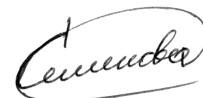


ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи



СЕМЕНОВА Надежда Игоревна

# ВОЗВРАТЫ ПУАНКАРЕ В ЭРГОДИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

01.04.03 – «Радиофизика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
Заслуженный деятель науки РФ,  
доктор физико-математических наук,  
профессор, Анищенко В.С.

Саратов – 2017

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>Глава 1. ВОЗВРАТЫ ПУАНКАРЕ В ОТОБРАЖЕНИИ ОКРУЖНОСТИ</b> . . . . .	<b>16</b>
1.1 Возвраты Пуанкаре. Размерность Афраймовича–Песина . . . . .	16
1.2 Отображение окружности . . . . .	21
1.2.1 Квазипериодические режимы. Области синхронизации с по- стоянным числом вращения . . . . .	22
1.2.2 Число вращения . . . . .	24
1.3 Иррациональные числа вращения в отображении окружности . . . . .	26
1.3.1 Цепные и подходящие дроби . . . . .	26
1.3.2 Классификация иррациональных чисел . . . . .	27
1.4 Связь размерности Афраймовича–Песина с мерой иррациональ- ности . . . . .	29
1.5 Золотое и серебряное сечения . . . . .	29
1.6 Возвраты Пуанкаре при диофантовом алгебраическом числе вра- щения . . . . .	40
1.7 Возвраты Пуанкаре при диофантовом трансцендентном числе вращения . . . . .	42
1.8 Возвраты Пуанкаре при лиувиллевом числе вращения . . . . .	44
1.9 Аппроксимация лестницы Фибоначчи. Теоретическая оценка . . . . .	46
1.9.1 Связь подходящих дробей с числом вращения . . . . .	47
1.9.2 Аппроксимация «Лестницы Фибоначчи» при золотом сечении	49
1.9.3 Аппроксимация «Лестницы Фибоначчи» при серебряном сечении . . . . .	53

1.9.4	Расчет ширины ступенек . . . . .	55
1.9.5	Обобщение аналитических выкладок . . . . .	56
1.10	Влияние нелинейности . . . . .	56
1.11	Влияние шума на «Лестницу Фибоначчи» . . . . .	58
1.12	Выводы по первой главе . . . . .	61
<b>Глава 2. ВОЗВРАТЫ ПУАНКАРЕ В НЕАВТОНОМНОМ ГЕНЕРАТОРЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ . . . . .</b>		<b>63</b>
2.1	Введение . . . . .	63
2.2	Исследуемая динамическая система . . . . .	64
2.3	Особенности выбора числа вращения . . . . .	67
2.4	Случай малых значений амплитуды . . . . .	69
2.5	Случай относительно больших значений амплитуды . . . . .	75
2.6	«Лестницы Фибоначчи» для диофантовых чисел вращения . . . . .	78
2.7	Выводы по второй главе . . . . .	83
<b>Глава 3. ВОЗВРАТЫ ПУАНКАРЕ В НЕАВТОНОМНОМ КОНСЕРВАТИВНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ . . . . .</b>		<b>85</b>
3.1	Введение . . . . .	85
3.2	Исследуемая система . . . . .	86
3.2.1	Гамильтоновы системы . . . . .	86
3.2.2	Фазовое пространство гамильтоновых систем . . . . .	88
3.2.3	Неавтономный консервативный осциллятор как пример гамильтоновых систем . . . . .	92
3.2.4	Числа вращения на инвариантных кривых неавтономного консервативного осциллятора . . . . .	94
3.3	Возвраты Пуанкаре на инвариантных кривых неавтономного консервативного осциллятора (3.7) . . . . .	100
3.3.1	Случай малых амплитуд $b$ . . . . .	100
3.3.2	Случай больших амплитуд . . . . .	106

3.4 Выводы по третьей главе . . . . .	108
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .</b>	<b>113</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А . . . . .</b>	<b>128</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Для описания поведения динамической системы со сложным характером траекторий можно использовать геометрию предельных множеств в фазовом пространстве или эволюцию фазовых траекторий во времени. Одной из фундаментально важных особенностей динамических систем с ограниченным в фазовом пространстве типом установившихся движений является возврат Пуанкаре. Возвращаемость по Пуанкаре означает, что в системах с заданной мерой практически любая фазовая траектория, исходящая из заданной начальной точки, бесконечное число раз во времени пройдет в сколь угодно малой окрестности исходного состояния. Основной характеристикой, необходимой для оценки состояния динамической системы, а также прогнозирования ее поведения во времени является время возврата Пуанкаре. Движения в динамических системах, для которых существуют возвраты, Пуанкаре назвал устойчивыми по Пуассону [1].

Анализ систем, устойчивых по Пуассону, является одной из классических проблем теории динамических систем. Существуют различные определения устойчивости, одно из которых – устойчивость по Пуассону. Этот термин был введен Анри Пуанкаре [2] на основе анализа работ С. Пуассона по устойчивости планетарных орбит. Для того, чтобы имела место полная устойчивость в проблеме трех тел, необходимо три условия: ни одно из тел не должно бесконечно удаляться, расстояние между двумя телами не должно быть меньше некоторого предела, то есть они не должны сталкиваться, система должна проходить бесконечно много раз сколь угодно близко от ее начального положения [2]. А. Пуанкаре отметил, что если точно выполняется третье условие, а выполнение первых двух не известно, то такие системы следует называть устойчивыми по Пуассону.

Самая первая работа Пуанкаре в этом направлении была опубликована еще в XIX веке [3], где была сформулирована теорема Пуанкаре о возвращаемости. Работы XX века были в основном посвящены исследованию теоретических особенностей выполнения теоремы Пуанкаре и возвратов Пуанкаре для различных типов множеств [4–8]. Тем не менее, несмотря на множество исследований и многолетнюю историю, идея возвращаемости сложных систем в окрестность некоторого состояния остается одной из фундаментальных концепций современной науки. С укреплением компьютерных технологий появился новый метод исследования статистики возвратов Пуанкаре, основанный на численном моделировании. Последние работы в основном посвящены исследованию особенностей в согласовании уже проведенных теоретических исследований и результатов численного моделирования [9–20].

Идея возвратов Пуанкаре позволяет с единых позиций рассматривать такие процессы как изменение климата [21], солнечной активности [22, 23], динамики популяций [24–27], изменения на финансовых рынках [28–30], распространение эпидемий [25, 31–33], поведение ДНК [20], нахождение полезного сигнала из зашумленного [34] и многие другие [35–37]. Многолетними наблюдениями установлено, что многие эволюционные процессы в природе и обществе характеризуются свойством возвращаемости. Исследование статистики подобных возвратов направлено на решение задачи прогнозирования.

Еще одним направлением развития идеи Пуанкаре о возвращении является концепция «recurrency plot», введенная в работе [38]. В отличие от вычислений времен возврата Пуанкаре в  $\varepsilon$ -окрестность некоторого начального состояния, метод «recurrency plot» основан на анализе времен, в течение которых фазовые траектории динамической системы остаются в  $\varepsilon$ -окрестности друг друга. Детальное исследование этого метода и возможных применений изложено в работах [15, 37, 39–41]. В данной работе этот метод не будет затрагиваться.

К настоящему времени создана математическая теория возвратов Пуанкаре, описывающая статистику последовательностей времен возвратов как

в окрестность заданного состояния (локальная теория или локальный подход [1, 3, 42–47]), так и в рассматриваемое множество фазовых траекторий системы (глобальная теория [48–53]). Доказана взаимосвязь среднего времени возврата в окрестность заданного состояния с вероятностью посещения фазовой траекторией этой окрестности (лемма Каца [42, 43]). Установлено, что для систем с перемешиванием (хаотических систем) плотность распределения случайной последовательности времен возврата в малую окрестность исходного состояния на больших временах подчиняется экспоненциальному закону [44]. Классический результат Пуанкаре [3] обобщен на случай, когда правые части дифференциальных уравнений динамической системы являются периодическими функциями времени с одинаковым периодом [54, 55]. Другими словами, устойчивость по Пуассону доказана для неавтономных систем с периодическим воздействием. Ряд важных результатов по статистике времен возврата в гамильтоновых системах представлен в работах [9, 13, 56].

Теория возвратов может быть применена для решения ряда прикладных задач диагностики. Недавние работы показывают, что на основе статистических характеристик последовательности времен возврата может быть найдена фрактальная размерность хаотических систем [57, 58], старший ляпуновский показатель [59]. Кроме того, недавние исследования показали, что на основе локальной [60, 61] и глобальной [62] теории возвратов может быть диагностирован эффект хаотической синхронизации.

Эргодические системы имеют особенную динамику поведения, характеризующуюся тем, что почти каждое состояние с определенной вероятностью находится вблизи любого другого состояния системы. На данный момент проблема возвратов Пуанкаре в эргодических системах с перемешиванием полностью решена и описана в работах [51, 52, 59]. Основным математическим обоснованием является теорема Каца [42].

Исследование статистики возвратов Пуанкаре в системах с перемешиванием (в хаотических системах) является проблемой достаточно хорошо изучен-

ной как теоретически, так и численно [59, 63, 64]. Что же касается эргодических систем без перемешивания, известен ряд теоретических результатов, полученных для отображения линейного сдвига на окружности [65]. Линейный сдвиг на окружности отвечает динамике квазипериодических колебаний в сечении гладкого двумерного тора. Простейшим примером является динамика генератора Ван дер Поля с внешним периодическим воздействием. Если параметр возбуждения генератора достаточно мал ( $\alpha \ll 1$ ) и амплитуда внешнего воздействия так же является малой, то образом возникающих двухчастотных квазипериодических колебаний в трехмерном фазовом пространстве системы будет гладкий двумерный тор. В сечении двумерного тора мы получим инвариантную замкнутую кривую, близкую к окружности, которая формируется точками пересечения фазовой траектории с секущей Пуанкаре. Таким образом, отображение линейного сдвига на окружности является простейшей дискретной моделью, описывающей двухчастотные квазипериодические колебания в предположении, что нелинейными эффектами пренебрегается. С учетом нелинейности, когда, к примеру, параметр возбуждения и амплитуда внешней силы не являются малыми, отображение Пуанкаре двумерного тора становится нелинейным. Возникает вопрос о применимости теоретических результатов, полученных для линейного сдвига на окружности, в общем случае, когда отображение окружности является нелинейным. Основным выводом линейной теории является то, что размерность Афраймовича–Песина для возвратов Пуанкаре равна единице. Что произойдет в случае, когда отображение окружности будет принципиально нелинейным? Как повлияет на статистику возвратов Пуанкаре учет шумовых возмущений? Эти вопросы до настоящего времени являлись открытыми, и в настоящей диссертации на них дается ответ.

**Целью данной работы** является исследование применимости теории времен возврата Пуанкаре, разработанной для отображения линейного сдвига на окружности, к эргодическим системам без перемешивания. В качестве примеров будут рассмотрены линейное и нелинейное отображения окружности,



стробоскопическое сечение неавтономного генератора Ван дер Поля при различных амплитудах внешней силы, а также странный нехаотический аттрактор. Кроме того, представляет интерес рассмотреть особенности статистики времен возврата Пуанкаре в одном из примеров гамильтоновых систем – неавтономном консервативном осцилляторе. Для всех рассматриваемых множеств планируется исследование мультифрактальных характеристик последовательности времен возврата путем расчета размерности Афраймовича–Песина.

Для достижения поставленной цели в рамках диссертационного исследования необходимо решить следующие **основные задачи**:

1. Исследовать применимость разработанной теории времен возврата Пуанкаре к нелинейному отображению окружности. Выявить возможные несоответствия.
2. Изучить влияние числа вращения на статистику времен возврата Пуанкаре в отображении окружности как в линейном, так и в нелинейном случаях.
3. Разработать метод нахождения калибровочной функции и вычисления размерности Афраймовича–Песина в отображении окружности для различных чисел вращения, линейного и нелинейного случаев, а также при добавлении белого гауссовского шума.
4. На основе полученных результатов для отображения окружности выявить условия применимости полученных результатов к множеству, полученном в стробоскопическом сечении неавтономного генератора Ван дер Поля.
5. Провести анализ изменений статистики возвратов Пуанкаре в неавтономном генераторе Ван дер Поля в зависимости от амплитуды внешнего воздействия.
6. Провести анализ множеств, полученных в стробоскопическом сечении гамильтоновой системы – консервативного математического маятника под

внешним гармоническим воздействием. Установить тип калибровочных функций и размерности Афраймовича–Песина для этих множеств.

7. Провести расчеты статистических характеристик возвратов Пуанкаре и вычислить размерность Афраймовича–Песина на странном не хаотическом аттракторе в логистическом отображении вблизи критической точки рождения динамического хаоса.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка цитируемой литературы.

**Во введении** обосновывается актуальность выбранной темы диссертации, проводится краткий обзор имеющихся в научной литературе результатов по теме проводимого исследования, определяются цели и задачи исследования, формулируются положения и результаты, выносимые на защиту.

**В первой главе** проводится исследование времен возврата Пуанкаре в отображении окружности. Приводится краткий обзор имеющихся аналитических результатов. Далее обосновывается выбор управляющих параметров, для которых проводятся исследования. Показывается, что в случае золотого и серебряного сечений имеет место ступенчатая зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности возврата, названная «Лестницей Фибоначчи». До настоящей работы аналитические выкладки свидетельствовали лишь о линейной зависимости. Однако численный эксперимент показал наличие ступенчатой функции. Основная часть главы посвящена исследованию статистики возвратов Пуанкаре для различных чисел вращения. Исследуется влияние алгебраических, диофантовых, трансцендентных и ливиллевых чисел вращения. Далее приводится аналитическая аппроксимация «Лестницы Фибоначчи», которая имеет место для любых чисел вращения. Завершает главу исследование влияния нелинейности и шума на «Лестницу Фибоначчи». Показывается, что независимо от типа числа вращения размерность Афраймовича–Песина составляет величину, равную единице.

**Во второй главе** рассматривается множество, полученное в стробоскопическом сечении неавтономного генератора Ван дер Поля. В первую очередь приводится краткое описание самого множества и описание процесса вычисления числа вращения для этого множества в зависимости от параметров системы. В основной части решается задача построения «Лестницы Фибоначчи» и расчета размерности Афраймовича–Песина для различных значений иррациональных чисел вращения и различных значений амплитуды внешнего воздействия. В итоге проводится сравнение теоретических результатов, полученных для линейного сдвига на окружности и представленных в Главе 1, с данными численных экспериментов с неавтономным генератором.

**В третьей главе** исследуются множества, которые могут быть получены в стробоскопическом сечении неавтономного консервативного осциллятора (гамильтоновой системы). Сначала приводится описание особенностей фазового пространства гамильтоновой системы. Далее приводится описание вычисления числа вращения для стробоскопического сечения неавтономного консервативного осциллятора. Рассматривается зависимость числа вращения от параметров системы и начальных условий. Для случая золотого сечения исследуются множества, полученные для различных значений амплитуды внешнего воздействия. Для этих множеств проводится построение зависимости среднего минимального времени возврата Пуанкаре, исследуется возможность получения «Лестницы Фибоначчи» и рассчитывается размерность Афраймовича–Песина. Исследования проводятся для различных начальных условий.

**В заключении** сформулированы основные выводы и результаты диссертационной работы.

**В приложении** приводится исследование статистики возвратов Пуанкаре для аттрактора Фейгенбаума, который может быть получен в логистическом отображении в критической точке рождения динамического хаоса. Для этого множества рассчитывается размерность Афраймовича–Песина.

Материал диссертационной работы изложен на 132 страницах, содержит 55 иллюстраций и список цитируемой литературы из 130 наименований.

**Научная новизна** результатов диссертационной работы определяется следующим:

1. Впервые установлено, что в эргодических множествах без перемешивания зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности возврата является ступенчатой функцией, названной «Лестницей Фибоначчи». Количественные свойства этой функции зависят от числа вращения и подходящих к числу вращения дробей.
2. Сформулированы основные свойства «Лестницы Фибоначчи». Приведена аналитическая аппроксимация зависимости ступенчатой функции от размера области возврата для различных типов числа вращения.
3. Рассмотрено влияние типа числа вращения (диофантово или лиувиллево, алгебраическое или трансцендентное) на зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера области возврата, а также на возможность вычисления размерности Афраймовича–Песина.
4. Для отображения окружности показано влияние нелинейности и шума на «Лестницу Фибоначчи».
5. Рассмотрены условия получения «Лестницы Фибоначчи» для множеств, полученных в стробоскопических сечениях неавтономного генератора Ван дер Поля и неавтономного консервативного осциллятора (примера гамильтоновой системы).
6. При помощи численного моделирования подтвержден теоретически доказанный факт, что в случае эргодических множеств без перемешивания размерность Афраймовича–Песина имеет значение, равное единице.

**Достоверность научных выводов работы** подтверждается соответствием результатов, полученных в численном эксперименте, с данными строгой теории, когда таковые существуют. Разработанное программное обеспечение тестировалось на ранее полученных и опубликованных результатах. Все полученные результаты численных экспериментов воспроизводимы и не зависят от конкретных схем численного анализа.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:**

1. В эргодических множествах без перемешивания, порождаемых отображением окружности, зависимость минимального времени возврата от размеров области возврата при иррациональных числах вращения представляет собой ступенчатую функцию, которая для чисел вращения, отвечающих золотому и серебряному сечениям, была названа «Лестницей Фибоначчи». Численно установлены и аналитически доказаны универсальные свойства «Лестницы Фибоначчи»: ширина и высота ступенек лестницы соответствуют величине  $|\ln \rho|$ , где  $\rho$  – число вращения.
2. Влияние нелинейности и добавление аддитивного шума в системы, порождающие эргодические множества без перемешивания, ведет к разрушению ступенчатого характера «Лестницы Фибоначчи». Эта зависимость стремится к линейной, но величина размерности Афраймовича–Песина остается по величине близкой к единице.
3. Для эргодических множеств без перемешивания, реализуемых в отображении окружности, в стробоскопических сечениях неавтономного генератора Ван дер Поля и консервативного осциллятора, а также на странном нехаотическом аттракторе Фейгенбаума статистика возвратов Пуанкаре характеризуется величиной размерности Афраймовича–Песина, равной единице.

**Научная и практическая значимость результатов** диссертационной работы обусловлена тем, что научные результаты вносят определенный новый вклад в современную теорию колебаний и теорию динамических систем, расширяют возможности применения статистики времен возврата Пуанкаре при исследовании характеристик динамических систем. В ходе исследования впервые показано, что зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности возврата является ступенчатой функцией, названной «Лестницей Фибоначчи». Установлено влияние числа вращения на характер этой зависимости, представлена ее аналитическая аппроксимация. Аналогичная зависимость может быть получена в стробоскопических сечениях неавтономного генератора Ван дер Поля и неавтономного консервативного осциллятора. Установлено, что для эргодических множеств размерность Афраймовича–Песина имеет значение, равное единице. Материалы диссертации частично используются в курсах лекций по теории колебаний. Предполагается дальнейшее внедрение результатов работы в учебном процессе.

**Апробация работы.** Основные результаты научных исследований были представлены на пяти международных конференциях:

1. Международная конференция, посвященная памяти Л.П. Шильникова, 1–5 июля 2013, Нижний Новгород, N.I. Biryukova, “Statistical Characteristics of Poincaré Return Times within the Local Approach under External Force and Noise Conditions”.
2. Международная конференция “Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic systems: Unraveling Complexity”, 19–21 мая 2014, Саратов, N.I. Biryukova, V.S. Anishchenko, “Peculiarities of Poincaré recurrences in logistic and cubic maps”.
3. Международная конференция “Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic systems: Unraveling Complexity”, 19–21 мая 2014, Саратов, N.I.

Biryukova, T.V. Abrosimova, V.S. Anishchenko, “Poincaré recurrences in a stroboscopic section of a nonautonomous van der Pol oscillator”.

4. Международная конференция “International Symposium Topical Problems of Nonlinear Wave Physics (NWP-2014)”, 17–23 июля 2014, Нижний Новгород, N.I. Semenova, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko, “The Afraimovich-Pesin Dimension Of Poincaré Recurrences In A Circle Map”.
5. Международная конференция “Saratov Fall Meeting”, 23–26 сентября 2014, Саратов, N.I. Semenova, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko, “Poincaré recurrences in a circle map. Fibonacci stairs”.

**Личный вклад.** Все результаты, представленные в данной работе, были получены лично автором. Все численные эксперименты проводились при помощи программного обеспечения, разработанного автором. Также автор принимал активное участие в постановке задач и интерпретации полученных экспериментальных данных.

**Публикации.** Автором опубликовано 17 статей в журналах, рекомендованных ВАК [59, 64, 66–80]. Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 печатных изданиях (7 статей в журналах, рекомендованных ВАК [59, 64, 66–70] и 3 работы в сборниках тезисов конференций [81–83]).

# Глава 1. ВОЗВРАТЫ ПУАНКАРЕ В ОТОБРАЖЕНИИ ОКРУЖНОСТИ

## 1.1 Возвраты Пуанкаре. Размерность

### Афраймовича–Песина

Любой установившийся режим колебаний нелинейных диссипативных систем представляется устойчивыми по Пуассону траекториями [84]. Это относится не только к периодическим и квазипериодическим движениям, но и к динамическому хаосу – режиму, который можно считать установившимся в силу постоянства во времени усредненных статистических характеристик.

Возврат траектории в  $\varepsilon$ -окрестность произвольно выбранной начальной точки называют возвратом Пуанкаре [84]. Время возврата Пуанкаре – это интервал времени, по прошествии которого траектория возвращается в окрестность точки  $\vec{x}_0$  заданного радиуса  $\varepsilon$ . Время возврата может быть постоянным (если рассматривается устойчивое периодическое движение) или представлять собой случайную последовательность  $\{\tau_k\}$ , где  $\tau_k$  – случайные времена попадания фазовой траектории в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $\vec{x}_0$ . Существует два подхода к анализу времен возврата Пуанкаре: локальный и глобальный. В случае локального подхода возвраты Пуанкаре рассчитываются в окрестности определенной точки  $\vec{x}_0$ .

Эргодические системы имеют особенную динамику поведения, характеризующуюся тем, что почти каждое состояние с определенной вероятностью находится вблизи любого другого состояния системы. Основные известные результаты для эргодических систем с заданной вероятностной мерой наиболее



подробно описаны в работах [51, 52, 59]. Основным математическим обоснованием является теорема Каца [42], которая утверждает что среднее время возврата  $\langle \tau_r(\Delta) \rangle$  в некоторую область  $\Delta$  принадлежащую рассматриваемому множеству фазового пространства, обратно пропорционально вероятности посещения фазовой траекторией этой области  $P(\Delta)$ :

$$\langle \tau_r(\Delta) \rangle = \frac{\beta}{P(\Delta)}. \quad (1.1)$$

Установлено, что для дискретных систем  $\beta = 1$  [42, 85].

Изначально доказательство было представлено для системы, характеризующейся эргодической вероятностной мерой и являющейся обратимой. Впоследствии был проведен ряд исследований, которые показали, что условие обратимости обязательным не является, а теорема Каца может быть доказана, используя лишь условие эргодичности.

Вероятность посещения траекторией  $\varepsilon$ -окрестности начального состояния для малых  $\varepsilon$  можно записать в виде [85]:

$$P(\varepsilon) \approx p(x)\varepsilon^{d_f}, \quad (1.2)$$

где  $p(x)$  – плотность распределения,  $d_f$  – фрактальная размерность множества.

Еще одним важным математическим результатом является доказательство того, что плотность распределения времен возврата для эргодических систем с заданной мерой на больших временах подчиняется экспоненциальному закону [45] :

$$p(\tau_r) = \frac{1}{\langle \tau_r \rangle} \exp\left(-\frac{\tau_r}{\langle \tau_r \rangle}\right), \quad \tau_r \geq \tau_r^*. \quad (1.3)$$

Здесь  $\langle \tau_r \rangle$  – среднее время первого возврата в  $\varepsilon$ -окрестность,  $\tau_r^*$  – некоторое значение  $\tau_r$ . Закон (1.3), справедлив в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  для всех  $\tau_r \geq \tau_r^*$ . Также отметим, что для доказательства (1.3) вводят более строгое требование, чем для доказательства теоремы Каца: наличие перемешивания. Из свойства перемешивания следует эргодичность, но обратное не верно. Изложенное выше относится к проблеме возвратов в заданную окрестность  $\varepsilon$  некоторой точки исследуемого

множества и в этом смысле является локальным подходом. Существует иной подход к проблеме возвратов Пуанкаре – глобальный.

Сравнительно недавно появились математические работы, в которых исследуется проблема возвратов Пуанкаре с точки зрения, так называемого, глобального подхода. При глобальном подходе определяется среднее время возврата по всем элементам полного покрытия рассматриваемого множества фазовых траекторий в целом [49, 51]. Среднее время возврата в этом случае будет зависеть от совокупности начальных точек, заданных в каждом элементе покрытия множества, и будет являться функцией всего множества. Одной из основных характеристик возвратов Пуанкаре при глобальном подходе является фрактальная размерность множества времен возвратов, названная в работе [48] размерностью Афраймовича–Песина (АП-размерность). В общем случае оценкой размерности Афраймовича–Песина сверху является величина топологической энтропии [51]. Для одномерных хаотических отображений доказано, что размерность Афраймовича–Песина совпадает с величиной показателя Ляпунова [86].

Глобальный подход к проблеме Пуанкаре имеет математическое обоснование, изложенное в работах [49, 51]. Он заключается в следующем: всё рассматриваемое множество траекторий (например, аттрактор системы) покрывается малыми кубиками (шарами) размером  $\varepsilon \ll 1$ . Далее каждый элемент покрытия рассматривается отдельно и для него находится минимальное время первого возврата Пуанкаре (возврата фазовой траектории в  $\varepsilon$ -окрестность) –  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon_i)$ , после чего определяется среднее минимальное время первого возврата по всему множеству  $m$  элементов покрытия:

$$\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{\text{inf}}(\varepsilon_i). \quad (1.4)$$

Также известно, что [51]:

$$\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle \sim \phi^{-1} \left( \varepsilon^{\frac{d}{\alpha_C}} \right), \quad (1.5)$$

где  $\alpha_C$  – размерность последовательности времен возврата, введенная Афраймовичем и Песиным [49, 52, 53],  $d$  – размерность рассматриваемого множества. Функция  $\phi$  может иметь вид:  $\phi(t) \sim \frac{1}{t}$ ,  $\phi(t) \sim e^{-t}$ ,  $\phi(t) \sim e^{-t^2}$ , и т.д., что зависит от топологической энтропии системы  $h_T$  и от мультифрактальности исследуемого множества (если она существует). Рассмотрим, как изменяется  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  в случае различных значений энтропии системы  $h_T$  [51]:

- $h_T = 0$  (эргодическое множество без перемешивания). В этом случае функция  $\phi$  выбирается в виде  $\phi(t) \sim 1/t$ . Из (1.5) следует, что для среднего времени первого возврата Пуанкаре в этом случае будет справедливо:

$$\ln \langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle \sim -\frac{d}{\alpha_C} \ln \varepsilon. \quad (1.6)$$

- $h_T > 0$  (эргодическое множество с перемешиванием). Для этого случая наиболее типичным является задание  $\phi(t)$  в виде экспоненты:  $\phi(t) \sim e^{-t}$ . Тогда уравнение (1.5) будет иметь вид:

$$\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle \sim -\frac{d}{\alpha_C} \ln \varepsilon. \quad (1.7)$$

На данный момент исследование возвратов Пуанкаре в системах с перемешиванием является проблемой достаточно изученной [63, 64]. Ниже приведены некоторые основные результаты для систем с перемешиванием.

Как показано в книге [87], топологическая энтропия  $h_T$  является оценкой сверху энтропии Колмогорова–Синяя, которая в свою очередь определяется старшим показателем Ляпунова  $\lambda^+$ . Из этого утверждения следует, что отношение (1.7) подходит для анализа хаотических динамических систем с экспоненциальным разбеганием, так как для них характерна положительная энтропия ( $h_T > 0$ ). Уравнение (1.6) для хаотических систем справедливо только в случае критических значений параметра, при которых энтропия Колмогорова–Синяя обращается в нуль. Как видно из формул (1.5), (1.6) и (1.7) размерность Афраймовича–Песина (АП-размерность) является одной из основных характеристик времени возврата Пуанкаре при глобальном подходе. Размерность

Афраймовича–Песина можно определить как отношение размерности аттрактора системы  $d$  к угловому коэффициенту  $k$  наклона аппроксимирующей функцию (1.7) прямой:

$$\alpha_C = -\frac{d}{k}. \quad (1.8)$$

Одним из основных результатов исследования размерности Афраймовича–Песина является доказательство того, что для одномерных хаотических отображений эта размерность совпадает по величине с положительным показателем Ляпунова [86]. В статье [63] было показано, что такое утверждение справедливо и для двумерных систем. Этот результат можно использовать для оценки фрактальной размерности из уравнения (1.8). Тогда фрактальную размерность можно определить по формуле:

$$d_f = \lambda_1 |k|. \quad (1.9)$$

Все вышеизложенные свойства были подтверждены для систем с перемешиванием ( $h_T > 0$ ). Что же касается множеств без перемешивания ( $h_T = 0$ ), то здесь картина иная, и размерность Афраймовича–Песина в этом случае обладает другими интересными свойствами.

Как уже отмечалось, задача исследования статистики возвратов Пуанкаре в эргодических системах с перемешиванием на данный момент хорошо изучена как теоретически, так и численно. Возвраты Пуанкаре в эргодических системах без перемешивания исследованы теоретически для отображения линейного сдвига на окружности [65], но экспериментальные и численные результаты для этой и других систем отсутствуют. Линейный сдвиг на окружности отвечает динамике квазипериодических колебаний в сечении гладкого двумерного тора. Простейшим примером системы, которая демонстрирует множество без перемешивания, является отображение окружности, о котором пойдет речь в следующем разделе.

## 1.2 Отображение окружности

Одной из эталонных моделей нелинейной динамики является отображение окружности. Оно моделирует динамику движения на двумерном торе и является простейшей дискретной моделью, описывающей двухчастотные квазипериодические колебания в предположении, что нелинейными эффектами пренебрегается. Также его можно интерпретировать как систему, моделирующую динамику автоколебательной системы с неизохронными колебаниями при воздействии периодических импульсов.

Стандартное отображение окружности (или синус-отображение окружности) имеет следующий вид:

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + \Delta + K \sin \Theta_n \quad \text{mod } 2\pi, \quad (1.10)$$

где переменная  $\Theta_n$  определена в интервале от нуля до  $2\pi$ , и ее следует понимать как угол, задающий точку на окружности единичного радиуса. Отсюда можно сделать вывод, что отображение (1.10) описывает движение точки по окружности, то есть, выражаясь математическим языком, является «отображением окружности на себя» [88]. Знак *mod*  $2\pi$  означает, что для фазовой переменной отбрасывается часть, кратная  $2\pi$ , так как отличающиеся на  $2\pi$  точки окружности неразличимы.

Интерес к отображению окружности (1.10) обусловлен тем, что оно является простейшим отображением, демонстрирующим появление квазипериодических режимов и явление синхронизации.

На рисунке 1.1 приведена карта динамических режимов системы (1.10) на плоскости параметров  $(\Delta/2\pi, K)$  [88].

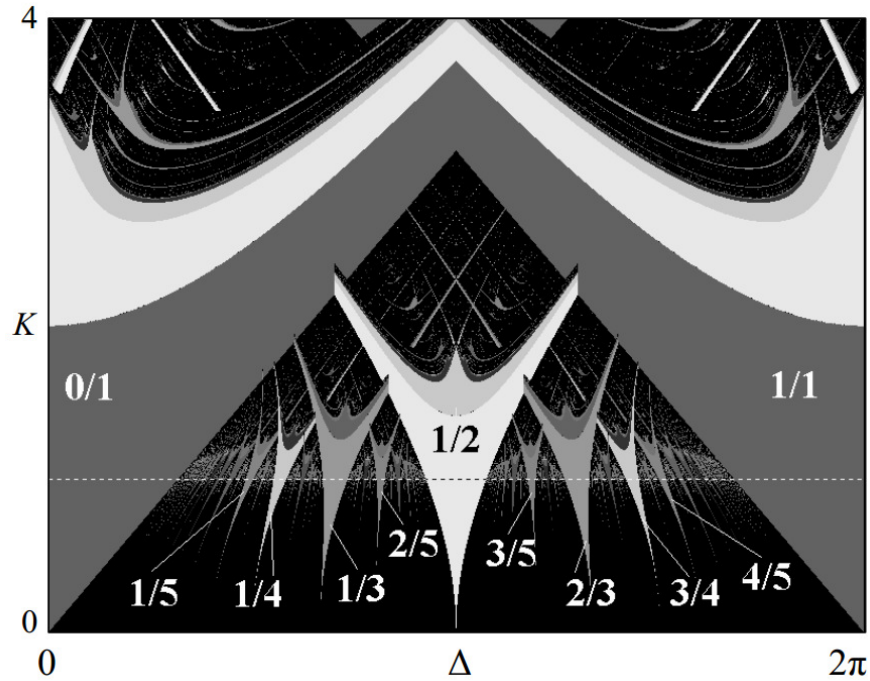


Рис. 1.1. Карта динамических режимов на плоскости параметров  $(K, \Delta)$  отображения окружности (1.10). Черным цветом отмечена область непериодических режимов, различными оттенками серого цвета – области циклов различных периодов. Пунктиром проведена линия перекрытия языков Арнольда при  $K = 1$ , подписаны соответствующие языкам синхронизации числа вращения [88]. Рисунок взят из книги [88]

### 1.2.1 Квазипериодические режимы. Области синхронизации с постоянным числом вращения

Один из сценариев перехода к хаосу заключается в образовании аттрактора в виде инвариантной кривой, а затем ее разрушении из-за потери гладкости. Термин «инвариантная кривая» означает, что любая точка этой кривой отображается в точку, принадлежащую этой кривой. Инвариантная кривая для (1.10) есть окружность. Если рассматриваемая система – отображение окружности, то инвариантная кривая имеет вид окружности. Это обусловлено тем, что в отображении окружности амплитуда постоянная. Так как инвариантной кривой со-

ответствуют квазипериодические движения, то этот сценарий обычно называют переходом к хаосу через разрушение квазипериодических движений [88, 89].

В область существования инвариантной кривой «встроены» и области периодических режимов – циклов. Такие циклы называют резонансными циклами. Движение изображающей точки по инвариантной кривой качественно показано на рисунке 1.2,а, где цифрами обозначена последовательность появления точки на окружности. Если изображающая точка не попадает в предыдущие положения, то ее движение нельзя считать периодическим, и рано или поздно множество ее состояний будет представлять собой окружность (см. рисунок 1.2,а). Такое движение называется квазипериодическим. Если же после некоторого числа итераций изображающая точка попадает точно в «свой след» (рисунок 1.2,б), то процесс является периодическим, что соответствует резонансному циклу [88].

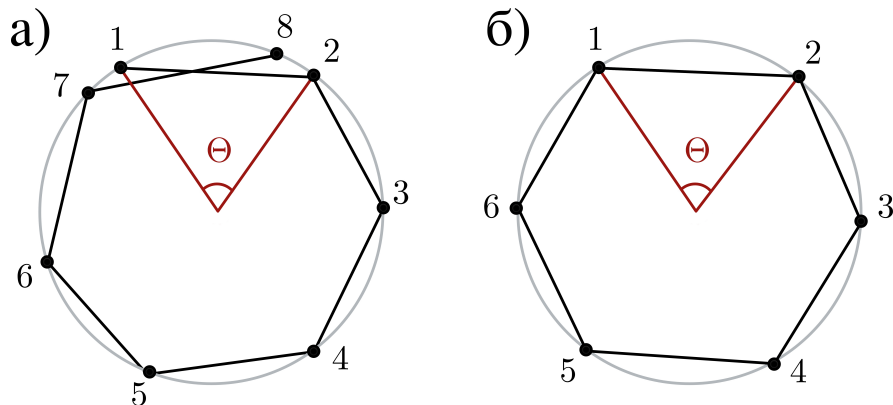


Рис. 1.2. (а) – динамика изображающей точки на инвариантной кривой, (б) – резонансный цикл периода 6

На плоскости параметров (рисунок 1.1) инвариантной кривой соответствует область неперiodических режимов. Области резонансных циклов обычно имеют вид узких сужающихся к своему основанию языков, встроенных в область неперiodических движений. Система областей периодических режимов подобного типа носит название языков Арнольда [88].

## 1.2.2 Число вращения

Число вращения является общепринятой характеристикой, с помощью которой можно различить периодические и квазипериодические режимы. Оно дает обобщающее представление о динамике переменной на окружности и определяется как

$$\rho(\Delta, K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Theta_n - \Theta_0}{2\pi n}, \quad (1.11)$$

где  $\Theta_n$  – фаза точки в отображении окружности (1.10), причем в этом случае отображение берется со снятым знаком модуля, т.е. кратная  $2\pi$  часть не отбрасывается.  $\Theta_0$  – начальный угол,  $n$  – число итераций отображения. Таким образом число вращения определяется как среднее приращение угла  $\Theta$  за одну итерацию отображения.

В рамках такой интерпретации фаза  $\Theta$  задает угол на окружности. В соответствии с дискретным отображением, эта точка перемещается по окружности так, что после каждой итерации угол изменяется на некоторую величину. Если эта величина представляет собой рациональное число  $p/q$ , то через  $q$  итераций точка начнет повторять свою траекторию, совершив при этом  $p$  полных оборотов. Отсюда следует, что  $q$  определяет период движения, а  $p$  – конкретный тип движения. Если  $p = 1$ , то точка перемещается по своим следам, попадая точно в ближайший след, если же  $p = 2$ , то точка попадает во второй по близости след (см. рисунок 1.3).

Режим будет периодическим, если начальное значение  $\Theta_0$  через некоторое число шагов  $q$  воспроизводится с точностью до добавки целого числа полных периодов, т.е.  $\Theta_q - \Theta_0 = 2\pi p$ . Такому режиму соответствует рациональное число вращения  $\rho = p/q$ .



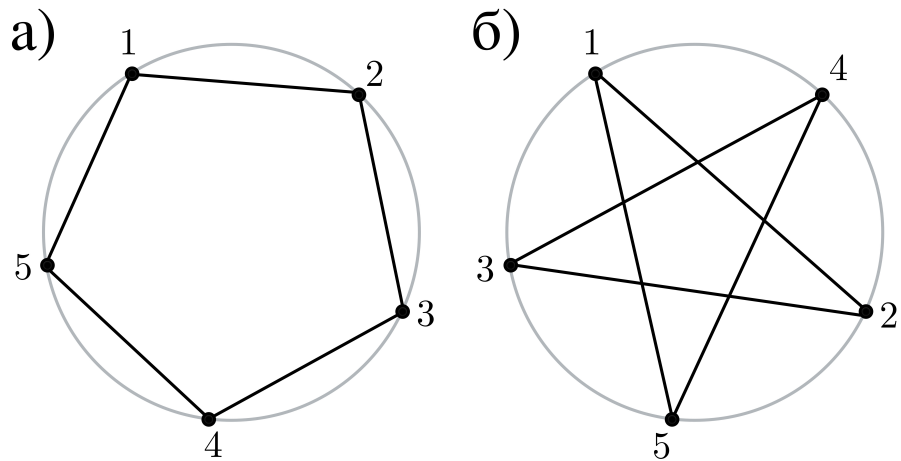


Рис. 1.3. Режимы синхронизации: (а) –  $p/q = 1/5$ , (б) –  $p/q = 2/5$

Квазипериодические режимы имеют иррациональное число вращения. В этом случае множество итераций изображающей точки будет представлять всюду плотно покрытую окружность.

