

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н.Г. Чернышевского»

---

На правах рукописи

Мыльцина Ольга Анатольевна

**ТЕРМОУПРУГОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПЛАСТИН И  
ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ БЫСТРОПЕРЕМЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ И  
СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ**

01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель  
д.т.н., профессор Белосточный Г.Н.

Саратов, 2017

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . .	4
1 Несвязная термоупругость пологих оболочек под действием быстропеременных температурных и силовых воздействий по пространственным и временной координатам на основные поверхности и границы . . . . .	11
1.1 Нагретая пологая оболочка двоякой кривизны, края которой нагружены быстропеременными усилиями и моментами . . .	11
1.2 Пологая оболочка постоянного кручения в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой через основные поверхности и кратковременного воздействия сосредоточенной силы . . . . .	24
1.3 Колебания пологих оболочек (цилиндрической и постоянного кручения) при внезапном воздействии теплового потока . . .	34
2 Термоупругость геометрически нерегулярных пластин под действием быстропеременных температурных и силовых нагрузок . . . . .	42
2.1 Влияние кратковременного воздействия сосредоточенной силы и скачкообразного повышения температуры среды на термоупругое поведение геометрически нерегулярной пластинки в условиях конвективного теплообмена . . . . .	42
2.2 Нагретая геометрически нерегулярная ортотропная пластинка в сверхзвуковом потоке газа . . . . .	52
2.3 Геометрически нерегулярная пластинка под действием быстро возрастающих температурных и силовых воздействий на границе (случай конвективного теплообмена с окружающей средой) . . . . .	61
3 Континуальная модель композиций из оболочек вращения, гладко сопряженных между собой . . . . .	72
3.1 Геометрия срединной поверхности композиции из гладко сопряженных оболочек вращения . . . . .	72

3.2	Основные уравнения осесимметричной термоупругости композиций из оболочек вращения в перемещениях . . . . .	93
3.3	Замкнутые интегралы сингулярных уравнений осесимметричного безмоментного состояния гладко сопряженных оболочек вращения . . . . .	100
	Заключение . . . . .	111
	Список литературы . . . . .	114
	Приложение А . . . . .	127
	Приложение Б . . . . .	156
	Приложение В . . . . .	167
	Приложение Г . . . . .	172
	Приложение Д . . . . .	177
	Приложение Е . . . . .	185
	Приложение Ж . . . . .	191
	Приложение И. Заключение о возможности использования материалов .	198

## ВВЕДЕНИЕ

Тонкостенные конструкции, обширный класс которых включает различные по геометрическим свойствам пластинки и оболочки, находят широкое применение в различных областях современной техники. Условия эксплуатации конструкций оболочечного типа предусматривают различные по виду силовые и температурные воздействия со стороны рабочей среды не только на основные поверхности, но и на их края. Возможны ситуации, когда силовые и температурные воздействия на границе являются локальными быстро возрастающими по пространственным координатам. Учет совместного действия температурно-силовых нагрузок на границе оболочечных конструкций существенно усложняет решение термоупругой задачи, если речь идет о решениях в замкнутом виде. Это прежде всего связано со сложностью неоднородных краевых условий, высоким порядком систем сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости, сложным видом их правых частей. Известно, что поведение тонкостенных конструкций оболочечного типа под действием реальных температурных полей непредсказуемо. Это объясняется сложностью тепловых процессов в тонкостенных упругих системах, сложным видом самих температурных функций, входящих в уравнения термоупругости и недостатком экспериментальных данных.

Вопросам статики и динамики оболочек и пластин на основе атермической теории посвящено огромное число работ, перечисление которых займет десятки страниц. В этих работах за основу берутся различные по степени точности теории пластин и оболочек. Основные положения и уравнения, которых содержатся в работах Амбарцумяна С.А., Гольденвейзера А.Л., Васильева В.В., Власова В.З., Лурье А.И., Морозова Н.Ф., Муштари Х.М., Жилина П.А., Назарова А.А., Новожилова В.В.: [4], [32], [33], [35], [36], [38], [42], [43], [57], [58], [83], [84], [89], [91], [96], [99], [104], [107], [109], [114], [116], [128], [131], [136], [137], [138], [146] и др.

Значительно меньше работ посвящено задачам связной и несвязной термоупругости тонкостенных упругих систем на основе дискретных и континуальных моделей. Основные результаты в этом направлении и, важных для практики, случаях температурных и силовых нагрузок на основные поверхности оболочек и пластин содержатся в работах: [1], [3], [5], [7], [8],[10], [15], [20], [31], [37], [43] – [45], [47], [48], [50] – [52], [54], [55], [58], [61] – [66], [70], [71], [73] – [82], [85] – [88], [90], [100] – [103], [105], [106], [108], [110], [111], [113], [115], [117], [118], [120] – [122], [124] – [127], [132], [133], [135], [136], [139], [141] – [143] и др.

Термоупругое поведение пластин и оболочек края которых подвергаются локальным быстро возрастающим по пространственной координате температурным и силовым нагрузкам недостаточно изучены по причине математической сложности сингулярных краевых задач теплопроводности и термоупругости, если речь

об анализе на основе замкнутых интегралов. Это касается и задач термоупругости оболочек, находящихся под одновременным воздействием температурных и силовых нагрузок, когда на малом временном интервале действие сосредоточенной силы сопровождается резким изменением температуры окружающей оболочку среды со стороны одной из ее поверхностей.

Современные конструкции, в некоторых областях техники, представляют собой композиции из различных по геометрическим свойствам оболочек вращения (конус, цилиндр, сфера, эллипсоид). Расчет таких конструкций содержится в работах академика Новожилова В.В. в которых, на основе дискретной модели, получены решения и выводы о возможности расчета по безмоментной теории композиции из трех элементов - цилиндрической оболочки и сферических форм днищ.

Анализ отечественной и зарубежной научной литературы не обнаружил работ по составным конструкциям из элементов в виде различных по геометрии оболочек вращения на основе континуального подхода.

Решение контактных задач, для составных конструкций из пологих оболочек, на основе континуальной модели впервые предложено Назаровым А.Г. [97], [98]. В этих работах угол излома в местах сопряжения рассматривается как соответствующий «импульс кривизны» – по терминологии Ониашвили О.Д. [112]. По существу композиция из пологих оболочек рассматривается как оболочка переменной кривизны при отсутствии общего для всей конструкции уравнения срединной поверхности. Когда кривизна определяется с учетом предварительно построенного уравнения срединной поверхности, то структура разрешающих уравнений существенно изменится [18].

Актуальность исследований, приведенных в работе, обусловлена необходимостью развития аналитического метода суперпозиции двойных и одинарных тригонометрических рядов с переменными коэффициентами, многочленов и других функций, позволяющего определять точные решения краевых задач пологих оболочек (ПО) и геометрически нерегулярных пластин (ГНП) под действием локальных быстро возрастающих силовых и температурных нагрузок на краях и основных поверхностях, построения строгой континуальной математической модели составной конструкции (композиции) из различных по геометрическим свойствам оболочек вращения, гладко сопряженных между собой, на основании которой возможны точные и приближенные решения сингулярных уравнений термоупругости композиций на базах различных по степени точности теорий оболочек в криволинейных координатах.

Целью работы являются:

1. Аналитические исследования статических и динамических задач несвязной термоупругости ПО и ГНП под действием локальных быстро возрастающих силовых и температурных нагрузок на границах и основных поверхностях, методом суперпозиции тригонометрических рядов с переменными коэффициентами, мно-

гочленов и других функций.

2. Построение строгой континуальной математической модели композиций из различных по геометрическим свойствам оболочек вращения гладко сопряженных между собой.

3. Количественный анализ замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений композиций под действием силовых и температурных факторов на основе безмоментной теории.

Все перечисленные результаты являются новыми и выносятся на защиту.

В первой главе, на основе модели типа Лява, получены в замкнутом виде решения статических и динамических задач для различных по геометрическим свойствам пологих оболочек: двойкой кривизны, цилиндрической и постоянного кручения.

Быстрвозрастающие локальные силовые и температурные воздействия на краях задаются в виде произведений функций Хевисайда на подходящие непрерывные функции, устраняющие сингулярные точки. Решения неоднородных краевых задач разыскиваются методами суперпозиции одинарных и двойных тригонометрических рядов с переменными коэффициентами по пространственной и временной координатам и других функций, учитывающих характер неоднородности краевых условий. Решения сингулярных систем дифференциальных уравнений относительно коэффициентов рядов аппроксимирующих функций получены в замкнутых видах. Практически во всех случаях неоднородные системы дифференциальных уравнений относительно переменных коэффициентов аппроксимирующих рядов с помощью предлагаемых в работе подстановок сводились к интегрированию одного дифференциального уравнения восьмого порядка относительно промежуточной функции пространственной переменной или дифференциального уравнения шестого порядка относительно промежуточной функции от временной переменной, связанной дифференциальными соотношениями с полем перемещений (аналог функции перемещений) .

На основании аналитических решений задач несвязной термоупругости пологих оболочек построены многочисленные трехмерные изображения поверхностей прогибов и их сечений одной из координатных плоскостей, а так же изображения форм прогибов в различные моменты времени наглядно иллюстрирующих влияние геометрических параметров оболочек на их статическое и динамическое поведение под действием быстропеременных температурно-силовых нагрузок по пространственным и временной координатам. В приложениях к этой главе помещены промежуточные формулы и программы с помощью которых получены количественные результаты.

Во второй главе решаются задачи несвязной термоупругости геометрически нерегулярных пластин. Рассматривается динамическая задача для пластинки внешняя поверхность которой на малом временном интервале подвергается воздей-

ствию сосредоточенной силы и на этом же временном интервале происходит скачкообразное изменение температуры окружающей среды. Геометрически нерегулярная пластинка находится в условиях конвективного теплообмена через основные поверхности с окружающей средой. Рассматривается случай когда все краевые условия теплопроводности и термоупругости неоднородные.

На основании полученных аналитических решений построены изображения поверхностей прогибов термоупругой системы и графики движений точек срединной плоскости во времени наглядно иллюстрирующих динамическое поведение в зависимости от значений параметров геометрического и физического толка.

Решается задача устойчивости в квазистатической и динамической постановках для нагретой геометрически нерегулярной ортотропной пластинки одна из поверхностей которой находится в сверхзвуковом потоке газа. Отмечается, что в случае гладкой изотропной пластинки полученные интервалы для сверхзвуковых скоростей потока аналитически совпадают с интервалами приведенными в книге Вольмира А.С. [37], в случае геометрически нерегулярной изотропной пластинки преобразуются к решениям в статье Белосточного Г.Н., Рассудова В.М. [16].

В заключении (параграф 2.3) получены в замкнутом виде решения сингулярных краевых задач теплопроводности и термоупругости геометрически нерегулярной пластинки в условиях конвективного теплообмена через основные плоскости с внешней средой и быстропеременных температурных и силовых нагрузок на краях. Решение термоупругой задачи сведено к интегрированию неоднородного сингулярного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами в виде  $\delta$  - функции и ее производной, получено в замкнутом виде. Приводятся трехмерные изображения термических поверхностей и функции прогиба, иллюстрирующих влияние физико - механических и геометрических параметров на термоупругое поведение подкрепленной пластинки. Программы для ЭВМ по которым проводились расчеты помещены в приложениях к этой главе.

Третья глава посвящена построению строгой континуальной математической модели композиции из различных по геометрическим свойствам оболочек вращения, гладко сопряженных между собой. Вводится в рассмотрение обобщенный вектор положения любой точки срединной поверхности составной оболочки. Структура этого вектора записывается в виде суммы произведений подходящих функций на функции Хевисайда. При этом выполняются условия, что «коэффициенты» при функциях Хевисайда, в точках, где они не определены но ограничены, обращаются в нуль, что соответствует исключению сингулярных точек. Далее стандартными методами дифференциальной геометрии определяются обобщенные параметры Ламе и главные кривизны срединной поверхности композиций. Рассматриваются следующие варианты составных оболочек: сфера - конус, сфера - конус - сфера, конус - сфера - конус, конус - сфера - цилиндр - сфера, сфера - цилиндр - сфера, эллипсоид - цилиндр, сфера - эллипсоид. Доказывается, что во

всех рассмотренных случаях обобщенные параметры Ламе и главные кривизны удовлетворяют условиям Кодацци-Гаусса. Такой подход позволяет использовать при решении конкретных задач известные уравнения теории оболочек в триортогональных координатах на базах различных по степени точности моделей: типа Лява, Рейснера, оболочки с термочувствительной толщиной и т.п., с учетом предварительной конкретизации обобщенных параметров Ламе и главных кривизн. Следует отметить, что континуальный подход не требует формулировок условий стыковки элементов составной оболочки.

В процессе определения обобщенных параметров Ламе и главных кривизн срединных поверхностей композиций возникла необходимость в математическом обосновании алгебраических операций со структурами в виде сумм произведений функций Хевисайда на тригонометрические и другие функции, используемые при описании срединных поверхностей рассматриваемых в работе композиций из оболочек вращения. Результаты этих алгебраических операций приводятся в приложении Ж в виде конечных формул, позволяющих предельно стандартизировать вычислительные процедуры.

На основе модели типа Лява с термочувствительной толщиной вариационным путем выведена система сингулярных дифференциальных уравнений несвязной осесимметричной термоупругости в перемещениях. Коэффициенты системы, в качестве примера, конкретизируются на случай композиции из двух элементов сфера - конус. Приводятся сингулярные уравнения безмоментной теории в усилиях для различных вариантов составных оболочек.

В параграфе 3.3, на основе безмоментной теории, получены замкнутые интегралы уравнений статики различных композиций из оболочек вращения. Количественные результаты полностью согласуются с результатами приведенными в книге академика Новожилова В.В. [104] – расчет замкнутого резервуара из трех элементов в виде цилиндрической оболочки со сферическими днищами по безмоментной теории на основе дискретной модели.

В заключении приводятся основные результаты работы.

Результаты работы докладывались:

1. XVIII Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Россия, Ярославль, 13-17 февраля 2012 г. (Белосточный Г.Н., Вельмисова А.И., Залетаева Е.В., Мыльцина О.А., Савина Е.Н. Тема доклада: Векторная форма уравнения срединной поверхности композиции гладко сопряженных оболочек вращения различной геометрии ).

2. Конференция механико-математического факультета «Актуальные проблемы математики и механики», Саратов, Россия, апрель 2013 г. (Мыльцина О.А., Тема доклада: Об одном решении температурной задачи для прямоугольной пластинки с сингулярными краевыми условиями).



3. XIX Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Россия, Ярополец, 16-19 февраля 2013г. (Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А., Тема доклада: Динамика поверхности прогиба ребристой пластинки при мгновенном воздействии температуры со стороны окружающей среды).

4. Международная научная конференция «Теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур», Беларусь, Минск, 16-20 сентября 2013 г. (Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А., Савина Е.Н., Тема доклада: Колебания пологих оболочек при внезапном воздействии теплового потока).

5. III Международная научно-практическая конференция «Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса» – Гомель, 17–19 октября 2013 г. (Мыльцина О.А., Тема доклада: Об одном решении несвязной термоупругости пластинки под действием быстропеременных по пространственной координате температурных и силовых факторов на контуре).

6. XX Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова, Ярополец, 17-21 февраля 2014 г. (Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А., Тема доклада: Пологие оболочки и ГН пластинки под действием быстропеременных по пространственным координатам температурных и силовых воздействий в зонах закрепления краев).

