “игольного ушка” [107, 108, 367]. Классическим примером таких систем являются две однонаправленно связанные системы Ресслера (1.15), рассмотренные в главе 1, в случае малой расстройки между взаимодействующими системами. Проведем исследование таких систем при тех же значениях управляющих параметров a , p , c , ω_u (см. стр. 61), $\omega_x = 0.93$ и $D_1 = D_2 = 0$. Рисунок 4.7, на котором представлены зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности и распределение длительностей ламинарных фаз, иллюстрирует полученные результаты. Чтобы сравнить результаты численного моделирования с теоретическими закономерностями (4.19) и (4.26) на рисунке 4.7,а,б одни и те же результаты представлены двумя различными способами: рисунок 4.7,а наглядно иллюстрирует сопоставление численных данных с аналитической аппроксимацией, характерной для перемежаемости “игольного ушка”, а рисунок 4.7,б — те же самые данные для сопоставления с закономерностью, характерной для перемежаемости типа I с шумом в закритической области значений параметра. На рисун-

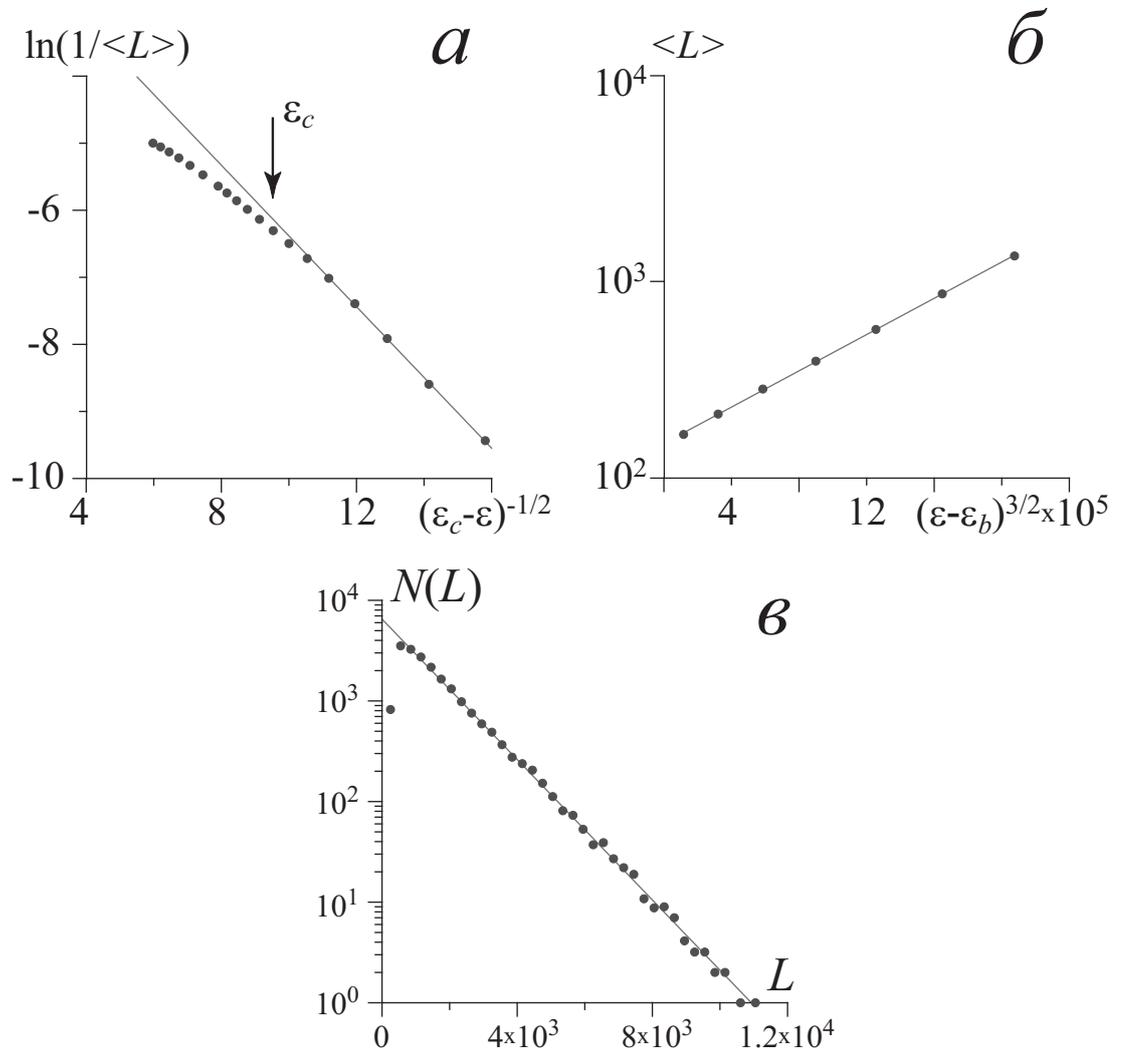


Рисунок 4.7 — Зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности (*a, б*) и распределение длительностей ламинарных фаз (*в*) для двух однонаправленно связанных систем Ресслера (1.15). Точки соответствуют результатам численного моделирования, сплошные линии — теоретическим аппроксимациям (4.19), (4.24) и (4.16). (*a*) Переमेжаемость “игольного ушка”: $\varepsilon_c = 0.042$, $c_0 = -0.75$, $c_1 = 0.55$, стрелкой показана граница возникновения режима перемежаемости “игольного ушка” ε_b . (*б*) Перемежаемость типа I с шумом: $\varepsilon_b = 0.0345$, $B = 1.01 \times 10^4$, $k = 6.68 \times 10^{-4}$, ось ординат показана в логарифмическом масштабе. (*в*) $\varepsilon = 0.035$

ке 4.7,*в* представлено распределение длительностей ламинарных фаз для системы (1.15) при фиксированном значении параметра связи $\varepsilon = 0.035$ ($\varepsilon_b < \varepsilon < \varepsilon_c$) и ее аппроксимация экспоненциальным законом (4.16). Видно, что во всех случаях численные данные с высокой степенью точности согласуются с результатами теоретических предсказаний. На рисунке 4.7,*а* зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle L \rangle$ от параметра надкритичности ($\varepsilon_c - \varepsilon$), где $\varepsilon_c = 0.042$ соответствует границе фазовой синхронизации, показана во всем диапазоне значений параметра связи, чтобы продемонстрировать отклонение численных данных от закона (4.19) вдали от границы, аналогично тому как это предсказывает теория, представленная на рисунке 4.6. Закономерность (4.19) является справедливой в диапазоне значений параметра связи $\varepsilon_b < \varepsilon < \varepsilon_c$, где $\varepsilon_b = 0.0345$, что позволяет говорить о наличии в этой области в системе режима перемежаемости “игольного ушка”.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что перемежающееся поведение, имеющее место в двух однонаправленно связанных системах Ресслера в случае слабой расстройки между ними, можно трактовать и как перемежаемость “игольного ушка”, и как перемежаемость типа I в присутствии шума, при этом в обоих случаях наблюдается отличное соответствие результатов численного моделирования и теоретических предсказаний. Иными словами, данный пример является наглядной иллюстрацией того, что оба рассматриваемых явления представляют один тип перемежающегося поведения нелинейных систем.

Дополнительным подтверждением сделанного вывода является рассмотрение системы, демонстрирующей перемежающееся поведение, которое традиционно классифицируется как перемежаемость типа I с шумом. В качестве примера такой системы рассмотрим неавтономный генератор Ван дер Поля, на который оказывается дополнительное шумовое воздействие:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = \varepsilon \sin(\omega_e t) + D\xi, \quad (4.32)$$

где $\lambda = 0.1$ — управляющий параметр, $\omega_e = 0.98$ — частота внешнего воздействия, близкая к собственной частоте колебаний автогенератора

Ван дер Поля, ε — его амплитуда, ξ — шумовое воздействие, подчиняющееся гауссову распределению плотности вероятности с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = 2$, D — амплитуда шумового воздействия. Для решения стохастического дифференциального уравнения (4.32) использовался метод Эйлера с шагом $h = 5 \times 10^{-4}$.

При выбранных значениях управляющих параметров в отсутствие шума ($D = 0$) неавтономный автогенератор Ван дер Поля (4.32) переходит к режиму синхронизации при $\varepsilon_b = 0.0238$, что соответствует седло-узловой бифуркации на плоскости комплексных амплитуд. Добавление шума приводит к сдвигу порогового значения установления синхронного режима в сторону больших значений ε , при этом в области $\varepsilon > \varepsilon_b$ имеет место перемежающееся поведение, которое, как отмечалось выше, традиционно классифицируется как перемежаемость типа I с шумом. Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности $(\varepsilon - \varepsilon_b)$ в данном случае показана на рисунке 4.8, б. Данные численного моделирования показаны точками, теоретическая закономерность (4.24) — сплошной линией. Видно хорошее соответствие между результатами численного моделирования и теоретической аппроксимацией (4.24). Распределение длительностей ламинарных фаз $N(L)$, полученное при $\varepsilon > \varepsilon_b$ и приведенное на рисунке 4.8, в также удовлетворяет экспоненциальному закону (4.16).

С другой стороны, если подобрать соответствующее значение ε_c , можно обнаружить, что перемежающееся поведение в неавтономном автогенераторе Ван дер Поля (4.32) может также рассматриваться как перемежаемость “игольного ушка”. Действительно, как видно из рисунка 4.8, а, результаты численного расчета средней длительности ламинарных фаз в зависимости от параметра надкритичности находятся в хорошем соответствии с теоретическим законом (4.19), характерным для перемежаемости “игольного ушка”. Также заметно сходство полученной закономерности с аналогичной зависимостью для систем Ресслера (1.15) (рисунок 4.7, а) и модельной ситуацией, приведенной на рисунке 4.6.

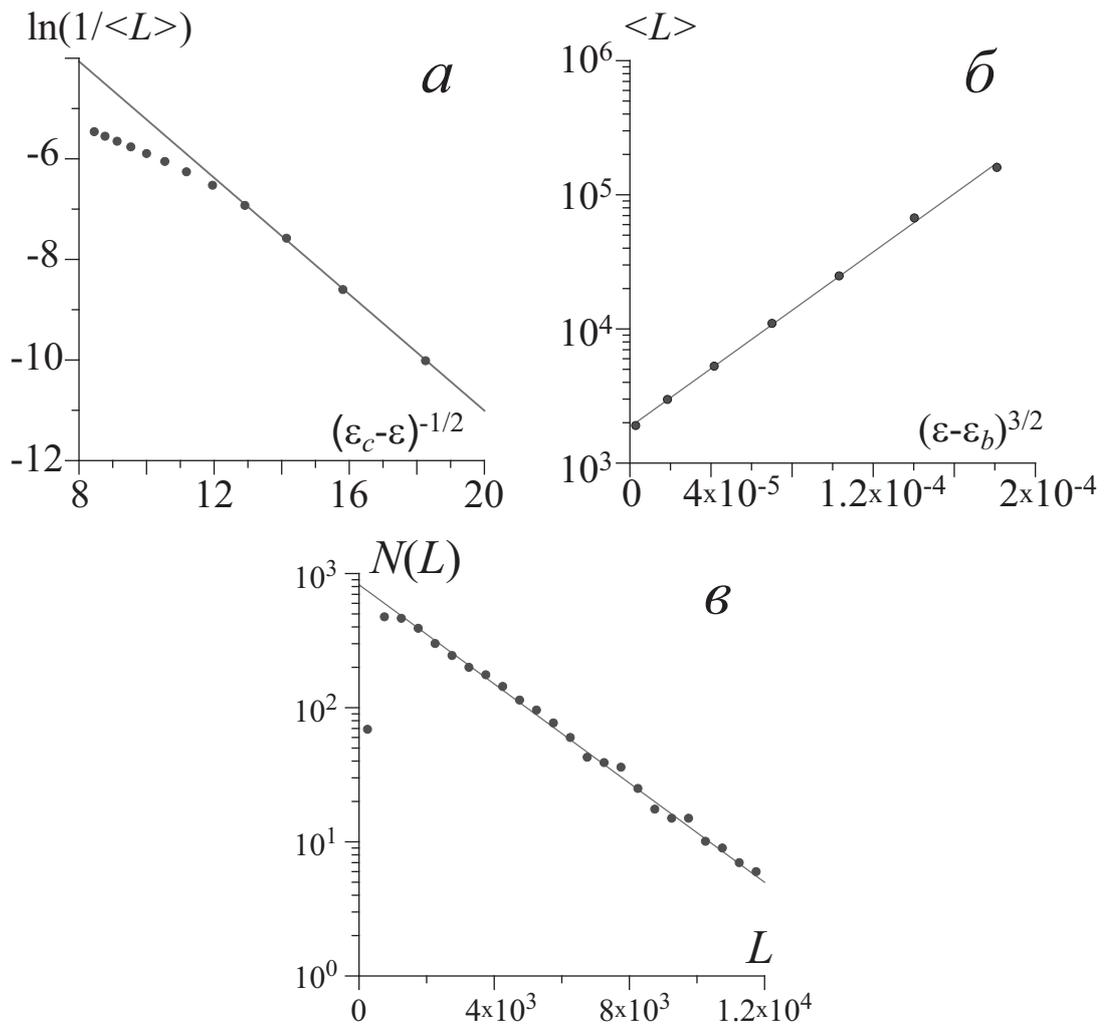


Рисунок 4.8 — Зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности (*a, б*) и распределение длительностей ламинарных фаз (*в*) для неавтономного автогенератора Ван дер Поля под действием шума (4.32). Точки соответствуют результатам численного моделирования, сплошные линии — теоретическим аппроксимациям (4.19), (4.24) и (4.16), соответственно. (*a*) Перемежаемость “игольного ушка”: $\varepsilon_c = 0.029$, $c_0 = 1.24$, $c_1 = 0.62$; (*б*) перемежаемость типа I с шумом: $\varepsilon_b = 0.0238$, $B = 2.37 \times 10^4$, $k = 4.76 \times 10^{-4}$, ось ординат показана в логарифмическом масштабе; (*в*) $\varepsilon = 0.0245$, теоретическая зависимость (4.16)

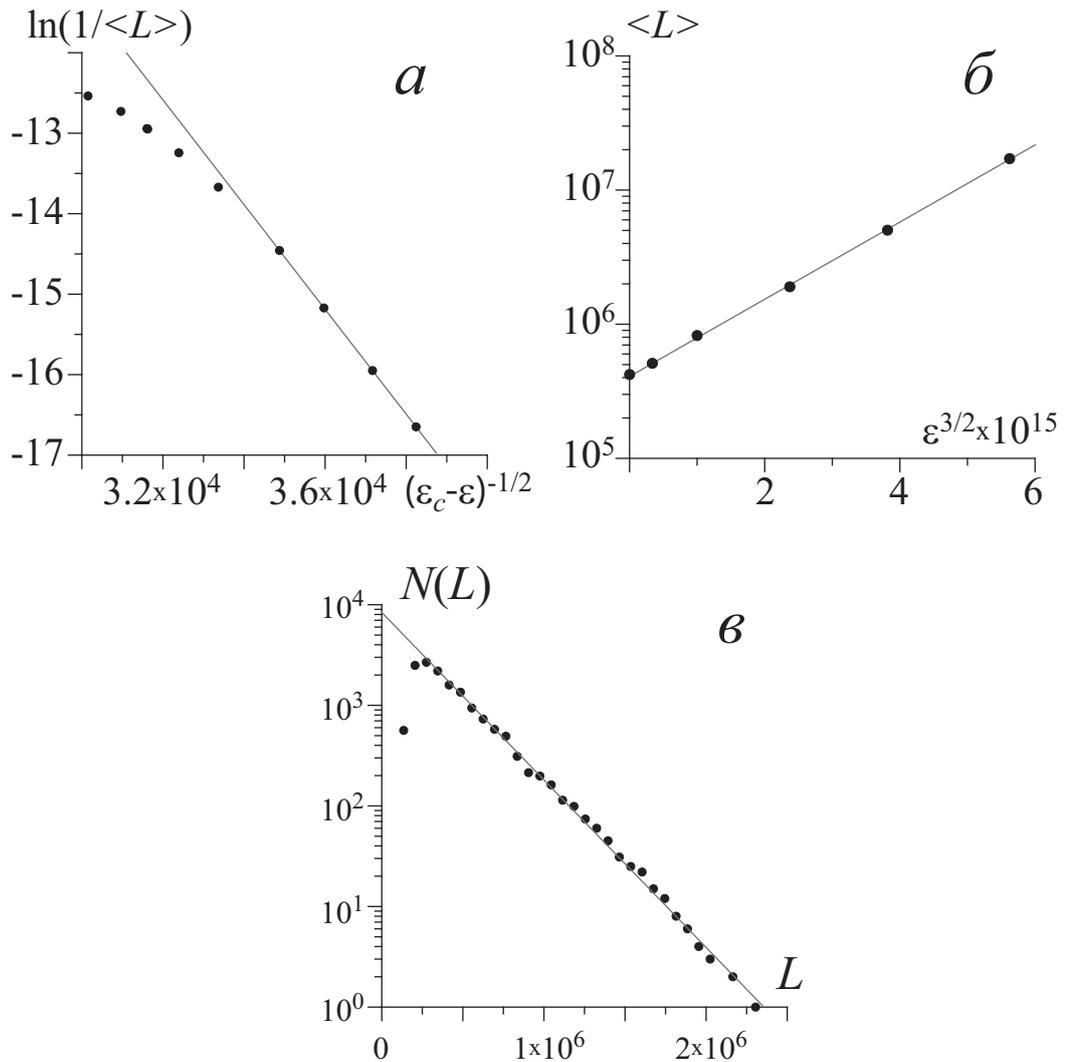


Рисунок 4.9 — Зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности (а,б) и распределение длительностей ламинарных фаз (в) для квадратичного отображения (4.33), находящегося под действием шума. Точки соответствуют результатам численного моделирования, сплошные линии — теоретическим аппроксимациям (4.19), (4.24) и (4.16), соответственно. (а) Перемежаемость “игольного ушка”: $\varepsilon_c = 10^{-9}$, $c_0 = 7.9$, $c_1 = 6.45 \times 10^{-4}$; (б) перемежаемость типа I с шумом: $\varepsilon_b = 0$, $B = 6.62 \times 10^{14}$, $k = 2.35 \times 10^{-6}$, $D = 10^{-7}$, ось ординат показана в логарифмическом масштабе; (в) $\varepsilon = 10^{-11}$, теоретическая зависимость (4.16)

Схожее поведение имеет место и в системах с дискретным временем, подверженных дополнительному шумовому воздействию. В качестве примера такой системы рассмотрим квадратичное отображение

$$x_{n+1} = x_n^2 + \lambda - \varepsilon + D\xi_n, \quad \text{mod } 1, \quad (4.33)$$

где оператор “mod 1” используется для возврата системы в окрестность неподвижной точки $x = 0$, $\lambda = 0.25$ — управляющий параметр, ξ_n — стохастический сигнал, плотность вероятности которого распределена равномерно по интервалу $\xi_n \in [-1, 1]$. В отсутствие шума при $\varepsilon = 0$ в системе (4.33) имеет место седло-узловая бифуркация. При $\varepsilon < 0$ наблюдается перемежаемость типа I, при $\varepsilon > 0$ — устойчивая неподвижная точка. Добавление стохастического слагаемого ($D > 0$) в уравнение (4.33) приводит к появлению перемежающегося поведения в области положительных значений параметра ε , при этом зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности должна подчиняться закономерности (4.26).

Несмотря на то, что в данном случае мы имеем дело с перемежаемостью типа I в присутствии шума, результаты численного определения средней длительности ламинарных фаз при различных значениях параметра надкритичности хорошо аппроксимируются как закономерностью (4.24) (рисунок 4.9,б), так и законом (4.19) (рисунок 4.9,а), характерным для перемежаемости “игольного ушка”. При этом, распределение длительностей ламинарных фаз подчиняется экспоненциальному закону (4.16) (рисунок 4.9,в). Вышеприведенные аргументы являются еще одним доказательством эквивалентности перемежаемости типа I в присутствии шума и перемежаемости “игольного ушка”.

Теперь рассмотрим еще одну систему, перемежающееся поведение в которой с формальной точки зрения не может быть классифицировано ни как перемежаемость “игольного ушка”, ни как перемежаемость типа I в присутствии шума. Это тот же классический автогенератор Ван

дер Поля, но находящийся под внешним хаотическим воздействием со стороны системы Ресслера

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_d &= \alpha(-\omega y - z), \\
 \dot{y}_d &= \alpha(\omega x + ay), \\
 \dot{z}_d &= \alpha(p + z(x - c)), \\
 \ddot{u} - (\lambda - u^2)\dot{u} + u &= \varepsilon(Dy - \dot{u}),
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

где $a = 0.15$, $p = 0.2$ и $c = 10$ — управляющие параметры системы Ресслера, $\omega = 0.9689$ характеризует собственную частоту колебаний в этой системе, $\lambda = 0.1$ — единственный управляющий параметр в автогенераторе Ван дер Поля, параметр $\alpha = 0.99$ введен для того, чтобы изменить характерный временной масштаб колебаний в системе Ресслера (по аналогии с [70]), $D = 0.0664$ выбран таким образом, чтобы амплитуды компонент фурье-спектров автогенератора Ван дер Поля и внешнего сигнала в автономном режиме примерно совпадали, ε характеризует величину связи между системами.

Формальное определение типа перемежаемости в данном случае невозможно по следующим причинам. Так как ведомая система демонстрирует периодическую динамику, в ее аттрактор не могут быть встроены неустойчивые периодические орбиты, которые могли бы синхронизоваться, а следовательно, учитывая классические работы [107, 161, 299], посвященные перемежаемости “игольного ушка”, динамику такой системы нельзя трактовать как перемежаемость “игольного ушка”. Однако, благодаря наличию хаотических возмущений, говорить о чистой седло-узловой бифуркации в данном случае также невозможно, а следовательно, нельзя вести речь и о перемежаемости типа I. Тем не менее, интуитивно понятно, что данный пример тесно связан со всеми случаями, рассмотренными выше, и можно ожидать, что в этой системе должны наблюдаться тот же самый тип перемежающегося поведения. Принимая во внимание схожесть хаотических и случайных возмущений, о которой упоминалось выше, можно объяснить поведение генератора Ван дер Поля, управляемого внешним хаотическим сигналом, в

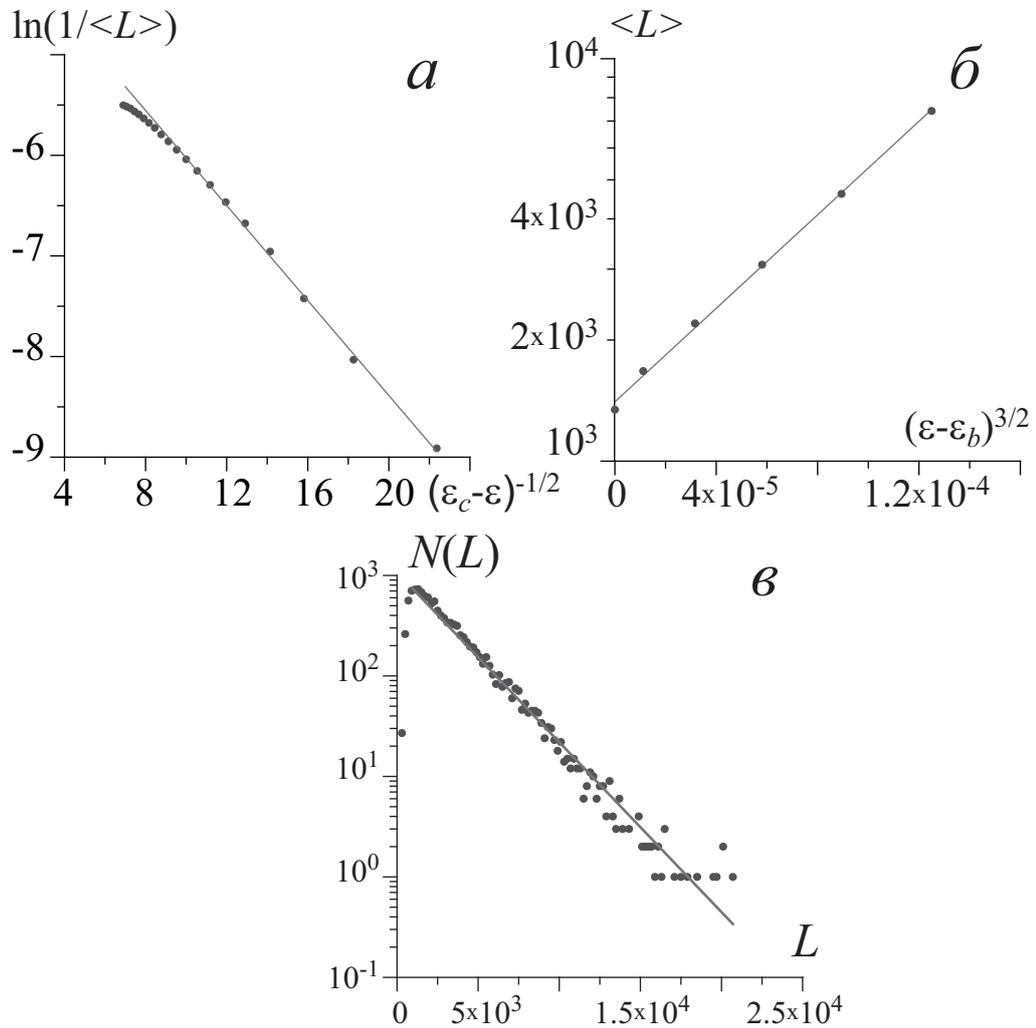


Рисунок 4.10 — Зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности (*a, б*) и распределение длительностей ламинарных фаз (*в*) для генератора Ван дер Поля, находящегося под внешним хаотическим сигналом системы Ресслера (4.34). Точки соответствуют численно полученным результатам, сплошные линии — теоретическим зависимостям (4.19), (4.24) и (4.16), соответственно. (*a*) Перемежаемость “игольного ушка” (теоретическая зависимость 4.19): $\varepsilon_c = 0.023$, $c_0 = -3.5$, $c_1 = 0.246$; (*б*) перемежаемость типа I с шумом (теоретическая зависимость (4.24): $\varepsilon_b = 0.0185$, $B = 1.25 \times 10^4$, $k = 6.90 \times 10^{-4}$, ось ординат показана в логарифмическом масштабе; (*в*) $\varepsilon = 0.02$ (теоретическая зависимость (4.16))

окрестности границы синхронного режима с позиций перемежаемости типа I в присутствии шума.

Рисунок 4.10 иллюстрирует справедливость данного утверждения. Как видно из рисунка, численно полученные данные, характеризующие зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющего параметра, удовлетворяют как выражению (4.19) (рисунок 4.10,а), так и зависимости (4.24) (рисунок 4.10,б). Кроме того, распределение длительностей ламинарных фаз подчиняется экспоненциальному закону (4.16) (рисунок 4.10,в, см. также [369]), что позволяет утверждать, что мы имеем здесь дело с тем же самым типом динамики, что и в случаях неавтономного генератора Ван дер Поля (4.32) и двух связанных систем Ресслера (2.4), рассмотренных выше.

Таким образом, можно заключить, что перемежаемость “игольного ушка” и перемежаемость типа I с шумом в закритической области значений управляющего параметра являются одним типом поведения. Различие между ними заключается только в характере внешнего сигнала, воздействующего на систему. В случае перемежаемости типа I с шумом на систему оказывается случайное воздействие, в то время как для перемежаемости “игольного ушка” используется сигнал хаотической динамической системы, который влияет на динамику ведомого хаотического осциллятора. Вместе с тем, механизмы, отвечающие за поведение системы, как и характеристики динамики системы, оказываются одними и теми же в обоих случаях.

4.3.3 Верхняя граница перемежающегося поведения

Несмотря на то, что аргументы, приведенные в подразделах 4.3.1–4.3.2, являются неопровержимым математическим доказательством эквивалентности режимов перемежаемости типа I в закритической области значений управляющего параметра и перемежаемости “игольного ушка”, между этими типами перемежаемости существует важное отличие. Это различие связано с верхней границей перемежающегося поведения.

Действительно, для перемежаемости типа I с шумом в закритической области значений управляющих параметров не существует верхней границы (см. уравнение (4.23)), и перемежающееся поведение может, теоретически, наблюдаться для любых значений параметра надкритичности $(\varepsilon - \varepsilon_b) > 0$, хотя длительность ламинарных фаз при больших значениях ε может быть очень большой. С другой стороны, существование границы режима фазовой синхронизации, являющейся верхней границей перемежаемости “игольного ушка”, является бесспорным, так как существует большое количество работ, где граница фазовой синхронизации наблюдалась и диагностировалась. Таким образом, это обстоятельство и аргументы, приведенные в подразделах 4.3.1–4.3.2, противоречат друг другу. Для разрешения этого противоречия рассмотрим вероятность $P(\Theta, \varepsilon)$ наблюдения турбулентного всплеска во временной реализации системы, демонстрирующей перемежаемость типа I в присутствии шума в закритической области значений управляющего параметра $\varepsilon > \varepsilon_b$, в течение времени наблюдения длительностью Θ .

Вероятность детектирования турбулентной фазы зависит от длины Θ интервала наблюдения и длительности L ламинарной фазы, реализуемой в начале исследования поведения системы. Очевидно, если $L < \Theta$, турбулентная фаза детектируется с вероятностью $P_{L < \Theta}^{det} = 1$, тогда как вероятность возникновения ламинарной фазы длительности $L < \Theta$ будет

$$P(L < \Theta) = \int_0^{\Theta} n(L) dL, \quad (4.35)$$

где плотность вероятности $n(L)$ определяется уравнением (4.16). С другой стороны, если $L > \Theta$, вероятность детектирования турбулентной фазы будет $P_{L > \Theta}^{det} = \Theta/L$, в то время как ламинарная фаза длительности L имеет место с вероятностью $P(L) = n(L) dL$. Соответственно, для

рассматриваемой ситуации вероятность наблюдения турбулентной фазы будет

$$\begin{aligned}
 P(\Theta, \varepsilon) &= \int_0^{\Theta} P_{L<\Theta}^{det} n(L) dL + \int_{\Theta}^{+\infty} P_{L>\Theta}^{det} n(L) dL = \\
 &= \int_0^{\Theta} \frac{e^{-\frac{L}{\langle L \rangle(\varepsilon)}}}{\langle L \rangle(\varepsilon)} dL + \int_{\Theta}^{+\infty} \frac{\Theta e^{-\frac{L}{\langle L \rangle(\varepsilon)}}}{L \langle L \rangle(\varepsilon)} dL = \\
 &= 1 - e^{-\frac{\Theta}{\langle L \rangle(\varepsilon)}} + \frac{\Theta}{\langle L \rangle(\varepsilon)} \times \Gamma\left(0, \frac{\Theta}{\langle L \rangle(\varepsilon)}\right),
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

где $\Gamma(a, z)$ — неполная гамма-функция, $\langle L \rangle(\varepsilon)$ — средняя длительность ламинарных фаз, зависящая от параметра надкритичности ε и определяемая выражением (4.24).

Поверхность $P(\Theta, \varepsilon)$, определяемая аналитическим выражением (4.36), и соответствующие ей линии уровня приведены на рисунке 4.11,а. Нетрудно заметить, что вероятность детектирования турбулентной фазы для перемежаемости типа I в присутствии шума во время одного наблюдения растет при увеличении длины наблюдения Θ , но уменьшается при увеличении параметра надкритичности $\varepsilon - \varepsilon_b$. Очевидно, при экспериментальном или численном исследовании поведения системы в течение временного интервала длительности Θ при изменении управляющего параметра ε можно наблюдать чередование ламинарных и турбулентных фаз при относительно малых значениях параметра ε , где $P(\Theta, \varepsilon)$ близка к единице, и только ламинарное поведение при относительно больших значениях параметра ε , где $P(\Theta, \varepsilon)$ близка к нулю. Не имея никакой информации о типе перемежаемости (например, при экспериментальном исследовании некоторых систем), можно предположить наличие границы, разделяющей два различных типа поведения (перемежающееся и установившееся), и, более того, найти значение ε_c , соответствующее “началу” установившегося ламинарного поведения. Понятно, что эта “граничная точка” будет соответствовать малой вероятности $P(\Theta, \varepsilon)$, скажем, $P_b = P(\Theta, \varepsilon) = 0.1$. В то же самое время, можно

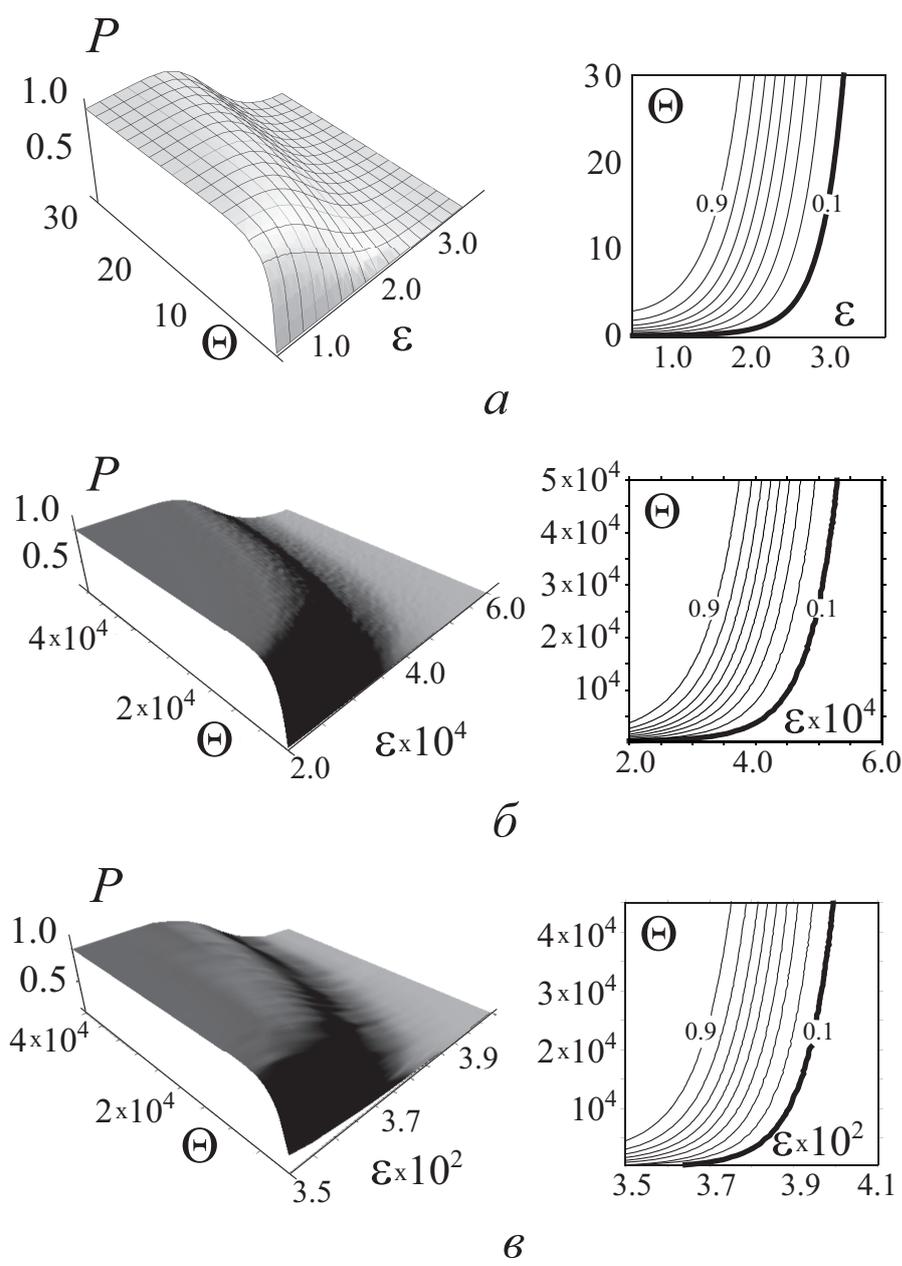


Рисунок 4.11 — Поверхность, иллюстрирующая вероятность детектирования турбулентной фазы во временной реализации системы в течение интервала наблюдения длительности Θ и соответствующие ей линии уровня с шагом $\Delta P = 0.1$. Линии уровня $P_b = 0.1$, разграничивающие области с высокой и низкой вероятностями детектирования турбулентной фазы, показаны сплошными линиями. (а) Теоретическая закономерность (4.36), для простоты значения управляющих параметров в уравнении (4.24) выбраны следующими: $D = 1, k = 1, \varepsilon_b = 0$. (б) Вероятностная поверхность $P(\Theta, \varepsilon)$ для отображения окружности в присутствии шума (4.38). (в) Вероятностная поверхность $P(\Theta, \varepsilon)$ для двух однонаправленно связанных систем Ресслера (1.15)

провести более точные измерения с увеличенной длиной наблюдения Θ' для определения граничного значения ε_c более точно. В этом случае будет получено новое значение $\varepsilon_c(\Theta')$ ($P(\Theta', \varepsilon_c(\Theta')) \approx P_b$), и оно будет немного больше предыдущего. Схематичное расположение “граничной” кривой $\varepsilon_c(\Theta)$ на плоскости (ε, Θ) показано на рисунке 4.11,а жирной линией. Видно, что при фиксированном уровне P_b длина Θ растет очень быстро при увеличении параметра ε . Другими словами, сильное увеличение длины наблюдения Θ приводит к малым корректировкам “граничного” значения ε_c . Так как ресурсы экспериментальных и численных исследований всегда ограничены, конечное значение ε_c с максимальной возможной точностью будет всегда найдено. Иными словами, несмотря на то, что для перемежаемости типа I в присутствии шума в критической области значений управляющего параметра турбулентные фазы всегда наблюдаются теоретически, с практической точки зрения (при экспериментальных исследованиях или численном моделировании) всегда существует граничная точка ε_c , выше которой при имеющихся вычислительных и временных ресурсах наблюдается только ламинарное поведение. Более того, при дальнейшем развитии экспериментальных и вычислительных ресурсов дополнительные уточняющие исследования могут привести только к незначительному увеличению порогового значения.

Для иллюстрации сделанного вывода, рассмотрим отображение окружности

$$x_{n+1} = x_n + 2\Omega(1 - \cos x_n) - \varepsilon + \xi_n, \quad \text{mod } 2\pi \quad (4.37)$$

в интервале $x \in [-\pi, \pi)$, где ε — управляющий параметр, $\Omega = 1.0$, ξ_n — дельта-коррелированный гауссов шум ($\langle \xi_n \rangle = 0$, $\langle \xi_n \xi_m \rangle = D\delta(n - m)$). Если интенсивность шума D равна нулю, в системе (4.72) имеет место касательная бифуркация при $\varepsilon = \varepsilon_b = 0$, когда устойчивая и неустойчивая точки сливаются и исчезают при $x = 0$. Очевидно, при выбранном значении параметра Ω эволюция системы (4.72) вблизи точки бифуркации может быть описана при помощи квадратичного отображения

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4} - \varepsilon + \xi_n, \quad (4.38)$$

что позволяет сравнить полученные результаты с результатами, представленными в предыдущих подразделах.

В отсутствие шума при $\varepsilon < 0$ в системе (4.72) наблюдается перемежаемость типа I, при $\varepsilon > 0$ имеет место устойчивая неподвижная точка. При добавлении шума ($D = 4 \times 10^{-6}$) в отображение окружности (4.72) перемежающееся поведение будет наблюдаться также в закритической области управляющего параметра ε , при этом средняя длительность $\langle L \rangle$ и плотность распределения длительностей $n(L)$ ламинарных фаз должны удовлетворять закономерностям (4.26) и (4.16), соответственно.

Поверхность вероятности $P(\Theta, \varepsilon)$ наблюдения турбулентной фазы для отображения окружности (4.72), а также соответствующие линии уровня показаны на рисунке 4.11,б. Для получения этой поверхности проведено $N = 2.5 \times 10^4$ наблюдений для каждой точки, взятой с шагом $\Delta\Theta = 2 \times 10^2$, $\Delta\varepsilon = 10^{-5}$, на плоскости параметров (ε, Θ) . Вероятность $P(\Theta, \varepsilon)$ вычислялась как $P(\Theta, \varepsilon) = N_1(\Theta, \varepsilon)/N$, где $N_1(\Theta, \varepsilon)$ — число наблюдений, при которых детектировалась турбулентная фаза. Нетрудно заметить отличное соответствие результатов численных вычислений и теоретических предсказаний (ср. рисунки 4.11,а и б).

Аналогичная вероятностная поверхность $P(\Theta, \sigma)$ и линии уровня получены также для однонаправленно связанных систем Ресслера (1.15) (в отсутствие шума), находящихся в режиме перемежаемости “игольного ушка” (рисунок 4.11,в). В этом случае проведено $N = 10^3$ наблюдений для каждой точки на плоскости (ε, Θ) , взятых с шагами $\Delta\Theta = 10^4$ и $\Delta\varepsilon = 10^{-3}$. Можно заметить, что для перемежаемости “игольного ушка” поверхность вероятности и линии уровня оказываются точно такими же, как и в случае перемежаемости типа I в присутствии шума в закритической области. Как следствие, можно сделать вывод о том, что перемежаемость “игольного ушка” и перемежаемость типа I в присутствии шума в закритической области значений управляющего параметра представляют собой один тип поведения, наблюдающийся при различных условиях. Другим следствием проведенного рассмотрения является тот факт, что пороговое значение фазовой синхронизации не может быть

найденно абсолютно точно, так как оно разделяет области с высокой и низкой вероятностями наблюдения фазовых проскоков в связанных хаотических системах при помощи экспериментальных и вычислительных ресурсов, существующих на момент исследования. Попытка уточнить пороговое значение установления синхронного режима, опубликованного в более ранних работах, при помощи более мощного оборудования позволит получить новое значение, близкое к предыдущему, но большее по сравнению с ним. Именно такую ситуацию можно найти, например, в работе [378], где рассматривались две взаимно связанные системы Ресслера. В этой работе представлено уточненное значение порога установления фазовой синхронизации $\varepsilon_c = 0.0416$ по сравнению с ранее опубликованным в работе [332] результатом $\varepsilon_c = 0.036$.

4.4 Проявление перемежающегося поведения на различных временных масштабах наблюдения

Перейдем к рассмотрению перемежающегося поведения на границе синхронизации временных масштабов [357, 379, 380]. Прежде всего, отметим, что среди известных типов синхронного поведения синхронизация временных масштабов представляет особый интерес для изучения. Этот тип синхронной хаотической динамики позволяет рассматривать с единых позиций все типы хаотической синхронизации, упомянутые во Введении. Более того, он может быть диагностирован даже в тех случаях, когда детектирование других типов синхронного поведения оказывается проблематичным (например, диагностирование режима фазовой хаотической синхронизации в случае фазово-некогерентного аттрактора [364]), что делает его широко распространенным и важным в различных практических приложениях. Важно также отметить широкие возможности диагностики хаотической синхронизации с помощью метода синхронизации временных масштабов в случае многомасштабного хаоса [379].

Концепция синхронизации временных масштабов [357, 379] основана на введении непрерывного множества фаз исследуемых сигналов связанных хаотических систем. Синхронизация временных масштабов означает, что на определенном интервале временных масштабов $[s_l; s_h]$, вводимых в рассмотрение с помощью непрерывного вейвлетного преобразования (4.3) с материнским вейвлетом Морле (4.4), наблюдается синхронная динамика.

Важно отметить, что при использовании вейвлетного преобразования (4.3) для каждого временного масштаба s оказывается естественным образом определена непрерывная фаза $\phi(s, t) = \arg W(s, t)$, то есть возможно характеризовать поведение каждого временного масштаба s с помощью ассоциированной с ним фазы $\phi(s, t)$, являющейся непрерывной функцией временного масштаба s и времени t . Введенное в рассмотрение таким образом семейство фаз наиболее полным образом характеризует поведение связанных систем: возможно описать поведение каждого временного масштаба с помощью ассоциированной с ним фазы $\phi(s, t)$.

Для двух связанных хаотических осцилляторов $\mathbf{x}_{1,2}(t)$ имеет место режим синхронизации временных масштабов, если существует такой интервал временных масштабов $s_l \leq s \leq s_h$, для которого выполняется условие захвата фаз

$$|\phi_1(s, t) - \phi_2(s, t)| < \text{const} \quad (4.39)$$

и условие ненулевой энергии (доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на данный интервал временных масштабов, оказывается положительной)

$$E_{snhr} = \int_{s_l}^{s_h} \langle |W(s, t)|^2 \rangle ds > 0, \quad (4.40)$$

где $\langle \cdot \rangle$ означает усреднение по времени. На временных масштабах s , лежащих вне указанного диапазона $[s_l; s_h]$, условие захвата фаз (4.39) выполняться не будет. На этих масштабах наблюдения интервалы времени (ламинарные фазы), характеризующиеся синхронной динамикой, будут прерываться участками (турбулентными всплесками), где разность



Рисунок 4.12 — Схематичное представление режимов, наблюдаемых при различных значениях временного масштаба наблюдения s : 1 — синхронная динамика, 2 — перемежающееся поведение, 3 — асинхронное поведение. Сила связи между взаимодействующими системами полагается постоянной

фаз достаточно резко изменяется на величину порядка 2π . Иными словами, на таких временных масштабах (которые могут быть как ниже s_l , так и выше s_h) будет наблюдаться перемежающееся поведение, причем временной масштаб s , на котором осуществляется наблюдение, будет выступать в качестве параметра надкритичности, от которого зависят характеристики перемежаемости. По мере приближения масштаба наблюдения s к диапазону синхронных временных масштабов $[s_l; s_h]$ длительность участков ламинарного поведения будет увеличиваться (и стремиться к бесконечности при $s \rightarrow s_l - 0$ и $s \rightarrow s_h + 0$), в то время как количество турбулентных участков будет уменьшаться (и, соответственно, стремиться к нулю при $s \rightarrow s_l - 0$ и $s \rightarrow s_h + 0$). С другой стороны, вне границ синхронных временных масштабов, то есть при $s < s_t$ и $s > s_{t'}$ фазовые проскоки становятся очень частыми, что означает наличие асинхронной динамики на наблюдаемом временном масштабе. Взаимосвязь между наблюдаемыми режимами и временными масштабами s схематично иллюстрирует рисунок 4.12.

Аналогичное поведение будет иметь место на синхронных временных масштабах ниже границы синхронизации. Таким образом, можно наблюдать перемежающееся поведение на границе синхронизации временных масштабов, варьируя или силу связи между системами, или временной масштаб наблюдения, или обе величины одновременно. При этом, как и в случае эффектов на границе фазовой синхронизации, основной анализируемой характеристикой в данном случае является разность фаз взаимодействующих систем, только введенных при помощи непрерывного

вейвлетного преобразования. В этом случае могут быть использованы те же методы выделения ламинарных и турбулентных фаз, что и при анализе перемежающейся фазовой синхронизации (см. раздел 4.2).

Рассмотрим особенности и характеристики перемежающегося поведения, имеющего место вблизи границы синхронных временных масштабов хаотических осцилляторов, находящихся в режиме синхронизации временных масштабов, путем экспериментального исследования простых моделей однонаправленно связанных радиотехнических генераторов, аналогичных рассмотренным в подразделе 1.2.3. Схема экспериментальной установки с указанием всех необходимых параметров приведена на рисунке 4.13. Значения параметров были выбраны таким образом, чтобы в обеих взаимодействующих системах наблюдались хаотические колебания ленточного типа с малой расстройкой собственных частот взаимодействующих систем (в автономном режиме $f_1 = 9.975$ кГц и $f_2 = 9.522$ Гц для ведущей и ведомой систем, соответственно). Сила связи между генераторами регулировалась путем изменения сопротивления R_ϵ (рисунок 4.13). Как и в случае обобщенной синхронизации, поведение взаимодействующих систем анализировалось при помощи спектроанализатора Agilent E4402B и аналого-цифрового преобразователя (АЦП) L-Card L-783. Экспериментально полученные временные ряды обрабатывались численно.

При значении сопротивления связи $R_\epsilon = 340$ Ом исследуемые системы демонстрируют режим синхронизации временных масштабов (который при выбранных значениях управляющих параметров может быть также рассмотрен как режим фазовой синхронизации [381]). Синхронные временные масштабы в этом случае заключены в диапазоне $s \in [s_l; s_h]$, $s_l \approx 80.20$ мкс, $s_h \approx 122.00$ мкс. В диапазонах $s \in [s_t; s_l]$, $s_t \approx 63.73$ мкс и $s \in [s_h; s'_t]$, $s'_t \approx 128.85$ мкс имеет место перемежающееся поведение, проанализировав характеристики (распределение длительностей ламинарных фаз, зависимость средней длительности ламинарных фаз и вероятности детектирования фазового проскока от параметров

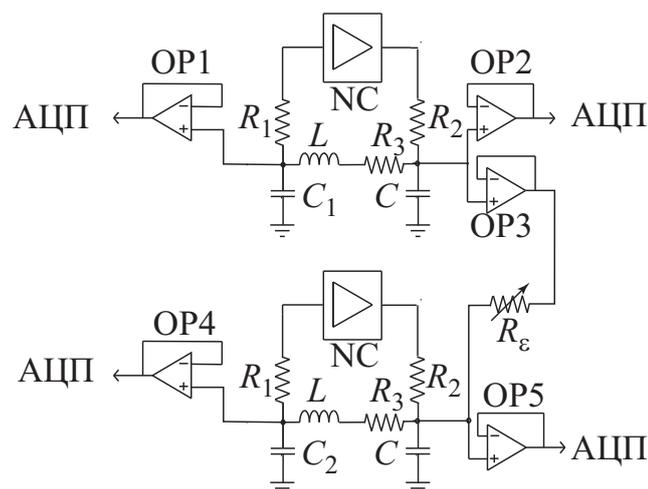


Рисунок 4.13 — Схема экспериментальной установки для исследования перемежающегося поведения на границе синхронных временных масштабов. Значения управляющих параметров выбраны следующими: $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 630$ Ом, $R_3 = 56$ Ом, $L = 3.3$ мГн, $C = 150$ нФ, $C_1 = 330$ нФ, $C_2 = 300$ нФ. Операционные усилители ОП1, ОП2, ОП4 и ОП5 — типа TL082, операционный усилитель ОП3 — типа TDA2030. Схема нелинейного конвертора приведена в работе [309] (рисунок 7)

надкритичности) которого можно заключить, что в данном случае имеет место перемежаемость “кольца” (см. раздел 4.2, а также [111]).

Действительно, как упоминалось в разделе 4.2, перемежаемость “кольца” характеризуется экспоненциальным распределением длительностей ламинарных фаз (4.16), а зависимость средней длительности $\langle L \rangle$ ламинарных фаз от параметра надкритичности (5.18), в роли которого в данном случае должен выступать временной масштаб s , запишется в виде:

$$\langle L \rangle(s) = T - \frac{T}{\ln(1 - p(s))}, \quad (4.41)$$

где $T = \langle L \rangle(s_t)$ — средняя длительность ламинарных фаз на временном масштабе s_t , ограничивающим область перемежаемости “кольца”, $p(s)$ — вероятность детектирования турбулентной фазы на временном интервале наблюдения длительности T на временном масштабе s . Обычно

зависимость вероятности p от параметра надкритичности близка к линейной и тогда для $s < s_l$ ⁷ соотношение (4.41) можно переписать в виде

$$\langle L \rangle(s) \simeq T \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{s - s_t}{s_l - s_t} \right) \right). \quad (4.42)$$

Временной масштаб s_t соответствует нижней границе линейной формы зависимости $p(s)$ и может быть определен из условия $p(s_t) = 1$. Теоретическое соотношение (4.42) справедливо только в диапазоне $s_t < s < s_l$.