## 1.3 Иррациональные числа вращения в отображении окружности

### 1.3.1 Цепные и подходящие дроби

Иррациональное число – это вещественное число, которое не является рациональным, то есть не может быть представлено в виде дроби  $p/q$ , где  $p$  – целое число,  $q$  – натуральное число.

Наряду с записью числа в виде обыкновенной дроби  $p/q$  с числителем и знаменателем, существует еще одно представление – в виде цепной дроби. У такой дроби знаменатель сам содержит другую дробь, знаменатель которой, в свою очередь, тоже имеет дробь, и так далее [90].

Для того, чтобы перейти от обыкновенной дроби к цепной, требуется повторять действия взятия целой части числа и нахождения обратной величины от результата. Рассмотрим число  $\frac{20}{17}$  и разложим его в цепную дробь:

$$\frac{20}{17} = 1 + \frac{3}{17} = 1 + \frac{1}{\frac{17}{3}} = 1 + \frac{1}{5 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

Таким образом любое число можно представить в виде цепной дроби. В случае рационального числа, числа, представимого в виде обыкновенной дроби, цепная дробь является конечной:

$$\rho = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}.$$

Эту процедуру можно повторить с иррациональным числом. Однако в случае иррационального числа цепная дробь будет бесконечной. Рассмотрим пример иррационального числа  $\pi$  ( $\pi = 3.141592654\dots$ ).

$$\begin{aligned}\pi &= 3 + 0.141592654 \dots = 3 + \frac{1}{7.062513306 \dots} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15.99659441 \dots}} = \\ &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1.003417228 \dots}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292.6348337 \dots}}}}.\end{aligned}$$

В общем случае иррациональное число может быть представлено в виде:

$$\rho = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}. \quad (1.12)$$

Последовательность коэффициентов  $a_i$ ,  $i \geq 0$ , записанная в виде:

$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ , называется цепной или непрерывной дробью.

Иррациональные числа вращения  $\rho$  можно аппроксимировать отношением двух целых чисел:  $p_i/q_i$ . Такой прием называется методом рациональных приближений или аппроксимаций.  $i$ -ой подходящей дробью для цепной дроби  $\rho = [a_0; a_1, a_2, a_3 \dots]$  называется конечная цепная дробь  $[a_0; a_1, a_2 \dots a_i]$ , значение которой равно некоторому рациональному числу  $p_i/q_i$ . Последовательности числителей и знаменателей подходящих дробей  $p_i$  и  $q_i$  являются возрастающими, причем они определяются с помощью рекуррентных формул и коэффициентов цепной дроби (1.12) [90–94]:

$$\begin{aligned}q_{-1} &= 0, \quad q_0 = 1, \quad q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2} \\ p_{-1} &= 1, \quad p_0 = a_0, \quad p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2},\end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $a_i$  – последовательность натуральных коэффициентов цепной дроби,  $p_i$ ,  $q_i$  – числители и знаменатели подходящих дробей.

### 1.3.2 Классификация иррациональных чисел

Скорость приближений иррационального числа (см. раздел 1.3.1) может быть различной. По скорости сходимости рациональных приближений ирраци-

ональные числа разделяют на диофантовы и лиувиллевы [95]. Для характеристики того, насколько хорошо иррациональное число  $\rho$  может быть приближено рациональными числами, вводится такое понятие, как мера иррациональности  $\mu$  [65]. Значение меры иррациональности определяется следующим образом:

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^\mu}, \quad (1.14)$$

где  $p/q$  – подходящая дробь из множества пар целых чисел  $p_i$  и  $q_i$ ,  $C$  – константа. Если мера иррациональности конечна, т.е.  $2 \leq \mu < \infty$ , тогда число  $\rho$  называется диофантовым. В противном случае (если  $\mu \rightarrow \infty$ )  $\rho$  есть лиувиллево число. Рассмотрим случай диофантовых приближений числа вращения  $\rho$ . Следуя [49, 65], представим (1.14) в виде:

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{n^{[\nu(\rho)+1+\delta]}}, \quad (1.15)$$

где  $\delta > 0$ ,  $\nu(\rho) = \sup \nu(\rho)$  – максимальная скорость диофантовых приближений иррационального числа по всем возможным парам  $p$  и  $q$ . Супремум берется по все тем  $\nu$ , для которых неравенство (1.15) имеет бесконечное множество решений  $(p, q)$  (со взаимно простыми  $p, q > 0$ ) [51].

Наряду с делением всех иррациональных чисел по скорости рациональных приближений, существует еще один способ классификации. Все иррациональные числа можно разделить на трансцендентные и алгебраические [96]. Алгебраические иррациональные числа – это числа, являющиеся корнями многочлена, тождественно равного нулю:

$$C_N x^N + \dots + C_1 x + C_0 = 0. \quad (1.16)$$

Примерами таких чисел являются  $\sqrt[k]{2}$ ,  $\sqrt[k]{3}$ , ..., где  $k$  – натуральные числа. Числа, которые не являются алгебраическими, называются трансцендентными. Примеры таких чисел:  $\pi$ ,  $e$ ,  $\ln 2$  и другие.

В данной работе будет рассматриваться поведение отображения окружности при различных иррациональных числах вращения как трансцендентных и алгебраических, так и лиувиллевых и диофантовых.

Интересен тот факт, что любое алгебраическое число является диофантовым, любое лиувиллево число является трансцендентным, но обратное не верно.

## 1.4 Связь размерности Афраймовича–Песина с мерой иррациональности

Как уже отмечалось, зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности представляется как (1.5). В случае эргодического множества эта зависимость имеет вид (1.6).

В работе [65] аналитически было показано, что в случае эргодических множеств эта же зависимость может быть аппроксимирована в виде:

$$\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle \sim \varepsilon^{-\frac{d}{\nu(\rho)}} \quad \text{или} \quad \ln \langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle \sim -\frac{d}{\nu(\rho)} \ln \varepsilon, \quad (1.17)$$

где  $\nu(\rho)$  – скорость иррациональных приближений (см. раздел 1.3.2). Из сравнения выражений (1.6) и (1.17) следует, что размерность Афраймовича–Песина совпадает со скоростью иррациональных приближений.

## 1.5 Золотое и серебряное сечения

Следующие разделы Главы 1 будут посвящены исследованию статистики возвратов Пуанкаре для отображения окружности (1.10) при различных значениях числа вращения. А именно, построению зависимости  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  на множестве  $\{\Theta_n\}$  отображения окружности (1.10).

Сначала рассмотрим случай  $K = 0$ . При этом система (1.10) преобразуется в отображение линейного сдвига на окружности, которое моделирует динамику квазипериодических колебаний в сечении гладкого двумерного тора:

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + \Delta. \quad (1.18)$$

При  $K = 0$  в параметр  $\Delta$  в явном виде входит число вращения, так как  $\Delta = 2\pi\rho$ . В разделе 1.2 было показано, что случай рационального числа вращения с точки зрения статистики не представляет никакого интереса, так как отвечает периодическим движениям. По этой причине далее будут рассматриваться случаи иррационального числа вращения, одним из которых является золотое сечение.

Золотое сечение (золотая пропорция) – это соотношение двух величин  $a$  и  $b$ ,  $b > a$ , причем  $b/a = (a + b)/a$ . Число, удовлетворяющее этому равенству, является положительным решением квадратного уравнения  $x^2 - x - 1 = 0$  [89]:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1.618... \quad (1.19)$$

Если рассматривать число  $\varphi$  с точки зрения числа вращения в отображении окружности (1.10), то наличие ненулевой целой части ( $\varphi > 1$ ) говорит о совершении одного дополнительного оборота вокруг окружности на каждой итерации отображения. С точки зрения численного моделирования это создает некоторые трудности. Время расчетов увеличивается, а все закономерности будут такими же, как если бы число вращения было меньше 1. Как раз таким числом является число, обратное  $\varphi$ :

$$\varphi^{-1} = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618... \quad (1.20)$$

$\varphi^{-1}$  – это иррациональное алгебраическое число. Особенность этого числа заключается в том, что оно представимо в виде бесконечной цепной дроби:

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}, \quad (1.21)$$

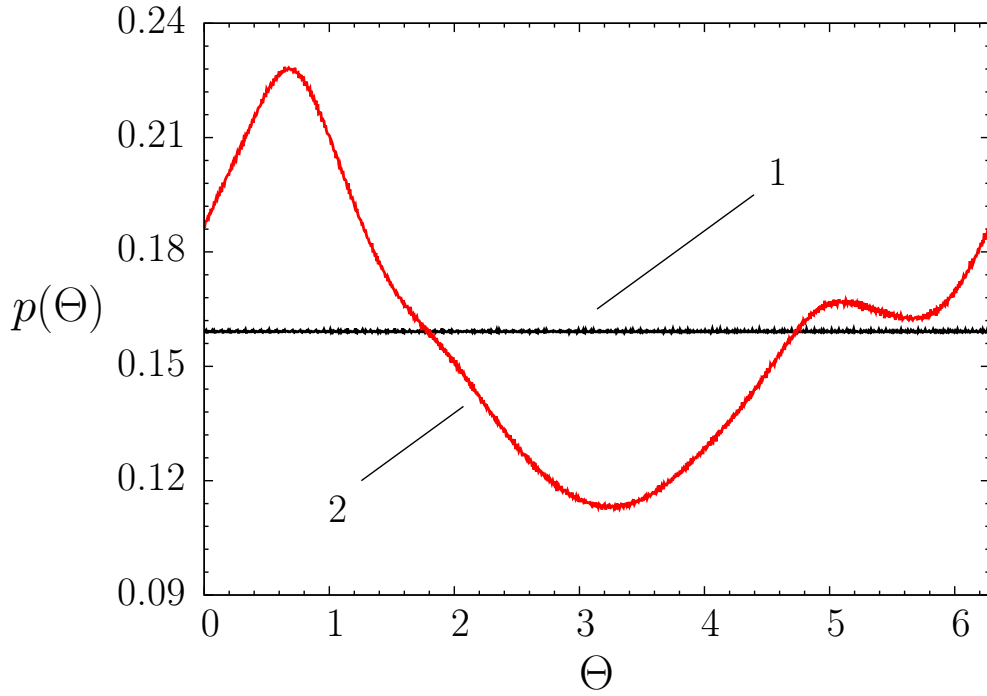


Рис. 1.4. Плотность распределения  $p(\Theta)$  системы (1.10) при  $\Delta = \pi(\sqrt{5} - 1)$  и 1  
–  $K = 0$ ; 2 –  $K = 0.5$

подходящими дробями которой служат отношения последовательных чисел Фибоначчи<sup>1</sup>  $F_n/F_{n+1}$ . Таким образом,  $\varphi^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}$ .

Таким образом, в качестве числа вращения, соответствующего золотому сечению, будем рассматривать:

$$\rho = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0.618\dots, \quad \Delta = 2\pi\rho = \pi(\sqrt{5} - 1). \quad (1.22)$$

Случаю  $K = 0$  и иррациональному числу вращения в системе (1.10) отвечает равномерное вращение точки на окружности. Это подтверждают расчеты плотности вероятности  $p(\Theta)$  системы (1.10) при  $K = 0$  и  $K > 0$  (см. Рис. 1.4). При  $K = 0$  плотность распределения  $p(\Theta)$  является равномерной функцией. В этом случае значения минимального времени возврата Пуанкаре будут одинаковыми для любой рассматриваемой точки на окружности. Поэтому необходимость вычисления среднего по ансамблю значения (1.6) или (1.17) отпадает. Далее при  $K = 0$  будет рассматриваться не величина  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ , а  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$ .

<sup>1</sup>Числа Фибоначчи могут быть определены при помощи рекуррентной формулы:  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ .

Результаты расчетов зависимости  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  представлены на рис. 1.5,а. Как видно из рисунка 1.5,а, зависимость  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  представляет собой ступенчатую функцию, которую мы назвали «Лестницей Фибоначчи» [64]. Было установлено, что она характеризуется рядом закономерностей:

1. Возрастающая с уменьшением  $\ln \varepsilon$  последовательность значений  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  строго отвечает последовательности чисел основного ряда Фибоначчи (... , 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...). Каждое последующее число определяется суммой двух предыдущих. Значения  $\{\tau_i\}$  соответствующие ступенькам «Лестницы Фибоначчи» указаны на рисунке 1.5,а.
2. При изменении величины  $\varepsilon$  в пределах любой из ступенек «Лестницы Фибоначчи» регистрируются три времени возврата  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ . Причем  $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$  и  $\tau_1 = \tau_{\text{inf}}$ . Отмеченное свойство следует из теоремы Слейтера [97]. Все три времени возврата отвечают числам основного ряда Фибоначчи.
3. Установлено, что при золотом сечении длины  $D_i$  и высоты  $H_i$  ступенек «Лестницы Фибоначчи» обладают универсальными свойствами, то есть не зависят от номера ступеньки, а определяются только числом вращения:  $D_i = D = H = H_i = |\ln \rho|$ ,  $i \gg 1$ . Аналитическое обоснование этого феномена будет приведено в Разделе 1.9. Исходя из этого можно предположить, что началу каждой следующей ступеньки  $(i + 1)$  соответствует значение  $\varepsilon$ , полученное в соответствии с рекуррентной формулой:

$$\ln \varepsilon_{i+1} = \ln \varepsilon_i - D, \quad \varepsilon_1 = 2\pi\rho. \quad (1.23)$$

При этом  $(i + 1)$ -ой ступеньке будет соответствовать время возврата:

$$\ln \tau_{i+1} = \ln F_{i+1} = \ln(F_i + F_{i-1}) = \ln(\tau_i + \tau_{i-1}), \quad (1.24)$$

где  $F_i$  соответствует  $i$ -му числу из основного ряда Фибоначчи. В пределе  $i \rightarrow \infty$  это значение может быть определено при помощи рекуррентной



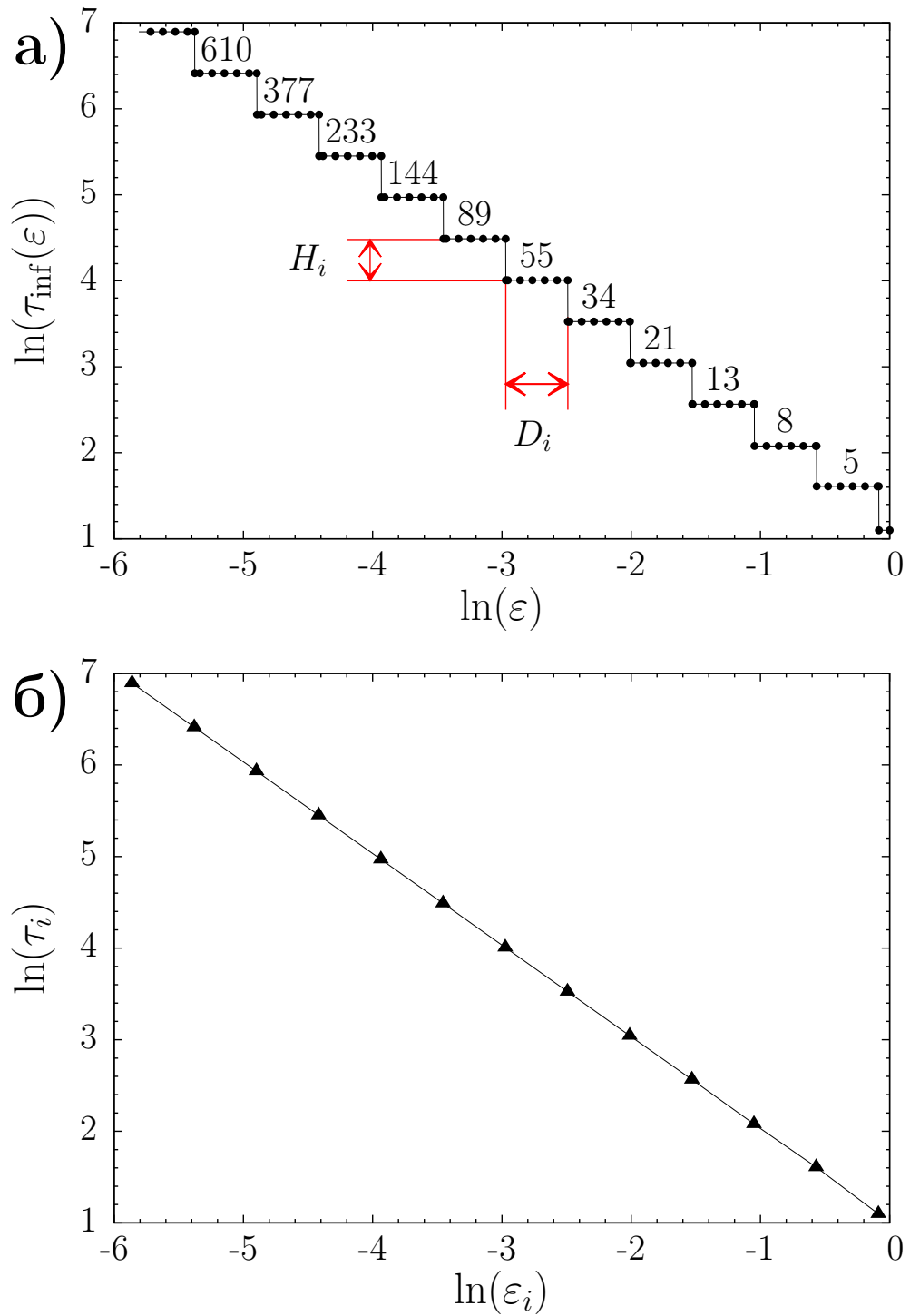


Рис. 1.5. а) – Зависимость минимального времени возврата  $\tau_{\text{inf}}(\epsilon)$  для золотого сечения  $\rho = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$  в отображении (1.10) при  $K = 0$  и  $\Delta = 2\pi\rho$ . б) – расчет зависимости минимального времени возврата  $\tau_i$  на основе (1.23) и (1.24).

Коэффициент угла наклона зависимостей, представленных на рис. 1.5,(а) и (б) равен минус единице

формулы:

$$\ln \tau_{i+1} = \ln \tau_i + H, \quad i \rightarrow \infty, \quad (1.25)$$

справедливость которой показана в Разделе 1.9.

Зависимость, построенная в соответствии с формулами (1.23) и (1.24), приведена на рис. 1.5,б. Из графика видно, что при аппроксимации полученной зависимости прямой линией, коэффициент угла наклона равен минус единице. В соответствии с выражением (1.17) коэффициент угла наклона зависимости  $\ln \tau_{\text{inf}}(\ln \varepsilon)$  равен размерности Афраймовича–Песина с обратным знаком. Из этого следует, что в случае «Лестницы Фибоначчи» размерность Афраймовича–Песина равна единице.

Численными экспериментами было показано, что при изменении размера окрестности  $\varepsilon$  в пределах одной ступеньки регистрируются три времени возврата  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ . Причем последовательность таких времен возврата в точности соответствует последовательности знаменателей подходящих дробей, т.е.  $\tau_1 = q_k$ ,  $\tau_2 = q_{k+1}$ ,  $\tau_3 = q_{k+2}$ . Отсюда и следует возникновение последовательности Фибоначчи во временах возврата, так как подходящие к числу  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$  дроби имеют вид  $F_i/F_{i+1}$ . При построении распределения времен возврата в окрестности из разных областей ступеньки было получено, что при выборе размера окрестности из правой половины ступеньки, вероятности времен возврата имеют вид  $P(\tau_3) < P(\tau_1) < P(\tau_2)$ . В середине происходит смена:  $P(\tau_1) < P(\tau_2) = P(\tau_3)$ . И в левой половине ступеньки будет:  $P(\tau_1) < P(\tau_2) < P(\tau_3)$ . Для наглядности все вышеописанные результаты приведены на рисунке 1.6. В конце ступеньки вероятность  $P(\tau_1) \rightarrow 0$ , и появляется новое время возврата  $\tau_4 = q_{k+3}$ . Из-за этого осуществляется переход на следующую ступеньку. В пределах следующей ступеньки минимальное время возврата уже будет  $\tau_{\text{inf}} = \tau_2$ , и так далее.

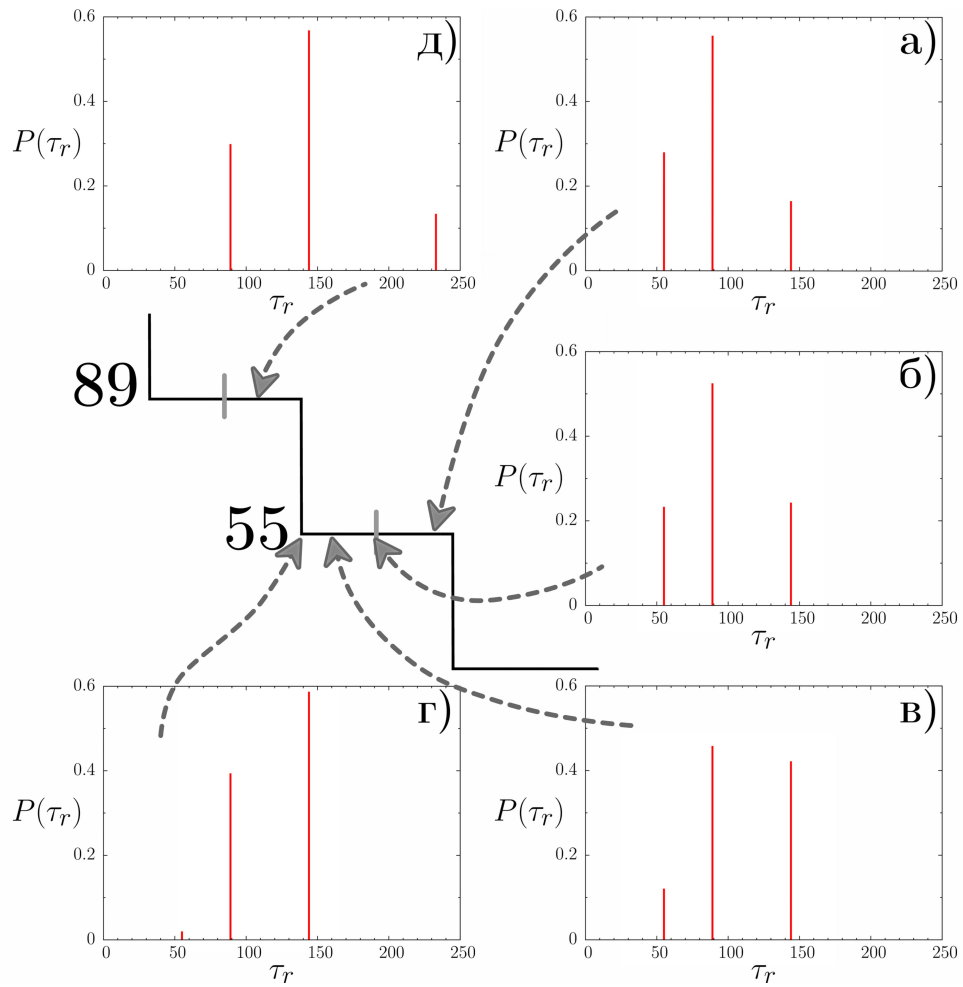


Рис. 1.6. Вероятностные распределения времен возврата в интервалы  $\varepsilon$  из различных областей ступенек

Как отмечалось выше, золотому сечению можно поставить в соответствие два числа вращения:

$$\rho = \varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \quad \text{и} \quad \rho = \varphi^{-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1). \quad (1.26)$$

Их отличие заключается в отсутствии ненулевой целой части в числе  $\varphi^{-1}$ . Ненулевая целая часть в числе  $\varphi$  приводит к дополнительному вращению вокруг окружности на каждой итерации отображения (1.10), однако, как и следовало ожидать, к изменениям в статистике возвратов Пуанкаре не приводит. Для иллюстрации сказанного были построены «Лестницы Фибоначчи» для обоих чисел вращения (1.26) (см. рис. 1.7).

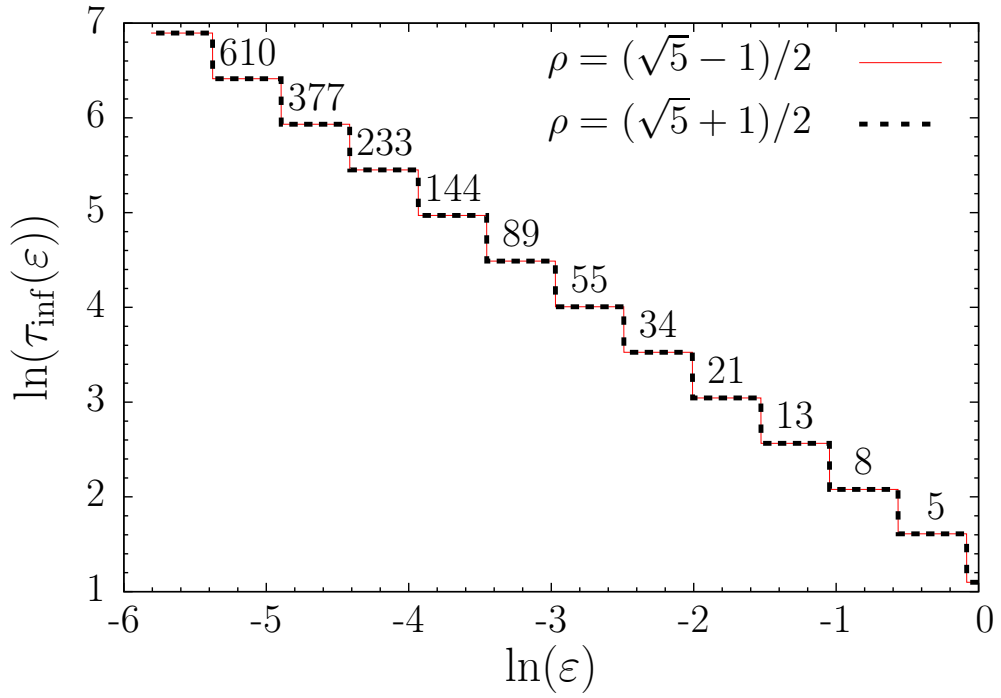


Рис. 1.7. «Лестницы Фибоначчи» для системы (1.18) при числах вращения  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$  (сплошная линия) и  $\rho = (\sqrt{5} + 1)/2$  (пунктирная линия).

Остальные параметры:  $\Delta = 2\pi\rho$

Все приведенные выше выводы справедливы и в случае серебряного сечения, которому соответствует иррациональное алгебраическое число

$$\chi = \sqrt{2} + 1 \approx 2.414... \quad (1.27)$$

Число  $\chi$  имеет целую часть, которая равна 2, что говорит о том, что за каждую итерацию изображающая точка совершает два полных оборота. Как было показано на рис. 1.7, наличие ненулевой целой части в числе вращения не приводит к изменениям в статистике времен возврата, поэтому в качестве числа вращения, соответствующего серебряному сечению рассмотрено число:

$$\rho = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414..., \quad \Delta = 2\pi\rho. \quad (1.28)$$

Зависимость  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  для серебряного сечения является ступенчатой функцией, для которой выполняются все свойства «Лестницы Фибоначчи» (см. Рис. 1.8). Также имеют место универсальные свойства. Отличия заключаются в том, что последовательность минимальных времен возврата  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  с уменьшением ве-

личины  $\varepsilon$  строго совпадает с последовательностью чисел Пелля. Числа Пелля определяются при помощи рекуррентной формулы  $P_{i+1} = 2P_i + P_{i-1}$  и составляют ряд  $(\dots, 29, 70, 169, 408, 985, \dots)$  [98]. Возникновение чисел Пелля в «Лестнице Фибоначчи» объясняется тем, что подходящей к числу  $\rho = \sqrt{2} - 1$  является дробь  $P_i/P_{i+1}$ .

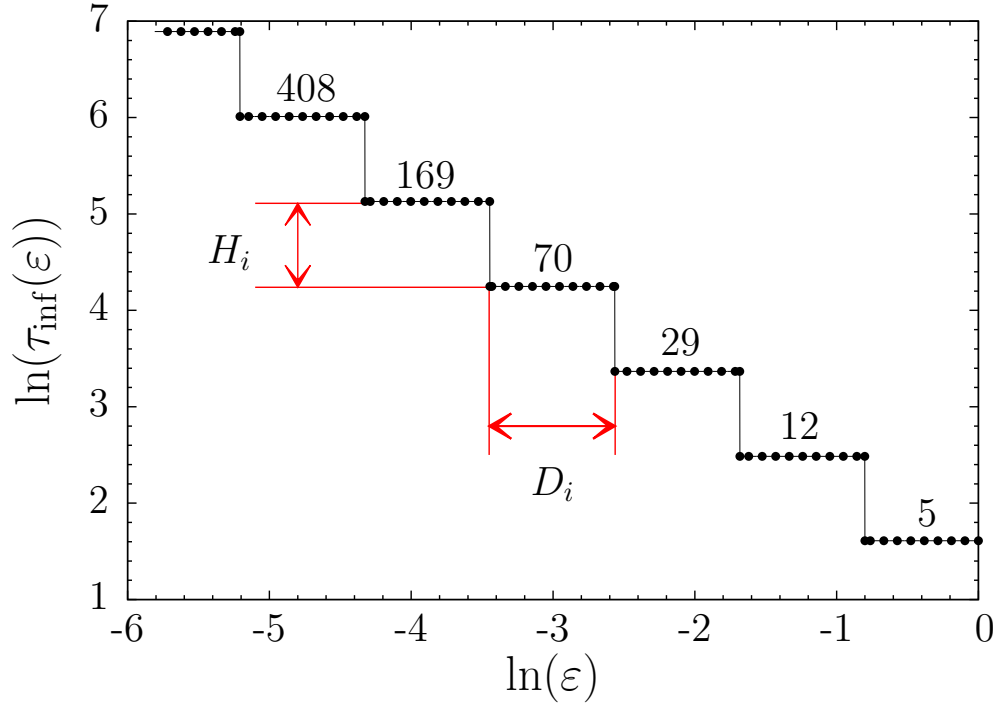


Рис. 1.8. Зависимость минимального времени возврата  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  для серебряного сечения  $\rho = \sqrt{2} - 1$  в отображении (1.10) при  $K = 0$  и  $\Delta = 2\pi\rho$ .

В работах [97, 99] было рассмотрено отображение окружности при локальном подходе и теоретически доказана справедливость использования дискретной последовательности  $\varepsilon_i$  в качестве окрестностей возвратов при расчетах  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$ . Рассмотрим точки на окружности, образующиеся при итерациях начальной точки  $\Theta_0$  при рациональных аппроксимациях числа вращения  $\rho_i = p_i/q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  где  $p_i/q_i$  - подходящая дробь. Выберем интервал  $\varepsilon_i$ , который включает в себя только начальную точку траектории  $\Theta_0$ . Границы такого интервала определяются знаменателями  $i$ -ой и  $(i + 1)$ -ой подходящей дроби, а его размер и минимальное время возврата в него будут определяться следую-

щим образом [99]:

$$\varepsilon_i = 2\pi \left( \frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_{i+1}} \right), \quad \tau_{\inf}(\varepsilon_i) = \tau_i = q_i. \quad (1.29)$$

Используя этот результат, путем несложных преобразований легко доказать справедливость (1.23) и (1.24). Таким образом, множество значений  $\tau_{\inf}(\varepsilon_i)$  и  $\varepsilon_i$  можно получить используя только вычисление знаменателей рациональных аппроксимаций  $q_i$ , не рассчитывая сами возвраты. В случае золотого сечения знаменатели подходящих дробей совпадают с числами Фибоначчи:  $q_i = F_i$ . В случае серебряного сечения – с числами Пелля:  $q_i = P_i$ . Полученная из аналитических соотношений зависимость  $\tau_{\inf}(\varepsilon_i)$  позволяет более точно определить значения  $\alpha_C$ .

Данные соответствующих расчетов приведены на рисунке 1.15 для случаев золотого и серебряного сечения. Полученные зависимости можно аппроксимировать линейными зависимостями с единичными коэффициентами наклона. Из выражений (1.7) и (1.17) следует, что в этом случае

$$\nu(\rho) = \alpha_C = 1. \quad (1.30)$$

Таким образом, размерность Афраймовича–Песина и скорость аппроксимации числа вращения совпадают и равны единице в случаях золотого и серебряного сечения.

Золотое и серебряное сечения являются алгебраическими диофантовыми числами с мерой иррациональности  $\mu = 2$  (1.14). Доказано, что  $\mu = 2$  для любого алгебраического иррационального числа [100]. Это означает, что для таких чисел будут справедливы выражения (1.7), (1.17) и (1.30).

Универсальная геометрия «Лестницы Фибоначчи» имеет место лишь для золотого и серебряного сечений и обусловлена особенностями их разложения в цепную дробь. Для других иррациональных чисел вращения универсальность геометрии «Лестницы Фибоначчи» будет нарушаться.

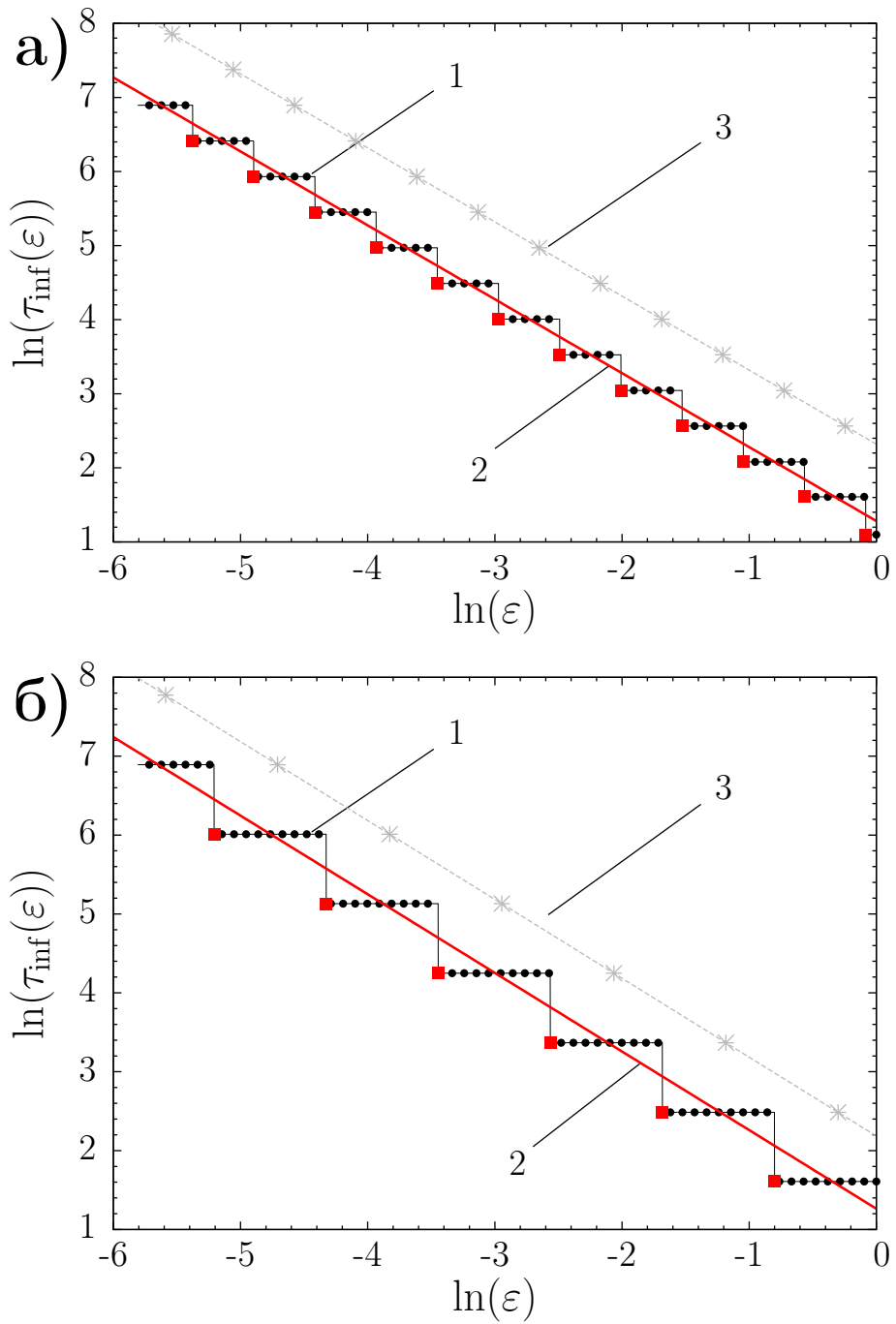


Рис. 1.9. Зависимость минимального времени возврата  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  для золотого (а) и серебряного (б) сечения в отображении (1.10) при  $K = 0$  и  $\Delta = 2\pi\rho$ . (а):  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ , (б):  $\rho = \sqrt{2} - 1$ . На графиках зависимость 1 соответствует «Лестнице Фибоначчи», зависимость 2 соответствует линейной аппроксимации зависимости  $\ln \tau_{\text{inf}}(\ln \varepsilon)$ , зависимость 3 была построена в соответствии с формулами (1.29). В обоих случаях графики 2 и 3 имеют наклон  $|k| \approx 1$ . А именно: (а):  $k = -1.00133$ , (б):  $k = -1.00102$

## 1.6 Возвраты Пуанкаре при диофантовом алгебраическом числе вращения

Как отмечалось в Разделе 1.3.2, алгебраические иррациональные числа – это числа, которые являются корнями многочлена (1.16). В предыдущем разделе были рассмотрены золотое и серебряное сечения:  $\rho = (\sqrt{5}-1)/2$  и  $\rho = \sqrt{2}-1$ . Эти числа тоже являются алгебраическими иррациональными числами. Их особенность заключается в том, что числители и знаменатели подходящих к ним дробей являются числами одной и той же последовательности, сдвинутыми на одну итерацию. Например, для числа  $(\sqrt{5}-1)/2$  подходящей дробью является  $F_i/F_{i+1}$ , где  $F_i$  – числа Фибоначчи. Для числа  $\sqrt{2}-1$  подходящей дробью является  $P_i/P_{i+1}$ , где  $P_i$  – числа Пелля. Теперь рассмотрим алгебраические диофантовые числа, у которых отсутствуют совпадения числителей и знаменателей подходящих дробей. Одним из таких чисел является  $\rho = \sqrt[3]{2}$  (корень уравнения  $x^3 - 2 = 0$ ). На Рис. 1.10,а представлены результаты построения зависимости  $\tau_{\text{inf}}$  от  $\varepsilon$  для числа вращения  $\rho = \sqrt[3]{2}$ . Как видно из рисунка 1.10,а, простая геометрия «Лестницы Фибоначчи» в этом случае нарушается: длины ступенек и их высоты не являются одинаковыми при изменении величины окрестности  $\varepsilon$ , но вывод о соответствии между последовательностью возвратов и последовательностью знаменателей подходящих дробей остается справедливым. Вычисления размерности Афраймовича–Песина как прямым усреднением «Лестницы Фибоначчи», так и теоретическим методом расчета интервала  $\varepsilon_i$  (1.29) дает  $\alpha_C = \nu(\rho) = 1.0 \pm 0.01$ .