7. XXI Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова, Вятчи, 16-20 февраля 2015 г. (Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А., Тема доклада: Динамика пологой оболочки постоянного кручения в условиях конвективного теплообмена через основные поверхности с окружающей средой при быстропеременных по временной координате температурно-силовых воздействиях).

8. The 6th International Conference for Young Scientists, March 30-31, 2015, Saratov, Russia. (Mylytcina Olga, Mylytcin Vladimir, Тема доклада: The Dynamics of Plate under the Influence of Singularity Effort).

9. Научная конференция механико-математического факультета СГУ «Актуальные проблемы математики и механики», Саратов, апрель 2015 г. (Сурова М.Ю., Мыльцина О.А., Тема доклада: Динамика пластинки под действием импульсных температурных и силовых нагрузок).

10. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20-24 августа 2015 г. (Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А., Тема доклада: Пологие оболочки и пластинки под действием быстропеременных по пространственной и временной координатам температурных и силовых воздействий).

11. XXII Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова, Вятчи, 15-19 февраля 2016 г. (Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А., Тема доклада: Устой-

чивость нагретой геометрически нерегулярной ортотропной пластинки в сверхзвуковом потоке газа).

12. Научная конференция механико-математического факультета СГУ «Актуальные проблемы математики и механики», Саратов, апрель 2016 г. (Столбова Е.П., Мыльцина О.А., Тема доклада: Решение осесимметричной упругости композиции из двух оболочек вращения, гладко сопряженных между собой).

13. XXIII Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова, Вятичи, 13-17 февраля 2017 г. (Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А., Тема доклада: Континуальная модель композиции из гладко сопряженных оболочек вращения).

Основное содержание работы опубликовано в статьях [21] – [27], [92] – [95], [144], [145] (из них 6 статей в журналах из списка ВАК).

Все результаты представленные в данной работе получены автором. Соавтору (научному руководителю) принадлежит постановка задач, обсуждение полученных качественных и количественных результатов.

Работа выполнялась при финансовой поддержке РФФИ. Грант РФФИ № 14-08-00644-а (2014, 2015 гг.) «Анализ термоупругого поведения геометрически нерегулярных тонкостенных конструкций под действием быстропеременных по пространственным и временной координатам температурных и силовых нагрузок».

# 1 Несвязная термоупругость пологих оболочек под действием быстропеременных температурных и силовых воздействий по пространственным и временной координатам на основные поверхности и границы

В этой главе на основании методов суперпозиции тригонометрических рядов с переменными коэффициентами и других функций, структуры которых зависят от вида неоднородности краевых условий теплопроводности и термоупругости, получены аналитические решения неоднородных краевых задач несвязной термоупругости различных по геометрическим свойствам пологих оболочек под действием локальных быстро возрастающих по пространственной и временной координатам силовых и температурных нагрузок.

Особенность таких задач – неоднородность краевых условий, высокий порядок разрешающих дифференциальных уравнений и сложный вид их правых частей. Решения систем дифференциальных уравнений получены в замкнутых видах допускающих достаточно простую алгоритмизацию с целью количественного анализа. Некоторые из результатов этой главы содержатся в работах [24], [93].

## 1.1 Нагретая пологая оболочка двойкой кривизны, края которой нагружены быстропеременными усилиями и моментами

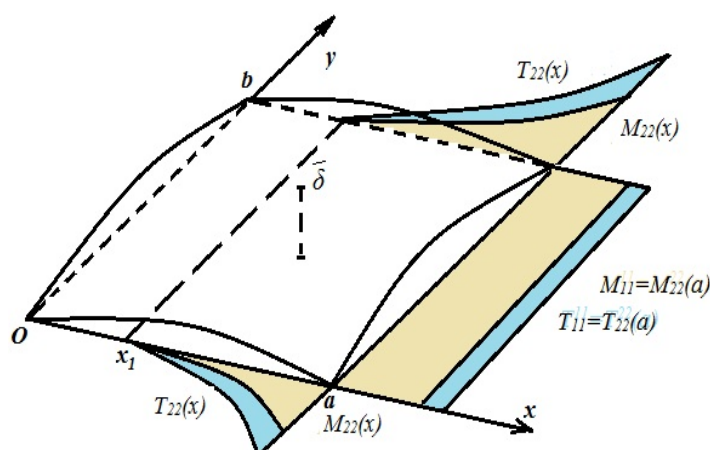


Рисунок 1.1 — Пологая оболочка двойкой кривизны под действием усилий и моментов

Вектор положения любой точки срединной поверхности пологой оболочки стан-

дартным образом отнесенной к декартовой системе координат  $Oxyz$  запишется [96], [118]

$$\bar{r} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z(x, y)\bar{e}_3, \quad (1.1)$$

где функция  $z(x, y)$  в случае оболочки двойкой кривизны равна [96]

$$z(x, y) = \tilde{\delta} \left( 1 - 2 \left( \frac{(x - \frac{a}{2})^2}{a^2} - \frac{(y - \frac{b}{2})^2}{b^2} \right) \right),$$

$\tilde{\delta}$  – наибольшее возвышение срединной поверхности оболочки над планом в координатной плоскости  $Oxy$ . В дальнейшем положим, что оболочка двойкой кривизны находится под действием линейного по толщине  $h$  температурного поля

$$\Theta(x, y, z) = \theta_0 + \frac{z}{h}\theta_1, \quad (\theta_0, \theta_1 \sim const),$$

основные поверхности оболочки теплоизолированы, а два противоположных края расположенных по координатным прямым  $y = 0$ ,  $y = b$  нагружены быстровозрастающими по пространственной переменной  $x$  усилиями и моментами (рисунок 1.1), которые зададим в виде

$$T^{22} = T^0 f\left(\frac{x}{a}\right) H(x - x_1), \quad M^{22} = M^0 \tilde{f}\left(\frac{x}{a}\right) H(x - x_1), \quad (1.2)$$

где  $H(x - x_1)$  – функция Хевисайда неопределена и ограничена в точке  $x_1$ , безразмерные функции  $f\left(\frac{x}{a}\right)$  и  $\tilde{f}\left(\frac{x}{a}\right)$  определяют характер нагрузки и такие что  $f^{(l)}|_{x=x_1} = 0$ ,  $\tilde{f}^{(l)}|_{x=x_1} = 0$  ( $l = 0, 1, 2, 3$ ).

В дальнейшем примем

$$f\left(\frac{x}{a}\right) = \tilde{f}\left(\frac{x}{a}\right) = \left(\frac{x}{a} - \frac{x_1}{a}\right)^4. \quad (1.3)$$

Графики функций (1.2) на  $x \in [0, a]$  приведены в Приложении А.

Граничные условия, в случае шарнирного закрепления двух противоположных краев оболочки, в компонентах поля перемещений  $\bar{U}(u, v, w)$  запишутся в виде при  $y = 0$ ,  $y = b$ :

$$u = 0, \quad v_{,2} = \alpha(1 + \nu)\theta_0 + \frac{T^0}{B} \left(\frac{x}{a} - \frac{x_1}{a}\right)^4 H(x - x_1), \quad (1.4)$$

$$w = 0, \quad w_{,22} = -\frac{\alpha(1 + \nu)}{h}\theta_1 - \frac{M^0}{D} \left(\frac{x}{a} - \frac{x_1}{a}\right)^4 H(x - x_1).$$

Здесь  $B = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ .

Решение системы дифференциальных уравнений [96], [118]

$$\begin{aligned}
u_{,11} + \frac{1-\nu}{2}u_{,22} + \frac{1+\nu}{2}v_{,12} - (k_1 + \nu k_2)w_{,1} &= \alpha(1 + \nu)\theta_{0,1}; \\
\frac{1+\nu}{2}u_{,12} + v_{,22} + \frac{1-\nu}{2}v_{,11} - (\nu k_1 + k_2)w_{,2} &= \alpha(1 + \nu)\theta_{0,2};
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{B}{D} (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) w - \frac{B}{D} [k_1 (u_{,1} + \nu v_{,2}) + \\
+ k_2 (v_{,2} + \nu u_{,1})] = -\alpha(1 + \nu) \frac{B}{D} (k_1 + k_2) \theta_0,
\end{aligned}$$

тождественно удовлетворяющее всем краевым условиям (1.4), будем разыскивать методом суперпозиции одинарных тригонометрических рядов с переменными коэффициентами и других функций, зависящих от структуры неоднородности краевых условий в виде [24]

$$u(x, y) = \sum_k u_k(x) \sin \frac{k\pi y}{b},$$

$$v(x, y) = \sum_k v_k(x) \cos \frac{k\pi y}{b} + \frac{T^0}{B} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 H(x - x_1) y + \alpha \theta_0 (1 + \nu) y + B(x), \tag{1.6}$$

$$w(x, y) = \sum_k w_k(x, y) \sin \frac{k\pi y}{b} - \frac{1}{2} (y^2 - by) \left( \frac{\alpha(1+\nu)}{h} \theta_1 + \frac{M^0}{B} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 H(x - x_1) \right),$$

где  $B(x)$  является интегралом дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = -12 \frac{T^0 b}{B a} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^2 H(x - x_1) \frac{1}{a}$$

и имеет вид  $B(x) = -\frac{T^0}{B} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 H(x - x_1) \frac{b}{2} + D_0 + D_1 x$ .

На основании стандартных процедур метода одинарных тригонометрических рядов получим систему обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов тригонометрических рядов (1.6)  $u_k(x)$ ,  $v_k(x)$ ,  $w_k(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u_k}{dx^2} - \frac{1 - \nu}{1} \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 u_k - \frac{1 + \nu}{2} \frac{k\pi}{b} \frac{dv_k}{dx} - (k_1 + \nu k_2) \frac{dw_k}{dx} &= \\
= -B_{1k} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^3 H(x - x_1) \frac{1}{a}, \\
\frac{1 + \nu}{2} \frac{k\pi}{b} \frac{du_k}{dx} - \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 v_k + \frac{1 - \nu}{2} \frac{d^2 v_k}{dx^2} - (\nu k_1 + k_2) \frac{k\pi}{b} w_k &= \\
= -B_{2k} \frac{1}{a} - B_{3k} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^2 H(x - x_1) \frac{1}{a} - B_{4k} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 H(x - x_1) \frac{1}{a},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_k}{dx^2} - 2 \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 w_k}{dx^2} + \left( \frac{k\pi}{b} \right)^4 w_k + \frac{B}{D} (k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2) w_k - \\ - \frac{B}{D} (k_1 + \nu k_2) \frac{du_k}{dx} + \frac{B}{D} (\nu k_1 + k_2) \frac{k\pi}{b} v_k = \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$= B_{5k} H(x - x_1) \frac{1}{a^3} + B_{6k} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^2 H(x - x_1) \frac{1}{a^3} + B_{7k} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 H(x - x_1) \frac{1}{a^3} + B_{8k} \frac{1}{a^3}.$$

Здесь обозначено

$$B_{1k} = 2(1 + \nu) \frac{T^0}{B} a_k^0 + 2(k_1 + \nu k_2) a \frac{M^0 a}{D} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \tilde{a}_k^2, \quad B_{2k} = (\nu k_1 + k_2) a (1 + \nu) \frac{b}{h} \alpha \theta_1 \tilde{b}_k,$$

$$B_{3k} = 6(1 - \nu) \frac{T^0}{B} \tilde{b}_k \frac{b}{a}, \quad B_{4k} = (\nu k_1 + k_2) a \frac{M^0 a}{D} \frac{b}{a} \tilde{b}_k, \quad B_{6k} = 24 \frac{M^0 a}{D} a_k^0,$$

$$B_{7k} = 12 \left( (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) a^2 \left( \frac{b}{h} \right)^2 \frac{M^0 a}{D} \frac{\tilde{a}_k^2}{2} + \frac{T^0}{B} a_k^0 (\nu k_1 + k_2) a \right) \left( \frac{a}{h} \right)^2,$$

$$B_{8k} = 6 (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) a^2 (1 + \nu) \alpha \theta_1 \tilde{a}_k^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 \left( \frac{a}{h} \right)^2 - 12(1 - \nu^2) k_1 a \alpha \theta_0 a_k^0 \left( \frac{a}{h} \right)^2,$$

$$a_k^0 = \frac{2(1 - \cos k\pi)}{k\pi}, \quad \tilde{a}_k^2 = -\frac{4(1 - \cos k\pi)}{(k\pi)^3}, \quad \tilde{b}_k = -\frac{2(1 - \cos k\pi)}{(k\pi)^2}.$$

Частные интегралы первых двух уравнений системы (1.7) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k &= C_k \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^5 H(x - x_1), \\ \tilde{v}_k &= \left( B_k \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 + E_k \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^6 \right) H(x - x_1) + F_k, \\ \tilde{w}_k &= \left( A_k \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 + D_k \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^6 \right) H(x - x_1), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$A_k = \frac{20(2)_k + (1)_k [2]_k}{4(k_1 + \nu k_2) a [2]_k - 20(k_2 + \nu k_1) a \frac{k\pi a}{b}} a, \quad B_k = \frac{B_{3k}}{6(1 - \nu)} a, \quad C_k = \frac{(2)_k 4(k_1 + \nu k_2) a - (1)_k (k_2 + \nu k_1) a \frac{k\pi a}{b}}{4(k_1 + \nu k_2) a [2]_k - 20(k_2 + \nu k_1) a \frac{k\pi a}{b}} a,$$

$$D_k = -\frac{1 - \nu}{2} \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 \frac{C_k}{[1]_k}, \quad E_k = \frac{1 - \nu}{2} \frac{k\pi a}{b} \frac{(k_2 + \nu k_1) b}{k\pi [1]_k} C_k, \quad F_k = B_{2k} \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 a,$$

$$(1)_k = B_{1k} + \frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)} \frac{k\pi a}{b} B_{3k}, \quad (2)_k = B_{4k} + \frac{B_{3k}}{6(1 - \nu)} \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2,$$

$$[1]_k = 6(k_1 + \nu k_2) a + 3(1 + \nu) (k_2 + \nu k_1) a, \quad [2]_k = \frac{5}{2} (1 + \nu) \frac{k\pi a}{b} + \frac{15}{2} (1 - \nu^2) \frac{k\pi a}{b} \frac{(k_2 + \nu k_1) a}{[1]_k}.$$

Решение системы (1.7) можно свести к интегрированию одного дифференциального уравнения, вводя в рассмотрение функции  $\Phi_k(x)$  соотношениями

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1 - \nu}{2} \left( (k_1 + \nu k_2) \frac{d^3 \Phi_k}{dx^3} + (k_2 - (2 + \nu) k_1) \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 \frac{d\Phi_k}{dx} \right) + \tilde{u}_k, \\ v_k &= \frac{1 - \nu}{2} \left( -(k_2 + \nu k_1) \left( \frac{k\pi}{b} \right)^3 \Phi_k + (-k_1 + (2 + \nu) k_2) \frac{k\pi}{b} \frac{d^2 \Phi_k}{dx^2} \right) + \tilde{v}_k, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$w_k = \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{d^4 \Phi_k}{dx^4} - 2 \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 \Phi_k}{dx^2} + \left( \frac{k\pi}{b} \right)^4 \Phi_k \right) + \widetilde{w}_k,$$