Для выделения ламинарных фаз из экспериментальных временных реализаций использовался подход, описанный в разделе 4.2. Распределения длительностей ламинарных фаз, полученные экспериментально для трех различных значений временного масштаба наблюдения (см. подрисуночную подпись) и их теоретические аппроксимации законом (4.16), приведены на рисунке 4.14,а. Видно, что данные экспериментальных исследований находятся в хорошем соответствии с результатами теоретических предсказаний, характерными для перемежаемости “кольца”. Зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle L \rangle$ от временного масштаба s (играющего роль параметра надкритичности) также хорошо согласуется с теоретическим законом (4.41), при этом вероятность p детектирования турбулентной фазы в течение интервала наблюдения длительности $T = 1.0$ мс подчиняется линейному закону (см. рисунок 4.14, б и в, соответственно).

Таким образом, перемежающееся поведение, имеющее место вблизи границы синхронных временных масштабов рассматриваемых радиотехнических генераторов, находящихся в режиме синхронизации временных масштабов, может быть проклассифицировано как перемежаемость “кольца”. Покажем, что механизм, приводящий к появлению фазовых проскоков в определенном диапазоне временных масштабов в исследуемой системе является тем же, что и в случае перемежаемости “кольца”, имеющей место на границе фазовой синхронизации в случае относительно больших значений расстройки между взаимодействующими системами. Действительно, как упоминалось в разделе 4.2, появление

⁷Аналогичное соотношение можно также получить для временного масштаба $s > s_h$, в этом случае $\langle L \rangle(s) \simeq T(1 - \ln^{-1}((s_t' - s)/(s_t' - s_h)))$.

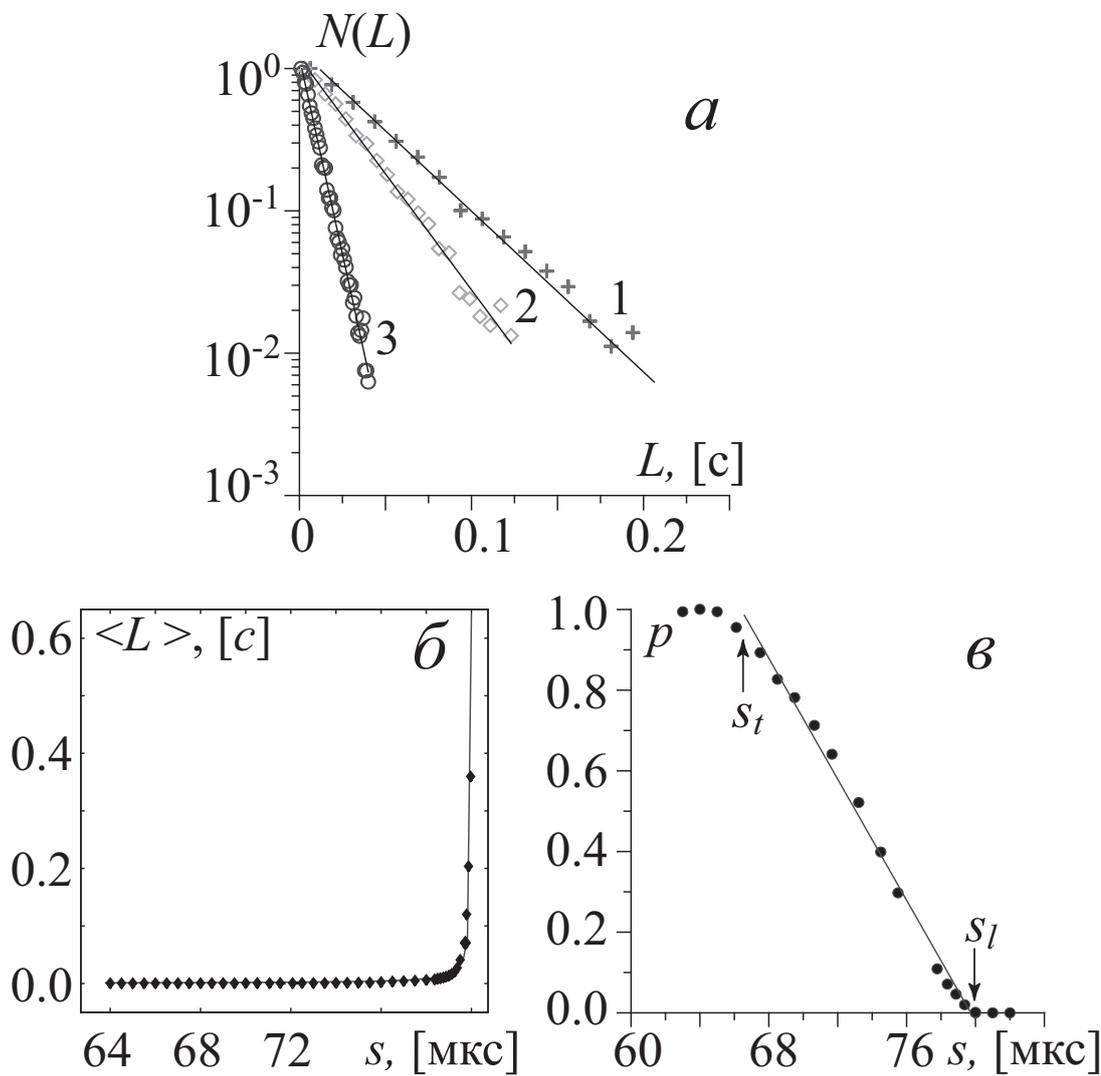


Рисунок 4.14 — (а) Распределения длительностей ламинарных фаз при различных значениях временного масштаба наблюдения s , полученные экспериментально (точки) для системы двух однонаправленно связанных радиотехнических генераторов, и соответствующие им теоретические аппроксимации закономерностью (4.16) (сплошные линии): кривая 1 — $s_1 = 79.50$ мкс, 2 — $s_2 = 79.37$ мкс, 3 — $s_3 = 78.50$ мкс. Все распределения нормированы на максимальное значение. (б) Экспериментальная зависимость средней длительности $\langle L \rangle$ ламинарных фаз от временного масштаба наблюдения s (точки) и ее теоретическая аппроксимация (4.42) (сплошная линия), ($s_l = 80.20$ мкс, $s_t = 63.73$ мкс); (в) Зависимость вероятности p детектирования фазового проскока на временном интервале наблюдения длительности T от временного масштаба s

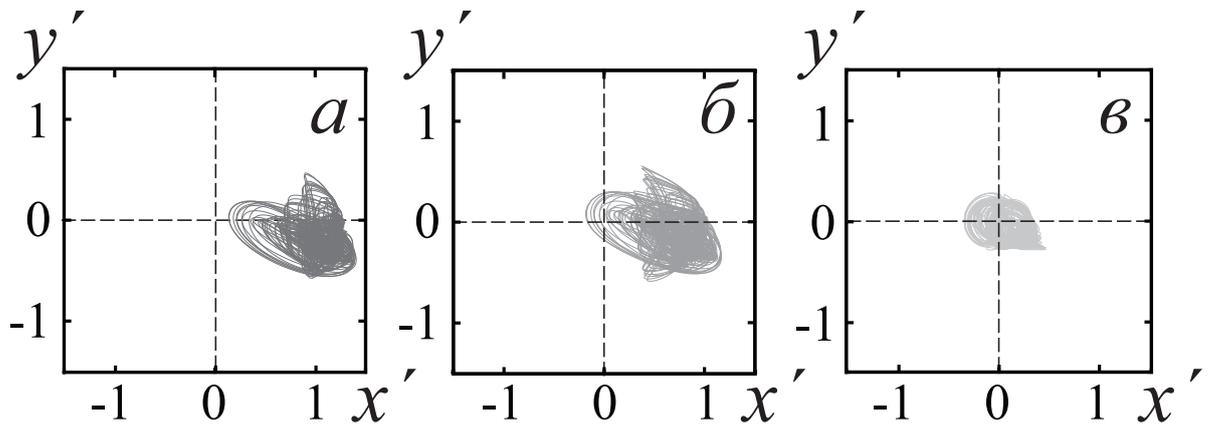


Рисунок 4.15 — Траектория второй системы на вращающейся плоскости (4.20) при различных значениях временного масштаба наблюдения: (а) $s = 81.00$ мкс — синхронная динамика, (б) $s = 77.50$ мкс — перемежаемость “кольца”, (в) $s = 63.5$ мкс — асинхронная динамика

перемежающегося поведения для режима перемежаемости “кольца” связано с событиями, когда фазовая траектория на вращающейся плоскости (4.20) начинает охватывать начало координат. Та же ситуация имеет место и в рассматриваемом случае, если в качестве переменных, определяющих состояние системы, рассмотреть

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{1,2} &= \operatorname{Re} W_{1,2}(s, t), \\ \tilde{y}_{1,2} &= \operatorname{Im} W_{1,2}(s, t). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Как видно из рисунка 4.15,б, в области перемежающегося поведения фазовая траектория действительно пересекает начало координат, и такая ситуация имеет место для любого временного масштаба $s \in [s_t, s_l]$ и $s \in [s_h, s'_t]$. В области синхронных временных масштабов (рисунок 4.15,а) охвата начала координат не происходит, в то время как по мере приближения временного масштаба к граничным точкам s_t и s'_t охват начала координат происходит все более часто, и при $s < s_t$ и $s > s'_t$ наблюдается асинхронная динамика в исследуемой системе (рисунок 4.15,в).

Чтобы подтвердить общность вышеприведенного рассмотрения, проведем численное исследование характеристик перемежающегося поведения, имеющего место вблизи синхронных временных масштабов, в системе двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (1.15) с теми же значениями управляющих параметров, что и при исследова-

нии характеристик перемежающейся фазовой синхронизации (см. раздел 4.3). В данном случае синхронизация временных масштабов наступает при $\varepsilon_c \approx 0.045^8$, а синхронные временные масштабы лежат в диапазоне $s \in [s_l, s_h]$, $s_l = 4.99$, $s_h = 8.25$.

Распределения длительностей ламинарных фаз, полученные для исследуемой системы (1.15), находящейся в режиме синхронизации временных масштабов, на граничных временных масштабах наблюдения, приведены на рисунке 4.16, *а*. Снова, как и в случае экспериментальных данных, наблюдается отличное соответствие численно полученных результатов с теоретическими закономерностями (4.16). Что касается зависимости средней длительности ламинарных фаз от временного масштаба s наблюдения (см. рисунок 4.16, *б*), то полученные результаты также хорошо согласуются с теоретическим законом (4.42), характерным для перемежаемости “кольца”. Более того, вероятность p детектирования турбулентной фазы на временном интервале наблюдения длительности T также зависит линейно от величины временного масштаба s (рисунок 4.16, *в*), что опять-таки является подтверждением существования перемежаемости “кольца” в исследуемой системе. Таким образом, и в радиотехнических генераторах, и в системах Ресслера, находящихся в режиме синхронизации временных масштабов, на граничных временных масштабах наблюдения имеет место перемежаемость “кольца”. Можно полагать, что перемежаемость “кольца” является характерным типом поведения, наблюдающимся в нелинейных системах на граничных временных масштабах наблюдения. Однако, при слабой связи между взаимодействующими системами такое поведение наблюдаться не будет⁹.

⁸Результаты, представленные ниже, получены именно при этом значении параметра связи.

⁹Этот вопрос будет рассмотрен в главе 5 настоящей диссертационной работы.

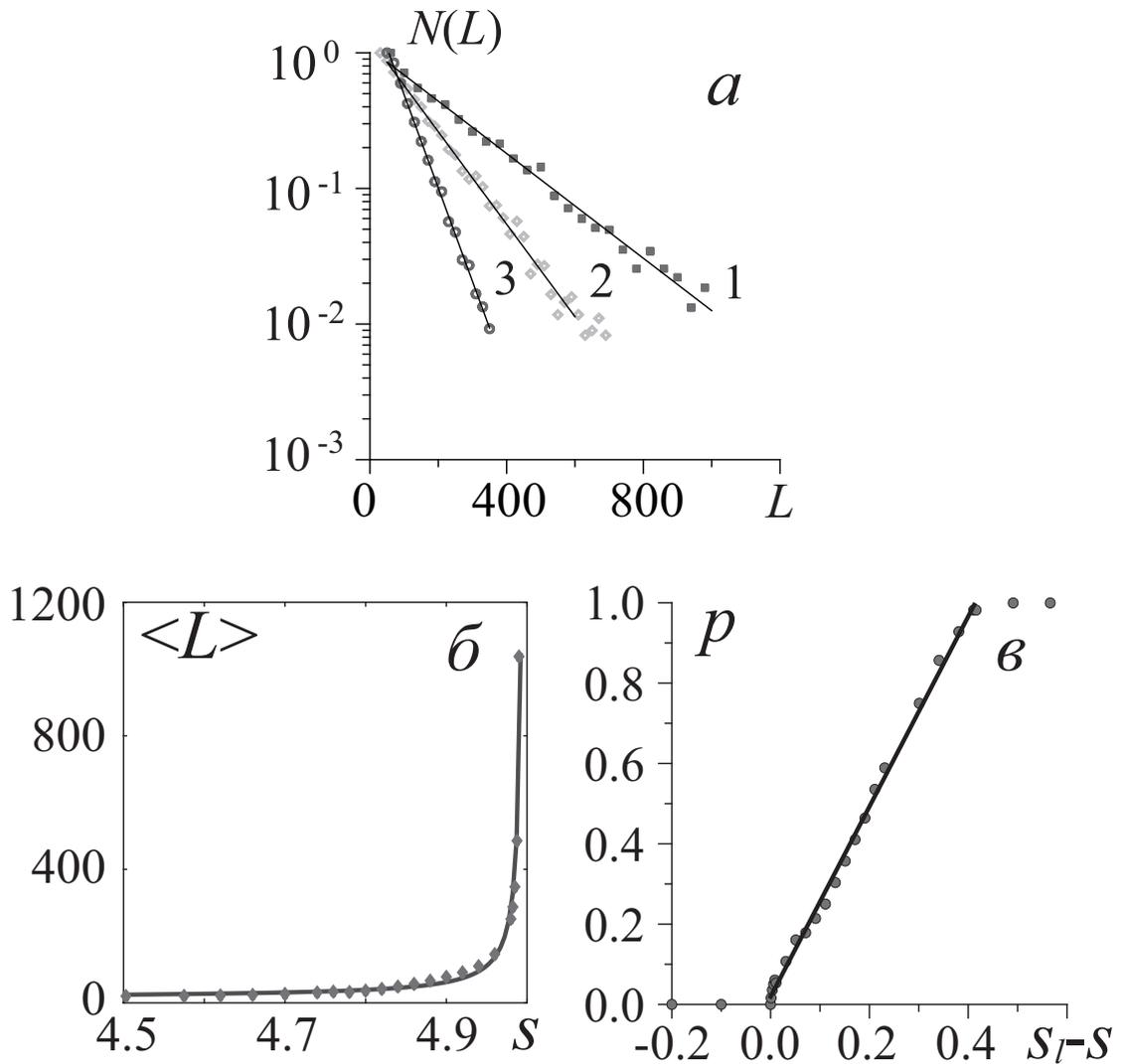


Рисунок 4.16 — (а) Численно полученные распределения длительностей ламинарных фаз при трех различных значениях временного масштаба наблюдения s в системе двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (1.15) (точки) и соответствующие им теоретические аппроксимации закономерностью (4.16) (сплошные линии): кривая 1 — $s_1 = 4.98$, кривая 2 — $s_2 = 4.94$, кривая 3 — $s_3 = 4.92$. Все распределения нормированы на максимальное значение. (б) Зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle L \rangle$ от временного масштаба наблюдения s , полученная численно для той же системы, и теоретическая кривая (4.42) ($s_t = 4.45$, $T = 8.00$). (в) Зависимость вероятности p детектирования турбулентной фазы на временном интервале наблюдения длительности T на временном масштабе s

4.5 Проявление перемежаемости в бистабильных системах

Еще одним малоизученным вопросом, связанным с исследованием перемежаемости, является проявление этого режима в мультистабильных системах. В данном случае имеют место индуцированные шумом переключения между сосуществующими режимами, причем этих режимов может быть достаточно много [382, 383] (см. также главу 5, подраздел 5.7.3). Такое поведение носит название индуцированной шумом перемежаемости или индуцированного шумом переключения аттракторов [181, 384–387].

Несмотря на достаточно большой интерес к изучению индуцированной шумом перемежаемости (см., например, [181, 388, 389]) существует ряд вопросов, требующих дальнейшего рассмотрения и обсуждения. Одна из таких проблем заключается в том, что до настоящего времени не существовало количественной теории, позволяющей получить в общем виде характеристики индуцированной шумом перемежаемости даже в случае одновременного существования двух различных режимов. Исключение составляют работы [390–393], где получена одна из характеристик индуцированной шумом перемежаемости в частных случаях (например, в случае симметричного потенциала). В данном разделе диссертационной работы предложена теория индуцированной шумом перемежаемости в бистабильных системах. Как будет продемонстрировано ниже, такая теория позволяет описать количественно характеристики перемежающегося поведения, имеющего место в двух взаимно связанных осцилляторах Лоренца на границе возникновения режима обобщенной синхронизации (см. главу 2, подраздел 4.5.3).

4.5.1 Теория индуцированной шумом перемежаемости

Универсальной бистабильной системой, способной демонстрировать индуцированную шумом перемежаемость, является система

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dU(x)}{dx} + \xi(t), \quad (4.44)$$

где $\xi(t)$ — δ -коррелированный гауссов шум с нулевым средним [$\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(\tau) \rangle = D\delta(t - \tau)$], D — его дисперсия, характеризующая интенсивность шума,

$$U(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + bx \quad (4.45)$$

— безразмерная потенциальная функция с двумя локальными минимумами $x_{1,2}$ ($U'(x_{1,2}) = 0$, $U''(x_{1,2}) > 0$), разделенными критической точкой x^* ($U'(x^*) = 0$, $U''(x^*) < 0$), соответствующей максимуму $U(x)$, b — параметр асимметрии [394–399], $|b| < 2/(3\sqrt{3})$. В отсутствие шума ($D = 0$) устойчивые точки $x_{1,2}$ соответствуют двум состояниям бистабильной системы, в то время как при наличии шума ($D > 0$) две области $-\infty < x < x^*$ и $x^* < x < +\infty$, разделенные x^* , оказываются ассоциированными с конкурирующими сосуществующими режимами. Следует отметить, что уравнения (4.44) и (4.45) представляют собой универсальную модель для описания динамики бистабильной системы, так как достаточно большое количество бистабильных потенциальных функций в окрестности точки катастрофы могут быть сведены к полиному четвертой степени, записанному в форме уравнения (4.45) [400].

Дифференциальное уравнение (4.44) со стохастическим слагаемым $\xi(t)$ приводит к стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX = -\frac{dU(x)}{dx} dt + dW, \quad (4.46)$$

(где $X(t)$ — стохастический процесс, $W(t)$ — одномерный Виннеровский процесс), которое эквивалентно уравнению Фоккера-Планка

$$\frac{\partial \rho_X(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{dU(x)}{dx} \rho_X(x, t) \right] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \rho_X(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.47)$$

записанному для плотности вероятности $\rho_X(x, t)$ стохастического процесса $X(t)$.

Для получения статистических характеристик поведения системы, таких, как распределения длительностей сосуществующих режимов и зависимости средних длительностей сосуществующих режимов от управляющих параметров, необходимо проанализировать эволюцию плотностей вероятности $\rho_{1,2}(x, t)$ для двух сосуществующих режимов отдельно, а именно $\rho_1(x, t)$ в области $I_1 = -\infty < x < x^*$ и $\rho_2(x, t)$ в области $I_2 = x^* < x < +\infty$. Обе плотности вероятности $\rho_{1,2}(x, t)$ должны подчиняться уравнению Фоккера-Планка (4.47) в областях своего определения $I_{1,2}$.

Так как в режиме перемежаемости изображающая точка системы находится в течение длительного времени в окрестности одного из локальных минимумов, можно предположить, что решения для плотностей вероятности $\rho_{1,2}(x, t)$ нужно искать в форме метастабильного распределения, медленно убывающего с течением времени, то есть

$$\rho_{1,2}(x, t) = A_{1,2}(t)r(x), \quad (4.48)$$

где $r(x)$ — стационарная плотность вероятности, полученная из решения уравнения (4.47) в стационарном случае, $A_{1,2}(t)$ — коэффициенты, медленно меняющиеся с течением времени.

Стационарное решение уравнения Фоккера-Планка (4.47) в общем виде может быть записано как

$$r(x) = \exp\left(-\frac{2U(x)}{D}\right) \left[C_1 + C_2 \int_0^x \exp\left(\frac{2U(\xi)}{D}\right) d\xi \right]. \quad (4.49)$$

Константа C_2 может быть найдена из условия экстремума

$$r'(x_{1,2}) = C_2 = 0, \quad (4.50)$$

тогда стационарная плотность вероятности запишется в виде

$$r(x) = C_1 \exp\left(-\frac{2U(x)}{D}\right), \quad (4.51)$$

где постоянная C_1 может быть найдена из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(x) dx = 1. \quad (4.52)$$

Таким образом, стационарная плотность вероятности $r(x)$ может быть записана в виде

$$r(x) = \frac{g(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) d\xi}, \quad (4.53)$$

где

$$g(\xi) = \exp\left(-\frac{2U(\xi)}{D}\right). \quad (4.54)$$

Явный вид функции $A(t)$ можно получить путем решения дифференциального уравнения

$$\frac{dA_{1,2}}{dt} = -\frac{k}{P_{1,2}} A_{1,2}(t) r(x^*), \quad (4.55)$$

где x^* — критическая точка, разделяющая два сосуществующих режима бистабильной системы (4.44)–(4.45), k — коэффициент пропорциональности, $P_{1,2}$ — вероятности нахождения изображающей точки вблизи первого или второго локального минимума, определяемые как

$$P_1 = \int_{-\infty}^{x^*} r(\xi) d\xi = \frac{\int_{-\infty}^{x^*} g(\xi) d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) d\xi}, \quad (4.56)$$

$$P_2 = \int_{x^*}^{+\infty} r(\xi) d\xi = \frac{\int_{x^*}^{+\infty} g(\xi) d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) d\xi},$$

соответственно. Понятно, что убывание $A_{1,2}(t)$ с течением времени описывается экспоненциальным законом

$$A_{1,2}(t) = A_{1,2}(0) \exp\left(-\frac{kr(x^*)}{P_{1,2}} t\right), \quad (4.57)$$

причем показатели экспоненты оказываются различными для двух локальных минимумов, что (как будет показано ниже) приводит к экспоненциальному характеру распределений длительностей обоих сосуществующих режимов. Действительно, распределение длительностей режима, соответствующего первому локальному минимуму, может быть найдено из выражения (см. также [401])

$$p_1(t) = - \int_{-\infty}^{x^*} \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} dx, \quad (4.58)$$

в то время как для второго локального минимума соотношение (4.58) переписывается в виде

$$p_2(t) = - \int_{x^*}^{+\infty} \frac{\partial \rho_2(x, t)}{\partial t} dx. \quad (4.59)$$

Подставляя выражения (4.48), (4.53), (4.54) и (4.57) в уравнения (4.58), (4.59) и принимая во внимание условия нормировки

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x^*} \rho_1(\xi, 0) d\xi &= \int_{-\infty}^{x^*} A_1(0)r(\xi) d\xi = 1, \\ \int_{x^*}^{+\infty} \rho_2(\xi, 0) d\xi &= \int_{x^*}^{+\infty} A_2(0)r(\xi) d\xi = 1, \end{aligned} \quad (4.60)$$

можно получить следующие соотношения для распределений длительностей сосуществующих режимов

$$p_{1,2}(t) = \kappa_{1,2} \exp(-\kappa_{1,2}t), \quad (4.61)$$

где

$$\kappa_{1,2} = \frac{kr(x^*)}{P_{1,2}}, \quad (4.62)$$

то есть, в режиме индуцированной шумом перемежаемости распределения длительностей сосуществующих режимов подчиняются экспоненциальным законам.

На основе полученных соотношений (4.61)–(4.62) и определения среднего

$$T_{1,2} = \int_0^{+\infty} t p_{1,2}(t) dt, \quad (4.63)$$

можно получить следующее выражение для средних длительностей обоих сосуществующих режимов

$$T_{1,2} = \frac{1}{\kappa_{1,2}} = \frac{P_{1,2}}{kr(x^*)}. \quad (4.64)$$

Тогда аналитическая закономерность (4.61) для распределений длительностей сосуществующих режимов при индуцированной шумом перемежаемости запишется в виде

$$p_{1,2}(t) = \frac{1}{T_{1,2}} \exp\left(-\frac{t}{T_{1,2}}\right). \quad (4.65)$$

Следует отметить, что закономерность (4.65) в точности совпадает с аналогичной характеристикой, полученной в работах [390, 391, 393], для частных случаев.

Подставляя явные выражения для вероятностей $P_{1,2}$ и стационарной плотности вероятности $r(x^*)$ в соотношение (5.30) и принимая во внимание тот факт, что граничная точка $x^* \approx b$ при малых значениях параметра b , можно получить выражения для средних длительностей сосуществующих режимов в следующем виде

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{L_1}{k} \exp\left[\frac{2}{D} \left(\frac{b^4}{4} + \frac{b^2}{2}\right)\right], \\ T_2 &= \frac{L_2}{k} \exp\left[\frac{2}{D} \left(\frac{b^4}{4} + \frac{b^2}{2}\right)\right], \end{aligned} \quad (4.66)$$

где интегралы

$$L_1 = \int_{-\infty}^{x^*} g(\xi) d\xi \quad \text{and} \quad L_2 = \int_{x^*}^{+\infty} g(\xi) d\xi \quad (4.67)$$

могут быть найдены численно.

В симметричном случае параметр $b = 0$, а средние длительности $T_{1,2}$ совпадают друг с другом, то есть $T = T_{1,2}$. Кроме того, в данном случае

интегралы (4.67) могут быть вычислены аналитически, что позволяет получить аналитическое выражение для средней длительности в следующем виде

$$T = \frac{\pi}{4k} \exp\left(\frac{1}{4D}\right) \left[I_{-1/4}\left(\frac{1}{4D}\right) + I_{1/4}\left(\frac{1}{4D}\right) \right], \quad (4.68)$$

где $I_\alpha(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Таким образом, в режиме индуцированной шумом перемежаемости статистические характеристики длительностей сосуществующих режимов подчиняются соотношениям (4.65) и (4.66), соответственно.

4.5.2 Результаты численного моделирования

Для подтверждения результатов теоретических предсказаний, представленных в предыдущем подразделе, проведем численное моделирование бистабильной системы (4.44)–(4.45) в присутствии шума интенсивности $D = 0.1$. На рисунке 4.17, *а, г* приведены потенциальные функции $U(x)$ при двух различных значениях параметра асимметрии b (*а*: $b = 0$, симметричный случай, *г*: $b = 0.15$, асимметричный случай). На этом же рисунке (рисунок 4.17, *б, в, д, е*) показаны также статистические распределения длительностей сосуществующих режимов. Рисунок 4.17, *б, д* соответствует первому режиму (движению в окрестности первого локального минимума потенциальной функции, где $-\infty < x < x^*$), рисунок 4.17, *в, е* относится ко второму режиму, где $x^* < x < +\infty$. Результаты численного моделирования показаны точками для обоих сосуществующих режимов, их теоретические аппроксимации экспоненциальными законами (4.65) с параметрами, указанными в подрисуночной подписи, — сплошными линиями. Нетрудно заметить, отличное соответствие результатов численных вычислений и аналитических аппроксимаций как в симметричном, так и асимметричном случаях, что подтверждает справедливость разработанной теории.

Дополнительным доказательством достоверности полученных результатов являются зависимости средних длительностей сосуществующих

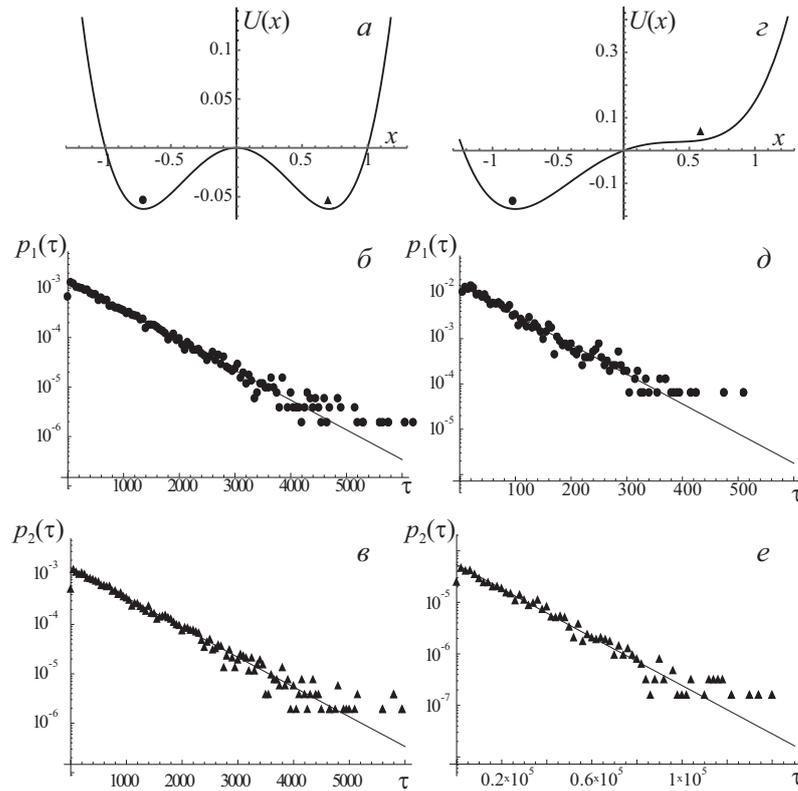


Рисунок 4.17 — Потенциальные функции $U(x)$ (a, z) и распределения длительностей ($б, в, д, е$) двух сосуществующих режимов в бистабильной системе (4.44)–(4.45) при двух различных значениях параметра асимметрии: ($a-в$) $b = 0$, ($z-е$) $b = 0.15$. Результаты численного моделирования обозначены точками на рисунках 4.17, $б, в, д, е$. Теоретические аппроксимации закономерностью (4.65) показаны сплошными линиями. Параметры аппроксимации выбраны следующими: ($б$) $T_1 = 722$, ($в$) $T_2 = 722$; ($д$) $T_1 = 66$, ($е$) $T_2 = 18508$

режимов от управляющего параметра b . Чтобы получить аналитические выражения для таких зависимостей, необходимо вычислить интегралы $L_{1,2}$ при различных значениях параметра асимметрии b . На рисунке 4.18, a приведены численно полученные зависимости обоих интегралов (показаны точками) от параметра b и их аппроксимации (сплошные линии). Нетрудно заметить, что зависимости $L_{1,2}(b)$ могут быть аппроксимированы экспоненциальными законами

$$L_{1,2} = C \exp(\mp \alpha b) \quad (4.69)$$

где $C = 72.86$, $\alpha = 18.86$ — константы. Таким образом, средние длительности обоих сосуществующих режимов должны подчиняться закономерностям

$$T_{1,2} = K \exp(\mp \alpha b) \exp \left[\frac{2}{D} \left(\frac{b^4}{4} + \frac{b^2}{2} \right) \right], \quad (4.70)$$

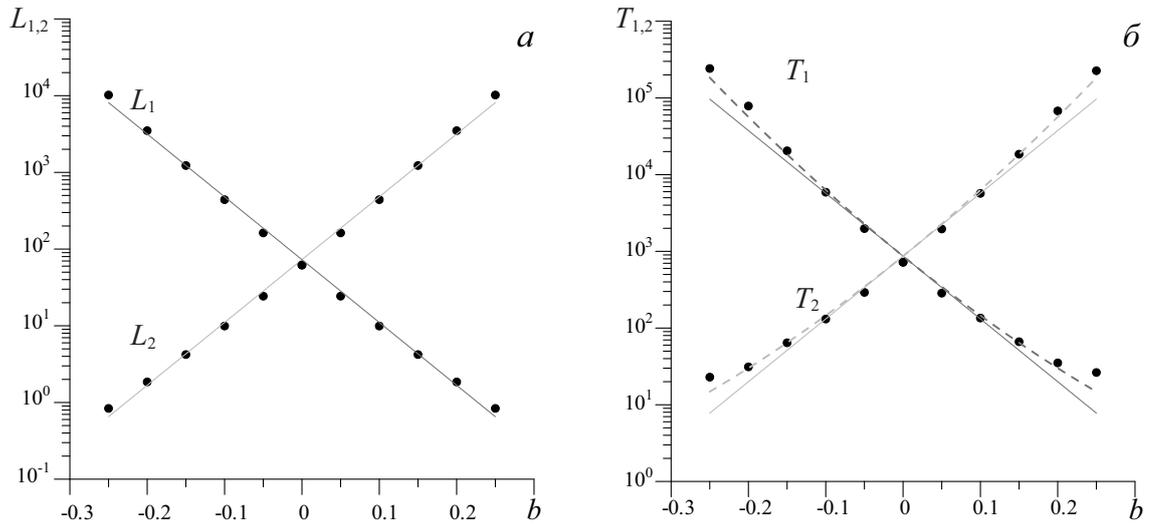


Рисунок 4.18 — Зависимости интегралов $L_{1,2}$ (а) и средних длительностей $T_{1,2}$ сосуществующих режимов (б) в бистабильной системе (4.44)–(4.45) от управляющего параметра b (точки) и их аппроксимации теоретическими законами (4.69), (4.71) (сплошные линии) и (4.70) (пунктирные линии). Параметры аппроксимаций выбраны следующими: (а) $C = 72.86$, $\alpha = 18.86$, (б) $K = 867$, $\alpha = 18.85$, $D = 0.1$

где $K = C/k$ — также константа.

На рисунке 4.18,б приведены численно полученные зависимости средних длительностей обоих сосуществующих режимов (показаны точками) и их теоретические аппроксимации закономерностями (4.70) (пунктирные линии). Кривая T_1 соответствует первому сосуществующему режиму, кривая T_2 — второму. Параметры аппроксимаций указаны в подписи рисунка. Четко видно хорошее соответствие результатов, полученных численно и теоретически, практически во всем рассматриваемом диапазоне изменения параметра асимметрии.

Необходимо отметить, что при малых значениях параметра b экспоненциальный член $\exp\left[\frac{2}{D}\left(\frac{b^4}{4} + \frac{b^2}{2}\right)\right]$ в выражении (4.70) оказывается близким к 1, а, следовательно, зависимости средних длительностей сосуществующих режимов могут быть аппроксимированы экспоненциальными законами

$$T_{1,2} = K \exp(\mp \alpha b). \quad (4.71)$$

Такие зависимости показаны на рисунке 4.18,б сплошными линиями. Отчетливо видно, что при $b \in [-0.15, 0.15]$ теоретические зависимости (4.70) и (4.71) практически совпадают друг с другом, что позволяет

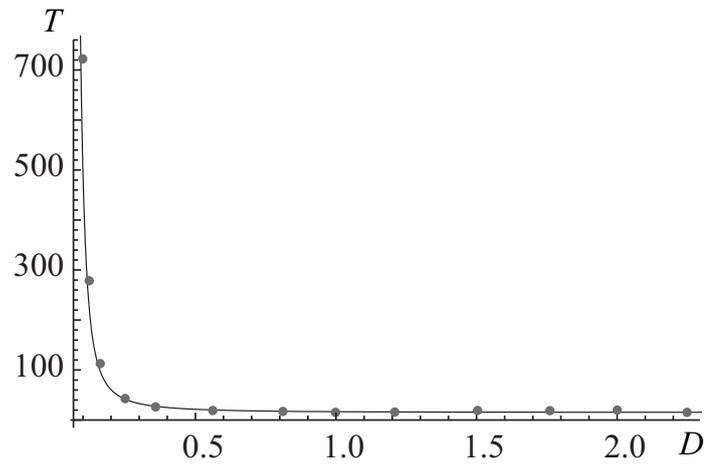


Рисунок 4.19 — Зависимость средней длительности T сосуществующих режимов от интенсивности шума D , полученная численно (точки) для симметричного случая $b = 0$, и ее теоретическая аппроксимация закономерностью (4.68) (сплошная линия)

успешно применять приближенную закономерность (4.71) к численно полученным результатам. При относительно больших значениях параметра асимметрии b численно полученные данные начинают отклоняться от теоретической закономерности (4.71), что связано с неприменимостью допущений, сделанных при выводе закономерности (4.71), а следовательно, для аппроксимации таких данных должна использоваться первоначальная закономерность (4.70).

Наконец, выведенная для симметричного случая $b = 0$ закономерность для средней длительности сосуществующих режимов от интенсивности шума (4.68) также находится в хорошем соответствии с результатами численных вычислений (см. рисунок 4.19). Средние длительности сосуществующих режимов, полученные при различных значениях интенсивности шума D , показанные на рисунке 4.19 точками, успешно аппроксимируются теоретической закономерностью (4.68) в широком диапазоне изменения параметра D .

Таким образом, при относительно малых значениях параметра асимметрии b в полном соответствии с полученными результатами теоретических предсказаний зависимости средних длительностей сосуществующих режимов подчиняются экспоненциальному закону (4.71), в то время как при относительно больших значениях параметра b более сложное, но более точное выражение (4.70) оказывается справедливым. При этом,

при фиксированных значениях параметра асимметрии и интенсивности шума распределения длительностей сосуществующих режимов удовлетворяют экспоненциальным законам (4.65).

4.5.3 Перемежающееся поведение на границе обобщенной синхронизации в двух взаимно связанных осцилляторах Лоренца

Применим разработанную теорию для описания характеристик перемежающегося поведения, имеющего место во взаимно связанных системах с бистабильным типом хаотического аттрактора, находящимся вблизи границы режима обобщенной синхронизации (см. главу 2). В качестве примера таких систем рассмотрим две взаимно связанные системы Лоренца (2.7), рассмотренные в подразделе 4.5.3, с теми же значениями управляющих параметров (см. также [93, 148]).

Как было установлено в главе 2, возникновение обобщенной синхронизации во взаимно связанных динамических системах связано с переходом второго изначально положительного показателя Ляпунова в область отрицательных значений, и этот режим возникает в системе (2.7) при $\varepsilon = \varepsilon_{GS} = 5.9$. Ниже границы обобщенной синхронизации имеет место перемежающееся поведение, проявляющееся в появлении коротких временных интервалов с расхождением фазовых траекторий на различные листы хаотических аттракторов, в то время как большую часть времени фазовые траектории взаимодействующих систем оказываются практически полностью синхронизованными друг с другом (см. рисунок 2.8). Моменты расхождения фазовых траекторий соответствуют турбулентным фазам, а интервалы синхронного поведения называются ламинарными фазами в четком соответствии с теорией перемежаемости. Детерминированная неустойчивость фазовых траекторий и их чувствительность к начальным условиям приводит к тому, что хаотическая динамика взаимодействующих осцилляторов Лоренца начинает играть роль внутреннего шума.

Иными словами, возникновение перемежаемости вблизи границы обобщенной хаотической синхронизации связано с перескоком изображающих точек с одного листа хаотического аттрактора на другой, что аналогично поведению бистабильной динамической системы, находящейся под действием шума. Поэтому можно предположить, что теория индуцированной шумом перемежаемости, разработанная в подразделе 4.5.1, может быть применена к системам (2.7).

Для подтверждения сделанных предположений были проанализированы статистические характеристики длительностей ламинарных фаз (распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях управляющих параметров и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи), полученные результаты сопоставлены с теоретическими закономерностями (4.65) и (4.71). Из-за симметрии хаотических аттракторов обеих взаимодействующих систем мы не различали моменты времени, соответствующие нахождению изображающих точек на левом и правом листах хаотических аттракторов, и проводили расчет только одного распределения при фиксированных значениях управляющих параметров. Численно полученные распределения длительностей ламинарных фаз при различных значениях параметра связи ε во взаимно связанных осцилляторах Лоренца (2.7) показаны на рисунке 4.20 точками. Их теоретические аппроксимации закономерностью (4.65) показаны сплошными линиями (параметры аппроксимации указаны в подрисуночной подписи). Нетрудно заметить отличное соответствие численно полученных данных и результатов теоретических предсказаний.

Аналогичная ситуация наблюдается для зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра связи. Такая зависимость приведена на рисунке 4.21. Как и в рассмотренных выше случаях, численно полученные распределения показаны точками, теоретическая закономерность (4.71) — сплошной линией. Четко видно хорошее соответствие между теоретически и численно полученными результатами во всем рассматриваемом диапазоне изменений параметра связи. Таким об-

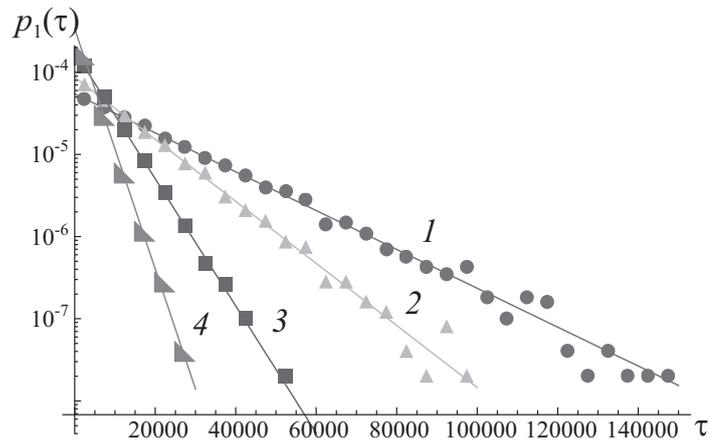


Рисунок 4.20 — Распределения длительностей ламинарных фаз в двух взаимно связанных осцилляторах Лоренца (2.7), находящихся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации, при различных значениях параметра связи (точки) и их теоретические аппроксимации закономерностью (4.65): 1 — $\varepsilon = 5.8$, $T_1 = 18357$, 2 — $\varepsilon = 5.5$, $T_1 = 11519$, 3 — $\varepsilon = 5.0$, $T_1 = 5612$, 4 — $\varepsilon = 4.5$, $T_1 = 2973$

разом, можно говорить о применимости теории индуцированной шумом перемежаемости к связанным системам Лоренца с бистабильным типом аттрактора, находящимся вблизи границы обобщенной хаотической синхронизации. Иными словами, в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации во взаимно связанных осцилляторах Лоренца с бистабильным типом аттрактора и распределение длительностей ламинарных фаз, и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности подчиняются экспоненциальным законам.

4.6 Оценка степени синхронности перемежающейся синхронизации по временному ряду

Одним из интересных вопросов, связанных с исследованием перемежаемости, имеющей место на границах различных типов хаотической синхронизации, является определение степени синхронности этого режима. Понятно, что подобную характеристику можно определить по статистическим характеристикам длительности ламинарных фаз: чем больше средняя длительность ламинарных фаз, тем ближе режим к синхронному. В то же самое время, далеко не всегда, например, при анализе вре-

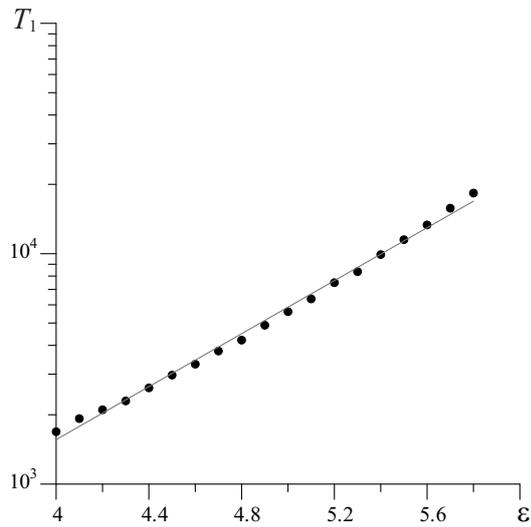


Рисунок 4.21 — Зависимость средней длительности T_1 ламинарных фаз от параметра связи ε в двух взаимно связанных осцилляторах Лоренца (2.7), находящихся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации, и ее аппроксимация закономерностью (4.71). Параметры аппроксимации выбраны следующими: $K = 7.8$, $\alpha = 1.324$

менных рядов, удается получить хорошую оценку степени синхронности таким способом. В частности, в случае анализа коротких временных рядов невозможно получить разумную статистику длительностей ламинарных фаз для определения достоверного среднего значения. Кроме того, в эксперименте далеко не всегда существует возможность варьирования управляющих параметров, что необходимо для сопоставления полученных значений средней длительности ламинарных фаз друг с другом.

Альтернативным методом определения степени синхронности диагностируемого перемежающегося синхронного режима является расчет условных показателей Ляпунова [70, 78, 86, 402, 403]. В частности, определить степень синхронности перемежающейся фазовой синхронизации возможно по величине так называемого условного нулевого показателя Ляпунова, отвечающего за фазовую динамику взаимодействующих систем. Понятно, что в потоковых динамических системах нулевой показатель Ляпунова присутствует всегда. Именно он отвечает за эволюцию возмущения вдоль траектории в фазовом пространстве этой системы. В случае взаимодействия двух связанных потоковых систем при увеличении силы связи между ними один из изначально нулевых показателей Ляпунова переходит в область отрицательных значений, что связано с

выполнением условия фазового захвата (4.14) в определенные моменты времени. Иными словами, в режиме перемежаемости “игольного ушка”, имеющей место на границе фазовой синхронизации хаотических систем, нулевой условный показатель Ляпунова будет уже отрицательным [311, 332, 365, 375, 404]. Аналогичные закономерности будут выполняться и для перемежаемости типа I в присутствии шума, наблюдающейся вблизи границы возникновения синхронного режима в неавтономных периодических системах, подверженных дополнительному шумовому воздействию [370–373] (см. также выше). В режиме фазовой синхронизации (граница которой, как было показано в подразделе 4.3.3, зависит от длины временного ряда) условный нулевой показатель Ляпунова будет по-прежнему отрицательным [311, 332, 365, 404], что говорит о возможности рассмотрения этой величины и как характеристики степени синхронности режима фазовой синхронизации. Несмотря на то, что при ненулевых значениях параметра связи этот показатель Ляпунова уже не будет равным нулю, термин “нулевой условный показатель Ляпунова” будет использоваться в дальнейшем именно для характеристики этого показателя Ляпунова.

Понятно, что определить величину условного нулевого показателя Ляпунова в том случае, когда оператор эволюции исследуемой системы задан в явном виде, оказывается достаточно просто. Для этого существуют эффективные методы и алгоритмы, известные как алгоритм Беннеттина и процедура ортогонализации Грама-Шмидта [340, 341, 405, 406]. В то же самое время, в ряде случаев, например, при анализе экспериментальных временных рядов достаточно часто возникает задача расчета показателей Ляпунова в том случае, когда единственной доступной характеристикой является временная реализация исследуемой системы. В настоящее время известны методы (см., например, [37, 340, 407–411]), позволяющие оценить один или два старших показателя Ляпунова по временному ряду. Нулевой условный показатель Ляпунова даже в двух связанных системах является четвертым по величине, что делает невозможным его корректную оценку при помощи известных методов и ал-

горитмов и требует разработки новых методов и подходов к анализу временных рядов. В настоящем разделе диссертационной работы будет рассмотрен предложенный нами модифицированный метод оценки нулевого условного показателя Ляпунова по временному ряду, дающий корректные результаты как для неавтономных систем, демонстрирующих периодическую динамику в присутствии шума, так и связанных хаотических систем [244]. Апробированный на модельных системах, этот метод будет применен для определения степени синхронности режима, устанавливающегося между различными областями головного мозга лабораторных животных и человека.

4.6.1 Описание метода

Предложенный метод оценки величины условного нулевого показателя Ляпунова по временному ряду основан на рассмотрении отображения окружности [301, 412, 413] в присутствии шума (см. также подраздел 4.3.3)

$$\phi_{n+1} = \phi_n + 2\Omega(1 - \cos(\phi_n - \psi)) - \varepsilon + \xi_n, \quad \text{mod } 2\pi \quad (4.72)$$

где ϕ_n играет роль разности фаз, ξ_n — шумовое слагаемое, ψ , Ω и ε — управляющие параметры.

Отображение окружности является классической моделью, часто используемой для изучения различных нелинейных явлений [414–416], включая синхронизацию [375] и захват фаз [417, 418]. Отображение окружности описывает достаточно точно поведение слабо нелинейного изохронного осциллятора, находящегося под внешним периодическим воздействием, вблизи порога синхронизации в случае малых значений расстройки управляющих параметров, так как оно может быть рассмотрено как дискретизация уравнения Адлера [419], которое, в свою очередь, может быть легко получено из укороченного уравнения [310, 420], выведенного в рамках метода медленно меняющихся амплитуд. В отсут-

ствии шума ($D = 0$) в системе (4.72) при $\varepsilon_c = 0$ имеет место касательная бифуркация, в результате которой устойчивая и неустойчивая точки

$$\phi_{s,u} = \psi \mp \arccos\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\Omega}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.73)$$

сливаются друг с другом при $\phi_c = \psi$ и исчезают, что соответствует порогу синхронизации.

Та же самая модель оказывается также справедливой для хаотических (или находящихся под действием шума) осцилляторов с фазово-когерентными аттракторами и малой частотной расстройкой [309, 375], так как

- при этих условиях хаотические осцилляторы могут рассматриваться как периодические системы, подверженные дополнительному шумовому воздействию [86, 361, 375];
- механизмы разрушения фазовой синхронизации и явления, имеющие место вблизи границ синхронных режимов, оказываются одними и теми же в обоих случаях [309, 365, 375] (см. также раздел 4.3).

Иными словами, для оценки величины условного нулевого показателя Ляпунова как в связанных хаотических системах, так и периодических осцилляторах, подверженных внешнему шумовому воздействию, возможно использовать модель отображения окружности (4.72) в присутствии шума.

Так как интересующий нас показатель Ляпунова очень близок к нулю в асинхронном режиме [375, 404], имеет смысл производить оценку его величины только в закритической области, где имеет место фазовый захват (или частичный фазовый захват, то есть наблюдается перемежающееся поведение), а показатель Ляпунова оказывается уже отрицательным, что соответствует положительным значениям параметра ε для отображения окружности (4.72). В данном случае динамика системы будет сосредоточена вблизи устойчивой точки ϕ_s , что делает возможным разложение правой части уравнения (4.72) в ряд Тейлора в окрестности

этой точки ($\phi_s = \phi_c$). Тогда отображение окружности будет эквивалентно квадратичному отображению

$$x_{n+1} = f(x_n) + \xi_n = x_n + \Omega x_n^2 - \varepsilon + \xi_n, \quad (4.74)$$

где $x = \phi - \psi$.

Из-за одномерного характера системы (4.74) ее показатель Ляпунова может быть найден по формуле

$$\Lambda_0(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|, \quad (4.75)$$

где x_n — временная реализация системы (4.74), $f'(x) = 1 + 2\Omega x$ — производная от оператора эволюции, вычисленная аналитически.