Аналогичные результаты были получены для другого диофантового алгебраического числа:  $\rho = \sqrt[3]{7}$  (корень уравнения  $x^3 - 7 = 0$ ). Данные расчетов  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  для этого случая приведены на рисунке 1.10,б.



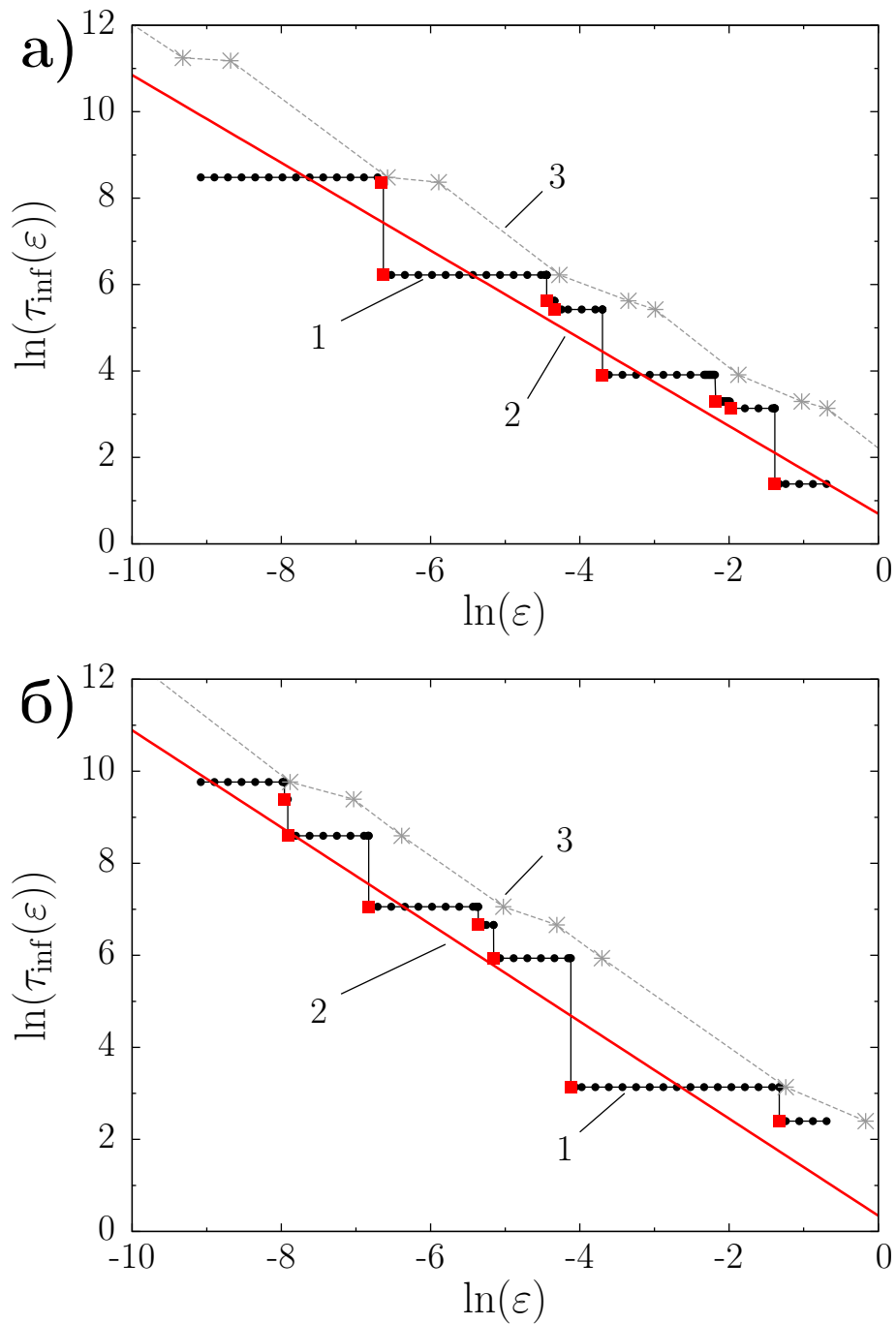


Рис. 1.10. Результаты расчетов  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  при  $K = 0$  отображения (1.10) (а) для  $\rho = \sqrt[3]{2}$  (б) для  $\rho = \sqrt[3]{7}$ . 1 – расчет лестницы, 2 – линейная аппроксимация графика 1, 3 – расчет на основе (1.29). Графики 2 и 3 имеют наклон  $|k| \approx 1$ , а именно:  $k = -1.01512$  (а),  $k = -1.05473$  (б)

Как видно из рисунка 1.10, метод вычисления  $\varepsilon_i$  (1.29), предложенный в работе [99], имеет место не при всех числах вращения, а только при золотом и серебряном сечениях.

## 1.7 Возвраты Пуанкаре при диофантовом трансцендентном числе вращения

Остановимся подробнее на трансцендентных числах. Известно, что любое лиувиллево число является трансцендентным, но обратное в общем случае неверно, т.е. существуют числа, которые одновременно являются и диофантовыми, и трансцендентными. Для таких чисел мера иррациональности  $2 \leq \mu < \infty$ . Примерами диофантовых трансцендентных чисел являются  $\pi$ ,  $\pi/\sqrt{3}$ ,  $\pi/100$ ,  $e$ ,  $\ln 2$ ,  $\ln 10$  и другие. Доказано, что для числа  $e$  мера  $\mu = 2$ , для остальных же известна лишь оценка сверху:  $\mu(\pi) \leq 7.6063$ ,  $\mu(\pi/\sqrt{3}) \leq 4.6016$ ,  $\mu(\ln 2) \leq 3.57455391$ . На рисунке 1.11 приведены результаты численного эксперимента для чисел  $\pi/\sqrt{3}$  и  $e$ . Вычисление наклона «Лестницы Фибоначчи» как путем усреднения, так и путем теоретического расчета дало  $\nu(\rho) = \alpha_C \approx 1.0$ . Это означает, что число  $\pi/\sqrt{3}$  так же как и  $e$  является диофантовым с мерой иррациональности  $\mu \approx 2$ .

Можно показать, что значения мер иррациональности для рассмотренных выше иррациональных чисел действительно таковы. Обозначим  $\delta = |\rho - \frac{p}{q}|$ , где  $p/q$  - подходящая дробь. Тогда (1.14) можно переписать в виде:

$$\delta < \frac{C}{q^\mu}, \quad \ln \delta < \ln C - \mu \ln q \quad (1.31)$$

Вычисляя последовательность значений числителей и знаменателей подходящих дробей можно определить меру иррациональности как наклон зависимости  $\ln \delta$  от  $\ln q$ . Результаты вычислений для различных иррациональных значений числа вращения приведены на рисунке 1.12. Из него видно, что как в случае золотого или серебряного сечений, так и в случае  $\rho = e$  или  $\rho = \pi/\sqrt{3}$  мера  $\mu = 2$ . С учетом (1.14) и (1.15) легко получить, что

$$\nu(\rho) = \mu(\rho) - 1 \quad (1.32)$$

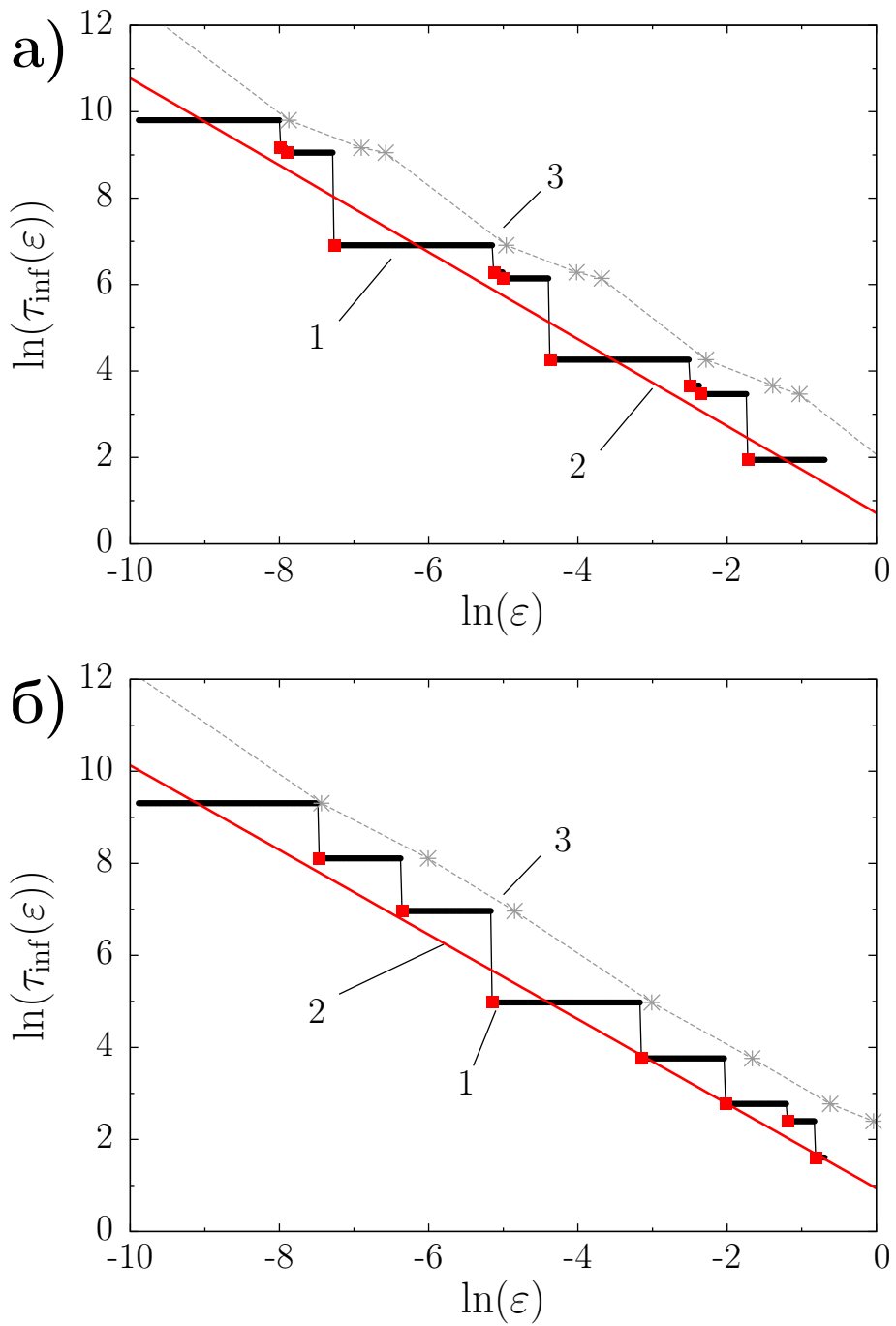


Рис. 1.11. Результаты расчетов  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  при  $K = 0$  отображения (1.10) (а) для  $\rho = e$  (б) для  $\rho = \pi/\sqrt{3}$ . 1 – расчет лестницы, 2 – линейная аппроксимация графика 1, 3 – расчет на основе (1.29). Графики 2 и 3 имеют наклон  $|k| \approx 1$ , а именно:  $k = -1.00613$  (а),  $k = -0.960415$  (б)

Т.е. при  $\mu = 2$   $\nu(\rho) = 1$ , что подтверждает экспериментально полученные данные о единичной размерности Афраймовича–Песина для всех вышеописанных чисел вращения.

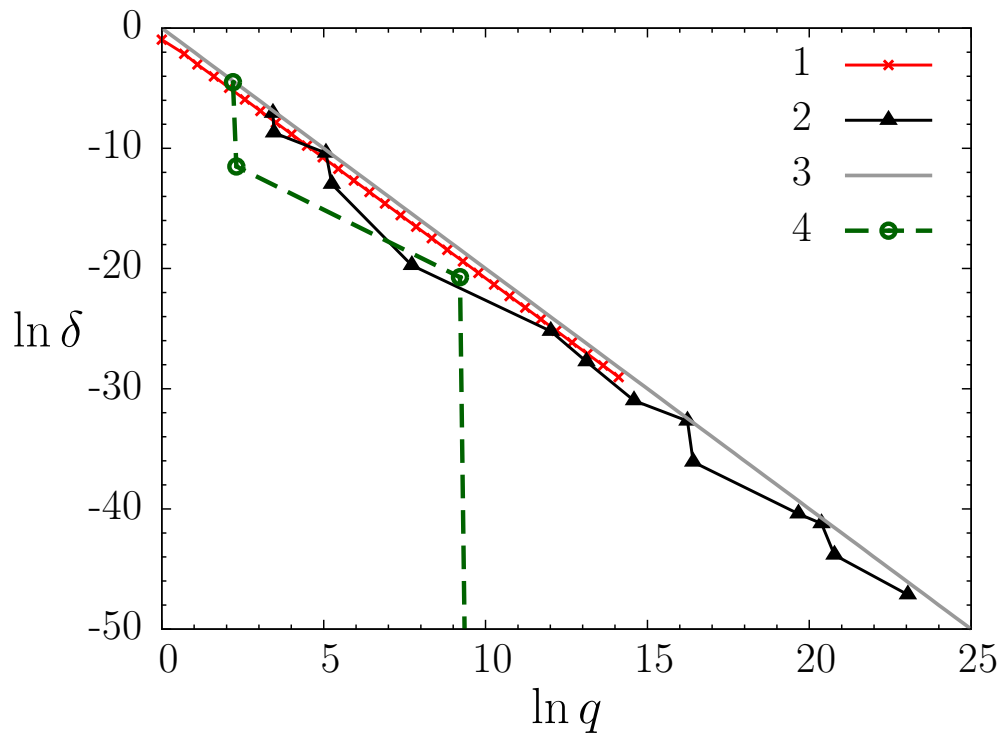


Рис. 1.12. Данные вычислений меры иррациональности  $\mu$ . Зависимость 1 соответствует  $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , зависимость 2 построена для  $\rho = \pi/\sqrt{3}$ , график 3 – это теоретическая оценка  $\ln \delta = -2 \ln q$ , зависимость 4 соответствует

$$\rho = \Lambda = \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-i!} \text{ лиувиллевому числу}$$

## 1.8 Возвраты Пуанкаре при лиувиллевоом числе вращения

Последний подкласс иррациональных чисел – это трансцендентные лиувиллевы числа. Такие числа обладают высокой скоростью сходимости рациональных приближений. Иными словами, их мера иррациональности  $\mu \rightarrow \infty$ . Нами был рассмотрен ряд лиувиллевых чисел, одним из которых является

$$\rho = \Lambda = \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-i!} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.33)$$

На рисунке 1.12 приведены данные расчетов, свидетельствующие о том, что для  $\rho = \Lambda$  мера  $\mu \rightarrow \infty$ . В этом случае в качестве калибровочной функции нельзя рассматривать  $\phi(t) \sim \frac{1}{t}$  (см. рисунок 1.13). К сожалению, точность компьютера не позволяет провести расчеты для этого случая до конца. Удалось

установить лишь тот факт, что в случае лиувиллева иррационального числа соответствующие выражения (1.14) и (1.17) действительно не выполняются, что подтверждает выводы теории [49, 65].

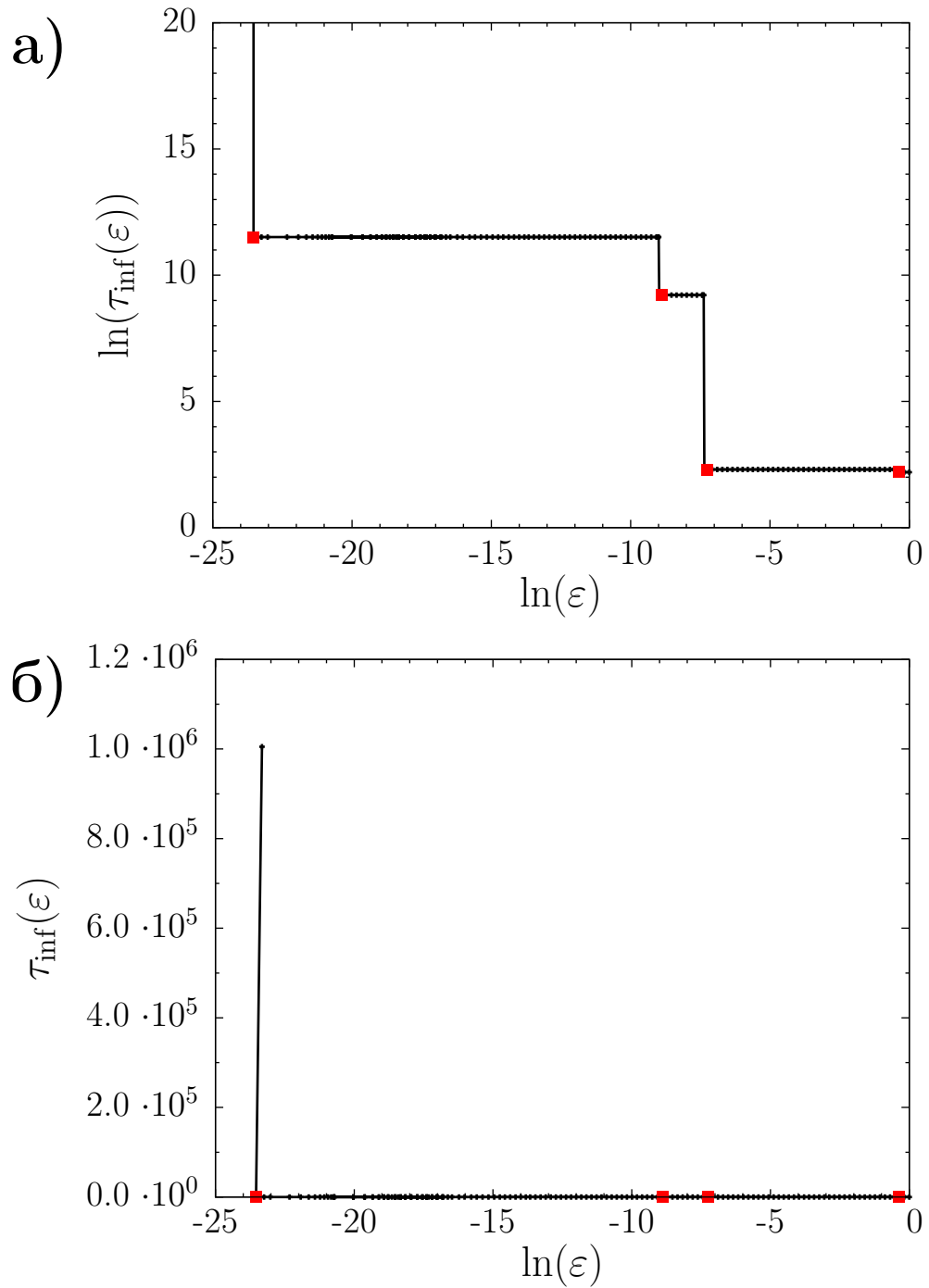


Рис. 1.13. Зависимость минимального времени возврата  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  для лиувиллева числа вращения  $\rho = \Lambda$  (1.33)

## 1.9 Аппроксимация лестницы Фибоначчи. Теоретическая оценка

Исходя из зависимостей  $\ln \tau_{\text{inf}}(\ln \varepsilon)$  можно сделать следующий вывод. Для серебряного и золотого сечений имеют место все свойства «Лестницы Фибоначчи», сформулированные в разделе 1.5. Последовательность значений  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  с уменьшением величины  $\varepsilon$  строго совпадает с последовательностью чисел Пелля и Фибоначчи соответственно. Если рассмотреть более общий случай, к примеру,  $\rho = \sqrt[3]{2}$ ,  $\rho = e$  или  $\rho = \lg(5)$ , то здесь свойство универсальности ширины и высоты ступенек нарушается. Первое свойство же выполняется с поправкой на то, что каждое минимальное время возврата, регистрируемое на  $i$ -ой ступеньке, тоже соответствует знаменателю  $q_i$   $i$ -ой подходящей к  $\rho$  дроби  $p_i/q_i$ , но никаких особых названий эти последовательности не имеют.

Таким образом, получается, что нахождение размерности Афраймовича–Песина в такой системе по формуле (1.17) не представляется возможным из-за непредсказуемости появления следующих ступенек. В этом разделе предпринята попытка определения значений  $\varepsilon$ , которые соответствуют появлению новых ступенек, исходя из величины числа вращения и ступенчатого вида функции  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$ . Это позволит не только точно рассчитать размерность Афраймовича–Песина для диофантовых чисел вращения таких, как  $\rho = \sqrt[3]{2}$ ,  $\rho = e$  или  $\rho = \lg(5)$ , но и для лиувиллевых чисел, для которых построение зависимости  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  путем численного моделирования вообще не представляется возможным из-за быстрого возрастания последовательности  $\tau_{\text{inf}}$  [64].

### 1.9.1 Связь подходящих дробей с числом вращения

Структура «Лестницы Фибоначчи» тесно связана с теорией подходящих и цепных дробей. Для всех чисел вращения было показано, что зависимость  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  имеет ступенчатый характер, причем значения  $\tau_{\text{inf}i}$ , которые соответствуют  $i$ -ым ступенькам «Лестницы» равны знаменателям  $i$ -ых подходящих к числу вращения  $\rho$  дробей  $p_i/q_i$ . Исходя из равенства  $\tau_{\text{inf}i}(\varepsilon) = q_i$  можно определить минимальный размер окрестности возврата Пуанкаре, который соответствует этому значению  $\tau_{\text{inf}}$ . Как отмечалось в Разделе 1.5, за одну итерацию линейного отображения (1.18) точка на окружности сдвигается на  $2\pi\rho$ . Если  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon) = q_i$ , то это означает, что точка возвращается в свою окрестность за  $q_i$  итераций и делает сдвиг относительно начального положения на  $2\pi\rho q_i$ . За это число итераций точка может сделать несколько полных оборотов окружности и оказаться или слева, или справа от начальной точки. Скомпенсировать этот эффект можно путем введения модуля и вычитания числителя подходящей дроби  $p_i$ , который как раз определяет число полных оборотов на окружности. Тогда возврат в окрестность точки  $x_0$ , из которой точка стартует, состоится на расстоянии  $2\pi|\rho q_i - p_i|$  от точки  $x_0$  [99].

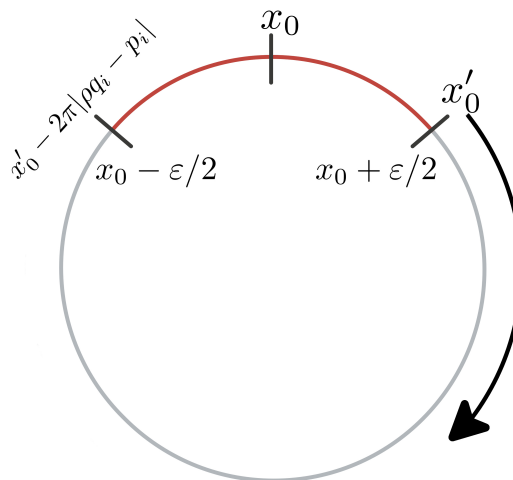


Рис. 1.14. Схематическое изображение окрестности  $\varepsilon$  и точек выхода и возврата к окрестность точки  $x_0$

Рассмотрим критический случай, когда точка начинает свое движение не из точки  $x_0$ , а из правой границы ее окрестности, т.е. из точки  $x'_0 = x_0 + \varepsilon_c/2$ . Возвращение в окрестность  $\varepsilon_c$  точки  $x_0$  за минимальное число итераций  $q_i$  происходит около левой границы этой окрестности, т.е. в точке  $x_0 - \varepsilon_c/2$ . При этом, как уже отмечалось ранее, точка должна сместиться на  $2\pi|\rho q_i - p_i|$  относительно точки  $x'_0$  (см. Рис. 1.14). Получаем равенство:

$$x'_0 - 2\pi|\rho q_i - p_i| = x_0 - \varepsilon_c/2 \quad (1.34)$$

или

$$x_0 + \varepsilon_c/2 - 2\pi|\rho q_i - p_i| = x_0 - \varepsilon_c/2. \quad (1.35)$$

Отсюда получается выражение для вычисления значения  $\varepsilon_i$ , которое соответствует левой границе ступеньки с минимальным временем возврата  $\tau_{\text{inf}} = q_i$  для любого иррационального числа вращения  $\rho$ :

$$\varepsilon_i = 2\pi|\rho q_i - p_i| \quad (1.36)$$

где  $\rho$  – число вращения,  $q_i$  – знаменатель подходящей дроби,  $p_i$  – числитель подходящей дроби. Как уже отмечалось, золотое (серебряное) сечение является особым случаем. Универсальность соответствующей ему «Лестницы» вызвана тем, что и числители, и знаменатели его подходящих дробей определяются по одному и тому же закону и являются элементами одной и той последовательности – последовательности Фибоначчи  $F_i$  (для серебряного сечения – Пелля  $P_i$ ). Исходя из этого, выражение (1.36) для золотого сечения принимает вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= 2\pi|\rho F_i - F_{i-1}| \quad \text{или} \\ \varepsilon_i &\approx \frac{2\pi}{L_i}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

где  $F_i$  –  $i$ -ое число Фибоначчи,  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$  – число вращения,  $L_i$  –  $i$ -ое число Люка. Подробнее см. в Разделе 1.9.2

Аналогично, в случае серебряного сечения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= 2\pi|\rho P_i - P_{i-1}| \quad \text{или} \\ \varepsilon_i &\approx \frac{2\pi}{Q_i}, \end{aligned} \quad (1.38)$$



где  $P_i$  –  $i$ -ое число Пелля,  $\rho = \sqrt{2} - 1$  – число вращения,  $Q_i$  –  $i$ -ое число Пелля-Люка. Подробный вывод уравнения (1.38) приведен в Разделе 1.9.3.

Результаты теоретических вычислений (1.36)–(1.38) полностью подтверждается численным экспериментом как для золотого и серебряного сечений (Рис. 1.15), так и для более сложных диофантовых чисел  $\sqrt[3]{2}$ ,  $e$  и  $\lg(5)$ , для которых отсутствует универсальность геометрии ступенек (Рис. 1.16). Используя (1.36) можно получить зависимость ширины ступенек  $D_i$  от номера ступеньки в общем виде (см. Раздел 1.9.4).

$$D_i = \ln \frac{q_i}{q_{i-1}}. \quad (1.39)$$

В случае золотого и серебряного сечений ширина ступенек постоянна и не зависит от номера ступеньки, а зависит только от числа вращения (см. Раздел 1.9.4):

$$D_i = \text{const} = \ln \rho. \quad (1.40)$$

На рис. 1.17 приведены зависимости длин ступенек от номера ступенек для золотого сечения (для него должно выполняться универсальное свойство) и для  $\rho = \sqrt[3]{2}$  и  $\lg 5$  (здесь универсальное свойство уже не выполняется). Рис. 1.17,а соответствует золотому сечению и показывает, что длины всех ступенек одинаковы, а рисунки 1.17,б и в показывают, что для других чисел вращения универсальность ступенчатых зависимостей не выполняется.

## 1.9.2 Аппроксимация «Лестницы Фибоначчи» при золотом сечении

В случае золотого сечения ( $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ ) числители и знаменатели подходящих к  $\rho$  дробей определяются как  $q_i = F_i$  и  $p_i = F_{i-1}$ , где  $F_i$  – числа Фибоначчи. Так как золотое сечение – это особый случай, в котором числители

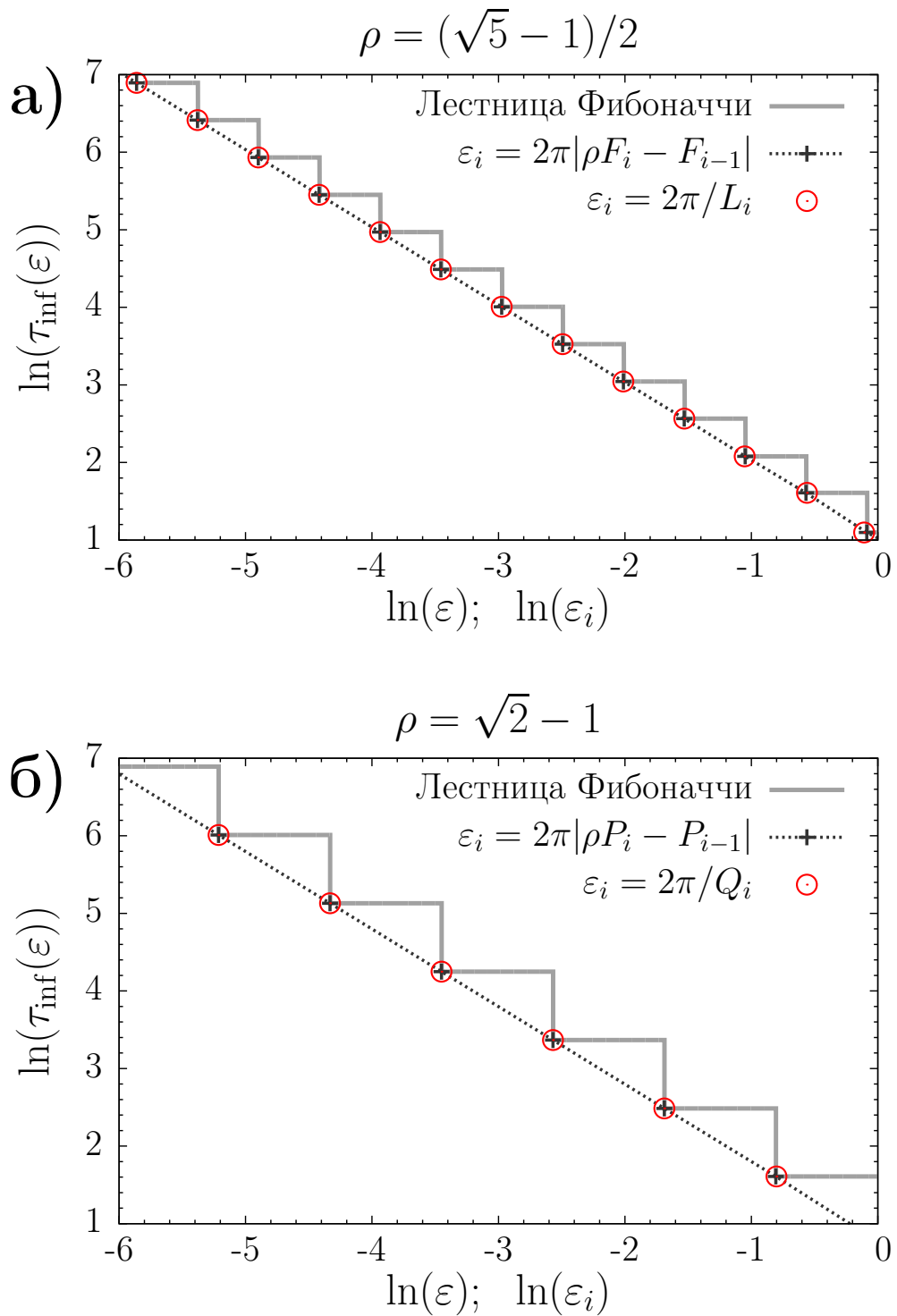


Рис. 1.15. Сплошные линии – зависимости  $\ln \tau_{\text{inf}}(\ln \epsilon)$  для (а) золотого сечения ( $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ ) и (б) серебряного сечения ( $\rho = \sqrt{2} - 1$ ), точки и пунктирные линии с точками – это соответствующие аппроксимации при помощи (1.37) для золотого сечения и (1.38) для серебряного сечения

и знаменатели подходящих дробей определяются по одному и тому же закону и

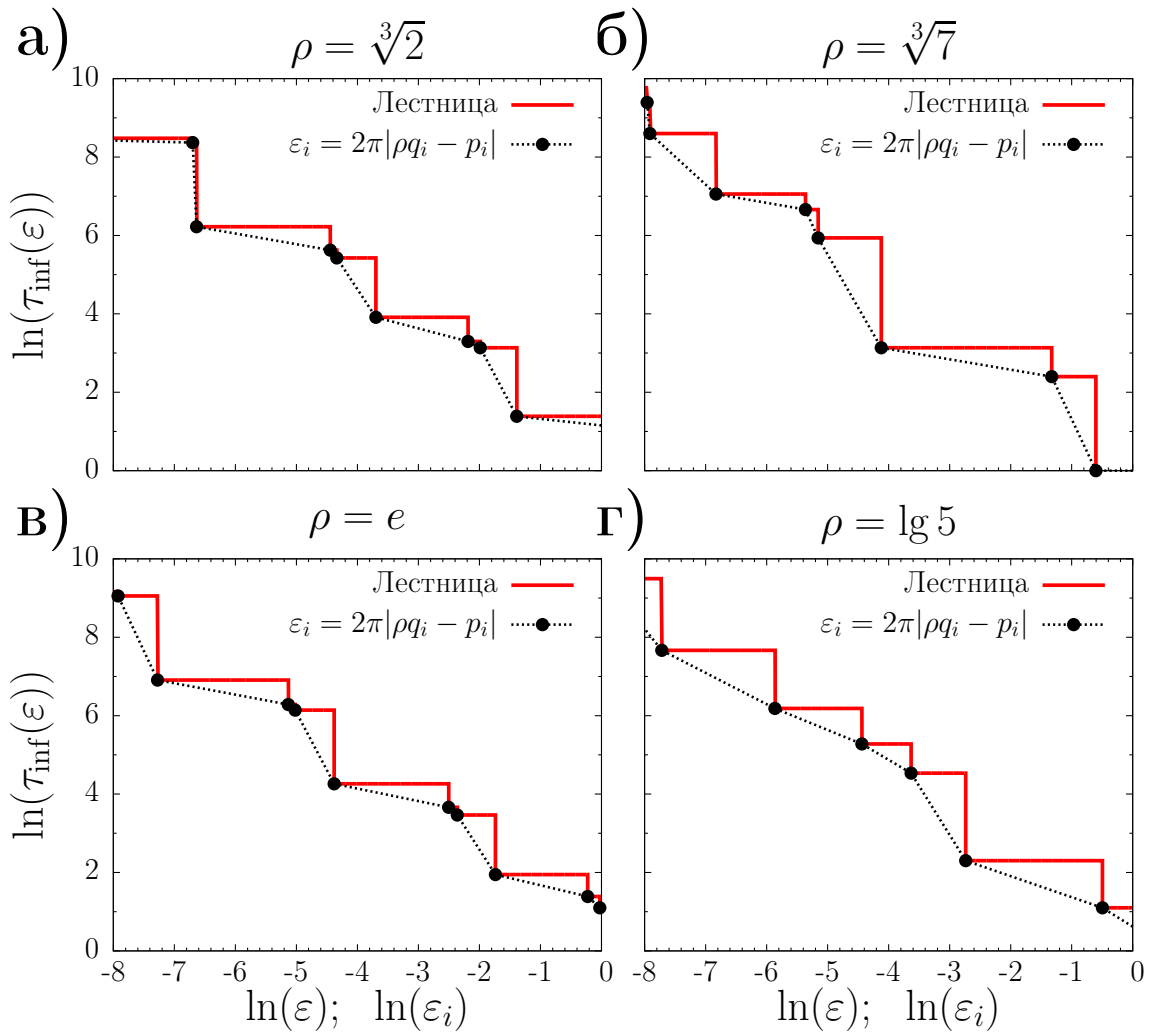


Рис. 1.16. Сплошные линии – зависимости  $\ln \tau_{\text{inf}}(\ln \varepsilon)$  для (а) числа вращения  $\rho = \sqrt[3]{2}$ , (б) числа вращения  $\rho = \sqrt[3]{7}$ , (в) числа вращения  $\rho = e$ , (г) числа вращения  $\rho = \lg(5)$ , пунктирная линия с точками – соответствующая аппроксимация при помощи (1.36)

являются элементами одной и той же последовательности, то выражение (1.36) можно существенно упростить.

Каждое  $i$ -ое число Фибоначчи связано рекуррентной формулой с предыдущими:

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \quad (1.41)$$

с начальными условиями  $F_0 = 1$ ,  $F_1 = 1$ . Кроме того, его можно приближенно получить при помощи формулы Бине:

$$F_i = \frac{\varphi^i - (-\varphi)^{-i}}{2\varphi - 1}, \quad (1.42)$$

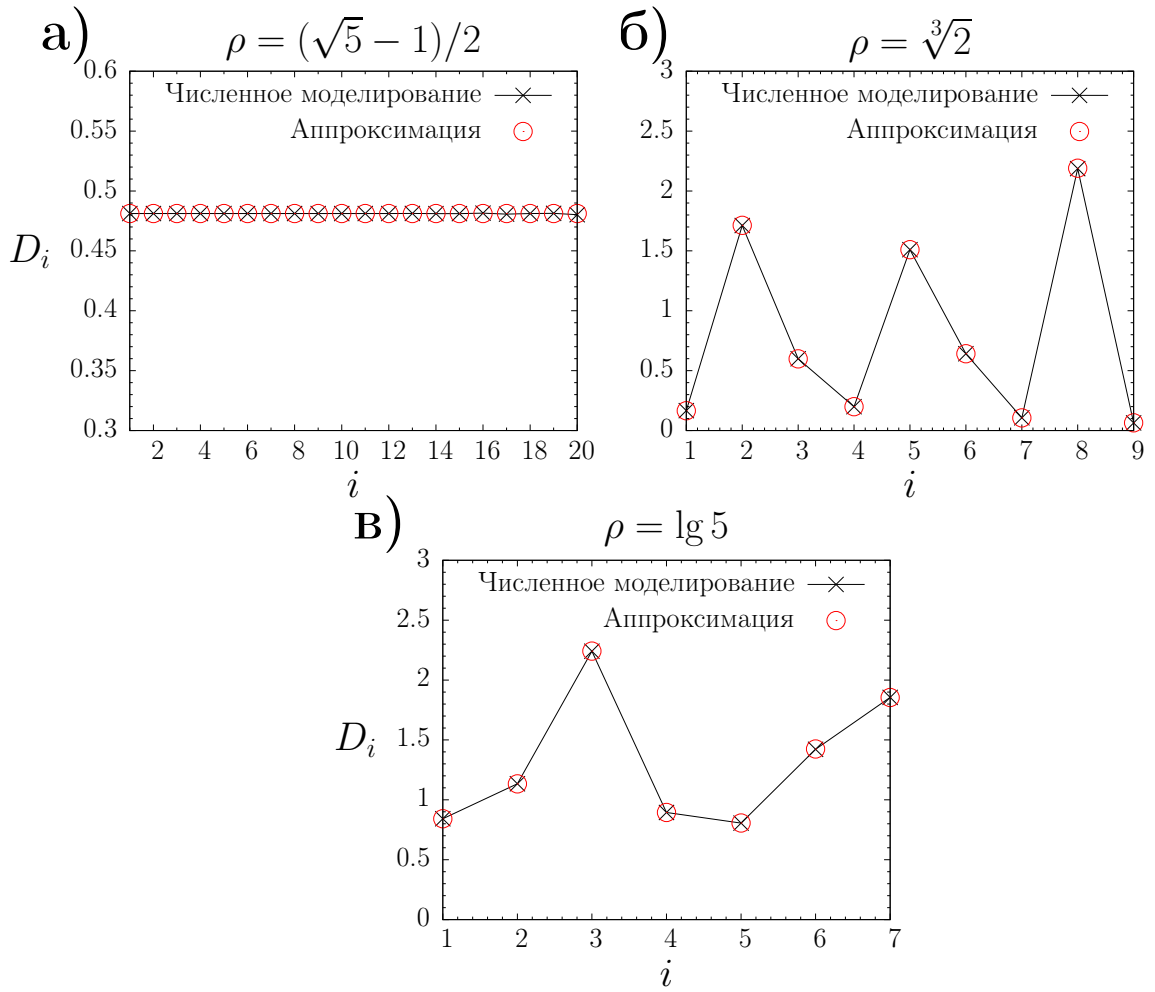


Рис. 1.17. Зависимости длин ступенек функции  $\ln \tau_{\text{inf}}(\ln \varepsilon)$  от номеров ступенек для золотого сечения (а) и чисел вращения  $\rho = \sqrt[3]{2}$  (б) и  $\rho = \lg 5$  (в).