которые тождественно удовлетворяют первым двум уравнениям системы (1.7), а третье уравнение преобразуется к виду [24]

$$\begin{aligned} & \Phi_k^{(8)} + l_k^6 \Phi_k^{(6)} + l_k^4 \Phi_k^{(4)} + l_k^2 \Phi_k^{(2)} + l_k^0 \Phi_k = \\ & = G_k a^5 + \left( G_k^0 + G_k^2 \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^2 + G_k^4 \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 + G_k^6 \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^6 \right) H(x - x_1) a^5, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} l_k^0 &= \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^8 + \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^4 12(1 - \nu^2) \left( \frac{a}{h} \right)^2 k_1^2 a^2, \\ l_k^2 &= -24(1 - \nu^2) \left( \frac{a}{h} \right)^2 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 k_1 k_2 a^2 - 4 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^6, \\ l_k^4 &= 6 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^4 + 12(1 - \nu^2) \left( \frac{a}{h} \right)^2 k_2^2 a^2, \quad l_k^6 = -4 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2, \quad G_k = B_{8k}, \\ G_k^0 &= -4! \widetilde{A}_k + B_{5k}, \quad G_k^2 = -\frac{6!}{2} \widetilde{D}_k + 24 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 \widetilde{A}_l + B_{6k}, \\ G_k^4 &= 60 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 \widetilde{D}_k - \left( \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^4 + 12 \left( \frac{a}{h} \right)^2 (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) a^2 \right) \widetilde{A}_k + \\ & + 60 (k_1 + \nu k_2) a \left( \frac{a}{h} \right)^2 \widetilde{C}_k - 12 \frac{k\pi a}{b} \left( \frac{a}{h} \right)^2 (k_2 + \nu k_1) a \widetilde{B}_k + B_{7k}, \\ G_k^6 &= - \left( \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^4 + 12 \left( \frac{a}{h} \right)^2 (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) a^2 \right) \widetilde{D}_k - 12 \left( \frac{a}{h} \right)^2 (k_2 + \nu k_1) a \frac{k\pi a}{b} \widetilde{E}_k. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Решения неоднородных дифференциальных уравнений (1.10) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \Phi_k(x) &= \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}(x) + \frac{G_k}{l_k^0} a^5 + \left( \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km}(x) + \widetilde{A}_{k0} + \widetilde{A}_{k2} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \widetilde{A}_{k4} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 + \widetilde{A}_{k6} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^6 \right) H(x - x_1) a^5. \end{aligned} \quad (1.12)$$

здесь  $C_k^m$  – постоянные интегрирования,  $\varphi_{km}(x)$  – фундаментальная система функций для однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (1.10)  $\left\{ e^{\frac{\lambda_1 x}{a}} \sin \frac{\lambda_2 x}{a}, e^{\frac{\lambda_1 x}{a}} \cos \frac{\lambda_2 x}{a}, e^{-\frac{\lambda_1 x}{a}} \sin \frac{\lambda_2 x}{a}, e^{-\frac{\lambda_1 x}{a}} \cos \frac{\lambda_2 x}{a}, e^{\frac{\lambda_3 x}{a}} \sin \frac{\lambda_4 x}{a}, e^{\frac{\lambda_3 x}{a}} \cos \frac{\lambda_4 x}{a}, e^{-\frac{\lambda_3 x}{a}} \sin \frac{\lambda_4 x}{a}, e^{-\frac{\lambda_3 x}{a}} \cos \frac{\lambda_4 x}{a} \right\}$ ,  $\widetilde{C}_{km}$  – являются решениями неоднородных алгебраических систем [13], [15]:

$$\begin{aligned} F_k(x)|_{x_1} &= -\widetilde{A}_{k0} a^5, \quad F_k^{(1)}(x)|_{x_1} = 0, \quad F_k^{(2)}(x)|_{x_1} = -2! \widetilde{A}_{k2} a^5, \\ F_k^{(3)}(x)|_{x_1} &= 0, \quad F_k^{(4)}(x)|_{x_1} = -4! \widetilde{A}_{k4} a^5, \quad F_k^{(5)}(x)|_{x_1} = 0, \\ F_k^{(6)}(x)|_{x_1} &= -6! \widetilde{A}_{k6} a^5, \quad F_k^{(7)}(x)|_{x_1} = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь обозначено

$$F_k(x) = \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km}(x), \quad \widetilde{A}_{k6} = \frac{G_k^6}{l_k^0}, \quad \widetilde{A}_{k4} = \frac{1}{l_k^0} \left( G_k^4 - \frac{6!}{4!} l_k^2 \widetilde{A}_{k6} \right),$$

$$\widetilde{A}_{k2} = \frac{1}{l_k^0} \left( G_k^2 - \frac{4!}{2!} l_k^2 \widetilde{A}_{k4} - \frac{6!}{2!} l_k^4 \widetilde{A}_{k6} \right), \quad \widetilde{A}_{k0} = \frac{1}{l_k^0} \left( G_k^0 - 2! l_k^2 \widetilde{A}_{k2} - 4! l_k^4 \widetilde{A}_{k4} - 6! l_k^6 \widetilde{A}_{k6} \right).$$

Отметим, что в решении (1.12) коэффициент при функции Хевисайда в точке  $x = x_1$  (где она не определена) обращается в нуль вместе со своими производными до 7-го порядка включительно.

Структуры коэффициентов аппроксимирующих рядов (1.6) можно считать известными

$$\begin{aligned} u_k(x) &= \frac{1-\nu}{2} (k_1 + \nu k_2) \left( \sum_{m=1}^8 C_k^m \frac{d^3 \varphi_{km}}{dx^3} \frac{1}{a^3} + \left[ \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \frac{d^3 \varphi_{km}}{dx^3} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4! \widetilde{A}_{k4} \left( \frac{x-x_1}{a} \right) \frac{1}{a^3} + \frac{6!}{3!} \widetilde{A}_{k6} \left( \frac{x-x_1}{a} \right)^3 \frac{1}{a^3} \right] H(x-x_1) a^5 \right) + \\ &\quad + \left[ -(k_1 + \nu k_2) + \frac{1+\nu}{2} (\nu k_1 + k_2) \right] \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 \left( \sum_{m=1}^8 C_k^m \frac{d\varphi_{km}}{dx} \frac{1}{a} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \frac{d\varphi_{km}}{dx} \frac{1}{a} + \frac{2!}{a} \widetilde{A}_{k2} \left( \frac{x-x_1}{a} \right) + \frac{4!}{a} \widetilde{A}_{k4} \left( \frac{x-x_1}{a} \right)^3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{6!}{a} \widetilde{A}_{k6} \left( \frac{x-x_1}{a} \right)^5 \right] H(x-x_1) a^5 \right) + \widetilde{u}_k; \\ v_k(x) &= \left[ (\nu k_1 + k_2) - \frac{1+\nu}{2} \right] \frac{k\pi}{b} \left( \sum_{m=1}^8 C_k^m \frac{d^2 \varphi_{km}}{dx^2} \frac{1}{a^2} + \left[ \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \frac{d^2 \varphi_{km}}{dx^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2!}{a^2} \widetilde{A}_{k2} + \frac{4!}{2! a^2} \widetilde{A}_{k4} \left( \frac{x-x_1}{a} \right)^2 + \frac{6!}{4! a^2} \widetilde{A}_{k6} \left( \frac{x-x_1}{a} \right)^4 \right] H(x-x_1) a^5 \right) - \\ &\quad - \frac{1-\nu}{2} (\nu k_1 + k_2) \left( \frac{k\pi}{b} \right)^3 \left( \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km} + \frac{G_k}{l_k^0} a^5 + \left[ \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km} + \widetilde{A}_{k0} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \widetilde{A}_{k2} \left( \frac{x-x_1}{a} \right)^2 + \widetilde{A}_{k4} \left( \frac{x-x_1}{a} \right)^4 + \widetilde{A}_{k6} \left( \frac{x-x_1}{a} \right)^6 \right] H(x-x_1) a^5 \right) + \widetilde{v}_k; \\ w_k(x) &= \frac{1-\nu}{2} \left( \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(4)} \frac{1}{a^4} + \left[ \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km}^{(4)} \frac{1}{a^4} + \frac{4!}{a^4} \widetilde{A}_{k4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{6!}{2! a^4} \widetilde{A}_{k6} \left( \frac{x-x_1}{a} \right)^2 \right] a^5 H(x-x_1) \right) - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -(1-\nu) \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 \left( \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(2)} \frac{1}{a^2} + \left[ \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km}^{(2)} \frac{1}{a^2} + \frac{2!}{a^2} \widetilde{A}_{k2} + \frac{4!}{2!a^2} \widetilde{A}_{k4} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{6!}{4!a^2} \widetilde{A}_{k6} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 \right] H(x-x_1)a^5 \right) + \\
& + \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{k\pi}{b} \right)^4 \left( \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km} + \frac{G_k}{l_k^0} a^5 + \left[ \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km} + \widetilde{A}_{k0} + \widetilde{A}_{k2} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \widetilde{A}_{k4} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 + \widetilde{A}_{k6} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^6 \right] H(x-x_1)a^5 \right) + \widetilde{w}_k.
\end{aligned}$$

Где постоянные интегрирования  $C_k^m$  определялись из граничных условий на двух противоположных краях оболочки, которые задавались в виде обеспечивающих непрерывность силовых нагрузок в угловых точках. Отметим, что граничные условия на двух других краях могут быть любыми из известных в теории полых оболочек. Для определенности примем:

$$\text{при } x=0 \quad v=0, \quad T_{11}=0, \quad M_{11}=0, \quad w=0; \quad (1.14)$$

$$\text{при } x=a \quad v=0, \quad T_{11}=T^0 \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4, \quad M_{11}=M^0 \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4, \quad w=0.$$

Система восьми неоднородных алгебраических уравнений для  $C_k^m$  запишется в виде

при  $x=0$

$$\begin{aligned}
& \left[ (\nu k_1 + k_2)a - \frac{1-\nu}{2}(k_1 + \nu k_2)a \right] \frac{k\pi a}{b} \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(2)} - \\
& - \frac{1-\nu}{2}(\nu k_1 + k_2)a \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^3 \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km} = \\
& = -(1+\nu)\alpha\theta_0 \widetilde{b}_k \frac{b}{a} a^5 + \frac{1-\nu}{2}(\nu k_1 + k_2)a \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^3 \frac{G_k}{l_k^0} a^5 - \widetilde{F}_k a^5; \\
& \frac{1-\nu}{2}(k_1 + \nu k_2)a \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(4)} + \\
& + \left[ -(k_1 + \nu k_2)a + \frac{1+\nu}{2}(\nu k_1 + k_2)a \right] \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(2)} = (1+\nu)\alpha\theta_0 a_k^0 a^5; \\
& \frac{1-\nu}{2} \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(4)} - (1-\nu) \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(2)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^4 \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km} = - \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^4 \frac{G_k}{l_k^0} a^5 + \frac{1+\nu}{2} \alpha \theta_1 \frac{b}{h} \frac{b}{a} \widetilde{a}_{k2} a^5; \\
& \frac{1-\nu}{2} \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(6)} - (1-\nu) \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(4)} + \\
& + \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^4 \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(2)} = - \frac{1+\nu}{2} \alpha \theta_1 \frac{b}{h} a_k^0 a^5;
\end{aligned}$$

при  $x = a$

$$\begin{aligned}
& \left[ (\nu k_1 + k_2)a - \frac{1+\nu}{2}(k_1 + \nu k_2)a \right] \frac{k\pi a}{b} \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(2)} - \\
& - \frac{1-\nu}{2}(\nu k_1 + k_2)a \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^3 \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km} = \\
& = -(1+\nu)\alpha\theta_0 \widetilde{b}_k \frac{b}{a} a^5 - \left[ (\nu k_1 + k_2)a - \frac{1+\nu}{2}(k_1 + \nu k_2)a \right] \frac{k\pi a}{b} \left( \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km}^{(2)} + \right. \\
& \quad \left. + 2\widetilde{A}_{k2} + \frac{4!}{2!} \widetilde{A}_{k4} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^2 + \frac{6!}{4!} \widetilde{A}_{k6} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 \right) a^5 + \\
& \quad + \frac{1-\nu}{2}(\nu k_1 + k_2)a \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^3 \left( \frac{G_k}{l_k^0} + \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km} + \widetilde{A}_{k0} + \widetilde{A}_{k2} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^2 + \right. \\
& \quad \left. + \widetilde{A}_{k4} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 + \widetilde{A}_{k6} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^6 \right) a^5 - \\
& \quad - \widetilde{B}_k \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 a^5 - \widetilde{E}_k \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^6 a^5 - \widetilde{F}_k a^5; \\
& \quad \frac{1-\nu}{2}(k_1 + \nu k_2)a \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(4)} + \\
& \quad + \left[ -(k_1 + \nu k_2)a + \frac{1+\nu}{2}(\nu k_1 + k_2)a \right] \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(2)} = \\
& = (1+\nu)\alpha\theta_0 a_k^0 a^5 - \frac{1-\nu}{2}(k_1 + \nu k_2)a \left[ \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km}^{(4)} + 4! \widetilde{A}_{k4} + \frac{6!}{2!} \widetilde{A}_{k6} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^2 \right] a^5 - \\
& - \left[ -(k_1 + \nu k_2)a + \frac{1+\nu}{2}(\nu k_1 + k_2)a \right] \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 \left( \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km}^{(2)} + 2! \widetilde{A}_{k2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +12\widetilde{A}_{k4} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^2 + 30\widetilde{A}_{k6} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 \Big) a^5 - 5\widetilde{C}_k \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 a^5; \\
\frac{1-\nu}{2} \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(4)} - (1-\nu) \left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(2)} + \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{k\pi a}{b}\right)^4 \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km} = \\
& = \left[ (1+\nu) \frac{b}{h} \alpha \theta_1 + \frac{M^0 b}{D} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 \right] \frac{\widetilde{a}_{k2} b}{2 a} a^5 - \\
& - \frac{1-\nu}{2} \left( \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km}^{(4)} + 4! \widetilde{A}_{k4} + \frac{6!}{2!} \widetilde{A}_{k6} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^2 \right) a^5 + \\
& + (1-\nu) \left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 \left( \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km}^{(2)} + \right. \\
& \left. + 2\widetilde{A}_{k2} + \frac{4!}{2!} \widetilde{A}_{k4} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^2 + \frac{6!}{4!} \widetilde{A}_{k6} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 \right) a^5 - \\
& - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{k\pi a}{b}\right)^4 \left( \frac{G_k}{l_k^0} + \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km} + \widetilde{A}_{k0} + \right. \\
& \left. + \widetilde{A}_{k2} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^2 + \widetilde{A}_{k4} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 + \widetilde{A}_{k6} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^6 \right) a^5 - \\
& - \widetilde{A}_k \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 a^5 - \widetilde{D}_k \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^6 a^5; \\
\frac{1-\nu}{2} \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(6)} - (1-\nu) \left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km}^{(2)} + \\
& + \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{k\pi a}{b}\right)^4 \sum_{m=1}^8 C_k^m \varphi_{km} = \left[ \frac{M^0 a}{D} \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 - \frac{1+\nu}{\nu} \frac{a}{h} \alpha \theta_1 \right] a_k^0 a^5 + \\
& + \frac{M^0 a}{D} 6 \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \widetilde{a}_{k2} a^5 - \frac{1-\nu}{2} \left[ \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km}^{(6)} + 6! \widetilde{A}_{k6} \right] a^5 + \\
& + (1-\nu) \left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 \left[ \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km}^{(4)} + 4! \widetilde{A}_{k4} + \frac{6!}{2!} \widetilde{A}_{k6} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^2 \right] a^5 - \\
& - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{k\pi a}{b}\right)^4 \left[ \sum_{m=1}^8 \widetilde{C}_{km} \varphi_{km}^{(2)} + 2! \widetilde{A}_{k2} + 12\widetilde{A}_{k4} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^2 + 30\widetilde{A}_{k6} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 \right] a^5 - \\
& - 12\widetilde{A}_k \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^2 a^5 - 30\widetilde{D}_k \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 a^5.
\end{aligned}$$

Подстановка решений (1.5) в (1.14) позволяет определить постоянные  $D_0$  и  $D_1$ , которые содержит функция  $B(x)$

$$D_0 = (1 + \nu) \alpha \theta_0 \frac{b}{2}, \quad D_1 = \frac{1}{2} \left( (1 + \nu) \alpha \theta_0 - \frac{T^0}{B} \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 \right) \frac{b}{a}.$$

Окончательно выражение для функции прогиба примет вид

$$w(x, y) = \sum_k \left( \frac{1 - \nu}{2} \left( L^4 \left( \sum_m C_k^m \varphi_{km}(x) \right) + L^4 \left( \widetilde{\Phi}_k(x) \right) \right) + \widetilde{w}_k \right) \sin \frac{k\pi y}{b} - \frac{1}{2} (y^2 - by) \left( \frac{\alpha \theta_0 (1 + \nu)}{h} + \frac{M^0}{D} \left( \frac{x}{a} - \frac{x_1}{a} \right)^4 H(x - x_1) \right), \quad (1.15)$$

где  $\widetilde{\Phi}_k(x)$  – частное решение дифференциального уравнения (1.10),  $\widetilde{w}_k$  – частное решение первых двух уравнений системы (1.7) в виде (1.8),  $L^4 = \frac{d^4}{dx^4} - 2 \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} + \left( \frac{k\pi}{b} \right)^4$ .