Принимая во внимание эргодичность рассматриваемого процесса, усреднение по времени может быть заменено на усреднение по ансамблю. Тогда

$$\Lambda_0(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_i(x) \ln |f'(x)| dx, \quad (4.76)$$

где $\rho_i(x)$ — инвариантная плотность вероятности переменной x . В работе [309] было показано, что в суперкритической области управляющего параметра ε , соответствующей синхронному режиму в потоковых системах, плотность вероятности подчиняется соотношению

$$\rho(x) = A \exp \left[-\frac{2}{D} \left(\varepsilon x - \frac{\Omega x^3}{3} \right) \right], \quad x \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{\Omega}}, \quad (4.77)$$

где A — коэффициент нормировки, D — дисперсия шума. Уравнение (4.77), полученное в [309], было выведено в предположении, что шумовое слагаемое в уравнении (4.74) представляет собой δ -коррелированный гауссов шум [$\langle \xi_n \rangle = 0$, $\langle \xi_n \xi_m \rangle = D \delta(n - m)$], однако, большинство современных работ (например, [163, 309, 368]) свидетельствует о том, что это требование является избыточным, а полученное соотношение может использоваться для описания явления синхронизации в присутствии не только гауссова шума, но и других случайных процессов (в частности, с равномерным распределением плотности вероятности) и детерминированных хаотических возмущений.

Соотношение (4.77), описывающее плотность вероятности $\rho(x)$, применимо при $x \leq \sqrt{\varepsilon/\Omega}$ и достигает своего максимума в точке

$$x_{\max} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\Omega}}. \quad (4.78)$$

Режим фазового захвата в потоковых системах моделируется дискретным отображением (4.74) при $\varepsilon/D^{2/3} \geq 1$, когда значения переменной x_n оказываются локализованными вблизи устойчивой точки x_{\max} , а плотность вероятности $\rho(x)$ уменьшается достаточно быстро. Как следствие, при $x < x_1^* = -2\sqrt{\varepsilon/\Omega}$ и $x > x_2^* = \sqrt{\varepsilon/\Omega}$ значения $\rho(x)$ могут быть положены равными нулю, а, следовательно, коэффициент нормировки A в (4.77) может быть найден из условия нормировки

$$\int_{x_1^*}^{x_2^*} \rho(x) dx = 1, \quad (4.79)$$

а значение нулевого условного показателя Ляпунова может быть оценено по формуле

$$\Lambda_0(\varepsilon) = \int_{x_1^*}^{x_2^*} \rho(x) \ln |1 + 2\Omega x| dx. \quad (4.80)$$

На самом деле для экспериментальных временных рядов плотность вероятности уменьшается более быстро, поэтому с практической точки зрения граничные значения плотности вероятности разности фаз в (4.79), (4.80) могут быть выбраны как $x_1 > x_1^*$ и $x_2 < x_2^*$.

Проанализировав все сделанные допущения, можно сказать, что предложенный метод может использоваться для оценки величины условного нулевого показателя Ляпунова для хаотических осцилляторов или периодических систем, находящихся под действием шума, с изначально фазово-когерентными аттракторами в случае малой расстройки между ними. При этом, взаимодействующие системы, как отмечалось выше, должны находиться в режиме фазовой или перемежающейся фазовой синхронизации. Для оценки величины показателя Ляпунова нужны

только значения параметров ε , Ω и D плотности вероятности. Эти параметры могут быть найдены при помощи аппроксимации экспериментально (или численно) полученного распределения разности фаз $\rho(\Delta\varphi)$ взаимодействующих систем теоретическим распределением (4.77), например, при помощи метода наименьших квадратов [421].

Таким образом, для оценки величины условного нулевого показателя Ляпунова для экспериментально или численно полученных временных рядов нужно выполнить следующие действия:

1. Вычисление величины разности фаз $\Delta\varphi(t)$ в дискретные моменты времени, то есть $\Delta\varphi_n = \Delta\varphi(t_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$. Дискретизация появляется естественным образом, так как анализируемые временные ряды оказываются, как правило, дискретными. Разность фаз $\Delta\varphi(t)$ может быть найдена как разность мгновенных фаз $\varphi_{1,2}(t)$ взаимодействующих осцилляторов, которые могут быть введены в рассмотрение, например, как углы в полярной системе координат [332, 361] или при помощи непрерывного вейвлетного преобразования [357, 379, 422]. Если анализируемые временные ряды являются одномерными, для введения мгновенной фазы как угла в полярной системе координат нужно использовать метод запаздывания (метод Такенса) [149]. Кроме того, разность фаз $\Delta\varphi(t)$ может быть получена также при помощи метода вращающейся плоскости [111, 164, 169].
2. Построение полученных данных на плоскости $(\Delta\varphi_{n+1}, \Delta\varphi_n)$ и аппроксимация полученных точек квадратичной функцией $a_0 + a_1x + a_2x^2$ (например, при помощи метода наименьших квадратов), при этом значения разности фаз $\Delta\varphi$ должны быть преобразованы в виде $x_n = \Delta\varphi_n - \psi$ (где $\psi = \text{const}$) таким образом, чтобы параметр аппроксимации $a_1 = 1$. Этот шаг необходим для того, чтобы можно было использовать упрощенное выражение (4.74) вместо (4.72).
3. Вычисление плотности вероятности $\rho(x)$ полученной переменной x .

4. Нахождение значений параметров Ω , D , ε и коэффициента нормировки A при помощи аппроксимации численно или экспериментально полученного распределения закономерностью (4.77) с условием нормировки (4.79).
5. Оценка величины условного нулевого показателя Ляпунова при помощи выражения (4.80).

4.6.2 Оценка величины условного нулевого показателя Ляпунова в модельных системах, находящихся в режиме фазовой синхронизации

Применим разработанный метод для оценки величины условного нулевого показателя Ляпунова нескольких модельных систем с непрерывным и дискретным временем. В качестве примеров таких систем рассмотрим (i) квадратичное отображение и отображение окружности, (ii) неавтономный автогенератор Ван дер Поля под действием шума и (iii) два связанных хаотических осциллятора Ресслера.

4.6.2.1 Квадратичное отображение и отображение окружности

Начнем рассмотрение с дискретных отображений, на основе которых был разработан метод оценки величины условного нулевого показателя Ляпунова в предыдущем подразделе. Как отмечалось выше, для квадратичного отображения (4.74) в отсутствие шума при $\varepsilon_c = 0$ имеет место касательная бифуркация, что приводит к переходу изначально нулевого показателя Ляпунова в область отрицательных значений. Зафиксируем значения управляющих параметров $\Omega = 0.1$, $\varepsilon = 0.008$, $D = 0.0001$ (что соответствует суперкритической области $\varepsilon > \varepsilon_c$) и проанализируем поведение этого показателя Ляпунова.

Основная идея предложенного метода проиллюстрирована на рисунке 4.22. Так как мы изначально имеем дело с квадратичным отображе-

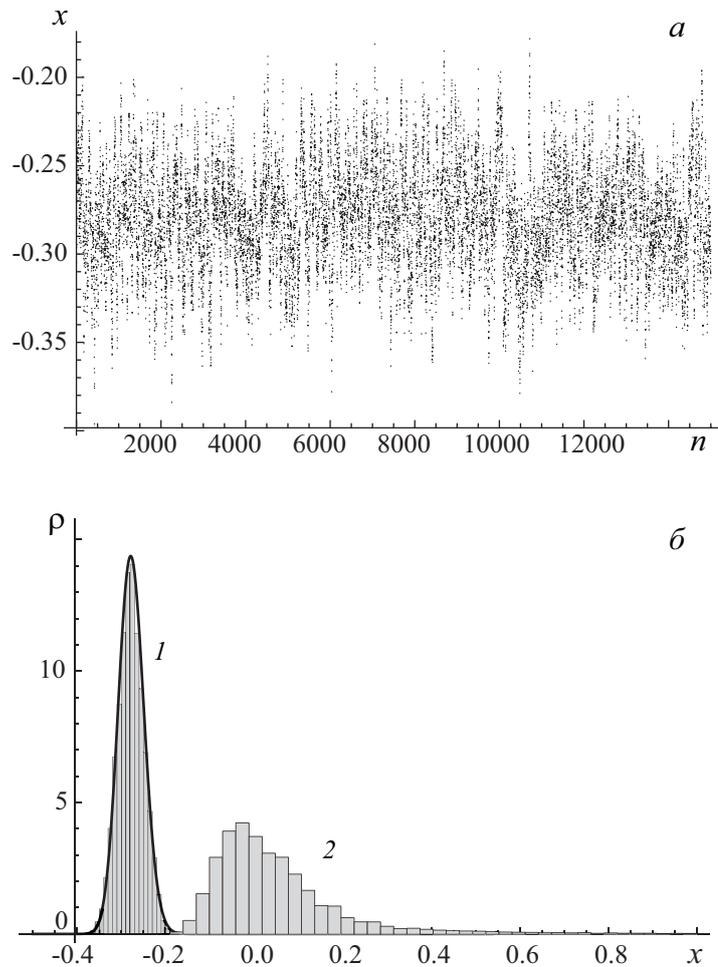


Рисунок 4.22 — (а) Временная реализация квадратичного отображения (4.74) при $\Omega = 0.1$, $\varepsilon = 0.008$, $D = 0.0001$; (б) плотность вероятности $\rho(x)$ (гистограмма 1), полученная по временной реализации x_n и ее аппроксимация закономерностью (4.77) при $A = 1.07 \times 10^{-13}$, $\Omega = 0.111124$, $\varepsilon = 0.0087$, $D = 0.0001$ (сплошная линия); аналогичная плотность вероятности $\rho(x)$ (гистограмма 2), полученная по временной реализации x_n при $\Omega = 0.1$, $\varepsilon = 0.0$, $D = 0.0001$

нием, шаги 1 и 2 должны быть опущены, а стартовой точкой в данном случае будет шаг 3 (см. подраздел 4.6.1). На рисунке 4.22 показаны временная реализация x_n системы (4.74) при выбранных значениях управляющих параметров (а) и плотность вероятности $\rho(x)$, полученная по временной реализации x_n (гистограмма 1), а также ее аппроксимация закономерностью (4.77) при следующих значениях параметров: $A = 1.07 \times 10^{-13}$, $\Omega = 0.111124$, $\varepsilon = 0.0087$, $D = 0.0001$ (сплошная линия) (б).

Значения параметров аппроксимации определялись следующим образом. Параметр D вычислялся как коэффициент эффективной диффузии [423]. Соотношение между параметрами A , Ω и ε было найде-

но из условия совпадения максимумов численно полученного распределения плотности вероятности и закономерности (4.77), то есть, из условия (4.78), что привело к следующим соотношениям между ними: $\varepsilon = 0.0784\Omega$, $A = 14.2987 \exp(-292.693\Omega)$. Поиск параметра Ω осуществлялся при помощи метода наименьших квадратов. Нетрудно заметить, что параметры аппроксимации оказываются близкими к изначальным значениям управляющих параметров Ω и ε . Подставляя их в соотношение (4.80) и выбирая $x_1 = -0.5$, $x_2 = 0$, можно получить значение $\Lambda_0 = -0.065$, которое находится в хорошем соответствии со значением показателя Ляпунова, вычисленным численно по формуле (4.75).

Рисунок 4.22, б (гистограмма 2), полученный при $\varepsilon = 0$, иллюстрирует, почему предложенный метод становится неработоспособным при приближении к критической точке ε_c . Нетрудно заметить, что в данном случае плотность вероятности переменной x_n не оказывается локализованной в окрестности неподвижной точки. Так как предположения, используемые для вывода уравнения (4.77) оказываются невыполненными, выражение (4.77) не позволяет получить разумную аппроксимацию плотности вероятности $\rho(x)$ (см. гистограмму 2 на рисунке 4.22, б), и, как следствие, оцененное значение показателя Ляпунова не будет верным ниже и вблизи критической точки.

Применим теперь разработанный метод для вычисления величины условного показателя Ляпунова для отображении окружности (4.72) при тех же значениях управляющих параметров и характеристик шумового сигнала, что и в случае квадратичного отображения (4.74), рассмотренного выше, и $\psi = 0$. По аналогии с предыдущим примером для оценки величины условного показателя Ляпунова в данном случае также достаточно осуществить шаги 3–5. Для вычисления зависимости этого показателя Ляпунова от управляющего параметра такую последовательность действий нужно повторить для нескольких фиксированных значений управляющих параметров. На рисунке 4.23, а приведена зависимость рассматриваемого показателя Ляпунова от параметра ε в суперкритической области его значений ($\varepsilon > 0$). Результаты применения

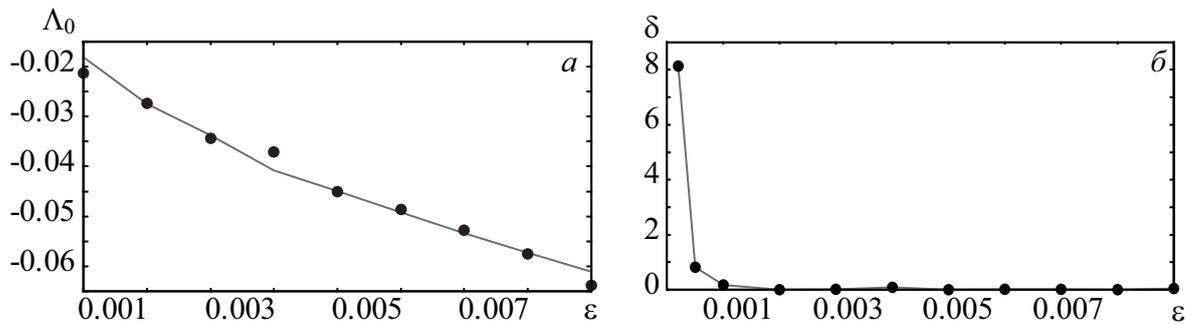


Рисунок 4.23 — Зависимость (а) показателя Ляпунова Λ_0 и (б) относительной ошибки δ от параметра надкритичности ε для отображения окружности (4.72) при $\Omega = 0.1$ в присутствии шума. На рисунке 4.23, а данные, полученные при помощи предложенного метода, обозначены точками, результаты применения стандартных алгоритмов показаны сплошной линией

предложенного метода показаны точками, значения показателя Ляпунова, вычисленного при помощи выражения (4.75), — сплошной линией. Видно хорошее соответствие полученных результатов.

Для иллюстрации точности оцененного значения показателя Ляпунова на рисунке 4.23, б приведена зависимость относительной ошибки

$$\delta = \frac{|\hat{\Lambda}_0 - \Lambda_0|}{|\hat{\Lambda}_0|} \quad (4.81)$$

(где Λ_0 — оцененное значение нулевого условного показателя Ляпунова, $\hat{\Lambda}_0$ — значение того же показателя Ляпунова, полученное при помощи стандартных алгоритмов) от параметра надкритичности ε . Нетрудно заметить, что относительная ошибка δ оказывается малой во всем диапазоне изменения параметра надкритичности $\varepsilon > 0$ за исключением очень узкой области вблизи точки бифуркации ε_c , где значение δ становится большим, так как предложенный метод становится неработоспособным при приближении к критической точке в полном соответствии с рассуждениями, приведенными выше. Другими словами, предложенный метод дает хорошую оценку рассматриваемого показателя Ляпунова в широком диапазоне значений управляющих параметров, соответствующих синхронному режиму. В свою очередь, область вблизи критической точки, где относительная ошибка является достаточно большой, оказывается малой по сравнению с диапазоном значений управляющего параметра, где предложенный метод приводит к удовлетворительным

результатам. В то же самое время, в субкритической области изучаемый показатель Ляпунова оказывается близким к нулю и, обычно нет необходимости оценки показателя в этой области. Как следствие, невозможность применения предложенного метода в этой области не должно расцениваться как недостаток.

4.6.2.2 Автогенератор Ван дер Поля

В качестве следующего примера рассмотрим классический автогенератор Ван дер Поля (4.32), находящийся под внешним гармоническим воздействием в присутствии аддитивного шума, при тех же значениях управляющих параметров, что и в разделе 4.3.2. При увеличении амплитуды внешнего воздействия ε изначально положительный показатель Ляпунова системы (4.32) переходит в область отрицательных значений. В отсутствие шума ($D = 0$) он становится отрицательным при $\varepsilon = \varepsilon_b = 0.0238$, что соответствует порогу синхронизации в исследуемой системе. Наличие шума приводит к сдвигу порогового значения установления синхронного режима в область больших значений амплитуды внешнего воздействия ($\varepsilon_c = 0.029$ при $D = 1$). При этом, переход нулевого показателя Ляпунова в отрицательную область происходит немного раньше по сравнению со случаем отсутствия шума (см. также [375]).

Применим предложенный метод оценки величины условного нулевого показателя Ляпунова системы (4.32) при $D = 1$ по временному ряду при $\varepsilon > \varepsilon_c$. Принцип вычисления показателя Ляпунова в данном случае оказывается практически таким же, как и в случае отображений, рассмотренных выше. Единственное отличие заключается в том, что вместо самой временной реализации системы в качестве анализируемого сигнала должна выступать временная зависимость разности фаз $\Delta\varphi(t)$ между сигналом и внешним воздействием, то есть для оценки величины нулевого условного показателя Ляпунова нужно осуществить все шаги 1–5 (см. стр. 288). Так как при выбранных значениях управляющих параметров неавтономная система демонстрирует синхронное поведение,

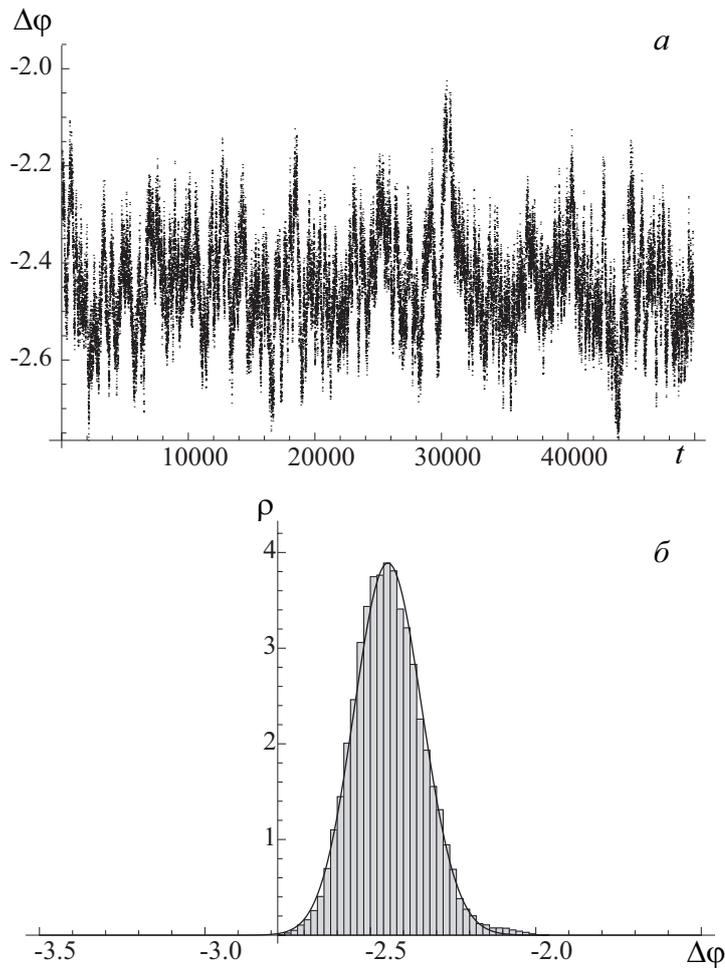


Рисунок 4.24 — (а) Временная зависимость разности фаз $\Delta\varphi(t)$ неавтономного автогенератора Ван дер Поля (4.32) при $D = 1$, $\varepsilon = 0.043$; (б) плотность вероятности $\rho(\Delta\varphi)$ (гистограмма), полученная по разности фаз $\Delta\varphi(t)$, и ее аппроксимация закономерностью (4.77) при $A = 1.47 \times 10^{-82}$, $\Omega = 0.00486$, $\varepsilon = 0.0029$, $D = 0.0005$ (сплошная линия)

разность фаз $\Delta\varphi(t) < 2\pi$ будет захвачена, а анализируемый сигнал не будет нарастать с течением времени.

Рисунок 4.24,а иллюстрирует временную зависимость разности фаз $\Delta\varphi(t)$ неавтономного автогенератора Ван дер Поля при $\varepsilon = 0.043$, а на рисунке 4.24,б показаны распределение вероятности разности фаз $\Delta\varphi(t)$ при тех же значениях управляющих параметров и его аппроксимация закономерностью (4.77). Поиск параметров аппроксимации осуществлялся также, как и в случае квадратичного отображения и отображения окружности, рассмотренных в подразделе 4.6.2.1. Параметр $D = D_{eff} = 0.0005$ определялся как коэффициент эффективной диффузии, а остальные параметры $A = 1.47 \times 10^{-82}$, $\Omega = 0.00486$, $\varepsilon = 0.029$ находились из аппроксимации распределения плотности вероятности. Под-

становка значений этих параметров в соотношение (4.80) при $x_1 = -3$, $x_2 = -1$ дает величину условного показателя Ляпунова $\Lambda_0 = -0.024$, что находится в хорошем соответствии с результатами применения алгоритма Бенеттина [341].

На рисунке 4.25, *а* приведена зависимость рассматриваемого условного показателя Ляпунова системы (4.32) от амплитуды внешнего воздействия ε в суперкритической области значений управляющих параметров, полученная при помощи предложенного метода (точки) и алгоритма Бенеттина [341] (сплошная линия). Относительная ошибка δ , определяемая выражением (4.81), представлена на рисунке 4.25, *б*. Явно видно, что, как и в случае отображения окружности, наблюдается хорошее соответствие результатов обоих методов друг с другом. Как и в случае дискретных отображений, рассмотренных в подразделе 4.6.2.1, относительная ошибка δ оказывается достаточно малой во всем диапазоне изменения параметра надкритичности $\varepsilon > \varepsilon_c$, соответствующего синхронному поведению автогенератора Ван дер Поля в присутствии шума (порог возникновения синхронного режима показан на рисунке 4.25, *б* стрелкой). Можно заметить, что величина δ становится достаточно большой в области переходной динамики (где происходит разрушение синхронного режима). Сравнивая поведение дискретного отображения (4.72) с динамикой неавтономного автогенератора Ван дер Поля (4.32), нужно также принимать во внимание, что точка бифуркации ε_c для отображения окружности (4.72) соответствует критической точке ε_b для автогенератора Ван дер Поля (4.32), а не границе синхронизации ε_c [375], а следовательно, предложенный метод оказывается применимым во всей области синхронной динамики рассматриваемой потоковой системы.

4.6.2.3 Две связанные системы Ресслера

В качестве последнего примера модельных систем рассмотрим результаты применения предложенного метода для оценки величины условного

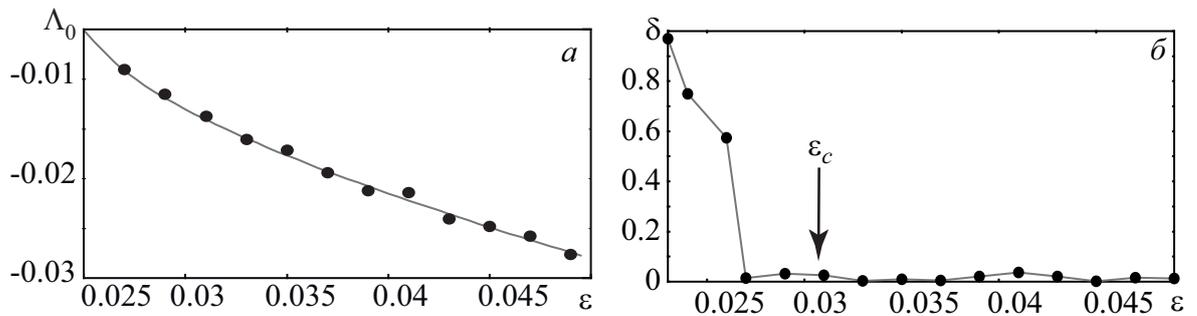


Рисунок 4.25 — Зависимость (а) условного показателя Ляпунова Λ_0 неавтономного автогенератора Ван дер Поля (4.32) в присутствии шума ($D = 1$) и (б) относительной ошибки δ от амплитуды внешнего воздействия ε . На рисунке 4.25, а данные, полученные при помощи предложенного метода, показаны точками, результаты применения алгоритма Бенеттина — сплошной линией. Граница синхронного режима на рисунке 4.25, б показана стрелкой

нулевого показателя Ляпунова в связанных хаотических осцилляторах. В качестве таких систем рассмотрим по-прежнему два однонаправленно связанных осциллятора Ресслера (1.15) при тех же значениях управляющих параметров a , p , c , ω_u и $D_1 = D_2 = 0$, $\omega_x = 0.93$. Как и в случае автогенератора Ван дер Поля, рассмотренного в предыдущем разделе, при увеличении параметра связи ε происходит переход нулевого условного показателя Ляпунова в область отрицательных значений. При этом, по аналогии с рассмотренным выше случаем, такой переход предшествует установлению режима фазовой синхронизации в системе (1.15). Таким образом, возможно оценить величину условного нулевого показателя Ляпунова при помощи анализа разности фаз между взаимодействующими системами также, как и для автогенератора Ван дер Поля, рассмотренного выше.

Рисунок 4.26, а иллюстрирует зависимость разности фаз $\Delta\varphi(t)$ двух связанных систем Ресслера (1.15) при $\varepsilon = 0.07$, а на рисунке 4.26, б показаны распределение плотности вероятности $\Delta\varphi(t)$ при тех же значениях управляющих параметров и его аппроксимация закономерностью (4.77). Поиск параметров аппроксимации осуществлялся также, как и для описанных выше систем. Снова, как и для других систем, наблюдается хорошее соответствие между распределениями $\rho(\Delta\varphi)$, полученным численно и предсказанным теоретически.

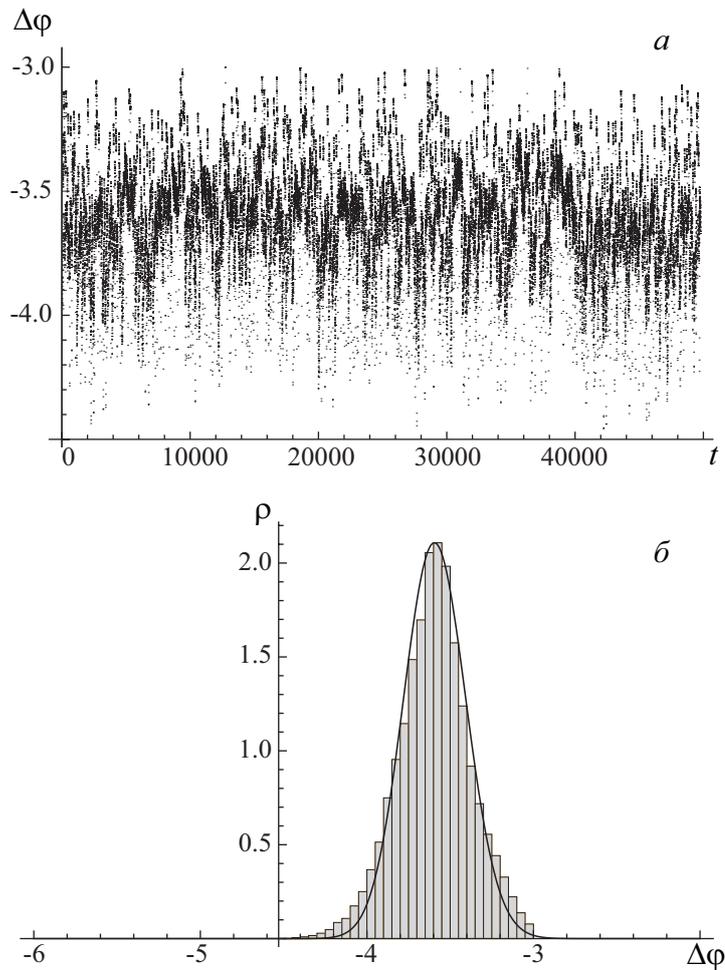


Рисунок 4.26 — (а) Зависимость разности фаз $\Delta\varphi(t)$ осцилляторов Ресслера (1.15) при $\varepsilon = 0.07$; (б) плотность вероятности $\rho(\Delta\varphi)$ (гистограмма), полученная по разности фаз $\Delta\varphi(t)$, и ее аппроксимация закономерностью (4.77) при $A = 4.97 \times 10^{-54}$, $\Omega = 0.0048$, $\varepsilon = 0.0617$, $D = 0.0024$ (сплошная линия)

Необходимо отметить, что численно полученное распределение содержит небольшие “тяжелые хвосты”, что приводит к его незначительному отклонению от теоретической закономерности (4.77). В то же самое время, наличие таких отклонений не влияет значительно на величину нулевого условного показателя Ляпунова, рассчитанного при помощи полученного распределения. В частности, на рисунке 4.27, а приведены зависимости нулевого условного показателя Ляпунова осцилляторов Ресслера (1.15) от параметра связи ε в области фазовой синхронизации, полученные при помощи предложенного метода (точки) и с использованием алгоритма Бенеттина и процедуры ортогонализации Грама-Шмидта (сплошная линия). Величина относительной ошибки δ , в свою очередь, представлена на рисунке 4.27, б. Явно заметно хорошее соответствие

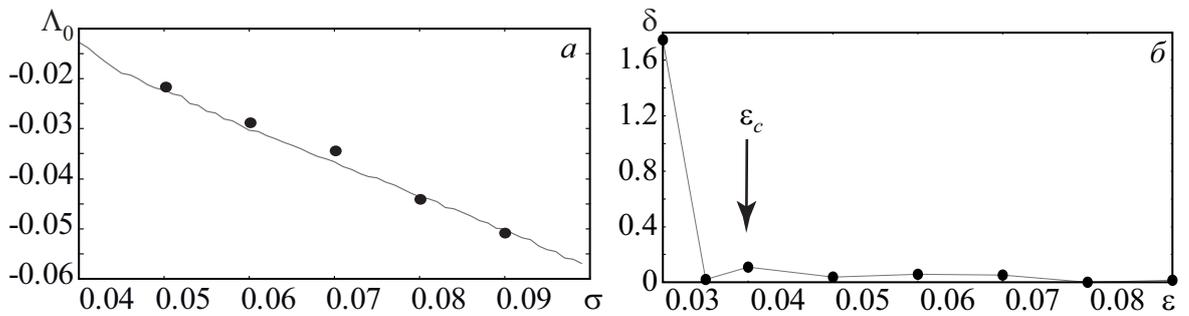


Рисунок 4.27 — Зависимости (а) условного нулевого показателя Ляпунова Λ_0 осцилляторов Ресслера (1.15) и (б) относительной ошибки δ от параметра связи ε . На рисунке 4.27, а данные, полученные при помощи предложенного метода, обозначены точками, результаты применения алгоритма Бенеттина и процедуры ортогонализации Грама-Шмидта показаны сплошной линией. Граница режима фазовой синхронизации ε_c на рисунке 4.27, б показана стрелкой

между полученными данными во всем диапазоне изменения силы связи, соответствующем режиму фазовой синхронизации. Также как и для автогенератора Ван дер Поля (4.32), находящегося под действием шума, относительная ошибка δ принимает большие значения в области асинхронного режима, в то время как в режиме фазовой синхронизации она оказывается близкой к нулю, а оцененные значения показателя Ляпунова совпадают с высокой степенью точности с соответствующими значениями, полученными при помощи алгоритма Бенеттина и процедуры ортогонализации Грама-Шмидта.

4.6.3 Применение разработанного метода для оценки степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации

Применим разработанный метод оценки величины нулевого условного показателя Ляпунова для оценки степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации. Для этого необходимо выполнить ту же последовательность действий, что и для оценки степени фазовой синхронизации за единственным исключением: так как за отрицательность нулевого условного показателя Ляпунова отвечают ламинарные фазы поведения (см., например, [266, 424]), метод должен быть приме-

нен к участкам временного ряда, соответствующим только ламинарным фазам поведения систем.

В качестве примеров систем, находящихся в режиме перемежающейся фазовой синхронизации, рассмотрим модельные (классический автогенератор Ван дер Поля (4.32); связанные системы Ресслера (1.15)) и реальные нейрофизиологические (электроэнцефалограммы крыс линии WAG/Rij, имеющих генетическую предрасположенность к эпилепсии) системы. Начнем рассмотрение с модельных систем. Как было установлено в разделе 4.3, при $\varepsilon \in (0.0238; 0.029)$ в автогенераторе Ван дер Поля имеет место перемежаемость типа I в присутствии шума, а при $\varepsilon = (0.0345; 0.042)$ в системах Ресслера наблюдается перемежаемость “игольного ушка”, причем характеристики этих типов поведения оказываются идентичными друг другу [163]. Зависимости разности фаз $\Delta\varphi(t)$ от времени в обоих случаях содержат как участки синхронного поведения (ламинарные фазы), где разность фаз оказывается ограниченной $|\Delta\varphi(t)| < 2\pi$, так и периоды скачкообразного изменения разности фаз на величину 2π , называемые, как отмечалось выше, турбулентными всплесками. Применение метода, описанного в подразделе 4.6.1, только к участкам синхронной динамики взаимодействующих систем при различных значениях параметра ε в указанных выше диапазонах, позволяет получить распределения разностей фаз, подчиняющиеся аналитической закономерности (4.77). Это утверждение иллюстрирует рисунок 4.28, где в качестве примера приведена временная зависимость разности фаз $\Delta\varphi(t)$ неавтономного автогенератора Ван дер Поля (4.32) при $\varepsilon = 0.027$ во время ламинарных фаз поведения (а), а также распределение разностей фаз и его аппроксимация аналитической закономерностью (4.77) с параметрами, указанными в подрисуночной подписи (б). Величина условного нулевого показателя Ляпунова, рассчитанная таким способом, оказывается равной $\Lambda_0 = -0.00904$ (см. таблицу 4.6.3), что находится в хорошем соответствии с результатами расчета аналогичного показателя Ляпунова при помощи алгоритма Бенеттина. Аналогичная ситуация имеет место и при других значениях управляющих параметров авто-

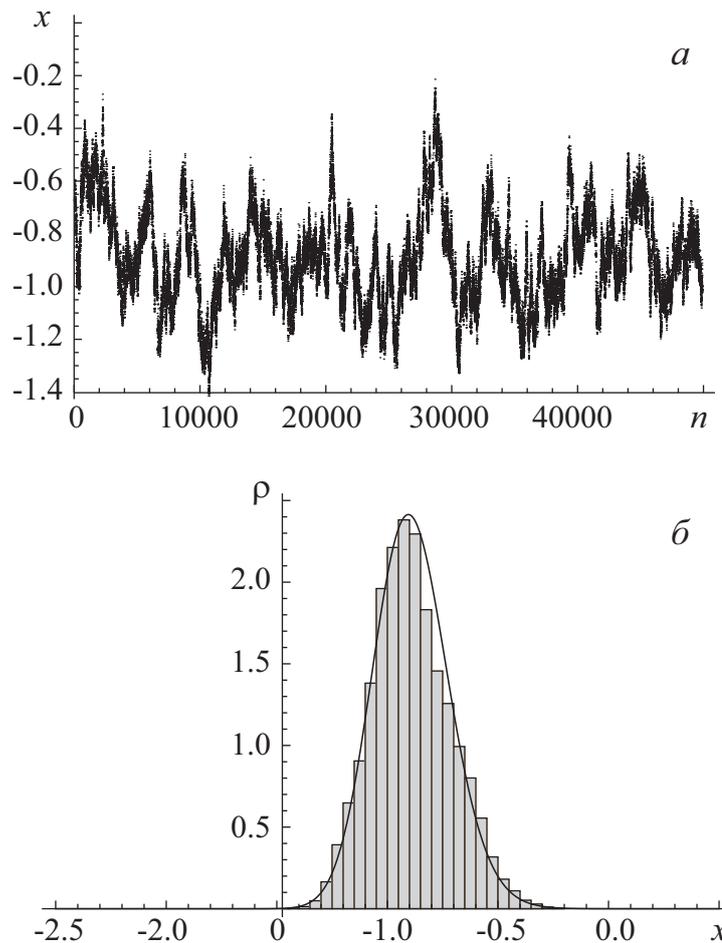


Рисунок 4.28 — (а) Зависимость разности фаз $\Delta\varphi(t)$ неавтономного автогенератора Ван дер Поля (4.32) при $\varepsilon = 0.027$ в течение фаз синхронного поведения (n — дискретное время). (б) Плотность распределения вероятности разности фаз (гистограмма) и ее аппроксимация аналитической закономерностью (4.77) при $A = 0.000137$, $\Omega = 0.009$, $\varepsilon = 0.00737$, $D = 0.0009$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $\theta = 1.0$ (сплошная линия)

генератора Ван дер Поля (4.32) и взаимодействующих систем Ресслера (1.15). В таблице 4.6.3 приведены результаты расчета показателя Ляпунова в исследуемых системах при нескольких значениях управляющих параметров как при помощи предложенного метода, так и алгоритма Бенеттина и процедуры ортогонализации Грама-Шмидта и произведена оценка точности разработанного метода при помощи формулы (4.81). Видно, что во всех рассмотренных случаях величина ошибки оказывается достаточно малой, что делает разработанный метод пригодным для определения степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации.

Таблица 4.1 — Результаты расчета условного нулевого показателя Ляпунова в модельных системах (4.32) и (1.15) при различных значениях управляющих параметров. Λ_0 — значение нулевого условного показателя Ляпунова, полученное при помощи предложенного метода, $\hat{\Lambda}_0$ — аналогичное значение показателя Ляпунова, рассчитанного при помощи алгоритма Бенеттина и процедуры ортогонализации Грама-Шмидта, δ — точность разработанного метода, рассчитанная по формуле (4.81)

Система	Параметр	Λ_0	$\hat{\Lambda}_0$	δ
Неавтономный автогенератор Ван дер Поля (4.32)	$\varepsilon = 0.027$	-0.00904 ± 0.00037	-0.0091 ± 0.00034	0.0066
	$\varepsilon = 0.028$	-0.0103 ± 0.00035	-0.0106 ± 0.00028	0.0283
	$\varepsilon = 0.029$	-0.0115 ± 0.00029	-0.0119 ± 0.00024	0.0336
Однонаправленно связанные системы Ресслера (1.15)	$\varepsilon = 0.035$	-0.0051 ± 0.00106	-0.00547 ± 0.00101	0.0676
	$\varepsilon = 0.037$	-0.0081 ± 0.00109	-0.00847 ± 0.00107	0.0437
	$\varepsilon = 0.040$	-0.0137 ± 0.00104	-0.01302 ± 0.00102	0.0522

Теперь рассмотрим результаты применения предложенного метода к экспериментальным временным рядам, для которых прямой расчет показателей Ляпунова при помощи классических методов и алгоритмов представляется невозможным в связи с отсутствием записанного в явном виде оператора эволюции, описывающего динамику системы. Для оценки величины показателя Ляпунова были использованы реальные экспериментальные данные нейрофизиологической природы — сигналы электроэнцефалограмм (ЭЭГ), снятые с ретикулярного и вентробазального ядер таламуса головного мозга крысы линии WAG/Rij, имеющей генетическую предрасположенность к эпилепсии. Все эксперименты были проведены в Радбаут университете Наймегена (Нидерланды) в лаборатории профессора Ж. ван Люжетаалара. Все эксперименты были выполнены в соответствии с этическими нормами и включали регистрацию ЭЭГ у свободнодвижущихся животных в течение 24 часов.

Известно, что эпилептические ЭЭГ представляют собой перемежающиеся временные реализации, содержащие паттерны синхронной активности (пик-волновые разряды), чередующиеся с фоновой активностью головного мозга (рисунок 4.29) [425]. Пик-волновые разряды характеризуются высокой степенью синхронизма, а следовательно, с точки зрения фазовой синхронизации являются ламинарными фазами поведения на сигналах ЭЭГ. Иными словами, для оценки степени синхронности ре-

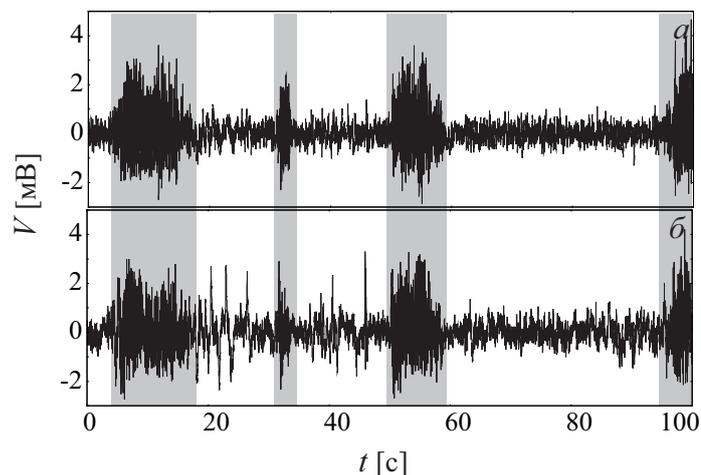


Рисунок 4.29 — Сигналы ЭЭГ, снятые с ретикулярного (а) и вентробазального (б) ядер таламуса головного мозга крысы линии WAG/Rij. Участки ЭЭГ, соответствующие пик-волновым разрядам, отмечены серыми прямоугольниками

жима перемежающейся фазовой синхронизации по сигналам ЭЭГ разработанный метод должен быть применен только к тем участкам, где содержатся пик-волновые разряды (показаны на рисунке 4.29 серыми прямоугольниками). Выделение пик-волновых разрядов из сигналов ЭЭГ осуществлялось автоматически при помощи метода [104], основанного на непрерывном вейвлетном преобразовании (см. также раздел 4.1), и контролировалось опытным нейрофизиологом. Непрерывное вейвлетное преобразование с материнским вейвлетом Морле использовалось также для введения фазы анализируемых сигналов во время пик-волновых разрядов на обоих отводах ЭЭГ [357, 426] (см. также раздел 4.4).

Рисунок 4.30 иллюстрирует результаты применения метода к исследуемым сигналам ЭЭГ. Здесь по-прежнему представлены (а) временная зависимость разности фаз, вычисленной между сигналами ЭЭГ, снятыми с ретикулярного и вентробазального ядер таламуса головного мозга крысы линии WAG/Rij в течение пик-волновых разрядов, а также (б) распределение этой разности фаз и его аппроксимация аналитической закономерностью (4.77). Видно, что, как и в случае систем Ресслера, рассмотренных в подразделе 4.6.2.3, несмотря на наличие “тяжелых хвостов”, аналитическая закономерность является хорошей аппроксимацией численно полученного распределения. Значение показателя Ляпунова, рассчитанного по этому распределению, составляет $\Lambda_0 = -0.0524357 \text{ c}^{-1}$,

что свидетельствует о наличии перемежающейся фазовой синхронизации между этими отделами головного мозга. Подобная ситуация характерна и для других областей головного мозга рассматриваемой крысы линии WAG/Rij. Однако, как показывают проведенные расчеты, степень синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации, устанавливающейся между различными областями головного мозга, оказывается также различной. В частности, значение нулевого условного показателя Ляпунова, вычисленного по сигналам ЭЭГ, снятым с лобного отдела коры головного мозга и вентробазального ядра таламуса составляет $\Lambda_0 = -0.429936 \text{ с}^{-1}$, а величина того же показателя Ляпунова, полученного по сигналам ЭЭГ, снятым с затылочного отдела коры головного мозга и ретикулярного ядра таламуса, оказывается равной $\Lambda_0 = -0.398955 \text{ с}^{-1}$, что свидетельствует о более высокой степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации, устанавливающейся между этими отделами головного мозга крысы, по сравнению со случаем, приведенным на рисунке 4.30.

4.7 Выводы по главе 4

Таким образом, в настоящей главе диссертационной работы проанализированы характеристики перемежающегося поведения, имеющего место на границах различных типов хаотической синхронизации. Установлено, что по аналогии с режимами полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием и обобщенной синхронизации на границе синхронизации, индуцированной шумом, имеет место перемежаемость типа “on-off”. Наличие данного типа поведения установлено путем анализа статистических характеристик длительностей ламинарных фаз различных систем с непрерывным и дискретным временем, находящихся в режиме перемежающейся синхронизации, индуцированной шумом.

В рамках исследования характеристик перемежающегося поведения, имеющего место на границе фазовой хаотической синхронизации, проведено сопоставление характеристик перемежаемости “игольного ушка”,

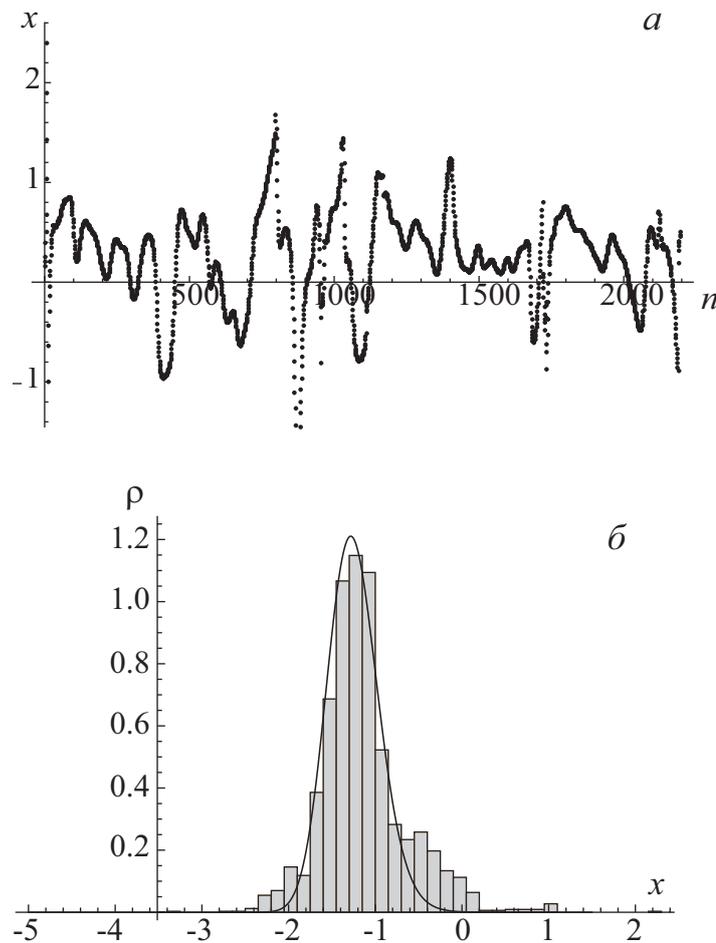


Рисунок 4.30 — (а) Временная зависимость разности фаз $\Delta\varphi(t)$, вычисленной между сигналами ЭЭГ, снятыми с ретикулярного и вентробазального ядер таламуса головного мозга крысы линии WAG/Rij, в течение пик-волновых разрядов (n — дискретное время). (б) Плотность распределения разности фаз (гистограмма) и ее аппроксимация аналитической закономерностью (4.77) при $A = 0.0016$, $\Omega = 0.09$, $\varepsilon = 0.148$, $D = 0.038$, $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $\theta = -0.8824$ (сплошная линия)

имеющей место на границе этого режима в случае относительно слабых значений расстройки управляющих параметров взаимодействующих систем, с характеристиками перемежаемости типа I в присутствии шума, наблюдающей в закритической области значений управляющих параметров периодических систем, подверженных дополнительному шумовому воздействию. Показано, как теоретически, так и численно, что эти два типа перемежающегося поведения, традиционно считающиеся различными, являются проявлением одного и того же типа перемежаемости, наблюдающегося при различных условиях. В частности, в обоих случаях распределение длительностей ламинарных фаз подчиняется одному и

тому же экспоненциальному закону, а выражения для зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности могут быть сведены друг к другу. Кроме того, для обоих типов перемежаемости наблюдается одинаковое поведение верхней границы: вероятность детектирования турбулентной фазы для обоих типов перемежаемости растет при увеличении длины наблюдения, но уменьшается при увеличении параметра надкритичности, что говорит о возможности определения верхней границы синхронизации путем задания значения вероятности, близкого к нулю.

Проведено исследование характеристик перемежающегося поведения, имеющего место на границе синхронизации временных масштабов. Установлено, как численно, так и экспериментально, что в режиме синхронизации временных масштабов на граничных временных масштабах наблюдения имеет место перемежаемость “кольца”. Получены статистические характеристики длительностей ламинарных фаз при данном типе перемежаемости, полученные результаты сопоставлены с известными теоретическими закономерностями. При помощи метода вращающейся плоскости выявлены механизмы возникновения перемежаемости “кольца” на граничных временных масштабах наблюдения.

Предложена теория индуцированной шумом перемежаемости в бистабильных системах. Показано, что распределения длительностей сосуществующих режимов подчиняются экспоненциальному закону. Экспоненциальный закон наблюдается также для зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. Обнаружено, что аналогичные закономерности имеют место для режима перемежающейся обобщенной синхронизации, наблюдающегося во взаимно связанных системах с бистабильным типом хаотического аттрактора.

Установлено, что статистические характеристики длительностей ламинарных фаз, а именно зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности, могут быть рассмотрены как характеристики степени синхронности перемежающейся синхронизации. В то же самое время, для режима перемежающейся фазовой синхронизации

более удобным методом определения степени синхронности наблюдаемого режима является оценка величины условного нулевого условного показателя Ляпунова в закритической области значений управляющих параметров.

Предложен метод оценки величины условного нулевого показателя Ляпунова по временному ряду. Показана его работоспособность путем рассмотрения модельных систем с дискретным временем, а также неавтономных периодических осцилляторов, подверженных дополнительно шумовому воздействию, и связанных хаотических систем, находящихся в режиме фазовой синхронизации. Показано, что этот метод может быть также применен для оценки степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду, при этом из анализируемого временного ряда должны быть исключены участки турбулентной динамики. Его эффективность проверена также на модельных системах, допускающих расчет показателей Ляпунова при помощи классических методов и алгоритмов. Метод применен для оценки степени синхронности режима, устанавливающегося между различными областями головного мозга крысы линии WAG/Rij, установлено, что различные области головного мозга характеризуются различной степенью синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации.

Глава 5

Сосуществование различных типов перемежаемости в нелинейных системах

[123, 134, 169–181, 270], [201, 206, 208, 210, 211, 213, 214, 219, 220, 223, 225, 226, 229, 230, 233, 234]

Как отмечалось в главе 4, перемежаемость является одним из наиболее распространенных типов поведения, наблюдающихся как в модельных, так и реальных системах, в том числе вблизи границ различных типов хаотической синхронизации. В то же самое время, исследования различных типов перемежаемости до сих пор ограничивались случаями, когда в исследуемой системе при фиксированных значениях управляющих параметров сосуществуют и последовательно сменяют друг друга два различных типа поведения, например, стационарное состояние сменяется периодическими колебаниями, периодические колебания — хаотическими, синхронная динамика — фазами асинхронными поведения и т.п. Однако, теоретически не исключена ситуация, когда в нелинейной системе одновременно сосуществуют два различных типа перемежаемости. Исследованию возможности одновременного сосуществования двух различных типов перемежаемости в нелинейных системах посвящена настоящая глава диссертационной работы. Такой тип поведения будем называть “перемежаемостью перемежаемостей”.