Аналитические и экспериментальные зависимости полностью совпадают и говорят о том, что универсальное свойство выполняется только для золотого сечения, для которого длина ступенек (а) не зависит от номера ступеньки

где  $\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2$  является корнем уравнения  $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$  и связано с  $\rho$  как

$$\rho = \varphi - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 1 + \rho. \quad (1.43)$$

Значение  $\varepsilon$ , которое соответствует переходу на новую ступеньку, т.е. левой границе ступеньки с минимальным временем возврата  $\tau_{\text{inf}i} = F_i$  можно получить следующим образом:

$$\varepsilon_i = 2\pi|\rho F_i - F_{i-1}|. \quad (1.44)$$

С учетом (1.42) и (1.43) его можно переписать как

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= 2\pi|(\varphi - 1)F_i - F_{i-1}| = 2\pi|\varphi F_i - (F_i + F_{i-1})| = 2\pi|\varphi F_i - F_{i+1}| = \\ &2\pi\left|\varphi\frac{\varphi^i - (-\varphi)^{-i}}{2\varphi - 1} - \frac{\varphi^{i+1} - (-\varphi)^{-i-1}}{2\varphi - 1}\right| = 2\pi\left|\frac{\varphi^{i+1} + (-\varphi)^{-i+1} - \varphi^{i+1} + (-\varphi)^{-i-1}}{2\varphi - 1}\right| = \\ &2\pi\left|\frac{(-1)^{-i-1}(\varphi^{-i+1} + \varphi^{-i-1})}{2\varphi - 1}\right| = 2\pi\left|(-1)^{-i-1}\frac{\varphi^2 + 1}{2\varphi - 1}\varphi^{-i-1}\right| = 2\pi\frac{\varphi^2 + 1}{2\varphi - 1}\varphi^{-i-1} = \\ &2\pi\varphi^{-i}\frac{\varphi^2 + 1}{2\varphi^2 - \varphi} = 2\pi\varphi^{-i}\frac{\varphi^2 - \varphi - 1 + \varphi + 2}{2\varphi^2 - \varphi - \varphi - 2 + 2 + \varphi} = 2\pi\varphi^{-i}\frac{\varphi + 2}{\varphi + 2} = 2\pi\varphi^{-i} = \\ &\frac{2\pi\varphi^{-i}(\varphi^i + (-\varphi)^{-i})}{\varphi^i + (-\varphi)^{-i}} = \frac{2\pi}{\varphi^i + (-\varphi)^{-i}}\left(1 + (-1)^{-i}\varphi^{-2i}\right).\end{aligned}$$

Так как  $\varphi > 1$ , то второе слагаемое в скобках стремится к нулю при  $i \rightarrow \infty$ , поэтому

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_c(\tau_{\text{inf}} = F_i) = \frac{2\pi}{\varphi^i + (-\varphi)^{-i}} = \frac{2\pi}{L_i}. \quad (1.45)$$

Здесь  $L_i$  – это  $i$ -ое число Люка. Оно определяется по такой же рекуррентной формуле, как и число Фибоначчи (1.41), но с другими начальными условиями:  $L_0 = 2$ ,  $L_1 = 1$ . Число Люка можно приближенно получить по формуле:

$$L_i = \varphi^i + (-\varphi)^{-i} \quad (1.46)$$

### 1.9.3 Аппроксимация «Лестницы Фибоначчи» при серебряном сечении

Случай серебряного сечения – это такой же особый случай, как и золотое сечение. Для серебряного сечения  $\rho = \sqrt{2} - 1$ , а числители и знаменатели подходящих дробей – это числа Пелля.  $i$ -ое число Пелля определяется при помощи рекуррентной формулы:

$$P_i = 2P_{i-1} + P_{i-2}. \quad (1.47)$$

с начальными условиями  $P_0 = 0$ ,  $P_1 = 1$ . Аналогично формуле Бине для чисел Фибоначчи, числа Пелля можно приближенно получить из

$$P_i = \frac{\varphi^i - (-\varphi)^{-i}}{2\varphi - 2}, \quad (1.48)$$

где  $\varphi = \sqrt{2} + 1$  является корнем уравнения  $\varphi^2 - 2\varphi - 1 = 0$ , и связано с  $\rho$  как

$$\rho = \varphi - 2 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 2 + \rho. \quad (1.49)$$

Значение  $\varepsilon$ , которое соответствует переходу на новую ступеньку, т.е. левой границе ступеньки с минимальным временем возврата  $\tau_{\text{inf}} = P_i$  можно получить следующим образом:

$$\varepsilon_c(\tau_{\text{inf}} = P_i) = 2\pi |\delta P_i - P_{i-1}| \quad (1.50)$$

С учетом (1.48) и (1.49) выражение (1.50) можно переписать как

$$\varepsilon_c(\tau_{\text{inf}} = P_i) = 2\pi |(\varphi - 2)P_i - P_{i-1}| = 2\pi |\varphi P_i - (2P_i + P_{i-1})| = 2\pi |\varphi P_i - P_{i+1}| =$$

$$2\pi \left| \varphi \frac{\varphi^i - (-\varphi)^{-i}}{2\varphi - 2} - \frac{\varphi^{i+1} - (-\varphi)^{-i-1}}{2\varphi - 2} \right| = 2\pi \left| \frac{\varphi^{i+1} + (-\varphi)^{-i+1} - \varphi^{i+1} + (-\varphi)^{-i-1}}{2\varphi - 2} \right| =$$

$$2\pi \left| \frac{(-1)^{-i-1}(\varphi^{-i+1} + \varphi^{-i-1})}{2\varphi - 2} \right| = 2\pi \left| (-1)^{-i-1} \frac{\varphi^2 + 1}{2\varphi - 2} \varphi^{-i-1} \right| = 2\pi \frac{\varphi^2 + 1}{2\varphi - 2} \varphi^{-i-1} =$$

$$2\pi \varphi^{-i} \frac{\varphi^2 + 1}{2\varphi^2 - 2\varphi} = 2\pi \varphi^{-i} \frac{\varphi^2 + 1}{\varphi^2 - 2\varphi - 1 + \varphi^2 + 1} = 2\pi \varphi^{-i} \frac{\varphi^2 + 1}{\varphi^2 + 1} = 2\pi \varphi^{-i} =$$

$$\frac{2\pi \varphi^{-i} (\varphi^i + (-\varphi)^{-i})}{\varphi^i + (-\varphi)^{-i}} = \frac{2\pi}{\varphi^i + (-\varphi)^{-i}} \left( 1 + (-1)^{-i} \varphi^{-2i} \right).$$

Второе слагаемое в скобках стремится к нулю при  $i \rightarrow \infty$ , поэтому

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_c(\tau_{\text{inf}} = P_i) = \frac{2\pi}{\varphi^i + (-\varphi)^{-i}} = \frac{2\pi}{Q_i}. \quad (1.51)$$

Здесь  $Q_i$  – это  $i$ -ое число Пелля–Люка. Оно определяется по такой же рекуррентной формуле, как и число Пелля (1.47), но с другими начальными условиями:  $Q_0 = 2$ ,  $Q_1 = 2$ . Число Пелля–Люка можно приближенно получить по формуле:

$$Q_i = \varphi^i + (-\varphi)^{-i} \quad (1.52)$$

### 1.9.4 Расчет ширины ступенек

Размер окрестности  $\varepsilon_i$ , который соответствует левой границе ступеньки с минимальным временем возврата  $\tau_{\text{inf}} = q_i$  для произвольного иррационального числа вращения  $\rho$  определяется как

$$\varepsilon_{Li} = \varepsilon_i = 2\pi|\rho q_i - p_i|. \quad (1.53)$$

Аналогично можно получить значение  $\varepsilon_{i-1}$ , которое, учитывая ступенчатый вид функции  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$ , является одновременно и левой границей ступеньки с минимальным временем возврата  $\tau_{\text{inf}} = q_{i-1}$ , и правой границей ступеньки с  $\tau_{\text{inf}} = q_i$ :

$$\varepsilon_{Ri} = \varepsilon_{i-1} = 2\pi|\rho q_{i-1} - p_{i-1}|. \quad (1.54)$$

Отсюда можно получить ширину  $i$ -ой ступеньки зависимости  $\ln \tau_{\text{inf}}(\ln \varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} D_i &= \left| \ln \varepsilon_{Ri} - \ln \varepsilon_{Li} \right| = \left| \ln \frac{\varepsilon_{Ri}}{\varepsilon_{Li}} \right| = \left| \ln \frac{2\pi|\rho q_{i-1} - p_{i-1}|}{2\pi|\rho q_i - p_i|} \right| = \\ &= \left| \ln \frac{|\rho q_{i-1} - p_{i-1}|}{|\rho q_i - p_i|} \right| = \left| \ln \frac{q_{i-1}|\rho - p_{i-1}/q_{i-1}|}{q_i|\rho - p_i/q_i|} \right| \approx \left| \ln \frac{q_{i-1}}{q_i} \right|. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Таким образом, в общем случае ширина ступенек связана со знаменателями подходящих к числу вращения дробей. В случае золотого сечения знаменатели и числители подходящих дробей связаны с числами Фибоначчи как  $p_i = q_{i-1} = F_{i-1}$ . Отсюда получаем, что для золотого сечения

$$D_i \approx \left| \ln \frac{q_{i-1}}{q_i} \right| \approx \left| \ln \frac{p_i}{q_i} \right| \approx |\ln \rho|. \quad (1.56)$$

Аналогично, в случае серебряного сечения числители и знаменатели подходящих дробей связаны с числами Пелля  $p_{i-1} = q_i = P_i$ . Поэтому для серебряного и золотого сечений ширина ступенек не зависит от номера ступеньки и является постоянной величиной, зависящей только от числа вращения  $\ln \rho$ .

### 1.9.5 Обобщение аналитических выкладок

Для любых иррациональных чисел вращения показано, что зависимость  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  имеет ступенчатый характер, причем значения  $\tau_{\text{inf}i}$ , которые соответствуют  $i$ -ым ступенькам лестницы равны знаменателям  $i$ -ых подходящих к числу вращения  $\rho$  дробей  $p_i/q_i$ . Исходя из равенства  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon_i) = q_i$  был определен минимальный размер окрестности возврата Пуанкаре, который соответствует левой границе ступеньки (1.36). Справедливость этой аппроксимации была подтверждена не только для золотого сечения и серебряного сечений, для которых зависимость  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  обладает особыми свойствами и названа «Лестницей Фибоначчи», но и для более сложных чисел вращения: алгебраических ( $\sqrt[3]{2}$  и  $\sqrt[3]{7}$ ) и трансцендентных ( $e$  и  $\lg 5$ ).

Предсказание значений  $\varepsilon$ , которые соответствуют появлению новых ступенек, исходя из величины числа вращения и ступенчатого вида функции  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$ , позволяет не только точно рассчитать размерность Афраймовича–Песина для диофантовых чисел вращения таких, как  $\rho = \sqrt[3]{2}$ ,  $\rho = e$  или  $\rho = \lg(5)$ , но и для лиувиллевых чисел, для которых построение зависимости  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  путем численного моделирования вообще не представляется возможным из-за быстрого возрастания последовательности  $\tau_{\text{inf}i}$ .

### 1.10 Влияние нелинейности

Рассмотрим отображение (1.10) при  $0 < K < 1$ , когда система нелинейна. При  $K > 0$  плотность распределения  $p(\Theta)$  не является равномерной функцией на интервале  $0 \leq \Theta \leq 2\pi$  (см. рисунок 1.4), и при вычислениях  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  необходимо разбивать всю область на интервалы значений  $\varepsilon$  и вычислять среднее (1.4). Ограничимся случаем, когда число вращения  $\rho$  равно золотому сечению.



Если менять величину  $K$  в (1.10), то число вращения  $\rho$  также будет меняться. Поэтому для фиксированных  $K$  величину  $\rho$  в (1.10) подбиралась так, чтобы  $\rho \approx (\sqrt{5} - 1)/2$ . Данные расчетов для трех значений  $K = 0, 0.1$  и  $0.6$  представлены на рисунке 1.18.

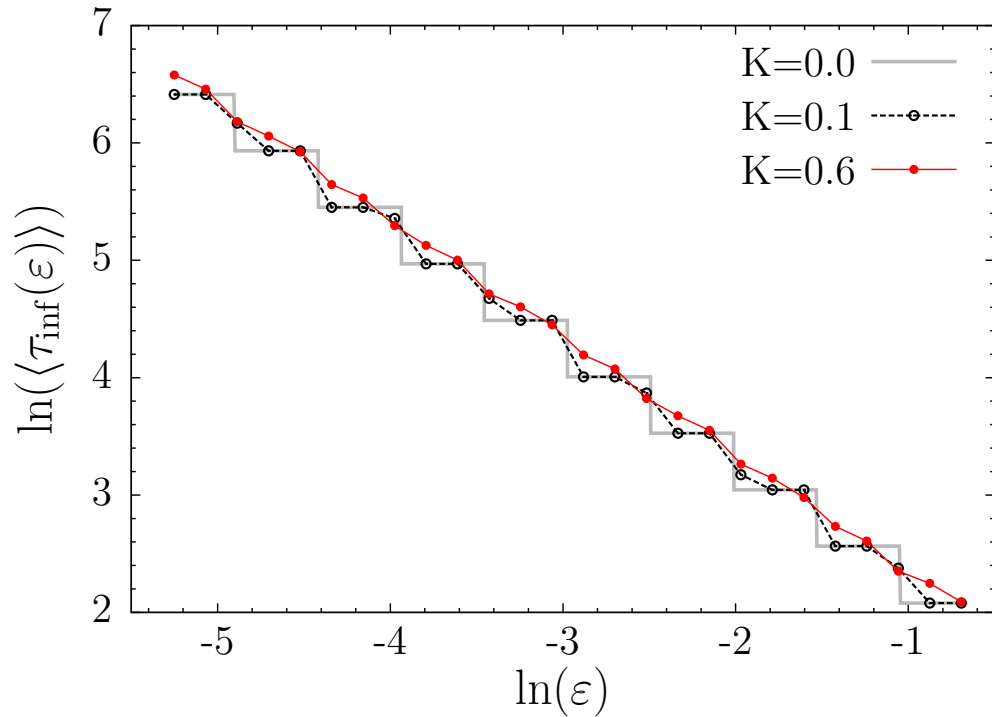


Рис. 1.18. Результаты расчетов  $\ln\langle\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)\rangle$  для отображения (1.10) при  $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  и различных значениях  $K$ :  $K = 0$ ,  $K = 0.1$ ,  $K = 0.6$

Анализ данных рисунка 1.18 свидетельствует о том, что с ростом величины  $K$  «Лестница Фибоначчи» постепенно сглаживается и при  $K \rightarrow 1$  стремится к прямой линии. Расчеты среднего наклона графиков рисунка 1.18 показали, что для значений  $K = 0, 0.1$  и  $0.6$  он равен  $-1$ . То есть и в нелинейном случае размерность Афраймовича–Песина совпадает со скоростью  $\nu(\rho)$  и равна единице  $\nu(\rho) = \alpha_C = 1$ .

## 1.11 Влияние шума на «Лестницу Фибоначчи»

Рассмотрим линейное отображение окружности (1.18) в условиях воздействия шума:

$$\Theta_n = \Theta_{n-1} + \Delta + \sqrt{2D}\xi(n), \quad (1.57)$$

где  $\xi(n)$  – источник гауссова шума,  $D$  – интенсивность шума.

Из-за аддитивного шума в системе (1.57) число вращения определяется не только параметром линейного сдвига на окружности  $\Delta$ . В зависимости от интенсивности шума  $D$  значение параметра  $\Delta$ , которое соответствует золотому сечению, может варьироваться. На рисунке 1.19 приведена зависимость минимального времени возврата Пуанкаре, рассчитанная при  $D = 10^{-8}$  в окрестности двух точек:  $\Theta_0 = \pi/3$  и  $\Theta_0 = 5\pi/4$ . Из графиков видно, что при малой интенсивности шума  $D = 10^{-8}$  расчет возвратов в окрестность одной точки справедлив из-за сохранения равномерности вероятностного распределения. Однако для малых размеров окрестности возврата  $\ln \varepsilon \leq -5$  ступенчатая функция разрушается. Это можно объяснить тем, что при наличии шума число вращения можно задать с некоторой погрешностью. Это подтверждает рис. 1.20, на котором приведены аналогичные зависимости, рассчитанные для бóльшей интенсивности шума  $D = 10^{-5}$ . Из рис. 1.20 видно, что выбор точки, в окрестность которой рассчитываются возвраты, влияет на зависимость  $\ln \tau_{\text{inf}}(\ln \varepsilon)$ . Этот факт объясняется неравномерностью вероятностного распределения, возникающей из-за добавления шума (см. Рис. 1.21). Неравномерность вероятностного распределения говорит о необходимости применения глобального подхода при вычислении зависимости  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  в случае больших значений интенсивности шума. Зависимость, рассчитанная при глобальном подходе в результате усреднения по всем точкам, в окрестности которых вычислялись возвраты Пуанкаре, приведена на рис. 1.22.

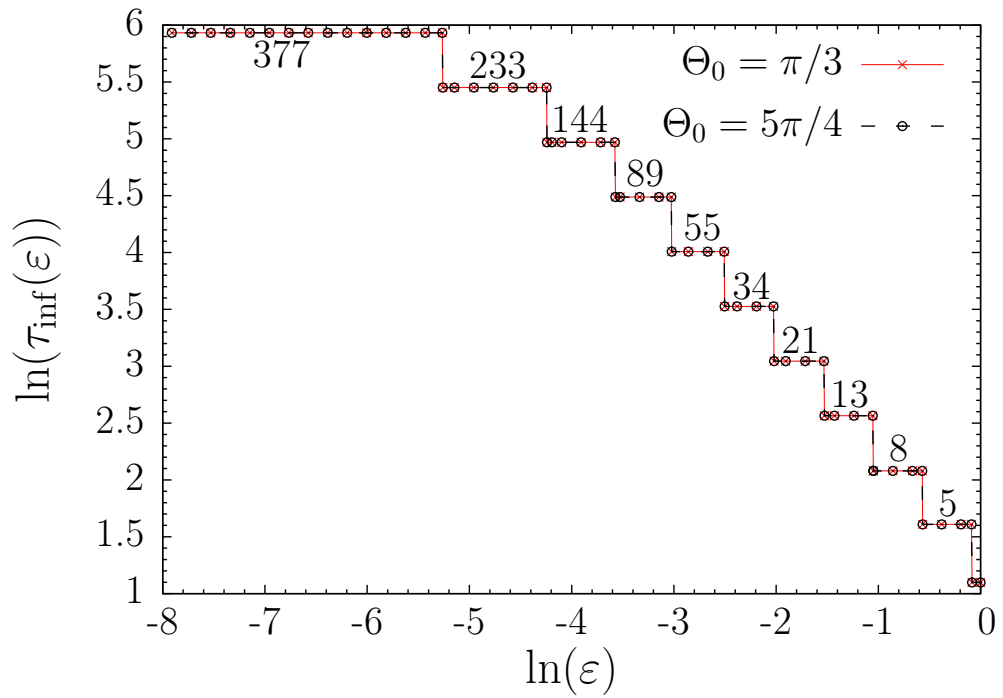


Рис. 1.19. Результаты расчетов  $\ln \tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  для отображения (1.57) при  $\Delta = \pi/(\sqrt{5} - 1)$ ,  $D = 10^{-8}$ . Возвраты рассчитывались в окрестности двух точек:  $\Theta_0 = \pi/3$  и  $\Theta_0 = 5\pi/4$

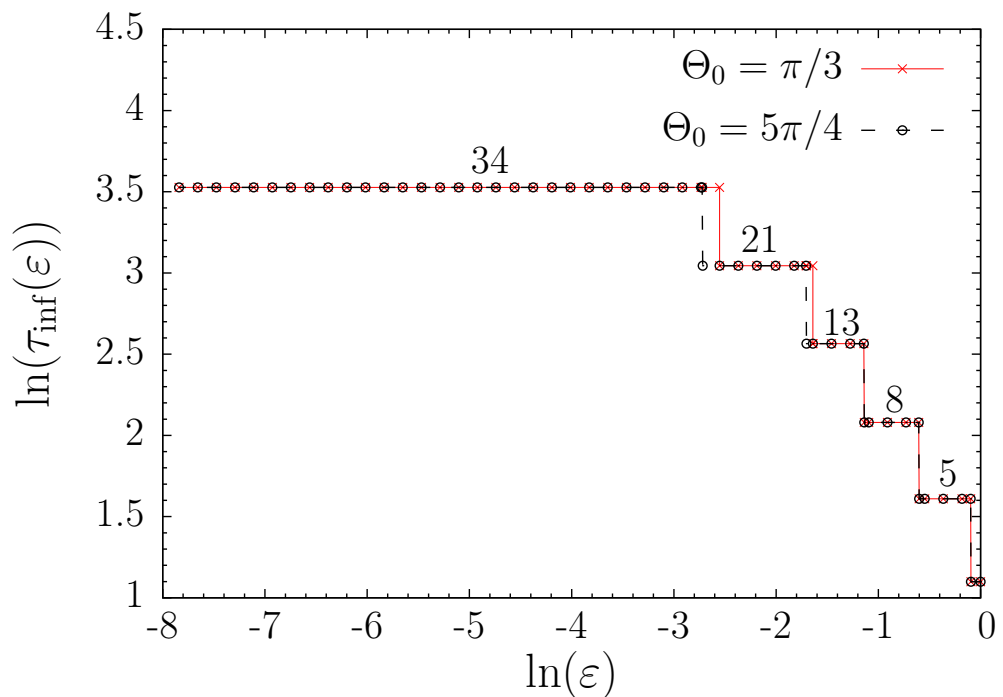


Рис. 1.20. Результаты расчетов  $\ln \tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  для отображения (1.57) при  $\Delta = \pi/(\sqrt{5} - 1)$ ,  $D = 10^{-5}$ . Возвраты рассчитывались в окрестности двух точек:  $\Theta_0 = \pi/3$  и  $\Theta_0 = 5\pi/4$

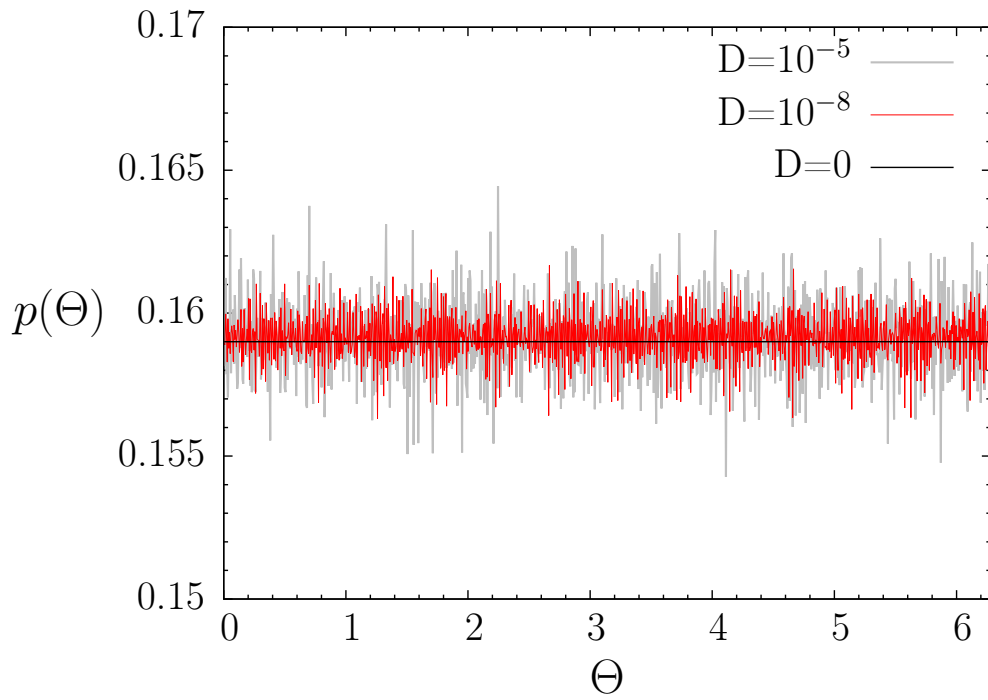


Рис. 1.21. Плотности распределения  $p(\Theta)$  системы (1.57) при  $\Delta = \pi/(\sqrt{5} - 1)$  и интенсивностях шума  $D = 10^{-5}$ ,  $D = 10^{-8}$  и  $D = 0$

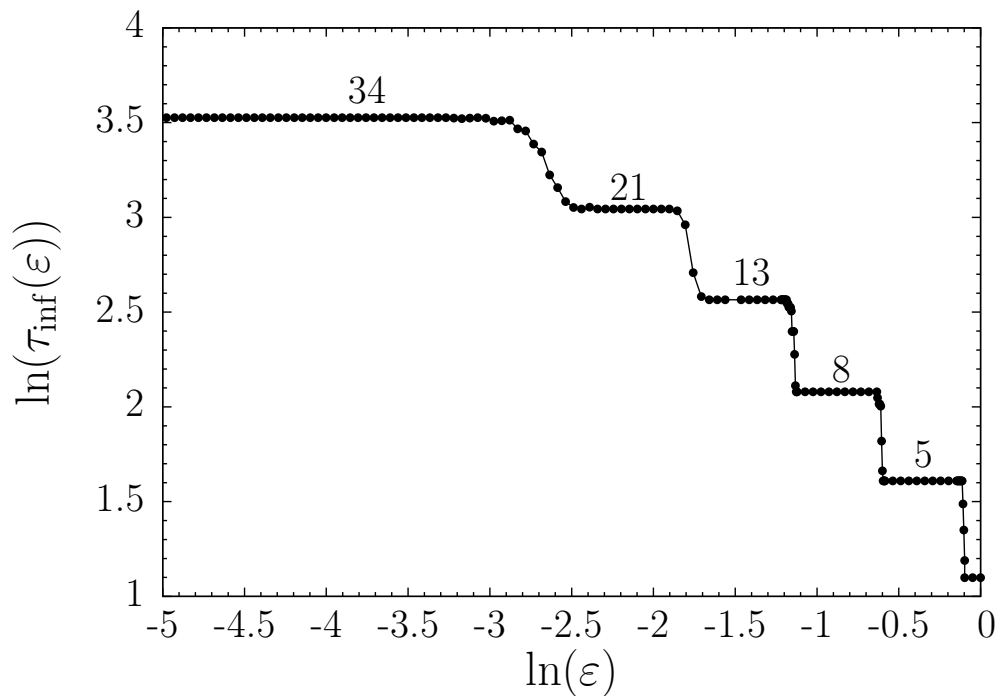


Рис. 1.22. Результаты расчетов  $\ln\langle\tau_{\text{inf}}(\ln \varepsilon)\rangle$  для отображения (1.57) при  $\Delta = \pi/(\sqrt{5} - 1)$ ,  $D = 10^{-5}$ . Возвраты рассчитывались при глобальном подходе для всего множества с последующим усреднением

Таким образом, основным эффектом, к которому приводит шумовое воздействие, – это возникновение порогового значения  $\varepsilon$ , начиная с которого происходит разрушение «Лестницы Фибоначчи». Это можно объяснить тем, что шум добавляет ошибку в задание числа вращения. Еще один эффект – это появление промежуточных точек между ступеньками «Лестницы Фибоначчи». Этот эффект аналогичен воздействию нелинейности (см. Раздел 1.10), и объясняется ростом нелинейности при возрастании интенсивности шума.

## 1.12 Выводы по первой главе

1. В результате проведенных исследований впервые было установлено, что для золотого и серебряного сечений в отображении окружности имеет место универсальный вид зависимости минимального времени возврата от величины окрестности, «Лестница Фибоначчи».
2. Для любых иррациональных чисел вращения показано, что зависимость  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  имеет ступенчатый характер, причем значения  $\tau_{\text{inf}i}$ , которые соответствуют  $i$ -ым ступенькам лестницы равны знаменателям  $i$ -ых подходящих к числу вращения  $\rho$  дробей  $p_i/q_i$ .
3. Экспериментально было показано, что для диофантовых чисел с мерой иррациональности  $\mu = 2$  размерность Афраймовича–Песина  $\alpha_C$  совпадает со скоростью диофантовых приближений  $\nu(\rho)$  и равна единице. Этот вывод справедлив в отношении отображения окружности как в линейном ( $K = 0$ ), так и в нелинейном ( $K > 0$ ) случаях.
4. Результаты подтверждают теоретический вывод и свидетельствуют о том, что калибровочная функция  $\phi(t) \sim \frac{1}{t}$  позволяет получить размерность Афраймовича–Песина для минимальных множеств на окружности. Так

как диофантовы числа образуют множество полной меры на любом интервале, то функция  $\frac{1}{t}$  является наиболее вероятной применительно к иррациональным сдвигам на окружности. В отношении лиувиллевых чисел вращения, для которых  $\mu \rightarrow \infty$  калибровочную функцию  $\phi(t) \sim \frac{1}{t}$  использовать нельзя.

5. Исходя из равенства  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon_i) = q_i$  был определен минимальный размер окрестности возврата Пуанкаре, который соответствует левой границе ступеньки (1.36). Справедливость этой аппроксимации была подтверждена не только для золотого сечения и серебряного сечений, для которых зависимость  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  обладает особыми свойствами и названа «Лестницей Фибоначчи», но и для более сложных чисел вращения: алгебраических ( $\sqrt[3]{2}$  и  $\sqrt[3]{7}$ ) и трансцендентных ( $e$  и  $\lg 5$ ).

Предсказание критических значений  $\varepsilon_c$ , которые соответствуют появлению новых ступенек, исходя из величины числа вращения и ступенчатого вида функции  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$ , позволяет не только точно рассчитать размерность Афраймовича-Песина для диофантовых чисел вращения таких, как  $\delta = \sqrt[3]{2}$ ,  $\delta = e$  или  $\delta = \lg(5)$ , но и для лиувиллевых чисел, для которых построение зависимости  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  путем численного моделирования вообще не представляется возможным из-за быстрого возрастания последовательности  $\tau_{\text{inf}}$ .

# Глава 2. ВОЗВРАТЫ ПУАНКАРЕ В НЕАВТОНОМНОМ ГЕНЕРАТОРЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ

## 2.1 Введение

В Главе 1 было показано, что для золотого сечения в отображении окружности (1.10) имеет место универсальная закономерность зависимости минимального времени возврата от величины окрестности, «Лестница Фибоначчи». Эта зависимость представлена на рисунке 1.5,а и отвечает числу вращения  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$  (см. Раздел 1.5). Интерес представляет рассмотреть реальную динамическую систему, которая позволила бы получить эргодическое множество типа (1.10) и проверить экспериментально закономерности, установленные для отображения окружности.

Режим двухчастотных колебаний может быть реализован несколькими способами. Например, при использовании двух связанных автоколебательных систем с различными собственными частотами. Наиболее простой способ состоит в рассмотрении автоколебательной системы, находящейся под действием внешней периодической силы. Путем введения секущей Пуанкаре двумерного тора можно получить дискретное отображение, которое при малых амплитудах воздействия должно соответствовать отображению окружности (1.10). Другим способом получения отображения окружности является построение дискретного множества в стробоскопическом сечении фазовой траектории через период внешней силы [101]. Если шаг интегрирования  $\Delta t = T/k$ , где  $k$  – целое число, то множество точек в сечении вычисляется с максимальной точностью.

В настоящей главе рассматривается генератор Ван дер Поля с внешним гармоническим воздействием. Множество типа отображения окружности (1.10) в данной системе можно реализовать путем расчета стробоскопического сечения фазовых траекторий системы через период внешнего воздействия.

Целью этой главы является детальный анализ статистики возвратов Пуанкаре в стробоскопическом сечении фазовых траекторий в глобальном приближении. Решается задача построения «Лестницы Фибоначчи», расчета размерности Афраймовича–Песина для различных значений иррациональных чисел вращения. В итоге проводится сравнение теоретических результатов, полученных для линейного сдвига на окружности (1.18) и представленных в Главе 1, с данными численных экспериментов с неавтономным генератором.

## 2.2 Исследуемая динамическая система

Рассмотрим классический генератор Ван дер Поля, находящийся под действием внешней гармонической силы:

$$\ddot{x} - (\alpha - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin \Omega t, \quad (2.1)$$

где  $\alpha$  – параметр возбуждения генератора,  $\omega_0$  – частота автоколебаний автономного генератора,  $A$  – амплитуда внешнего воздействия,  $\Theta = \Omega t$  – фаза,  $\Omega$  – частота внешнего воздействия [102].

Перепишем (2.1) в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (\alpha - x^2)y - \omega_0^2 x + A \sin \Theta \\ \dot{\Theta} = \Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

В генераторе (2.1) при  $A = 0$  и  $\alpha > 0$  рождается предельный цикл амплитуды  $2\sqrt{\alpha}$  [102]. В трехмерной системе (2.2) при  $A > 0$  реализуются квазипе-



риодические колебания, которым отвечает двумерный тор в фазовом пространстве. В зависимости от соотношения частот  $\omega_0$  и  $\Omega$  тор будет эргодическим или резонансным. Нас будет интересовать режим эргодического тора, когда соотношение частот (число вращения) иррационально.

С целью получения множества, эквивалентного отображению окружности, будем рассматривать частный случай сечения Пуанкаре [103–105] – стробоскопическое сечение фазовых траекторий системы (2.2) через период внешней силы  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ . Это означает, что из временной реализации рассматриваются состояния в моменты  $t_k = k \cdot T$ , где  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  – период внешней силы, а  $k = 1, 2, \dots$ . Результаты вычислений показаны на рис. 2.1. Как показано в книге [101], множество, полученное в стробоскопическом сечении, эквивалентно отображению окружности (1.10).

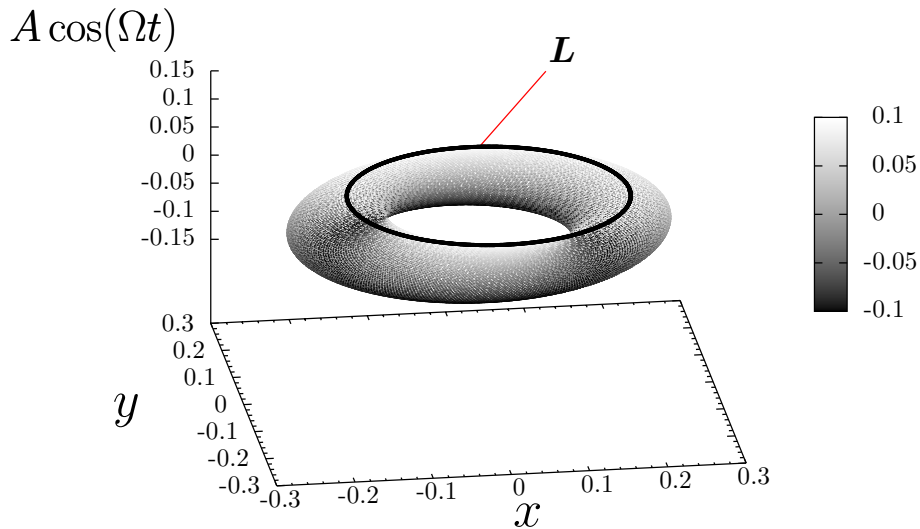


Рис. 2.1. Двумерный тор и стробоскопическое сечение тора  $L$  в системе (2.2) при значениях параметров  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $\Omega = 1.1835944$  и  $A = 0.1$

В случае достаточно малых значений амплитуды внешнего воздействия в системе (2.2) при  $\alpha \ll 1$  множество в стробоскопическом сечении на плоскости переменных  $(x_s, y_s)$  является окружностью радиуса  $a = \sqrt{x_s^2 + y_s^2}$  [84]. При значении параметра  $\alpha = 0.01$  радиус этой окружности  $a \approx 0.2$  постоянен, что позволяет анализировать не последовательность координат  $\{x_{sn}\}$  и  $\{y_{sn}\}$ , полученных в стробоскопическом сечении, а последовательность сдвигов фазы

$\{\psi_n\}$  в полярной системе координат, которые связаны с координатами  $x_s$  и  $y_s$  как  $x_{sn} = a \cos \psi_n$ ,  $y_{sn} = a \sin \psi_n$  (см. Рис. 2.2).

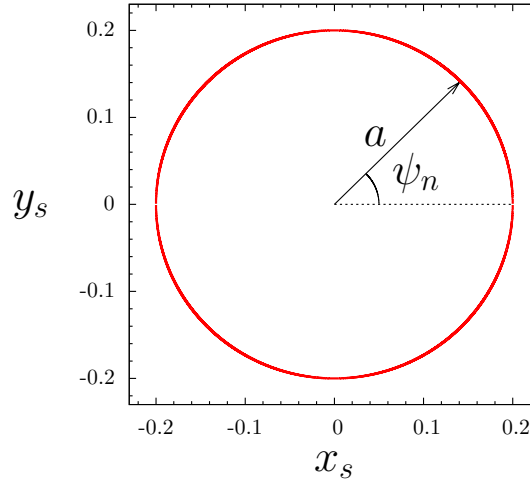


Рис. 2.2. Стробоскопическое сечение системы (2.2), построенное для значений параметров  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 10^{-5}$ . Значение  $\Omega = 1.6180141526367187$ , при котором число вращения  $\rho$  с высокой точностью отвечает золотому сечению

$$\rho = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

В общем случае конечных значений амплитуды воздействия  $A > 0$  множество в стробоскопическом сечении соответствует нелинейному отображению окружности (1.10):

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \Delta(A, \Omega, \omega_0) + K(A) \sin \psi_n, \quad (2.3)$$

где  $\Delta$  – это параметр, который зависит от параметров автономной системы (2.2), от отношения собственной и внешней частот и от амплитуды внешнего воздействия. Можно ожидать, что при малых значениях амплитуды внешнего воздействия  $A \ll 1$  коэффициент  $K(A)$  также удовлетворяет условию  $K(A) \ll 1$  и отображение (2.3) близко к линейному (1.18). При этом из-за малости параметра  $A \ll 1$  влияние величины амплитуды  $A$  на параметр  $\Delta$  системы (2.3) будет минимальным, а главный вклад будет вносить отношение внешней и собственной частот.