По этой же схеме определяются и тангенциальные компоненты поля перемещений.

На основании полученных решений построены трехмерные изображения поверхностей прогиба и их сечений одной из координатных плоскостей для оболочки двойкой кривизны, при различных значениях температурных величин, интенсивности силовых нагружений границ при значениях параметров:  $\frac{a}{b} = 0,9901$ ,  $x_1 = \frac{a}{4}$ ,  $\frac{a}{h} = 0,005$ ,  $k_1 = -4 \frac{\tilde{\delta}}{a^2}$ ,  $k_2 = -4 \frac{\tilde{\delta}}{b^2}$ .

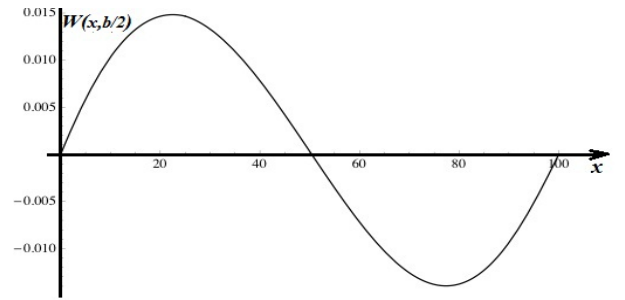
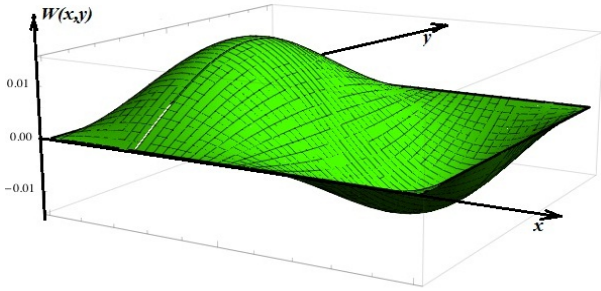


Рисунок 1.2 –  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 3$ ,  $\theta_0 = 50$ ,  $T^0 = 20$ ,  $\theta_1 = 50$ ,  $M^0 = -100$ .  
Рисунок 1.3 –  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 3$ ,  $\theta_0 = 50$ ,  $T^0 = 20$ ,  $\theta_1 = 50$ ,  $M^0 = -100$ .

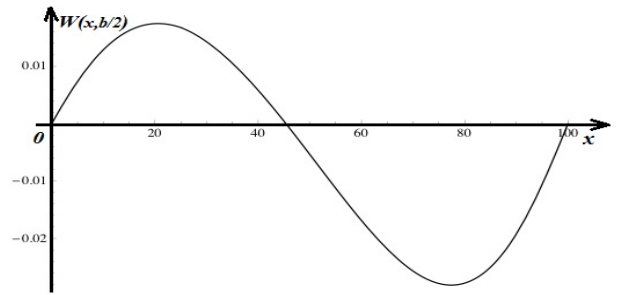
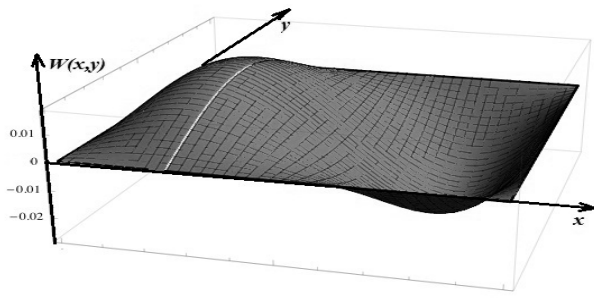


Рисунок 1.4 —  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$ ,  $\theta_0 = 50$ ,  $T^0 = 20$ ,  $\theta_1 = 50$ ,  $M^0 = -100$ .

Рисунок 1.5 —  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$ ,  $\theta_0 = 50$ ,  $T^0 = 20$ ,  $\theta_1 = 50$ ,  $M^0 = -100$ .

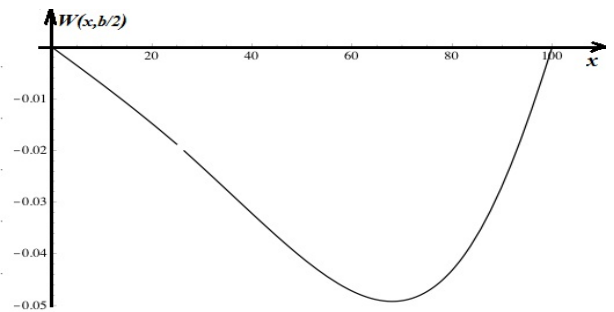
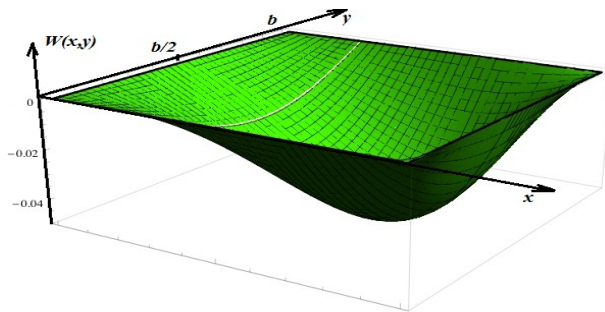


Рисунок 1.6 —  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 3$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $T^0 = 20$ ,  $\theta_1 = 0$ ,  $M^0 = -100$ .

Рисунок 1.7 —  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 3$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $T^0 = 20$ ,  $\theta_1 = 0$ ,  $M^0 = -100$ .

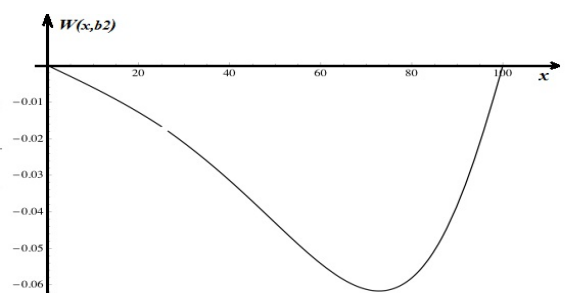
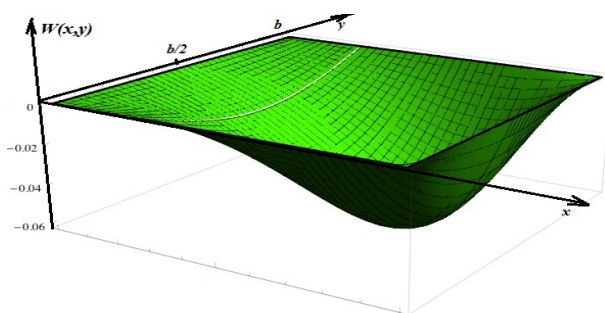


Рисунок 1.8 —  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $T^0 = 20$ ,  $\theta_1 = 0$ ,  $M^0 = -100$ .

Рисунок 1.9 —  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $T^0 = 20$ ,  $\theta_1 = 0$ ,  $M^0 = -100$ .

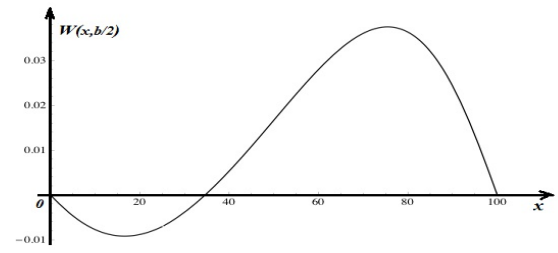
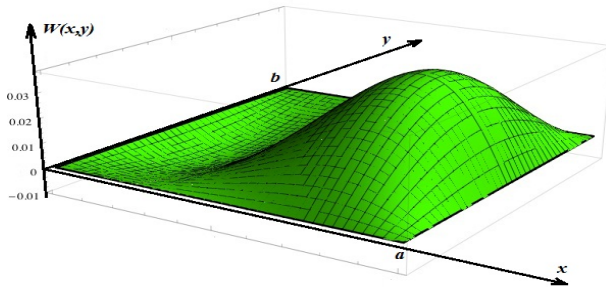


Рисунок 1.10 —  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5, \theta_0 = 50, T^0 = 20, \theta_1 = -50, M^0 = 100.$  Рисунок 1.11 —  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5, \theta_0 = 50, T^0 = 20, \theta_1 = -50, M^0 = 100.$

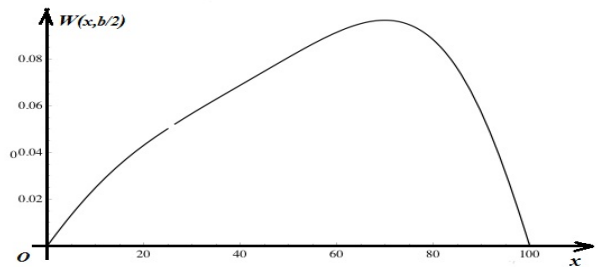
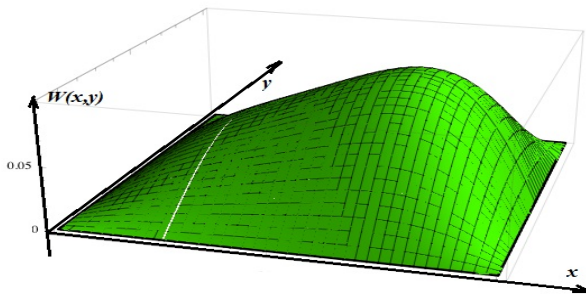


Рисунок 1.12 —  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5, \theta_0 = 50, T^0 = 20, \theta_1 = 50, M^0 = 100.$  Рисунок 1.13 —  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5, \theta_0 = 50, T^0 = 20, \theta_1 = 50, M^0 = 100.$

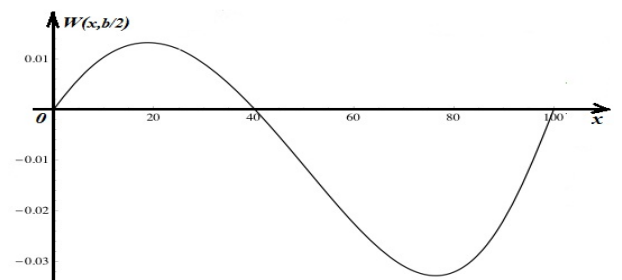
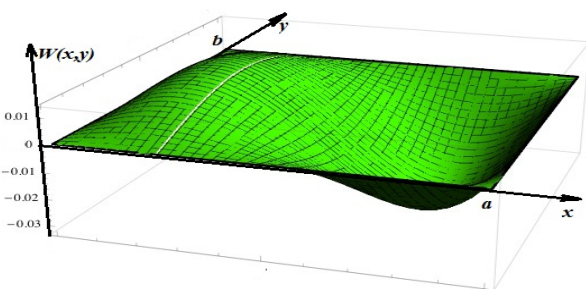


Рисунок 1.14 —  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5, \theta_0 = 0, T^0 = 0, \theta_1 = 50, M^0 = -100.$  Рисунок 1.15 —  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5, \theta_0 = 0, T^0 = 0, \theta_1 = 50, M^0 = -100.$

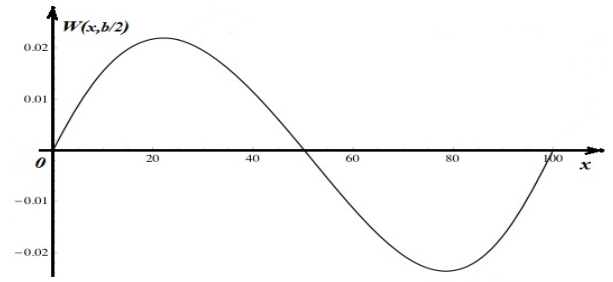
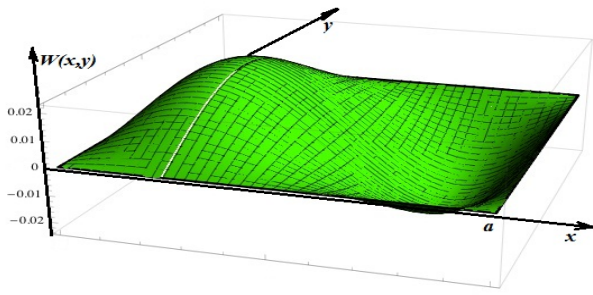


Рисунок 1.16 —  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$ ,  $\theta_0 = 100$ , Рисунок 1.17 —  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$ ,  $\theta_0 = 100$ ,  $T^0 = 50$ ,  $\theta_1 = 50$ ,  $M^0 = -100$ .  $T^0 = 50$ ,  $\theta_1 = 50$ ,  $M^0 = -100$ .

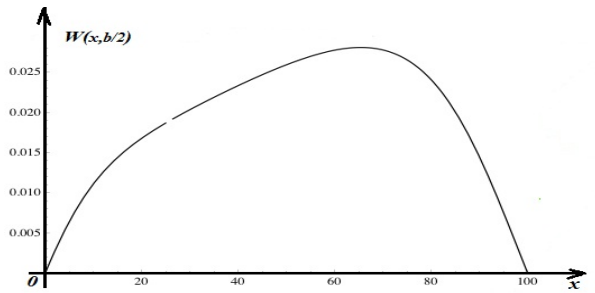
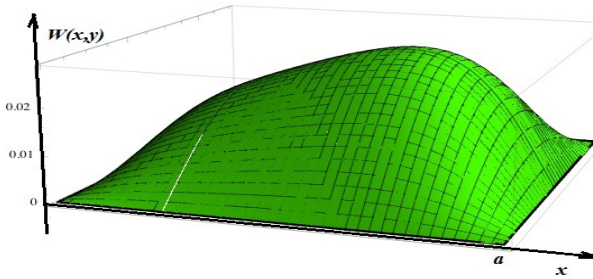


Рисунок 1.18 —  $\frac{a}{b} = 2$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$ ,  $\theta_0 = 100$ , Рисунок 1.19 —  $\frac{a}{b} = 2$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$ ,  $\theta_0 = 100$ ,  $T^0 = 50$ ,  $\theta_1 = 50$ ,  $M^0 = -100$ .  $T^0 = 50$ ,  $\theta_1 = 50$ ,  $M^0 = -100$ .