5.1 Общая теория сосуществования двух различных типов перемежаемости в нелинейных системах

Начнем рассмотрение с изложения теории одновременного сосуществования двух различных типов перемежаемости [169]. Для этого предположим, что в исследуемой системе при фиксированных значениях управляющих параметров наблюдаются два различных типа перемежаемости, например, перемежаемость типа 1 и перемежаемость типа 2, причем появление турбулентных всплесков, обусловленных этими типами перемежаемости, происходит независимо друг от друга. Кроме того, будем полагать, что при изменении управляющих параметров возможно достичь такой ситуации, когда в исследуемой системе наблюдается только перемежаемость типа 1 или только перемежаемость типа 2, характеризующиеся распределениями длительностей ламинарных фаз $p_1(\tau)$ и $p_2(\tau)$, соответственно.

Будем считать, что в режиме “перемежаемости перемежаемостей” распределение длительностей ламинарных фаз характеризуется вероятностью $p(\tau)$, где τ — длительность ламинарной фазы поведения. При произвольном выборе фазового проскока без потери общности можно предположить, что он будет соответствовать перемежаемости типа 1. Тогда вероятность наблюдения ламинарной фазы длительности, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, будет определяться суммой вероятностей двух событий. Первое событие связано с появлением фазового проскока, ассоциированного с перемежаемостью типа 2 во временной интервал $t \in [\tau; \tau + d\tau)$ и описывается вероятностью

$$P_{12}(\tau) = d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{p_2(s)}{s} ds \int_{\tau}^{\infty} p_1(l) dl. \quad (5.1)$$

Вероятность второго события связана с появлением фазового проскока, ассоциированного с перемежаемостью типа 1 в течение временного интервала $t \in [\tau; \tau + d\tau)$ и описывается вероятностью

$$P_{11}(\tau) = p_1(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau}{s}\right) p_2(s) ds. \quad (5.2)$$

Аналогично, если произвольно выбранный фазовый проскок соответствует перемежаемости типа 2, вероятности наблюдения фазовых проскоков, связанных с перемежаемостью типа 1 и перемежаемостью типа 2, примут вид

$$P_{21}(\tau) = d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{p_1(l)}{l} dl \int_{\tau}^{\infty} p_2(s) ds \quad (5.3)$$

и

$$P_{22}(\tau) = p_2(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau}{l}\right) p_1(l) dl, \quad (5.4)$$

соответственно.

Вероятность того, что произвольно выбранный фазовый проскок соответствует перемежаемости типа 1, определяется как

$$P_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{T_2}{T_1 + T_2}, \quad (5.5)$$

где $N_i = L/T_i$ ($i = 1, 2$) — число турбулентных всплесков, соответствующих i -тому типу, наблюдаемых во временном ряду длительности L , T_i — средняя длительность ламинарных фаз в режиме перемежаемости типа i . Аналогично, вероятность того, что произвольно выбранный фазовый проскок соответствует перемежаемости типа 2, удовлетворяет выражению

$$P_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2} = \frac{T_1}{T_1 + T_2}. \quad (5.6)$$

Принимая во внимание все вышеприведенные аргументы, вероятность наблюдения ламинарной фазы длительности, падающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, примет вид:

$$P(\tau) = p(\tau) d\tau = P_1 [P_{12}(\tau) + P_{11}(\tau)] + P_2 [P_{21}(\tau) + P_{22}(\tau)]. \quad (5.7)$$

Подставляя выражения (5.1)–(5.6) в уравнение (5.7), можно получить теоретическую формулу, характеризующую распределение длительностей ламинарных фаз в режиме совместного существования двух различных типов перемежаемости:

$$p(\tau) = \frac{1}{T_1 + T_2} \left[\int_{\tau}^{\infty} \frac{ds}{s} \int_{\tau}^{\infty} [p_1(l)p_2(s)T_2 + p_1(s)p_2(l)T_1] dl + \right. \\ \left. + \int_{\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau}{s}\right) [p_1(\tau)p_2(s)T_2 + p_1(s)p_2(\tau)T_1] ds \right], \quad (5.8)$$

где, как отмечалось выше, $p_{1,2}(\xi)$ — распределения длительностей ламинарных фаз сосуществующих типов перемежаемости, рассматриваемых отдельно, а

$$T_{1,2} = \int_0^{\infty} s p_{1,2}(s) ds \quad (5.9)$$

— средние длительности ламинарных фаз для этих типов перемежаемости.

Проверим справедливость соотношений (5.8)–(5.9) путем рассмотрения модельных систем с непрерывным и дискретным временем, способных при фиксированных значениях управляющих параметров одновременно демонстрировать два различных типа перемежающегося поведения. Начнем рассмотрение с системы с дискретным временем.

5.2 Модельная система с дискретным временем, демонстрирующая два различных типа перемежаемости одновременно

В качестве примера с системы с дискретным временем рассмотрим простое отображение, сконструированное из эталонных моделей нелинейной динамики — двух однонаправленно связанных отображений окружности:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2\Omega(1 - \cos x_n) - \varepsilon, & \text{mod } 2\pi \\ y_{n+1} &= y_n + 2\Omega(1 - \cos y_n) - \gamma + k \cos \alpha/x_n^3, & \text{mod } 2\pi \end{aligned} \quad (5.10)$$

где переменные x_n и y_n — динамические переменные, изменение которых ограничено диапазоном шириной 2π , ε , γ , Ω , α и k — управляющие параметры. Связь между взаимодействующими системами осуществляется посредством слагаемого $k \cos \alpha / x_n^3$, добавленного во второе уравнение системы (5.10).

Чтобы одновременно наблюдать в исследуемой системе два различных типа перемежаемости, необходимо ввести в рассмотрение новую переменную z_n , представляющую собой комбинацию состояний связанных отображений и определяемую как

$$z_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}. \quad (5.11)$$

В таком случае в определенном диапазоне значений управляющих параметров в исследуемой системе (5.10) одновременно существуют два различных типа перемежающегося поведения, что обусловлено тем, что каждое отображение в отдельности демонстрирует свой тип перемежаемости. Так, для переменной x_n в определенном диапазоне значений параметра ε имеет место перемежаемость типа I. Переменная y_n при соответствующем выборе значений параметра γ способна демонстрировать другой тип перемежаемости, перемежаемость “игольного ушка”, так как она находится под воздействием дополнительного сигнала $k \cos \alpha / x_n^3$. Таким образом, переменная z_n , определяемая выражением (5.11), будет демонстрировать сосуществование двух различных типов перемежающегося поведения. Иными словами, дискретное отображение (5.10)–(5.11) способно находиться в режиме “перемежаемости перемежаемостей”.

Для подтверждения наличия “перемежаемости перемежаемостей” в системе (5.10)–(5.11) проанализируем ее поведение при фиксированных значениях управляющих параметров: $\Omega = 0.1$, $\alpha = 0.1$, $k = 0.025$, $\varepsilon = -0.0001$ и $\gamma = 0.0005$. Временные зависимости переменных x_n и y_n показаны на рисунке 5.1,а,б, соответственно. Нетрудно заметить, что для обеих переменных возможно выделить два характерных типа поведения, соответствующих ламинарному и турбулентному фазам. Ламинарные фазы соответствуют значениям переменных, близких к нулю, в то время как для турбулентных фаз характерно резкое возрастание значе-

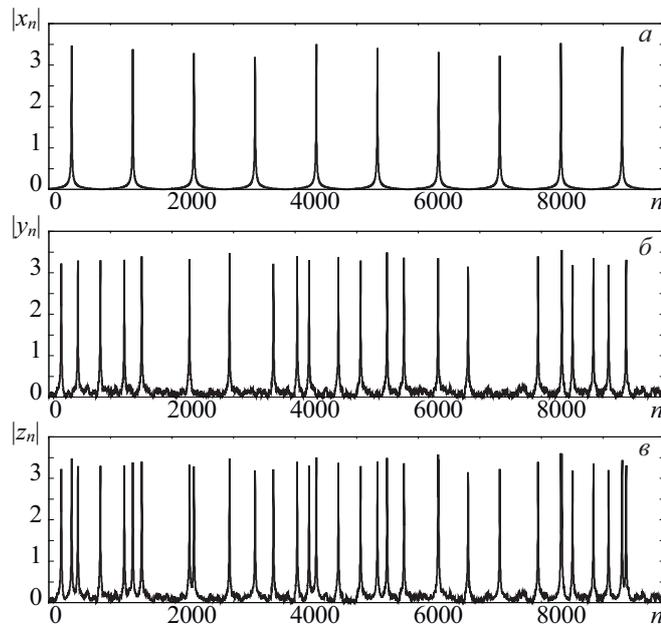


Рисунок 5.1 — Временные реализации переменных x_n (а), y_n (б) и z_n (в) системы (5.10)–(5.11) в режимах перемежаемости (а,б) и сосуществования двух различных типов перемежаемости (в)

ний этих переменных. В то же самое время, из сопоставления рисунков также видно, что типы поведения, реализующиеся для переменных x_n and y_n исследуемой системы при указанных значениях управляющих параметров, являются различными. Статический анализ характеристик этих типов перемежаемости подтверждает, что для переменной x_n действительно имеет место перемежаемость типа I [100], а для переменной y_n — перемежаемость “игольного ушка” [107] (которая также может рассматриваться как перемежаемость типа I с шумом, см. раздел 4.3 и [163]).

Теперь проанализируем динамику переменной z_n , введенной в рассмотрение при помощи соотношения (5.11). Ее временная реализация при указанных выше значениях управляющих параметров приведена на рисунке 5.1,в. Нетрудно заметить, что, как и для переменных x_n и y_n , в данном случае ламинарные фазы реализуются при значениях переменной, близких к нулю, в то время как момент резкого возрастания значения переменной соответствует началу турбулентного всплеска. Однако, при сопоставлении с рисунками 5.1,а,б, в данном случае отчетливо заметно существование турбулентных фаз двух различных типов,

что является качественным доказательством сосуществования двух различных типов перемежаемости в исследуемой системе.

На основании описанной в разделе 5.1 общей теории сосуществования двух различных типов перемежаемости получим теоретические закономерности для распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности при перемежаемости перемежаемостей типа I и “игольного ушка”. Принимая во внимание тот факт, что в режиме перемежаемости “игольного ушка” распределение длительностей ламинарных фаз подчиняется экспоненциальному закону [163,427]

$$p_1(\tau) = \frac{1}{KT_1} \exp\left(-\frac{\tau}{T_1}\right), \quad (5.12)$$

а при перемежаемости типа I может быть приблизительно описано δ -функцией [100]

$$p_2(\tau) = \delta(\tau - T_2), \quad (5.13)$$

(где $K = \exp\left(-\frac{x}{T_1}\right)$ — коэффициент нормировки, x — минимальное значение длительности ламинарных фаз, подчиняющееся закономерности (5.12), $T_{1,2}$ — средние длительности ламинарных фаз для перемежаемостей “игольного ушка” и типа I, соответственно), подставляя выражения (5.12) и (5.13) в аналитическую закономерность (5.8), можно получить теоретическую формулу распределения длительностей ламинарных фаз при одновременном существовании перемежаемостей “игольного ушка” и типа I:

$$p(\tau) = \frac{\delta(\tau - T_2) \left(\exp\left[\frac{x-\tau}{T_1}\right] T_1 - \tau \exp\left[\frac{x}{T_1}\right] \Gamma\left[0, \frac{\tau}{T_1}\right] \right)}{T_1 + T_2 + x \left(\exp\left[\frac{x}{T_1}\right] \text{Ei}\left[-\frac{x}{T_1}\right] - 1 \right)} + \frac{\exp\left[\frac{x-\tau}{T_1}\right] \left(\frac{T_1+T_2-\tau}{T_1} + \exp\left[\frac{\tau}{T_1}\right] \Gamma\left[0, \frac{\tau}{T_1}\right] \right)}{T_1 + T_2 + x \left(\exp\left[\frac{x}{T_1}\right] \text{Ei}\left[-\frac{x}{T_1}\right] - 1 \right)}, \quad (5.14)$$

где $\text{Ei}(z) = -\int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ — интегральная показательная функция, $\Gamma(a, z)$ — неполная гамма-функция.

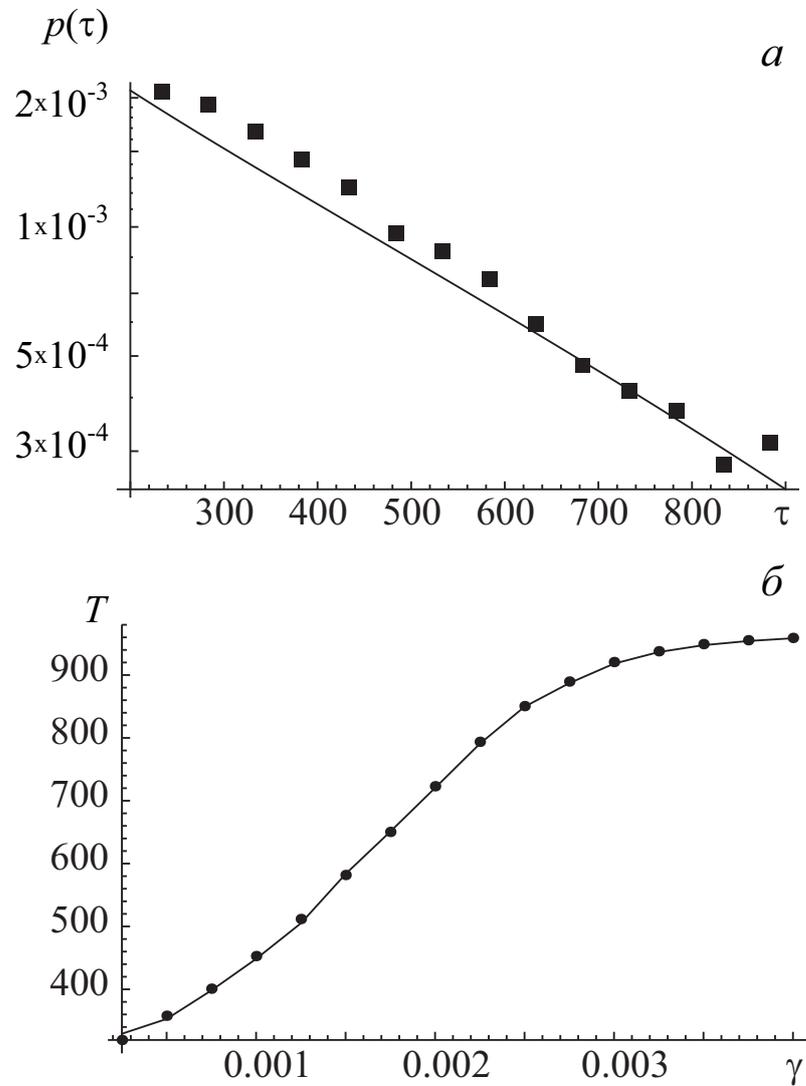


Рисунок 5.2 — Распределение длительностей ламинарных участков поведения для системы (5.10)–(5.11) при фиксированных значениях управляющих параметров (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра γ (б). Данные численного моделирования показаны точками, теоретические аппроксимации закономерностями (5.14) и (5.15) — сплошными линиями. Значения параметров аппроксимации на рисунке а выбраны следующими: $T_1 = 534$, $T_2 = 965$, $x = 65$

Подставляя закономерность (5.14) в выражение (5.9), получим следующее соотношение для средней длительности ламинарных фаз при перемежаемости перемежаемостей типа I и “игольного ушка”:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{\exp\left[\frac{x-T_2}{T_1}\right]}{2\left(T_1 + T_2 + x\left(\exp\left[\frac{x}{T_1}\right]\text{Ei}\left[-\frac{x}{T_1}\right] - 1\right)\right)} \times \\
 & \times \left(T_1\left(T_1\left(1 - \exp\left[\frac{T_2}{T_1}\right]\right) + T_2\left(1 + 2\exp\left[\frac{T_2}{T_1}\right]\right)\right) - \\
 & - T_2^2 \exp\left[\frac{T_2}{T_1}\right]\left(\text{Ei}\left[-\frac{T_2}{T_1}\right] - 2\Gamma\left[0, \frac{T_2}{T_1}\right]\right).
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

Статистические характеристики длительностей ламинарных фаз (распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях управляющих параметров, зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности) могут быть получены также численно для переменной z_n исследуемой системы. Проанализируем эти характеристики. На рисунке 5.2,а представлено распределение длительностей ламинарных фаз при вышеуказанных значениях управляющих параметров, а на рисунке 5.2,б приведена зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра γ . Данные численного моделирования показаны точками, соответствующие им теоретические аппроксимации (5.14) и (5.15) — сплошными линиями. Видно, что теоретические зависимости хорошо соотносятся с результатами численного моделирования, что говорит о корректности использования изложенной в разделе 5.1 теории для описания сосуществования перемежаемости перемежаемостей типа I и “игольного ушка” в системах с дискретным временем.

5.3 Модельные системы с непрерывным временем, демонстрирующие два различных типа перемежаемости

Перейдем к изложению результатов исследования модельных систем с непрерывным временем, способных демонстрировать два типа перемежаемости одновременно. В качестве первого примера таких системы рассмотрим осцилляторы с хаотической динамикой — две однонаправленно связанные системы Ресслера (1.15) с теми же значениями управляющих параметров, что и в случае анализа перемежающейся фазовой синхронизации и перемежающейся синхронизации временных масштабов (см. разделы 4.3,4.4).

“Перемежаемость перемежаемостей” имеет место в такой системе вблизи границы синхронизации временных масштабов (фазовой синхронизации) на граничных временных масштабах наблюдения. Так как при выбранных значениях параметров расстройки на границе синхронного режима имеет место перемежаемость “игольного ушка” (см. раздел 4.3), а в синхронном режиме на граничных временных масштабах наблюдается перемежаемость “кольца” (см. раздел 4.4), можно ожидать, что в определенном диапазоне параметра связи и временного масштаба на границе синхронного режима будет иметь место совместное существование режимов перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”. Типичная зависимость разности фаз $\Delta\phi_s(t)$ в данном случае приведена на рисунке 5.3. Как и на границе фазовой синхронизации, временная зависимость разности фаз $\Delta\phi_s(t)$ содержит участки синхронного поведения (ламинарные фазы), когда разность фаз оказывается ограниченной, и асинхронной динамики (турбулентные фазы), когда разность фаз скачкообразно изменяется на 2π . В то же самое время, в отличие от предыдущих случаев (см. разделы 4.3,4.4) возникновение турбулентных всплесков при “перемежаемости перемежаемостей” обусловлено двумя различными механизмами. Однако, как видно из рисунка 5.3, определить природу турбулентных

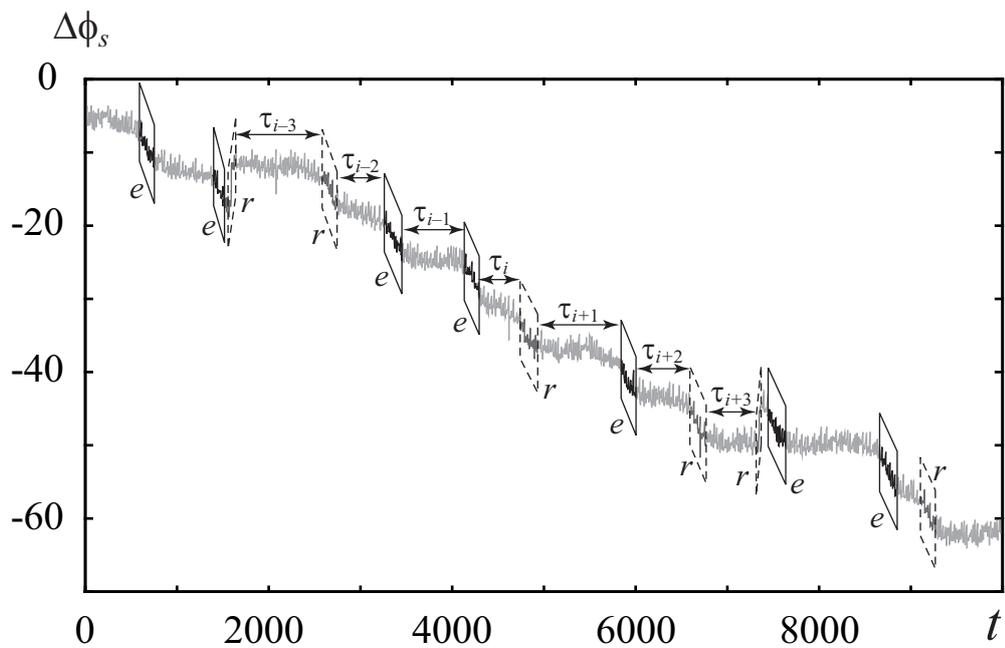


Рисунок 5.3 — Типичная зависимость разности фаз $\Delta\phi_s(t)$ для двух связанных систем Ресслера в режиме “перемежаемости перемежаемостей” при $\varepsilon = 0.032$ и $s = 4.99$. Турбулентные фазы показаны ромбами и обозначены символами “e” для перемежаемости “игольного ушка” и символами “r” для перемежаемости “кольца”

всплесков визуально не представляется возможным в принципе: внешне они выглядят совершенно одинаковыми.

Простейшим способом выявления наличия “перемежаемости перемежаемостей” в исследуемой системе является анализ поведения одной из взаимодействующих систем на вращающейся плоскости (4.20) (см. также [111, 164]), где, как и в разделе 4.4, переменные, характеризующие состояния систем, определяются соотношением (4.43). Такое поведение систем Ресслера иллюстрирует рисунок 5.4. Как отмечалось в разделе 4.2, согласно методу вращающейся плоскости, в синхронном режиме (рисунок 5.4, а) фазовая траектория выглядит как зашумленная точка. Если фазовая траектория начинает вращаться вокруг начала координат (рисунок 5.4, б), в системе наблюдается перемежаемость “игольного ушка” [107]. В режиме перемежаемости “кольца” фазовая траектория пересекает начало координат (см. также [111]), как это показано на рисунке 5.4, в.

Как видно из рисунков 5.4, а–в, в зависимости от выбора значений параметра связи ε и временного масштаба s , в исследуемой системе

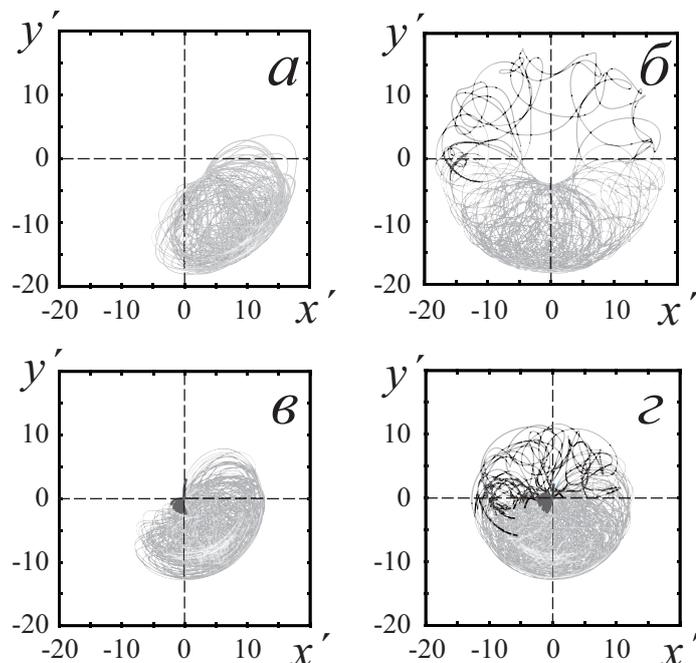


Рисунок 5.4 — Фазовая траектория систем Реслера (1.15) на вращающейся плоскости (x', y') : (а) синхронный режим ($\varepsilon = 0.045$, $s = 5.50$), (б) перемежаемость “игольного ушка” ($\varepsilon = 0.032$, $s = 5.50$), (в) перемежаемость “кольца” ($\varepsilon = 0.045$, $s = 4.99$), (г) перемежаемость перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” ($\varepsilon = 0.032$, $s = 4.99$)

наблюдается либо перемежаемость “игольного ушка” (рисунок 5.4, б), либо перемежаемость “кольца” (рисунок 5.4, в). Однако, в определенном диапазоне временных масштабов режимы перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” существуют одновременно (рисунок 5.4, г). Это означает, что перемежаемость “игольного ушка” прерывает перемежаемость “кольца” и наоборот, то есть в исследуемой системе наблюдается “перемежаемость перемежаемостей”. В этом режиме фазовая траектория на вращающейся плоскости (x', y') вращается вокруг начала координат, что является проявлением перемежаемости “игольного ушка”, и время от времени охватывает его, что свидетельствует о наличии перемежаемости “кольца”. Аналогичное поведение должно наблюдаться и в неавтономных периодических системах, находящихся под действием шума, так как, как было показано в разделе 4.3, перемежаемость типа I с шумом, имеющая место в закритической области значения управляющего параметра в периодических системах, и перемежаемость “игольного ушка” могут рассматриваться как единый тип перемежающегося поведения (см. раздел 4.3, а также [163]). Поэтому при исследовании характе-

ристик перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” вместе с системами Ресслера (1.15) будем рассматривать также поведение неавтономного автогенератора Ван дер Поля (4.32) при значениях управляющих параметров, указанных в разделе 4.3, как системы, способной демонстрировать сосуществование режимов перемежаемости типа I с шумом и перемежаемости “кольца”.

Известно, что в режимах перемежаемости “кольца”, “игольного ушка” и типа I с шумом в закритической области значений управляющих параметров распределение длительностей ламинарных фаз подчиняется экспоненциальному закону (см. также главу 4)

$$p_{1,2}(\tau) = \frac{1}{T_{1,2}} \exp\left(-\frac{\tau}{T_{1,2}}\right), \quad (5.16)$$

где индекс “1” соответствует перемежаемости “игольного ушка” или типа I с шумом, а индекс “2” — перемежаемости “кольца”. Тогда, подставляя выражения (5.16) в (5.8), получим теоретический закон для распределения длительностей ламинарных фаз в режиме сосуществования перемежаемостей “игольного ушка” (типа I с шумом в закритической области) и “кольца”:

$$\begin{aligned} p(\tau) = & \frac{\exp(-\tau/T_1)}{(T_1 + T_2)} \left(1 - \frac{\tau}{T_1}\right) \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_2}\right) + \\ & + \frac{T_1^2 + T_2^2}{T_1 T_2 (T_1 + T_2)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_1} - \frac{\tau}{T_2}\right) + \\ & + \frac{\exp(-\tau/T_2)}{(T_1 + T_2)} \left(1 - \frac{\tau}{T_2}\right) \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_1}\right), \end{aligned} \quad (5.17)$$

где $\Gamma(a, z)$ — неполная гамма-функция. Средняя длительность ламинарных фаз для этого типа поведения будет следующей:

$$\langle \tau \rangle = -\frac{T_1^2 \log\left(\frac{T_1+T_2}{T_1}\right) - 2T_1 T_2 + T_2^2 \log\left(\frac{T_1+T_2}{T_2}\right)}{T_1 + T_2}. \quad (5.18)$$

Понятно, что средняя длительность ламинарных фаз при перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” должна зависеть

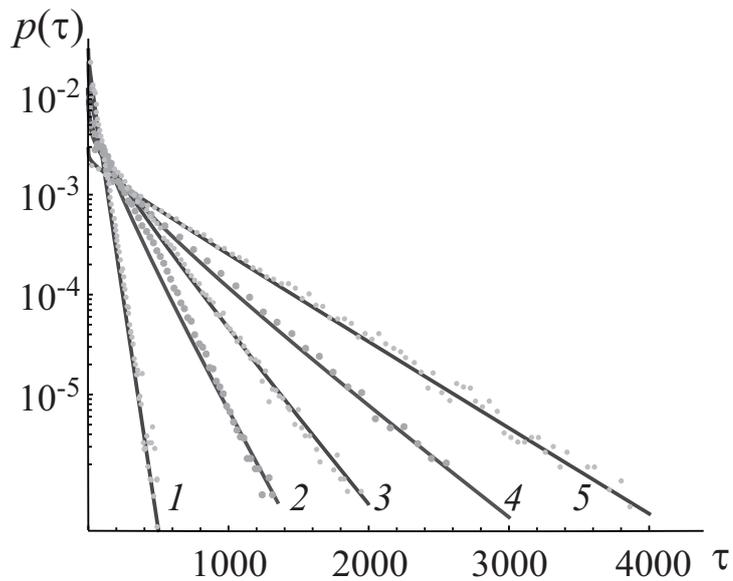


Рисунок 5.5 — Распределения длительностей ламинарных фаз в режиме “перемежаемости перемежаемостей” в двух однонаправленно связанных осцилляторах Ресслера (1.15) (кривые 1,3,5) и неавтономном автогенераторе Ван дер Поля в присутствии шума (4.32) (кривые 2,4). Теоретические кривые (5.17) показаны сплошными линиями, численно полученные данные обозначены точками. Ось ординат представлена в логарифмическом масштабе. Кривая 1 — $\varepsilon = 0.036$, $s = 4.870$, $T_1 = 50.0$, $T_2 = 1666.7$; кривая 2 — $A = 0.02308$, $s = 3.50$, $T_1 = 56.0$, $T_2 = 148.1$; кривая 3 — $\varepsilon = 0.036$, $s = 4.965$, $T_1 = 322.6$, $T_2 = 1666.7$; кривая 4 — $A = 0.02497$, $s = 3.57$, $T_1 = 120.0$, $T_2 = 6002.9$; кривая 5 — $\varepsilon = 0.038$, $s = 4.980$, $T_1 = 540.5$, $T_2 = 17921.1$

от управляющих параметров. Такую зависимость можно получить путем подстановки соответствующих зависимостей для T_1 и T_2 в соотношение (5.18). Следует также заметить, что распределение вероятности (5.17) удовлетворяет условию нормировки $\int_0^{+\infty} p(\tau) d\tau = 1$.

Распределения длительностей ламинарных фаз, полученные численно для однонаправленно связанных систем Ресслера (1.15), находящихся в режиме перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”, и неавтономного автогенератора Ван дер Поля в режиме перемежаемости перемежаемостей типа I в присутствии шума и “кольца”, приведены на рисунке 5.5. Здесь же показаны теоретические аппроксимации численно полученных данных закономерностью (5.17). Значения параметров T_1 и T_2 определялись путем анализа временных зависимостей разности в режимах, когда в исследуемой системе наблюдается только один тип перемежаемости. Нетрудно заметить, что независимо от выбора значений параметра связи и временного масштаба численно получен-

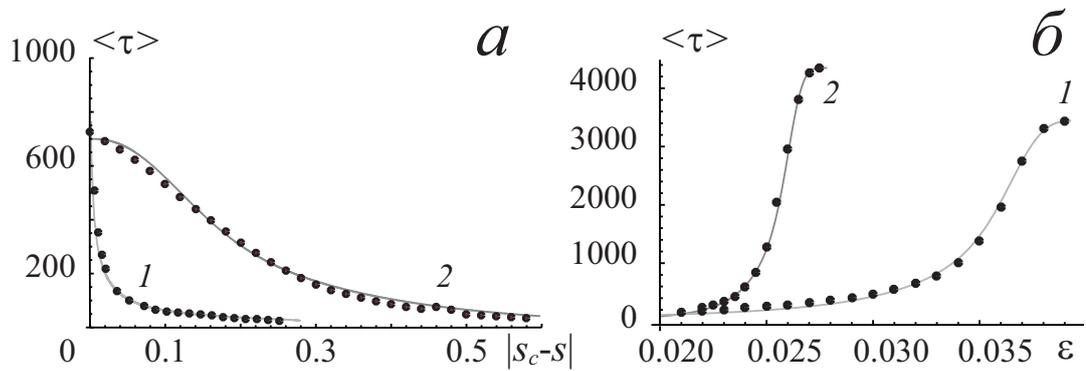


Рисунок 5.6 — Средняя длительностей $\langle \tau \rangle$ ламинарных фаз в зависимости от временного масштаба наблюдения s (а) и параметра связи ε (амплитуды внешнего сигнала) (б) для односторонне связанных систем Ресслера (1.15) (кривые 1) и неавтономного автогенератора Ван дер Поля (4.32) (кривые 2). Теоретические кривые (5.18) показаны сплошными линиями, численно полученные данные — точками. На рисунке (а) $s_c = s_l = 4.99$ для кривой 1, $s_c = s_h = 8.62$ для кривой 2

ные распределения длительностей ламинарных фаз находятся в хорошем соответствии с результатами теоретических предсказаний (5.17). Зависимости средней длительности ламинарных фаз $\langle \tau \rangle$ от управляющих параметров s и ε , полученные для обеих систем, также очень близки к теоретической зависимости (5.18) (см. рисунок 5.6).

Таким образом, в неавтономных потоковых динамических системах возможно существование “перемежаемости перемежаемостей” вблизи границ возникновения синхронных режимов (фазовой синхронизации или синхронизации временных масштабов) при рассмотрении динамики систем на граничных временных масштабах наблюдения. Рассмотрение, проведенное в рамках настоящей диссертационной работы, ограничивается подробным рассмотрением совместного существования режимов перемежаемости “игольного ушка” (типа I с шумом в закритической области значений управляющих параметров) и перемежаемости “кольца”. В то же самое время, при изменении величины расстройки между системами и значения параметра связи возможно наблюдать совместное существование других типов перемежаемости. В частности, в случае относительно слабой расстройки между системами в докритической области значений параметра имеет место перемежаемость перемежаемостей типа I и “кольца” [173]. В случае же относительно больших зна-

чений частотной расстройки в определенном диапазоне значений параметра связи и временного масштаба наблюдается перемежаемость двух перемежаемостей типа “кольцо”.

5.4 Модели пространственно-распределенных систем, демонстрирующие “перемежаемость перемежаемостей”

Перейдем к рассмотрению моделей пространственно-распределенных систем, способных демонстрировать совместное существование двух различных типов перемежаемости. В качестве примера такой системы рассмотрим две однонаправленно связанные гидродинамические модели диодов Пирса (индексы “1” и “2” соответствуют ведущей и ведомой системам, соответственно). Динамика таких систем в безразмерном виде описывается самосогласованной системой уравнений Пуассона, непрерывности и движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial x^2} &= -\alpha_{1,2}^2 (\rho_{1,2} - 1), \\ \frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial t} &= -\frac{\partial(\rho_{1,2} v_{1,2})}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_{1,2}}{\partial t} &= -v_{1,2} \frac{\partial v_{1,2}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где $\alpha_1 = 2.858\pi$ и $\alpha_2 = 2.860\pi$ — управляющие параметры, $0 \leq x \leq 1$, $\varphi_{1,2}(x, t)$ — потенциалы электрического поля, $\rho_{1,2}(x, t)$ и $v_{1,2}(x, t)$ — плотности и скорости электронного потока, соответственно [344, 345]. Граничные условия на левой границе полагаются постоянными

$$v_{1,2}(0, t) = 1, \quad \rho_{1,2}(0, t) = 1, \quad \varphi_{1,2}(0, t) = 0, \quad (5.20)$$

а на правой границы они модифицируются следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi_1(1, t) = 0, \\ \varphi_2(1, t) = \varepsilon(\rho_2(x=1, t) - \rho_1(x=1, t)), \end{cases} \quad (5.21)$$

определяя однонаправленную связь между взаимодействующими системами [65]. Здесь ε характеризует силу связи между этими системами.

Анализ поведения взаимодействующих диодов Пирса осуществлялся на различных временных масштабах наблюдения с использованием концепции синхронизации временных масштабов [20, 357, 379] (см. также разделы 4.4, 5.3). Как и в случае потоковых динамических систем, осуществлялось непрерывное вейвлетное преобразование (4.3) сигналов, в роли которых выступали колебания плотности пространственного заряда $\rho_{1,2}(x = 0.2, t)$, снятые в фиксированной точке $x = 0.2$ пространства взаимодействия, и детектировалась синхронизация временных масштабов путем проверки условия (4.39). В ходе проведения исследований было установлено, что, как и в случае потоковых динамических систем, в режиме синхронизации временных масштабов взаимодействующие диоды Пирса содержат как синхронные, так и асинхронные временные масштабы. Их разделяют так называемые граничные временные масштабы, на которых наблюдается перемежающееся поведение. Подобные эффекты имеют место и вблизи границы установления синхронного режима, только из-за наличия перемежающегося поведения в этой области на основном временном масштабе, на граничных временных масштабах наблюдения должна наблюдаться “перемежаемость перемежаемостей”.

Проанализируем характеристики перемежающегося поведения, наблюдающегося на различных временных масштабах наблюдения, как в режиме синхронизации временных масштабов, так и вблизи границы его возникновения в системе двух однонаправленно связанных диодов Пирса (5.19)–(5.21). Для определения типа перемежаемости по аналогии со случаем потоковых динамических систем воспользуемся методом вращающейся плоскости [164, 169] точно также, как это было продемонстрировано в разделе 5.3. Рисунок 5.7 иллюстрирует поведение взаимодействующих диодов Пирса на плоскости (4.43) при различных значениях параметра связи ε и временного масштаба наблюдения s . Рисунок 5.7,а,б соответствует реализации в системе (5.19)–(5.21) режима синхронизации временных масштабов ($\varepsilon = 0.058$). В этом случае на основном временном масштабе наблюдения ($s = 4.0$, рисунок 5.7,а) фазовая траектория на вращающейся плоскости выглядит как зашумлен-

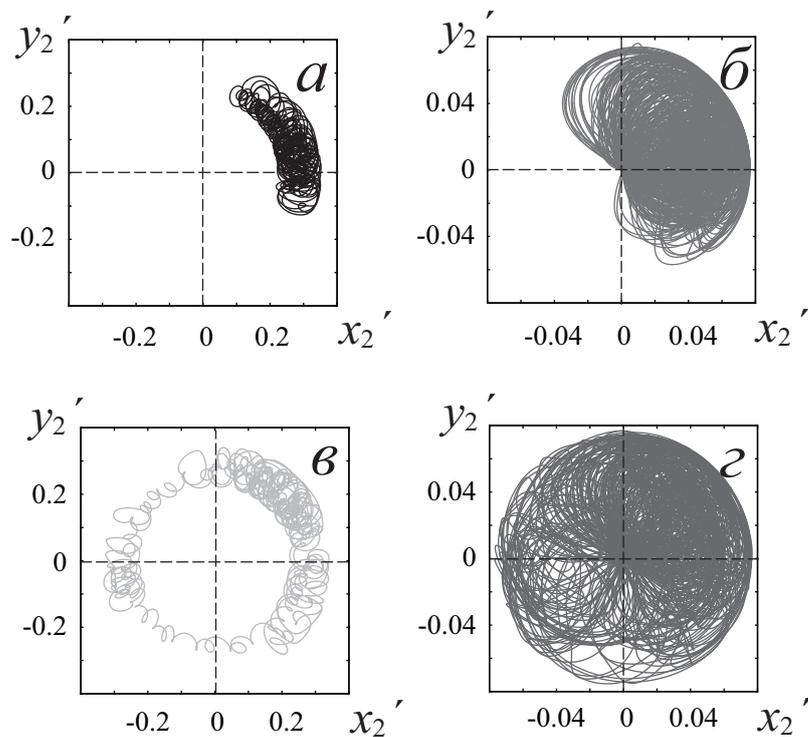


Рисунок 5.7 — Фазовые траектории диодов Пирса (5.19)–(5.21) на вращающейся плоскости $(\tilde{x}_2', \tilde{y}_2')$ при различных значениях параметра связи ε и временного масштаба s : (а) синхронный режим ($\varepsilon = 0.058$, $s = 4.0$), (б) перемежаемость “кольца” ($\varepsilon = 0.058$, $s = 2.7225$), (в) перемежаемость “игольного ушка” ($\varepsilon = 0.00445$, $s = 4.0$), (г) перемежаемость перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” ($\varepsilon = 0.00445$, $s = 2.7225$)

ная устойчивая точка, не охватывающая начало координат, в то время как на граничном временном масштабе ($s = 2.7225$, рисунок 5.7,б) она представляет собой подобную точку, пересекающую начало координат. В этом случае, как отмечалось выше, должна наблюдаться перемежаемость “кольца” [111]. Вблизи границы синхронизации временных масштабов ($\varepsilon = 0.00445$) траектория на вращающейся плоскости выглядит как размытый предельный цикл на основном временном масштабе наблюдения ($s = 4.0$, рисунок 5.7,в), причем этот цикл начинает охватывать начало координат при рассмотрении динамики систем на граничном временном масштабе ($s = 2.7225$, рисунок 5.7,г). Очевидно, что в первом случае (рисунок 5.7,в) в исследуемой системе должна наблюдаться перемежаемость “игольного ушка” [107], а во втором случае (рисунок 5.7,г) будет иметь место совместное существование режимов перемежаемости “игольного ушка” и “кольца”.

Для подтверждения результатов, полученных при помощи метода вращающейся плоскости, проанализируем статистические характеристики областей синхронного поведения (ламинарных фаз) в двух однонаправленно связанных диодах Пирса на различных временных масштабах наблюдения. В качестве таких характеристик по-прежнему рассмотрим (i) распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях параметров взаимодействующих систем и (ii) зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра связи (на фиксированном временном масштабе) и временного масштаба (при фиксированном значении параметра связи). Как отмечалось в разделах 4.2, 5.3, перемежаемости “игольного ушка” и “кольца” характеризуются экспоненциальными распределениями (5.16) длительностей ламинарных фаз, но в режиме перемежаемости “игольного ушка” оно наблюдается только при относительно больших значениях длительности (см. [163, 309], а также раздел 5.2). Иными словами, при рассмотрении режима перемежаемости “игольного ушка” нужно использовать закономерность (5.12) вместо (5.16). Принимая во внимание указанную особенность, которая не учитывалась при рассмотрении потоковых систем (см., например, [163, 169, 176], а также раздел 5.3), на основе общей теории сосуществования двух различных типов перемежаемости в нелинейных системах, рассмотренной в разделе 5.1, можно получить уточненное выражение для распределения длительностей ламинарных фаз в режиме перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”:

$$\begin{aligned}
p(\tau) = & 2 \exp\left(\frac{x - \tau}{T_1} - \frac{\tau}{T_2}\right) \left(T_1^2 - T_1 e^{\tau/T_1} (\tau - T_2) \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_1}\right) - \right. \\
& T_2 (\tau - T_1) e^{\tau/T_2} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_2}\right) + T_2^2 \left. \right) / \left(T_1 T_2 \left(2x \text{Ei}\left(-\frac{x}{T_1}\right) e^{x\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)} + \right. \right. \\
& 2x \text{Ei}\left(-\frac{x}{T_2}\right) + 2T_1 e^{-\frac{x}{T_2}} - 2T_1 e^{x/T_1} \ln\left(\frac{T_1 + T_2}{T_1}\right) + \\
& T_1 e^{x/T_1} \ln\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) + 2T_1 e^{x/T_1} \ln(T_2) - T_1 e^{x/T_1} \ln\left(\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}\right) + \\
& 2T_2 e^{x/T_1} \ln(T_1) + T_2 e^{x/T_1} \ln\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) - \\
& \left. \left. 2T_2 e^{x/T_1} \ln\left(\frac{T_1 + T_2}{T_2}\right) - T_2 e^{x/T_1} \ln\left(\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}\right) + 2T_2 e^{-\frac{x}{T_2}} \right) \right) \quad (5.22)
\end{aligned}$$

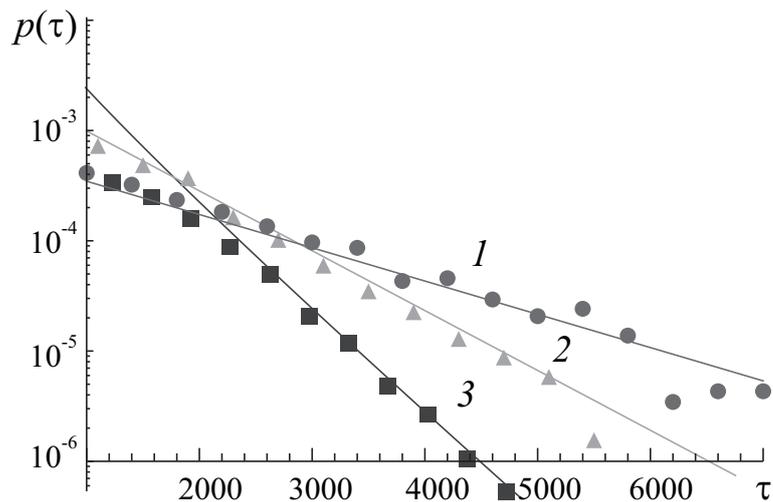


Рисунок 5.8 — Распределения длительностей ламинарных фаз во взаимодействующих диодах Пирса (5.19)–(5.21) при различных значениях параметра связи ε и временного масштаба s : кривая 1 — перемежаемость “кольца” ($\varepsilon = 0.058$, $s = 2.7225$), кривая 2 — перемежаемость “игольного ушка” ($\varepsilon = 0.00445$, $s = 4.0$), кривая 3 — перемежаемость перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” ($\varepsilon = 0.00445$, $s = 2.7225$). Результаты численного моделирования показаны точками, их теоретические аппроксимации — сплошными линиями. Параметры аппроксимаций следующие: $T_1 = 1332.51$, $T_2 = 1439.16$, $x = 400$

где $\Gamma(a, z)$ — неполная Γ -функция, $Ei(z)$ — экспоненциальная интегральная функция, $T_{1,2}$ — средние длительности ламинарных фаз для режимов отдельного существования перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”, соответственно.

Чтобы показать справедливость полученного соотношения и доказать существование различных типов перемежаемости в однонаправленно связанных диодах Пирса, были численно получены распределения длительностей ламинарных фаз для режимов, приведенных на рисунке 5.7,б–г (при тех же значениях параметров надкритичности) и проведено их сравнение с теоретическими закономерностями (5.12), (5.16), (5.22). Эти распределения показаны на рисунке 5.8. Кривая 1 соответствует перемежаемости “кольца”, кривая 2 — перемежаемости “игольного ушка”, а кривая 3 — режиму совместного существования перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”. Нетрудно заметить, что во всех рассмотренных случаях результаты численного моделирования находятся в хорошем соответствии с результатами теоретических предсказаний, что подтверждает реализацию различных типов перемежаемости,

включая их совместно существование, в однонаправленно связанных диодах Пирса на различных временных масштабах наблюдения.

Дополнительным доказательством наличия различных типов перемежаемости в однонаправленно связанных диодах Пирса является поведение длительности ламинарных фаз при изменении параметров надкритичности. Как отмечалось в разделе 4.2, зависимости средней длительности ламинарных фаз $T_{1,2}$ от параметра надкритичности в режимах перемежаемости “игольного ушка” и “кольца” должны подчиняться закономерностям (4.18)—(5.18), то есть

$$T_1(\varepsilon) = A \exp \kappa(\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2}, \quad (5.23)$$

где ε_c — критическое значение параметра связи, соответствующее установлению синхронизации временных масштабов, A и κ — параметры аппроксимации [161, 176, 302], и

$$T_2(s) = T_0 \left(1 - \frac{1}{\ln(1 - \Pi(s))} \right) \quad (5.24)$$

где T_0 — средняя длительность ламинарных фаз для временного масштаба, ограничивающего область перемежаемости “кольца”, $\Pi(s)$ — вероятность детектирования турбулентного всплеска при фиксированном времени наблюдения [111, 164]. Принимая во внимание полученное соотношение для распределения вероятности (5.22) в режиме совместного существования перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”, с исполь-

зованием (5.9) можно получить аналитическое выражение для средней длительности ламинарных фаз в этом режиме:

$$\begin{aligned}
T(\varepsilon, s) = & 2e^{-\frac{x}{T_2}} \left((T_1^2 + T_1x + x^2) e^{x/T_2} \text{Ei} \left(-\frac{x}{T_2} \right) + T_1^2 \left(-e^{x \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)} \right) \right) \times \\
& \text{Ei} \left(-\frac{(T_1 + T_2)x}{T_1 T_2} \right) + e^{x/T_1} (T_2^2 + T_2x + x^2) \text{Ei} \left(-\frac{x}{T_1} \right) - \\
& T_2^2 e^{x \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)} \text{Ei} \left(-\frac{(T_1 + T_2)x}{T_1 T_2} \right) + 2T_1 T_2 + T_1 x + T_2 x \Big/ \\
& \left(2x \text{Ei} \left(-\frac{x}{T_1} \right) e^{x \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)} + 2x \text{Ei} \left(-\frac{x}{T_2} \right) + 2T_1 e^{-\frac{x}{T_2}} - \right. \\
& - 2T_1 e^{x/T_1} \ln \left(\frac{T_1 + T_2}{T_1} \right) + T_1 e^{x/T_1} \ln \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + 2T_1 e^{x/T_1} \ln(T_2) - \\
& T_1 e^{x/T_1} \ln \left(\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \right) + 2T_2 e^{x/T_1} \ln(T_1) + T_2 e^{x/T_1} \ln \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) - \\
& \left. 2T_2 e^{x/T_1} \ln \left(\frac{T_1 + T_2}{T_2} \right) - T_2 e^{x/T_1} \ln \left(\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \right) + 2T_2 e^{-\frac{x}{T_2}} \right)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

где, как и в случае потоковых систем, значения $T_{1,2}$ и x могут быть получены численно для режимов, когда существует только один тип перемежающегося поведения [169] (соотношения (5.23) и (5.24), соответственно). Рисунок 5.9 иллюстрирует численно полученные зависимости средней длительности ламинарных фаз от временного масштаба наблюдения (*a*) и параметра связи (*б*) и их теоретические аппроксимации законами (5.23)–(5.25). Как и на рисунке 5.8, кривая 1 соответствует режиму перемежаемости “кольца”, кривая 2 — перемежаемости “игольного ушка”, а кривые 3,4 — режиму совместного существования перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”. Отчетливо видно, что во всех рассмотренных случаях данные численного моделирования находятся в хорошем соответствии с теоретическими аппроксимациями. Кроме того, также хорошо видно, что кривые 1,3 на рисунке 5.9,*a* почти совпадают друг с другом, причем подобная особенность имеет место как для численных, так и теоретических результатов. Такая ситуация связана с тем, что длительности ламинарных фаз, связанных с перемежаемостью “игольного ушка”, значительно превосходят аналогичные фазы поведения в режиме перемежаемости “кольца”. Поэтому большая

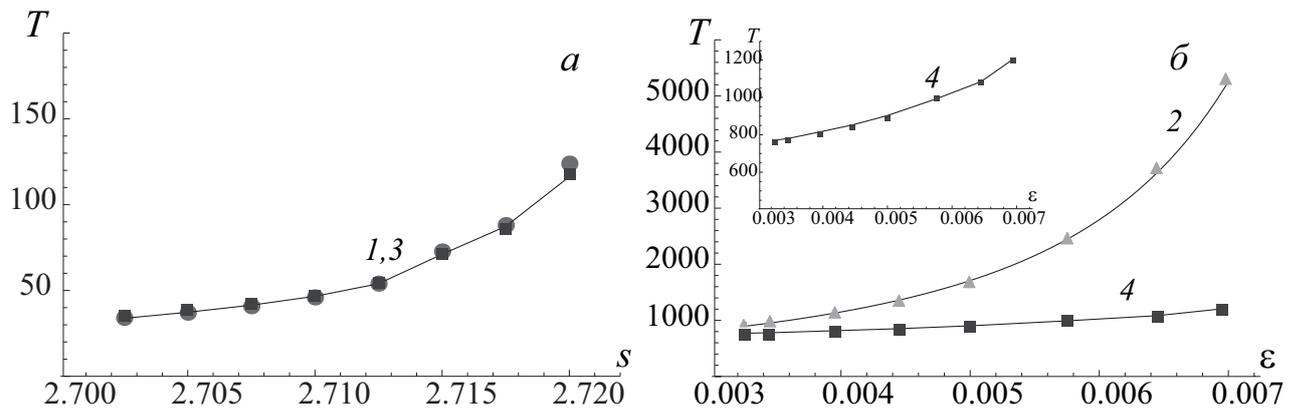


Рисунок 5.9 — (а) Зависимости средней длительности ламинарных фаз взаимодействующих диодов Пирса (5.19)–(5.21) от временного масштаба s при фиксированных значениях параметра связи в режимах перемежаемости “кольца” ($\varepsilon = 0.058$, кривая 1) и перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” ($\varepsilon = 0.00445$, кривая 3) и их теоретические аппроксимации. (б) Зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра связи ε при фиксированных значениях временного масштаба в режимах перемежаемости “игольного ушка” ($s = 4.0$, кривая 2) и перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” ($s = 2.7225$, кривая 4) и их теоретические аппроксимации. Результаты численных расчетов показаны точками, их теоретические аппроксимации законами (5.23)–(5.25) — сплошными линиями. На врезка показан увеличенный фрагмент кривой 4 и соответствующая аппроксимация. Параметры аппроксимации следующие: $A = 3.7$, $\kappa = 0.5133$, $\varepsilon_c = 0.012$, $T_0 = 13.5$, вероятность $p(s)$ полагалась линейной

часть турбулентных всплесков в режиме “перемежаемости перемежаемостей” оказывается связанной с перемежаемостью “кольца”, а кривые 1,3 выглядят почти идентичными.