## 2.3 Особенности выбора числа вращения

В общем случае число вращения  $\rho$  определяется как среднее приращение угла  $\psi$  за одну итерацию отображения (2.3) по отношению к полному углу:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n - \psi_0}{2\pi n}. \quad (2.4)$$

Несложно показать, что при  $K(A) \rightarrow 0$  параметр  $\Delta$  в (2.3) выполняет роль линейного сдвига фазы на окружности и связан с числом вращения как  $\Delta = 2\pi\rho$ . Кроме того, в этом случае число вращения зависит от собственной частоты осциллятора Ван дер Поля  $\omega_0$  и от частоты внешнего воздействия  $\Omega$ . Зависимость числа вращения  $\rho$  от частоты  $\Omega$  при фиксированных параметрах  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 0.1$  приведена на рис. 2.3. Как видно из рисунка, график соответствует зависимости:

$$\rho \approx \omega_0/\Omega \quad (2.5)$$

с погрешностью  $\pm 0.1\%$ .

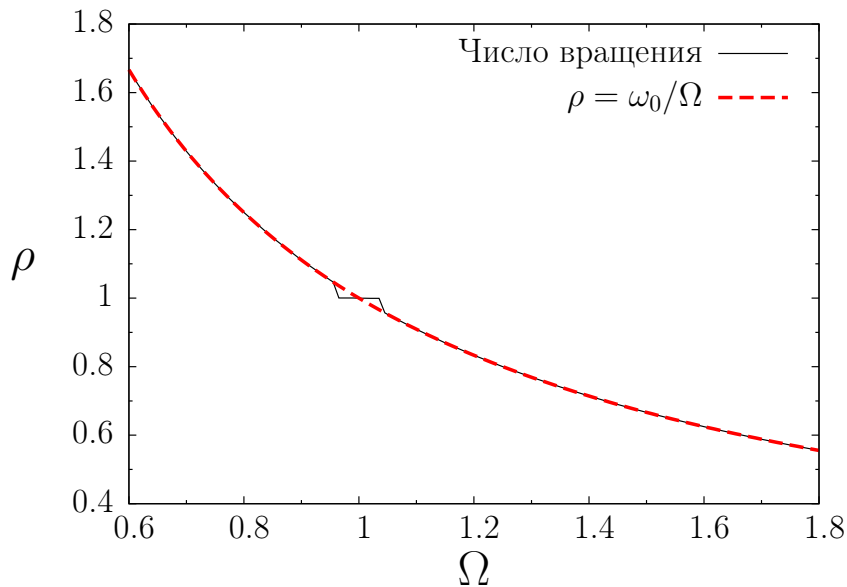


Рис. 2.3. Зависимость числа вращения от частоты внешнего воздействия.

Значения параметров:  $\omega_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $A = 0.01$

На графике рис. 2.3 виден резонанс 1:1, когда  $\omega_0 \approx \Omega \approx 1$ . Этот график называют «дьявольской лестницей» [106]. Теоретически график должен содер-

жать бесконечной число «полочек», отвечающих резонансам  $\omega_0/\Omega \approx l/k$ , где  $l, k \in \mathbb{N}$ . Однако резонансы высоких порядков ( $k > 1$ ) в представленном масштабе не проявляются в силу их малости по переменной  $\Omega$  и малости амплитуды внешнего воздействия по отношению к амплитуде автономного генератора Ван дер Поля.

В Главе 1 было рассмотрено отображение окружности (1.10) главным образом в случае золотого сечения. Этот случай соответствует числу вращения, равному  $(\sqrt{5} - 1)/2$ . Исходя из формулы (2.5) можно легко определить значение амплитуды внешнего воздействия, которая будет соответствовать случаю золотого сечения:

$$\Omega_{gold} \approx \frac{2\omega_0}{\sqrt{5} - 1}. \quad (2.6)$$

Однако, учитывая ненулевое значение амплитуды внешнего воздействия, эту частоту можно получить только с некоторой погрешностью. Чем меньше амплитуда  $A$ , тем меньше погрешность. При  $\omega_0 = 1$  по формуле (2.6) золотому сечению соответствует частота  $\Omega_{gold} \approx 1.618033989$ .

На рис. 2.4 представлена зависимость погрешности задания частоты  $\Omega$ , соответствующей золотому сечению, от значения амплитуды внешнего воздействия  $A$ . Как видно из графика рис. 2.4, увеличение амплитуды  $A$  приводит к росту погрешности, невыполнению выражения (2.6) и сложностям, связанным с точностью задания числа вращения. Результаты численного моделирования показали, что при  $A \ll 0.1$  число вращения можно задать с точностью до 6 или 8 знака после запятой, но при  $A \gtrsim 0.1$  погрешность увеличивается.

Таким образом можно ожидать, что при малых  $A \ll 1$  коэффициент  $K(A)$  в системе (2.3) также удовлетворяет условию  $K(A) \ll 1$  и отображение (2.3) близко к линейному (1.18). В связи с этим рассмотрим случаи малых и больших значений амплитуды внешнего воздействия.

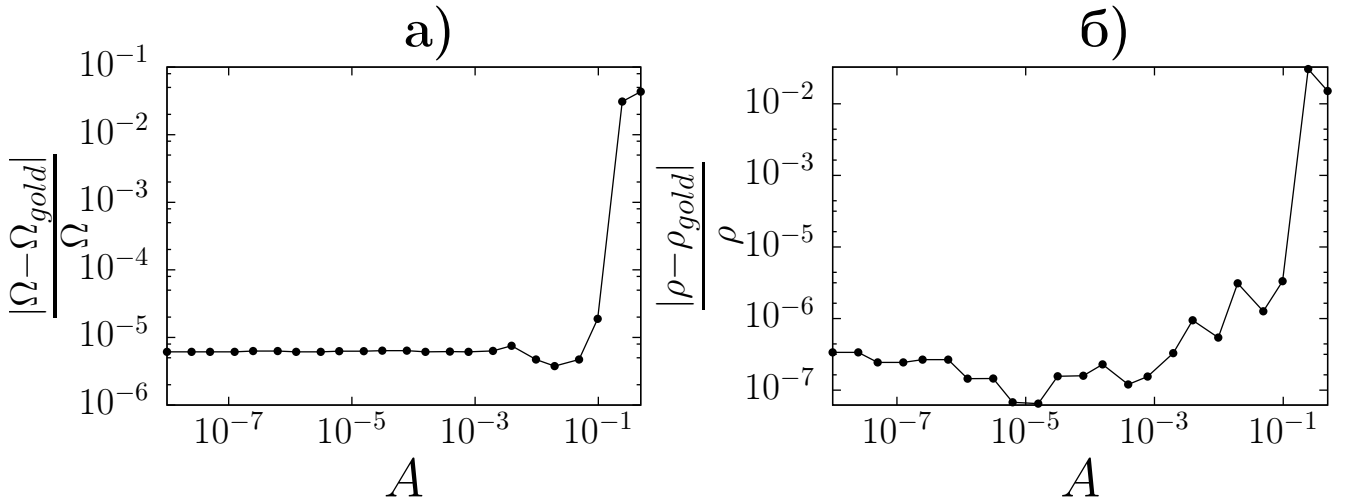


Рис. 2.4. Сравнение частоты  $\Omega$ , соответствующей золотому сечению, и частоты  $\Omega_{gold}$ , полученной при помощи формулы (2.6) при вариации амплитуды внешнего воздействия  $A$ . Значения параметров:  $\omega_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.01$

## 2.4 Случай малых значений амплитуды

Как показано в предыдущем разделе, при малых амплитудах внешнего воздействия множество (2.3), полученное в стробоскопическом сечении неавтономного генератора Ван дер Поля (2.2), при  $K(A) \ll 1$  является окружностью, а множество значений  $\psi_n$  должно удовлетворять отображению линейного сдвига на окружности (1.18). Это отображение исследовалось в Главе 1, и для него было показано, что зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности возврата является ступенчатой функцией, названной «Лестницей Фибоначчи». Эта зависимость обладает тремя основными свойствами, описанными в разделе 1.5. Эти свойства в первую очередь были сформулированы для случая золотого сечения, когда число вращения задается как  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ . По этой причине рассмотрим случай золотого сечения в множестве (2.3), полученном в стробоскопическом сечении неавтономного генератора Ван дер Поля (2.2).

В Разделе 2.3 было показано, что в случае малых значений амплитуды  $A$  число вращения можно задать с высокой точностью (рис. 2.4). Например, при

$A = 10^{-8}$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$  золотому сечению  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$  соответствует частота внешнего воздействия  $\Omega = \Omega_{gold} + 1.21567 \cdot 10^{-8}$ . Вероятностное распределение  $p(x_s, y_s)$  при этом близко к равномерному (рис. 2.5). Аналогичный результат был получен и для отображения окружности (1.10) при параметре нелинейности  $K = 0$  (рис. 1.4). В силу равномерности распределения расчет среднего минимального времени возврата Пуанкаре во всё множество в целом  $\langle \tau_{inf}(\varepsilon) \rangle$  можно заменить расчетом возвратов в окрестность одной точки  $\psi_0$ :  $\tau_{inf}(\psi_0, \varepsilon)$ . Это связано с тем, что при равномерном распределении  $\tau_{inf}(\varepsilon)$  не будет зависеть от выбора точки, в окрестность которой рассчитываются возвраты.

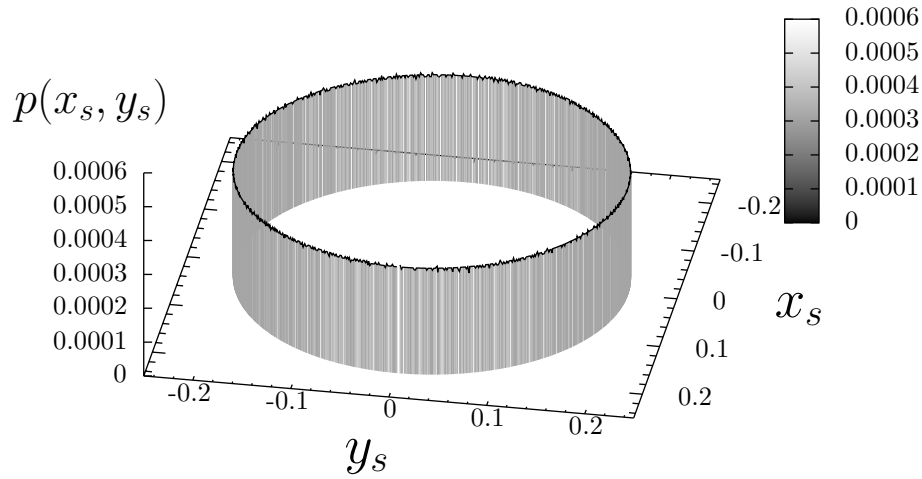


Рис. 2.5. Плотность распределения вероятностей точек на окружности  $p(x_s, y_s)$ , рассчитанная для значений параметров  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 10^{-8}$ . Значение  $\Omega = \Omega_{gold} + 1.21567 \cdot 10^{-8}$ , при котором число вращения  $\rho$  с высокой точностью отвечает золотому сечению  $\rho = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

На рисунке 2.6 приведены результаты расчетов зависимостей минимальных времен возврата в окрестности точек  $\psi_0 = \pi/3$  и  $\psi = 5\pi/4$ . Из графиков рис. 2.5 видно, что эти зависимости практически совпадают.

Подобная зависимость была построена в Главе 1 (рис. 1.5,а) для отображения окружности (1.10). Из сравнения графиков рис. 2.6 и рис. 1.5,а можно заключить, что при больших  $\varepsilon$  (до ступеньки с числом  $\tau_{inf} = 89$ ) зависимости демонстрируют не только качественное, но и количественное сходство. Последо-

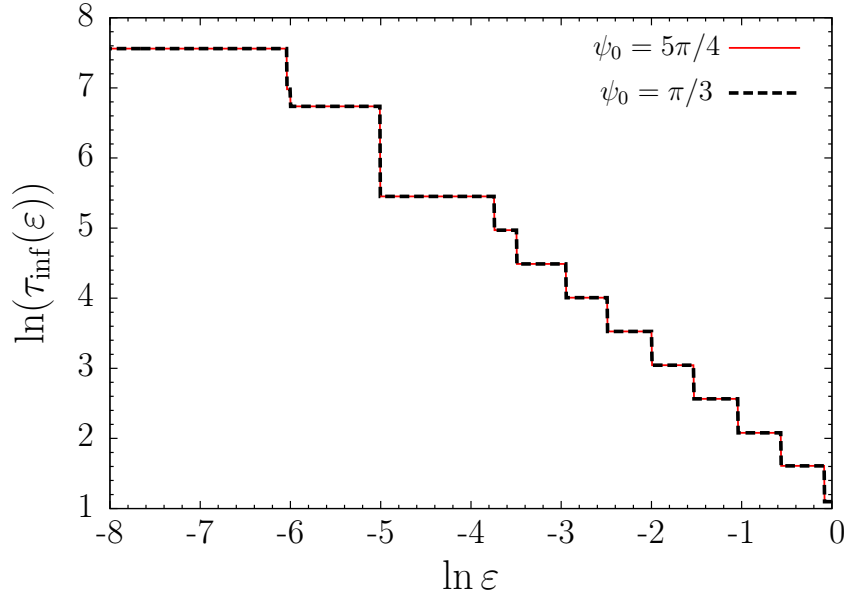


Рис. 2.6. Лестница Фибоначчи для стробоскопического сечения фазовых траекторий системы (2.2) при значениях параметров  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 10^{-8}$ ,  $\Omega = \Omega_{gold} + 1.21567 \cdot 10^{-8}$ , что отвечает случаю золотого сечения. Зависимости были рассчитаны в окрестности точек  $\psi_0 = \pi/3$  и  $\psi_0 = 5\pi/4$ .

Усреднение зависимостей в интервале  $\ln \varepsilon < -4$  есть прямая линия с единичным наклоном ( $\alpha_C = 1$ )

вательность значений  $\tau_{\text{inf}}$  на ступеньках «Лестницы Фибоначчи» рис. 2.6 строго соответствуют числам основного ряда Фибоначчи. Высота и ширина ступенек в интервале  $-4 \leq \ln \varepsilon \leq 0$  составляет  $D = H = |\ln \rho|$ . Наклон графика в этом интервале составляет  $-1$ , что дает значение размерности Афраймовича–Песина  $\alpha_C = 1$ . С уменьшением  $\varepsilon$  ( $\ln \varepsilon < -4$ ) «Лестница Фибоначчи» постепенно разрушается, что можно объяснить неточностью задания числа вращения. При  $A = 10^{-8}$  отклонение составляет примерно  $10^{-7} - 10^{-8}$ . Предположительно этот эффект аналогичен зашумленному отображению окружности (1.57). Эта система уже была рассмотрена в разделе 1.11, где было показано, что наличие шума приводит к неточности задания числа вращения  $\rho$ . На рис. 1.19 приведена зависимость минимального времени возврата Пуанкаре в системе (1.57) при интенсивности шума  $D = 10^{-8}$ . Из сравнения графиков рис. 2.6 и рис. 1.19 видно, что наличие шума приводит к неточности в задании числа вращения,

а «Лестница Фибоначчи» при малых  $\varepsilon$  разрушается и теряет универсальность геометрии. При этом влияние отклонения в задании числа вращения в системе (2.2) аналогично влиянию белого гауссовского шума в отображении (1.57) с интенсивностью, равной этому отклонению. Это подтверждает тот факт, что неточность в задании числа вращения в стробоскопическом сечении системы (2.2) приводит к разрушению «Лестницы Фибоначчи» при малых  $\varepsilon$ .

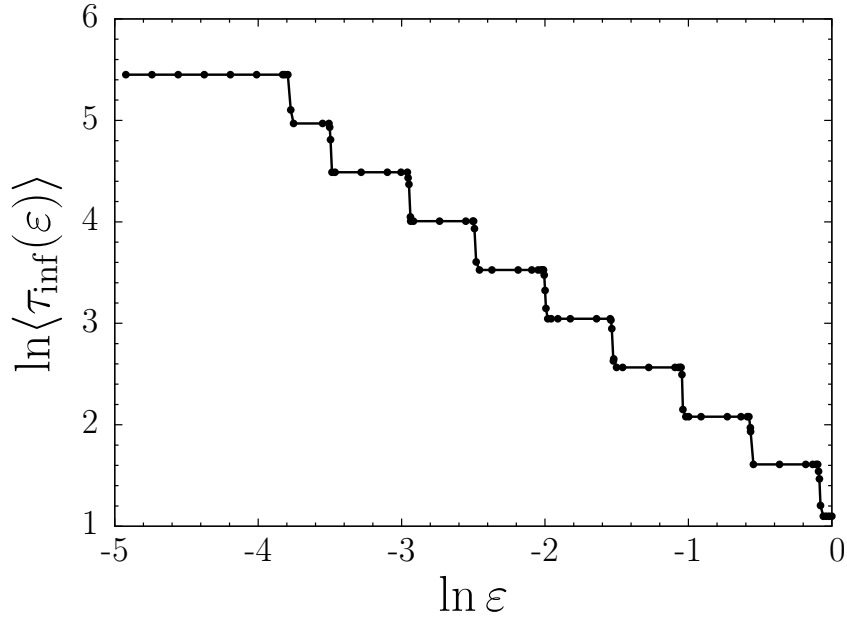


Рис. 2.7. Лестница Фибоначчи для стробоскопического сечения фазовых траекторий системы (2.2) при значениях параметров  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 10^{-8}$ ,  $\Omega = \Omega_{gold} + 1.21567 \cdot 10^{-8}$ , что отвечает случаю золотого сечения  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Усреднение зависимостей в интервале  $\ln \varepsilon < -4$  есть прямая линия с единичным наклоном ( $\alpha_C = 1$ )

При детальном рассмотрении распределения  $p(x_s, y_s)$  (рис. 2.5) можно заметить, что в распределении присутствует неоднородность. По этой причине несмотря на то, что зависимости на рисунке 2.6 практически совпадают, имеет смысл рассмотреть статистику возвратов Пуанкаре и при глобальном подходе (с усреднением по точкам на окружности), то есть провести расчеты среднего минимального времени возврата Пуанкаре. Результаты, представленные на рис. 2.7, практически совпадают с результатами, полученными для окрестностей од-



ной точки (рис. 2.6). Различия проявляются в точках перехода между ступеньками «Лестницы Фибоначчи». Если в отображении окружности (рис. 1.5,а) и на графике рисунка 2.6 точки принадлежали только одной из ступенек, то в случае множества, полученного в стробоскопическом сечении неавтономного генератора Ван дер Поля, появляются промежуточные точки. Это можно объяснить ненулевым внешним воздействием ( $A = 10^{-8}$ ). Можно ожидать, что при бóльших значениях амплитуды внешнего воздействия  $A$  количество промежуточных точек будет увеличиваться. С этой целью были рассмотрены случаи  $A = 10^{-5}$  (рис. 2.8) и  $A = 10^{-3}$  (рис. 2.9).

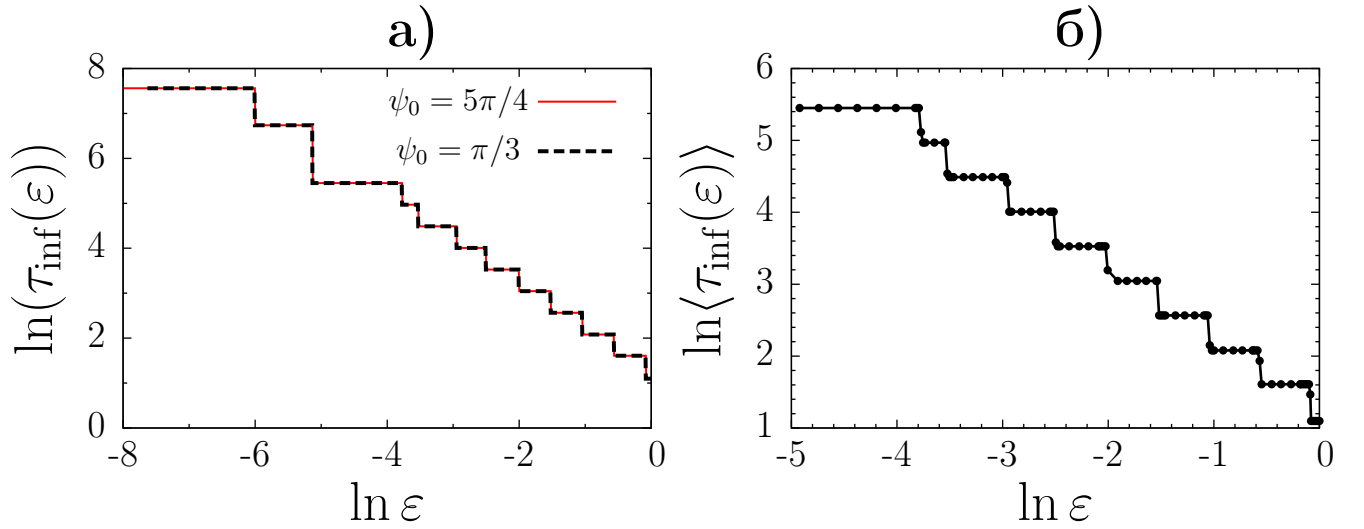


Рис. 2.8. Лестницы Фибоначчи для стробоскопического сечения фазовых траекторий системы (2.2) при значениях параметров  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 10^{-5}$ ,  $\Omega = \Omega_{gold} - 3.14729 \cdot 10^{-8}$ , что отвечает случаю золотого сечения  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Возвраты  $\tau_{inf}(\epsilon)$  были рассчитаны в точки  $\psi_0 = \pi/3$  и  $\psi_0 = 5\pi/4$  (а) и во все множество в целом  $\langle \tau_{inf}(\epsilon) \rangle$  (б). Усреднение зависимостей в интервале  $-4 < \ln \epsilon < 0$  есть прямая линия с единичным наклоном ( $\alpha_C = 1$ )

Из рис. 2.8 и рис. 2.9 видно, что увеличение амплитуды внешнего воздействия приводит к увеличению числа промежуточных точек. Разрушение «Лестницы Фибоначчи» при малых  $\epsilon$  ( $\ln \epsilon < -4$ ) происходит начиная с той же ступеньки  $\tau_{inf} = 89$ . Этот результат подтверждает тот факт, что на разру-

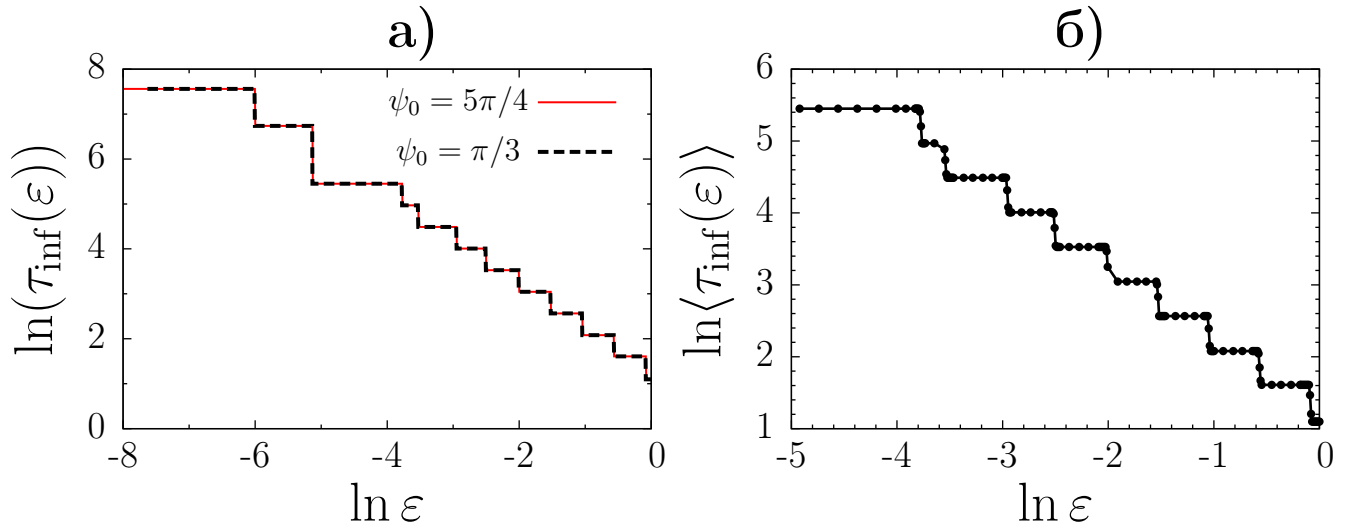


Рис. 2.9. Лестницы Фибоначчи для стробоскопического сечения фазовых траекторий системы (2.2) при значениях параметров  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 10^{-3}$ ,  $\Omega = \Omega_{\text{gold}} - 1.02646 \cdot 10^{-8}$ , что отвечает случаю золотого сечения  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Возвраты  $\tau_{\text{inf}}(\epsilon)$  были рассчитаны в точки  $\psi_0 = \pi/3$  и  $\psi_0 = 5\pi/4$  (а) и во все множество в целом  $\langle \tau_{\text{inf}}(\epsilon) \rangle$  (б). Усреднение зависимостей в интервале  $-4 < \ln \epsilon < 0$  есть прямая линия с единичным наклоном ( $\alpha_C = 1$ )

шение лестницы в интервале малых  $\epsilon$  влияет точность задания числа вращения  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ , которая для  $10^{-8} \leq A \leq 10^{-3}$  примерно одинаковая.

## 2.5 Случай относительно больших значений амплитуды

Как показано в Разделе 2.4, при малых значениях амплитуды внешнего воздействия  $A \ll 1$  коэффициент  $K(A)$  в системе (2.3) также удовлетворяет этому условию  $K(A) \ll 1$  и множество (2.3), получаемое в стробоскопическом сечении системы (2.2), близко к отображению линейного сдвига на окружности (1.18). В случае же наличия большой амплитуды внешнего воздействия  $K(A) > 0$  слагаемое нелинейности в системе (2.3) имеет место. При этом система (2.3) схожа с нелинейным отображением окружности (1.10). В разделе 1.5 было показано, что наличие нелинейности в отображении окружности (1.10) приводит к неравномерности вероятностного распределения (рис. 1.4). Аналогичный эффект имеет место и в стробоскопическом сечении системы (2.2). Например, при  $A = 0.1$  распределение имеет вид, представленный на рисунке 2.10.

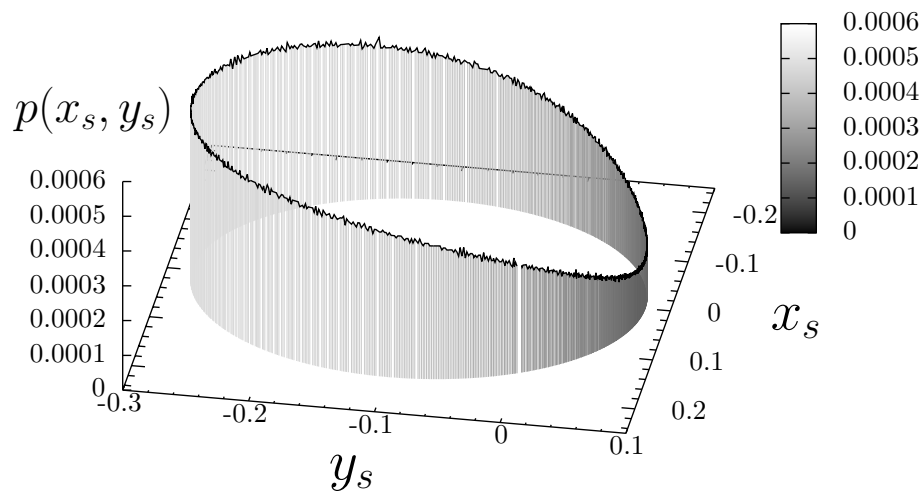


Рис. 2.10. Плотность распределения вероятностей точек на окружности  $p(x_s, y_s)$ , рассчитанная для значений параметров  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 0.1$ .

Значение  $\Omega = \Omega_{gold} + 3.20089 \cdot 10^{-6}$ , что соответствует золотому сечению

$$\rho \approx \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Рассмотрим каким образом при больших значениях  $A$  меняется «Лестница Фибоначчи». При амплитуде внешнего воздействия  $A = 10^{-2}$  минимальная погрешность, которой удалось достичь при задании золотого сече-

ния, составила  $\approx 10^{-5}$  (рис. 2.4). Этому соответствует значение частоты  $\Omega = \Omega_{gold} - 1.89289 \cdot 10^{-8}$ . Для этих параметров были построены зависимости минимальных времен возврата (рис. 2.11).

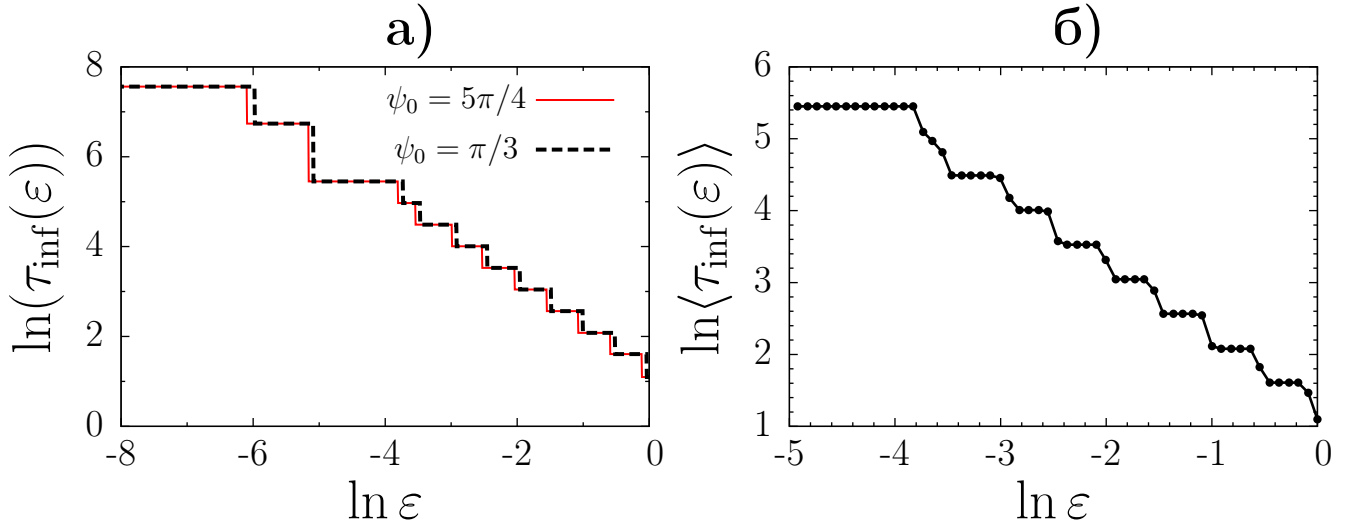


Рис. 2.11. Лестницы Фибоначчи для стробоскопического сечения фазовых траекторий системы (2.2) при значениях параметров  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 10^{-2}$ ,  $\Omega = \Omega_{gold} - 1.89289 \cdot 10^{-8}$ , что отвечает случаю золотого сечения  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Возвраты  $\tau_{inf}(\epsilon)$  были рассчитаны в точки  $\psi_0 = \pi/3$  и  $\psi_0 = 5\pi/4$  (а) и во все множество в целом  $\langle \tau_{inf}(\epsilon) \rangle$  (б). Усреднение зависимостей в интервале  $-4 < \ln \epsilon < 0$  есть прямая линия с единичным наклоном ( $\alpha_C = 1$ )

На рисунке 2.11 представлены зависимости  $\tau_{inf}(\epsilon)$ , рассчитанные в окрестности двух точек  $\psi_0 = \pi/3$  и  $\psi_0 = 5\pi/4$  (рис. 2.11,а), а также зависимость  $\langle \tau_{inf}(\epsilon) \rangle$ , рассчитанная с усреднением по всему множеству точек (рис. 2.11,б). Графики, изображенные на рисунке 2.11,а говорят о неприменимости метода расчета возвратов в окрестности одной точки. Если при малых значениях амплитуды (рис. 2.6, 2.8,а и 2.9,а) зависимости, рассчитанные для разных точек  $\psi_0$ , практически совпадали, и на графиках практически неразличимы, то в случае  $A = 0.01$  зависимости расходятся. Это говорит о том, что из-за влияния нелинейности (рис. 2.10) возвраты  $\tau_{inf}$  должны рассчитываться во все множество с последующим усреднением. Из рисунка 2.11,б видно, что наличие нелинейно-

сти приводит разрушению «Лестницы Фибоначчи» и увеличению числа точек между «ступеньками». Этот эффект аналогичен влиянию нелинейности в отображении окружности (1.10) (см. Рис. 1.18).

Увеличение амплитуды внешнего воздействия  $A = 0.1$  приводит к увеличению погрешности задания точного числа вращения и полному разрушению «Лестницы Фибоначчи» (см. Рис. 2.12). Значение амплитуды внешнего воздействия, равное 0.1, соизмеримо с амплитудой собственных колебаний автономного генератора Ван дер Поля, что говорит о присутствии сильной нелинейности в системе (2.2). Аппроксимация зависимости дает прямую с коэффициентом угла наклона, отличным от 1, что можно объяснить наличием сильной нелинейности в системе.

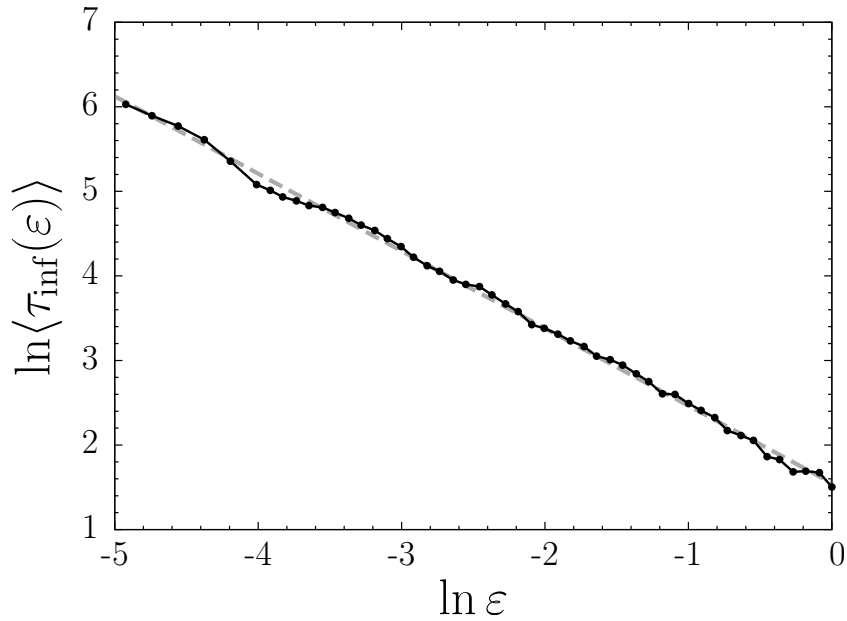


Рис. 2.12. Зависимость средних минимальных времен возврата  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  от размера окрестности возврата  $\varepsilon$  для стробоскопического сечения фазовых траекторий системы (2.2) при значениях параметров  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 0.1$ ,

$\Omega = \Omega_{\text{gold}} + 3.20089 \cdot 10^{-6}$ , что отвечает случаю золотого сечения

$\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Усреднение зависимости есть прямая линия:

$$f(x) = -0.914801 \cdot x + 1.55029 \quad (\alpha_C = 0.914801)$$

## 2.6 «Лестницы Фибоначчи» для диофантовых чисел вращения

Путем вариации частоты воздействия  $\Omega$  в системе (2.2) проводились расчеты и для других значений чисел вращения  $\rho$ , относящихся к классу иррациональных диофантовых чисел. В разделах 2.4 и 2.5 исследовался случай золотого сечения. Исследования проводились для малых значений амплитуды внешнего воздействия  $A$  и для значений  $A$ , соизмеримых с амплитудой колебаний автономного генератора Ван дер Поля. Было показано, что в случае малых значений амплитуды внешнего воздействия  $10^{-8} \leq A \leq 10^{-3}$  имеет место «Лестница Фибоначчи». Из-за равномерности вероятностного распределения «Лестница Фибоначчи» наблюдалась и в зависимости, рассчитанной во все множество точек с последующим усреднением  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ , и в зависимостях  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon, \psi_0)$ , рассчитанных для окрестностей только одной точки  $\psi_0$ . При этом зависимости  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  и  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon, \psi_0)$  при малых амплитудах практически не отличались друг от друга. Увеличение амплитуды  $A$  приводило к разрушению «Лестницы Фибоначчи». Поэтому в этом разделе имеет смысл рассматривать только случай малых амплитуд, так как большие значения приводят к разрушению ступенчатой функции независимо от выбранного числа вращения.

Сначала рассмотрим случай серебряного сечения. Этому числу вращения соответствует число  $\rho_{\text{silver}} = \sqrt{2} - 1$ . Оно уже было рассмотрено в Главе 1 в отображении окружности (1.10). Для отображения окружности была построена зависимость минимального времени возврата  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  (рис. 1.8). Интерес представляет получение подобной зависимости для случая стробоскопического сечения системы (2.2). По аналогии с заданием частоты  $\Omega_{\text{gold}}$ , которое было описано в Разделе 2.3, можно задать частоту  $\Omega_{\text{silver}}$ , которая соответствует се-

ребряному сечению:

$$\Omega_{silver} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2} - 1}. \quad (2.7)$$

При помощи численного моделирования было показано, что при параметрах  $A = 10^{-8}$ ,  $\alpha = 0.01$  и  $\omega_0 = 1$  серебряному сечению соответствует  $\Omega = \Omega_{silver} - 1.44958 \cdot 10^{-5}$ . Для этого числа вращения была построена «Лестница», представленная на рисунке 2.13. Показано, что «Лестница» имеет место при размерах окрестностей возврата  $-4 \leq \ln \varepsilon \leq 0$ . При  $\ln \varepsilon \leq -4$  «Лестница» разрушается. Аналогичный результат был получен и для золотого сечения (Раздел 2.4). Отличие заключается в значениях  $\tau_{inf}$  на «ступеньках». В случае серебряного сечения эти значения соответствуют числам последовательности Пелля. Стоит отметить, что «Лестница», полученная в стробоскопическом сечении генератора Ван дер Поля (рис. 2.13), и зависимость, полученная в отображении окружности (1.10), имеют не только качественное, но и количественное соответствие.

Аналогичные результаты были получены и для других диофантовых чисел вращения:  $\rho = \sqrt[3]{2}$  (рис. 2.14) и  $\rho = e$  (рис. 2.15), которые уже были рассмотрены в отображении окружности в Главе 1.

В Главе 1 было показано, что наличие ненулевых целых частей не влияет на возвраты Пуанкаре. Однако с точки зрения расчета стробоскопического сечения наличие ненулевой целой части в числе вращения приводит к дополнительному обороту изображающей точки вокруг окружности. Это увеличивает время вычислений в 2 и более раз. Поэтому, для простоты вычислений, на рисунках 2.14 и 2.15 представлены зависимости, рассчитанные без учета целой части в числе вращения. То есть для чисел вращения  $\rho = \sqrt[3]{2} - 1$  и  $\rho = e - 2$ .