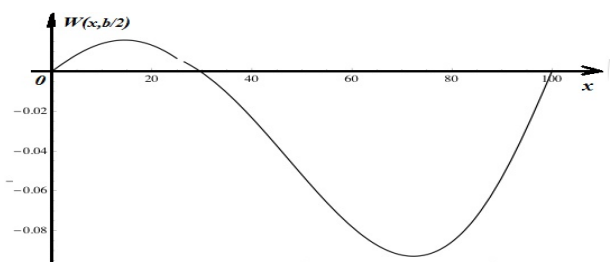
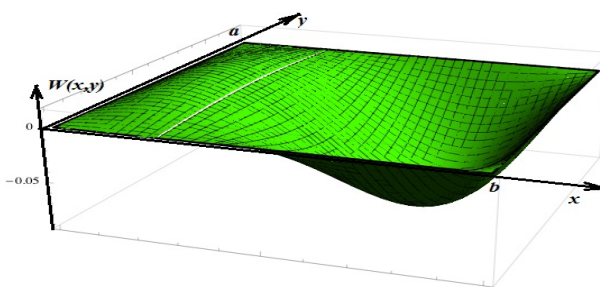


Рисунок 1.20 —  $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$ ,  $\theta_0 = 100$ , Рисунок 1.21 —  $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$ ,  $\theta_0 = 100$ ,  $T^0 = 50$ ,  $\theta_1 = 50$ ,  $M^0 = -100$ .  $T^0 = 50$ ,  $\theta_1 = 50$ ,  $M^0 = -100$ .

Количественный анализ выявил следующие закономерности:

- существенное влияние на прогиб и конфигурацию поверхности прогиба оказывают параметры  $\theta_1$  и  $M^0$ . С увеличением указанных параметров, при прочих равных условиях, прогибы оболочки растут, рисунки 1.10 - 1.13;
- прогиб оболочки двойкой кривизны и конфигурация поверхности прогиба малочувствительны к изменениям параметров  $\theta_0$  и  $T^0$ , как видно из рисунков 1.14 - 1.17;
- на конфигурацию поверхности прогиба значительно влияет параметр  $\frac{a}{b}$ , рисунки 1.18 - 1.21.

Во всех рассмотренных случаях увеличение стрелы подъема оболочки над планом ведет к росту величины прогиба во всех точках срединной поверхности оболочки, даже в случае холодной оболочки ( $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_1 = 0$ ), рисунки 1.2 - 1.9.

## 1.2 Пологая оболочка постоянного кручения в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой через основные поверхности и кратковременного воздействия сосредоточенной силы

В случае полой оболочки постоянного кручения функция  $z(x, y)$  запишется

$$z(x, y) = \tilde{\delta} \frac{xy}{ab}.$$

Положим, что основные поверхности оболочки находятся в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой, а на краях оболочки поддерживается нулевая температура. Начиная с некоторого момента времени  $t_1$  внешняя поверхность подвергается воздействию сосредоточенной силы (направленной по нормали к поверхности), которое продолжается в течении временного интервала  $|t_2 - t_1| \ll 1$ . В этом же временном интервале происходит «скачкообразное» изменение температуры окружающей среды на величину  $T_1^+$  со стороны действия сосредоточенной силы

$$q = q_0 a_1 b_1 \delta(x - x_1, y - y_1) (H(t - t_1) - H(t - t_2))$$

что приводит к кратковременному изменению перепада температуры по толщине термоупругой системы. Здесь  $H(t - t_i)$  ( $i = 1, 2$ ) – функции Хевисайда временной координаты,  $\delta(x - x_1, y - y_1)$  – дельта функция двух пространственных переменных определяемая как предел

$$\delta(x - x_1, y - y_1) =$$



$$= \lim_{\substack{a_1 \rightarrow 0 \\ b_1 \rightarrow 0}} \frac{H(x - (x_1 - \frac{a_1}{2})) - H(x - (x_1 + \frac{a_1}{2}))}{a_1} \frac{H(y - (y_1 - \frac{b_1}{2})) - H(y - (y_1 + \frac{b_1}{2}))}{b_1}.$$

Решение несвязанной термодинамической задачи сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений, описывающих движение нагретой полой оболочки постоянного кручения [18], [96], [118]

$$\begin{aligned} u_{,11} + \frac{1-\nu}{2}u_{,22} + \frac{1-\nu}{2}v_{,12} - (1-\nu)k_{12}w_{,2} &= \frac{\gamma h}{gB}u_{,tt}, \\ \frac{1+\nu}{2}u_{,12} + v_{,22} + \frac{1-\nu}{2}v_{,11} - (1-\nu)k_{12}w_{,1} &= \frac{\gamma h}{gB}v_{,tt}, \\ \nabla^2 \nabla^2 w + 2\frac{B}{D}(1-\nu)k_{12}^2 w - \frac{B}{D}(1-\nu)k_{12}(v_{,1} + u_{,2}) &= -\frac{\alpha}{h}(1+\nu)\nabla^2 \theta_1 + \\ + \frac{q_0}{D}a_1 b_1 \delta(x - x_1, y - y_1)(H(t - t_1) - H(t - t_2)) - \frac{\gamma h}{gD}w_{,tt}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $\theta_1(x, y, t)$  – температурная функция связанная с температурным полем равенством  $\Theta(x, y, z, t) = \frac{z}{h}\theta_1(x, y, t)$  и предварительно определяется как решение дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\beta}\theta_{1,t} - \nabla^2 \theta_1 + (6\frac{\varkappa}{\lambda h} + \frac{12}{h^2})\theta_1 = 6\frac{\varkappa}{\lambda h}(T_0^+ + T_1^+(H(t - t_1) - H(t - t_2)) - T^-). \quad (1.17)$$

При отсутствии перепада температуры на краях оболочки, на основании метода двойных тригонометрических рядов с переменными по временной координате коэффициентами, решение уравнения (1.17) запишется

$$\begin{aligned} \theta_1(x, y, t) = \sum_{km} \left\langle \Delta T_{km} \left( 1 - 6\frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{1}{s_{km}} \right) e^{-\frac{\beta}{a^2} s_{km} t} + \frac{6\frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \Delta T_{km}}{s_{km}} + \right. \\ \left. + 6\frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{T_1^+ e_{km}}{s_{km}} \left( \left( 1 - e^{-\frac{\beta}{a^2} s_{km} (t-t_1)} \right) H(t - t_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( 1 - e^{-\frac{\beta}{a^2} s_{km} (t-t_2)} \right) H(t - t_2) \right) \right\rangle \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь  $T_0^+$ ,  $T^-$  – температуры сред с внешней и внутренней поверхностей оболочки вне временного интервала силового воздействия,  $\beta$  – коэффициент теплопроводности,  $\varkappa$  – коэффициент теплоотдачи,  $\frac{\varkappa a}{\lambda}$  – параметр Био,  $\Delta T_{km} = l_{km} [T_0^+ - T^-]$ ,  $l_{km} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dx dy = \frac{16}{(k\pi)^2}$ ,  $s_{km} = (k\pi)^2 + (\frac{m\pi a}{b})^2 + \frac{6\varkappa a}{\lambda} \frac{a}{h} + 12 \left(\frac{a}{h}\right)^2$ .

Решения неоднородной системы дифференциальных уравнений (1.16) тождественно удовлетворяющих однородным краевым условиям

$$\begin{aligned} x = 0, x = a \quad u = 0, T_{12} = 0, w = 0, M_{11} = 0, \\ y = 0, y = b \quad v = 0, T_{12} = 0, w = 0, M_{22} = 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

будем разыскивать в виде сумм двойных тригонометрических рядов с переменными, по временной координате, коэффициентами

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \sum_{km} u_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{x} \cos \frac{m\pi y}{b}, \\
v(x, y, t) &= \sum_{km} v_{km}(t) \cos \frac{k\pi x}{x} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\
w(x, y, t) &= \sum_{km} w_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{x} \sin \frac{m\pi y}{b}.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Коэффициенты  $u_{km}$ ,  $v_{km}$ ,  $w_{km}$  аппроксимирующих рядов (1.20) являются интегралами системы неоднородных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma ha^2}{gB} u_{km,tt} + \left[ (k\pi)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \right] u_{km} + \\
&+ \frac{1+\nu}{2} k\pi \frac{m\pi a}{b} v_{km} + (1-\nu) k_{12} a \frac{m\pi a}{b} w_{km} = 0; \\
&\frac{1+\nu}{2} k\pi \frac{m\pi a}{b} u_{km} + \frac{\gamma ha^2}{gB} v_{km,tt} + \left[ \frac{1-\nu}{2} (k\pi)^2 + \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \right] v_{km} + \\
&+ (1-\nu) k_{12} a k\pi w_{km} = 0; \\
&\frac{\gamma ha^4}{gD} w_{km,tt} + \left[ \left[ (k\pi)^2 + \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \right]^2 + 2 \frac{B}{D} a^2 (1-\nu) k_{12}^2 a^2 \right] w_{km} + \\
&+ \frac{B}{D} a^2 (1-\nu) k_{12} a k\pi v_{km} + \frac{B}{D} a^2 (1-\nu) k_{12} a \frac{m\pi a}{b} u_{km} = \\
&= 4 \frac{q^0}{D} a^4 \frac{a_1}{a} \frac{b_1}{b} \sin^2 \frac{k\pi x_1}{a} \sin^2 \frac{m\pi y_1}{b} [H(t-t_1) - H(t-t_2)] + \\
&+ (1+\nu) \frac{a}{h} \left[ (k\pi)^2 + \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \right] \alpha \theta_{km}(t) a.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

как и предыдущем случае с помощью подстановок

$$\begin{aligned}
u_{km}(t) &= (1-\nu) k_{12} a \frac{m\pi a}{b} \left( -G^2 \frac{d^2 \Phi_{km}}{dt^2} + \widetilde{L}_{km}^\nu \Phi_{km} \right), \\
v_{km}(t) &= -(1-\nu) k_{12} a k\pi \left( G^2 \frac{d^2 \Phi_{km}}{dt^2} + L_{km}^\nu \Phi_{km} \right), \\
w_{km}(t) &= G^2 \frac{d^4 \Phi}{dt^4} + \frac{3-\nu}{2} L_{km} \frac{d^2 \Phi_{km}}{dt^2} + \frac{1-\nu}{2} (L_{km})^2,
\end{aligned} \tag{1.22}$$

интегрирование системы (1.21) сводится к интегрированию обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений шестого порядка относительно функций  $\Phi_{km}(t)$

$$\begin{aligned}
G^6 \frac{d^6 \Phi_{km}}{dt^6} + G_{km}^4 G^4 \frac{d^4 \Phi_{km}}{dt^4} + G_{km}^2 G^2 \frac{d^2 \Phi_{km}}{dt^2} + G_{km}^0 \Phi_{km} &= A_{km}^1 a + A_{km}^2 e^{-\frac{\beta}{a^2} s_{km} t} + \\
&+ \left( q_{km} + A_{km}^3 \left( 1 - e^{-\frac{\beta}{a^2} s_{km} (t-t_1)} \right) \right) H(t-t_1) a - \\
&- \left( q_{km} + A_{km}^3 \left( 1 - e^{-\frac{\beta}{a^2} s_{km} (t-t_2)} \right) \right) H(t-t_2) a,
\end{aligned} \tag{1.23}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{km} &= (k\pi)^2 + \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2, \quad L_{km}^\nu = (k\pi)^2 - \nu \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2, \\
\widetilde{L}_{km}^\nu &= \nu (k\pi)^2 - \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2, \quad \widetilde{L}_{km} = (k\pi)^2 - \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2, \quad G = \sqrt{\frac{\gamma h a^2}{g B}}, \\
G_{km}^4 &= \frac{3-\nu}{2} L_{km} + L_{km}^2 \frac{D}{B a^2} + 2(1-\nu)(k_{12} a)^2, \\
G_{km}^2 &= \frac{1-\nu}{2} L_{km}^2 + \frac{3-\nu}{2} L_{km} \left( L_{km}^2 \frac{D}{B a^2} + 2(1-\nu)(k_{12} a)^2 \right) + (1-\nu)^2 (k_{12} a)^2 \widetilde{L}_{km}, \\
G_{km}^0 &= \frac{1-\nu}{2} L_{km}^2 \left( L_{km}^2 \frac{D}{B a^2} + 2(1-\nu)(k_{12} a)^2 \right) + \\
&+ (1-\nu)^2 (k_{12} a)^2 \left( (k\pi)^2 L_{km}^\nu + \left( \frac{m\pi a}{b} \widetilde{L}_{km}^\nu \right)^2 \right), \\
A_{km}^1 &= (1+\nu) \frac{a}{h} \frac{D}{B a^2} L_{km} 6 \frac{\alpha a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{\alpha \Delta T_{km}}{s_{km}}, \quad A_{km}^2 = (1+\nu) \frac{a}{h} \frac{D}{B a^2} L_{km} \alpha \Delta T_{km} \left( 1 - 6 \frac{\alpha a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{1}{s_{km}} \right), \\
A_{km}^3 &= (1+\nu) \frac{a}{h} \frac{D}{B a^2} L_{km} 6 \frac{\alpha a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{e_{km}}{s_{km}} \alpha T_1^+, \\
q_{km} &= 4 \frac{q^0}{E} (1-\nu^2) \frac{a}{h} \frac{a_1}{a} \frac{b_1}{b} \sin^2 \frac{k\pi x_1}{a} \sin^2 \frac{m\pi y_1}{b}.
\end{aligned}$$

Фундаментальная система функций для однородного уравнения соответствующего (1.23) запишется

$$\left\{ \varphi_{km}^j(t) \right\} \sim \left\{ \cos \frac{\lambda_{km}^1 t}{G}, \sin \frac{\lambda_{km}^1 t}{G}, \cos \frac{\lambda_{km}^2 t}{G}, \sin \frac{\lambda_{km}^2 t}{G}, \cos \frac{\lambda_{km}^3 t}{G}, \sin \frac{\lambda_{km}^3 t}{G} \right\}.$$

Частные интегралы уравнений (1.23) будем разыскивать в виде [12], [15]