Таким образом, по аналогии с потоковыми динамическими системами в пространственно-распределенных средах, описываемых уравнениями однонаправленно связанных гидродинамических моделей диодов Пирса, возможно существование “перемежаемости перемежаемостей” при рассмотрении динамики этих систем на граничных временных масштабах наблюдения. Можно заключить, что подобный эффект обладает высокой степенью общности и может наблюдаться в реальных системах различной природы.

5.5 “Переменяемость переменяемостей” на границе фазовой хаотической синхронизации в присутствии шума

В качестве следующего примера систем, способных демонстрировать “переменяемость переменяемостей”, рассмотрим системы с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенные среды, находящиеся вблизи границы фазовой хаотической синхронизации, в присутствии шума. Как будет показано ниже, при превышении шумом некоторого значения (зависящего от выбора исследуемой системы, ее управляющих параметров и характеристик шумового сигнала) в определенном диапазоне значений управляющего параметра наблюдается одновременное существование переменяемостей “игольного ушка” и “кольца”.

Рассмотрим характеристики “переменяемости переменяемостей” вблизи границы фазовой синхронизации в присутствии шума на примере двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов Ресслера (1.15) с теми же значениями управляющих параметров, что и при исследовании переменяющейся фазовой синхронизации и синхронизации временных масштабов (см. разделы 4.3, 4.4, 5.3), но при наличии дополнительного шумового слагаемого $D\xi$, добавленного во второе уравнение ведомой системы¹. Предполагается, что характеристики шумового сигнала являются такими же, как и при исследовании влияния шума на обобщенную синхронизацию (подраздел 1.2.2.2).

Как и в отсутствие шума, диагностика фазовой синхронизации в присутствии шума осуществлялась при помощи анализа разности фаз взаимодействующих систем и выполнения условия захвата фаз (4.14). Фазы $\phi_{1,2}(t)$ вводились в рассмотрение как углы поворота на плоскостях (x_1, x_2) и (u_1, u_2) (см. раздел 4.2, а также [332]).

Рисунок 5.10 иллюстрирует схематичное расположение границы фазовой синхронизации на плоскости параметров (интенсивность шумо-

¹Параметры D_1 и D_2 полагаются равными нулю.

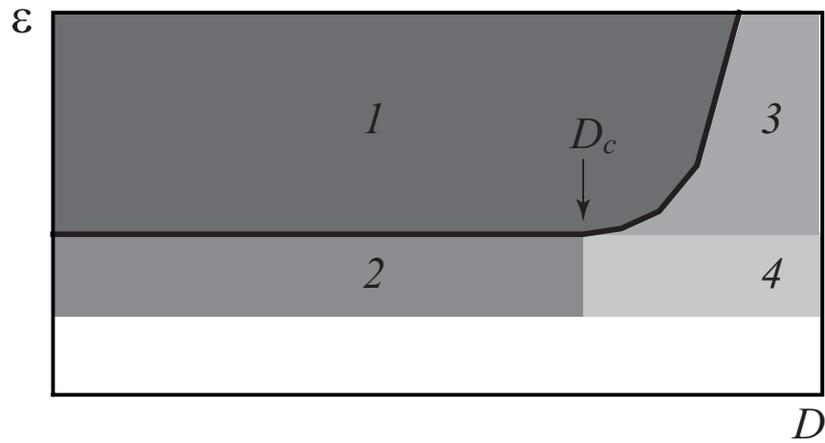


Рисунок 5.10 — Схематичное расположение границы фазовой синхронизации на плоскости параметров (D, ε) . Области существования различных режимов обозначены арабскими цифрами: 1 — режим фазовой синхронизации; 2 — перемежаемость “игольного ушка”; 3 — перемежаемость “кольца”; 4 — перемежаемость перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”. Область асинхронной динамики показана белым. Критическое значение интенсивности шума D_c показано стрелкой

вого воздействия D — параметр связи ε). Как показывают результаты проведенных расчетов, при превышении интенсивностью шума некоторого критического значения D_c ($D_c = 9$ для систем Ресслера, показано стрелкой на рисунке 5.10) синхронный режим начинает разрушаться, что связано с потерей фазовой когерентности хаотическим аттрактором ведомой системы. В то же самое время, как видно из рисунка 5.10, существует некоторый диапазон интенсивности шума $(0, D_c)$, где пороговое значение установления синхронного режима практически не меняется. Понятно, что в этих областях шум не будет оказывать существенного влияния как на порог возникновения синхронного режима, так и на характеристики перемежаемости, имеющей место на его границе. Однако, в области потери фазовой когерентности аттрактором ведомой системы ($D > D_c$) шум способен внести новые черты в характеристики перемежаемости.

Для определения характеристик перемежаемости, реализующейся в системе, проанализируем поведение ведомой системы на вращающейся плоскости (4.20), аналогично тому, как это было сделано в [111]. На рисунке 5.11 приведены фазовые траектории исследуемой системы на плоскости (x', y') для различных значений интенсивности шума D и

параметра связи ε . Рисунок 5.11, *а* соответствует случаю, когда в системе реализуется синхронная динамика ($D = 1.5$, $\varepsilon = 0.045$). В этом случае аттрактор ведомой системы является фазово-когерентным, а фазовая траектория ведомой системы на вращающейся плоскости представляет собой зашумленную “точку”, не охватывающую начало координат. Ниже границы возникновения синхронного режима в случае, если интенсивность шума достаточно мала ($D = 1.5$, $\varepsilon = 0.037$), также как и в случае отсутствия шума, наблюдается перемежаемость “игольного ушка” (рисунок 5.11, *б*). Аттрактор ведомой системы в этом случае остается фазово-когерентным, а фазовая траектория на вращающейся плоскости представляет собой зашумленный предельный цикл. Увеличение интенсивности шума изменяет свойства когерентности аттрактора ведомой системы: он становится принципиально фазово-некогерентным, а на вращающейся плоскости фазовая траектория начинает охватывать начало координат (рисунок 5.11, *в, г*). Охват начала координат может происходить двумя различными способами. Если параметр связи превышает пороговое значение возникновения синхронного режима в отсутствие шума ($D = 10$, $\varepsilon = 0.045$), но при заданном значении интенсивности шума фазовая синхронизация еще не возникла, фазовая траектория представляет собой зашумленную “точку”, охватывающую начало координат (рисунок 5.11, *в*). В этом случае в системе реализуется перемежаемость “кольца”. Если же параметр связи лежит ниже порогового значения установления фазовой синхронизации в отсутствие шума ($D = 10$, $\varepsilon = 0.037$), на вращающейся плоскости фазовая траектория представляет собой зашумленный предельный цикл, охватывающий начало координат (рисунок 5.11, *г*). В данном случае в системе имеет место перемежаемость перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”.

Для подтверждения наличия различных типов перемежающегося поведения, включая “перемежаемость перемежаемостей”, на границе фазовой синхронизации в присутствии шума проанализируем статистические характеристики длительностей ламинарных фаз для системы (1.15) с дополнительным шумовым слагаемым: распределение длительностей

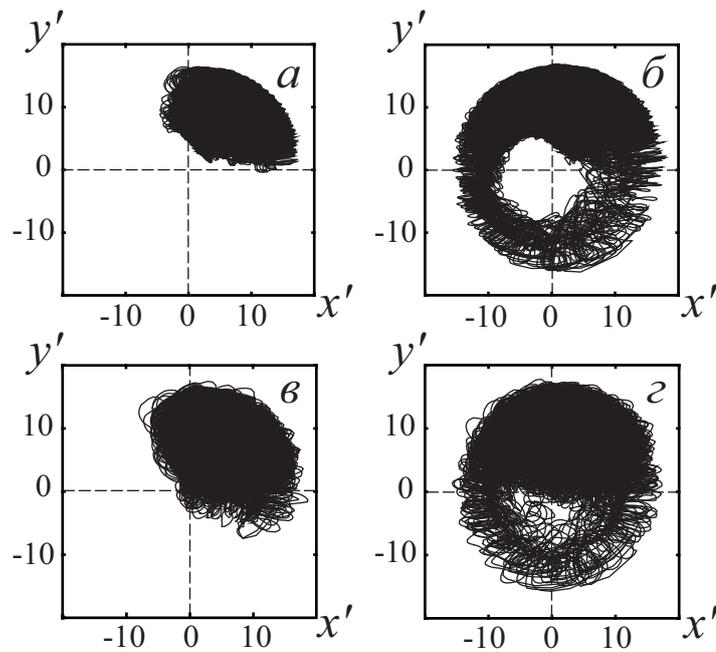


Рисунок 5.11 — Фазовые траектории ведомого осциллятора Ресслера на вращающейся плоскости (x', y') : (а) $\varepsilon = 0.045$, $D = 1.5$ — режим фазовой синхронизации, (б) $\varepsilon = 0.037$, $D = 1.5$ — перемежаемость “игольного ушка”, (в) $\varepsilon = 0.045$, $D = 10$ — перемежаемость “кольца”, (г) $\varepsilon = 0.037$, $D = 10$ — перемежаемость перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”

ламинарных фаз при фиксированных значениях управляющих параметров и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. На рисунке 5.12 приведены численно полученные распределения длительностей ламинарных фаз для всех типов перемежаемости, полученные при различных значениях параметров, и их аппроксимации теоретическими законами (5.16) (для перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”), (5.17) (для перемежаемостей перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”). Из рисунка видно, что результаты численного моделирования находятся в хорошем соответствии с результатами теоретических предсказаний, что подтверждает возможность реализации различных типов перемежаемости на границе фазовой синхронизации в присутствии шума.

Дополнительным доказательством наличия перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” или их одновременного существования вблизи границы фазовой синхронизации в присутствии шума является зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи ε . Из-за того, что появление турбулентных всплесков, обусловленных пе-

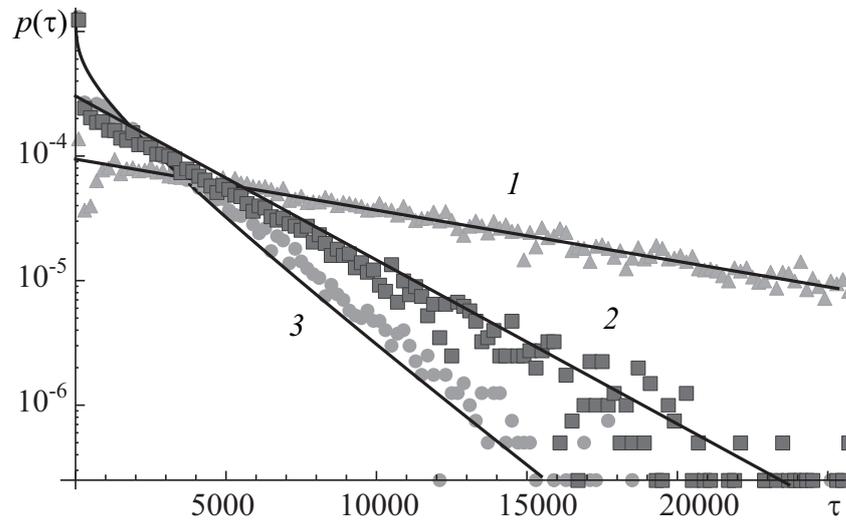


Рисунок 5.12 — Нормированные распределения длительностей ламинарных фаз при перемежаемости “игольного ушка” ($\varepsilon = 0.037$, $D = 1.5$, кривая 1), перемежаемости “кольца” ($\varepsilon = 0.045$, $D = 10$, кривая 2), перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” ($\varepsilon = 0.037$, $D = 10$, кривая 3) и их аппроксимации законами (5.16) (кривые 1,2) и (5.17) (кривая 3). Параметры аппроксимации: 1 — $T_1 = 10593$, 2 — $T_2 = 3300$, 3 — $T_1 = 12533$, $T_2 = 3300$

ремежаемостью “кольца”, практически не зависит от параметра связи, производился расчет средней длительности ламинарных фаз только для двух типов поведения: перемежаемости “игольного ушка” и перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”. На рисунке 5.13 приведены зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра связи, полученные численно для обоих типов поведения, упомянутых выше, а также их теоретические аппроксимации законами (5.23) и (5.18). Из рисунка видно, что данные численного моделирования находятся в хорошем соответствии с результатами теоретических предсказаний. Коэффициенты для закономерности (5.23) были получены при помощи применения метода наименьших квадратов к зависимости $\ln(1/T_1)$ от $(\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2}$, показанной на врезке. Нетрудно заметить, что указанная закономерность подчиняется соотношению (5.23) в четком соответствии с теорией для перемежаемости “игольного ушка”.

Таким образом, в двух однонаправленно связанных системах Ресслера вблизи границы фазовой синхронизации в присутствии шума в зависимости от величины параметра связи и интенсивности шума возможно существование перемежаемости “игольного ушка”, перемежаемо-

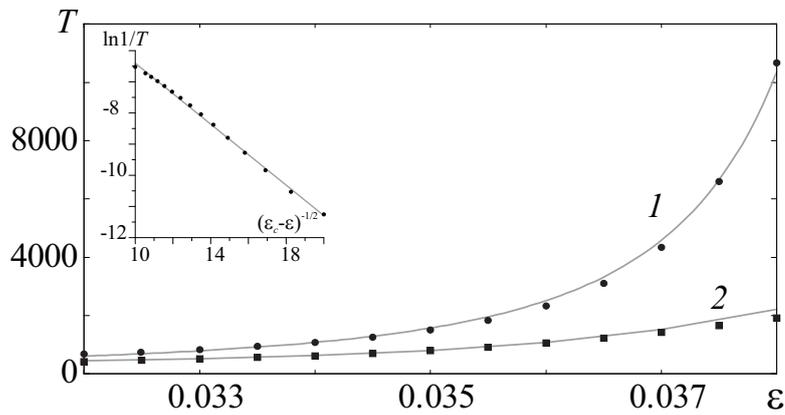


Рисунок 5.13 — Зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра связи в режимах перемежаемости “игольного ушка” ($D = 1.5$, кривая 1) и перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” ($D = 10$, кривая 2) и их теоретические аппроксимации законами (5.23) и (5.18), соответственно. Данные численного моделирования показаны точками, теоретические аппроксимации — сплошными линиями. На врезке показана кривая 1 в форме зависимости $\ln(1/T)$ от $(\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2}$. Параметры аппроксимации: $A = 4.545$, $\kappa = 0.489$, $\varepsilon_c = 0.042$

сти “кольца” или перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”. Для обобщения полученных результатов на другие системы, способные находиться в режиме фазовой синхронизации в присутствии шума, проанализируем характеристики перемежающегося поведения в пространственно-распределенных средах — гидродинамических моделях диодов Пирса (5.19)–(5.21), рассмотренных в разделе 5.4, при тех же значениях управляющих параметров с дополнительным шумовым слагаемым $D\xi$, добавленным во второе уравнение (5.21). Характеристики шумового сигнала выберем такими же, как и для систем Ресслера, рассмотренных выше.

Численное моделирование системы (5.19)–(5.21) показывает, что, как и в системах Ресслера (1.15), в однонаправленно связанных диодах Пирса с ростом параметра связи синхронный режим быстро разрушается. В то же самое время, из-за специфики самой системы диоды Пирса оказываются более чувствительными по отношению к шумам по сравнению с системами Ресслера. Поэтому для рассматриваемых пространственно-распределенных систем новые эффекты возможны и при относительно малых значениях интенсивности шума. Рисунок 5.14 иллюстрирует поведение ведомого диода Пирса на плоскости (x', y') , вращающейся с ча-

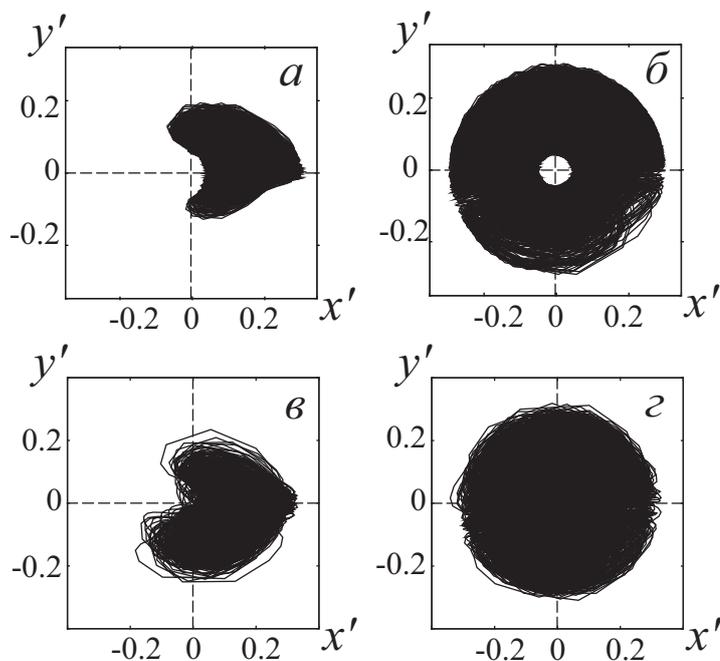


Рисунок 5.14 — Фазовые траектории ведомого диода Пирса на вращающейся плоскости (x', y') : (а) режим фазовой синхронизации ($\varepsilon = 0.058$, $D = 10^{-5}$), (б) перемежаемость “игольного ушка” ($\varepsilon = 0.006$, $D = 10^{-5}$), (в) перемежаемость “кольца” ($\varepsilon = 0.058$, $D = 0.03$), (г) перемежаемость перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” ($\varepsilon = 0.006$, $D = 0.03$)

стотой ведущего диода Пирса, определяемой соотношением (4.20) при $x_2 = \rho_2(x = 0.2, t)$, $y_2 = \rho_2(x = 0.6, t)$ ², в различных режимах. Нетрудно заметить, что рисунок 5.14 качественно аналогичен рисунку 5.11. В частности, при относительно малых значениях интенсивности шума аттрактор ведомой системы на вращающейся плоскости в синхронном режиме выглядит как зашумленная “точка”, не охватывающая начало координат (ср. рисунок 5.14,а и рисунок 5.11,а). Восстановленный аттрактор в данном случае является фазово-когерентным. Вблизи границы фазовой синхронизации в случае малых значений интенсивности шума имеет место перемежаемость “игольного ушка”. В этом случае аттрактор ведомой системы является также фазово-когерентным, а фазовая траектория на вращающейся плоскости выглядит как зашумленный предельный цикл, не охватывающий начало координат (рисунок 5.14,б). Если интенсивность шума достаточно велика, поведение диодов Пирса

²Диагностика фазовой синхронизации в диодах Пирса осуществлялась при помощи анализа зависимостей разности фаз взаимодействующих систем от времени. Фазы хаотических сигналов вводились в рассмотрение как углы поворота на плоскостях $(\rho_{1,2}(x = 0.2; t); \rho_{1,2}(x = 0.6; t))$, как это было сделано в главе 1.

сильно меняется. При значениях параметра связи, соответствующих как синхронному режиму в отсутствие шума ($\varepsilon = 0.058$), так и перемежаемости “игольного ушка” ($\varepsilon = 0.006$), восстановленный аттрактор ведомой системы является фазово-некогерентным. При этом, если в отсутствие шума в исследуемой системе наблюдается синхронный режим, в той же системе при наличии шума достаточно большой амплитуды имеет место перемежаемость “кольца”. Аттрактор ведомой системы на вращающейся плоскости в данном случае выглядит как зашумленная “точка”, охватывающая начало координат (рисунок 5.14,в). Для значения параметра связи, соответствующего в отсутствие шума перемежаемости “игольного ушка”, в диодах Пирса, находящихся под сильным шумовым воздействием наблюдается сосуществование перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”. Аттрактор ведомой системы в данном случае представляет собой зашумленный предельный цикл, охватывающий начало координат (рисунок 5.14,г).

Таким образом, и в системах с малым числом степеней свободы, и пространственно-распределенных средах, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации в присутствии шума, в определенном диапазоне значений параметра связи и интенсивности внешнего шумового воздействия возможно существование режима перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”. Можно ожидать, что подобные эффекты будут иметь место в реальных системах, подверженных влиянию внешних шумов и флуктуаций.

5.6 “Перемежаемость перемежаемостей” в связанных хаотических осцилляторах с дополнительным полосовым фильтром

В разделах 5.3—5.4 было установлено, что одной из возможностей наблюдения сосуществования двух различных типов перемежаемости в нелинейных системах является рассмотрение динамики изучаемой си-

стемы на определенных временных масштабах наблюдения, вводимых в рассмотрение с помощью непрерывного вейвлетного преобразования. Иными словами, при рассмотрении поведения модельных систем исследователь, как правило, должен выбрать определенный масштаб наблюдения, чтобы обнаружить явление “перемежаемости перемежаемостей” (см. также [169, 175]), что, на первый взгляд, придает рассматриваемой ситуации оттенок некоторой искусственности и неестественности. В то же самое время, для реальных систем (включая радиофизические и физиологические системы) вполне возможна ситуация, когда “перемежаемость перемежаемостей” будет реализовываться “автоматически”, без какого-либо выбора масштаба наблюдения со стороны исследователя. Известно, что непрерывное вейвлетное преобразование с материнским вейвлетом Морле, используемое для изучения поведения систем на различных временных масштабах и детектирования явления синхронизации временных масштабов [357], может рассматриваться как фильтр, действующий на анализируемый сигнал [422]. Поскольку при изучении реальных систем вполне возможна ситуация, когда анализируемый сигнал подвергается предварительной фильтрации либо фильтром, входящим в состав самой системы, либо фильтром, входящим в состав “канала связи”, обеспечивающего передачу сигнала от изучаемой системы к исследователю, представляется достаточно вероятной возможность наблюдать явление сосуществования двух типов перемежающегося поведения в подобном случае даже без рассмотрения системы на различных временных масштабах. Для проверки этого предположения было рассмотрено поведение двух связанных хаотических систем с дополнительным полосовым фильтром, располагающимся на выходе одной из них. В ходе исследований было установлено, что при определенных значениях параметров фильтра возможно возникновение “перемежаемости перемежаемостей” в исследуемой системе.

В качестве объекта исследования выбраны однонаправленно связанные генераторы Кияшко-Пиковского-Рабиновича [334, 358, 428]. Моделирование динамики исследуемой системы проводилось при помо-

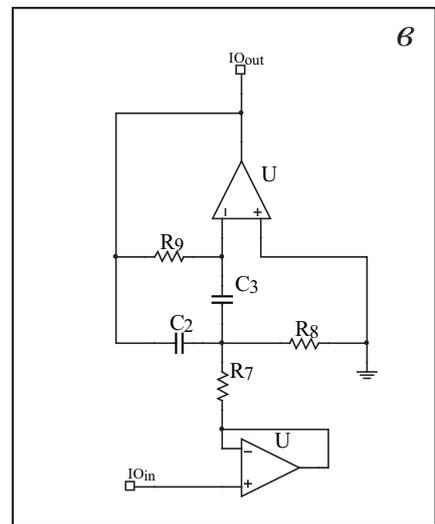
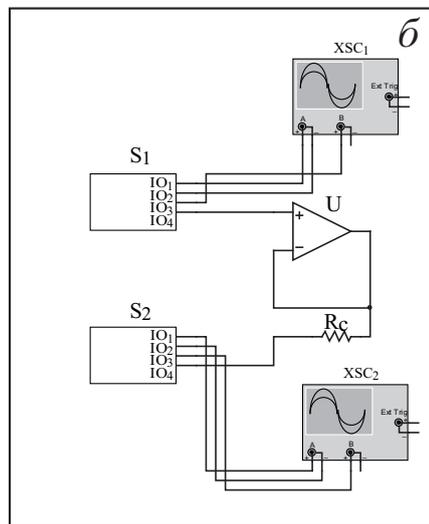
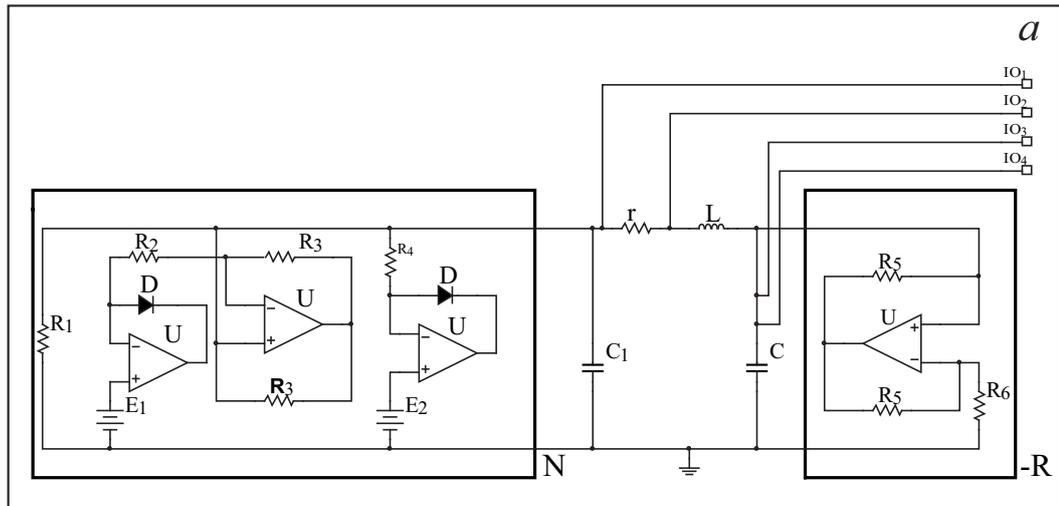


Рисунок 5.15 — Принципиальная схема кусочно-линейной модели генератора Кияшко-Пиковского-Рабиновича (а), схема связи двух кусочно-линейной моделей генератора Кияшко-Пиковского-Рабиновича (б), схема полосового фильтра (в). На рисунке (а) блок слева (N) представляет собой нелинейный элемент, обладающий N -образной ВАХ. Блок справа (-R) представляет собой гиратор, обеспечивающий отрицательное сопротивление. D — идеальные диоды, U — идеальные операционные усилители. Значения параметров: $C_1 = 2$ нФ, $C = 6.8$ нФ, $r = 200$ Ом, $E_1 = 0.085$ В, $E_2 = 0.5$ В, $R_1 = 51.5$ Ом, $R_2 = 45$ Ом, $R_3 = 120$ Ом, $R_4 = 154.155$ Ом, $R_5 = 3.6$ кОм, $R_6 = 1.5$ кОм. Параметр L определен для каждой из взаимодействующих систем отдельно. Схема имеет четыре выхода: три — для съемки напряжений, являющихся динамическими переменными, один — для связи систем между собой. На рисунке (в) значения параметров фильтра: $C_2 = 0.4$ нФ, $R_7 = 1.591549$ мОм, $R_8 = 10.61$ Ом, $R_9 = 11.93662$ мОм. Параметр C_3 используется для подстройки центральной частоты фильтра

щи профессиональной среды разработки NI Multisim 9.0. Принципиальная схема кусочно-линейной модели генератора Кияшко-Пиковского-Рабиновича представлена на рисунке 5.15,а. На рисунке 5.15,б приведена схема связи двух кусочно-линейной моделей генератора Кияшко-Пиковского-Рабиновича. Система S_1 однонаправленно связана с системой S_2 благодаря повторителю на основе операционного усилителя. Сопротивление R_c регулируют связь: чем больше параметр R_c , тем слабее связь между системами и наоборот, чем меньше величина сопротивления R_c , тем сильнее связь между взаимодействующими осцилляторами. Системы S_1 и S_2 идентичны по всем управляющим параметрам (см. подрисуночную подпись) кроме параметра L : $L = 3.2$ мГн для системы S_1 и $L = 3.1$ мГн для системы S_2 . Напряжения снимаются с помощью двух двухканальных осциллографов. Схема полосового фильтра, который использовался в рамках проведения исследований, представлена на рисунке 5.15,в.

Исследование влияния фильтрации на поведение однонаправленно связанных генераторов Кияшко–Пиковского–Рабиновича проводилось вблизи границы возникновения фазовой хаотической синхронизации. Для определения типа поведения, реализующегося в системе, использовался метод вращающейся плоскости (см. раздел 4.2). Было проанализировано поведение ведомого генератора на плоскости (4.20), где в качестве анализируемых сигналов выступали колебания напряжения, снятые с различных участков исследуемой цепи (с емкости C (выход $Ю_3$) и с сопротивления r (выход $Ю_1$)). В ходе проведения исследований установлено, что синхронный режим в исследуемой системе при указанных значениях управляющих параметров реализуется при сопротивлении связи $R_c < 12.5$ кОм. В данном случае фазовая траектория на вращающейся плоскости выглядит как “зашумленная точка” (рисунок 5.16,а). Ниже границы фазовой синхронизации в непосредственной близости к ней, как и в системах Ресслера (см. раздел 4.3), реализуется перемежаемость “игольного ушка”. Фазовая траектория на вращающейся плоскости в данном случае представляет собой “зашумленный” предельный

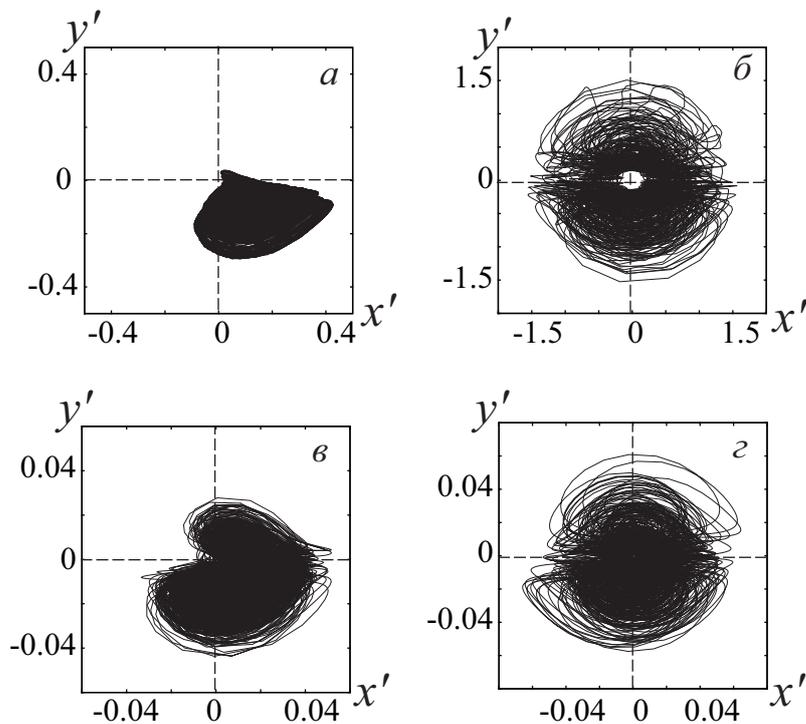


Рисунок 5.16 — Поведение ведомого генератора Кияшко–Пиковского–Рабиновича на вращающейся плоскости (4.20) при различных значениях параметров фильтра: *а* режим фазовой хаотической синхронизации; *б*) перемежаемость “игольного ушка”; *в*) перемежаемости “кольца”; *г*) перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”

цикл, не охватывающий начало координат (рисунок 5.16,б). Добавление полосовых фильтров на выходы каналов ведомой системы приводит к трансформации фазовой траектории на вращающейся плоскости, приводящей к пересечению ею начала координат (см. рисунок 5.16,в,г). Так, в синхронном режиме в данном случае будет диагностирована перемежаемость “кольца” (рисунок 5.16,в), а вблизи границы фазовой синхронизации — совместное существование режимов перемежаемости “игольного ушка” и “кольца” (рисунок 5.16,г).

Таким образом, возможно наблюдать существование перемежаемости перемежаемостей в нелинейных системах не только при рассмотрении их поведения на граничных временных масштабах наблюдения, но и при определенном выборе параметров фильтра, находящегося на выходе системы, с которой снимается сигнал. Полученные результаты говорят о возможности одновременного существования двух различных типов перемежающегося поведения в реальных радиофизических системах и типичности этого явления.

5.7 “Переменяемость переменяемостей” в реальных системах

Результаты, изложенные в предыдущих разделах настоящей главы диссертационной работы, являются хорошими предпосылками для возможности наблюдения “переменяемости переменяемостей” в реальных системах, включая системы физической и нейрофизиологической природы. В настоящем разделе будет рассмотрено несколько систем, каждая из которых при определенных условиях способна демонстрировать сосуществование двух различных типов переменяемости.

5.7.1 Переменяющееся поведение при взаимодействии сердечно-сосудистой и дыхательной систем человека

Начнем рассмотрение с наиболее простого случая, когда в реальной физиологической системе возможно пронаблюдать сосуществование двух различных типов переменяемости при рассмотрении ее поведения на различных временных масштабах наблюдения, аналогично тому, как это было сделано в разделах 5.3–5.4 на примере модельных систем с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных сред. Следует отметить, что рассмотрение физиологических сигналов на различных временных масштабах является необходимым инструментом при проведении исследований, позволяющим диагностировать различные особенности динамики исследуемых систем, в то время как другими методами сделать это не представляется возможным [14, 18, 20, 429]. В качестве анализируемых сигналов были рассмотрены временные реализации, полученные в ходе проведения физиологических экспериментов в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова в научной группе д.ф.-м.н. В.И. Пономаренко и д.ф.-м.н. М.Д. Прохорова.

В настоящее время известно, что основные ритмы сердечно-сосудистой системы человека могут быть синхронизированы между собой [43, 430–432]. При этом, системы, задающие основной сердечный ритм и ритм медленной регуляции кровяного давления, могут быть рассмотрены как автогенераторы под внешним воздействием, в качестве которого выступает дыхание [432, 433]. Понятно, что при определенных значениях частоты дыхания, ниже границы синхронизации возможно существование перемежаемости, а на граничных временных масштабах наблюдения может иметь место “перемежаемость перемежаемостей”.

Для подтверждения наличия “перемежаемости перемежаемостей” в анализируемой физиологической системе были исследованы восемь здоровых молодых мужчин со средним уровнем физиологической активности. Запись сигналов электрокардиограмм (ЭКГ) и дыхания производилась одновременно в положении “сидя” с частотой стробирования 250 Гц и 16-битным разрешением. Продолжительность экспериментов составляла 10 минут. Частота дыхания устанавливалась звуковыми сигналами. Принимая во внимание тот факт, что процесс медленной регуляции кровяного давления человека характеризуется основной частотой, близкой к 0.1 Гц [434], эксперименты осуществлялись при вынужденном дыхании с частотой 0.2 Гц для того, чтобы избежать ложную синхронизацию, обусловленную наличием компонент дыхания в вариабельности сердечного ритма [429]. Поэтому перемежающееся поведение изучалось вблизи области синхронизации 1 : 2, а разность фаз определялась как

$$\Delta\phi_s(t) = \phi_b(s, t) - 2\phi_{RR}(2s, t), \quad (5.26)$$

где $\phi_b(s, t)$ — фаза сигнала дыхания на временном масштабе s , а $\phi_{RR}(2s, t)$ — фаза сердечного ритма, определяемая на двойном временном масштабе $2s$. Как и в случае модельных систем, фазы вводились в рассмотрение при помощи непрерывного вейвлетного преобразования с матринским вейвлетом Морле (см. раздел 4.1). Временной масштаб $s = 5$ с соответствует частоте дыхания $f_b = 0.2$ Гц, а временной масштаб $2s = 10$ с однозначно связан с частотой медленных колебаний сердечного ритма, равной $f = 0.1$ Гц.

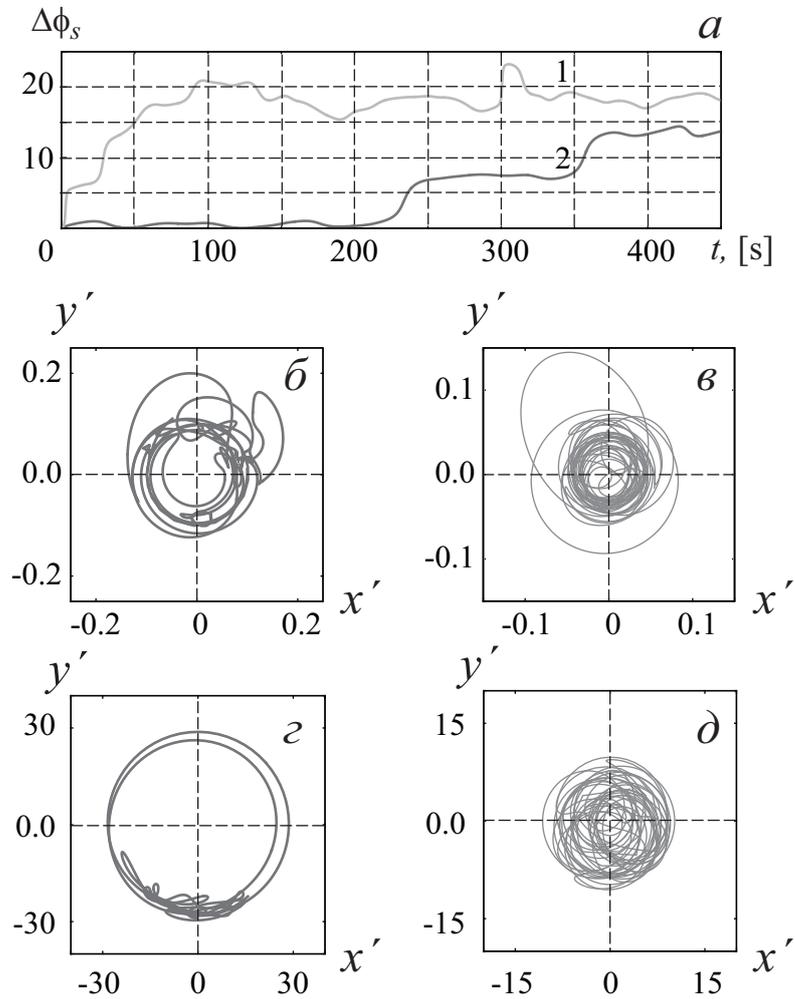


Рисунок 5.17 — “Переменяемость переменяемостей” в сердечно-сосудистой системе человека: (а) зависимость $\Delta\phi_s(s = 5, t)$, кривая 1, (б) траектория на вращающейся плоскости (x', y') , содержащая фазовые прослоки, соответствующие переменяемости “игольного ушка”, $s = 5.0$ с, и (в) траектория на вращающейся плоскости (x', y') , где наблюдается переменяемость переменяемостей “игольного ушка” и “кольца”, $s = 4.0$ с. “Переменяемость переменяемостей” в двух однонаправленно связанных системах Ресслера (1.15) при $\varepsilon = 0.035$: (а) зависимость $\Delta\phi_s(s = 6.3, t)$, кривая 2, (г) траектория на вращающейся плоскости (x', y') , содержащая фазовые прослоки, соответствующие переменяемости “игольного ушка”, $s = 6.3$, и (д) траектория на вращающейся плоскости, где сосуществуют оба типа переменяемостей, $s = 4.4$

На рисунке 5.17, *а*, кривая 1, показана временная зависимость разности фаз $\Delta\phi_s(t)$ для исследуемой физиологической системы. Как видно из рисунка, указанная зависимость содержит как участки синхронного поведения (ламинарные фазы), так и фазовые проскоки (турбулентные всплески). В то же самое время, по объективным причинам получить длительные записи, содержащие достаточное количество фазовых проскоков, чтобы набрать статистику, не представляется возможным. Однако, применение метода вращающейся плоскости (4.20) к записанным данным точно также, как это было сделано в разделах 5.3–5.4, позволяет определить, что диагностируемые фазовые проскоки относятся к различным типам перемежаемости. Как видно из рисунка 5.17, в сердечно-сосудистой системе человека возможно существование как перемежаемости “игольного ушка” (*б*), так и перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” (*в*). Напомним, что в режиме перемежаемости “игольного ушка” фазовая траектория должна вращаться вокруг начала координат, а при перемежаемости “кольца” начало координат должно быть замазано участками фазовой траектории. В режиме “перемежаемости перемежаемостей” оба механизма, упомянутых выше, должны проявляться одновременно. Для сравнения на рисунке 5.17, *а, г, д* приведены также разность фаз (*а* — кривая 2) и вращающиеся плоскости (*г, д*) для двух однонаправленно связанных систем Ресслера (1.15) с теми же значениями управляющих параметров, что и в разделе 5.3, вычисленные, как и в случае физиологической системы, вблизи области синхронизации 1 : 2. Нетрудно заметить, что как разности фаз, так и вращающиеся плоскости в модельной системе и при взаимодействии сердечно-сосудистой и дыхательной систем человека качественно аналогичны друг другу, что подтверждает наличие “перемежаемости перемежаемостей” в реальной физиологической системе.

Таким образом, при взаимодействии сердечно-сосудистой и дыхательной систем человека возможно возникновение синхронизации порядка 1 : 2, вблизи границы которой имеет место перемежающееся поведение. Анализ состояний исследуемой системы при помощи метода вращаю-

щейся плоскости показал, что в зависимости от временного масштаба наблюдения в данном случае имеет место либо перемежаемость “игольного ушка”, либо перемежаемость перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”.

5.7.2 Перемежающееся поведение при развитии эпилептической активности у человека и лабораторных животных

В качестве второго примера рассмотрим нейрофизиологическую систему — нейронную сеть головного мозга крыс линии WAG/Rij (Wistar Albino Glaxo/Rij), имеющих генетическую предрасположенность к абсанс-эпилепсии [435,436]. Анализ возможности возникновения “перемежаемости перемежаемостей” в такой системе проводился при помощи анализа записей электрической активности головного мозга (электроэнцефалограмм), снятых с различных областей головного мозга 10 крыс-самцов (возраст 7–9 месяцев, вес 320–360 г). Все эксперименты были проведены в Радбаут университете Наймегена (Нидерланды) в лаборатории профессора Ж. ван Люжетаалара и Институте высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН, г. Москва под руководством д.б.н. Е.Ю. Ситниковой.

Как отмечалось в разделе 4.6, эпилептические электроэнцефалограммы представляют собой перемежающиеся временные реализации, содержащие паттерны синхронной активности (пик-волновые разряды), чередующиеся с фоновой активностью головного мозга. Кроме того, на эпилептической ЭЭГ возможно присутствие других паттернов (сонные веретена, 5-9 Гц колебания), не являющихся маркерами эпилепсии. Сонные веретена представляют собой один из наиболее важных типов колебательной активности на сигнале ЭЭГ, который появляется во время сна. Они представляют собой короткие (порядка 0.5–1.5 с) колебательные интервалы с частотами 10–16 Гц и характерной формой веретена [437]. Известно, что сонные веретена формируются посредством синхронной активности нейронной сети, содержащей нейроны коры го-

ловного мозга и таламуса. Пик-волновые разряды, напротив, служат маркерами эпилепсии, а их наличие на ЭЭГ сопровождается характерными клиническими проявлениями. Пик-волновые разряды характеризуются частотой 7–15 Гц и содержат высоко-частотную компоненту (так называемый спайк или пик) с максимальной амплитудой, значительно превышающей фоновую активность головного мозга, и низко-частотную “волну” [436, 438].

Известно, что пик-волновые разряды и сонные веретена подчиняются одному и тому же таламо-кортикальному механизму, предполагающему, что на появление приступов эпилепсии могут оказывать влияние некоторые характерные свойства сонных веретен [439, 440]. Несмотря на то, что и пик-волновые разряды, и сонные веретена рассматриваются как таламо-кортикальные колебания и оказываются тесно связанными друг с другом, функциональное соотношение между ними оказывается очень сложным и до сих пор не выявленным. В частности, таламо-кортикальная нейронная сеть, генерирующая сонные веретена в норме, способна при некоторых условиях производить также пик-волновые разряды [435, 441]. Во многих случаях форма и амплитуда сонного веретена оказываются очень похожими на форму и амплитуду пик-волнового разряда [440, 442]. Оба типа паттернов, как отмечалось выше, могут наблюдаться на ЭЭГ одновременно (см. рисунок 5.18), демонстрируя тем самым одновременное существование двух различных типов перемежаемости.

В рамках предыдущих исследований было установлено, что статистические характеристики длительностей пик-волновых разрядов и сонных веретен, рассматриваемых в отдельности, удовлетворяют закономерностям, свойственным для перемежаемости типа “on-off” [104, 425, 443, 444]. На основе полученных результатов можно предположить, что тип поведения, диагностируемый при совместном рассмотрении пик-волновых разрядов и сонных веретен как турбулентных всплесков, обусловленных двумя различными причинами, может быть классифицирован как перемежаемость перемежаемостей типа “on-off – on-off”.

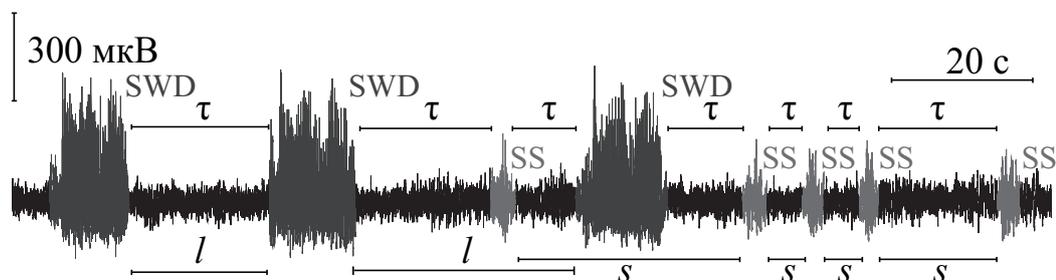


Рисунок 5.18 — Запись электроэнцефалограммы, содержащая пик-волновые разряды (SWD) и сонные веретена (SS). Временные интервалы между последовательными событиями на ЭЭГ (отмеченные как τ) соответствуют ламинарным фазам динамики электрической активности головного мозга. Временные интервалы, обозначенные как s и l , соответствуют ламинарным фазам в динамике отдельно взятых сонных веретен и пик-волновых разрядов, соответственно

На основе общей теории совместного существования двух различных типов перемежаемости, предложенной в разделе 5.1, получим статистические характеристики перемежаемости перемежаемостей типа “on-off – on-off”. Напомним, что распределение длительностей ламинарных фаз в режиме “перемежаемости перемежаемостей” должно подчиняться соотношению (5.8). При этом, как отмечалось в разделе 4.1, распределение длительностей ламинарных в режиме перемежаемости типа “on-off” удовлетворяет степенной зависимости (4.1), то есть

$$p(x) = Ax^{-3/2}. \quad (5.27)$$

В то же самое время, напрямую использовать соотношение (5.8) для вывода аналитической закономерности распределения длительностей ламинарных фаз в режиме перемежаемости перемежаемостей типа “on-off – on-off” представляется затруднительным в связи с особенностями степенного закона (5.27). Это связано с тем, что интеграл $\int_0^\infty p(x) dx$ расходится при $x \rightarrow 0$, в то время как интеграл $\int_0^\infty xp(x) dx$, определяющий среднюю длительность ламинарных фаз, стремится к бесконечности при $x \rightarrow \infty$. Таким образом, соотношение (5.8) должно быть адаптировано на случай перемежаемостей типа “on-off”, что является существенным отличием по сравнению с рассмотренными ранее случаями совместного существования перемежаемостей типа I, типа I с шумом, “игольного ушка” и “кольца”, где использование соотношения (5.8) было возможно напрямую (см. также [169, 176]).

Чтобы адаптировать соотношение (5.8) для перемежаемости перемежаемостей “on-off — on-off”, вероятно, имеющей место в записях электроэнцефалограмм, необходимо принять во внимание конечность анализируемых временных рядов. Так, предположим, что длительность анализируемого временного ряда равна L^* , и на этой длине наблюдается N_1 пик-волновых разрядов и N_2 сонных веретен. Из-за ограниченности экспериментальных временных рядов распределения длительностей ламинарных фаз для пик-волновых разрядов и сонных веретен, $N_1(l)$ и $N_2(l)$, будут сосредоточены внутри интервалов $[L_{1\min}, L_{1\max}]$ и $[L_{2\min}, L_{2\max}]$, соответственно (см. рисунок 5.19). Для этих распределений выполняются следующие условия нормировки:

$$\sum_j N_i(l_j) = N_i, \quad \sum_j l_j N_i(l_j) = L, \quad (5.28)$$

где L — суммарная длительность ламинарных фаз³, индексы $i = 1, 2$ относятся к пик-волновым разрядам и сонным веретенам, соответственно. Переходя к непрерывным распределениям длительностей ламинарных фаз, $n_i(l)$, можно переписать соотношения (5.28) в виде:

$$\int_{L_{i\min}}^{L_{i\max}} n_i(l) dl = N_i, \quad \int_{L_{i\min}}^{L_{i\max}} n_i(l) l dl = L. \quad (5.29)$$

Полагая, что внутри интервалов $[L_{i\min}, L_{i\max}]$ распределения длительностей ламинарных фаз $n_i(l)$ подчиняются степенному закону (5.27), то есть $n_i(l) = A_i l^{-3/2}$, и принимая во внимание условия нормировки (5.29), можно получить следующие выражения для коэффициентов нормировки A_i и средних длительностей ламинарных фаз T_i :

$$A_i = \frac{L}{2(\sqrt{L_{i\max}} - \sqrt{L_{i\min}})}, \quad T_i = \sqrt{L_{i\min} L_{i\max}}. \quad (5.30)$$

³В первом приближении можно использовать $L \approx L^*$ в связи с малой длительностью турбулентных всплесков (как для пик-волновых разрядов, так и сонных веретен) по сравнению с полной длительностью анализируемых временных рядов.