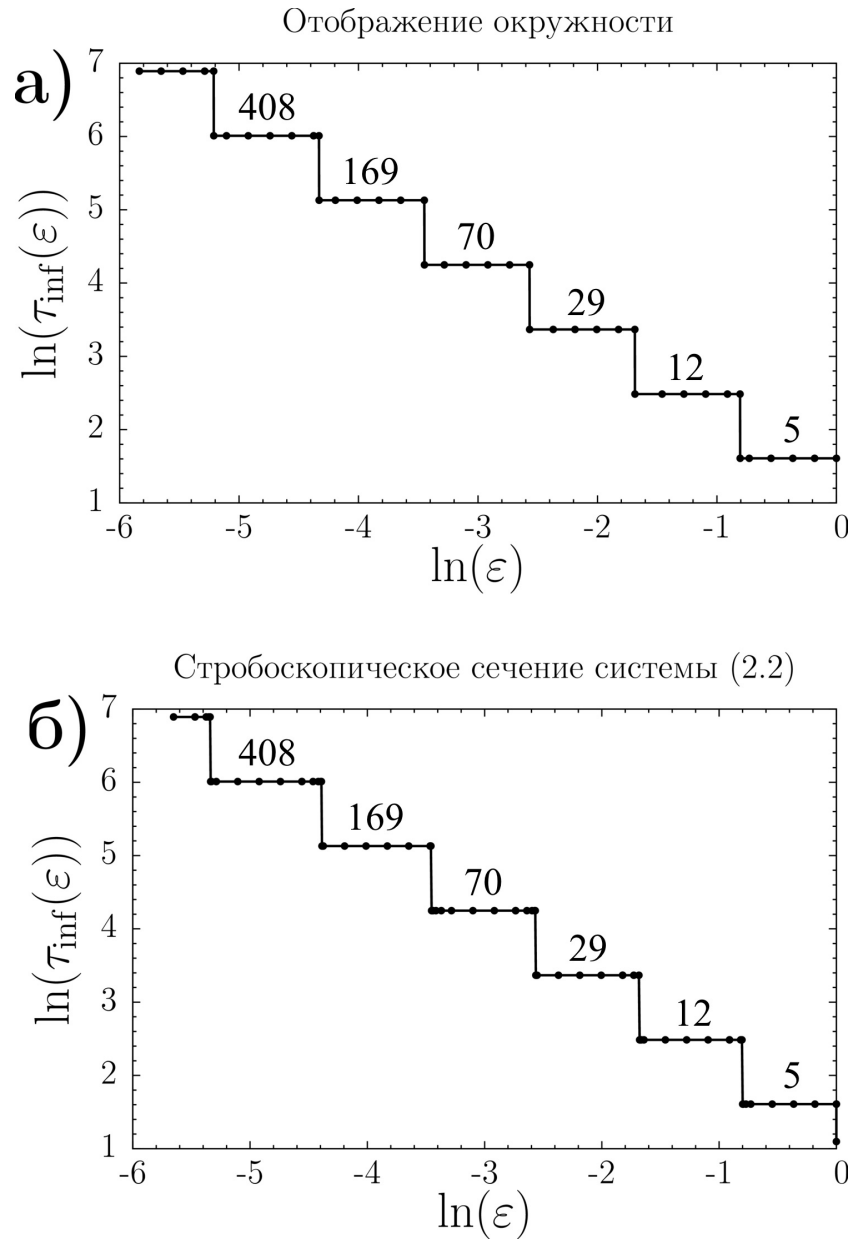


Рис. 2.13. Результаты расчета зависимости минимального времени возврата Пуанкаре для линейного отображения (1.18) при  $\Delta = 2\pi\rho$ ,  $\rho = \sqrt{2} - 1$  (а), и расчет аналогичной зависимости для стробоскопического сечения системы (2.2) (б) при значениях параметров  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 10^{-8}$ ,  $\Omega = \Omega_{\text{silver}} - 1.44958 \cdot 10^{-5}$ . Возвраты рассчитывались в окрестности точки  $\pi/3$



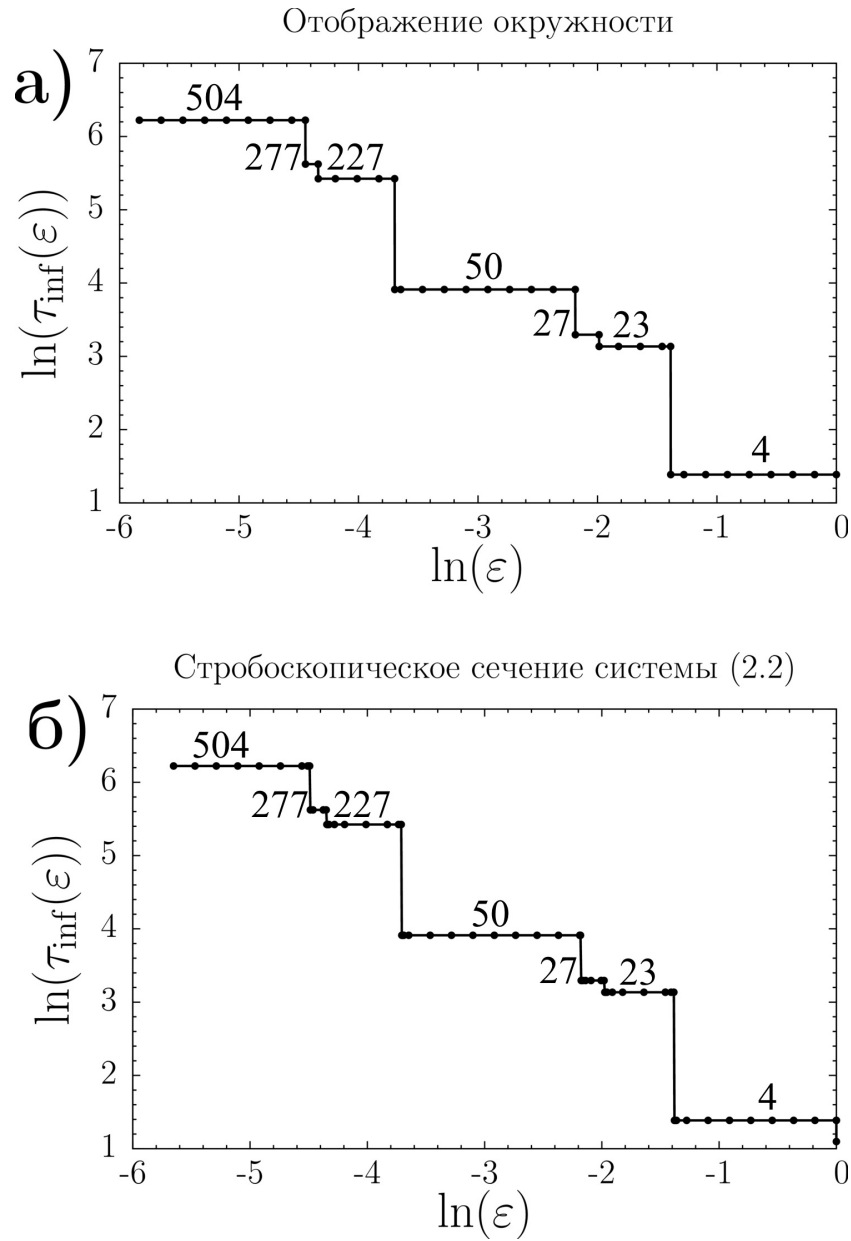


Рис. 2.14. Результаты расчета зависимости минимального времени возврата

Пуанкаре для линейного отображения (1.18) при  $\Delta = 2\pi\rho$ ,  $\rho = \sqrt[3]{2}$  (а), и расчет аналогичной зависимости для стробоскопического сечения системы

(2.2) (б) при значениях параметров  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 10^{-8}$ ,

$\Omega = 1/(\sqrt[3]{2} - 1) - 2.44141 \cdot 10^{-5}$ . Возвраты рассчитывались в окрестности

точки  $\pi/3$

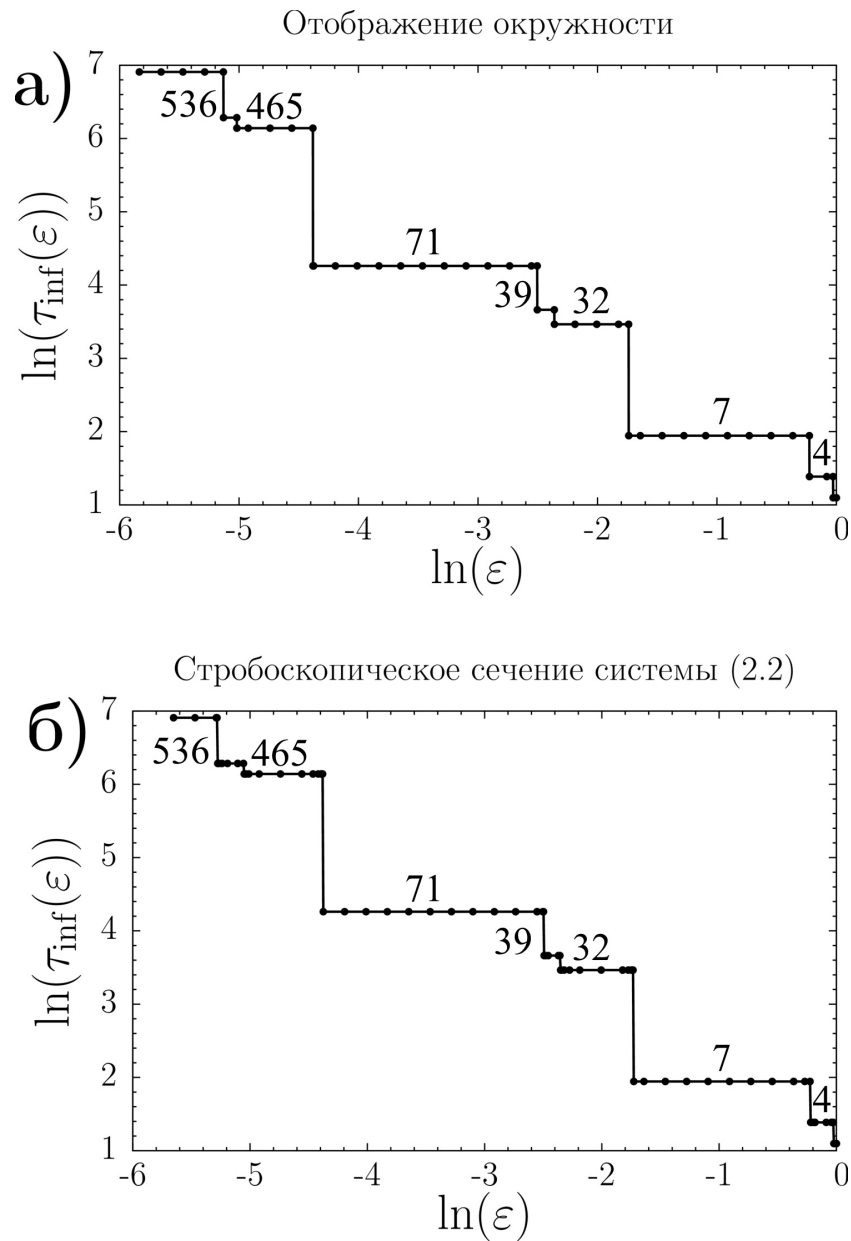


Рис. 2.15. Результаты расчета зависимости минимального времени возврата Пуанкаре для линейного отображения (1.18) при  $\Delta = 2\pi\rho$ ,  $\rho = e$  (а), и расчет аналогичной зависимости для стробоскопического сечения системы (2.2) (б) при значениях параметров  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 10^{-8}$ ,  $\Omega = 1/(e - 2) - 8.7738 \cdot 10^{-6}$ . Возвраты рассчитывались в окрестности точки

$$\pi/3$$

## 2.7 Выводы по второй главе

В главе представлены результаты глобального анализа статистики возвратов Пуанкаре в множество, полученное в стробоскопическом сечении через период внешней силы в неавтономном генераторе Ван дер Поля (2.2). Установлено, что рассматриваемое множество можно описывать отображением окружности (1.10) с иррациональным числом вращения  $\rho = \omega_0/\Omega$ . Основные результаты следующие.

1. Показано, что при относительно малых амплитудах внешнего воздействия  $A \ll 1$  множество в стробоскопическом сечении близко к линейному сдвигу на окружности (1.18). При  $10^{-8} \leq A \leq 10^{-3}$  путем вариации частоты воздействия  $\Omega$  можно с высокой точностью задать любое число вращения (порядок отклонения составляет  $10^{-8}$ ). Благодаря высокой точности задания числа вращения была получена «Лестница Фибоначчи» для золотого сечения и аналогичные зависимости для других иррациональных диофантовых чисел вращения:  $\rho = \sqrt{2} - 1$ ,  $\rho = \sqrt[3]{2}$ ,  $\rho = e$ . Полученные зависимости схожи с соответствующими ступенчатыми функциями, полученными в Главе 1 для отображения окружности (1.18). При этом отметим, что имеет место не только качественное, но и количественное соответствие результатов.
2. При малых  $A$  наличие ненулевой амплитуды  $A > 0$  приводит к разрушению «Лестницы Фибоначчи» при малых размерах окрестностей возврата ( $\ln \varepsilon \leq -4$ ). Это обусловлено наличием слабой нелинейности и, как следствие, погрешности в задании числа вращения. Этот эффект аналогичен введению шумового воздействия в отображение окружности.
3. Увеличение амплитуды  $A$  ведет к росту нелинейности в системе и неравномерности вероятностного распределения на множестве в стробоскопи-

ческом сечении. Это приводит к необходимости расчета времен возврата во все множество в целом  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ , а не в окрестности отдельных точек  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon, \psi_0)$ . Из-за неравномерности распределения, зависимости, рассчитанные для разных точек  $\psi_0$ , расходятся в областях перехода между «ступеньками». В глобальном подходе это приводит к появлению дополнительных точек между «ступеньками». При увеличении  $A$  число этих точек растёт.

4. При амплитуде  $A$ , соизмеримой с амплитудой колебаний автономного генератора Ван дер Поля, зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  становится практически линейной. Линейная аппроксимация даёт прямую с коэффициентом угла наклона, отличным от  $-1$ , то есть размерность Афраймовича–Песина в этом случае  $\alpha_C < 1$ . Это является следствием сильной нелинейности. В остальных случаях размерность Афраймовича–Песина составляла  $\alpha_C = 1$ .

# Глава 3. ВОЗВРАТЫ ПУАНКАРЕ В НЕАВТОНОМНОМ КОНСЕРВАТИВНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ

## 3.1 Введение

Статистика возвратов численно исследована применительно к диссипативным эргодическим системам. Представляет интерес провести соответствующие расчеты применительно к консервативным системам. В фазовом пространстве гамильтоновых систем могут существовать различные фрактальные объекты, структура которых отражает сложность поведения орбит [65]. По этой причине этот тип систем представляет собой интерес с точки зрения возвратов Пуанкаре. Гамильтоновы системы исследовались с точки зрения локальных возвратов Пуанкаре достаточно давно [54]. В последнее время чаще встречаются работы с мультифрактальным анализом гамильтоновых систем [9, 52, 56, 65, 107]. В основе этих работ лежит исследование вероятностного распределения времен возврата, полученных методом мультифрактального анализа [65]. Примерами гамильтоновых систем могут служить: модель Эно–Эйлеса [108, 109], рассеивающие бильярды (бильярд Синая), ротатор, испытывающий периодические толчки [110], двойной маятник [111], а также некоторые отображения [52, 65, 112].

В данной главе речь пойдет о статистике возвратов Пуанкаре для неавтономного консервативного осциллятора. В Главе 1 было показано, что зависимость средних минимальных времен возврата в окрестность размера  $\varepsilon$  в отображении окружности является ступенчатой функцией («Лестницей Фибоначчи»).

В Главе 2 было установлено, что аналогичную зависимость можно получить в стробоскопическом сечении неавтономного генератора Ван дер Поля. При этом зависимость меняется при вариации амплитуды внешнего воздействия. Так как множество, получаемое в стробоскопическом сечении неавтономного консервативного осциллятора, представляет собой набор инвариантных кривых, из этого следует предположение о том, что статистика возвратов Пуанкаре в этой системе будет иметь сходство с «Лестницей Фибоначчи». Интерес представляет рассмотреть поведение гамильтоновой системы для различных значений амплитуды внешнего воздействия.

## 3.2 Исследуемая система

### 3.2.1 Гамильтоновы системы

Динамические системы можно разделить на два класса: системы с сохранением фазового объема и системы, в которых фазовый объем уменьшается, – диссипативные системы [113].

Если система описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

то изменение ее фазового объема  $dV$  за время  $dt$  будет имеет вид [114]:

$$dV = dt \int \left( \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} + \frac{d\dot{x}_2}{dx_2} + \dots + \frac{d\dot{x}_n}{dx_n} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n = dt \int \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} \, d\mathbf{x}, \quad (3.2)$$

где  $\dot{\mathbf{x}}$  – вектор с координатами  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ . Отсюда следует, что достаточным условием для сохранения фазового объема является

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad (3.3)$$

а достаточным условием уменьшения фазового объема (условием диссипативности системы) является:  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} < 0$ .

В то же время системы с сохранением фазового объема также можно разделить на гамильтоновы и негамильтоновы. Гамильтоновыми называются системы, уравнения которых могут быть записаны в каноническом виде через гамильтониан  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , где  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  – обобщенные координаты и импульсы [114].

В основу гамильтонова подхода к описанию динамики физических систем положены уравнения Гамильтона, представляющие собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \quad (3.4)$$

Переменные  $p_i$  и  $q_i$  называются соответственно обобщенными координатами и обобщенными импульсами, а их совокупность  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  – каноническими переменными. Число  $n$  независимых обобщенных координат называется числом степеней свободы, а функция  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , характеризующая физическое состояние системы, называется функцией Гамильтона или гамильтонианом.

Системы, описываемые дифференциальными уравнениями, подразделяются на два основных класса: интегрируемые и неинтегрируемые системы. Если система описывается дифференциальными уравнениями первого порядка  $N$ , то она называется полностью интегрируемой при условии существования  $N$  независимых интегралов движения. Согласно теореме Лиувилля, для гамильтоновых систем, как правило, достаточно существования  $n = N/2$  интегралов движения [115–117]. Для этого требуется только, чтобы они находились в инволюции, т.е. скобки Пуассона для любой пары интегралов равнялись нулю [108, 117].

Если гамильтонова система полностью интегрируема, то ее гамильтониан  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  путем канонического преобразования переменных  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  может быть сведен к виду  $\tilde{H}(\mathbf{P})$ . При этом, как следует из канонических уравнений, все компоненты вектора обобщенного импульса  $\mathbf{P}$  являются

константами. В качестве такого обобщенного импульса удобно выбрать переменную, называемую действием [118]. Для системы с одной степенью свободы действие  $J$  определяется как

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{p} \, d\mathbf{q}, \quad (3.5)$$

где интеграл берется по замкнутой траектории в фазовом пространстве динамических переменных  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ , соответствующей периодическому движению [114].

Соответствующая действию  $J$  каноническая переменная – угол  $\alpha$  – определяется из канонического уравнения

$$\alpha = \frac{dH(J)}{dJ}. \quad (3.6)$$

Так как  $J = \text{const}$ , то  $\dot{\alpha} \equiv \omega(J) = \text{const}$ . Можно показать, что  $\omega(J) = 2\pi/T(J)$ , где  $T(J)$  – период колебаний. Таким образом,  $\alpha = \omega t + \varphi$ . Определение переменных действие-угол для систем с числом степеней свободы  $n \geq 2$  можно найти в монографии [115].

### 3.2.2 Фазовое пространство гамильтоновых систем

Решение уравнений (3.4) позволяет определить зависимость  $\mathbf{q}(t)$  и  $\mathbf{p}(t)$  по их начальным значениям. Этот эволюционный процесс можно представить как движение точки в  $2n$ -мерном пространстве с координатами  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$ . Полученное объединенное пространство  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  называется фазовым пространством системы, а точки этого пространства – фазовыми точками. Каждому мгновенному состоянию гамильтоновой системы (3.4) отвечает фазовая точка пространства  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , и каждой точке этого пространства соответствует определенное и единственное состояние системы. Следовательно, динамику системы (3.4) можно представить как последовательное изменение положения фазовых точек в фазовом пространстве. Траектории движения фазовых точек называются фазовыми траекториями.



Фазовое пространство гамильтоновых систем обладает тремя важными свойствами [119]:

1. В любой момент времени траектории, определяемые уравнениями (3.4), в фазовом пространстве не пересекаются. (Следует из единственности решения ОДУ)
2. Во времени сохраняется объем произвольной области фазового пространства (т. Лиувилля)
3. Непрерывная граница  $S_0$ , охватывающая в момент времени  $t_0$  область  $D_0$ , трансформируется (не разрываясь) в непрерывную границу  $S_1$ , охватывающую ту область  $D_1$ , в которую  $D_0$  эволюционировала к моменту времени  $t$  (см. Рис. 3.1).

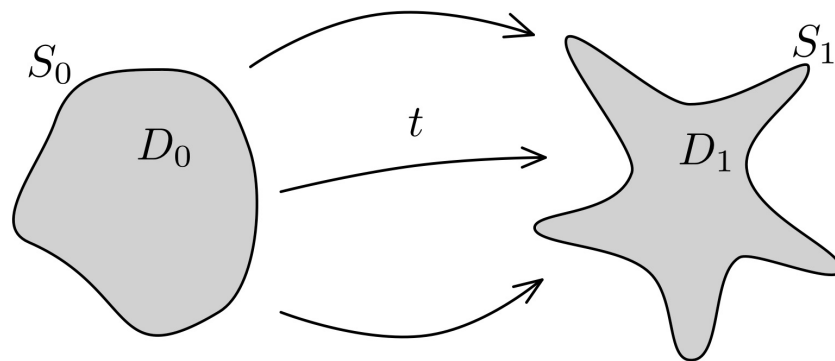


Рис. 3.1. Сохранение фазового объема в гамильтоновой системе.

Схематическое изображение эволюции области  $D_0$  с границей  $S_0$  в область  $D_1$  с границей  $S_1$  спустя время  $t$

Системы, которые удовлетворяют свойству 2 называются консервативными. Если фазовые траектории системы (3.4) при данном значении энергии  $E$  не уходят на бесконечность, то говорят, что движение является финитным.

Рассмотрим системы с одной степенью свободы. Для таких систем фазовое пространство двумерно, а преобразование вида  $(q, p) \rightarrow (\alpha, J)$  осуществимо

всегда [120]. В этом случае для описания динамики в пространстве  $(\alpha, J)$  удобной оказывается полярная система координат, в которой величине  $J$  ставится в соответствие расстояние от начала координат до некоторой точки фазового пространства, а величине  $\alpha$  – угол (рис. 3.2,а). Движение при заданном  $J$  представляет собой движение по окружности с радиусом  $J$ . Меняя радиус, получаем множество вложенных центрированных окружностей, которые заполняют фазовое пространство такой консервативной системы. В конечном счете двумерное фазовое пространство оказывается разбитым окружностями на совокупность колец [121, 122]. Скорость движения по каждой окружности, как следует из уравнений (3.4), в общем случае зависит от значения переменной действия  $J$ , т.е.  $\omega = \omega(J)$ . Простым примером такой системы является математический маятник:  $\ddot{x} = -\sin x$  (Фазовый портрет приведен на рис. 3.3).

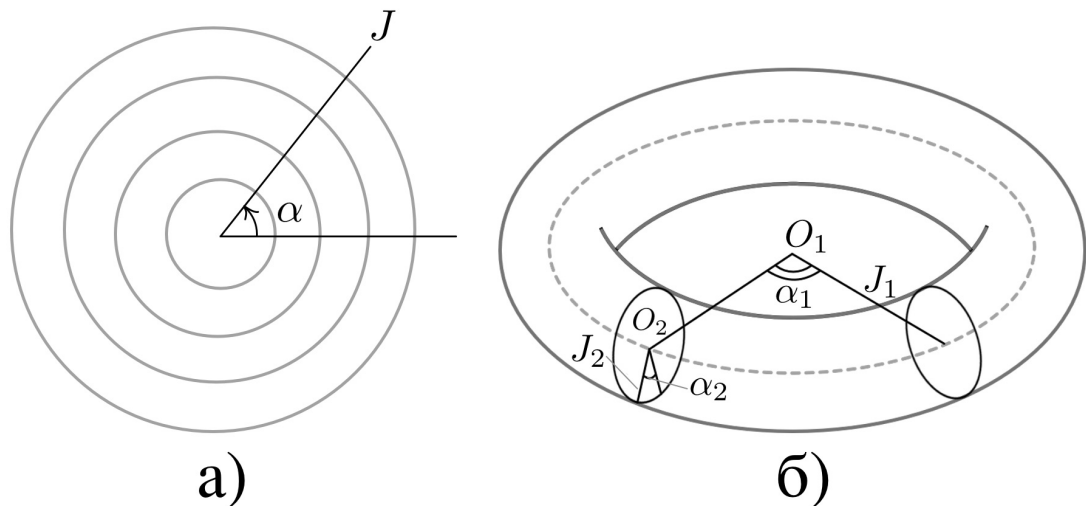


Рис. 3.2. Схематическое изображение фазового портрета математического маятника (а) и схематическое изображение фазового пространства системы с двумя степенями свободы (б)

Для систем с двумя степенями свободы фазовое пространство четырехмерно. При переходе к переменным действие-угол (если каноническое преобразование  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{J})$  возможно) динамика таких систем наглядно может быть представлена следующим образом: движение по окружности с центром  $O_1$ , образованной переменными  $\alpha_1, J_1$ , и одновременно по окружности с центром

$O_2$  (лежащей в плоскости, перпендикулярной плоскости окружности  $O_1$ ), образованной переменными  $\alpha_2, J_2$  (см. Рис. 3.2,б). Суперпозиция таких вращений задает движение по поверхности двумерного тора. Одним из примеров подобных систем является консервативный математический маятник под внешним периодическим воздействием (вынужденный маятник):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 \sin x + b \sin \Theta \\ \dot{\Theta} &= \Omega,\end{aligned}\tag{3.7}$$

где амплитуда автономного маятника равна единице, а его частота  $\omega_0 = 1$ . Внешнее воздействие имеет амплитуду  $b$  и частоту  $\Omega$ .

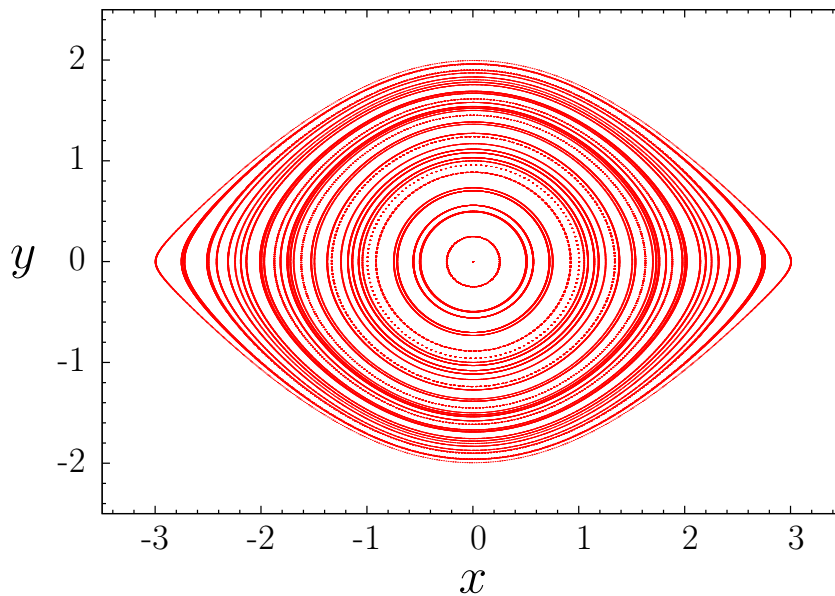


Рис. 3.3. Фазовый портрет математического маятника  $\ddot{x} = -\sin x$

Поведение фазовых траекторий зависит от отношения частот  $\Omega/\omega_0$ . Если это отношение рационально ( $\Omega/\omega_0 = k/m$ , где  $k$  и  $m$  – целые числа), то через время  $T = 2\pi(k\Omega + m/\omega_0)$  траектория будет возвращаться в точку, из которой она вышла в момент времени  $t_0 = t - T$ . В случае иррационального отношения частот фазовая траектория не замыкается сама на себя, и с течением времени будет проходить сколь угодно близко от любой заданной точки поверхности тора.

Отношение частот  $\rho = \Omega/\omega_0$  называется числом вращения Пуанкаре [123]. В случае когда  $\rho$  равно отношению целых чисел  $k/m$ , движение на торе является периодическим (траектория замыкается после  $k$  оборотов по  $\alpha_1$  и  $m$  оборотов по  $\alpha_2$ ). Если  $\rho$  иррационально, то траектория является квазипериодической и покрывает весь тор, что приводит к свойству эргодичности.

Учитывая многомерность фазового пространства, сложно представить, как такую траекторию можно изобразить наглядно на плоскости. Основные сложности связаны с размерностью. Для систем с двумя степенями свободы фазовое пространство четырехмерно и, в консервативном случае, энергетическая поверхность трехмерна. В этом случае проследить движение в виде проекции на фазовое пространство крайне сложно. Поэтому в этой главе используется частный случай сечения Пуанкаре – стробоскопическое сечение, при котором фиксируются точки через период внешнего воздействия. Конечный набор точек в стробоскопическом сечении соответствует периодическим движениям, на фазовом же портрете этому будет соответствовать замкнутая линия. Замкнутые кривые стробоскопического сечения соответствуют квазипериодическому движению, а набор случайных точек – хаотическому. Построение стробоскопического сечения уже использовалось в Главе 2 применительно к неавтономному генератору Ван дер Поля.

### **3.2.3 Неавтономный консервативный осциллятор как пример гамильтоновых систем**

Эффекты динамического хаоса наблюдаются не только в диссипативных системах. Аналогичные эффекты имеют место также и в гамильтоновых консервативных системах, где в отличие от диссипативных систем нет ни диссипации, ни притока энергии. Примерами гамильтоновых систем могут служить:

модель Эно-Эйлеса [108], рассеивающие бильярды (бильярд Синая), ротатор, испытывающий периодические толчки [110], двойной маятник [111], а также некоторые отображения [52, 65, 112].

Простейшей нелинейной моделью консервативного осциллятора является маятник, который состоит из тела массой  $m = 1$ , подвешенного на невесомом стержне длиной  $R$ . Данная система называется математическим маятником:

$$\ddot{x} + \sin x = 0. \quad (3.8)$$

Это уравнение движения может быть получено из лагранжиана:

$$L = \frac{mR^2\dot{x}^2}{2} + mgR \cos x \quad (3.9)$$

или гамильтониана

$$H = \frac{mR^2\dot{x}^2}{2} - mgR \cos x. \quad (3.10)$$

Введя замену переменной  $y = \dot{x}$  систему (3.8) можно представить в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В данной главе будет рассматриваться один из самых наглядных примеров гамильтоновых систем – неавтономный консервативный осциллятор (математический маятник с гармоническим воздействием):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x + b \sin \Theta \\ \dot{\Theta} &= \Omega, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где амплитуда колебаний маятника равна единице, а его частота  $\omega_0 = 1$ . Внешнее воздействие имеет амплитуду  $b$  и частоту  $\Omega$ . Система, похожая на (3.12), была уже рассмотрена во многих статьях [124–126]. Отличие заключается в присутствии диссипации. В данной работе будет рассмотрен консервативный случай. При малых значениях амплитуды внешнего воздействия  $b$  система (3.12) ведет себя практически также, как математический маятник (3.8).

### 3.2.4 Числа вращения на инвариантных кривых неавтономного консервативного осциллятора

Проведем численный анализ динамики математического маятника под внешним гармоническим воздействием. Динамика маятника описывается тремя нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка (3.12). Фазовые траектории системы (3.12) расположены на поверхности двумерного тора. Характер траекторий на торе зависит от отношения частот  $\Omega/\omega_0$ . Если это отношение рационально, т.е.  $\Omega/\omega_0 = m/n$ , где  $m$  и  $n$  – целые числа, то, через время  $T = 2\pi(m\Omega + n/\omega_0)$  траектория будет возвращаться в точку, из которой она вышла в момент времени  $t_0 = t - T$  (резонанс на торе). В случае иррационального отношения частот фазовая траектория не замыкается, и с течением времени всюду плотно покрывает поверхность тора (эргодический случай).

На рис. 3.4 представлены проекции фазовых траекторий системы (3.12) на  $xy$ -плоскость и соответствующие множества, полученные в стробоскопическом сечении системы (3.12), для нескольких значений амплитуды воздействия  $b$ . При малых значениях параметра  $b$  система (3.12) схожа с линейным консервативным осциллятором  $\ddot{x} = -\sin x$ . Фазовое пространство математического маятника двумерно, и для него осуществимо каноническое преобразование, с помощью которого можно перейти к переменным действие-угол:  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{J})$ . В этом случае для описания динамики в пространстве  $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{J})$  удобной оказывается полярная система координат, в которой величине  $\mathbf{J}$  ставится в соответствие расстояние от начала координат до некоторой точки фазового пространства, а величине  $\boldsymbol{\alpha}$  – угол. Движение при заданном  $\mathbf{J}$  представляет собой движение по окружности с радиусом  $J$ . Меняя радиус, получаем непрерывное множество вложенных центрированных окружностей, которые полностью заполняют фазовое пространство такой системы (см. рис. 3.4). Скорость движения по каждой

окружности в общем случае зависит от значения переменной действия  $\mathbf{J}$ , т.е.  $\omega = \omega(\mathbf{J})$ .

Система (3.12) имеет трехмерное фазовое пространство. При больших значениях параметра  $b$  при переходе к переменным действие-угол (если каноническое преобразование  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{J})$  возможно) динамика таких систем наглядно может быть представлена следующим образом: движение по окружности с центром  $O_1$ , образованной переменными  $\alpha_1, J_1$  и одновременно по окружности с центром  $O_2$  (лежащей в плоскости, перпендикулярной плоскости окружности  $O_1$ ), образованной переменными  $\alpha_2, J_2$ . Суперпозиция таких вращений задает движение на двумерной поверхности тора, размерность которого равна двум (рис. 3.4,б,в).

Начиная с некоторого значения  $b$  становится невозможным различить по фазовому портрету квазипериодические и хаотические движения, поэтому далее при анализе гамильтоновой динамики мы будем использовать стробоскопическое сечение, т.е. фиксировать точки с интервалом  $2\pi$  по фазовой переменной  $\Theta$ . Это поможет разграничить типы движения. Периодическим движениям будет соответствовать конечный набор точек, замкнутым траекториям – инвариантные замкнутые кривые, случайному множеству точек – хаотический режим. Соответствующие множества точек в стробоскопическом сечении приведены на рис. 3.4 справа.

При выборе определенных начальных условий динамика системы сводится к квазипериодическим движениям вдоль окружности определенного радиуса, который зависит от начальных условий. Таким образом, динамика системы (3.12) в стробоскопическом сечении похожа на динамику отображения окружности. Как отмечалось в Главе 1, для отображения окружности уже была исследована статистика возвратов Пуанкаре. В частности, была получена интересная зависимость минимальных времен возврата Пуанкаре от размера окрестности возврата, которая была названа «Лестницей Фибоначчи». Интерес представляет исследовать статистику возвратов Пуанкаре для неавтономного консерва-

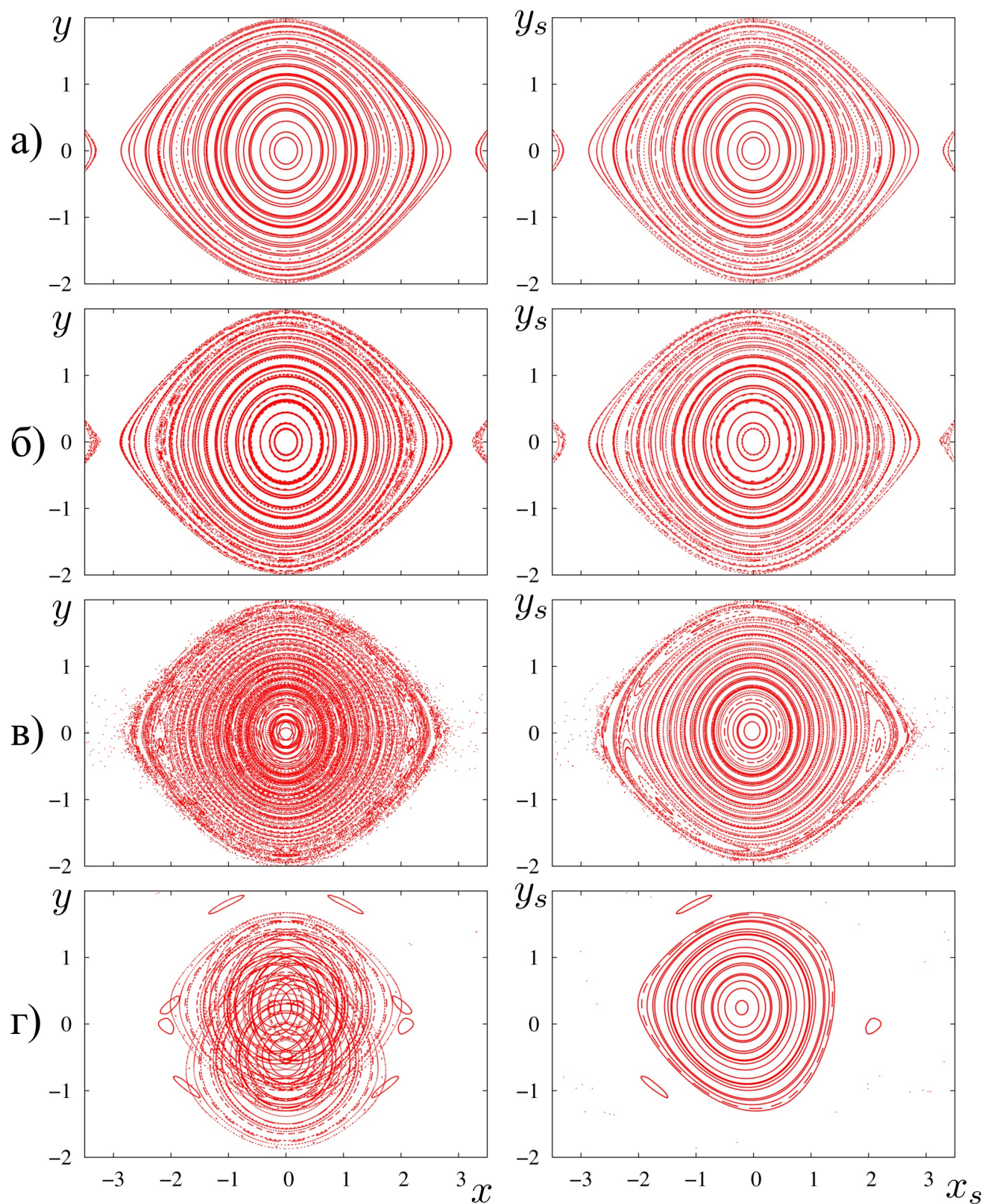


Рис. 3.4. Проекция фазовых траекторий на плоскость  $xy$  (левая колонка) и соответствующие множества точек в стробоскопическом сечении (правая колонка) системы (3.12) для параметров (а)  $b = 0.001$ , (б)  $b = 0.01$ , (в)  $b = 0.1$ , (г)  $b = 0.8$ . Параметр  $\Omega = 2\pi/3$



тивного осциллятора и выявить сходства и различия со случаем диссипативных систем.

С этой целью рассмотрим несколько замкнутых кривых, полученных в стробоскопическом сечении системы (3.12). Множество замкнутых инвариантных кривых можно получить при вариации начальных условий, т.е. при изменении энергии консервативной системы.