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}_{km}^1(t) &= B_{km}^1 a + B_{km}^2 e^{-\frac{\beta s_{km}}{a^2} t} a + \\
&+ \left[ \sum_{l=1}^6 D_{km}^l \varphi_{km}^l(t) + B_{km}^3(t) \right] H(t-t_1) a + \left[ \sum_{l=1}^6 \widetilde{D}_{km}^l \varphi_{km}^l(t) + \widetilde{B}_{km}^3(t) \right] H(t-t_2) a,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
B_{km}^1 &= \frac{A_{km}^1}{G_{km}^0}, \quad B_{km}^2 = \frac{A_{km}^2}{G_{km}}, \\
\widetilde{G}_{km} &= \left( G \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^6 + G_{km}^4 \left( G \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^4 + G_{km}^2 \left( G \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^2 + G_{km}^0,
\end{aligned}$$

$$B_{km}^3(t) = \frac{q_{km} + A_{km}^3}{G_{km}^0} - \frac{A_{km}^3}{\widetilde{G}_{km}} e^{-\frac{\beta s_{km}}{a^2}(t-t_1)},$$

$$\widetilde{B}_{km}^3(t) = -\frac{q_{km} + A_{km}^3}{G_{km}^0} + \frac{A_{km}^3}{\widetilde{G}_{km}} e^{-\frac{\beta s_{km}}{a^2}(t-t_2)}.$$

Здесь  $B_{km}^3$  и  $\widetilde{B}_{km}^3$  являются частными интегралами «вспомогательных» [12], [15] уравнений, которые следуют из (1.23), если в них убрать функции Хевисайда. Постоянные  $D_{km}^j$  и  $\widetilde{D}_{km}^j$  являются решениями неоднородных алгебраических систем [12], [15]

$$\left[ \sum_{l=1}^6 D_{km}^l \varphi_{km}^l(t) + B_{km}^3 \right]^{(n)} \Big|_{t_1} = 0;$$

$$\left[ \sum_{l=1}^6 \widetilde{D}_{km}^l \varphi_{km}^l(t) + \widetilde{B}_{km}^3 \right]^{(n)} \Big|_{t_1} = 0.$$

Функция  $\Phi_{km}(t)$  запишется

$$\begin{aligned} \Phi_{km}(t) = & C_{km}^1 \cos \frac{\lambda_{km}^1 t}{G} + C_{km}^2 \sin \frac{\lambda_{km}^1 t}{G} + C_{km}^3 \cos \frac{\lambda_{km}^2 t}{G} + \\ & + C_{km}^4 \sin \frac{\lambda_{km}^2 t}{G} + C_{km}^5 \cos \frac{\lambda_{km}^3 t}{G} + C_{km}^6 \sin \frac{\lambda_{km}^3 t}{G} + \\ & + B_{km}^1 a + B_{km}^2 e^{-\frac{\beta}{a^2} s_{km} t} + \left( \sum_{j=1}^6 D_{km}^j \varphi_{km}^j(t) + B_{km}^3(t) \right) H(t-t_1) a + \\ & + \left( \sum_{j=1}^6 \widetilde{D}_{km}^j \varphi_{km}^j(t) + \widetilde{B}_{km}^3(t) \right) H(t-t_1) a. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Коэффициенты тригонометрических рядов (1.20) на основании равенств (1.22) и вида функций  $\Phi_{km}(t)$  (1.24) можно считать известными.

$$\begin{aligned} u_{km}(t) = & (1-\nu) k_{12} a \frac{m\pi a}{b} \left( \sum_{l=1}^6 C_{km}^l \left[ \frac{\gamma h a^2}{gB} \left( \frac{\lambda_{km}^l}{G} \right)^2 + \widetilde{L}_{km}^\nu \right] \varphi_{km}^l(t) + \right. \\ & + \widetilde{L}_{km}^\nu B_{km}^1 a + B_{km}^2 \left[ -\frac{\gamma h a^2}{gB} \left( \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^2 + \widetilde{L}_{km}^\nu \right] e^{-\frac{\beta s_{km}}{a^2} t} a + \\ & \left. + \left\{ \sum_{l=1}^6 D_{km}^l \left[ \frac{\gamma h a^2}{gB} \left( \frac{\lambda_{km}^l}{G} \right)^2 + \widetilde{L}_{km}^\nu \right] \varphi_{km}^l(t) + \frac{q_{km} + A_{km}^3}{G_{km}^0} \widetilde{L}_{km}^\nu - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{A_{km}^3}{\widetilde{G}_{km}} \left[ \frac{\gamma ha^2}{gB} \left( \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^2 + \widetilde{L}_{km}^\nu \right] e^{-\frac{\beta s_{km}}{a^2}(t-t_1)} \Big\} H(t-t_1)a + \\
& + \left\{ \sum_{l=1}^6 \widetilde{D}_{km}^l \left[ \frac{\gamma ha^2}{gB} \left( \frac{\lambda_{km}^l}{G} \right)^2 + \widetilde{L}_{km}^\nu \right] \varphi_{km}^l(t) - \frac{q_{km} + A_{km}^3 \widetilde{L}_{km}^\nu}{G_{km}^0} + \right. \\
& \left. + \frac{A_{km}^3}{\widetilde{G}_{km}} \left[ \frac{\gamma ha^2}{gB} \left( \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^2 + \widetilde{L}_{km}^\nu \right] e^{-\frac{\beta s_{km}}{a^2}(t-t_2)} \Big\} H(t-t_2)a \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{km}(t) = & (1-\nu)k_{12}ak\pi \left( \sum_{l=1}^6 C_{km}^l \left[ -\frac{\gamma ha^2}{gB} \left( \frac{\lambda_{km}^l}{G} \right)^2 + L_{km}^\nu \right] \varphi_{km}^l(t) + \right. \\
& \left. + L_{km}^\nu B_{km}^1 a + B_{km}^2 \left[ \frac{\gamma ha^2}{gB} \left( \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^2 + L_{km}^\nu \right] e^{-\frac{\beta s_{km}}{a^2}t} a + \right. \\
& + \left\{ \sum_{l=1}^6 D_{km}^l \left[ -\frac{\gamma ha^2}{gB} \left( \frac{\lambda_{km}^l}{G} \right)^2 + L_{km}^\nu \right] \varphi_{km}^l(t) + \frac{q_{km} + A_{km}^3 L_{km}^\nu}{G_{km}^0} - \right. \\
& \left. - \frac{A_{km}^3}{\widetilde{G}_{km}} \left[ -\frac{\gamma ha^2}{gB} \left( \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^2 + L_{km}^\nu \right] e^{-\frac{\beta s_{km}}{a^2}(t-t_1)} \Big\} H(t-t_1)a + \right. \\
& \left. + \left\{ \sum_{l=1}^6 \widetilde{D}_{km}^l \left[ -\frac{\gamma ha^2}{gB} \left( \frac{\lambda_{km}^l}{G} \right)^2 + L_{km}^\nu \right] \varphi_{km}^l(t) - \frac{q_{km} + A_{km}^3 L_{km}^\nu}{G_{km}^0} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{A_{km}^3}{\widetilde{G}_{km}} \left[ -\frac{\gamma ha^2}{gB} \left( \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^2 + L_{km}^\nu \right] e^{-\frac{\beta s_{km}}{a^2}(t-t_2)} \Big\} H(t-t_2)a \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{km}(t) = & \sum_{l=1}^6 C_{km}^l \left[ \left( \frac{\gamma ha^2}{gB} \right)^2 \left( \frac{\lambda_{km}^l}{G} \right)^4 - \frac{3-\nu}{2} L_{km} \frac{\gamma ha^2}{gB} \left( \frac{\lambda_{km}^l}{G} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{1-\nu}{2} L_{km}^2 \right] \varphi_{km}^l + \frac{1-\nu}{2} L_{km}^2 B_{km}^1 a + B_{km}^2 \left[ \left( \frac{\gamma ha^2}{gB} \right)^2 \left( \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^4 + \right. \\
& \left. + \frac{3-\nu}{2} L_{km} \frac{\gamma ha^2}{gB} \left( \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} L_{km}^2 \right] e^{-\frac{\beta s_{km}}{a^2}t} a + \\
& + \left( \sum_{l=1}^6 D_{km}^l \left[ \left( \frac{\gamma ha^2}{gB} \right)^2 \left( \frac{\lambda_{km}^l}{G} \right)^4 - \frac{3-\nu}{2} L_{km} \frac{\gamma ha^2}{gB} \left( \frac{\lambda_{km}^l}{G} \right)^2 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1-\nu}{2} L_{km}^2 \left] \varphi_{km}^l + \frac{1-\nu}{2} L_{km}^2 \frac{q_{km} + A_{km}^3}{G_{km}^0} - \frac{A_{km}^3}{\widetilde{G}_{km}} \left[ \left( \frac{\gamma h a^2}{gB} \right)^2 \left( \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^4 + \right. \\
& \left. + \frac{3-\nu}{2} L_{km} \frac{\gamma h a^2}{gB} \left( \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} L_{km}^2 \right] e^{-\frac{\beta s_{km}}{a^2}(t-t_1)} \right) H(t-t_1) a + \\
& + \left( \sum_{l=1}^6 \widetilde{D}_{km}^l \left[ \left( \frac{\gamma h a^2}{gB} \right)^2 \left( \frac{\lambda_{km}^l}{G} \right)^4 - \frac{3-\nu}{2} L_{km} \frac{\gamma h a^2}{gB} \left( \frac{\lambda_{km}^l}{G} \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1-\nu}{2} L_{km}^2 \right] \varphi_{km}^l - \frac{1-\nu}{2} L_{km}^2 \frac{q_{km} + A_{km}^3}{G_{km}^0} + \frac{A_{km}^3}{\widetilde{G}_{km}} \left[ \left( \frac{\gamma h a^2}{gB} \right)^2 \left( \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^4 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3-\nu}{2} L_{km} \frac{\gamma h a^2}{gB} \left( \frac{\beta s_{km}}{a^2} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} L_{km}^2 \right] e^{-\frac{\beta s_{km}}{a^2}(t-t_2)} \right) H(t-t_2) a.
\end{aligned}$$

Постоянные интегрирования  $C_{km}^j$  ( $j = \overline{1,6}$ ) определяются из начальных условий при  $t = 0$   $\bar{u} = 0$ ,  $\bar{u}_{,t} = 0$ , которые через функцию  $\Phi_{km}(t)$  переписутся в виде при  $t = 0$   $\Phi_{km}^{(j)} = 0$  ( $j = \overline{0,5}$ ).

На основании полученных решений для оболочки постоянного кручения построены изображения (код программы для построения графиков приведен в приложении Б) изменений форм прогибов в различные моменты времени (внутри и вне временного интервала  $|t_2 - t_1|$ ) и графики движения точки срединной поверхности оболочки с координатами  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$  при значениях параметров:  $a = 100$  см,  $\frac{a}{b} = 1$ ,  $\frac{a}{h} = 0,005$ ,  $\frac{a_1}{a} = 10^{-3}$ ,  $\frac{b_1}{b} = 10^{-3}$ ,  $x_1 = \frac{a}{2}$ ,  $y_1 = \frac{b}{2}$ ,  $t_1 = 1$  сек,  $t_2 = 1,005$  сек,  $T_0^+ = T = 20^\circ C$ , материал типа «дюралюминий». На рисунках 1.22 - 1.28 кривая 1 соответствует  $t = 1,0025$ , кривая 2 соответствует  $t = 2$ , кривая 3 соответствует  $t = 3$ .

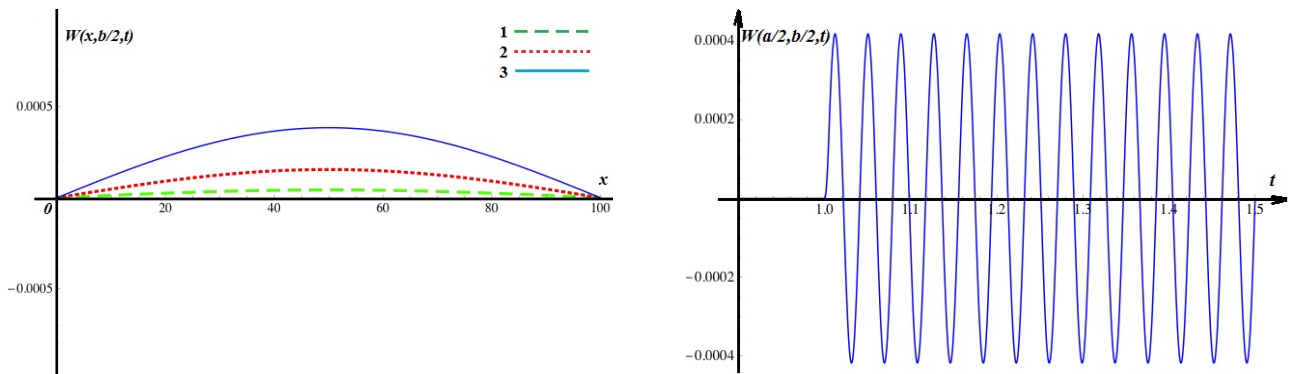


Рисунок 1.22 —  $Bio = 20$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 2,5$ ,  $q_0 = 5$ ,  $T_1^+ = 0$ .

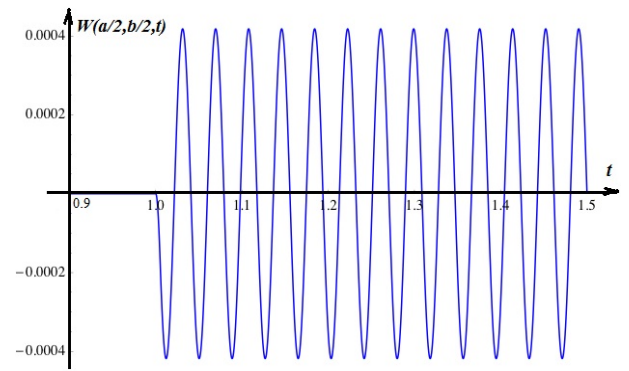
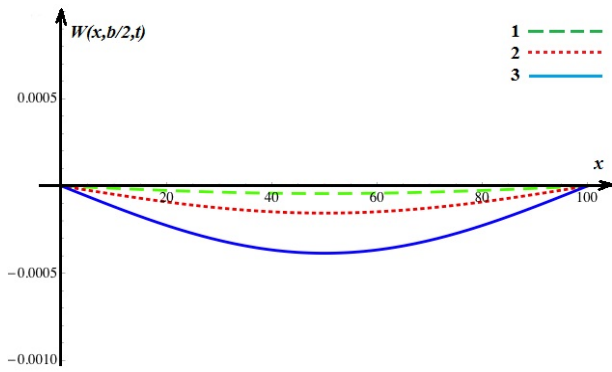


Рисунок 1.23 —  $Bio = 20$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 2,5$ ,  $q_0 = -5$ ,  $T_1^+ = 0$ .

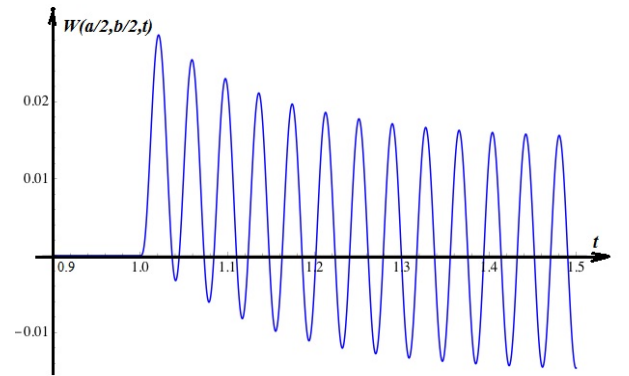
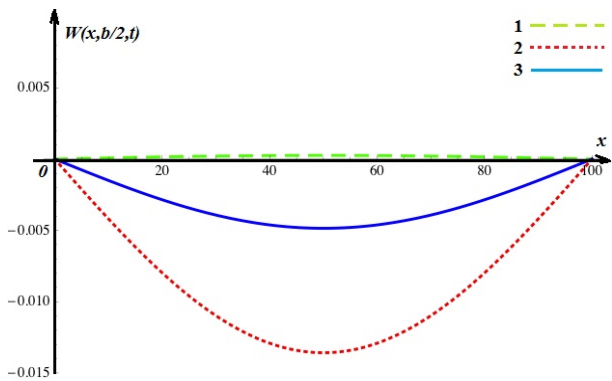


Рисунок 1.24 —  $Bio = 20$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 2,5$ ,  $q_0 = 5$ ,  $T_1^+ = 200$ .