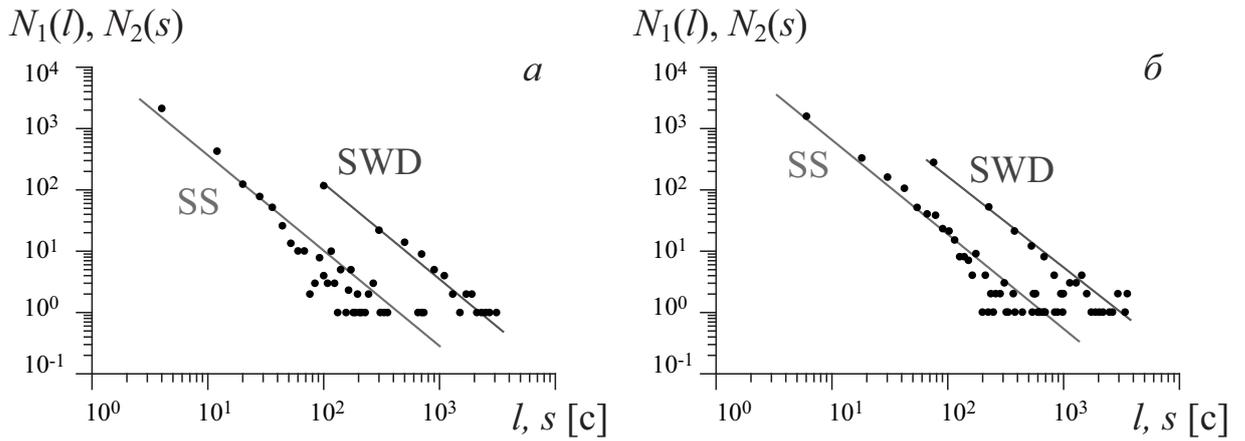


Рисунок 5.19 — Распределения длительностей ламинарных фаз для пик-волновых разрядов и сонных веретен, полученные экспериментально для двух крыс (крыса 2 (а) и крыса 6 (б)). Масштаб по обеим осям логарифмический. Сплошные линии соответствуют теоретическому закону (5.27), экспериментальные данные показаны точками

Тогда плотности вероятности для распределений длительностей ламинарных фаз $p_{1,2}(l)$, которые могут быть использованы в соотношении (5.8), примут вид

$$p_i(l) = \frac{L}{2(\sqrt{L_{i \max}} - \sqrt{L_{i \min}})} l^{-3/2}. \quad (5.31)$$

В связи с вышеупомянутыми особенностями степенных распределений, плотности вероятности $p_{1,2}(l)$, определяемые соотношением (5.31), не будут удовлетворять классическому условию нормировки

$$\int_0^{\infty} p_i(l) dl = 1, \quad (5.32)$$

так как для соотношения (5.31) интеграл $\int_0^{\infty} p_i(l) dl$ в (5.32) расходится при $x \rightarrow 0$. В то же самое время, соотношение (5.31) описывает абсолютно корректно частоту появлений ламинарных участков различной длительности. Поэтому полученные выражения для распределений вероятностей $p_{1,2}(l)$ и средних длительностей ламинарных фаз $T_{1,2}$ могут быть использованы в соотношении (5.31) с единственным ограничением, что конечное выражение для распределения длительностей ламинарных фаз в режиме “перемежаемости перемежаемостей” $p(\tau)$, определяемое соотношением (5.8), не будет удовлетворять классическому условию нормировки (5.32).

Подставляя плотности вероятности длительностей ламинарных фаз (5.31) вместо $p_{1,2}(l)$ и средние длительности, определяемые выражением (5.30), вместо $T_{1,2}$ в соотношение (5.8), получим формулу для распределения длительностей ламинарных фаз двух сосуществующих типов перемежаемости, каждый из которых является перемежаемостью типа “on-off”:

$$p(\tau) = \frac{\sqrt{L_{1\max}L_{2\max}L_{1\min}L_{2\min}}}{(\sqrt{L_{1\max}} - \sqrt{L_{1\min}})(\sqrt{L_{2\max}} - \sqrt{L_{2\min}})} \times \left(4 - 3\sqrt{\frac{\tau}{L}} + \left(\frac{\tau}{L}\right)^{3/2}\right) \tau^{-2} \quad (5.33)$$

Так как в рассматриваемых записях ЭЭГ длительности ламинарных фаз ограничены сверху значением $L_u = \min(L_{1\max}, L_{2\max})$, где $L_u \ll L$, членами $3(\tau/L)^{1/2}$ и $(\tau/L)^{3/2}$ в уравнении (5.33) можно пренебречь, и, как следствие, можно получить, что

$$p(\tau) \sim \tau^{-2}. \quad (5.34)$$

Иными словами, в рассматриваемом случае эпилептической активности головного мозга, число ламинарных фаз длительности, лежащей в диапазоне $[\tau, \tau + d\tau)$, должно быть обратно пропорционально квадрату длительности τ . Соответственно, распределение длительностей ламинарных фаз должно также подчиняться степенному закону

$$N(\tau) \sim \tau^{-2}. \quad (5.35)$$

Для подтверждения полученной теоретической закономерности (5.35) были проанализированы электроэнцефалограммы крыс линии WAG/Rij и получены распределения длительностей временных интервалов между осцилляторными паттерными (пик-волновыми разрядами и сонными веретенами), рассматриваемых в качестве ламинарных фаз поведения эпилептической активности головного мозга. Полученные распределения длительностей ламинарных фаз $N(\tau)$ на ЭЭГ двух крыс показаны на рисунке 5.20. Из рисунка видно, что в обоих случаях экспериментальные результаты находятся в хорошем соответствии с выведенным теоретическим законом (5.35). Аналогичные результаты получены для ЭЭГ других

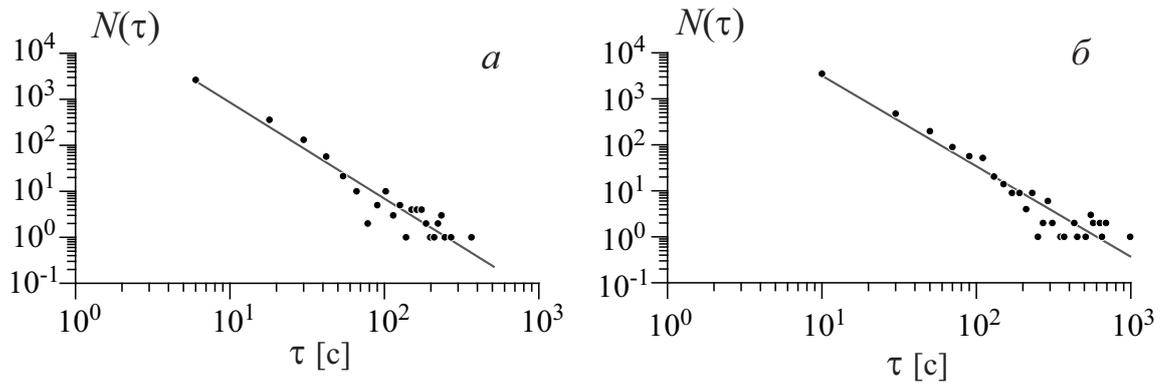


Рисунок 5.20 — Распределения временных интервалов между осцилляторными паттернами на ЭЭГ, полученные экспериментально для двух крыс (крысы 2 (а) и крысы 6 (б)). Масштаб по обеим осям логарифмический. Сплошные линии соответствуют теоретической закономерности (5.35), экспериментальные распределения показаны точками

рассмотренных животных. Полученные результаты могут служить как теоретическим, так и экспериментальным доказательством возможности одновременного существования двух различных типов перемежаемости в эпилептической активности головного мозга крыс линии WAG/Rij.

5.7.3 Перемежающееся поведение в легированном эрбием оптоволоконном лазере

Перейдем к рассмотрению физических систем и рассмотрим поведение легированного эрбием оптоволоконного лазера, находящегося под действием шума. В качестве модели такой системы выберем конечномерную модель, предложенную в [445]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{2L}{T_r} x \{r_w \alpha_0 [N(\xi_1 - \xi_2) - 1] - \alpha_{th}\} + P_{sp}, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\sigma_{12} r_w x}{\pi r_0^2} (y \xi_1 - 1) - \frac{x}{\tau} + P_{pump}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

где x — мощность лазера, $y = \frac{1}{n_0 L} \int_0^L N_2(z) dz$ — усредненная (по длине активного волокна L) населенность верхнего уровня лазерной генерации, N_2 — населенность верхнего уровня в точке z , n_0 — показатель преломления “холодной” легированной эрбием сердцевины оптоволокна,

ξ_1 и ξ_2 — параметры, определяемые соотношением между поперечными сечениями поглощения в основном состоянии σ_{12} , обратного вынужденного перехода σ_{21} и поглощения в возбужденном состоянии σ_{23} , T_r — время кругового обращения внутрирезонаторного фотона, α_0 — поглощение слабого сигнала эрбиевого волокна на длине волны лазера, α_{th} — коэффициент внутрирезонаторных потерь на границе, τ — время жизни ионов эрбия в возбужденном состоянии, r_0 — радиус сердцевины оптоволокна, w_0 — радиус основной моды оптоволокна, r_w — коэффициент, указывающий на совпадение между основной модой лазера и объемом легированной эрбием сердцевины внутри активного оптоволокна. Спонтанное излучение основной моды лазера определяется как

$$P_{sp} = y \frac{10^{-3}}{\tau T_r} \left(\frac{\lambda_g}{w_0} \right)^2 \frac{r_0^2 \alpha_0 L}{4\pi^2 \sigma_{12}}, \quad (5.37)$$

где λ_g — длина волны лазера [445]. Мощность накачки выражается как

$$P_{pump} = P_p \frac{1 - \exp[-\alpha_0 \beta L (1 - y)]}{N_0 \pi r_0^2 L}, \quad (5.38)$$

где P_p — мощность накачки на входе оптоволокна, β — безразмерный коэффициент. Параметры моделирования выбраны следующими: $L = 0.88$ м, $T_r = 8.7$ нс, $r_w = 0.308$, $\alpha_0 = 40$ м⁻¹, $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 0.4$, $\alpha_{th} = 3.92 \times 10^{-2}$, $\sigma_{12} = 2.3 \times 10^{-17}$ м², $r_0 = 2.7 \times 10^{-6}$ м, $\tau = 10^{-2}$ с, $\lambda_g = 1.65 \times 10^{-6}$ м, $w_0 = 3.5 \times 10^{-6}$ м, $\beta = 0.5$, $N_0 = 5.4 \times 10^{25}$ м⁻³, что обусловлено тем, что при выбранных значениях управляющих параметров данные численного моделирования находятся в хорошем соответствии с результатами экспериментальных исследований.

При гармонической модуляции $m_d \sin(2\pi f_d t)$ мощности накачки

$$P_p = p [1 - m_d \sin(2\pi f_d t)] \quad (5.39)$$

(где p — мощность накачки в отсутствии модуляции) в определенном диапазоне амплитуды внешнего воздействия $m_d \in (0.95, 1.0]$ при частоте $f_d = 80$ кГц легированный эрбием оптоволоконный лазер (5.36) демонстрирует сосуществование до четырех различных режимов, соответствующих периодическим орбитам A_i ($i = 1, 3, 4, 5$) с частотами $f_i = f_d/i$, где $i = 1, 3, 4$ или 5 .

Если же мощность накачки подвергается как гармонической, так и случайной модуляции (см., например, [382]), то есть

$$P_p = p[1 - m_d \sin(2\pi f_d t) + \eta G(\zeta, f_n)], \quad (5.40)$$

фазовая траектория поочередно посещает области фазового пространства, соответствующие различным режимам, демонстрируя тем самым перемежаемость или “перемежаемость перемежаемостей”. В данном случае лазер переключается между различными периодическими режимами, что отчетливо видно на рисунках 5.21,*a* и 5.23,*a*, где приведены временные реализации оптоволоконного лазера при различных значениях интенсивности шумового воздействия η . В уравнении (5.40) слагаемое $\eta G(\zeta, f_n)$ отвечает за внешнее шумовое воздействие, где функция $G(\zeta, f_n)$ задает шум с нулевым средним, переменная ζ случайно распределена в диапазоне $\zeta \in [-1, 1]$, f_n — частота отсечки фильтра нижних частот. Параметры стохастической модуляции f_n и η определяют число сосуществующих состояний и преобладание каждого из них. По аналогии с работой [382] частота отсечки выбрана равной $f_n = 30$ кГц, что позволяет пронаблюдать наиболее разнообразную динамику оптоволоконного лазера. Значения амплитуды и частоты внешнего воздействия выбраны равными $f_d = 80$ кГц и $m_d = 0.95$, соответственно.

Для определения типа “перемежаемости перемежаемостей”, реализующегося в легированном эрбием оптоволоконном лазере с модулированным параметром, необходимо получить статистические характеристики длительностей существования различных режимов. При этом, известные в настоящее время методы выделения характерных фаз поведения (см., например, раздел 4.1) оказываются непригодными для анализа перемежаемости в исследуемой системе. В рамках настоящего раздела диссертационной работы предложен метод выделения характерных режимов в легированном эрбием оптоволоконном лазере. Метод основан на непрерывном вейвлетном преобразовании (4.3) с материнским вейвлетом Морле (4.4) и представляет собой модификацию метода, описанного в разделе 4.1. Так как каждый из сосуществующих режимов периода i ($i = 1, 3, 4, 5$) характеризуется своей собственной частотой

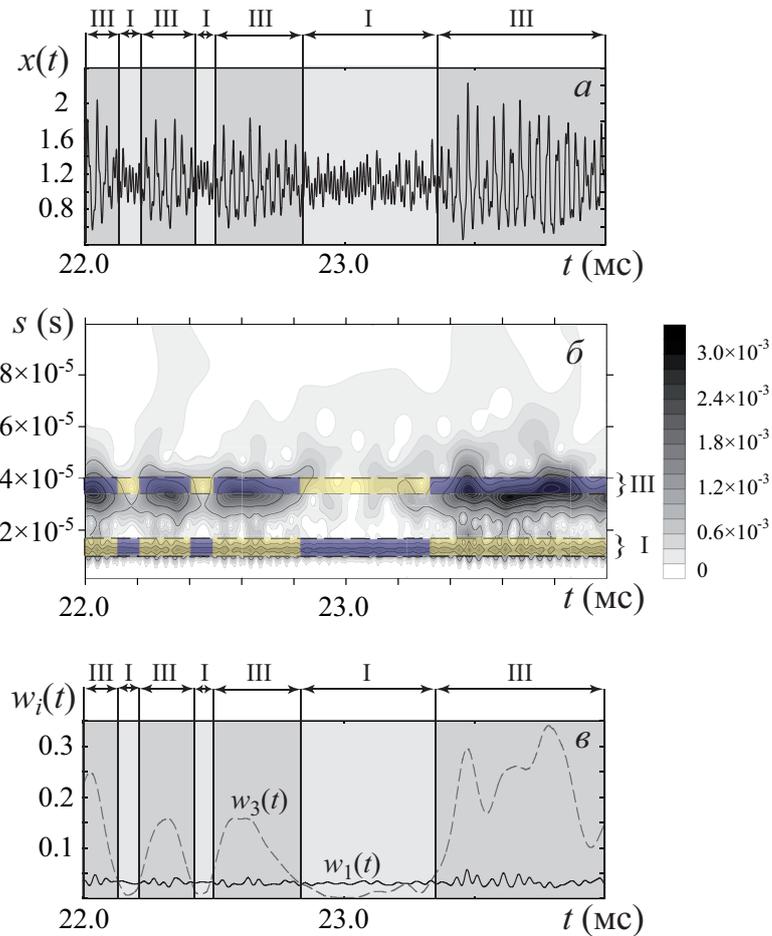


Рисунок 5.21 — Динамика легированного эрбием оптоволоконного лазера, находящегося в режиме перемежаемости. При интенсивности шума $\eta = 0.23$ сосуществуют два различных режима (период I и период 3): (а) временной ряд $x(t)$, (б) вейвлетная поверхность $|W(s, t)|$, (в) зависимость энергий вейвлетного спектра $w_{1,3}(t)$ от времени t . Римские цифры соответствуют режимам с различными периодами колебаний. Характерные временные масштабы для этих режимов $s_{1,3} \pm \Delta s$ показаны пунктирными линиями на рисунке (б)

f_i , максимальная энергия $|W(s, t_0)|^2$ вейвлетного спектра $W(s, t_0)$ будет наблюдаться на временном масштабе $s_i \approx 1/f_i$, соответствующем динамическому режиму, реализующемуся в момент времени t_0 .

Основную идею предложенного метода иллюстрирует рисунок 5.21, где приведен фрагмент временного ряда (рисунок 5.21,а) системы (5.36) при значении интенсивности шума $\eta = 0.23$. При выбранных значениях управляющих параметров в исследуемой системе реализуется только два сосуществующих динамических режима с основными частотами f_1 и f_3 .

Вейвлетная поверхность $|W(s, t)|$, показанная на рисунке 5.21,б, иллюстрирует процесс внезапных переключений между сосуществующими колебательными режимами, что можно легко проследить при помощи

анализа энергии вейвлетного спектра на определенных временных масштабах s_i , соответствующих основным частотам f_i сосуществующих режимов. Иными словами, уровень энергии вейвлетного спектра на соответствующем временном масштабе может использоваться как индикатор наблюдаемого режима. Для определения динамического режима, наблюдающегося в момент времени t_0 , необходимо сравнить энергии вейвлетного спектра $|W(s_i, t_0)|^2$ для каждого режима. Вейвлетная поверхность $|W(s, t)|$ (рисунок 5.21,б), соответствующая рассматриваемому фрагменту временного ряда, и сам временной ряд (рисунок 5.21,а) показывают временные интервалы, на которых наблюдаются динамические режимы с частотами f_1 и f_3 .

Несмотря на то, что вейвлетное преобразование нейтрализует влияние шума на основных частотах [20], позволяя использовать этот метод для фильтрации шумовых сигналов, основные частоты сосуществующих динамических режимов в легированном эрбием оптоволоконном лазере в присутствии внешнего шума по-прежнему флуктуируют (рисунок 5.21,б), что говорит о необходимости рассмотрения интегральной энергии вейвлетного спектра по относительно узкому диапазону временных масштабов $s_i - \Delta s \leq s \leq s_i + \Delta s$ (аналогично (4.8))

$$w_i(t) = \frac{1}{2\Delta s} \int_{s_i - \Delta s}^{s_i + \Delta s} \frac{|W(s, t)|^2}{s} ds. \quad (5.41)$$

Коэффициент $1/s$ позволяет напрямую сравнивать энергии сосуществующих режимов, так как известно, что для одной и той же амплитуды гармонического сигнала $A \sin(2\pi t/s)$ энергия вейвлетного спектра увеличивается квадратично с ростом величины временного масштаба s [20]. Динамический режим, наблюдающийся в момент времени t_0 , определяется по наибольшему значению энергии вейвлетного спектра $w_i(t_0)$.

На рисунке 5.21,в приведены результаты применения описанного выше подхода для выделения сосуществующих динамических режимов в системе (5.36). Нетрудно заметить, что в течение временных интервалов, отвечающих существованию динамического режима с частотой $f_1 = f_d = 80$ кГц, энергия вейвлетного спектра $w_1(t)$ превалирует над

энергией $w_3(t)$ и наоборот (рисунок 5.21,б). Заметим также, что значение $w_1(t)$ меняется с течением времени незначительно, ее величина остается практически одинаковой даже в том случае, когда в системе наблюдается режим с частотой f_3 . Эту особенность можно объяснить тем, что частота внешнего воздействия f_d существует всегда, независимо от режима, реализующегося в системе. Поэтому частота модуляции f_d накладывается на динамику системы, что отражается и на вейвлетном спектре [429]. Так как амплитуда модуляции постоянна, значение энергии $w_1(t)$, полученное для диапазона временных масштабов, соответствующего частоте f_1 (и, частоте f_d , соответственно), меняется незначительно (см. рисунок 5.21,б). Моменты времени, когда энергии вейвлетного спектра $w_1(t)$ и $w_3(t)$ совпадают друг с другом, соответствуют переключениям между сосуществующими режимами. Точнее говоря, эти переключения не являются внезапными, однако, их длительностью можно пренебречь по сравнению с продолжительностью сосуществующих режимов колебаний.

Применим предложенный метод для анализа временных рядов, содержащих несколько характерных режимов, то есть находящихся в режиме “перемежаемости перемежаемостей” (рисунки 5.22 и 5.23). Такое поведение наблюдается в исследуемой системе при значениях интенсивности шума $\eta = 0.47$ и $\eta = 0.97$.

Из временных реализаций $x(t)$ (рисунки 5.22,а и 5.23,а) видно, что в течение рассматриваемого промежутка времени в исследуемой системе сосуществуют три различных режима (периоды 1, 2, 4 на рисунке 5.22 и периоды 3, 4, 5 на рисунке 5.23). Увеличение интенсивности шума приводит к модификации формы колебаний, импульсы становятся более резкими. Внезапные колебательные фронты приводят к кратковременному росту энергии вейвлетного спектра $|W(s, t_0)|^2$ в широком диапазоне временных масштабов (рисунок 5.23,б). Как следствие, рассматриваемая энергия вейвлетного спектра внутри узкого диапазона временных масштабов, соответствующего малым временным масштабам, $w_1(t)$, начинает демонстрировать резкий рост амплитуды в моменты времени,

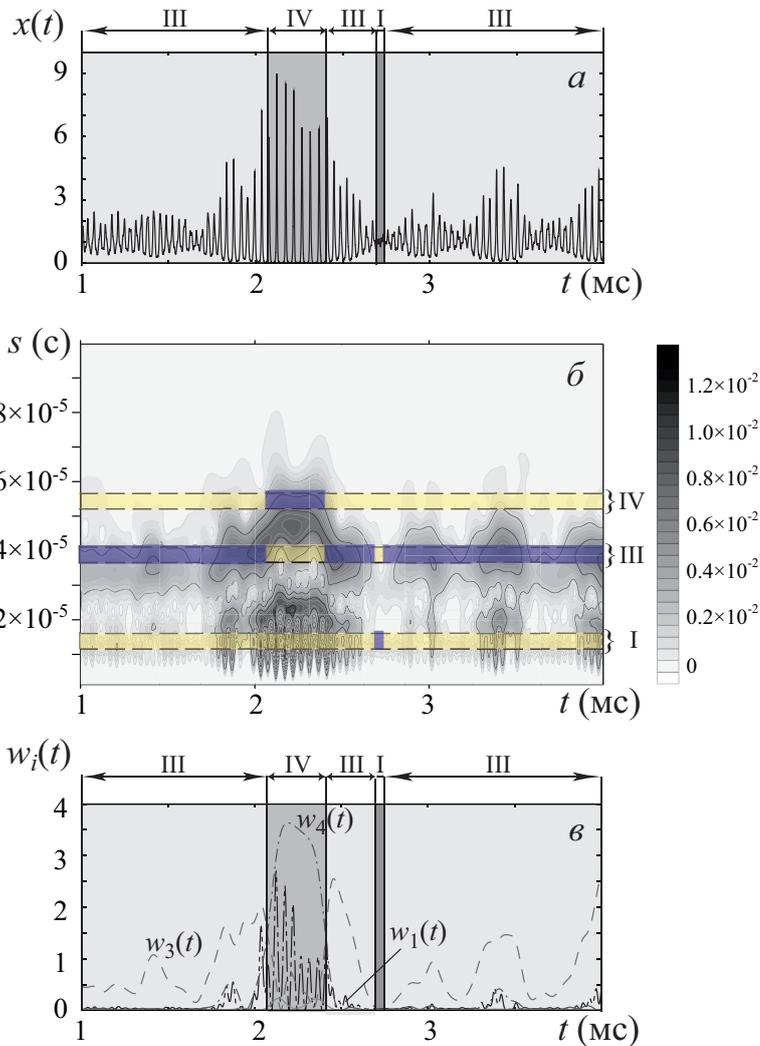


Рисунок 5.22 — Иллюстрация эффективности предложенного метода при интенсивности шума $\eta = 0.47$, когда сосуществуют три различных режима, период 1, период 3 и период 4 с частотами f_1 , f_3 и f_4 . (а) Фрагмент анализируемого временного ряда $x(t)$, (б) вейвлетная поверхность $W(s, t)$, (в) зависимости энергий вейвлетного спектра $w_{1,3,4}(t)$ от времени t

соответствующие увеличению амплитуды колебаний в системе (сравните рисунки 5.23,б и 5.23,в). Важно отметить, что несмотря на то, что во время этих всплесков энергия вейвлетного спектра $w_1(t)$ может превышать аналогичные значения энергий $w_i(t)$, соответствующих другим режимам, (например, временной интервал $5.36 \text{ мс} \leq t \leq 5.70 \text{ мс}$ на рисунке 5.23), эти события оказываются кратковременными и не соответствуют появлению динамического режима периода 1 с частотой f_1 . Поэтому, чтобы избежать ложного детектирования переключений между различными режимами, нужно исключить из рассмотрения короткие

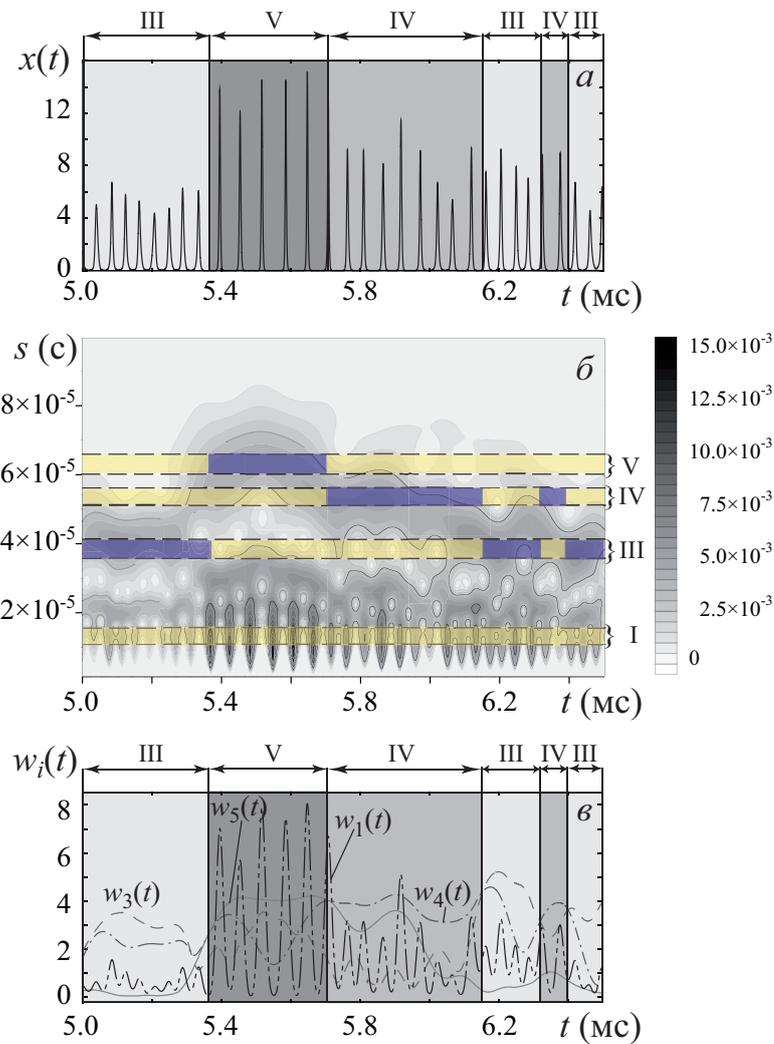


Рисунок 5.23 — Иллюстрация эффективности предложенного метода при интенсивности шума $\eta = 0.97$, когда сосуществуют три динамических режима, период 3, период 4 и период 5 с частотами f_3 , f_4 и f_5 . (а) Фрагмент анализируемого временного ряда $x(t)$, (б) вейвлетная поверхность $W(s, t)$, (в) зависимости энергий вейвлетного спектра $w_{3,4,5}(t)$ от времени t

интервалы времени, длина которых составляет один или два периода колебаний.

Таким образом, как и в случае двух колебательных режимов, представленном на рисунке 5.21, предложенный метод приводит к корректным результатам. Применим его для расчета статистических характеристик длительностей сосуществующих режимов в легированном эрбием оптоволоконном лазере при различных значениях интенсивности шумового воздействия.

Для определения доминирующего режима при фиксированных значениях интенсивности шумового воздействия произведем расчет зависимо-

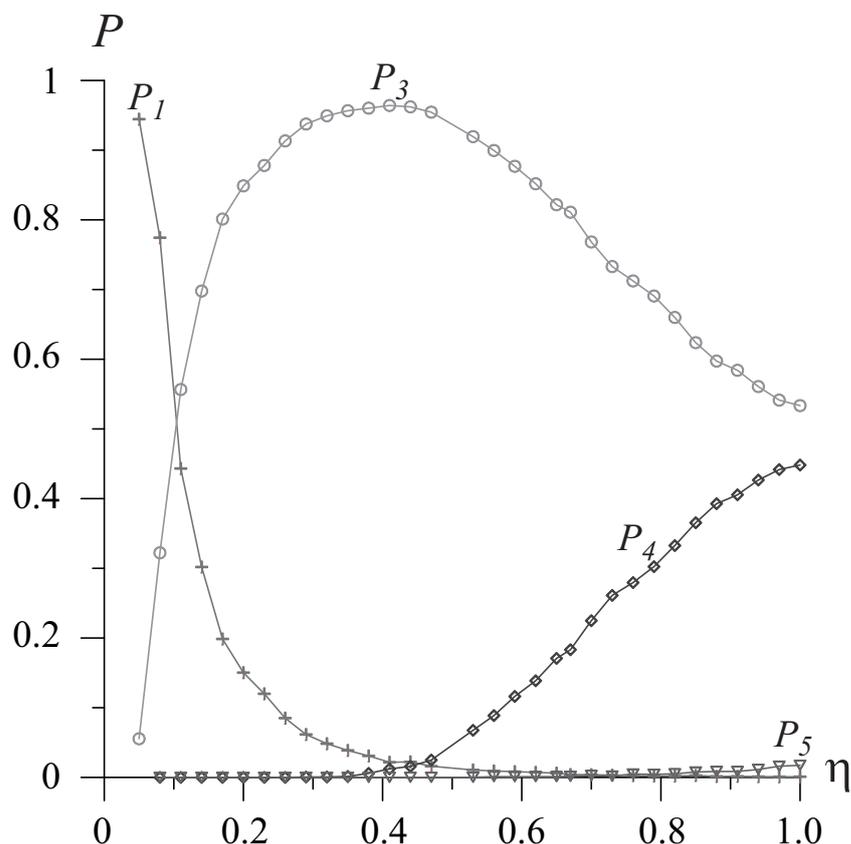


Рисунок 5.24 — Зависимость вероятности детектирования динамического режима P_i ($i = 1, 3, 4, 5$) от интенсивности шума η

сти вероятности возникновения каждого из сосуществующих динамических режимов P_i ($i = 1, 3, 4, 5$) от интенсивности шума η (рисунок 5.24). Вероятность P_i определяется как

$$P_i = \lim_{L \rightarrow +\infty} L_i/L, \quad (5.42)$$

где L_i — сумма длин всех интервалов времени, соответствующих динамическому режиму с периодом i , в анализируемом временном ряде длиной $L = L_1 + L_3 + L_4 + L_5$. Длина анализируемых временных рядов составляла $L = 1.68$ с для каждого значения интенсивности шума η .

Понятно, что при анализе данных, полученных как экспериментально, так и численно, значения P_i могут быть найдены только для временных рядов конечной длины, в то время как в уравнении (5.42) длина временного ряда L стремится к бесконечности, то есть вероятность детектирования динамического режима периода i определяется для бесконечного временного ряда. Как следствие, при экспериментальных наблюдениях и численном моделировании вероятность P_i детектирования

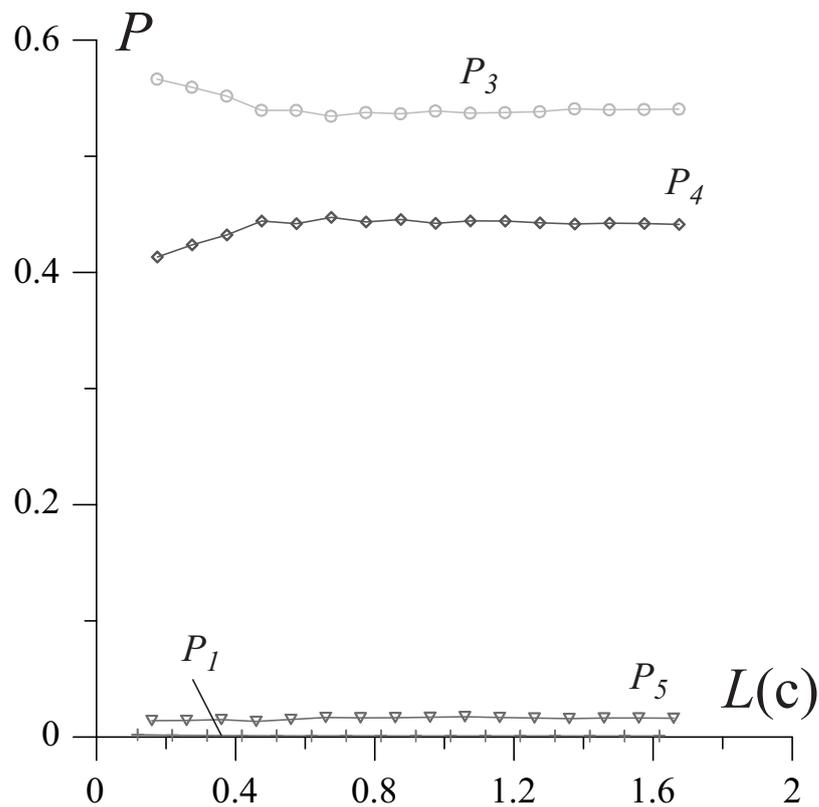


Рисунок 5.25 — Зависимость вероятности детектирования динамического режима P_i ($i = 1, 3, 4, 5$) от длины временного ряда L для каждого сосуществующего режима при интенсивности шума $\eta = 0.97$

динамического режима периода i всегда определяется с некоторой точностью δ_i , а следовательно, необходимо контролировать длину временного ряда L , чтобы убедиться, что полученные результаты являются корректными. На рисунке 5.25 приведены зависимости вероятности детектирования различных режимов, полученные при интенсивности шума $\eta = 0.97$, от длины временного ряда L . Нетрудно заметить, что при малых значениях длины ($L < 0.5$) изменение L приводит к значительным изменениям вероятности P_i , в то время как при больших значениях длины вероятность становится практически постоянной. При длине временного ряда $L = L_0 = 1.68$ с, используемой при проведении расчетов, и интенсивности шума $\eta = 0.97$ относительная ошибка $\delta_i < 1\%$, а следовательно, длина временного ряда L_0 позволяет характеризовать динамику системы количественно с хорошей степенью точности. Аналогичные оценки относительной ошибки были получены и для других значений интенсивности шума η .

Вероятность детектирования динамического режима с основной частотой f_i , показанная на рисунке 5.24, сильно зависит от интенсивности шумового воздействия η , при этом характер этой зависимости оказывается для каждого режима различным. При малых значениях интенсивности шума η наиболее типичным является режим с частотой f_1 (вероятность его детектирования оказывается выше 90%). Вторым динамический режим, который также может наблюдаться при малых значениях интенсивности шума (хотя его вероятность оказывается очень низкой), — это режим периода 3, в то время как вероятность появления режимов с основными частотами f_4 и f_5 оказывается равной нулю. При увеличении интенсивности шума η вероятность диагностирования режима с периодом 1 резко падает, а аналогичная вероятность для периода 3, наоборот, начинает расти (рисунок 5.24). Начиная со среднего значения уровня интенсивности шума, появляются два других динамических режима с основными частотами f_4 и f_5 , при этом вероятность их появления является относительно малой. Тем не менее, чем выше интенсивность шума η , тем выше вероятность наблюдения режима с периодом 4, при этом вероятность появления режима периода 5 остается малой. Интересным является тот факт, что режим периода 1, являющийся доминантным при малых значениях интенсивности шума, практически разрушается при сильном шумовом воздействии, а вероятность P_1 стремится к нулю уже при $\eta > 0.7$.

Другой важной характеристикой перемежающегося поведения является зависимость средней длительности сосуществующих режимов от управляющих параметров (в данном случае интенсивности шума η). На рисунке 5.26 приведены такие зависимости для всех сосуществующих динамических режимов в легированном эрбием оптоволоконном лазере. Так как средняя длительность однозначно связана с вероятностью детектирования наблюдаемого режима, кривые, приведенные на рисунке 5.26, подобны вероятностным зависимостям на рисунке 5.24. Короткие длительности для всех режимов, наблюдаемые при больших значе-

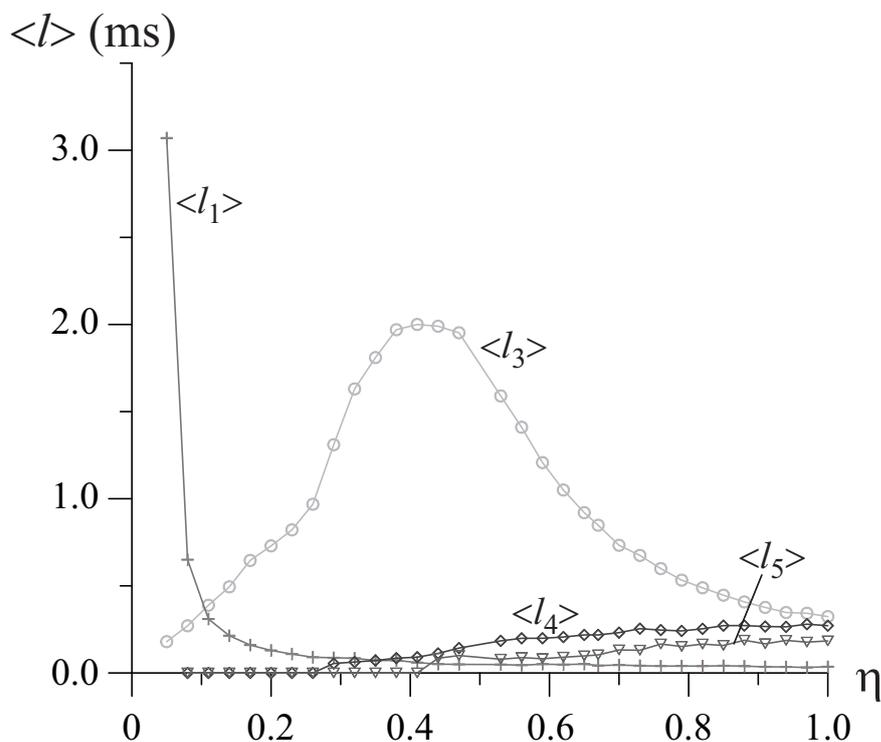


Рисунок 5.26 — Зависимости средних длительностей $\langle l \rangle$ сосуществующих режимов от интенсивности шума η

ниях интенсивности шума η , связаны с частыми переключениями между режимами, обусловленными сильным шумовым воздействием.

Одной из наиболее важных и информативных характеристик перемежающегося поведения, как отмечалось выше, является распределение длительностей каждого из сосуществующих режимов при фиксированных значениях управляющих параметров. На рисунке 5.27 приведены такие распределения для трех различных значений интенсивности шума: $\eta = 0.23$, $\eta = 0.47$ и $\eta = 0.97$. Из рисунков видно, что при увеличении интенсивности шума η распределения длительностей наблюдаемых режимов с частотами f_i ($i = 1, 3, 4, 5$) меняются достаточно сильно. Кроме того, при дальнейшем увеличении интенсивности шума число временных интервалов, соответствующих одному и тому же динамическому режиму, также меняется значительно. Это отчетливо видно при сравнении распределений для режима с периодом 1 при $\eta = 0.23$ и 0.97 на рисунке 5.27,а,в.

В то же самое время, в случае одновременного существования только двух режимов ($\eta = 0.23$, рисунок 5.27,а) распределения длительно-

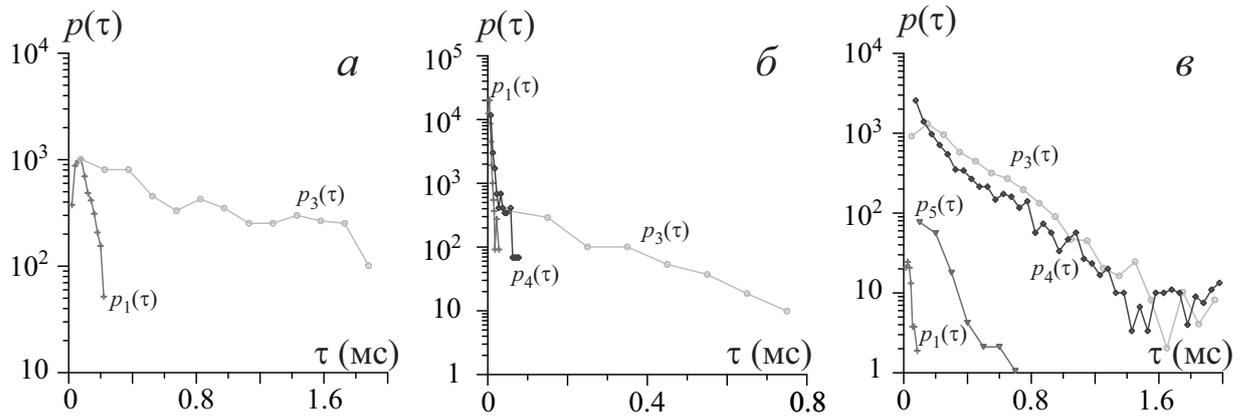


Рисунок 5.27 — Распределения вероятности длительностей режимов с частотами f_1 , f_3 , f_4 и f_5 , полученные при интенсивности шума (а) $\eta = 0.23$, (б) $\eta = 0.47$, (в) $\eta = 0.97$

стей сосуществующих режимов подчиняются экспоненциальному закону (4.65) в четком соответствии с теорией индуцированной шумом перемежаемости, предложенной в рамках главы 4 настоящей диссертационной работы (подраздел 4.5.1). Действительно, на рисунке 5.28 приведены численно полученные нормированные распределения длительностей сосуществующих режимов при двух различных значениях интенсивности шума $\eta = 0.11$ (а) и $\eta = 0.23$ (б) и их теоретические аппроксимации закономерностью (4.65). Видно хорошее соответствие аналитически и численно полученных результатов для обоих рассматриваемых режимов.

Что касается зависимостей средних длительностей сосуществующих режимов от интенсивности шума, здесь необходимо обратить внимание на тот факт, что в используемой модели легированного эрбием оптоволоконного лазера используется параметрическое шумовое воздействие (см. уравнение (5.40)) вместо аддитивного, для которого предложена теория индуцированной шумом перемежаемости. В данном случае увеличение шума оказывает сильное влияние на бассейны притяжения сосуществующих режимов [382], что эквивалентно изменению профиля потенциальной функции $U(x)$ в модели (4.44)–(4.45). Поэтому, теория индуцированной шумом перемежаемости, разработанная в главе 4, оказывается применимой для описания экспоненциального характера распределений длительностей сосуществующих режимов при фиксированных значениях управляющих параметров, но не может быть использована для опи-

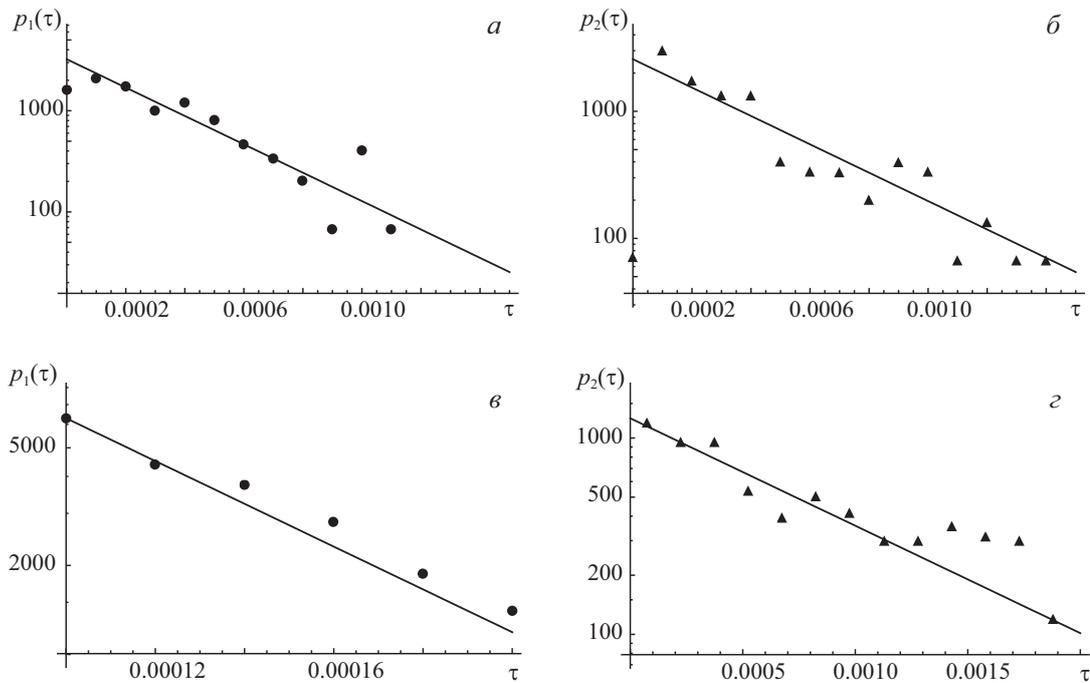


Рисунок 5.28 — Нормированные распределения длительностей $p_{1,2}(\tau)$ сосуществующих режимов $A_{1,3}$ в легированном эрбием оптоволоконном лазере (5.36) при интенсивности шума $\eta = 0.11$ (а, б) и $\eta = 0.23$ (в, г) (показаны точками) и их аналитические аппроксимации закономерностью (4.65) (сплошные линии). Параметры аппроксимации выбраны следующими: (а) $T_1 = 3.1 \times 10^{-4}$, (б) $T_2 = 3.9 \times 10^{-4}$, (в) $T_1 = 0.62 \times 10^{-4}$, (г) $T_2 = 7.94 \times 10^{-4}$

сания эволюции оптоволоконного лазера при изменении интенсивности шумового воздействия.

Таким образом, на основе полученных результатов можно сделать вывод о том, что предложенный метод выделения характерных фаз поведения по временным рядам позволяет получить статистические характеристики длительностей различных режимов поведения, сосуществующих в легированном эрбием оптоволоконном лазере, находящемся под внешним шумовым воздействием. Отчетливо видно, что статистические закономерности для различных режимов оказываются также различными, при этом они не удовлетворяют ни одной из известных закономерностей для “перемежаемости перемежаемостей”. Исключение составляет случай одновременного существования двух различных режимов, имеющий место при малых значениях интенсивности шума: распределения длительностей сосуществующих режимов в данном случае удовлетворяют экспоненциальному закону в четком соответствии с теорией индуцированной шумом перемежаемости.

5.8 Выводы по главе 5

Таким образом, в настоящей главе диссертационной работа проанализирована возможность одновременного существования нескольких различных типов перемежаемости в нелинейных системах, обнаружен принципиально новый тип поведения — “перемежаемость перемежаемостей”. Построена общая теория сосуществования двух различных типов перемежаемости. Для построения теории использовался вероятностный подход. При этом полагалось, что турбулентные всплески, обусловленные сосуществующими типами перемежаемости, не зависят друг от друга. Получена общая формула, описывающая распределение длительностей ламинарных фаз — плотность вероятности наблюдения ламинарной фазы заданной длительности, зависящая от распределений длительностей ламинарных фаз каждого из сосуществующих типов перемежаемости, рассматриваемых отдельно, и средних длительностей ламинарных фаз для этих типов перемежаемости. С использованием полученной закономерности и определения среднего, получено выражение для зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности.

Построены модели систем с непрерывным и дискретным временем, а также модели пространственно-распределенных сред, в которых при фиксированных значениях управляющих параметров одновременно могут наблюдаться два различных типа перемежающегося поведения. Система с дискретным временем сконструирована из эталонных моделей дискретных отображений — двух связанных между собой отображений окружности. Показано, что в определенном диапазоне значений управляющих параметров в исследуемой системе одновременно существуют два различных типа перемежаемости, перемежаемость типа I и перемежаемость “игольного ушка”. На основе разработанной общей теории сосуществования двух различных типов перемежаемости получены теоретические закономерности для распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра

надкритичности при данном типе “перемежаемости перемежаемостей”. Полученные закономерности сопоставлены с результатами численного моделирования исследуемой системы, получено хорошее соответствие между ними.

В качестве моделей систем с непрерывным временем выбраны однонаправленно связанные системы Ресслера и неавтономный автогенератор Ван дер Поля. Установлено, что в таких системах в случае относительно слабой расстройки вблизи границы синхронизации временных масштабов на граничных временных масштабах наблюдения возможно одновременное существование перемежаемостей “игольного ушка” (типа I с шумом) и “кольца”. Как и в случае систем с дискретным временем, теоретические закономерности для данного типа “перемежаемости перемежаемостей” конкретизированы на основе разработанной общей теории. Теоретические закономерности сопоставлены с численно полученными распределениями длительностей ламинарных фаз и зависимостями средней длительности ламинарных фаз от параметров надкритичности (параметра связи и временного масштаба). Показано, что данные численного моделирования находятся в хорошем соответствии с результатами теоретических предсказаний, что говорит о возможности использования разработанной теории для неавтономных систем, находящихся вблизи границ возникновения синхронных режимов.

Полученные результаты обобщены на случай пространственно-распределенных сред, находящихся вблизи границы синхронизации временных масштабов. На примере двух однонаправленно связанных гидродинамических моделей диодов Пирса установлено, что как и в случае систем с малым числом степеней свободы (потокосые динамические системы, дискретные отображения), в определенных диапазонах значений параметра связи и временного масштаба в исследуемой системе возможно одновременное существование перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”. Для подтверждения полученных результатов произведен расчет статистических характеристик длительностей ламинарных фаз (распределения длительностей ламинарных фаз, зависимости сред-

ней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности) при данном типе “перемежаемости перемежаемостей”, полученные результаты сопоставлены с теоретическими закономерностями. Установлено, что теория сосуществования режимов перемежаемости “игольного ушка” и “кольца”, построенная для систем с малым числом степеней свободы, для пространственно-распределенных систем нуждается в уточнении, что связано с необходимостью корректировки (выполнение экспоненциального закона в широком, но ограниченном диапазоне) аналитической закономерности для распределения длительностей ламинарных фаз в режиме перемежаемости “игольного ушка”, что было несущественно для систем с малым числом степеней свободы. На основе разработанной общей теории сосуществования двух различных типов перемежаемости в нелинейных системах получены аналитические закономерности для распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности в режиме перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” в пространственно-распределенных системах. Аналитические закономерности сопоставлены с результатами численного моделирования, получено хорошее соответствие между ними.