В Разделе 2.3 для случая неавтономного генератора Ван дер Поля было показано, что при амплитуде внешнего воздействия  $A \rightarrow 0$  частота, соответствующая некоторому числу вращения, стремится к величине, обратной этому числу. Например, при  $A \rightarrow 0$  случаю числа вращения  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$  соответствует частота  $\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1)$ . Похожий эффект имеет место и для системы (3.12). Фазовое пространство системы (3.12) представляет собой множество торов, а стробоскопическое сечение – множество окружностей. В зависимости от начальных условий можно получить окружности разного радиуса ( $r \approx \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ ). На рис. 3.5 приведена зависимость отклонения частоты внешнего воздействия, соответствующей золотому сечению, от значения  $2/(\sqrt{5} - 1)$  при вариации радиуса окружности. На рисунке 3.6 приведены стробоскопические сечения множеств, для которых проводились расчеты. Как видно из рис. 3.5, чем больше радиус окружности, полученной в стробоскопическом сечении, тем больше расхождение с заданной частотой  $\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1)$ .

Для некоторых начальных условий были построены зависимости числа вращения от частоты внешнего воздействия (рис. 3.7). Из графиков рис. 3.7 видно, что для малых радиусов окружностей ( $r \approx \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ ), полученных в стробоскопическом сечении, зависимости  $\rho(\Omega)$  можно аппроксимировать функцией  $f(\Omega) = 1/\Omega + C(r^2)$ . Увеличение радиуса путем вариации начальных условий приводит к увеличению модуля величины  $C(r^2)$ . Зависимость  $C(r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$  уже была приведена на рис. 3.5. Из графика видно, что  $C$  зависит от  $r$  как  $-0.108r^2$ .

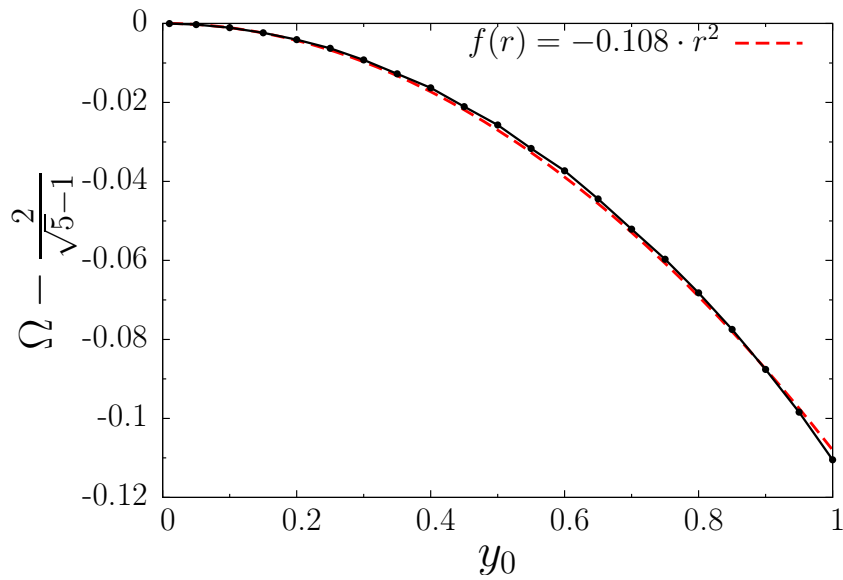


Рис. 3.5. Зависимость отклонения частоты внешнего воздействия, соответствующей золотому сечению, от значения  $2/(\sqrt{5} - 1)$  при вариации радиуса окружности. Зависимость может быть аппроксимирована функцией  $f(r) = -0.108 \cdot r^2$ . График был построен при  $b = 10^{-5}$  и  $x_0 = 0$

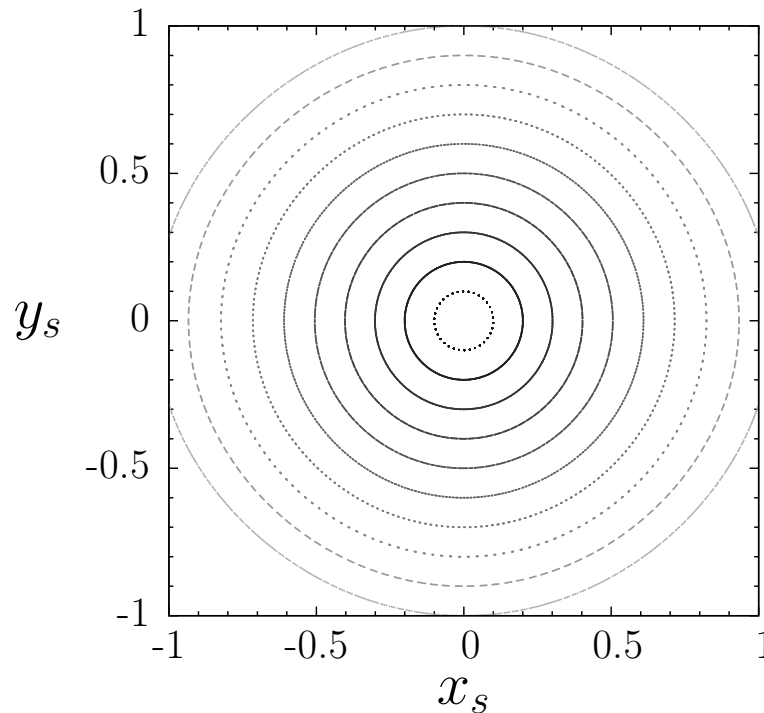


Рис. 3.6. Множества, полученные в стробоскопическом сечении системы (3.12) при  $\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1)$ ,  $b = 10^{-5}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0.1; 0.2; \dots; 0.9; 1.0$

Таким образом, вариация начальных условий приводит к изменению радиуса окружности, получаемой в стробоскопическом сечении. При задании ча-

стоты  $\Omega$ , соответствующей некоторому точному числу вращения  $\rho$ , значение  $\Omega = 1/\rho$  может быть получено только при радиусе окружности  $r \approx \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \rightarrow 0$ . С увеличением энергии консервативного маятника (при удалении начальных условий от начала координат) величина  $\Omega$  перестает совпадать с  $\Omega = 1/\rho$ : появляется некоторая добавочная величина  $C(r^2)$ .

В следующих разделах будет исследоваться статистика возвратов Пуанкаре для числа вращения, отвечающему золотому сечению. Следует учитывать тот факт, что независимо от амплитуды внешнего воздействия  $b$  при ненулевых начальных условиях числу вращения  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$  будут соответствовать частоты внешнего воздействия  $\Omega \neq 1/\rho$ .

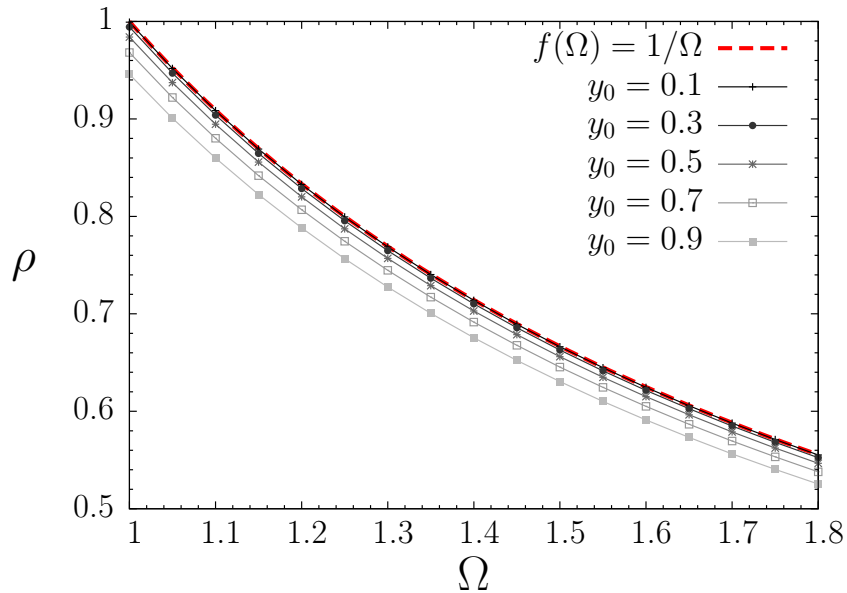


Рис. 3.7. Зависимости числа вращения от частоты внешнего воздействия, полученные для системы (3.12) при параметрах  $\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1)$ ,  $b = 10^{-5}$  для разных начальных условий с фиксированным  $x_0 = 0$

### 3.3 Возвраты Пуанкаре на инвариантных кривых неавтономного консервативного осциллятора (3.7)

Рассмотрим что происходит с зависимостью  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  в случае гамильтоновых систем. Как видно из рис. 3.4, при малых значениях параметра  $b$ , фазовые портреты и множества точек в стробоскопическом сечении представляют собой набор окружностей разного радиуса и эллипсов. При больших значениях параметра  $b$  и рациональном отношении собственной частоты и частоты внешнего воздействия (2 : 3 на рис. 3.4,в и г) в стробоскопическом сечении проявляется типичная структура гамильтоновых систем [65]: появляются дополнительные неподвижные точки, окруженные периодическими траекториями, которые образуют острова устойчивости (на рис. 3.4,в их три). И в случае больших амплитуд  $b$ , и в случае малых  $b$  рассматривается множество инвариантных кривых. Рассмотрим различия в возвратах Пуанкаре и размерностях Афраймовича–Песина для этих множеств.

#### 3.3.1 Случай малых амплитуд $b$

Зафиксируем в уравнениях (3.12) параметр  $b = 0.001$ , что соответствует рис. 3.4,а. Стробоскопическое сечение в этом случае представляет собой множество окружностей разного радиуса и эллипсов. Попадание на то или иное множество точек зависит от начальных условий, поэтому выберем и зафиксируем начальные условия  $x_0 = 0.44$ ,  $y_0 = 0$ . Таким начальным условиям соответствует окружность постоянного радиуса  $r \approx 0.44$ . Далее перейдем в полярную систему координат, и вместо пары координат  $x, y$ , будем рассматривать только одну – угол  $\psi$ . На рис. 3.7,а приведена зависимость числа вращения от частоты внешнего воздействия  $\Omega$ . Такая зависимость близка к  $\rho = 1/\Omega$ . Исходя из этого

можно подобрать такую частоту  $\Omega$ , чтобы для конкретного множества число вращения было близко к золотому сечению. Однако, следует учитывать тот факт, что в гамильтоновых системах частоты, а следовательно, и числа вращения сильно зависят от радиуса окружности. Это позволяет задавать число вращения только с некоторой погрешностью.

На рис. 1.5 приведена зависимость  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  для отображения окружности. Вычисления проводились без усреднения, так как распределение плотности вероятности на окружности было равномерным. При этом результаты с усреднением по ансамблю были такими же, как и без усреднения.

В случае же вынужденного маятника (3.12), несмотря на малость параметра  $b = 0.001$ , плотность распределения вероятности точек на окружности является неравномерной (см. Рис. 3.8). Вследствие этого, усреднение по множеству точек нельзя заменить расчетами для одной точки. Для иллюстрации вышесказанного на рис. 3.9 приведены зависимости  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$ , полученные при расчете возвратов в две точки:  $\psi_0 = \pi/3$  и  $\psi_0 = 2\pi/3$ . Как видно из графиков, начиная со ступеньки с  $\tau_{\text{inf}} = 13$  зависимости начинают расходиться, что говорит о необходимости усреднения по ансамблю точек.

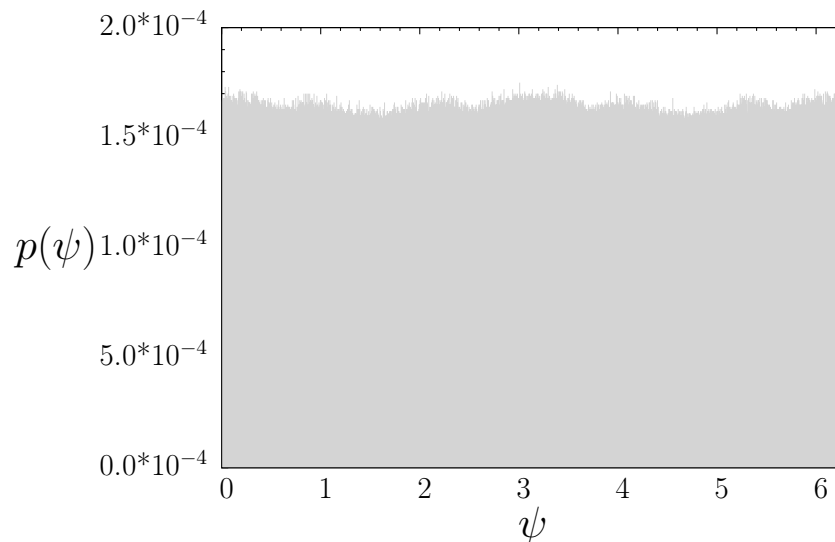


Рис. 3.8. Плотность распределения вероятности  $p(\psi)$  в системе (3.12) при  $b = 0.001$ ,  $\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1)$  и начальных условиях  $x_0 = 0.44$ ,  $y_0 = 0$

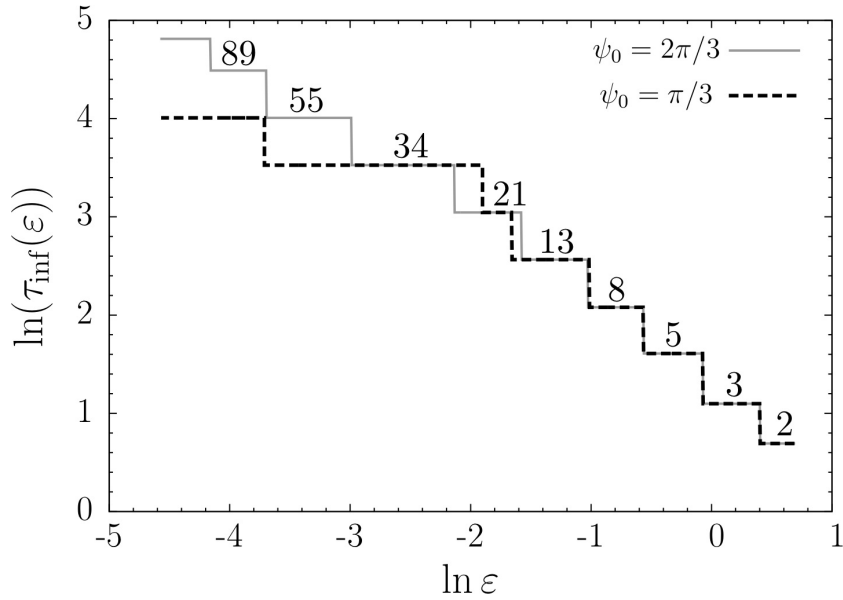


Рис. 3.9. Зависимость минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности в системе (3.12) при  $b = 0.001$ ,  $\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1) - 0.0198$  и начальных условиях  $x_0 = 0.44$ ,  $y_0 = 0$ . Черная кривая соответствует возвратам в точку  $\psi_0 = \pi/3$ , серая –  $\psi_0 = 2\pi/3$

На рис. 3.10 приведена зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ , рассчитанная с использованием глобального подхода. Из рисунка видно, что разрушение лестницы происходит начиная со ступеньки с  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle = 13$ . Как уже отмечалось ранее, в системе (3.12) точное значение числа вращения  $\rho$  может варьироваться в зависимости от рассматриваемой окружности. При параметре  $b \neq 0$  математический маятник становится принципиально нелинейным, что делает невозможным точное задание числа вращения. В связи с этим «Лестница Фибоначчи» разрушается, если  $\varepsilon$  меньше некоторого критического значения  $\varepsilon_{cr}$ . Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим случай  $b = 10^{-5}$ . Предполагается, что уменьшение значения параметра  $b$  будет приводить к уменьшению влияния нелинейности и одновременно к увеличению точности задания числа вращения.

Результаты, показанные на рис. 3.11, подтверждают предположения. Приведены расчеты времен возврата для окрестностей точек  $\psi_0 = \pi/3$  и  $\psi_0 = 2\pi/3$  (рис. 3.11,а) и зависимость, рассчитанная при глобальном подходе (рис. 3.11,б).

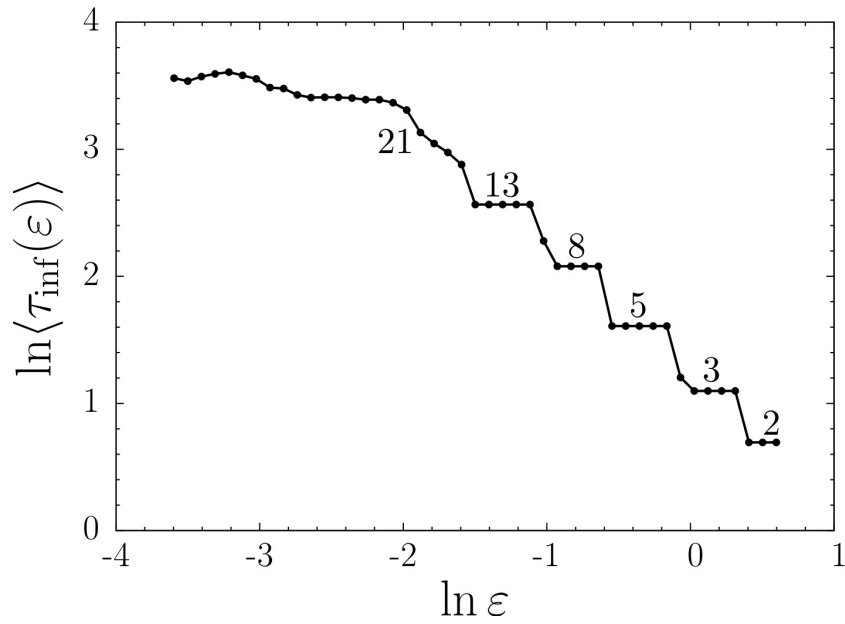


Рис. 3.10. Зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности при глобальном подходе в системе (3.12) при  $b = 0.001$ ,  $\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1) - 0.0198$ . Разрушение «Лестницы Фибоначчи» начинается со ступеньки с числом  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle = 13$

Лестница разрушается «позже», со ступеньки  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle = 34$  благодаря уменьшению влияния нелинейности.

Из графиков видно, что разрушение «Лестницы Фибоначчи» происходит, когда величина  $\varepsilon$  принимает значения меньше некоторого  $\varepsilon_{cr}$ . Отсюда следует вывод, что при  $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$  динамика точек на окружностях в гамильтоновых системах демонстрирует все те же режимы, что и отображение окружности: при малой амплитуде внешнего воздействия зависимость  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  соответствует «Лестнице Фибоначчи». Начиная с некоторого  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$  лестница разрушается. Увеличение амплитуды внешнего воздействия  $b$  приводит к сдвигу порога разрушения лестницы  $\varepsilon_{cr}$  в сторону бóльших  $\varepsilon$ .

Разрушение «Лестницы Фибоначчи» может происходить и вследствие вариации начальных условий. Графики, приведенные на рис. 3.9–3.11, были рассчитаны для одной инвариантной кривой, которая может быть получена при начальных условиях  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0.44$ . Золотому сечению при этом соответ-

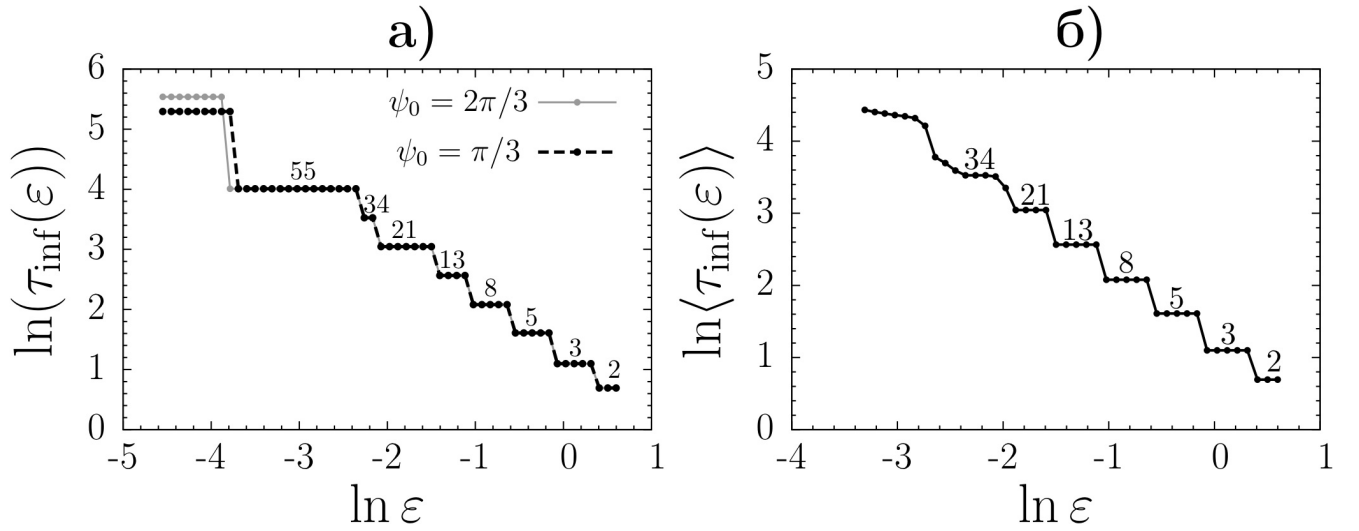


Рис. 3.11. Зависимость минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности в системе (3.12) при  $b = 10^{-5}$ ,  $\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1) - 0.012$  и начальных условиях  $x_0 = 0.44$ ,  $y_0 = 0$ , рассчитанные в окрестности точек  $\psi_0 = \pi/3$  и  $\psi_0 = 2\pi/3$ , (а) и зависимости, рассчитанные при глобальном подходе, (б). Разрушение «Лестницы Фибоначчи» начинается со ступеньки с числом  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle = 34$

ствует  $\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1) - 0.012$  при  $b = 10^{-5}$  и  $\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1) - 0.0198$  при  $b = 10^{-3}$ . Рассмотрим что будет происходить с зависимостями  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  на инвариантных кривых другого радиуса, которые можно получить при вариации начальных условий. В Разделе 3.2.4 было показано, что при одних и тех же значениях параметров  $b$  и  $\Omega$  числа вращения различаются на разных инвариантных кривых (рис. 3.5). На рис. 3.12 приведены зависимости  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ , которые были рассчитаны для разных начальных условий при одинаковых параметрах системы. Из графиков видно, что «Лестница Фибоначчи» может быть получена только на инвариантной кривой, на которой число вращения больше всего соответствует золотому сечению. Чем дальше от нее находятся остальные выбранные инвариантные кривые, тем меньше зависимости  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  похожи на «Лестницу Фибоначчи».



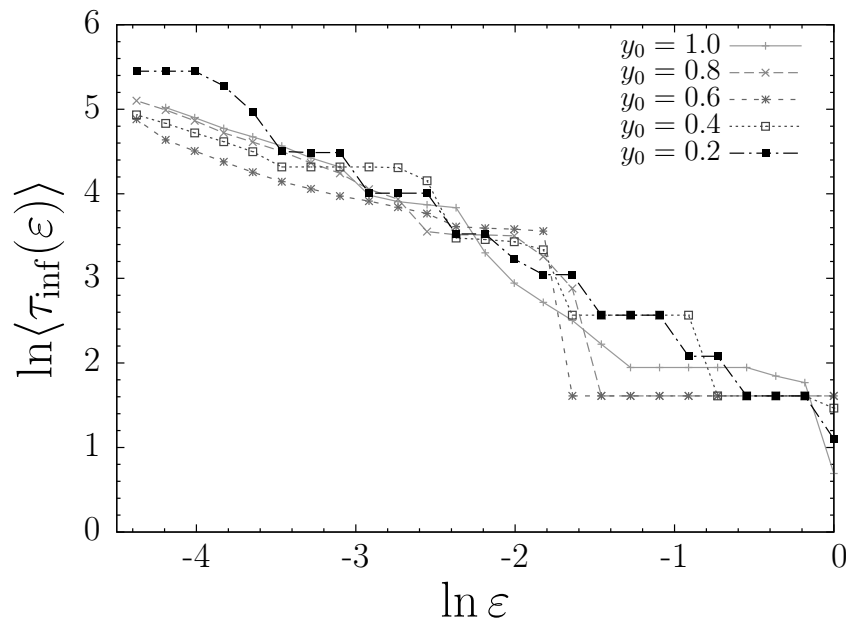


Рис. 3.12. Зависимости среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности в системе (3.12) при  $b = 10^{-5}$ ,

$$\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1) - 0.00405846 \text{ и начальных условиях } x_0 = 0.0,$$

$y_0 = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0$ . Выбор значения  $\Omega$  соответствует золотому сечению на инвариантной кривой, полученной при начальных условиях  $x_0 = 0, y_0 = 0.2$

### 3.3.2 Случай больших амплитуд

На рис. 3.13,а приведено множество точек, полученное в стробоскопическом сечении системы (3.12) при  $b = 0.1$ , начальных условиях  $x_0 = -2.1$ ,  $y_0 = -0.6$  и частоте внешнего воздействия  $\Omega = 2\pi/3$ . В отличие от предыдущего раздела, выбор такого параметра  $\Omega$  соответствует рациональному отношению внешней и собственной частот:  $2 : 3$ . Это приводит к рождению трех неподвижных периодических точек движения. В окрестности этих точек существует множество инвариантных кривых (см. Рис. 3.4,в). Одно из таких множеств приведено на рис. 3.13,а. Интерес представляет рассмотреть статистику возвратов Пуанкаре в этом множестве. На рис. 3.13,б приведена соответствующая зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ . Зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  от размера окрестности свидетельствует о том, что ее можно аппроксимировать линией:  $\ln \langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle = -\ln \varepsilon + C$ . Однако, начиная с некоторого  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$  значения  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  почти не меняются, что, по нашему мнению, объясняется высокой степенью нелинейности системы (3.12) при  $b = 0.1$ . Таким образом, при  $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$  зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  представляет собой прямую линию с наклоном минус единица. Отсюда следует, что размерность Афраймовича–Песина равна единице. Если же  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ , то значения  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  практически не изменяются, и из-за нелинейности расчет размерности Афраймовича–Песина не представляется возможными.

Аналогичные результаты были получены и для другого множества, полученного при частоте внешнего воздействия  $\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1)$  и начальных условиях  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -1.72$  (см. Рис. 3.14).

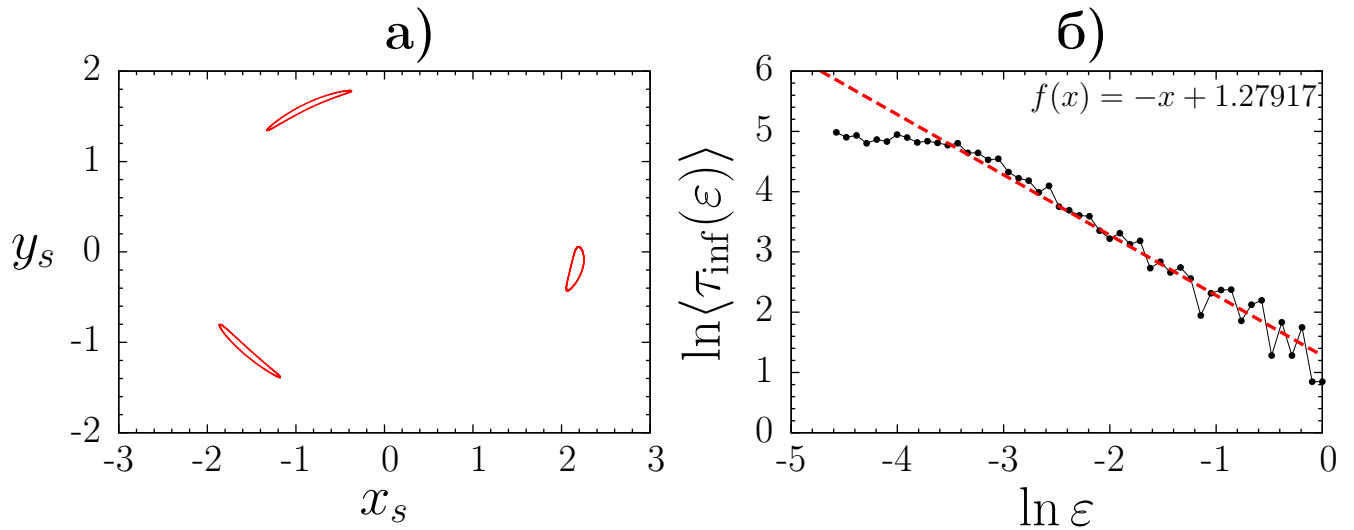


Рис. 3.13. Множество, полученное в стробоскопическом сечении системы (3.12) при  $b = 0.1$ , начальных условиях  $x_0 = -2.1$ ,  $y_0 = -0.6$  и частоте внешнего воздействия  $\Omega = 2\pi/3$  (а) и зависимость  $\ln \langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ , рассчитанная для этого множества, (б)

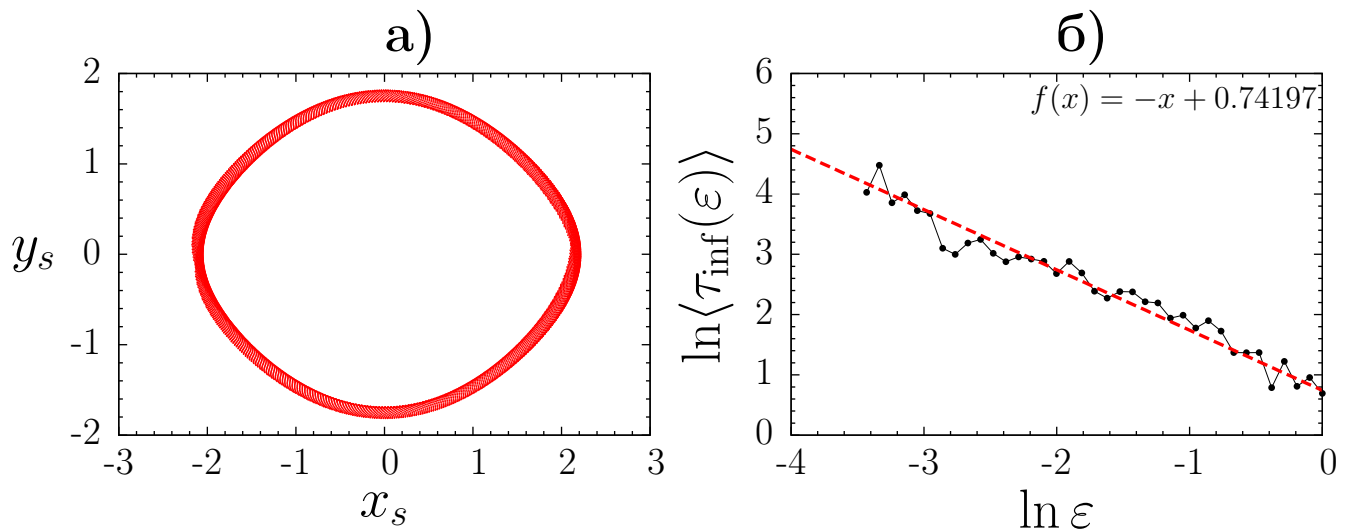


Рис. 3.14. Множество, полученное в стробоскопическом сечении системы (3.12) при  $b = 0.1$ , начальных условиях  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -1.72$  и частоте внешнего воздействия  $\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1)$  (а) и зависимость  $\ln \langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ , рассчитанная для этого множества, (б)

### 3.4 Выводы по третьей главе

В главе представлены результаты статистического анализа множеств, полученных в стробоскопическом сечении гамильтоновой системы – консервативного математического маятника под внешним гармоническим воздействием. Были рассмотрены два основных типа множеств в фазовом пространстве гамильтоновой системы: инвариантные кривые и резонансные торы.

1. В случае инвариантных кривых исследование статистики времен возврата в рассматриваемое множество показало, что зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  в гамильтоновых системах можно разделить на два участка: при  $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ , где  $\varepsilon_{cr}$  есть некоторое критическое значение, зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  схожа с аналогичной зависимостью, полученной в отображении окружности при таком же числе вращения, «Лестницей Фибоначчи». Для малых  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$  лестница разрушается.
2. Уменьшение амплитуды внешнего воздействия приводит к сдвигу критического значения  $\varepsilon_{cr}$  в сторону меньших  $\varepsilon$ .
3. Исследование статистики времен возврата в резонансных торах показало, что зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  также можно разделить на два участка, разделенных критическим значением  $\varepsilon_{cr}$ .
4. Для  $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$  зависимость  $\ln \langle \tau_{\text{inf}}(\ln \varepsilon) \rangle$  можно аппроксимировать прямой линией с коэффициентом угла наклона минус единица, что говорит о том, что на этом участке размерность Афраймовича–Песина есть  $\alpha_C = 1$ . В случае же  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$  значения  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  практически не изменяются, и оценка размерности Афраймовича–Песина становится невозможной.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследуется статистика возвратов Пуанкаре в эргодических множествах без перемешивания. Установлено, что зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности возврата в отображении окружности является ступенчатой функцией. Количественные характеристики этой функции определяются числом вращения. Аналогичные зависимости могут быть получены и в других эргодических системах. Например, в неавтономном генераторе Ван дер Поля и неавтономном консервативном осцилляторе. Показано, что размерность Афраймовича–Песина в случае эргодических систем без перемешивания имеет значение, равное единице.

Основные результаты диссертационной работы:

1. Впервые установлено, что для золотого и серебряного сечений в отображении окружности имеет место ступенчатая функция зависимости минимального времени возврата от величины окрестности возврата, «Лестница Фибоначчи».
2. Для любых иррациональных чисел вращения показано, что зависимость  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  имеет ступенчатый характер, причем значения  $\tau_{\text{inf}i}$ , которые соответствуют  $i$ -ым ступенькам зависимости, равны знаменателям  $i$ -ых подходящих к числу вращения  $\rho$  дробей  $p_i/q_i$ . Определены размеры окрестностей возврата Пуанкаре, которые соответствуют границам ступенек (1.36). Справедливость этой аппроксимации была подтверждена для диофантовых чисел вращения (как алгебраических, так и трансцендентных).
3. Показано, что для диофантовых чисел с мерой иррациональности  $\mu = 2$  размерность Афраймовича–Песина  $\alpha_C$  совпадает со скоростью диофантовых приближений  $\nu(\rho)$  и равна единице. Этот вывод справедлив в отноше-

нии отображения окружности как в линейном ( $K = 0$ ), так и в нелинейном ( $K > 0$ ) случаях.

4. Подтвержден теоретический вывод о том, что калибровочная функция  $\phi(t) \sim \frac{1}{t}$  позволяет получить размерность Афраймовича–Песина для минимальных множеств на окружности при диофантовых числах вращения. В отношении лиувиллевых чисел вращения калибровочную функцию  $\phi(t) \sim \frac{1}{t}$  использовать нельзя.
5. Показано, что нелинейность и шум приводят к разрушению «Лестницы Фибоначчи». Размерность Афраймовича–Песина при этом остается близкой к единице.
6. В неавтономном генераторе Ван дер Поля при относительно малых амплитудах внешнего воздействия  $A \ll 1$  множество в стробоскопическом сечении близко к линейному сдвигу на окружности (1.18). При  $10^{-8} \leq A \leq 10^{-3}$  путем вариации частоты воздействия  $\Omega$  можно с высокой точностью задать любое число вращения (порядок отклонения составляет  $10^{-8}$ ). Полученные для разных чисел вращения зависимости схожи с аналогичными ступенчатыми функциями, полученными в Главе 1 для отображения окружности (1.18). Имеется не только качественное, но и количественное соответствие результатов.
7. С увеличением амплитуды гармонического воздействия  $A$  в неавтономном генераторе Ван дер Поля наблюдается разрушение «Лестницы Фибоначчи» при малых размерах окрестностей возврата ( $\ln \varepsilon \leq -4$ ). Это обусловлено наличием нелинейности и, как следствие, погрешности в задании числа вращения. Этот эффект аналогичен влиянию шумового воздействия на отображение окружности.
8. Дальнейшее увеличение амплитуды  $A$  ведет к росту нелинейности в системе и неравномерности вероятностного распределения. Последнее при-

водит к необходимости расчета времен возврата на всем множестве в целом  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ , а не в окрестности отдельных точек  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon, \psi_0)$ . В глобальном подходе это приводит к появлению дополнительных точек между «ступеньками». При увеличении  $A$  число этих точек растет.

9. При амплитуде  $A$ , соизмеримой с амплитудой колебаний автономного генератора Ван дер Поля, зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  становится практически линейной. Линейная аппроксимация дает прямую с коэффициентом угла наклона, отличным от значения  $-1$ , то есть размерность Афраймовича–Песина в этом случае  $\alpha_C < 1$ . Это является следствием сильной нелинейности. В остальных случаях размерность Афраймовича–Песина составляла  $\alpha_C = 1$ .
10. Результаты, полученные для неавтономного генератора Ван дер Поля, имеют место и для инвариантных кривых неавтономного консервативного осциллятора. Вариация начальных условий при этом может приводить к неточности задания числа вращения при одних и тех же параметрах системы и разрушению «Лестницы Фибоначчи».
11. Исследование статистики времен возврата на инвариантных кривых и резонансных торах неавтономного консервативного осциллятора показало, что зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  можно разделить на два участка: область малых  $\varepsilon$  и область больших  $\varepsilon$ . На первом участке зависимость близка к линейной, значения  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  практически не изменяются с уменьшением  $\varepsilon$ , и оценка размерности Афраймовича–Песина становится невозможной. В случае инвариантных кривых в области больших  $\varepsilon$  может быть получена «Лестница Фибоначчи», а в случае резонансных торов зависимость является линейной. Линейная аппроксимация обеих зависимостей имеет коэффициент угла наклона, равный минус единице, что говорит о том, что в области больших  $\varepsilon$  размерность Афраймовича–Песина равна единице.

12. Показано, что в случае аттрактора Фейгенбаума в логистическом отображении зависимость  $\ln\langle\tau_{\text{inf}}(\ln \varepsilon)\rangle$  является линейной, калибровочная функция имеет вид  $\phi(t) \sim \frac{1}{t}$ , а размерность Афраймовича–Песина равна единице.

Таким образом, поставленная цель диссертационной работы достигнута и основные задачи решены.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Немыцкий, В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. — М.-Ижевск: ОГИЗ, 2004. — 456 с.
2. *Пуанкаре, А.* Избранные труды. Т. 2 / А. Пуанкаре. — М.: Наука, 1972.
3. *Poincaré, H.* Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique / H. Poincaré // *Acta Mathematica*. — 1890. — Vol. 13. — Pp. 1–270.
4. *Frisch, Harry L.* Poincaré Recurrences / Harry L. Frisch // *Phys. Rev.* — 1956. — Oct. — Vol. 104. — Pp. 1–5.
5. *Furstenberg, Harry.* Poincaré recurrence and number theory / Harry Furstenberg // *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*. — 1981. — Vol. 5, no. 3. — Pp. 211–234.
6. *Trench, W.F.* Asymptotic behavior of solutions of Poincaré recurrence systems / W.F. Trench // *Computers & Mathematics with Applications*. — 1994. — Vol. 28, no. 1. — Pp. 317 – 324.
7. *Tarafdar, E.* Poincaré's recurrence theorems for set-valued dynamical systems / E. Tarafdar, P. Watson, X.-Z. Yuan // *Applied Mathematics Letters*. — 1997. — Vol. 10, no. 6. — Pp. 37 – 44.
8. *Pituk, Mihály.* Asymptotic Behavior of a Poincaré Recurrence System / Mihály Pituk // *Journal of Approximation Theory*. — 1997. — Vol. 91, no. 2. — Pp. 226 – 243.
9. *Chirikov, B.V.* Asymptotic Statistics of Poincaré Recurrences in Hamiltonian Systems with Divided Phase Space / B.V. Chirikov, D.L. Shepelyansky // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 82. — Pp. 528–531.