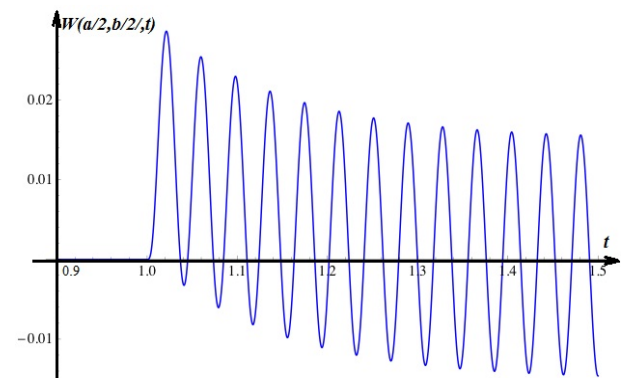
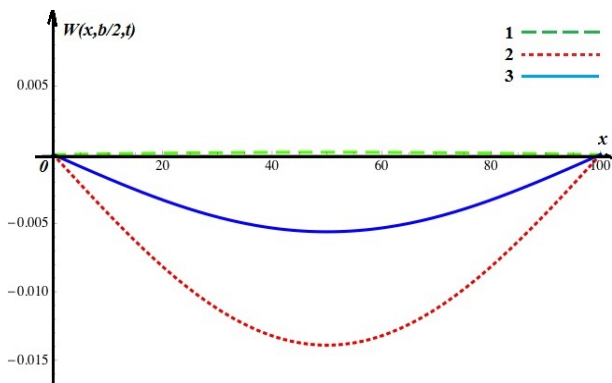


Рисунок 1.25 —  $Bio = 20$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 2,5$ ,  $q_0 = -5$ ,  $T_1^+ = 200$ .

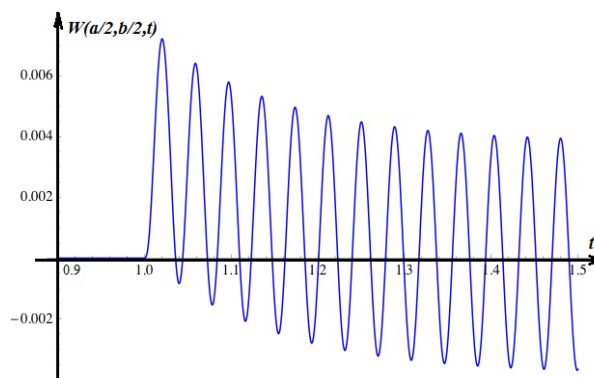
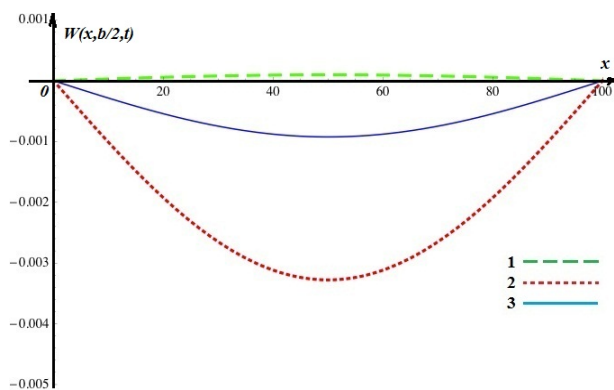


Рисунок 1.26 —  $Bio = 20$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 2,5$ ,  $q_0 = 5$ ,  $T_1^+ = 50$ .

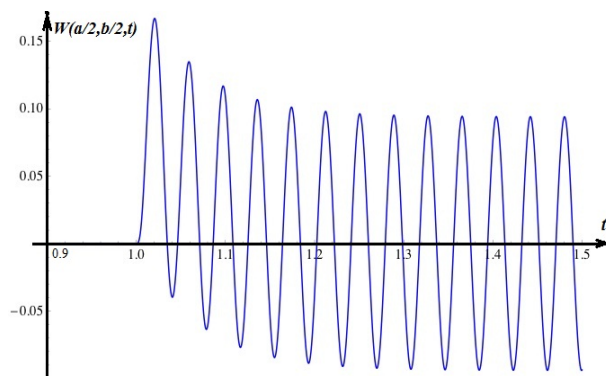
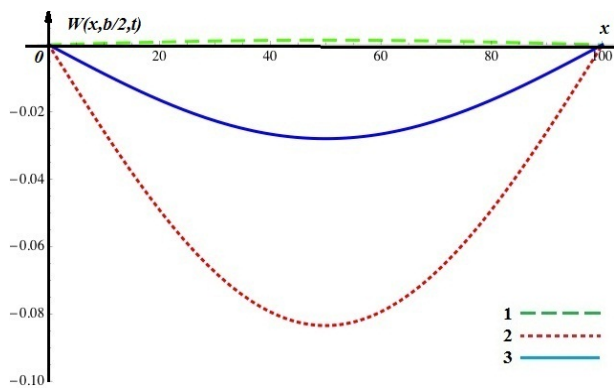


Рисунок 1.27 —  $Bio = 500$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 2,5$ ,  $q_0 = 5$ ,  $T_1^+ = 50$ .

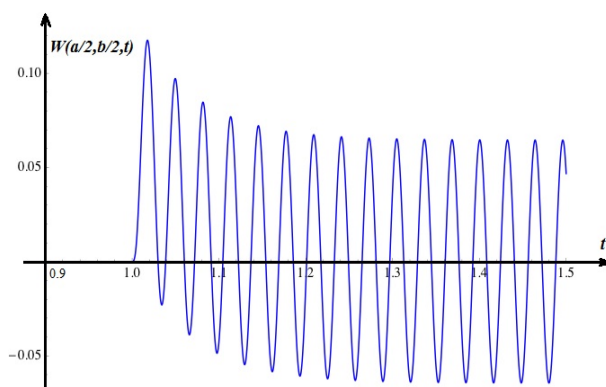
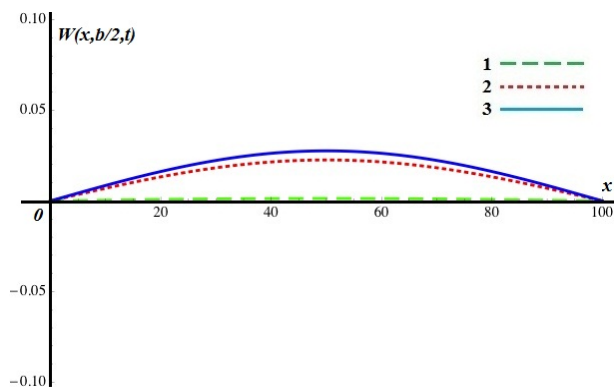


Рисунок 1.28 —  $Bio = 500$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$ ,  $q_0 = 5$ ,  $T_1^+ = 50$ .



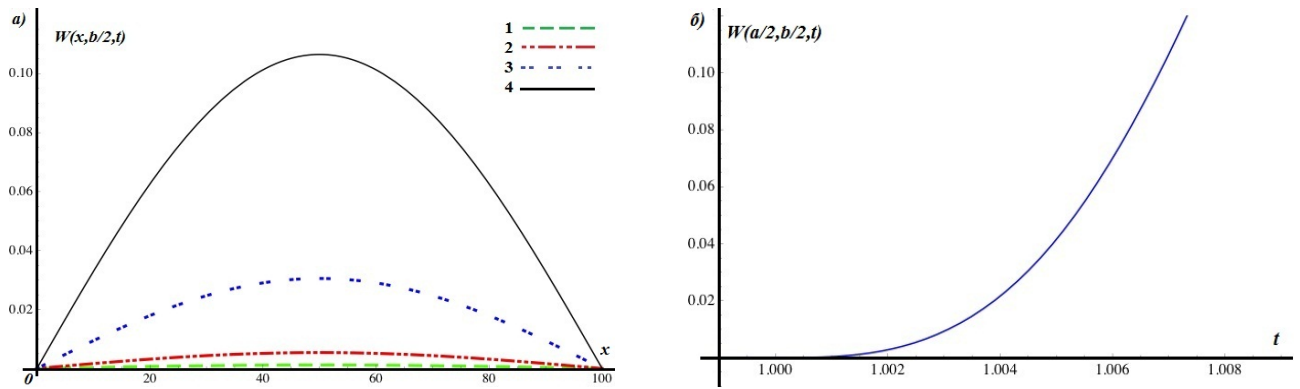


Рисунок 1.29 —  $Bio = 500$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 2,5$ ,  $q_0 = 5$ ,  $T_1^* = 200$ ; а)  $w(x, \frac{b}{2}, t)$  для различных значений времени: 1- соответствует  $t = 1,0015$ , 2 -  $t = 1,0025$ , 3 -  $t = 1,0045$ , 4 -  $t = 1,007$ , б)  $w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t)$ ,  $t \in [0,999; 1,01]$

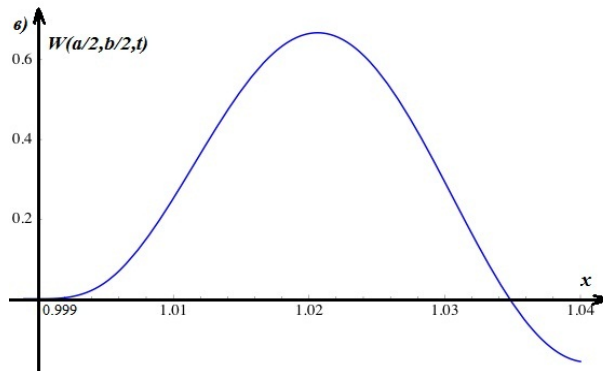


Рис. 1.29: в)  $w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t)$ ,  $t \in [0,999; 1,04]$ .

Количественный анализ показал:

- при отсутствии перепада температуры по толщине колебания симметричны относительно временной оси и происходят с постоянной амплитудой, рисунки 1.24, 1.25. При этом как и следовало ожидать, знак прогиба, при прочих равных условиях, зависит от направления сосредоточенной силы только при отсутствии температурного скачка, рисунки 1.22, 1.23;
- наличие скачкообразного изменения температуры (параметр  $T_1^*$ ) на временном интервале  $[1,4 - 1,0]$  сек нарушает отмеченную симметрию, колебания асимметричны и при  $t > 1,4$  сек симметрия восстанавливается. С увеличением параметра Био размахи колебаний значительно возрастают, как видно из рисунков 1.26, 1.27, при той же частоте;
- величины размахов колебаний незначительно уменьшаются с увеличением относительной стрелы подъема оболочки – параметр  $\frac{\tilde{\delta}}{h}$ , этот процесс сопровождается увеличением частоты колебаний, рисунки 1.27, 1.28;

- после прекращения кратковременного температурно-силового воздействия прогибы оболочки продолжают расти в течении временного промежутка почти в 4 раза превосходящего временной интервал нагружения, рисунок 1.29.

### 1.3 Колебания пологих оболочек (цилиндрической и постоянного кручения) при внезапном воздействии теплового потока

В рамках модели типа Лява рассматриваются прямоугольные в плане пологие оболочки (постоянного кручения и цилиндрическая) с основными поверхностями и краями, теплоизолированными до определенного момента времени ( $t = 0$ ), начиная с которого происходит мгновенное нарушение термоизоляции по всей внешней поверхности оболочки [49].

На основании замкнутых интегралов нестационарной термоупругости пологих оболочек определяется их динамическая реакция на мгновенное тепловое воздействие в зависимости от параметров, характеризующих геометрию оболочки.

Температурное поле, при сделанных выше предположениях, будет функцией двух переменных – пространственной  $z$  и временной  $t$  координат. Решение начально-краевой задачи теплопроводности (в силу пологости оболочек кривизна в уравнениях теплопроводности не учитывается)

$$\beta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial t}$$

при

$$\begin{aligned} t = 0 \quad \Theta &= \theta_0; \\ z = h/2 \quad \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z} &= q; \\ z = -h/2 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

с помощью преобразований Лапласа, либо методом суперпозиции одинарного тригонометрического ряда с переменными коэффициентами и многочлена, учитывающего характер неоднородности начальных и краевых условий (1.25), запишется [17]

$$\begin{aligned} \Theta(z, t) = \frac{qh}{\lambda} \left( \frac{\beta t}{h^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{z}{h} - \frac{1}{24} - \right. \\ \left. - 2 \sum_k \frac{\cos k\pi}{(k\pi)^2} e^{-\beta \left( \frac{k\pi}{h} \right)^2 t} \cos \left( \frac{k\pi}{2} + \frac{k\pi z}{h} \right) \right) + \theta_0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Здесь  $q$  - тепловой поток постоянной интенсивности,  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности,  $\beta$  - коэффициент температуропроводности,  $h$  - толщина.

Решение несвязной динамической термоупругости пологих оболочек в компонентах поля перемещений  $\bar{U}(u, v, w)$  с учетом структуры температурного поля (1.26) сводится к интегрированию неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$u_{,11} + \frac{1-\nu}{2}u_{,22} + \frac{1+\nu}{2}v_{,12} - [(k_1 + \nu k_2)w]_{,1} - (1-\nu)(k_{12}w)_{,2} = \frac{\gamma h}{gB}u_{,tt},$$

$$\frac{1+\nu}{2}u_{,12} + v_{,22} + \frac{1-\nu}{2}v_{,11} - [(k_2 + \nu k_1)w]_{,2} - (1-\nu)(k_{12}w)_{,1} = \frac{\gamma h}{gB}v_{,tt},$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{12}{h^2} (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2 + 2(1-\nu)k_{12}^2) w - \frac{12}{h^2} (k_1 + \nu k_2) u_{,1} - \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{12}{h^2} (k_2 + \nu k_1) v_{,2} - \frac{12(1-\nu)}{h^2} k_{12} (u_{,2} + v_{,1}) = \\ & = -\alpha(1+\nu) \frac{12}{h^2} (k_1 + k_2) \Theta_0(t) - \frac{\gamma h}{gD} w_{,tt}, \end{aligned}$$

где  $k_1, k_2, k_{12}$  - соответственно кривизны и кручение оболочки,  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $\gamma$  - удельный вес,  $g$  - интенсивность поля тяжести,  $\alpha$  - коэффициент линейного расширения материала,

$$\Theta_0(t) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Theta(z, t) dz. \quad (1.28)$$

1. В случае оболочки постоянного кручения ( $k_1 = 0, k_2 = 0, k_{12} = const$ ) будем предполагать, что она бесконечна вдоль координатной прямой  $Ox$ , края, расположенные по прямым  $y = 0, y = b$  шарнирно закреплены, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial y} - 2k_{12}w = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\Psi(t), \quad (1.29)$$

в начальный момент времени ( $t = 0$ ) термоупругая система находится в покое

$$\bar{U} = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = 0. \quad (1.30)$$

Здесь

$$\Psi(t) = \frac{1+\nu q \alpha}{2 \lambda} \left( 1 + 48 \sum_k \beta_k e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 t} \right),$$

Здесь  $\beta_k = \frac{(1 - \cos k\pi) \cos k\pi}{(k\pi)^2}$ .