“Перемежаемость перемежаемостей” обнаружена также в однонаправленно связанных сосредоточенных и пространственно-распределенных системах, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации, в присутствии шума. Установлено, что шум малой интенсивности практически не оказывает влияния на характеристики перемежаемости: как и в отсутствие шума, в случае слабой расстройки между системами на границе синхронного режима имеет место перемежаемость “игольного ушка”. Увеличение интенсивности шума приводит к сдвигу порогового значения возникновения синхронного режима в сторону больших значений параметра связи, что обусловлено потерей фазовой когерентности хаотическим аттрактором ведомой системы. В результате, на границе фазовой синхронизации в закритической области управляющих параметров возникает перемежаемость “кольца”, а в докритической обла-

сти имеет место сосуществование перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” одновременно.

В диссертационной работе рассмотрены также связанные хаотические системы, находящиеся вблизи границы фазовой синхронизации, на выходе одной из которых находится дополнительный полосовой фильтр. Фактически, фильтрация оказывает то же влияние на анализируемый сигнал, что и непрерывное вейвлетное преобразование. То есть, если сигнал от анализируемой системы, находящейся вблизи границы фазовой синхронизации, а, следовательно, демонстрирующей перемежающееся поведение, подвергается предварительной фильтрации, то в этом случае существует возможность наблюдать явление “перемежаемости перемежаемостей” без рассмотрения динамики системы на различных временных масштабах. Показано, что, если взаимодействующие системы находятся в режиме перемежаемости “игольного ушка”, при фильтрации сигнала в случае значительной отстройки вырезаемой фильтром частоты относительно собственной частоты системы, на выходе системы возможно наблюдать одновременное существование двух различных типов перемежающегося поведения, перемежаемости “игольного ушка” и перемежаемости “кольца”.

Проанализирована возможность возникновения “перемежаемости перемежаемостей” в реальных физических и физиологических системах. В частности, обнаружено одновременное существование перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” при взаимодействии сердечно-сосудистой и дыхательной систем человека при рассмотрении их поведения на различных временных масштабах наблюдения, аналогично моделям потоковых и пространственно-распределенных систем. Кроме того, показано, что при развитии эпилептической активности в таламо-кортикальной сети головного мозга крыс линии WAG/Rij возможно наблюдать “перемежаемость перемежаемостей” без привлечения непрерывного вейвлетного преобразования и других способов фильтрации. Показано, что эпилептическая ЭЭГ может быть рассмотрена как временная реализация живой системы, демонстрирующей сосуществование двух типов перемежаемо-

сти одновременно. При этом, участки фоновой активности соответствуют ламинарным фазам поведения, а пик-волновые разряды и сонные веретена представляют собой турбулентные фазы, возникновение которых обусловлено различными причинами. В ходе проведенных исследований установлено, что данный тип “перемежаемости перемежаемостей” следует классифицировать как перемежаемость перемежаемостей “on-off + on-off”. Общая теория сосуществования двух различных типов перемежаемости конкретизирована на данный случай. Показано, что распределение длительностей ламинарных фаз в этом случае подчиняется степенному закону с показателем степени “-2”. Получены численные распределения длительностей ламинарных фаз (интервалов времени между пик-волновыми разрядами или сонными веретенами) для электроэнцефалограмм пяти лабораторных животных. Во всех случаях получено хорошее соответствие численно полученных данных результатам теоретических предсказаний.

В качестве примера физической системы рассмотрен легированный эрбием оптоволоконный лазер, в котором наличие шума приводит к переключениям между различными периодическими режимами. Показано, что в такой системе возможно одновременное существование до четырех характерных режимов, то есть, также имеет место “перемежаемость перемежаемостей”. Для определения длительностей наблюдаемых режимов поведения разработан метод выделения характерных фаз, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании. Показано, что данный метод позволяет получить разумную статистику длительностей характерных фаз поведения при соответствующей длине анализируемого временного ряда. Полученные статистические характеристики длительностей различных режимов в общем случае не соответствуют ни одному из известных типов “перемежаемости перемежаемостей”, что требует дальнейшей проработки теории “перемежаемости перемежаемостей” в мультистабильных системах. Для случая одновременного существования двух различных режимов в четком соответствии с теорией инду-

цированной шумом перемежаемости распределения длительностей этих режимов удовлетворяют экспоненциальным законам.

Заключение

В настоящей диссертационной работе решена крупная научная задача в области радиофизики, связанная с изучением различных типов хаотической синхронизации и перемежающегося поведения, имеющего место на их границах, в неавтономных и связанных системах с малым числом степеней свободы, пространственно-распределенных средах и сетях связанных нелинейных элементов, и разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение. Особое внимание уделено режиму обобщенной синхронизации. Получены следующие основные результаты:

1. Исследовано влияние шума на установление обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных хаотических системах с диссипативным типом связи. Показано теоретически, численно и экспериментально, что если мощность шума оказывается сопоставимой с мощностью сигнала ведущей системы, независимо от типа системы и характера распределения случайной величины шум практически не оказывает влияния на порог возникновения синхронного режима. Причины устойчивости режима обобщенной синхронизации по отношению к шумам объяснены при помощи метода модифицированной системы. Установлено, что при дальнейшем увеличении интенсивности шума поведение взаимодействующих систем целиком и полностью определяется их свойствами. Если эти системы характеризуются неограниченными бассейнами притяжения хаотического аттрактора, порог возникновения синхронного режима начинает меняться (либо монотонно снижаться, либо монотонно расти), достигая при очень больших значениях интенсивности шума величины,

не зависящей от параметров ведущей системы. В данном случае режим обобщенной синхронизации переходит в режим синхронизации, индуцированной шумом. В случае ограниченного бассейна притяжения взаимодействующих систем при достаточно больших значениях интенсивности шума синхронный режим разрушается.

2. Показано, что режим обобщенной синхронизации в присутствии шума может найти применение при скрытой передаче информации. Предложен способ скрытой передачи данных на основе этого явления. Установлено, что этот способ позволяет преодолеть проблему конфиденциальности передачи информации, а также обладает высокой устойчивостью к шумам и позволяет избавиться от требования идентичности генераторов на различных сторонах канала связи. Проведено сопоставление предложенного способа с известными аналогами, выявлены его принципиальные достоинства, обсуждены недостатки. Показано, что возможно повышение конфиденциальности предложенного способа скрытой передачи информации путем изменения характеристик шумового сигнала заведомо ложным информационным сообщением, предложен способ скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации с изменяющимися характеристиками генератора шума.
3. Обнаружен режим обобщенной синхронизации в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на периодическую систему. Показано, что пороговое значение возникновения синхронного режима в данном случае оказывается несколько ниже, чем в случае взаимодействия двух однонаправленно связанных хаотических систем, а устойчивость этого режима по отношению к шумам, наоборот, повышается. Установлено, что этот режим также может найти применение для скрытой передачи информации, позволяя преодолеть один из существенных недостатков, свойственных известным способам и устройствам аналогичного назначения, — нестабильность работы при неидентичности управляющих параметров взаимодействующих систем.

4. Предложен способ передачи информации на основе обобщенной синхронизации в присутствии шума в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на периодическую систему, позволяющий преодолеть сразу два недостатка, свойственных известным способам скрытой передачи информации. Этот способ позволяет избавиться от проблемы нестабильности работы при неидентичности управляющих параметров принимающего устройства, а также повысить конфиденциальность и качество передачи информации.
5. Установлено, что режимы обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, могут наблюдаться также в бинарных системах связи. При этом, методы диагностики и механизмы возникновения синхронных режимов оказываются теми же, что и в случае классических режимов обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом. Обнаружено, что режим бинарной обобщенной синхронизации обладает относительно высокой устойчивостью по отношению к шумам, а режим бинарной синхронизации, индуцированной шумом, может быть рассмотрен как частное проявление этого режима, когда вместо детерминированного бинарного сигнала с ведущей системы ведомая система подвергается внешнему шумовому воздействию. Сделано предположение о том, что режим бинарной обобщенной синхронизации, в том числе в присутствии внешних шумов, может найти практическое применение в цифровых системах связи для обеспечения скрытой передачи информации.
6. Наряду с системами с однонаправленным типом связи, режим обобщенной синхронизации может наблюдаться как в двух взаимно связанных системах, так и сетях связанных нелинейных элементов. Разработана концепция обобщенной синхронизации в таких системах, выявлены механизмы возникновения синхронного режима в данном случае. Установлено, что традиционная концепция обобщенной синхронизации однонаправленно связанных хаотических систем является частным случаем разработанной концепции.

Показано, что диагностика синхронного режима в связанных хаотических системах может осуществляться по моменту перехода второго показателя Ляпунова в область отрицательных значений, а также при помощи метода ближайших соседей, однако, метод вспомогательной системы для систем с взаимным типом связи приводит к некорректным результатам. Разработанная теория справедлива как для систем с малым числом степеней свободы, так и пространственно-распределенных сред, находящихся в режиме пространственно-временного хаоса, характеризующихся одним положительным показателем Ляпунова.

7. Разработан метод расчета спектра пространственных показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем, описываемых уравнениями в частных производных. Эффективность метода проверена на автономных системах, находящихся в режиме пространственно-распределенного хаоса. Предложенный метод применен для диагностики обобщенной синхронизации в двух взаимно связанных диодах Пирса. Показано, что результаты его применения находятся в хорошем соответствии с результатами метода ближайших соседей, адаптированного также на случай пространственно-распределенных систем.
8. Показано, что традиционная концепция режима обобщенной синхронизации, в том числе ее обобщение на случай систем с взаимным типом связи и сложных сетей, нуждается в корректировке и уточнении, так как состояния взаимодействующих систем, находящихся в этом режиме, оказываются связанными между собой при помощи функционала, а не функционального соотношения, то есть предыстория состояний систем должна быть принята во внимание. Установлено, что введенная корректировка не затрагивает большинство результатов, полученных ранее в области исследования обобщенной синхронизации, и не влияет на критерии диагностики синхронного режима: метод расчета спектра показателей Ляпунова и метод вспомогательной системы (для однонаправленно свя-

занных систем) оказываются по-прежнему справедливыми. Однако, указанная корректировка ведет к модификации метода ближайших соседей: “подходящими” оказываются не все состояния, являющиеся близкими к опорному в заданный момент времени, а только те состояния, которые будут оставаться близкими на всей длине предыстории. Вместо метода ближайших соседей предложен метод фазовых трубок, учитывающий все вышеприведенные особенности. Метод апробирован на системах с малым числом степеней свободы (как с непрерывным, так и дискретным временем) и обобщен на пространственно-распределенные среды и сети связанных нелинейных элементов. Для сложных сетей, состоящих из различного числа элементов, метод фазовых трубок применен для выявления механизмов возникновения обобщенной синхронизации в сложных сетях. Показано, что по аналогии с двумя однонаправленно и взаимно связанными системами переход к синхронному режиму осуществляется через перемежаемость.

9. Исследовано перемежающееся поведение на границах различных типов хаотической синхронизации. Установлено, что по аналогии с режимами полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием и обобщенной синхронизации, на границе синхронизации, индуцированной шумом, имеет место перемежаемость типа “on-off”. На границе фазовой синхронизации в случае относительно слабых значений расстройки взаимодействующих систем, как известно, имеет место перемежаемость “игольного ушка”. Установлено, что этот режим и режим перемежаемости типа I в присутствии шума, наблюдающийся в закритической области значений управляющих параметров периодических систем, подверженных внешнему шумовому воздействию, являются проявлением одного и того же типа перемежающегося поведения: в обоих случаях имеет место экспоненциальный характер распределения длительностей ламинарных фаз, выражения для зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности могут быть сведены друг к другу, и

для обоих типов перемежающегося поведения наблюдается одинаковое поведение верхней границы синхронного режима. Кроме того, показано, что в режиме синхронизации временных масштабов на граничных временных масштабах имеет место перемежаемость “кольца”.

10. Отдельно рассмотрен вопрос о характеристиках перемежающейся обобщенной синхронизации, имеющей место во взаимно связанных хаотических системах с бистабильным типом аттрактора (на примере двух взаимно связанных осцилляторов Лоренца). Показано, что распределения длительностей ламинарных фаз и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности (параметра связи) в данном случае подчиняются экспоненциальным законам, что не характерно ни для одного из известных типов перемежаемости. Установлено, что аналогичные закономерности имеют место в режиме перемежаемости, индуцированной шумом. Построена теория индуцированной шумом перемежаемости в бистабильных системах, полученные результаты подтверждены путем численного моделирования.
11. Рассмотрен вопрос об определении степени синхронности режимов фазовой синхронизации и перемежающейся фазовой синхронизации, основанном на оценке величины условного нулевого показателя Ляпунова в закритической области значений управляющих параметров. Предложен метод оценки величины условного нулевого показателя Ляпунова по временному ряду и проведена его апробация на модельных системах с непрерывным и дискретным временем, допускающих расчет показателей Ляпунова при помощи классических методов и алгоритмов. Метод применен для оценки степени синхронности режима, устанавливающегося между различными областями головного мозга крысы линии WAG/Rij. Установлено, что различные области головного мозга характеризуются различной степенью синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации.

12. Обнаружен новый тип поведения нелинейных систем, при котором наблюдается одновременное существование двух различных типов перемежаемости, названный “перемежаемостью перемежаемостей”. Построена общая теория “перемежаемости перемежаемостей”, получены аналитические выражения для распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. Построены модели сосредоточенных и пространственно-распределенных систем, способных при фиксированных значениях управляющих параметров одновременно демонстрировать два различных типа перемежающегося поведения. Для системы с дискретным временем обнаружено одновременное существование режимов перемежаемости типа I и “игольного ушка”, для систем с непрерывным временем и пространственно-распределенных сред — сосуществование перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”. Во всех случаях численно полученные статистические характеристики длительностей ламинарных фаз находятся в хорошем соответствии с теоретическими закономерностями, конкретизированными для типов перемежаемости, наблюдающихся одновременно.
13. “Перемежаемость перемежаемостей” обнаружена также в однонаправленно связанных хаотических системах, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации, в том случае, если на одну из них (ведомую) оказывается дополнительное шумовое воздействие или на выходе этой системы находится дополнительный полосовой фильтр. Показано, что при достаточно больших значениях интенсивности шума или при определенном выборе частоты отсечки полосового фильтра вблизи границы фазовой синхронизации наблюдается одновременное существование режимов перемежаемости “игольного ушка” и “кольца”. Численно полученные характеристики длительностей ламинарных фаз в таких случаях также находятся в хорошем соответствии с результатами теоретических предсказаний.

14. Обнаружена “перемежаемость перемежаемостей” в реальных физиологических и физических системах. Показано, что при взаимодействии сердечно-сосудистой и дыхательной систем человека возможно наблюдать одновременное существование режимов перемежаемости “игольного ушка” и “кольца” при рассмотрении динамики на различных временных масштабах наблюдения. При развитии эпилептической активности в таламо-кортикальной сети головного мозга крыс линии WAG/Rij наблюдается перемежаемость перемежаемостей типа “on-off + on-off”, характеризующаяся степенным распределением длительностей ламинарных фаз с показателем степени “-2”. Обнаружено одновременное существование до четырех характерных колебательных режимов в легированном эрбием оптоволоконном лазере с модулированным параметром, находящемся под действием шума. Для определения длительностей характерных режимов поведения разработан метод выделения характерных фаз, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании. Установлено, что статистические характеристики длительностей сосуществующих колебательных режимов в общем случае не соответствуют ни одному из известных типов “перемежаемости перемежаемостей”, а для одновременного существования двух режимов удовлетворяют экспоненциальным законам в четком соответствии с теорией индуцированной шумом перемежаемости.

Благодарности

В завершение настоящей диссертационной работы хочу выразить искреннюю благодарность своему научному консультанту д.ф.-м.н., профессору Короновскому Алексею Александровичу за многолетнюю плодотворную работу и всестороннюю поддержку. Не могу не поблагодарить коллег по кафедре физики открытых систем, факультету нелинейных процессов и Саратовскому госуниверситету в целом чл.-корр. РАН, профессора Трубецкого Дмитрия Ивановича, д.ф.-м.н., профессора Храмова Александра Евгеньевича, д.ф.-м.н., профессора Анищенко Вадима Семеновича, д.ф.-м.н., профессора Павлова Алексея Николаевича, д.ф.-м.н. Пономаренко Владимира Ивановича, д.ф.-м.н., профессора Прохорова Михаила Дмитриевича за интерес и поддержку настоящей работы, а также конструктивные обсуждения, критику и идеи, которые помогли улучшить диссертацию в процессе ее подготовки. Особую признательность выражаю своим коллегам по научной группе к.ф.-м.н. Журавлеву Максиму Олеговичу, к.ф.-м.н. Куровской Марии Константиновне, к.ф.-м.н. Овчинникову Алексею Александровичу, без помощи которых ряд научных результатов не был бы получен. Отдельно хочу поблагодарить профессоров Ж. ван Люжетаалара и А.Н. Писарчика за предоставленные экспериментальные сигналы нейрофизиологической и физической природы, а также всех товарищей и коллег по работе за помощь и поддержку на различных этапах выполнения данной работы.

Список литературы

- [1] И. И. Блехман, Синхронизация в природе и технике, М.: Наука, 1981.
- [2] Ю. И. Кузнецов, И. И. Мигулин, И. И. Минакова, Б. А. Сильнов, Синхронизация хаотических колебаний, Доклады Академии Наук СССР 275 (6) (1984) 1388.
- [3] В. С. Афраймович, Н. Н. Веричев, М. И. Рабинович, Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах, Изв. вузов. Радиофизика XXIX (9) (1986) 1050.
- [4] E. Mosekilde, Y. Maistrenko, D. E. Postnov, Chaotic synchronization, applications to living systems. Series A, Vol. 42, World Scientific, Singapore, 2002.
- [5] С. М. Сухман, А. В. Бернов, Синхронизация в телекоммуникационных системах. Анализ инженерных решений, Эко-Трендз, 2002.
- [6] В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, и др., Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах, М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [7] А. С. Пиковский, М. Г. Розенблюм, Ю. Куртс, Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление, М.: Техносфера, 2003.
- [8] J. M. Gonzalez-Miranda, Synchronization and Control of Chaos, World Scientific, 2004.
- [9] V. S. Anishchenko, V. V. Astakhov, A. B. Neiman, T. E. Vadivasova, L. Schimansky-Geier, Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic

- Systems. Tutorial and Modern Development., 2nd Edition, Springer, 2007.
- [10] A. G. Balanov, N. B. Janson, D. E. Postnov, O. V. Sosnovtseva, Synchronization: from simple to complex, Springer, 2009.
- [11] В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций., Издательский Дом "Интеллект 2009.
- [12] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров, А. Е. Храмов, Синхронизация хаоса: фундаментальные подходы и практические приложения, Саратов: Издательство Саратовского университета, 2015.
- [13] L. Glass, Synchronization and rhythmic processes in physiology, Nature (London) 410 (2001) 277–284.
- [14] А. Е. Храмов, А. А. Koronovskii, V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov, Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform, Phys. Rev. E 75 (5) (2007) 056207.
- [15] Ю. П. Блиох, С. В. Гришин, Б. С. Дмитриев, Е. Н. Егоров, Ю. Д. Жарков, Ю. А. Калинин, А. А. Короновский, А. А. Кураев, М. А. Малюгина, А. Б. Маненков, И. А. Молотков, О. И. Москаленко, Г. С. Нусинович, П. В. Попов, И. С. Ремпен, А. В. Стародубов, Д. И. Трубецков, Р. А. Филатов, А. Е. Филатова, А. Е. Храмов, Ю. П. Шараевский, Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. Т. 2. Нестационарные и хаотические процессы, М.: Физматлит, 2009.
- [16] A. Koseska, E. Volkov, J. Kurths, Parameter mismatches and oscillation death in coupled oscillators, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 20 (2) (2010) 023132.
- [17] W. Liu, E. Volkov, J. Xiao, W. Zou, M. Zhan, J. Yang, Inhomogeneous stationary and oscillatory regimes in coupled chaotic

- oscillators, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 22 (3) (2012) 033144.
- [18] А. А. Короновский, В. А. Макаров, Е. Ю. Ситникова, А. Н. Павлов, А. Е. Храмов, Вейвлеты в нейродинамике и нейрофизиологии, М.: Физматлит, 2013.
- [19] V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov, A. S. Karavaev, A. R. Kiselev, V. I. Gridnev, B. P. Bezruchko, Synchronization of low-frequency oscillations in the cardiovascular system: Application to medical diagnostics and treatment, *Eur. Phys. J. Special Topics* 222 (2013) 2687–2696.
- [20] А. Е. Храмов, А. А. Короновский, В. А. Макаров, А. Н. Павлов, Е. Ситникова, *Wavelets in Neuroscience*, Springer Series in Synergetics, Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2015.
- [21] U. Parlitz, L. O. Chua, L. Kocarev, K. S. Halle, A. Shang, Transmission of digital signal by chaotic synchronization, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 2 (4) (1992) 973–977.
- [22] M. K. Cuomo, A. V. Oppenheim, S. H. Strogatz, Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with application to communications, *IEEE Trans. Circuits and Syst.* 40 (10) (1993) 626.
- [23] L. Kocarev, U. Parlitz, General approach for chaotic synchronization with application to communication, *Phys. Rev. Lett.* 74 (25) (1995) 5028–5031.
- [24] J. H. Peng, E. J. Ding, M. Ding, W. Yang, Synchronizing hyperchaos with a scalar transmitted signal, *Phys. Rev. Lett.* 76 (6) (1996) 904–907.
- [25] V. S. Anishchenko, A. N. Pavlov, Global reconstruction in application to multichannel communication, *Phys. Rev. E* 57 (1998) 2455–2457.

- [26] В. С. Анищенко, А. Н. Павлов, Н. Б. Янсон, Реконструкция динамических систем в приложении к решению задачи защиты информации, *Журнал Технической Физики* 68 (12) (1998) 1–8.
- [27] M. C. Eguia, M. I. Rabinovich, H. D. I. Abarbanel, Information transmission and recovery in neural communications channels, *Phys. Rev. E* 62 (5) (2000) 7111–7122.
- [28] I. Fischer, Y. Liu, P. Davis, Synchronization of chaotic semiconductor laser dynamics on subnanosecond time scales and its potential for chaotic communication, *Phys. Rev. A* 62 (2000) 011801(R).
- [29] N. F. Rulkov, M. A. Vorontsov, L. Illing, Chaotic free-space laser communication over a turbulent channel, *Phys. Rev. Lett.* 89 (27) (2002) 277905.
- [30] А. С. Дмитриев, А. И. Панас, *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи*, М.: Физматлит, 2002.
- [31] Z. L. Yuan, A. J. Shields, Comment on secure communication using mesoscopic coherent states, *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 048901.
- [32] Q. S. Li, Y. Liu, Enhancement and sustainment of internal stochastic resonance in unidirectional coupled neural system, *Phys. Rev. E* 73 (2006) 016218.
- [33] A. L. Fradkov, B. Andrievsky, R. J. Evans, Chaotic observer-based synchronization under information constraints, *Phys. Rev. E* 73 (2006) 066209.
- [34] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos, with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, New York: Addison-Wesley, 1994.
- [35] R. C. Elson, et al., Synchronous behavior of two coupled biological neurons, *Phys. Rev. Lett.* 81 (25) (1998) 5692.

- [36] P. S. Landa, A. Rabinovitch, Exhibition of intrinsic properties of certain systems in response to external disturbances, *Phys. Rev. E* 61 (2) (2000) 1829–1838.
- [37] R. Porcher, G. Thomas, Estimating lyapunov exponents in biomedical time series, *Phys. Rev. E* 64 (1) (2001) 010902(R).
- [38] A. N. Pavlov, O. V. Sosnovtseva, A. R. Ziganshin, N. H. Holstein-Rathlou, E. Mosekilde, Multiscality in the dynamics of coupled chaotic systems, *Physica A* 316 (2002) 233–249.
- [39] O. V. Sosnovtseva, A. N. Pavlov, E. Mosekilde, N. H. Holstein-Rathlou, Bimodal oscillations in nephron autoregulation, *Phys. Rev. E* 66 (6) (2002) 061909.
- [40] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, Synchronization approach to analysis of biological systems, *Fluctuation and Noise Letters* 4 (1) (2004) L53–L62.
- [41] Д. Э. Постнов, С. К. Хан, Механизм противофазной синхронизации в моделях нейронов, *Письма в ЖТФ* 25 (4) (1999) 11–18.
- [42] V. S. Anishchenko, A. G. Balanov, N. B. Janson, N. B. Igosheva, G. V. Bordyugov, Entrainment between heart rate and weak nonlinear forcing, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 10 (10) (2000) 2339–2348.
- [43] M. D. Prokhorov, V. I. Ponomarenko, V. I. Gridnev, M. B. Bodrov, A. B. Bespyatov, Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system, *Phys. Rev. E* 68 (2003) 041913.
- [44] N. F. Rulkov, Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 041922.
- [45] O. V. Sosnovtseva, A. N. Pavlov, E. Mosekilde, N. H. Holstein-Rathlou, Synchronization phenomena in multimode dynamics of coupled nephrons, *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика* 11 (3) (2003) 133–147.

- [46] O. V. Sosnovtseva, A. N. Pavlov, E. Mosekilde, N. H. Holstein-Rathlou, D. J. Marsh, Double-wavelet approach to study frequency and amplitude modulation in renal autoregulation, *Phys. Rev. E* 70 (031915).
- [47] O. V. Sosnovtseva, A. N. Pavlov, E. Mosekilde, N. H. Holstein-Rathlou, D. J. Marsh, Double-wavelet approach to studying the modulation properties of nonstationary multimode dynamics, *Physiological Measurement* 26 (2005) 351–362.
- [48] O. V. Sosnovtseva, A. N. Pavlov, N. A. Brazhe, A. R. Brazhe, L. A. Erokhova, G. V. Maksimov, E. Mosekilde, Interference microscopy under double-wavelet analysis: A new tool to studying cell dynamics, *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 218103.
- [49] O. V. Sosnovtseva, A. N. Pavlov, E. Mosekilde, K. P. Yip, N. H. Holstein-Rathlou, D. J. Marsh, Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats, *American Journal of Physiology (Renal Physiology)* 293 (2007) F1545–F1555.
- [50] P. Parmananda, Generalized synchronization of spatiotemporal chemical chaos, *Phys. Rev. E* 56 (1997) 1595–1598.
- [51] I. Z. Kiss, J. L. Hudson, Phase synchronization and suppression of chaos through intermittency in forcing of an electrochemical oscillator, *Phys. Rev. E* 64 (4) (2001) 046215.
- [52] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, Synchronization: from pendulum clocks to chaotic lasers and chemical oscillators, *Contemporary Physics* 44 (5) (2003) 401–416.
- [53] I. Z. Kiss, J. L. Hudson, J. Escalona, P. Parmananda, Noise-aided synchronization of coupled chaotic electrochemical oscillators, *Phys. Rev. E* 70 (2) (2004) 026210.

- [54] M. Yoshioka, Cluster synchronization in an ensemble of neurons interacting through chemical synapses, *Phys. Rev. E* 71 (2005) 061914.
- [55] W. L. Ditto, S. N. Rauseo, M. L. Spano, Experimental control of chaos, *Phys. Rev. Lett.* 65 (26) (1990) 3211–3214.
- [56] R. Meucci, W. Gadomski, M. Ciofini, F. T. Arecchi, Experimental control of chaos by means of weak parametric perturbations, *Phys. Rev. E* 49 (4) (1994) R2528–R2531.
- [57] A. Kittel, J. Parisi, K. Pyragas, Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time, *Phys. Lett. A* 198 (1995) 433–436.
- [58] В. Д. Шалфеев, Г. В. Осипов, А. К. Козлов, А. Р. Волковский, Хаотические колебания — генерация, синхронизация, управление, *Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники* (10) (1997) 27–49.
- [59] S. Boccaletti, C. Grebogi, Y. C. Lai, H. Mancini, D. Maza, The control of chaos: theory and applications, *Physics Reports* 329 (2000) 103–197.
- [60] C. M. Ticos, E. Rosa, W. B. Pardo, J. A. Walkenstein, M. Monti, Experimental real-time phase synchronization of a paced chaotic plasma discharge, *Phys. Rev. Lett.* 85 (14) (2000) 2929.
- [61] E. Rosa, W. B. Pardo, C. M. Ticos, J. A. Walkenstein, M. Monti, Phase synchronization of chaos in a plasma discharge tube, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 10 (11) (2000) 2551–2563.
- [62] Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов, О синхронизации хаотических автоколебаний в распределённой системе “винтовой электронный поток — встречная электромагнитная волна”, *Радиотехника и электроника* 48 (1) (2003) 116–124.
- [63] Д. И. Трубецков, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Синхронизация распределённых автоколебательных систем электронно-

волновой природы с обратной волной, Изв. вузов. Радиофизика XLVII (5–6) (2004) 343–372.

- [64] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, P. V. Popov, I. S. Rempen, Chaotic synchronization of coupled electron-wave systems with backward waves, *Chaos* 15 (1) (2005) 013705.
- [65] R. A. Filatov, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, Chaotic synchronization in coupled spatially extended beam-plasma systems, *Phys. Lett. A* 358 (2006) 301–308.
- [66] B. S. Dmitriev, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, A. V. Starodubov, D. I. Trubetskov, Y. D. Zharkov, First experimental observation of generalized synchronization phenomena in microwave oscillators, *Physical Review Letters* 102 (7) (2009) 074101.
- [67] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, H. D. I. Abarbanel, Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems, *Phys. Rev. E* 51 (2) (1995) 980–994.
- [68] N. F. Rulkov, Images of synchronized chaos: experiments with circuits, *Chaos* 6 (1996) 262–279.
- [69] H. D. I. Abarbanel, N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach, *Phys. Rev. E* 53 (5) (1996) 4528–4535.
- [70] K. Pyragas, Weak and strong synchronization of chaos, *Phys. Rev. E* 54 (5) (1996) R4508–R4511.
- [71] K. Pyragas, Conditional Lyapunov exponents from time series, *Phys. Rev. E* 56 (5) (1997) 5183–5188.
- [72] K. Pyragas, Properties of generalized synchronization of chaos, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* IMI (3) (1998) 101–129.
- [73] U. Parlitz, L. Junge, W. Lauterborn, L. Kocarev, Experimental observation of phase synchronization, *Phys. Rev. E* 54 (2) (1996) 2115–2117.

- [74] L. Kocarev, U. Parlitz, Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems, *Phys. Rev. Lett.* 76 (11) (1996) 1816–1819.
- [75] H. Suetani, Y. Iba, K. Aihara, Detecting generalized synchronization between chaotic signals: a kernel-based approach, *Journal of Physics A: Mathematical and General* 39 (2006) 10723–10742.
- [76] W. K. Wong, B. Zhen, J. Xu, Z. Wang, An analytic criterion for generalized synchronization in unidirectionally coupled systems based on the auxiliary system approach, *Chaos* 22 (3) (2012) 033146.
- [77] А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Обобщенная синхронизация хаотических осцилляторов как частный случай синхронизации временных масштабов, *Письма в ЖТФ* 30 (23) (2004) 54–61.
- [78] А. Е. Храмов, А. А. Koronovskii, Generalized synchronization: a modified system approach, *Phys. Rev. E* 71 (6) (2005) 067201.
- [79] А. Е. Храмов, А. А. Koronovskii, P. V. Popov, Generalized synchronization in coupled Ginzburg–Landau equations and mechanisms of its arising, *Phys. Rev. E* 72 (3) (2005) 037201.
- [80] А. А. Короновский, П. В. Попов, А. Е. Храмов, Обобщенная синхронизация и механизм ее возникновения в связанных автоколебательных средах, *Письма в ЖТФ* 31 (22) (2005) 9–16.
- [81] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, О механизмах, приводящих к установлению режима обобщенной синхронизации, *ЖТФ* 76 (2) (2006) 1–9.
- [82] G. Zhang, Z. Liu, Z. Ma, Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems, *Chaos, Solitons and Fractals* 32 (2) (2007) 773–779.
- [83] Z. Zheng, G. Hu, Generalized synchronization versus phase synchronization, *Phys. Rev. E* 62 (6) (2000) 7882–7885.

- [84] M. Zhan, X. Wang, X. Gong, G. W. Wei, C. H. Lai, Complete synchronization and generalized synchronization of one-way coupled time-delay systems, *Phys. Rev. E* 68 (3) (2003) 036208.
- [85] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, Generalized synchronization onset, *Europhysics Letters* 72 (6) (2005) 901–907.
- [86] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators?, *Phys. Lett. A* 354 (5–6) (2006) 423–427.
- [87] J. Terry, G. VanWiggeren, Chaotic communication using generalized synchronization, *Chaos, Solitons and Fractals* 12 (2001) 145–152.
- [88] A. Uchida, K. Higa, T. Shiba, S. Yoshimori, F. Kuwashima, H. Iwasawa, Generalized synchronization of chaos in He-Ne lasers, *Phys. Rev. E* 68 (1) (2003) 016215.
- [89] J. Lu, Multiple access chaotic digital communication based on generalized synchronization, *Chaos, Solitons & Fractals* 25 (1) (2004) 221–227.
- [90] L. Min, G. Chen, X. Zhang, X. Zhang, M. Yang, Approach to generalized synchronization with application to chaos-based secure communication, *Communications in Theoretical Physics* 41 (4) (2004) 632–640.
- [91] E. A. Rogers, R. Kalra, R. D. Schroll, A. Uchida, D. P. Lathrop, R. Roy, Generalized synchronization of spatiotemporal chaos in a liquid crystal spatial light modulator, *Phys.Rev.Lett.* 93 (2004) 084101.
- [92] X. Wang, Q. Zhao, M. Wang, Y. Yang, Generalized synchronization of different dimensional neural networks and its applications in secure communication, *Modern Physics Letters B* 22 (22) (2008) 2077–2084.

- [93] Z. Zheng, X. Wang, M. C. Cross, Transitions from partial to complete generalized synchronizations in bidirectionally coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 056211.
- [94] S. Guan, X. Gong, K. Li, Z. Liu, C. H. Lai, Characterizing generalized synchronization in complex networks, *New Journal of Physics* 12 (2010) 073045.
- [95] S. Guan, X. Wang, X. Gong, K. Li, C. H. Lai, The development of generalized synchronization on complex networks, *CHAOS* 19 (2009) 013130.
- [96] Y. Hung, Y. Huang, M. Ho, C. Hu, Paths to globally generalized synchronization in scale-free networks, *Phys. Rev. E* 77 (1) (2008) 016202.
- [97] J. Chen, J. Lu, W. Zheng, Generalized synchronization of complex dynamical networks via impulsive control, *Chaos* 19 (4) (2009) 043119.
- [98] H. Liu, J. Chen, J. Lu, M. Cao, Generalized synchronization in complex dynamical networks via adaptive couplings, *Physica A* 389 (2010) 1759–1770.
- [99] A. Hu, Z. Xu, L. Guo, The existence of generalized synchronization of chaotic systems in complex networks, *Chaos* 20 (1) (2010) 013112.
- [100] P. Manneville, Y. Pomeau, Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems, *Physica D* 1 (2) (1980) 167–241.
- [101] M. Dubois, M. A. Rubio, P. Bergé, Experimental evidence of intermitteencies associated with a subharmonic bifurcation, *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983) 1446–1449.
- [102] P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal, *L'Ordre Dans Le Chaos*, Hermann, Paris, 1988.
- [103] P. Berge, Y. Pomeau, C. Vidal, *Order within Chaos*, John Wiley and Sons, New York, 1984.

- [104] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, I. S. Midzyanovskaya, E. Sitnikova, C. M. Rijn, On-off intermittency in time series of spontaneous paroxysmal activity in rats with genetic absence epilepsy, *Chaos* 16 (2006) 043111.
- [105] В. С. Анищенко, Сложные колебания в простых системах, М.: Наука, 1990.
- [106] Г. Шустер, Детерминированный хаос, М.: Мир, 1988.
- [107] A. S. Pikovsky, G. V. Osipov, M. G. Rosenblum, M. Zaks, J. Kurths, Attractor–repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization, *Phys. Rev. Lett.* 79 (1) (1997) 47–50.
- [108] K. J. Lee, Y. Kwak, T. K. Lim, Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* 81 (2) (1998) 321–324.
- [109] S. Boccaletti, D. L. Valladares, Characterization of intermittent lag synchronization, *Phys. Rev. E* 62 (5) (2000) 7497–7500.
- [110] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators, *Europhysics Lett.* 70 (2) (2005) 169–175.
- [111] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, S. Boccaletti, Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization, *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006) 114101.
- [112] В. С. Анищенко, Д. Э. Постнов, Эффект захвата фазовой частоты хаотических колебаний. Синхронизация странных аттракторов., *Письма в ЖТФ* 14 (6) (1988) 569.
- [113] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Способ скрытой передачи информации. Патент на изобретение № 2349044, *Tech. гер.*, Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 10.03.2009. Бюллетень № 7. (2009).

- [114] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Способ скрытой передачи информации с изменяющимися характеристиками генератора шума. Патент на изобретение № 2421923, Tech. гер., Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 20.06.2011. Бюллетень № 17. (2011).
- [115] О. И. Москаленко, Н. С. Фролов, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Способ скрытой передачи информации. Патент на изобретение № 2509423, Tech. гер., Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 10.03.2014. Бюллетень N 7. (2014).
- [116] М. О. Журавлев, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Способ определения моментов синхронного и асинхронного поведения двух связанных систем. Патент на изобретение № 2431857, Tech. гер., Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 20.10.2011. Бюллетень № 29. (2011).
- [117] А. Н. Павлов, В. А. Макаров, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Способ выделения сигналов импульсного типа по временным данным. Патент на изобретение № 2552183, Tech. гер., Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 10.06.2015. Бюллетень N 16 (2015).
- [118] А. А. Короновский, А. Е. Храмов, О. И. Москаленко, В. В. Грубов, Способ удаления глаздвигательных артефактов на электроэнцефаллограммах. Патент на изобретение № 25560388, Tech. гер., Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 20.08.2015. Бюллетень N 23 (2015).

- [119] А. Е. Храмов, В. В. Грубов, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Е. Ю. Ситникова, Способ выделения веретенородных паттернов по временным данным электроэнцефалограмм. Патент на изобретение № 2565993, Tech. гер., Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 20.10.2015. Бюллетень N 29 (2015).
- [120] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, Программа для определения длительностей турбулентных и ламинарных фаз поведения систем, находящихся вблизи границы хаотической фазовой синхронизации. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012613432, Tech. гер., Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 11.04.2012. (2012).
- [121] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, В. А. Максименко, Программа для расчета пространственных ляпуновских экспонент гидродинамической модели диода Пирса, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012613430, ФГБОУ ВПО СГУ имени Чернышевского Н.Г., официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 11.04.2012 (April 2012).
- [122] А. А. Короновский, А. Е. Храмов, О. И. Москаленко, Программа для реализации метода фазовых трубок для диагностики обобщенной синхронизации "GStube". свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013610194, Tech. гер., Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 09.01.2013 (2013).
- [123] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, М. О. Журавлев, Программа для ЭВМ, позволяющая производить непрерывное вейвлетное преобразование для экспериментальных данных с неэквидистантным шагом по времени. свидетельство о го-

сударственной регистрации программы для ЭВМ № 2013661094, Tech. гер., Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 28.11.2013. (2013).

- [124] О. И. Москаленко, С. А. Шурыгина, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, М. О. Журавлев, Программа для ЭВМ для расчета локальных нулевых ляпуновских экспонент неавтономных систем, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014610508, Tech. гер., Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 10.01.2014 (2014).
- [125] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Программа для ЭВМ для генетического алгоритма эволюции сложных сетей. свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014610420, Tech. гер., Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 09.01.2014 (2014).
- [126] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, В. А. Макаров, А. Е. Храмов, В. А. Максименко, Программа для моделирования многослойной адаптивной сети осцилляторов Курамото. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014617846, Tech. гер., Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 05.08.2014 (2014).
- [127] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Программа для оценки нулевого условного показателя Ляпунова по временному ряду. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015616754, Tech. гер., Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 22.06.2015 г. (2015).
- [128] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, А. О. Сельский, Программа для расчета эффекта обобщенной синхронизации в трех однонаправленно связанных хаотических осцилляторах. Свидетельство о государственной регистрации программы

для ЭВМ № 2015616887, Tech. гер., Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 25.06.2015 г. (2015).

- [129] О. И. Москаленко, С. А. Куркин, Программа для аналитической оценки ширины гистерезисной петли в сети фазовых осцилляторов Курамото. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015617857, Tech. гер., Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 23.07.2015 г. (2015).
- [130] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Программа для диагностики и анализа обобщенной синхронизации в сложных сетях. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015617858, Tech. гер., Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 23.07.2015 г. (2015).
- [131] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, М. О. Журавлев, А. А. Пивоваров, Программа для ЭВМ для моделирования взаимодействия сети из пяти логистических отображений, связанных взаимно. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015617904, Tech. гер., Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. 24.07.2015 г. (2015).
- [132] О. И. Москаленко, Программа для исследования взрывной синхронизации в сети фазовых осцилляторов Курамото. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015618337, Tech. гер., Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 06.08.2015 г. (2015).
- [133] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Программа для анализа обобщенной синхронизации в системе связанных генераторов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015618340, Tech. гер., Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 06.08.2015 г. (2015).
- [134] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, М. О. Журавлев, А. Е. Храмов, Программа выделения различных мультистабильных со-

стояний по экспериментальным временным рядам сигнала оптоволоконного легированного эрбием лазера. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016614535, Tech. гер., Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 26.04.2016 г. (2016).

- [135] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. А. Овчинников, А. Е. Храмов, Теоретическое исследование обобщенной синхронизации диссипативно связанных хаотических систем в присутствии шума, Известия РАН. Серия физическая 73 (12) (2009) 1723–1727.
- [136] А. А. Овчинников, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Экспериментальное исследование обобщенной синхронизации хаотических колебаний в присутствии шума, Письма в ЖТФ 36 (4) (2010) 1–7.
- [137] О. И. Москаленко, А. А. Овчинников, Исследование влияния шума на обобщенную хаотическую синхронизацию в диссипативно связанных динамических системах: устойчивость синхронного режима по отношению к внешним шумам и возможные практические приложения, Радиотехника и электроника 55 (4) (2010) 436–449.
- [138] O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, A. A. Ovchinnikov, Effect of noise on generalized synchronization of chaos: theory and experiment, Europhysics Journal B 82 (1) (2011) 69–82.
- [139] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Влияние шума на обобщенную синхронизацию пространственно-распределенных сред, описываемых уравнениями Гинзбурга-Ландау, Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика 19 (4) (2011) 3–11.
- [140] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. С. Павлов, Н. С. Фролов, А. Е. Храмов, Обобщенная синхронизация в случае воздей-

ствия хаотического сигнала на периодическую систему, Журнал технической физики 84 (5) (2014) 1–8.

- [141] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov, A. E. Hramov, Binary generalized synchronization, *Chaos, Solitons & Fractals* 83 (2016) 133–139.
- [142] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Индуцированная шумом бинарная синхронизация в нелинейных системах, Письма в ЖТФ 42 (14) (2016) 45–51.
- [143] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации, *Успехи физических наук* 179 (12) (2009) 1281–1310.
- [144] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Скрытая передача информации на основе режима обобщенной синхронизации в присутствии шумов, *Журнал технической физики* 80 (4) (2010) 1–8.
- [145] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Generalized synchronization of chaos for secure communication: Remarkable stability to noise, *Phys. Lett. A* 374 (2010) 2925–2931.
- [146] В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Метод диагностики обобщенной синхронизации и его приложение к системам передачи информации, *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика* 23 (6) (2015) 4–15.
- [147] O. Moskalenko, A. Koronovskii, A. Hramov, Inapplicability of an auxiliary-system approach to chaotic oscillators with mutual-type coupling and complex networks, *Phys. Rev. E* 87 (2013) 064901.
- [148] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, S. Boccaletti, Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks, *Phys. Rev. E* 86 (2012) 036216.

- [149] F. Takens, Detecting strange attractors in dynamical systems and turbulence, in: D. Rand, L. S. Young (Eds.), Lectures Notes in Mathematics, N. Y.: Springer-Verlag, 1981, p. 366.
- [150] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, V. A. Maximenko, O. I. Moskalenko, Computation of the spectrum of spatial Lyapunov exponents for the spatially extended beam-plasma systems and electron-wave devices, *Physics of Plasmas* 19 (8) (2012) 082302.
- [151] А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, К вопросу о расчете спектра пространственных ляпуновских экспонент в пространственно-распределенных пучково-плазменных системах, *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* 18 (2).
- [152] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, S. A. Kurkin, V. V. Makarov, M. B. Gaifullin, K. N. Alekseev, N. Alexeeva, M. T. Greenaway, T. M. Fromhold, A. Patane, F. Kusmartsev, V. A. Maximenko, O. I. Moskalenko, A. G. Balanov, Subterahertz chaos generation by coupling a superlattice to a linear resonator, *Phys.Rev.Lett.* 112 (2014) 116603.
- [153] A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, V. A. Maximenko, O. I. Moskalenko, K. N. Alekseev, M. T. Greenaway, T. M. Fromhold, A. G. Balanov, Lyapunov stability of charge transport in miniband semiconductor superlattices, *Phys. Rev. B* 88 (2013) 165304.
- [154] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization, *Phys. Rev. E* 84 (3) (2011) 037201.
- [155] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, S. A. Shurygina, A. E. Hramov, Generalized synchronization in discrete maps. New point of view on weak and strong synchronization, *Chaos, Solitons and Fractals* (46) (2013) 12–18.

- [156] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Метод фазовых трубок для анализа обобщенной синхронизации в пространственно-распределенных системах, Вестник ТГУ 19 (3) (2014) 888–891.
- [157] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. А. Пивоваров, А. Е. Храмов, Установление обобщенной синхронизации в сети логистических отображений, Письма в ЖТФ 41 (16) (2015) 1–7.
- [158] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. А. Пивоваров, А. Е. Храмов, Установление обобщенной синхронизации в сети осцилляторов Ресслера, Известия РАН. Серия физическая 80 (2) (2016) 208–211.
- [159] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, С. А. Шурыгина, Перемежающееся поведение на границе индуцированной шумом синхронизации, ЖТФ 81 (9) (2011) 150–153.
- [160] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, С. А. Шурыгина, Поведение нелинейных систем на границе синхронизации, индуцированной шумом, Нелинейная динамика 7 (2) (2011) 197–208.
- [161] S. Boccaletti, E. Allaria, R. Meucci, F. T. Arecchi, Experimental characterization of the transition to phase synchronization of chaotic CO_2 laser systems, Phys. Rev. Lett. 89 (19) (2002) 194101.
- [162] А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Перемежаемость типа I в присутствии шума и перемежаемость игольного ушка, Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика 18 (1) (2010) 24–36.
- [163] А. Е. Храмов, А. А. Koronovskii, М. К. Kurovskaya, О. I. Moskalenko, Type-I intermittency with noise versus eyelet intermittency, Phys. Lett. A 375 (2011) 1646–1652.
- [164] М. О. Zhuravlev, А. А. Koronovskii, О. I. Moskalenko, А. А. Ovchinnikov, А. Е. Храмов, Ring intermittency near the boundary

- of the synchronous time scales of chaotic oscillators, *Phys. Rev. E* 83 (2011) 027201.
- [165] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Перемежающееся поведение на границе синхронизации временных масштабов, *ЖТФ* 81 (7) (2011) 7–12.
- [166] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Перемежаемость кольца вблизи границы синхронизации временных масштабов, *Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 19 (4) (2011) 12–24.
- [167] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. N. Pavlov, A. E. Hramov, M. O. Zhuravlev, Estimation of degree of synchronization in epileptic brain, *Proc. SPIE* 9707 (2016) 970710.
- [168] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, М. О. Журавлев, Оценка степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду (модельные системы и нейрофизиологические данные), *Письма в ЖЭТФ* 103 (8) (2016) 606–610.
- [169] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, M. O. Zhuravlev, V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov, Intermittency of intermittencies, *CHAOS* 23 (3) (2013) 033129.
- [170] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, М. О. Журавлев, А. Е. Храмов, Модельная система с дискретным временем, демонстрирующая "перемежаемость перемежаемостей *Письма в ЖТФ* 41 (1) (2015) 36–42.
- [171] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Перемежающееся поведение вблизи границы фазовой хаотической синхронизации на различных временных масштабах, *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* 19 (1) (2011) 109–121.

- [172] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Исследование на различных временных масштабах поведения неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля в присутствии шума вблизи границы синхронизации, Изв. РАН. Сер. физическая 76 (12) (2012) 1503–1506.
- [173] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Теоретическое и численное исследование "перемежаемости перемежаемостей" в связанных хаотических системах, Письма в ЖТФ 39 (14) (2013) 1–7.
- [174] Д. И. Данилов, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, Перемежаемость вблизи границы фазовой хаотической синхронизации в пространственно распределенных системах, Изв. РАН. Сер. физическая 77 (12) (2013) 1770–1773.
- [175] O. I. Moskalenko, M. O. Zhuravlev, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Manifestations of intermittency in unidirectionally coupled Pierce diodes on different time scales, Nonlinear Dynamics 83 (1) (2016) 433–439.
- [176] O. I. Moskalenko, A. Koronovskii, A. Hramov, M. Zhuravlev, Y. Levin, Cooperation of deterministic and stochastic mechanisms resulting in the intermittent behavior, Chaos, Solitons & Fractals 68 (2014) 58–64.
- [177] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, М. О. Журавлев, Перемежаемость перемежаемостей на границе фазовой синхронизации в присутствии шума, Журнал технической физики 85 (6) (2015) 148–151.
- [178] М. О. Журавлев, А. О. Сельский, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Фильтрация как способ изменения свойств перемежающегося поведения в системе двух однонаправленно связанных генераторов, Известия РАН. Серия физическая 79 (12) (2015) 1715–1718.

- [179] A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, V. V. Grubov, O. I. Moskalenko, E. Sitnikova, A. N. Pavlov, Coexistence of intermittencies in the neuronal network of the epileptic brain, *Phys. Rev. E* 93 (2016) 032220.
- [180] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Н. Писарчик, Д. Р. Ридер, А. Е. Храмов, Выделение характерных колебательных режимов в динамике легированного эрбием оптоволоконного лазера, *Известия РАН. Серия физическая* 79 (12) (2015) 1711–1714.
- [181] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, M. O. Zhuravlev, R. Jaimes-Reategui, A. N. Pisarchik, Separation of coexisting dynamical regimes in multistate intermittency based on wavelet spectrum energies in an erbium-doped fiber laser, *Phys. Rev. E* 93 (2016) 052218.
- [182] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, О конструктивном влиянии шумов на скрытую передачу информации, in: *Материалы 18 Международной конференции “СВЧ техника и телекоммуникационные технологии - КрыМиКо 2008”*, 2008, pp. 285–286.
- [183] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. А. Овчинников, А. Е. Храмов, Теоретическое и экспериментальное исследование обобщенной синхронизации в присутствии шума, in: *Труды XII Всероссийской школы-семинара “Волны-2009”. Часть 2. “Нелинейная динамика”*, ООП Физ. Ф-та МГУ, 2009, pp. 2–4.
- [184] O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, A. A. Ovchinnikov, Effect of noise on generalized synchronization of chaos in dissipatively coupled dynamical systems, in: *Proceedings of 17th International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems NDES-2009*, 2009, pp. 219–222.