10. *Casati, Giulio*. Quantum relaxation and Poincaré recurrences / Giulio Casati // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2000. — Vol. 288, no. 1–4. — Pp. 49 – 60.
11. Weak chaos and Poincaré recurrences for area preserving maps / N. Buric, A. Rampioni, G. Turchetti, S. Vaienti // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 2003. — Vol. 36, no. 14. — P. 209.
12. *Altmann, Eduardo G*. Recurrence time statistics for finite size intervals / Eduardo G. Altmann, Elton C. da Silva, Iberê L. Caldas // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2004. — Vol. 14, no. 4. — Pp. 975–981.
13. *Contopoulos, G*. Escapes and Recurrence in a Simple Hamiltonian System / G. Contopoulos, K. Efsthathiou // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 2004. — Vol. 88, no. 2. — Pp. 163–183.
14. *Rossi, L*. Poincaré recurrences as a tool to investigate the statistical properties of dynamical systems with integrable and mixing components / L. Rossi, G. Turchetti, S. Vaienti // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2005. — Vol. 7, no. 1. — P. 94.
15. Recurrence plots for the analysis of complex systems / Norbert Marwan, M. Carmen Romano, Marco Thiel, Jürgen Kurths // *Physics Reports*. — 2007. — Vol. 438, no. 5–6. — Pp. 237 – 329.
16. *Altmann, Eduardo G*. Poincaré Recurrences from the Perspective of Transient Chaos / Eduardo G. Altmann, Tamás Tél // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100. — P. 174101.
17. *Chandrasekaran, Aravind*. Kac’s ring: Entropy and Poincaré recurrence / Aravind Chandrasekaran, Sudhir R. Jain // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2012. — Vol. 391, no. 14. — Pp. 3702 – 3707.

18. *Karamanos, Kostas*. The many facets of Poincaré recurrence theorem of the logistic map / Kostas Karamanos, Ioannis Mistakidis, Simeon Mistakidis // *Kybernetes*. — 2012. — Vol. 41, no. 5/6. — Pp. 794–803.
19. Statistics of Poincaré recurrences in local and global approaches / V.S. Anishchenko, S.V. Astakhov, Ya.I. Boev et al. // *Commun. in Nonlinear Sci. and Numerical Simul.* — 2013. — Vol. 18, no. 12. — Pp. 3423–3435.
20. *Mazur, Alexey K*. Algebraic Statistics of Poincaré Recurrences in a DNA Molecule / Alexey K. Mazur, D. L. Shepelyansky // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 115. — P. 188104.
21. How do global temperature drivers influence each other? / Bedartha Goswami, Norbert Marwan, Georg Feulner, Jürgen Kurths // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2013. — Vol. 222, no. 3. — Pp. 861–873.
22. Testing for nonlinearity in radiocarbon data / J. Kurths, U. Schwarz, C.P. Sonett, U. Parlitz // *Nonlin. Processes Geophys.* — 1994. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 72–76.
23. *Zolotova, N.V*. Phase asynchrony of the north-south sunspot activity / N.V. Zolotova, D.I. Ponyavin // *Astronomy & Astrophysics*. — 2006. — Vol. 449, no. 1. — Pp. L1–L4.
24. *Bartlett, M.S*. Deterministic and Stochastic Models for Recurrent Epidemics / M.S. Bartlett // *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 4: Contributions to Biology and Problems of Health*. — Berkeley, Calif.: University of California Press, 1956. — Pp. 81–109.
25. *Bartlett, M.S*. Measles Periodicity and Community Size / M.S. Bartlett // *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*. — 1957. — Vol. 120, no. 1. — Pp. 48–70.

26. *Bartlett, M.S.* The Critical Community Size for Measles in the United States / M.S. Bartlett // *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*. — 1960. — Vol. 123, no. 1. — Pp. 37–44.
27. *Robson, D.S.* Bounds on the mean recurrence time of subclinical epidemics in dairy herds / D.S. Robson, R.F. Kahrs, J.A. Baker // *Journal of Theoretical Biology*. — 1967. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 47–56.
28. *Baptista, M.S.* On the Stock Market Recurrence / M.S. Baptista, I.L. Caldas // *Physica A*. — 2000. — Vol. 284. — Pp. 348–354.
29. *Baptista, M.S.* Stock Market Dynamics / M.S. Baptista, I.L. Caldas // *Physica A*. — 2002. — Vol. 312. — Pp. 539–564.
30. On interrelations of recurrences and connectivity trends between stock indices / B. Goswami, G. Ambika, N. Marwan, J. Kurths // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2012. — Vol. 391, no. 18. — Pp. 4364 – 4376.
31. *Radcliffe, J.* A note on the recurrence of yellow fever epidemics in urban populations / J. Radcliffe // *Journal of Applied Probability*. — 1974. — Vol. 11. — Pp. 170–173.
32. *Nasell, Ingemar.* On the Time to Extinction in Recurrent Epidemics / Ingemar Nasell // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)*. — 1999. — Vol. 61, no. 2. — Pp. 309–330.
33. *Sattenspiel, Lisa.* The Geographic Spread of Infectious Diseases: Models and Applications / Lisa Sattenspiel. Princeton Series in Theoretical and Computational Biology. — Princeton University Press, 2009. — 304 p.
34. *Gu, Lingyun.* Endpoint detection in noisy environment using a Poincare recurrence metric / Lingyun Gu, Jianbo Gao, A. G. Harris // *Acoustics, Speech, and*

- Signal Processing, 2003. Proceedings. (ICASSP '03). 2003 IEEE International Conference on. — Vol. 1. — 2003. — Pp. I-428-431.
35. *Rice, Stuart A.* The Statistical Mechanics of Simple Liquids: An Introduction to the Theory of Equilibrium and Non-equilibrium Phenomena / Stuart A. Rice, Gray Peter. — Interscience Publ., 1965. — P. 582.
  36. Poincaré recurrence and spectral cascades in three-dimensional quantum turbulence / George Vahala, Jeffrey Yezep, Linda Vahala et al. // *Phys. Rev. E.* — 2011. — Oct. — Vol. 84. — P. 046713.
  37. *Webber, Jr.* Recurrence Quantification Analysis: Theory and Best Practices / Jr. Webber, L. Charles, N. Marwan. — Springer International Publishing, 2015. — P. 421.
  38. *Eckmann, J.-P.* Recurrence Plots of Dynamical Systems / J.-P. Eckmann, S. Oliffson Kamphorst, D. Ruelle // *Europhys. Lett.* — 1987. — Vol. 4, no. 9. — P. 973.
  39. *Webber, C. L.* Dynamical assessment of physiological systems and states using recurrence plot strategies / C. L. Webber, J. P. Zbilut // *Journal of Applied Physiology.* — 1994. — Vol. 76, no. 2. — Pp. 965-973.
  40. Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data / Norbert Marwan, Niels Wessel, Udo Meyerfeldt et al. // *Phys. Rev. E.* — 2002. — Vol. 66. — P. 026702.
  41. *Thiel, Marco.* How much information is contained in a recurrence plot? / Marco Thiel, M. Carmen Romano, Jürgen Kurths // *Physics Letters A.* — 2004. — Vol. 330, no. 5. — Pp. 343 - 349.
  42. *Kac, M.* Lectures in Applied Mathematics / M. Kac. — Interscience, 1957.

43. *Kac, M.* Probability and Related Topics in Physical Sciences / M. Kac. Lectures in applied mathematics. — American Mathematical Society, 1959. — P. 266.
44. *Hirata, Masaki.* Poisson law for Axiom A diffeomorphisms / Masaki Hirata // *Ergodic Theory and Dynamical Systems.* — 1993. — 9. — Vol. 13. — Pp. 533–556.
45. *Hirata, M.* Statistics of Return Times: A General Framework and New Applications / M. Hirata, B. Saussol, S. Vaienti // *Commun. Math. Phys.* — 1999. — Vol. 206, no. 1. — Pp. 33–55.
46. *Young, Lai-Sang.* Recurrence times and rates of mixing / Lai-Sang Young // *Israel Journal of Mathematics.* — 1999. — Vol. 110, no. 1. — Pp. 153–188.
47. *Balakrishnan, V.* Recurrence time statistics in deterministic and stochastic dynamical systems in continuous time: A comparison / V. Balakrishnan, G. Nicolis, C. Nicolis // *Phys. Rev. E.* — 2000. — Vol. 61. — Pp. 2490–2499.
48. *Penné, Vincent.* Dimensions for recurrence times: topological and dynamical properties / Vincent Penné, Benoît Saussol, Sandro Vaienti // *Discrete and Continuous Dynamical Systems.* — 1999. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 783–798.
49. *Afraimovich, V.* Pesin’s dimension for Poincaré recurrences / V. Afraimovich // *Chaos.* — 1997. — Vol. 7, no. 1. — Pp. 12–20.
50. *Afraimovich, Valentin.* Local dimensions for Poincaré recurrences / Valentin Afraimovich, Jean-René Chazottes, Benoît Saussol // *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* — 2000. — Vol. 6. — Pp. 64–74.
51. *Афраймович, В.* Фрактальные размерности для времен возвращений Пуанкаре / В. Афраймович, Э. Угальде, Х. Уриас. — М.-Ижевск: РХД, 2011. — С. 290.

52. *Afraimovich, V.* Fractal and multifractal properties of exit times and Poincaré recurrences / V. Afraimovich, G.M. Zaslavsky // *Phys. Rev. E.* — 1997. — Vol. 55. — Pp. 5418–5426.
53. *Pesin, Y.B.* Dimension Theory in Dynamical Systems: Contemporary Views and Applications / Y.B. Pesin. — Chicago Lectures in Mathematics, 1997.
54. *Chirikov, B.V.* Correlation properties of dynamical chaos in Hamiltonian systems / B.V. Chirikov, D.L. Shepelyansky // *Physica D.* — 1984. — Vol. 13. — P. 195.
55. *Zaslavsky, G.M.* Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport / G.M. Zaslavsky // *Physics Reports.* — 2002. — Vol. 371, no. 6. — Pp. 461 – 580.
56. *Shepelyansky, D.L.* Poincaré recurrences in Hamiltonian systems with a few degrees of freedom / D.L. Shepelyansky // *Phys. Rev. E.* — 2010. — Vol. 82. — P. 055202.
57. *Gao, J.B.* Recurrence Time Statistics for Chaotic Systems and Their Applications / J.B. Gao // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 83. — Pp. 3178–3181.
58. *Анищенко, В. С.* Теория возвратов Пуанкаре и её приложение к задачам нелинейной физики / В. С. Анищенко, С. В. Астахов // *Усп. физ. наук.* — 2013. — Т. 183, № 10. — С. 1009–1028.
59. Local and global approaches to the problem of Poincaré recurrences. Applications in nonlinear dynamics / V. S. Anishchenko, Ya. I. Boev, N.I. Semenova, G.I. Strelkova // *Phys. Rep.* — 2015. — Vol. 587. — Pp. 1–39.
60. *Boev, Yaroslav I.* Poincaré recurrence statistics as an indicator of chaos synchronization / Yaroslav I. Boev, Tatiana E. Vadivasova, Vadim S. Anishchenko // *Chaos.* — 2014. — Vol. 24, no. 2. — P. 023110.

61. *Анищенко, В.С.* Эффект захвата среднего времени возврата Пуанкаре как критерий вынужденной синхронизации хаоса / В.С. Анищенко, Я.И. Боев // *Письма в ЖТФ*. — 2014. — Т. 40, № 7. — С. 62–69.
62. *Afraimovich, Valentin S.* Fractal Dimension for Poincaré Recurrences as an Indicator of Synchronized Chaotic Regimes / Valentin S. Afraimovich, Wen-Wei Lin, Nikolai F. Rulkov // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2000. — Vol. 10, no. 10. — Pp. 2323–2337.
63. *Astakhov, S.V.* Afraimovich–Pesin dimension for Poincaré recurrences in one- and two-dimensional deterministic and noisy chaotic maps / S.V. Astakhov, V.S. Anishchenko // *Phys. Lett. A*. — 2012. — Vol. 376, no. 47-48. — Pp. 3625–3624.
64. *Anishchenko, V.S.* Poincaré Recurrences in the Circle Map: Fibonacci stairs. / V.S. Anishchenko, N.I. Semenova, T.E. Vadivasova // *Discontinuity, Nonlinearity and Complexity*. — 2015. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 111–119.
65. *Afraimovich, V.* Fractal Dimension for Poincaré Recurrences / V. Afraimovich, E. Ugalde, J. Urias. — Elsevier, 2006.
66. *Семенова, Н.И.* Возвраты Пуанкаре в стробоскопическом сечении неавтономного генератора ван дер Поля / Н.И. Семенова, В.С. Анищенко // *Нелинейная динамика*. — 2014. — Т. 10, № 2. — С. 149–156.
67. Statistical properties of Poincaré recurrences and Afraimovich–Pesin dimension for the circle map / N.I. Semenova, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* — 2015. — Vol. 22. — Pp. 1050–1061.
68. *Semenova, N.I.* Fibonacci stairs and the Afraimovich-Pesin dimension for a stroboscopic section of a nonautonomous van der Pol oscillator / N.I. Semenova, V. S. Anishchenko // *Chaos*. — 2015. — Vol. 25. — P. 073111.



69. Семенова, Н.И. Возвраты Пуанкаре и размерность Афраймовича–Песина в неавтономном консервативном осцилляторе / Н.И. Семенова, Т.И. Галактионова, В.С. Анищенко // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика.* — 2016. — Т. 17, № 4. — С. 195–203.
70. Semenova, N. How the Minimal Poincaré Return Time Depends on the Size of a Return Region in a Linear Circle Map / N. Semenova, E. Rybalova, V. Anishchenko // *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity.* — 2016. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 355–364.
71. Время возврата Пуанкаре и локальная размерность хаотических аттракторов / В.С. Анищенко, Н.И. Бирюкова, С.В. Астахов, Я.И. Боев // *Нелинейная динамика.* — 2012. — Т. 8, № 3. — С. 449–460.
72. Анищенко, В.С. Статистические характеристики времен возврата Пуанкаре при локальном подходе в условиях воздействия шума / В.С. Анищенко, Я.И. Боев, Н.И. Бирюкова // *Письма в ЖТФ.* — 2013. — Т. 39, № 7. — С. 58–65.
73. Anishchenko, V.S. Statistical Characteristics of Poincaré Return Times within the Local Approach under Presence of Noise / V.S. Anishchenko, Ya.I. Boev, N.I. Biryukova // *Technical Physics Letters.* — 2013. — Vol. 39, no. 4. — Pp. 344–346.
74. Статистика возвратов Пуанкаре с учетом воздействия флуктуаций / В.С. Анищенко, С.В. Астахов, Я.И. Боев и др. // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика.* — 2013. — Т. 13, № 2. — С. 5–15.
75. Poincaré Recurrences in a Nonautonomous Chaotic Map / Yaroslav Boev, Nadezhda Semenova, Galina Strelkova, Vadim Anishchenko // *Int. J. Bifurcation Chaos.* — 2014. — Vol. 24. — P. 1440016.

76. Боев, Я.И. Статистика времен возврата Пуанкаре в неавтономном одномерном хаотическом отображении / Я.И. Боев, Н.И. Бирюкова, В.С. Анищенко // *Нелинейная динамика*. — 2014. — Т. 10, № 1. — С. 3–16.
77. Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of nonlocally coupled chaotic oscillators? / N. Semenova, A. Zakharova, E. Schöll, V. Anishchenko // *EPL (Europhysics Letters)*. — 2015. — Vol. 112, no. 4. — P. 40002.
78. Impact of hyperbolicity on chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators / N. Semenova, A. Zakharova, E. Schöll, V. Anishchenko // *AIP Conference Proceedings*. — 2016. — Vol. 1738. — P. 210014.
79. Coherence-Resonance Chimeras in a Network of Excitable Elements / Nadezhda Semenova, Anna Zakharova, Vadim Anishchenko, Eckehard Schöll // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Vol. 117. — P. 014102.
80. Семенова, Н.И. Переход «когерентность – некогерентность» с образованием химерных состояний в одномерном ансамбле / Н.И. Семенова, В.С. Анищенко // *Нелинейная динамика*. — 2016. — Т. 12, № 3. — С. 295–309.
81. Biryukova, N.I. Poincaré recurrences in a stroboscopic section of a nonautonomous van der Pol oscillator / N.I. Biryukova, T.V. Abrosimova, V.S. Anishchenko // International Conference “Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity”. — 2014. — P. 11.
82. Semenova, N.I. The Afraimovich-Pesin Dimension Of Poincaré Recurrences In A Circle Map / N.I. Semenova, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko // Proceedings of the International Symposium “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics”. — 2014. — Pp. 79–80.
83. Semenova, N.I. Poincaré Recurrences In The Stroboscopic Section Of A Nonautonomous Van Der Pol Oscillator / N.I. Semenova, V.S. Anishchenko // Pro-

- ceedings of the International Symposium “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics”. — 2014. — Pp. 41–42.
84. *Кузнецов, С.П.* Динамический хаос / С.П. Кузнецов. — М.: Физматлит, 2001. — 266 с.
85. *Ott, E.* Controlling chaos / E. Ott, C. Grebogi, J. Yorke // *Phys. Rev. Lett.* — 1990. — Vol. 64, no. 11. — Pp. 1196–1199.
86. *Saussol, Benoit.* Recurrence, dimensions, and Lyapunov exponents / Benoit Saussol, S Troubetzkoy, Sandro Vaienti // *J. of Stat. Phys.* — 2002. — Vol. 106, no. 3-4. — Pp. 623–634.
87. *Каток, А.Б.* Введение в современную теорию динамических систем / А.Б. Каток, Б. Хассельблат. — М.:Факториал, 1999. — 768 с.
88. *Кузнецов, А.П.* Введение в физику нелинейных отображений / А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Л.В. Тюрюкина. — Саратов: «Научная книга», 2010. — 134 с.
89. *Feudel, Ulrike.* Strange Nonchaotic Attractors. Dynamics between Order and Chaos in Quasiperiodically Forced Systems / Ulrike Feudel, Sergey Kuznetsov, Arkady Pikovsky; Ed. by Leon O. Chua. — World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006. — Vol. 56 of *World Scientific Series on Nonlinear Science Series A*. — P. 213.
90. *Хинчин, А.Я.* Цепные дроби / А.Я. Хинчин. — М.: Физматлит, 1960. — 112 с.
91. *Эйлер, Л.* Введение в анализ бесконечно малых, пер. с лат. / Л. Эйлер. — М. ; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. — Т. 1. — С. 315.
92. *Гончаров, В.* Исследования о непрерывных дробях / В. Гончаров, Т. И. Стилтъес // *УМН*. — 1937. — № 3. — С. 284–285.

93. *Чебышев, П.Л.* Полное собрание сочинений П.Л. Чебышева / П.Л. Чебышев. — М. ; Л.: Изд-во АН СССР, 1944. — Т. 1. Теория чисел. — 342 с.
94. *Wall, H.S.* Analytic theory of continued fractions / H.S. Wall. — Chelsea Publishing Company BRONX, N.Y., 1948. — P. 445.
95. *Милнор, Дж.* Голоморфная динамика. Вводные лекции / Дж. Милнор. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 320 с.
96. *Гельфонд, А.О.* Трансцендентные и алгебраические числа / А.О. Гельфонд. — ГИТТЛ, 1952. — 224 с.
97. *Slater, N.B.* Gaps and steps for the sequence  $n\theta \bmod 1$  / N.B. Slater // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1967. — Vol. 63, no. 4. — Pp. 1115–1123.
98. *Bicknell, M.* A Primer on the Pell Sequence and related sequences / M. Bicknell // *Fibonacci Quarterly*. — 1975. — Vol. 13, no. 4. — Pp. 345–349.
99. *Buric, N.* Statistics of Poincaré recurrences for a class of smooth circle maps / N. Buric, A. Rampioni, G. Turchetti // *Chaos, Solut. & Fractals*. — 2005. — Vol. 23, no. 5. — Pp. 1829–1840.
100. *Roth, K.F.* Rational Approximations to Algebraic Numbers / K.F. Roth // *Mathematika*. — 1955. — Vol. 2, no. 1. — Pp. 1–20.
101. *Pikovsky, A.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences / A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. — Cambridge University Press, 2002. — 411 p.
102. *Кузнецов, А.П.* Нелинейные колебания / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. Лекции по теории колебаний и волн. — М.: Физматлит, 2002. — 292 с.

103. *Пуанкаре, А.* Избранные труды. Т. 1: Новые методы небесной механики / А. Пуанкаре. — М.: Наука, 1971. — С. 772.
104. *Биркгоф, Дж.* Динамические системы / Дж. Биркгоф. — М.: Гостехиздат, 1941. — С. 406.
105. *Табор, М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. — Едиториал УРСС, 2001. — С. 320.
106. *Rasband, S. N.* Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems / S. N. Rasband. — Willey, 1990. — Pp. 128–132.
107. *Chirikov, B. V.* Chirikov and Shepelyansky Reply: / B. V. Chirikov, D. L. Shepelyansky // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Nov. — Vol. 89. — P. 239402.
108. *Lichtenberg, A.J.* Regular and Stochastic Motion / A.J. Lichtenberg, M.A. Liberman. Applied mathematical sciences. — Springer-Verlag, 1982. — 499 p.
109. *Лихтенберг, А.* Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман. — М.: Мир, 1984. — 528 с.
110. *Заславский, Г. М.* Хаос динамический / Г. М. Заславский, Н. А. Кириченко // Физическая энциклопедия / Под ред. А. М. Прохоров. — Советская энциклопедия, 1988. — С. 397–402.
111. *Srivastava, N.* Hamiltonian chaos / N. Srivastava, C. Kaufman, G. Müller // *Computers in Physics.* — 1990. — Vol. 4. — Pp. 549–553.
112. Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors / Ulrike Feudel, Celso Grebogi, Brian R. Hunt, James A. Yorke // *Phys. Rev. E.* — 1996. — Jul. — Vol. 54. — Pp. 71–81.

113. *Анищенко, В.С.* Лекции по нелинейной динамике / В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова. — Регулярная и хаотическая динамика, 2011. — 516 с.
114. *Ланда, П.С.* Нелинейные колебания и волны / П.С. Ланда. Синергетика: от прошлого к будущему № 51. — М: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. — 552 с.
115. *Арнольд, В.И.* Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. — Едиториал УРСС, 2003. — 416 с.
116. *Козлов, В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике / В.В. Козлов // *УМН*. — 1983. — Т. 38, № 1. — С. 3–67.
117. *Whittaker, E.T.* A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies / E.T. Whittaker. — Cambridge, University Press, 1964. — 456 p.
118. *Морозов, А.Д.* Введение в математические методы нелинейной динамики / А.Д. Морозов. — Электронное учебно-методическое пособие.-Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. — 98 с.
119. *Лоскутов, А. Ю.* Введение в синергетику / А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов. — Наука, 1990. — 272 с.
120. *Трещёв, Д.В.* Гамильтонова механика / Д.В. Трещёв. — МИАН, 2006. — Т. 4 из *Лекц. курсы НОЦ*. — 63 с.
121. *Заславский, Г. М.* Физика хаоса в гамильтоновых системах / Г. М. Заславский. — Институт компьютерных исследований, 2004. — 296 с.
122. *Хесин, Б.А.* Геометрия бесконечномерных групп / Б.А. Хесин, Р. Вендт. — МЦНМО, 2014. — 368 с.
123. *Бутенин, Н.В.* Введение в теорию нелинейных колебаний / Н.В. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. — М.: Наука, 1976. — 384 с.

124. *Bevivino, J.* The Path From the Simple Pendulum to Chaos / J. Bevivino // *Dynamics at the Horsetooth.* — 2009. — Vol. 1. — Pp. 1–24.
125. *Gitterman, M.* Spring pendulum: Parametric excitation vs an external force / M. Gitterman // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2010. — Vol. 389, no. 16. — Pp. 3101–3108.
126. *Ahmad, Babar.* Stabilization of Driven Pendulum with Periodic Linear Forces / Babar Ahmad // *Journal of Nonlinear Dynamics.* — 2013. — Vol. 2013. — P. 9.
127. *Анищенко, В.С.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы / В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астахов; Под ред. В.С. Анищенко. — Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 1999. — 368 с.
128. *Боев, Я.И.* — Статистические характеристики времен возврата Пуанкаре в хаотических системах в условиях шумовых и гармонических внешних воздействий: дис. канд. физ.-мат. наук. — Master's thesis, Саратовский гос. университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2016.
129. *May, Robert M.* Simple mathematical models with very complicated dynamics / Robert M. May // *Nature.* — 1976. — Vol. 261. — Pp. 459–467.
130. *Feigenbaum, Mitchell J.* The universal metric properties of nonlinear transformations / Mitchell J. Feigenbaum // *Journal of Statistical Physics.* — 1979. — Vol. 21, no. 6. — Pp. 669–706.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

## (основное)

### Размерность Афраймовича–Песина для странного нехаотического аттрактора в критической точке рождения фейгенбаумовского хаоса

Еще одним примером систем, реализующих в фазовом пространстве притягивающее эргодическое множество без перемешивания, являются системы с так называемым странным не хаотическим аттрактором [89, 127]. Мы полагаем, что статистика возвратов Пуанкаре систем с таким типом аттракторов должна описываться соотношением (1.6), как и для отображения окружности в случае иррациональных чисел вращения (см. Главы 1–2 диссертации). Как было доказано теоретически и подтверждено экспериментально в настоящей работе для отображения окружности, для возвратов Пуанкаре на странном не хаотическом аттракторе размерность Афраймовича–Песина так же должна иметь значение, равное единице.

Первые исследования по определению размерности Афраймовича–Песина были представлены в диссертации Я.И. Боева [128], где на примере ряда дискретных систем с аттрактором Фейгенбаума исследована зависимость размерности Афраймовича–Песина при подходе к критической точке рождения хаоса. Установлено, что в соответствии с теорией в области хаоса размерность Афраймовича–Песина практически совпадает с величиной положительного показателя Ляпунова, который стремится к нулю при подходе к критической точке. Выявлено так же, что в критической точке, когда множество утрачивает свойство перемешивания и остается эргодическим, размерность Афраймовича–Песина претерпевает скачек, изменяясь от величины, близкой к нулю, до ве-



личины порядка единицы. Ответ на вопрос почему это происходит остался открытым [128].

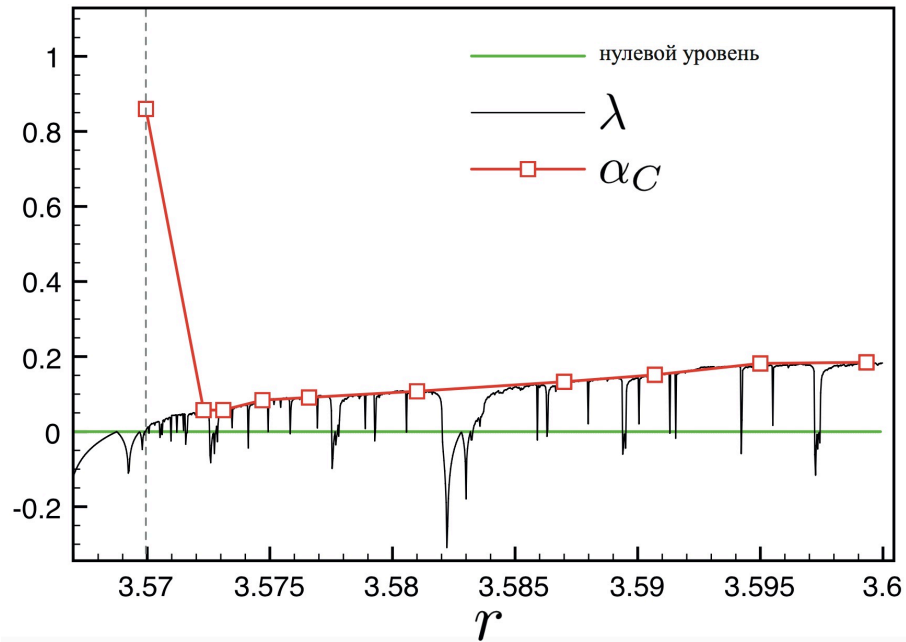


Рис. А.1. Зависимость ляпуновского показателя и размерности Афраймовича–Песина от управляющего параметра  $r$  системы (3.13). Рисунок взят из диссертационной работы Я.И. Боева [128]

В настоящем разделе показывается, что размерность Афраймовича–Песина в критической точке рождения аттрактора Фейгенбаума с точностью вычислений оказывается равной единице, что соответствует предсказаниям теории [51].

Расчеты проведем на простейшем примере аттрактора Фейгенбаума в логистическом отображении.

Логистическое отображение [129] является одной из простейших нелинейных систем. При определенных значениях параметров оно может демонстрировать хаотичное поведение [110]. Одна из форм логистического отображения может быть представлена в виде рекуррентной формулы:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (3.13)$$

где  $r$  – управляющий параметр системы,  $r \geq 0$ . В диапазоне значений  $0 < r < r^* = 3.5699456719\dots$  в системе реализуется переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [130]. При  $r^* < r \leq 4$  система находится в хаотическом режиме, а аттрактор характеризуется положительным показателем Ляпунова  $\lambda > 0$  (см. Рис. А.2). Однако, при определенных значениях  $r$  могут быть получены окна устойчивости, устойчивые периодические орбиты в зоне хаоса. При значении параметра  $r^* = 3.5699456719\dots$  система демонстрирует аттрактор Фейгенбаума, который является странным, но не хаотическим [127]. Ляпуновский показатель при этом равен нулю  $\lambda = 0$ . Такое множество является эргодическим без перемешивания с топологической энтропией  $h_T = 0$ .

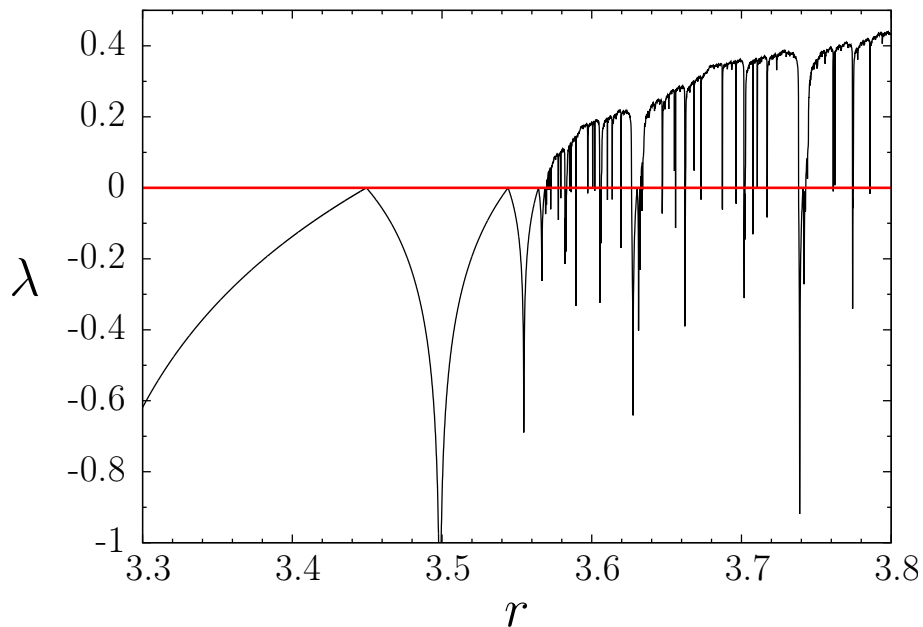


Рис. А.2. Зависимость показателя Ляпунова для системы (3.13) при изменении управляющего параметра  $r$  вблизи значения  $r^*$

В разделе 1.1 было показано, что в случае  $h_T > 0$  для среднего минимального времени возврата Пуанкаре справедливо выражение (1.7), а при  $h_T = 0$  справедливо (1.6), где  $d$  является емкостной размерностью и определяется как:

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad (3.14)$$

где  $N_\varepsilon$  – это минимальное количество отрезков размера  $\varepsilon$ , необходимых для покрытия одномерного множества.

В случае  $r > r^*$  хаотический аттрактор системы (3.13) имеет положительную топологическую энтропию  $h_T > 0$ . В качестве примера был рассмотрен случай  $r = 3.572$ . Ляпуновский показатель при этом положительный и равен  $\lambda = 0.499254524$ , а размерность полученного множества соответствует  $d \approx 0.873915$ . Зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре при  $\varepsilon$  представлена на рисунке А.3. Численный эксперимент (Рис. А.3) подтверждает, что при  $h_T > 0$  имеет место зависимость (1.7). Коэффициент угла наклона зависимости  $\langle \tau_{\text{inf}}(\ln \varepsilon) \rangle$  составляет  $|k| \approx 18.6919$ . Отсюда следует, что размерность Афраймовича–Песина составляет  $\alpha_C = d/|k| \approx 0.0467787$ .

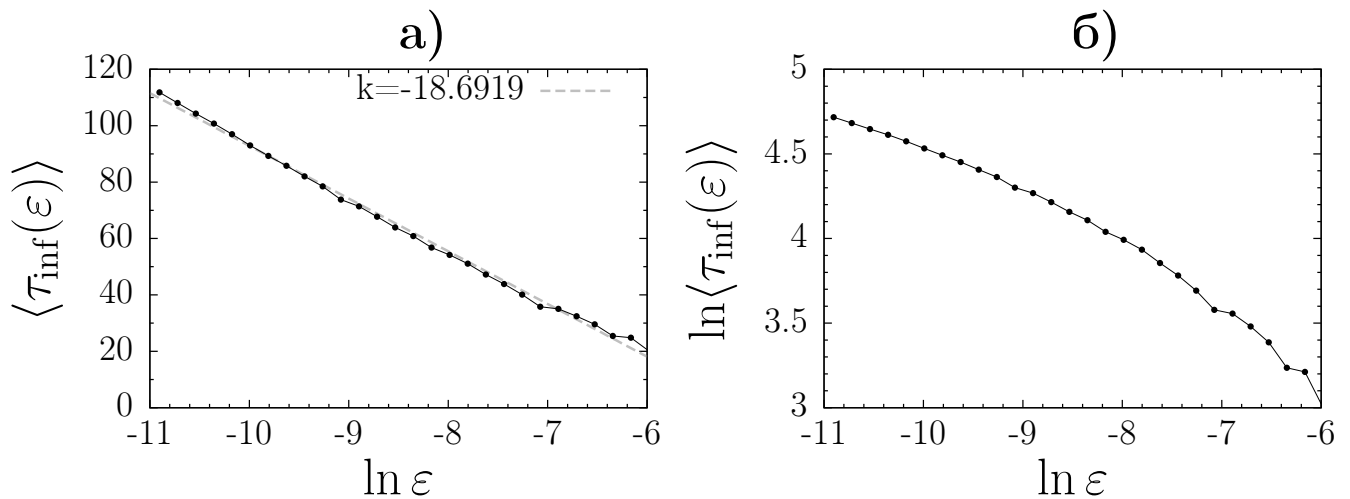


Рис. А.3. Зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре для системы (3.13) при  $r = 3.572$ . Значение параметра соответствует странному хаотическому аттрактору

В случае же  $r = r^*$  странный не хаотический аттрактор системы (3.13) имеет нулевую топологическую энтропию  $h_T = 0$ . На рисунке А.4 приведена зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре при значении  $r = 3.5699456719 \approx r^*$ . Ляпуновский показатель при этом близок к нулю и равен  $\lambda = 0.0000116$ , а размерность полученного множества соответствует  $d \approx 0.578791$ . Численный эксперимент (Рис. А.4) подтверждает, что при  $h_T = 0$  имеет место зависимость (1.6). Коэффициент угла наклона зависимо-

сти  $\ln\langle\tau_{\text{inf}}(\ln\varepsilon)\rangle$  составляет  $|k| \approx 0.580402$ . Отсюда следует, что размерность Афраймовича–Песина составляет  $\alpha_C = d/|k| \approx 0.997$ , что близко к значению 1.

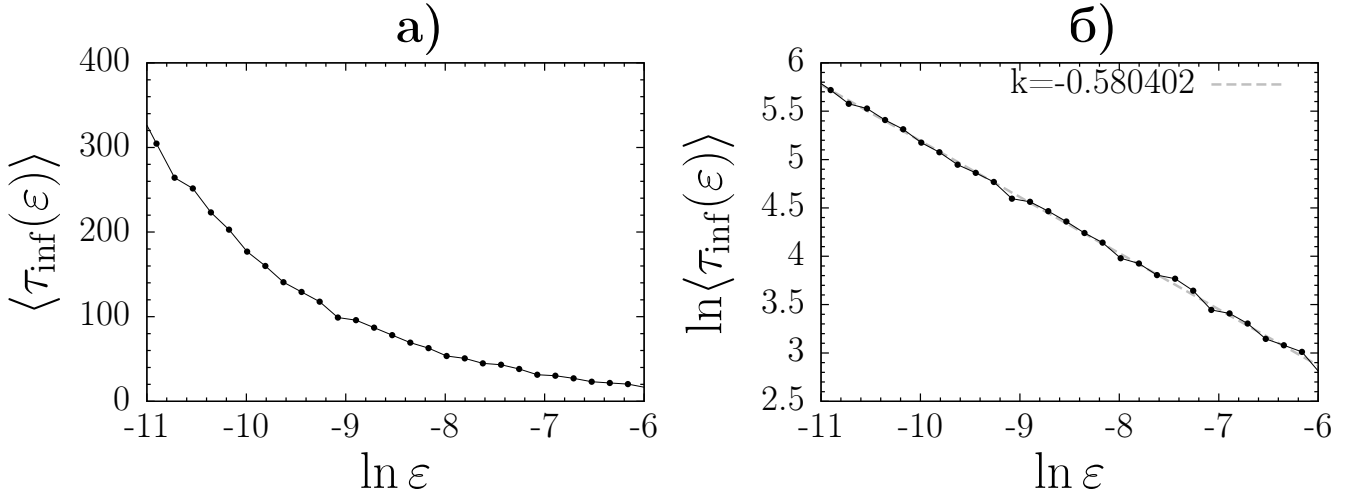


Рис. А.4. Зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре для системы (3.13) при  $r = 3.5699456719 \approx r^*$ . Значение параметра соответствует странному не хаотическому аттрактору

Таким образом, показано, что размерность Афраймовича–Песина для странного не хаотического аттрактора ( $r \approx r^*$ ) близка к единице  $\alpha_C \approx 1$ . Зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре в этом случае может быть аппроксимирована при помощи выражения (1.6). В хаотическом режиме при  $r > r^*$  зависимость аппроксимируется при помощи другой функции (1.7), а размерность Афраймовича–Песина имеет значение  $\alpha_C < 1$  и совпадает с величиной положительного показателя Ляпунова [59].