- [185] O. I. Moskalenko, . Sitnikova, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, G. Luijtelaar van, Application of continuous wavelet transform for analysis and automatic identification of spike-wave discharges and sleep spindles in epileptic eeg, in: Proceedings of II International Symposium “Topical problems of biophotonics – TPB 2009”, 2009, pp. 255–256.
- [186] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров, А. Е. Храмов, Использование хаотических генераторов с запаздыванием для скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации, in: Материалы 19 Международной конференции “СВЧ техника и телекоммуникационные технологии – КрыМиКо - 2009”, 2009, pp. 697–698.
- [187] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. А. Овчинников, А. Е. Храмов, О влиянии шума на обобщенную хаотическую синхронизацию, in: Тезисы докладов XV научной школы “Нелинейные волны – 2010” (6-12 марта 2010 года, Нижний Новгород, Россия), 2010, pp. 91–92.
- [188] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, S. A. Shurygina, Generalized synchronization in mutually coupled dynamical systems, in: Proceedings of 18th IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES2010), 2010, pp. 70–73.
- [189] А. Е. Храмов, А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, Comparison of eyelet intermittency and type-i intermittency with noise, in: Proceedings of 18th IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES2010), 2010, pp. 210–213.
- [190] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, S. A. Shurygina, Analysis of generalized synchronization in mutually coupled dynamical systems, in: Book of Abstracts of 3rd Chaotic Modeling and Simulation International Conference, 2010, pp. 53–54.

- [191] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, O. I. Moskalenko, Comparison of the characteristics of eyelet intermittency and type-i intermittency with noise, in: Book of Abstracts of 3rd Chaotic Modeling and Simulation International Conference, 2010, p. 25.
- [192] А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, О возникновении обобщенной синхронизации во взаимно связанных пучково-плазменных системах, in: Сборник «СВЧ - техника и телекоммуникационные технологии», Материалы 20-й Международной Крымской конференции, 2010, pp. 895–896.
- [193] А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Расчет пространственных показателей ляпунова для моделей электронных систем, in: Сборник «СВЧ - техника и телекоммуникационные технологии», Материалы 20-й Международной Крымской конференции, 2010, pp. 906–907.
- [194] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Перемежаемость “кольца” вблизи границы синхронизации временных масштабов, in: Материалы IX Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” ХАОС-2010, Саратов, 4-9 октября 2010 года, 2010, pp. 59–60.
- [195] А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Разработка и применение метода расчета показателей ляпунова для пространственно распределенных систем электронной природы, in: Материалы IX Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», 2010, pp. 140–141.
- [196] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, С. А. Шурыгина, Исследование обобщенной синхронизации во взаимно связанных динамических системах и сетях со сложной топологией, in: Материалы IX Международной школы “Хаотические автоколе-

бания и образование структур” ХАОС-2010, Саратов, 4-9 октября 2010 года, 2010, pp. 46–46.

- [197] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, С. А. Шурыгина, Перемежающаяся индуцированная шумом синхронизация, in: Материалы IX Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” ХАОС-2010, Саратов, 4-9 октября 2010 года, 2010, pp. 67–67.
- [198] А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Перемежаемость игольного ушка и перемежаемость типа i в присутствии шума: механизмы возникновения, статистические характеристики, сходства и отличия, in: Материалы IX Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” ХАОС-2010, Саратов, 4-9 октября 2010 года, 2010, p. 162.
- [199] А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, К вопросу о выборе состояния пространственно-распределенной системы для расчета спектра показателей ляпунова, in: Сборник трудов XIII Всероссийской школы-семинара «Физика и применение микроволн», МГУ, 2011, pp. 31–35.
- [200] А. Г. Баланов, А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Расчет спектра показателей ляпунова и анализ динамических режимов в полупроводниковой сверхрешетке, in: Материалы XV Международной зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике, 2012, p. 34.
- [201] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Исследование на различных временных масштабах поведения однонаправлено связанных хаотических систем вблизи границы фазовой синхронизации, in: Труды XIII школы-семинара «Волны-2012». Секция 10. Нелинейная динамика, Москва, 21 - 26 мая, 2012, pp. 15–16.

- [202] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, С. А. Шурыгина, Особенности обобщенной синхронизации в однонаправлено и взаимно связанных потоковых системах и отображениях: метод фазовых трубок, Труды школы-семинара "Волны-2012"(2012) 45–46.
- [203] А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Расчет показателей ляпунова для систем свч-электроники: выбор величин, входящих в состояние системы, in: Сборник «СВЧ - техника и телекоммуникационные технологии», Материалы 22-й Международной Крымской конференции, 2012, р. 787.
- [204] О. И. Москаленко, Н. С. Фролов, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Обобщенная синхронизация в системе двух однонаправлено связанных низковольтных виркаторов, in: Материалы 22-й Международной конференции «СВЧ–техника и телекоммуникационные технологии», 2012, р. 769.
- [205] О. И. Москаленко, А. В. Иванов, И. А. Яшков, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, С. А. Шурыгина, Метод фазовых трубок для диагностики обобщенной синхронизации, in: Материалы III Всероссийского научно-практического форума "Экология: синтез естественно-научного, технического и гуманитарного знания 2012, pp. 324–325.
- [206] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. В. Иванов, А. Е. Храмов, Перемежаемость перемежаемостей на границе синхронизации временных масштабов: суррогатные данные и биомедицинские системы, in: Материалы III Всерос. науч.-практ. форума Экология: синтез естественнонаучного, технического и гуманитарного знания, Саратов, 10-12 октября, 2012, pp. 322–323.
- [207] С. А. Шурыгина, А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Локальные показатели ляпунова вблизи

- границ синхронных режимов, in: Труды школы-семинара «Волны-2013», 2013, pp. 57–58.
- [208] М. О. Журавлев, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Перемежающееся поведение на границе фазовой синхронизации в присутствии шума, in: Труды школы-семинара «Волны-2013». Секция 5. Нелинейная динамика и информационные системы, Москва, 20 - 25 мая, 2013, pp. 23–24.
- [209] К. Н. Алексеев, А. Г. Баланов, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Показатели ляпунова для пространственно-распределенных систем, in: Сборник трудов XIV Всероссийской школы-семинара «Физика и применение микроволн, МГУ, 2013, p. 4.
- [210] М. О. Zhuravlev, А. Е. Hramov, А. А. Koronovskii, О. I. Moskalenko, General theoretical model describing coexistence of two types of intermittency in nonlinear dynamical systems., in: Proceedings of 21th edition of the Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Bari (Italy), 10-12 July, 2013, p. 9P.
- [211] О. I. Moskalenko, М. О. Zhuravlev, А. А. Koronovskii, А. Е. Hramov, Characteristics of intermittent phase synchronization in the presence of noise, in: Proceedings of 21th edition of the Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Bari (Italy), 10-12 July, 2013, p. 21.
- [212] А. Е. Hramov, А. А. Koronovskii, V. А. Maksimenko, О. I. Moskalenko, Spectrum of lyapunov exponents for spatially extended electronic systems, in: Proceedings of 21th edition of the Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Bari (Italy), 10-12 July, 2013, p. 10.
- [213] М. О. Журавлев, А. Е. Храмов, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, Теория перемежаемости перемежаемостей в нелинейных системах, in: Материалы X Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” ХАОС-2013, Саратов, 7-12 октября 2013 года, 2013, pp. 129–130.

- [214] О. И. Москаленко, М. О. Журавлев, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, “перемежаемость перемежаемостей” на границе фазовой синхронизации в присутствии шума, in: Материалы X Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” ХАОС-2013, Саратов, 7-12 октября 2013 года, 2013, p. 118.
- [215] А. С. Павлов, О. И. Москаленко, Метод оценки нулевого показателя ляпунова по временному ряду, in: Материалы X Международной школы-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур”, 2013, p. 87.
- [216] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. С. Павлов, Н. С. Фролов, А. Е. Храмов, Способы скрытой передачи информации на основе хаотической синхронизации, in: Международная научно-техническая конференция, приуроченная к 50-летию МР-ТИ–БГУИР. Материалы конференции. Часть I, 2014, pp. 245–246.
- [217] Н. С. Фролов, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, А. А. Кураев, Оптимизация параметров взаимодействия в сети генераторов на виртуальном катоде, in: Международная научно-техническая конференция, приуроченная к 50-летию МР-ТИ–БГУИР. Материалы конференции. Часть I, 2014, pp. 54–55.
- [218] О. И. Москаленко, А. С. Павлов, Метод оценки нулевого условного показателя ляпунова в закритической области значений управляющего параметра, in: Труды школы-семинара “Волны-2014”, Москва, МГУ, секция 9, 2014, pp. 34–35.
- [219] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Перемежающееся поведение пространственно-распределенных систем, находящихся в режиме фазовой синхронизации, на граничных временных масштабах наблюдения, in: Труды школы-семинара “Волны-2014”, Москва, МГУ, секция 9, 2014, pp. 18–19.

- [220] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, M. O. Zhuravlev, V. V. Grubov, Coexistence of intermittencies, in: Proceedings of ENOC 2014. 8th European Nonlinear Dynamics Conference, Vienna, Austria, 2014, pp. 358–359.
- [221] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Phase tube approach for the analysis of generalized synchronization in coupled flow systems and discrete maps, in: Proceedings of ENOC 2014. 8th European Nonlinear Dynamics Conference, Vienna, Austria, 2014, pp. 332–333.
- [222] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, V. V. Grubov, S. Boccaletti, Generalized synchronization in networks: theory and application in neuroscience, in: Proceedings of ENOC 2014. 8th European Nonlinear Dynamics Conference, Vienna, Austria, 2014, pp. 276–277.
- [223] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Перемежающееся поведение хаотических систем, находящихся вблизи границы фазовой хаотической синхронизации, под внешним шумовым воздействием, in: Тезисы докладов IX Всероссийской конференции молодых ученых “Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2014, pp. 56–57.
- [224] О. И. Москаленко, А. С. Павлов, Н. С. Фролов, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Скрытая передача информации на основе обобщенной синхронизации хаотического сигнала на периодические генераторы, in: Материалы 24-й Международной конференции «СВЧ–техника и телекоммуникационные технологии», 2014, p. 217.
- [225] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Н. Писарчик, Д. Р. Ридер, А. Е. Храмов, Методика детектирования различных колебательных режимов в динамике оптоволоконного

- лазера, легированного эрбием, in: Труды школы-семинара “Волны-2015”. Когерентные и нелинейные волновые явления, 2015, pp. 28–29.
- [226] М. О. Журавлев, А. О. Сельский, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Влияние фильтрации сигнала на характеристики перемежающегося поведения в системе однонаправлено связанных генераторов на туннельном диоде, in: Труды школы-семинара “Волны-2015”. Физика и применение микроволн, 2015, pp. 17–18.
- [227] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. А. Пивоваров, Установление обобщенной хаотической синхронизации в сети систем с потоковым временем, in: Труды школы-семинара “Волны-2015”. Нелинейная динамика, 2015, p. 21.
- [228] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Estimation of zero conditional lyapunov exponent from time series: model systems and neurophysiological data, in: Proceedings of UPM-BBVA Workshop “Recent Advances in Bioinformatics and Neuroscience”, Center for Biomedical Technologies, Technical University of Madrid, Madrid, Spain, 2015, p. 23.
- [229] O. I. Moskalenko, M. O. Zhuravlev, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Coexistence of two different types of intermittency near the boundary of phase synchronization in the presence of noise, in: Proceedings of 17th International Conference on Nonlinear Dynamics and Control, International Science Index, 2015, pp. 355–358.
- [230] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Исследование “перемежаемости перемежаемостей” в пространственно-распределенных системах на примере системы двух однонаправлено связанных диодов пирса, in: Тезисы докладов X Всероссийской конференции молодых ученых “Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”, 2015, pp. 53–54.

- [231] O. I. Moskalenko, A. Pivovarov, A. N. Pavlov, A. A. Koronovskii, M. Khramova, A. E. Hramov, Generalized synchronization in the complex network: theory and applications to epileptic brain, Proc. SPIE 9917 (2016) 991723–991723.
- [232] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, M. O. Zhuravlev, Application of lyapunov exponents to the problem of synchronization. estimation of synchronization degree in epileptic brain, in: Complex Dynamical Systems and Synchronization in Neuroscience: Scientific Program and Abstracts of International Russian-Indian Workshop, 2015, p. 17.
- [233] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, M. O. Zhuravlev, R. Jaimes-Reategui, A. N. Pisarchik, Analysis of different oscillatory regimes of erbium-doped fiber laser, in: Complex Dynamical Systems and Synchronization in Neuroscience: Scientific Program and Abstracts of International Russian-Indian Workshop, 2015, p. 20.
- [234] V. V. Grubov, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, E. Sitnikova, On-off intermittency in epileptic eeg, in: Complex Dynamical Systems and Synchronization in Neuroscience: Scientific Program and Abstracts of International Russian-Indian Workshop, 2015, p. 15.
- [235] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov, A. E. Hramov, Binary generalized synchronization and its application to communication systems, in: Abstracts Collection of 2015 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications NOLTA2015, Kowloon, Hong Kong, China, 2015, pp. 523–525.
- [236] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. А. Пивоваров, Изучение процесса установления режима обобщенной синхронизации в ансамбле нелинейных осцилляторов, in: Нелинейные волны – 2016.

- XVII научная школа. Тезисы докладов молодых ученых, 2016, р. 115.
- [237] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. А. Пивоваров, Исследование перемежающейся обобщенной синхронизации в ансамбле нелинейных осцилляторов, in: Труды школы-семинара “Волны-2016”. Нелинейная динамика и информационные системы, 2016, р. 25.
- [238] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Исследование индуцированной шумом перемежаемости в осцилляторе дuffинга, in: Труды школы-семинара “Волны-2016”. Нелинейная динамика и информационные системы, 2016, pp. 8–9.
- [239] O. I. Moskalenko, Characteristics of noised-induced intermittency: theory and its verification, in: Oral abstracts for STATIP16, 2016, pp. 12–13.
- [240] А. Д. Колоскова, О. И. Москаленко, Оценка степени перемежающейся фазовой синхронизации в реальной нейрофизиологической системе, in: Материалы XI Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” ХАОС-2016, Саратов, 3-8 октября 2016 года, 2016, pp. 91–92.
- [241] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Исследование характеристик индуцированной шумом перемежаемости в мультистабильных системах на примере осциллятора дuffинга, in: Материалы XI Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” ХАОС-2016, Саратов, 3-8 октября 2016 года, 2016, pp. 122–123.
- [242] V. V. Makarov, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, K. N. Alekseev, V. A. Maksimenko, M. T. Greenaway, T. M. Fromhold, O. I. Moskalenko, A. G. Balanov, Sub-terahertz amplification in a semiconductor superlattice with moving charge domains, Applied physics letters 106 (2015) 043503–1–043503–4.

- [243] A. O. Selskii, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, O. I. Moskalenko, K. N. Alekseev, M. T. Greenaway, F. Wang, T. M. Fromhold, A. V. Shorokhov, N. N. Khvastunov, A. G. Balanov, Effect of temperature on resonant electron transport through stochastic conduction channels in superlattices, *Phys. Rev. B* 84 (2011) 235311.
- [244] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Lyapunov exponent corresponding to enslaved phase dynamics: Estimation from time series, *Phys. Rev. E* 92 (2015) 012913.
- [245] M. Danziger, O. I. Moskalenko, S. A. Kurkin, X. Zhang, S. Havlin, S. Boccaletti, Explosive synchronization coexists with classical synchronization in the Kuramoto model, *Chaos* 26 (2016) 065307.
- [246] M. D. Prokhorov, V. I. Ponomarenko, D. D. Kulminskiy, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, Resistant to noise chaotic communication scheme exploiting the regime of generalized synchronization, *Nonlinear Dynamics* 87 (3) (2017) 2039–2050.
- [247] A. O. Selskii, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. G. Balanov, Bifurcation phenomena in a semiconductor superlattice subject to a tilted magnetic field, *Phys. Lett. A* 380 (1-2) (2016) 98–105.
- [248] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, O. I. Moskalenko, Analytical expression for zero Lyapunov exponent of chaotic noised oscillators, *Chaos, Solitons & Fractals* 78 (2015) 118–123.
- [249] V. V. Makarov, A. A. Koronovskii, V. A. Maksimenko, A. E. Hramov, O. I. Moskalenko, J. M. Buldu, S. Boccaletti, Emergence of a multilayer structure in adaptive networks of phase oscillators, *Chaos, Solitons & Fractals* 84 (2016) 23–30.
- [250] O. I. Moskalenko, N. S. Phrolov, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Synchronization in the network of chaotic microwave oscillators, *Eur. Phys. J. Special Topics* 222 (2013) 2571–2582.

- [251] А. Г. Баланов, М. Т. Гринавей, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. О. Сельский, Т. М. Фромхолд, А. Е. Храмов, Влияние температуры на нелинейную динамику заряда в полупроводниковой сверхрешетке в присутствии магнитного поля, Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики 141 (3) (2012) 960–965.
- [252] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, Н. С. Фролов, А. Е. Храмов, К вопросу о спектре пространственных ляпуновских показателей нелинейной активной среды, описываемой комплексным уравнением Гинзбурга-Ландау, Письма в ЖТФ 36 (14) (2010) 19–25.
- [253] М. О. Журавлев, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, Метод выделения ламинарных и турбулентных фаз в перемежающихся временных реализациях систем, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации, Письма в ЖТФ 36 (10) (2010) 31–38.
- [254] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, В. А. Максименко, А. Е. Храмов, О возникновении обобщенной синхронизации в пучково-плазменных системах, связанных взаимно, Письма в ЖТФ 37 (13) (2011) 40–47.
- [255] О. И. Москаленко, А. С. Павлов, Граница обобщенной синхронизации в системе двух однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде, Письма в ЖТФ 37 (23) (2011) 45–52.
- [256] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Обобщенная синхронизация в сложных сетях, Письма в ЖТФ 38 (20) (2012) 21–29.
- [257] О. И. Москаленко, А. С. Павлов, Способ оценки нулевого условного показателя Ляпунова по временному ряду, Письма в ЖТФ 40 (12) (2014) 66–72.
- [258] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. О. Сельский, А. Е. Храмов, О границе обобщенной синхронизации в сложных динамических системах, Письма в ЖТФ 41 (14) (2015) 39–46.

- [259] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. А. Пивоваров, А. Е. Храмов, Метод выделения характерных фаз поведения в сложных сетях, находящихся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации, Письма в ЖТФ 43 (7) (2017) 10–16.
- [260] А. Д. Колоскова, О. И. Москаленко, Определение степени синхронности перемежающейся фазовой синхронизации по данным электроэнцефалограмм человека, Письма в ЖТФ 43 (10) (2017) 102–110.
- [261] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, С. А. Шурыгина, Влияние степени взаимности связи на установление типов хаотической синхронизации, Радиотехника и электроника 56 (12) (2011) 1490–1500.
- [262] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, С. А. Шурыгина, Обобщенная синхронизация в сетях со сложной топологией межэлементных связей, Радиотехника и электроника 58 (5) (2013) 507–517.
- [263] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, С. А. Шурыгина, Об особенностях обобщенной синхронизации в однонаправлено и взаимно связанных отображениях и потоках: метод фазовых трубок, Радиотехника и электроника 59 (12) (2014) 1230–1241.
- [264] А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, К вопросу о выборе состояния пространственно-распределенной системы для расчета спектра показателей Ляпунова, Изв. РАН. Сер. физическая 75 (12) (2011) 1689–1692.
- [265] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, С. А. Шурыгина, А. Е. Храмов, Сильная и слабая обобщенная хаотическая синхронизация, Изв. РАН. Сер. физическая 76 (12) (2012) 1495–1499.
- [266] С. А. Шурыгина, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Исследование поведения локальных показателей Ляпуно-

ва вблизи границ установления синхронных режимов, Изв. РАН. Сер. физическая 77 (12) (2013) 1765–1769.

- [267] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, К. Н. Алексеев, А. Г. Баланов, Влияние внешнего периодического воздействия на динамику доменов заряда в полупроводниковой сверхрешетке, Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика 19 (3) (2011) 143–153.
- [268] O. I. Moskalenko, A. D. Koloskova, M. O. Zhuravlev, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Intermittent phase synchronization in human epileptic brain, Proc. SPIE 10063 (2017) 1006316–1006316.
- [269] А. А. Короновский, А. А. Косицын, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Численное моделирование переходных процессов в эволюционирующих по генетическим алгоритмам сетях, Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО 65 (1) (2010) 40–45.
- [270] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Метод выделения ламинарных участков поведения в хаотических системах, в которых одновременно реализуется два различных типа перемежаемости, Вестник ННГУ 1 (3) (2013) 196–200.
- [271] С. А. Шурыгина, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Обобщенная синхронизация во взаимно связанных системах с дискретным временем, Вестник ННГУ 1 (3) (2013) 201–204.
- [272] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, Р. А. Филатов, А. Е. Храмов, Исследование обобщенной синхронизации хаотических систем, Изв. РАН, сер. физич. 69 (12) (2005) 1741–1745.
- [273] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Об установлении режима обобщенной синхронизации в хаотических осцилляторах, Письма в ЖТФ 32 (3) (2006) 40–48.

- [274] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов, Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, - единый тип поведения связанных хаотических систем, Доклады Академии Наук 407 (6) (2006) 761–765.
- [275] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Граница возникновения режима обобщенной синхронизации хаотических осцилляторов, Радиотехника и электроника 52 (8) (2007) 949–960.
- [276] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, П. В. Попов, А. Е. Храмов, Способ скрытой передачи информации, основанный на явлении обобщенной синхронизации, Известия РАН. Серия физическая 72 (1) (2008) 143–147.
- [277] А. А. Короновский, П. В. Попов, А. Е. Храмов, Обобщенная хаотическая синхронизация в связанных уравнениях Гинзбурга-Ландау, ЖЭТФ 130 (4(10)) (2006) 748–764.
- [278] А. В. Стародубов, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Ю. Д. Жарков, Б. С. Дмитриев, Исследование обобщенной синхронизации в системе двух связанных клистронных автогенераторов хаоса, Письма в ЖТФ 33 (14) (2007) 58–65.
- [279] L. M. Pecora, T. L. Carroll, J. F. Heagy, Statistics for mathematical properties of maps between time series embeddings, Phys. Rev. E 52 (4) (1995) 3420–3439.
- [280] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Driving systems with chaotic signals, Phys. Rev. A 44 (4) (1991) 2374–2383.
- [281] A. Uchida, R. McAllister, R. Meucci, R. Roy, Generalized synchronization of chaos in identical systems with hidden degrees of freedom, Phys. Rev. Lett. 91 (17) (2003) 174101.
- [282] A. S. Pikovsky, Comment on “Chaos, noise, and synchronization”, Phys. Rev. Lett. 73 (21) (1994) 2931.

- [283] S. Fahy, D. R. Hamann, Transition from chaotic to nonchaotic behavior in randomly driven systems, *Phys. Rev. Lett.* 69 (5) (1992) 761–764.
- [284] A. Maritan, J. R. Banavar, Chaos, noise and synchronization, *Phys. Rev. Lett.* 72 (10) (1994) 1451–1454.
- [285] R. Toral, C. R. Mirasso, E. Hernández-García, O. Piro, Analytical and numerical studies of noise-induced synchronization of chaotic systems, *Chaos* 11 (3) (2001) 665–673.
- [286] C. S. Zhou, J. Kurths, Noise-induced phase synchronization and synchronization transitions in chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002) 230602.
- [287] L. Longa, E. M. F. Curado, F. A. Oliveira, Roundoff-induced coalescence of chaotic trajectories, *Phys. Rev. E* 54 (3) (1996) R2201–R2204.
- [288] C. S. Zhou, C. H. Lai, Synchronization with positive conditional Lyapunov exponents, *Phys. Rev. E* 58 (4) (1998) 5188–5191.
- [289] B. Kaulakys, F. Ivanauskas, T. Meskauskas, Synchronization of chaotic systems driven by identical noise, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 9 (3) (1999) 533–539.
- [290] H. Herzel, J. Freund, Chaos, noise, and synchronization reconsidered, *Phys. Rev. E* 52 (3) (1995) 3238–3241.
- [291] P. M. Gade, C. Basu, The origin of non-chaotic behavior in identically driven systems, *Phys. Lett. A* 217 (1) (1996) 21–27.
- [292] E. Sánchez, M. A. Matias, V. Pérez-Muñuzuri, Analysis of synchronization of chaotic systems by noise: an experimental study, *Phys. Rev. E* 56 (4) (1997) 4068–4071.
- [293] A. A. Minai, T. Anand, Chaos-induced synchronization in discrete time oscillators driven by a random input, *Phys. Rev. E* 57 (2) (1998) 1559–1562.

- [294] S. Rim, D. U. Hwang, I. Kim, C. M. Kim, Chaotic transition of random dynamical systems and chaos synchronization by common noises, *Phys. Rev. Lett.* 85 (11) (2000) 2304–2307.
- [295] C. S. Zhou, J. Kurths, E. Allaria, S. Boccaletti, R. Meucci, F. T. Arecchi, Noise-enhanced synchronization of homoclinic chaos in a CO_2 laser, *Phys. Rev. E* 67 (2003) 015205(R).
- [296] C. S. Zhou, J. Kurths, E. Allaria, Constructive effects of noise in homoclinic chaotic systems, *Phys. Rev. E* 67 (6) (2003) 066220.
- [297] А. А. Короновский, П. В. Попов, А. Е. Храмов, Индуцированная шумом синхронизация пространственно-временного хаоса в уравнении гинзбурга-ландау., *ЖЭТФ* 134 (5(11)) (2008) 1048–1058.
- [298] S. Guan, Y. C. Lai, C. H. Lai, Effect of noise on generalized chaotic synchronization, *Phys. Rev. E* 73 (2006) 046210.
- [299] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, Chaotic attractors in crisis, *Phys. Rev. Lett.* 48 (22) (1982) 1507–1510.
- [300] Б. Скляр, Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение, М., 2003.
- [301] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos*, Physik-Verlag, Weinheim, 1984.
- [302] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, Fractal basin boundaries, long lived chaotic transients, and unstable–unstable pair bifurcation, *Phys. Rev. Lett.* 50 (13) (1983) 935–938.
- [303] Н. Н. Никитин, С. В. Первачев, В. Д. Разевиг, О решении на ЦВМ стохастических дифференциальных уравнений следящих систем, *Автоматика и телемеханика* 4 (1975) 133–137.
- [304] А. А. Короновский, А. Е. Храмов, С. А. Шурыгина, Неавтономная индуцированная шумом синхронизация, *Изв. РАН. Серия физическая* 73 (12) (2009) 1728–1731.

- [305] R. Montagne, P. Colet, Nonlinear diffusion control of spatiotemporal chaos in the complex Ginzburg–Landau equation, *Phys. Rev. E* 56 (4) (1997) 4017–4024.
- [306] J. Bragard, F. T. Arecchi, S. Boccaletti, Characterization of synchronized spatiotemporal states in coupled non identical complex Ginzburg-Landau equations, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 10 (2000) 2381.
- [307] J. García-Ojalvo, J. M. Sancho, *Noise in Spatially Extended Systems*, New York: Springer, 1999.
- [308] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, P. V. Popov, Incomplete noise-induced synchronization of spatially extended systems, *Phys. Rev. E* 77 (3) (2008) 036215.
- [309] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, A. A. Ovchinnikov, S. Boccaletti, Length distribution of laminar phases for type-I intermittency in the presence of noise, *Phys. Rev. E* 76 (2) (2007) 026206.
- [310] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, J. Kurths, Phase synchronisation in regular and chaotic systems, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 10 (10) (2000) 2291–2305.
- [311] G. V. Osipov, B. Hu, C. S. Zhou, M. V. Ivanchenko, J. Kurths, Three types of transitions to phase synchronization in coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* 91 (2) (2003) 024101.
- [312] Н. С. Фролов, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Исследование характеристик генерации в цепочке однонаправленно связанных низковольтных виркаторов, *Изв. РАН. Сер. физическая* 75 (12) (2012) 1697–1700.
- [313] Ю. А. Калинин, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Е. Н. Егоров, Р. А. Филатов, Экспериментальное и теоретическое исследование

хаотических колебательных явлений в нерелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом, *Физика плазмы* 31 (11) (2005) 1009–1025.

- [314] C. K. Birdsall, A. B. Langdon, *Plasma physics, via computer simulation*, NY: McGraw-Hill, 1985.
- [315] Е. Н. Егоров, Ю. А. Калинин, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, М. Ю. Морозов, Исследование мощности свч генерации в нерелятивистском электронном пучке с виртуальным катодом в тормозящем поле, *Письма в ЖТФ* 32 (9) (2006) 71–78.
- [316] U. Parlitz, I. Wedekind, Chaotic phase synchronization based on binary coupling signals, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 10 (2010) 2527–2532.
- [317] N. J. Corron, S. D. Pethel, K. Myneni, Synchronizing the information content of a chaotic map and flow via symbolic dynamics, *Phys. Rev. E* 66 (2002) 036204.
- [318] A. Tartaglia, M. L. Ruggiero, A. Nagar, Time delay in binary systems, *Phys. Rev. D* 71 (2005) 023003.
- [319] A. C. Carusone, Jitter equalization for binary baseband communication, in: *Circuits and Systems, 2005. ISCAS 2005. IEEE International Symposium on, 2005*, pp. 936–939 Vol. 2.
- [320] А. Е. Храмов, А. Е. Храмova, А. А. Коронovskii, S. Boccaletti, Synchronization in networks of slightly nonidentical elements, *IJBC* 18 (3) (2008) 258–264.
- [321] K. Murali, M. Lakshmanan, Secure communication using a compound signal from generalized synchronizable chaotic systems, *Phys. Lett. A* 241 (1998) 303–310.
- [322] R. Rico-Martinez, K. E. Kreischer, G. Flätgen, J. S. Anderson, I. G. Kevrekidis, Adaptive detection of instabilities: An experimental feasibility study, *Physica D* 176 (2003) 1–18.

- [323] Е. С. Побережский, Цифровые радиоприемные устройства, М., 1987.
- [324] H. Dedieu, M. P. Kennedy, M. Hasler, Chaos shift keying: modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing chua's circuits, *IEEE Trans. on Circ. Sys.*, I 40 (1993) 634–642.
- [325] A. S. Dmitriev, A. I. Panas, S. O. Starkov, Experiments on speech and music signals transmission using chaos, *Int. J. Bifurcations and Chaos* 5 (4) (1995) 1249–1254.
- [326] T. Yang, L. O. Chua, Secure communication via chaotic parameter modulation, *IEEE Trans. on Circ. Sys.*, I 43 (1996) 817–819.
- [327] J. Y. Chen, K. W. Wong, L. M. Cheng, J. W. Shuai, A secure communication scheme based on the phase synchronization of chaotic systems, *Chaos* 13 (2) (2003) 508–514.
- [328] К. Шеннон, Работы по теории информации и кибернетике, М.: Издательство иностранной литературы, 1963.
- [329] A. Abel, W. Schwarz, Chaos communications - principles, schemes, and system analysis, *Proceedings of the IEEE* 90 (5) (2002) 691–710.
- [330] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.* 64 (8) (1990) 821–824.
- [331] *Encyclopaedia of Mathematics*, Michiel Hazewinkel Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002.
- [332] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* 78 (22) (1997) 4193–4196.
- [333] А. А. Короновский, А. Е. Храмов, А. Е. Храмова, К вопросу о синхронном поведении связанных систем с дискретным временем, *Письма в ЖЭТФ* 82 (3) (2005) 176–179.

- [334] А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Два сценария разрушения режима хаотической фазовой синхронизации, *ЖТФ* 77 (1) (2007) 21–29.
- [335] M. Zhan, G. W. Wei, C. H. Lai, Transition from intermittency to periodicity in lag synchronizarion in coupled Rössler oscillators, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 036202.
- [336] L. R. Keefe, Dynamics of perturbed wavetrain solutions to the ginzburg-landau equation, *Stud. Appl. Math.* 73 (1985) 91.
- [337] С. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков, Хаос и гиперхаос в лампе обратной волны, *Изв. вузов. Радиофизика XLVII* (5–6) (2004) 383.
- [338] П. В. Купцов, Вычисление показателей ляпунова для распределенных систем: преимущества и недостатки численных методов, *Известия вузов. ПНД* 18 (5) (2010) 93.
- [339] А. А. Короновский, И. С. Ремпен, А. Е. Храмов, Исследование неустойчивых периодических пространственно-временных состояний в распределённой автоколебательной системе со сверхкритическим током, *Изв. РАН, сер. физич.* 67 (12) (2003) 1705–1708.
- [340] A. Wolf, J. Swift, H. L. Swinney, J. Vastano, Determining lyapunov exponents from a time series, *Physica D* 16 (1985) 285.
- [341] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. M. Strelcyn, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. P. I. Theory. P. II. Numerical application, *Meccanica* 15 (1980) 9–30.
- [342] Д. В. Беклемишев, Курс аналитической геометрии и линейной алгебры., Физматлит, 2005.
- [343] А. А. Короновский, Р. А. Филатов, А. Е. Храмов, Хаотическая синхронизация в пучково-плазменных системах со сверхкритическим током, *Радиотехника и электроника* 52 (3) (2007) 362–372.

- [344] B. B. Godfrey, Oscillatory nonlinear electron flow in Pierce diode, *Phys. Fluids* 30 (1987) 1553.
- [345] H. Matsumoto, H. Yokoyama, D. Summers, Computer simulations of the chaotic dynamics of the Pierce beam–plasma system, *Phys. Plasmas* 3 (1) (1996) 177.
- [346] D. I. Trubetskov, A. E. Hramov, Lectures on microwave electronics for physicists, Vol. 1,2. Fizmatlit, Moscow, 2003.
- [347] A. Filatova, A. Hramov, A. Koronovskii, S. Boccaletti, Synchronization in networks of spatially extended systems, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 18 (2) (2008) 023133.
- [348] P. J. Rouch, Computational fluid dynamics, Hermosa publishers, Albuquerque, 1976.
- [349] A. N. Pisarchik, R. Jaimes-Reategui, R. Sevilla-Escoboza, S. Boccaletti, Experimental approach to the study of complex network synchronization using a single oscillator, *Phys. Rev. E* 79 (2009) 055202.
- [350] M. Kennel, H. D. I. Abarbanel, False neighbors and false strands: A reliable minimum embedding dimension algorithm, *Phys. Rev. E* 66 (2) (2002) 026209.
- [351] T. L. Carroll, Detecting variation in chaotic attractors, *Chaos* 21 (2011) 023128.
- [352] B. R. Hunt, E. Ott, J. A. Yorke, Differentiable generalized synchronization of chaos, *Phys. Rev. E* 55 (4) (1997) 4029–4034.
- [353] И. И. Блехман, Синхронизация динамических систем, М.: Наука, 1971.
- [354] J. F. Heagy, N. Platt, S. M. Hammel, Characterization of on–off intermittency, *Phys. Rev. E* 49 (2) (1994) 1140–1150.

- [355] А. А. Короновский, И. М. Минюхин, А. А. Тыщенко, А. Е. Храмов, И. С. Мидзяновская, Е. Ю. Ситникова, Е. L. Van Luitelaar, С. М. Rijn, Применение непрерывного вейвлет-преобразования для анализа перемежающегося поведения, Прикладная нелинейная динамика 15 (4) (2007) 34–54.
- [356] А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения, М.: Физматлит, 2003.
- [357] А. Е. Храмов, А. А. Koronovskii, An approach to chaotic synchronization, Chaos 14 (3) (2004) 603–610.
- [358] С. П. Кузнецов, Динамический хаос, серия “Современная теория колебаний и волн”, М.: Физматлит, 2001.
- [359] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, Phase synchronization of chaotic oscillators, Phys. Rev. Lett. 76 (11) (1996) 1804–1807.
- [360] G. V. Osipov, A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, J. Kurths, Phase synchronization effect in a lattice of nonidentical Rössler oscillators, Phys. Rev. E 55 (3) (1997) 2353–2361.
- [361] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, G. V. Osipov, J. Kurths, Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving, Physica D 104 (4) (1997) 219–238.
- [362] M. G. Rosenblum, J. Kurths, Analysis synchronization phenomena from bivariate data by means of the Hilbert transform, in: H. Kantz, J. Kurths (Eds.), Nonlinear analysis of physiological data, Springer, Berlin, 1998, pp. 91–99.
- [363] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, J. Kurths, Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences, Cambridge University Press, 2001.
- [364] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, Locking-based frequency measurement and synchronization of chaotic oscillators with complex dynamics, Phys. Rev. Lett. 89 (26) (2002) 264102.

- [365] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, Two types of phase synchronization destruction, *Phys. Rev. E* 75 (3) (2007) 036205.
- [366] A. S. Pikovsky, M. Zaks, M. G. Rosenblum, G. V. Osipov, J. Kurths, Phase synchronization of chaotic oscillators in terms of periodic orbits, *Chaos* 7 (4) (1997) 680–687.
- [367] E. Rosa, E. Ott, M. H. Hess, Transition to phase synchronization of chaos, *Phys. Rev. Lett.* 80 (8) (1998) 1642–1645.
- [368] W. H. Kye, C. M. Kim, Characteristic relations of type-I intermittency in the presence of noise, *Phys. Rev. E* 62 (5) (2000) 6304–6307.
- [369] О. И. Москаленко, Переход к фазовой синхронизации в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на систему с периодической динамикой, *Письма в ЖТФ* 33 (19) (2007) 72–79.
- [370] В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, Г. А. Окрокверцхов, Г. И. Стрелкова, Корреляционный анализ режимов детерминированного и зашумленного хаоса, *Радиотехника и электроника* 48 (7) (2003) 824.
- [371] V. S. Anishchenko, T. E. Vadivasova, G. I. Strelkova, Instantaneous phase method in studying chaotic and stochastic oscillations and its limitations., *Fluctuation and Noise Letters* 4 (1) (2004) L219–L229.
- [372] V. S. Anishchenko, G. A. Okrokvetskikhov, T. E. Vadivasova, G. I. Strelkova, Mixing and spectral-correlation properties of chaotic and stochastic systems: Numerical and physical experiments, *New Journal of Physics* 7 (2005) 76–113.
- [373] Т. Е. Вадивасова, В. С. Анищенко, Г. А. Окрокверцхов, А. С. Захарова, Статистические свойства мгновенной фазы зашумленных периодических и хаотических автоколебаний, *Радиотехника и электроника* 51 (5) (2006) 580–592.

- [374] T. Horita, K. Ouchi, T. Yamada, H. Fujisaka, Stochastic model of chaotic phase synchronization. II, *Progress of Theoretical Physics* 119 (2) (2008) 223–235.
- [375] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, Zero Lyapunov exponent in the vicinity of the saddle-node bifurcation point in the presence of noise, *Phys. Rev. E* 78 (2008) 036212.
- [376] Y. Pomeau, P. Manneville, Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems, *Commun. Math. Phys.* 74 (1980) 189.
- [377] J. P. Eckmann, L. Thomas, P. Wittwer, Intermittency in the presence of noise, *J. Phys. A: Math. Gen.* 14 (1981) 3153–3168.
- [378] D. Pazó, M. Zaks, J. Kurths, Role of unstable periodic orbits in phase and lag synchronization between coupled chaotic oscillators, *Chaos* 13 (2003) 309–318.
- [379] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, Time scale synchronization of chaotic oscillators, *Physica D* 206 (3–4) (2005) 252–264.
- [380] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, O. I. Moskalenko, Synchronization of spectral components and its regularities in chaotic dynamical systems, *Phys. Rev. E* 71 (5) (2005) 056204.
- [381] А. А. Короновский, М. К. Куровская, А. Е. Храмов, О соотношении фазовой синхронизации хаотических осцилляторов и синхронизации временных масштабов, *Письма в ЖТФ* 31 (19) (2005) 76–82.
- [382] A. N. Pisarchik, R. Jaimes-Reategui, R. Sevilla-Escoboza, G. Huerta-Cuellar, Multistate intermittency and extreme pulses in a fiber laser, *Physical Review E* 86 (5) (2012) 056219.
- [383] R. Sevilla-Escoboza, J. M. Buldu, A. N. Pisarchik, S. Boccaletti, R. Gutierrez, Synchronization of intermittent behavior in ensembles of multistable dynamical systems, *Phys. Rev. E* 91 (2015) 032902.

- [384] F. T. Arecchi, R. Badii, A. Politi, Generalized multistability and noise-induced jumps in a nonlinear dynamical system, *Phys. Rev. A* 32 (1985) 402–408.
- [385] K. Wiesenfeld, P. Hadley, Attractor crowding in oscillator arrays, *Phys. Rev. Lett.* 62 (1989) 1335–1338.
- [386] S. Kraut, U. Feudel, Multistability, noise, and attractor hopping: The crucial role of chaotic saddles, *Phys. Rev. E* 66 (2002) 015207.
- [387] A. N. Pisarchik, R. Jaimes-Reategui, R. Sevilla-Escoboza, G. Huerta-Cuellar, M. Taki, Rogue waves in a multistable system, *Physical Review Letters* 107 (2011) 274101.
- [388] Y. C. Lai, C. Grebogi, Intermingled basins and two-state on-off intermittency, *Phys. Rev. E* 52 (1995) R3313–R3316.
- [389] A. N. Pisarchik, V. J. Pinto-Robledo, Experimental observation of two-state on-off intermittency, *Phys. Rev. E* 66 (2002) 027203.
- [390] R. Roy, R. Short, J. Durnin, L. Mandel, First-passage-time distributions under the influence of quantum fluctuations in a laser, *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980) 1486–1490.
- [391] P. Hänggi, T. Mroczkowski, F. Moss, P. V. E. McClintock, Bistability driven by colored noise: Theory and experiment, *Phys. Rev. A* 32 (1985) 695–698.
- [392] P. Hänggi, P. Talkner, M. Borkovec, Reaction-rate theory: fifty years after kramers, *Rev. Mod. Phys.* 62 (1990) 251–341.
- [393] M. C. Mackey, J. G. Milton, A deterministic approach to survival statistics, *Journal of Mathematical Biology* 28 (1) (1990) 33–48.
- [394] H. A. Kramers, Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions, *Physica* 7 (4) (1940) 284–304.
- [395] А. Н. Сильченко, Т. Капитаник, В. С. Анищенко, Фазовая синхронизация переключений в стохастической бистабильной системе

- при апериодическом внешнем воздействии, Письма в ЖТФ 24 (18) (1998) 14–21.
- [396] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, Stochastic resonance, *Reviews of Modern Physics* 70 (1) (1998) 223–287.
- [397] R. Moreno-Bote, J. Rinzel, N. Rubin, Noise-induced alternations in an attractor network model of perceptual bistability, *Journal of Neurophysiology* 98 (2007) 1125–1139.
- [398] A. N. Pisarchik, R. Jaimes-Reategui, A. D. Magallón-García, O. Castillo-Morales, Critical slowing down and noise-induced intermittency in bistable perception: bifurcation analysis, *Biological Cybernetics* 108 (4) (2014) 397–404.
- [399] V. Semenov, A. B. Neiman, T. E. Vadivasova, V. S. Anishchenko, Noise-induced transitions in a double-well oscillator with nonlinear dissipation, *Phys. Rev. E* 93 (2016) 052210.
- [400] T. Poston, I. Stewart, *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman, 1978.
- [401] A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Type-II intermittency characteristics in the presence of noise, *Eur. Phys. J. B.* 62 (2008) 447–452.
- [402] D. S. Goldobin, A. S. Pikovsky, Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise, *Phys. Rev. E* 71 (4) (2005) 045201(R).
- [403] D. S. Goldobin, A. S. Pikovsky, Synchronization of self-sustained oscillators by common white noise, *Physica A* 351 (2005) 126–132.
- [404] A. Politi, F. Ginelli, S. Yanchuk, Y. Maistrenko, From synchronization to lyapunov exponents and back, *Physica D* 224 (2006) 90.

- [405] V. I. Oseledec, A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic number for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.* 19 (1968) 197–231.
- [406] G. Benettin, L. Galgani, J. M. Strelcyn, Kolmogorov entropy and numerical experiments, *Phys. Rev. A* 14 (1976) 2338.
- [407] J. P. Eckmann, S. O. Kamphorst, D. Ruelle, S. Ciliberto, Lyapunov exponents from a time series, *Phys. Rev. A* 34 (6) (1986) 4971–4979.
- [408] R. Stoop, P. F. Meier, Evaluation of lyapunov exponents and scaling functions from time series, *J. Opt. Soc. Am. B* 5 (5) (1988) 1037–1045.
- [409] M. T. Rosenstein, J. J. Collins, C. J. De Luca, A practical method for calculating largest lyapunov exponents from small data sets, *Physica D* 65 (1-2) (1993) 117–134.
- [410] L. Dieci, E. S. van Vleck, Computation of a few lyapunov exponents for continuous and discrete dynamical systems, *Applied Numerical Mathematics* 17 (1995) 275–296.
- [411] N. Mammone, J. C. Principe, F. Morabito, D. Shiau, C. Sackellares, Visualization and modelling of STLmax topographic brain activity maps, *J. Neurosci. Methods* 189 (2) (2010) 281–294.
- [412] M. H. Jensen, P. Bak, T. Bohr, Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. I. circle maps, *Phys. Rev. A* 30 (4) (1984) 1960–1969.
- [413] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press, New York, 1994.
- [414] M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, A. Libchaber, I. Procaccia, J. Stavans, Global universality at the onset of chaos: Results of a forced rayleigh-benard experiment, *Physical Review Letters* 55 (25) (1985) 2798–2801.

- [415] T. Horita, T. Yamada, H. Fujisaka, Noisy sine-circle map as a model of chaotic phase synchronization, *Progress of Theoretical Physics Supplement* 161 (2006) 199–203.
- [416] A. Das, N. Gupte, Crisis, unstable dimension variability, and bifurcations in a system with high-dimensional phase space: Coupled sine circle maps, *Physical Review E* 87 (4) (2013) 042906.
- [417] M. H. Jensen, P. Bak, T. Bohr, Complete devil’s staircase, fractal dimension, and universality of mode–locking structure in the circle map, *Phys. Rev. Lett.* 50 (21) (1983) 1637–1639.
- [418] O. Afsar, U. Tirnakli, Probability densities for the sums of iterates of the sine-circle map in the vicinity of the quasiperiodic edge of chaos, *Physical Review E* 82 (4) (2010) 046210.
- [419] R. Adler, A study of locking phenomena in oscillators, *Proc. IRE* 34 (6) (1946) 351–367.
- [420] N. N. Bogolubov, Y. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, Gordon and Breach, NY, 1961.
- [421] J. Wolberg, *Data Analysis Using the Method of Least Squares: Extracting the Most Information from Experiments*, Springer, 2005.
- [422] R. Q. Quiroga, A. Kraskov, T. Kreuz, P. Grassberger, Performance of different synchronization measures in real data: a case study on electroencephalographic signals, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 041903.
- [423] A. Zakharova, T. E. Vadivasova, V. S. Anishchenko, A. Koseska, J. Kurths, Stochastic bifurcations and coherencelike resonance in a self-sustained bistable noisy oscillator, *Phys. Rev. E* 81 (2010) 011106.
- [424] А. А. Короновский, М. К. Куровская, А. Е. Храмов, С. А. Шурыгина, Влияние шума на поведение осцилляторов вблизи границы синхронизации, *ЖТФ* 79 (10) (2009) 1–9.

- [425] E. Sitnikova, A. E. Hramov, V. V. Grubov, A. A. Ovchinnkov, A. A. Koronovsky, On-off intermittency of thalamo-cortical oscillations in the electroencephalogram of rats with genetic predisposition to absence epilepsy, *Brain Research* 1436 (2012) 147–156.
- [426] А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Анализ хаотической синхронизации динамических систем с помощью вейвлетного преобразования, *Письма в ЖЭТФ* 79 (7) (2004) 391–395.
- [427] М. К. Куровская, Распределение длительностей ламинарных фаз при перемежаемости “игольного ушка”, *Письма в ЖТФ* 34 (24) (2008) 48–54.
- [428] С. В. Кияшко, А. С. Пиковский, М. И. Рабинович, Генератор случайных сигналов. патент на изобретение № 698118, *Tech. гер.*, Государственный комитет СССР по делам изобретений и открытий. 15.11.1979. *Бюллетень* № 42 (1978).
- [429] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov, Detecting synchronization of self-sustained oscillators by external driving with varying frequency, *Phys. Rev. E* 73 (2) (2006) 026208.
- [430] C. Schäfer, M. G. Rosenblum, H. H. Abel, J. Kurths, Synchronization in the human cardiorespiratory system, *Phys. Rev. E* 60 (1999) 857–870.
- [431] M. Bracic Lotric, A. Stefanovska, Synchronization and modulation in the human cardiorespiratory system, *Physica A* 283 (451–461).
- [432] S. Rzecziński, N. B. Janson, A. G. Balanov, P. V. E. McClintock, Regions of cardiorespiratory synchronization in humans under paced respiration, *Phys. Rev. E* 66 (2002) 051909.
- [433] A. Hramov, A. Koronovskii, V. Ponomarenko, M. Prokhorov, Detection of synchronization from univariate data using wavelet

transform, *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)* 75 (5) (2007) 056207.

- [434] S. Malpas, Neural influences on cardiovascular variability: possibilities and pitfalls, *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* 282 (1) (2002) H6–20.
- [435] E. L. Van Luijtelaar, Spike-wave discharges and sleep spindles in rats., *Acta neurobiologiae experimentalis* 57 (2) (1997) 113–121.
- [436] E. Sitnikova, E. L. Van Luijtelaar, Cortical and thalamic coherence during spike-wave seizures in wag/rij rats, *Epilepsy Res* 71 (2006) 159–180.
- [437] L. De Gennaro, M. Ferrara, Sleep spindles: an overview, *Sleep Med. Rev.* 7 (2003) 423–440.
- [438] E. Sitnikova, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, E. L. Luijtelaar, Sleep spindles and spike–wave discharges in eeg: Their generic features, similarities and distinctions disclosed with fourier transform and continuous wavelet analysis, *Journal of Neuroscience Methods* 180 (2009) 304–316.
- [439] E. L. J. M. Luijtelaar van, A. Bikbaev, Mid-frequency cortico-thalamic oscillations and the sleep cycle: genetic, time of day and age effects, *Epilepsy Res* 73 (2007) 259–265.
- [440] E. Sitnikova, Thalamo-cortical mechanisms of sleep spindles and spike-wave discharges in rat model of absence epilepsy (a review)., *Epilepsy Research* 89 (1) (2010) 17–26.
- [441] A. M. Coenen, E. L. Van Luijtelaar, The wag/rij rat model for absence epilepsy: age and sex factors, *Epilepsy Res.* 1 (5) (1987) 297–301.
- [442] G. K. Kostopoulos, Spike-and-wave discharges of absence seizures as a transformation of sleep spindles: the continuing development of a hypothesis, *Clinical Neurophysiology* 111(Suppl. 2) (2000) S27–38.

- [443] J. L. Perez Velazquez, et al., Type III intermittency in human partial epilepsy, *European Journal of Neuroscience* 11 (1999) 2571–2576.
- [444] J. L. Cabrera, J. G. Milton, On-off intermittency in a human balancing task, *Phys. Rev. Lett.* 89 (15) (2002) 158702.
- [445] A. N. Pisarchik, A. V. Kir'yanov, Y. O. Barmenkov, R. Jaimes-Reategui, Dynamics of an erbium-doped fiber laser with pump modulation: theory and experiment, *J. Opt. Soc. Am. B* 22 (10) (2005) 2107–2114.