Решение системы (1.27) при сделанных предположениях, с помощью подстановки

$$u = (1 - \nu) k_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (1.31)$$

сведем к интегрированию одного дифференциального уравнения шестого порядка относительно функции перемещений  $\Phi(y, t)$

$$\frac{1 - \nu}{2} \frac{gD}{\gamma h} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} - \frac{D}{B} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^4 \partial t^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial t^2} - 2(1 - \nu) k_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial t^4} = 0. \quad (1.32)$$

Краевые и начальные условия (1.29), (1.30) переписутся через функцию  $\Phi(y, t)$  в виде:

при  $y = 0, \quad y = b$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial t^2} = -\Psi(t); \quad (1.33)$$

при  $t = 0$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} = 0, \quad \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2 \partial t} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} = 0. \quad (1.34)$$

Решение неоднородной краевой задачи (1.32), (1.33) будем разыскивать методом суперпозиции одинарного тригонометрического ряда, с переменными по временной координате коэффициентами, и многочлена, учитывающего характер неоднородности краевых условий (1.33):

$$\Phi(y, t) = \sum_K \Phi_K(t) \sin \frac{K\pi y}{b} - \frac{1}{12(1 - \nu)} \Psi(t)(y^4 - 2by^3 + b^3y), \quad (1.35)$$

где коэффициенты ряда  $\Phi_K(t)$  являются решениями обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \Phi_K^{(IV)}(t) + A_1 \frac{gB}{\gamma h} \frac{1}{b^2} \Phi_K^{(II)}(t) + \frac{1 - \nu}{2} \frac{gD}{\gamma h} \frac{gB}{\gamma h} \frac{(K\pi)^6}{b^6} \Phi_K(t) = \\ & = 48 \frac{1 + \nu}{2} \frac{gab}{\lambda} b \frac{\beta}{h^4} \sum_k \beta_k (k\pi)^4 \left( \frac{gB}{\gamma h} A_2 + \frac{2}{1 - \nu} a_K \left( \frac{b}{h} \right)^2 \frac{\beta^2}{h^2} (k\pi)^4 \right) e^{-\beta \left( \frac{k\pi}{h} \right)^2 t}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Здесь введены обозначения

$$A_1 = \frac{(K\pi)^4}{12} \left(\frac{h}{b}\right)^2 + 2(1-\nu)(k_{12}b)^2 + \frac{1-\nu}{2}(K\pi)^2,$$

$$A_2 = a_K \left( \frac{1}{1-\nu} \frac{(K\pi)^4}{6} \left(\frac{h}{b}\right)^2 + 4(k_{12}b)^2 + (K\pi)^2 \right), \quad a_K = \frac{2(1-\cos K\pi)}{(K\pi)^5}.$$

Определяя, стандартным образом фундаментальную систему функций  $\varphi_{Kl}(t)$  для однородного дифференциального уравнения, соответствующего (1.36), запишем его общий интеграл в виде

$$\begin{aligned} \Phi_K(t) = & D_{K1} \cos C_K t + D_{K2} \sin C_K t + D_{K3} \cos \tilde{C}_K t + D_{K4} \sin \tilde{C}_K t + \\ & + \sum_k \tilde{A}_{kK} h^3 e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 t}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

где

$$C_K = \sqrt{\frac{gE}{\gamma h^2}} d_K, \quad d_K = \frac{h}{b} \sqrt{\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left( A_1 - \sqrt{A_1^2 - (1-\nu) \frac{h^2 (K\pi)^6}{6b^2}} \right)},$$

$$\tilde{C}_K = \sqrt{\frac{gE}{\gamma h^2}} \tilde{d}_K, \quad \tilde{d}_K = \frac{h}{b} \sqrt{\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left( A_1 - \sqrt{A_1^2 + (1-\nu) \frac{h^2 (K\pi)^6}{6b^2}} \right)}.$$

Окончательно выражение для функции относительного прогиба  $W(y, t) = w(y, t)/b$  оболочки, испытывающей термодинамический удар, примет вид

$$\begin{aligned} W(y, t) = & -\frac{1-\nu}{2} \sum_K (K\pi)^2 \left( \sum_{l=1}^4 D_{Kl} \varphi_{Kl}(t) + \sum_k \tilde{A}_{kK} e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 t} \frac{h^3}{b^3} \right) \sin \frac{K\pi y}{b} + \\ & + (1-\nu^2) \frac{b^2}{h^2} \sum_K \left( \sum_{l=1}^4 D_{Kl} d_{Kl}^2 \varphi_{Kl}(t) - \frac{h^3}{b^3} \alpha_*^2 \sum_k (k\pi)^4 \tilde{A}_{kK} e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 t} \right) \sin \frac{K\pi y}{b} + \\ & + \frac{(1+\nu)b^3\gamma}{12gE} \ddot{\Psi}(t) \left( \left(\frac{y}{b}\right)^4 - 2\left(\frac{y}{b}\right)^3 + \frac{y}{b} \right) - \frac{b}{2} \Psi(t) \left( \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \frac{y}{b} \right), \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\alpha_* = \frac{\beta}{h} \sqrt{\frac{\gamma}{gE}}; \quad q^* = \frac{q\alpha b}{\lambda};$$

$$\tilde{A}_{Kk} = \frac{\frac{24q^* h}{1-\nu} (k\pi)^4 \beta_k B_{Kk} \alpha_*^2}{\alpha_*^4 (k\pi)^8 + \frac{A_1}{1-\nu^2} (k\pi)^4 \alpha_*^2 \left(\frac{h}{b}\right)^4 + \frac{1-\nu}{24} \left(\frac{h}{b}\right)^{10} \frac{(K\pi)^6}{(1-\nu^2)^2}};$$

$$B_{Kk} = A_2 + \frac{2a_K}{1-\nu} \left(\frac{b}{h}\right)^2 \frac{\gamma h}{gB} \left(\frac{\beta}{h}\right)^2 (k\pi)^4;$$

где  $D_{Kl}$  - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий (1.34), предварительно переписанных через функцию  $\Phi_K(t)$  (в Приложении В приведен код программы позволяющий вычислить  $D_{Kl}$  и построить графики относительного прогиба 1.38).

2. Уравнения динамической термоупругости (1.27) цилиндрической оболочки ( $k_1 = 0, k_{12} = 0, k_2 = const$ ) при тех же предположениях преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{B}{D} k_2^2 w - k_2 \frac{B}{D} \frac{\partial v}{\partial y} = -\alpha(1+\nu) \frac{B}{D} k_2 \Theta_0(t) - \frac{\gamma h}{gD} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

и подстановкой

$$v = k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (1.40)$$

система (1.39) сводится к одному неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных шестого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^4 \partial t^2} + \frac{\gamma h}{gD} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial t^2} - \frac{B}{D} k_2^2 \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\gamma h}{gD} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial t^4} = \\ = -\alpha(1+\nu) k_2 \frac{B}{D} \Theta_0(t). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Краевые и начальные условия переписутся через функцию перемещений при  $y = 0, y = b$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = R_2(1+\nu)\alpha\Theta_0(t), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{gB}{\gamma h} R_2(1+\nu)\alpha\Theta_0(t), \quad \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial t^2} - \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \Psi(t); \quad (1.42)$$

при  $t = 0$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2 \partial t} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} = 0. \quad (1.43)$$

Решение уравнения (1.41), тождественно удовлетворяющее всем краевым условиям (1.42), будем разыскивать в виде

$$\Phi(y, t) = \sum_K \Phi_K(t) \sin \frac{K\pi y}{b} - \Psi(t)f(y) + R_2(1 + \nu)\alpha\Theta_0(t)f''(y) + \quad (1.44)$$

$$+ \frac{gB}{\gamma h} R_2(1 + \nu)\alpha \int_0^t \left( \int_0^t \Theta_0(t) dt \right) dt,$$

где  $R_2 = \frac{1}{k_2}$ ,  $\Theta_0(t) = \frac{qh}{\lambda} \frac{\beta t}{h^2} + \theta_0$ .

Функция относительного прогиба термоупругой системы, на основании аналогичных преобразований, запишется

$$W(y, t) = - \sum_K \left( (K\pi)^2 \left( \sum_{l=1}^4 C_{Kl} \varphi_{Kl}(t) + \sum_k \tilde{D}_{Kk} e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 t} \right) \right) \sin \frac{K\pi y}{b} +$$

$$+ (1 - \nu^2) \sum_K \left( \sum_{l=1}^4 d_{Kl}^2 C_{Kl} \varphi_{Kl}(t) - \frac{b^2}{h^2} \alpha_*^2 \sum_k (k\pi)^4 \tilde{D}_{Kk} e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 t} \right) \sin \frac{K\pi y}{b} + (1.45)$$

$$+ b^3(1 - \nu^2) \frac{\gamma}{gE} \ddot{\Psi}(t) \left( \left(\frac{y}{b}\right)^4 - 2 \left(\frac{y}{b}\right)^3 + \frac{y}{b} \right) - \frac{b}{2} \Psi(t) \left( \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \frac{y}{b} \right).$$

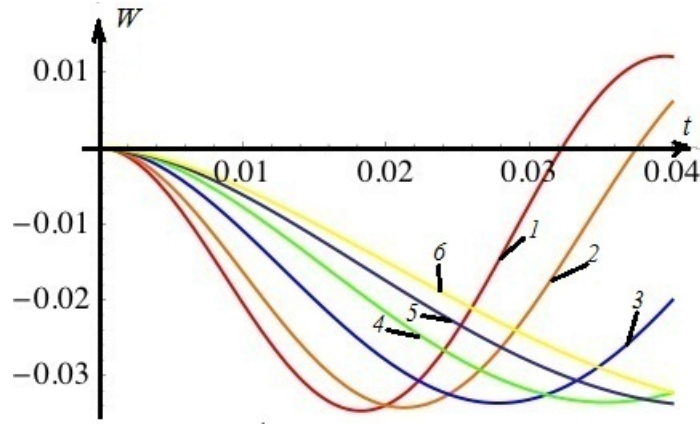


Рисунок 1.30 — Прогиб  $W\left(\frac{b}{2}, t\right)$  для оболочки постоянного кручения.

На рисунках 1.30 - 1.33 приводятся графики функций относительного прогиба (1.38) и (1.45) при  $y = b/2$  на двух временных интервалах с момента термодинамического удара. Во всех случаях отмечаются следующие закономерности:

1. параметр кручения  $k_{12}$  существенно влияет на момент времени возникновения наибольшего прогиба (рисунок 1.30; кривым 1-6 соответствуют параметры кручения  $k_{12}$ , равные 0; 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05). При прочих равных условиях наибольший прогиб раньше возникает у пластинки ( $k_{12} = 0$ );

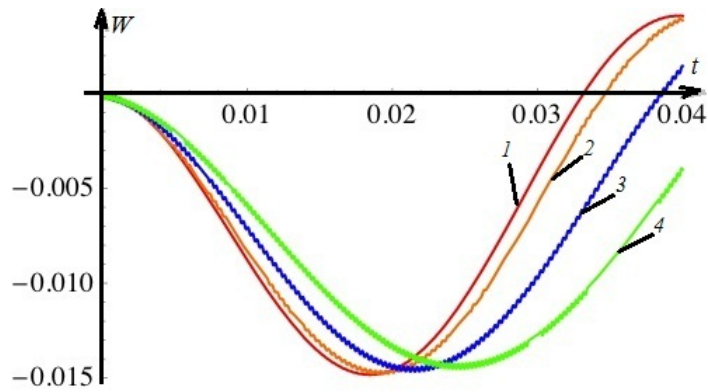


Рисунок 1.31 — Прогиб  $W(\frac{b}{2}, t)$  для цилиндрической оболочки.

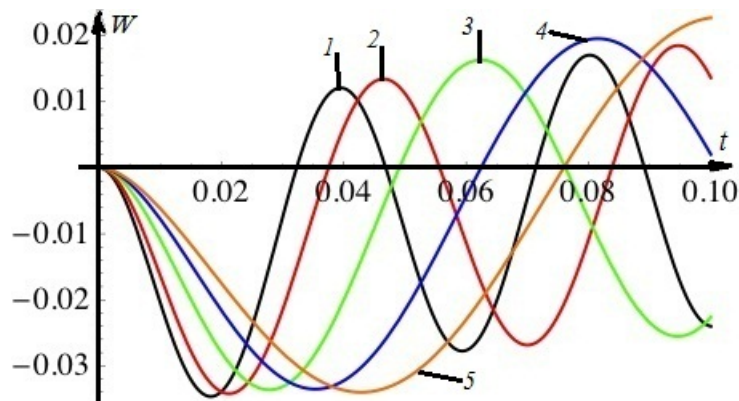


Рисунок 1.32 — Прогиб  $W(\frac{b}{2}, t)$  для оболочки постоянного кручения.

2. в случае цилиндрической оболочки (рисунок 1.31; кривым 1-4 соответствуют кривизны  $k_2$ , равные 0,01; 0,02; 0,03; 0,04.) время наступления наибольшего прогиба менее чувствительно к параметру кривизны  $k_2$ , а временной интервал максимальных прогибов значительно меньше временного интервала для оболочки постоянного кручения;
3. с увеличением значений параметров  $k_{12}$  и  $k_2$  динамические прогибы оболочек при «замороженном» моменте времени значительно убывают (на рисунке 1.32 кривым 1-5 соответствуют параметры кручения  $k_{12}$ , равные 0; 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; на рисунке 1.33 кривым 1-5 соответствуют кривизны  $k_2$ , равные 0,001; 0,01; 0,02; 0,03; 0,04). Величина максимального прогиба оболочек мало чувствительна к кривизне и кручению на временном отрезке  $[0; 0,05]$  при той же тенденции к убыванию;
4. при прочих равных условиях значение динамического прогиба цилиндриче-



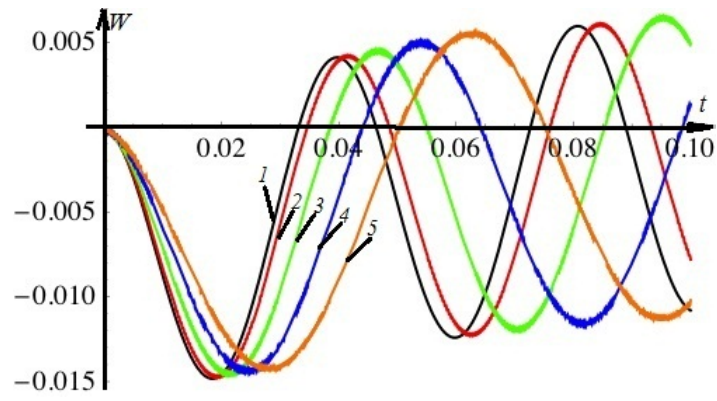


Рисунок 1.33 — Прогиб  $W(\frac{b}{2}, t)$  для цилиндрической оболочки.

ской оболочки во всех случаях, практически, в два раза меньше прогиба оболочки постоянного кручения.

## 2 Термоупругость геометрически нерегулярных пластин под действием быстропеременных температурных и силовых нагрузок

В этой главе на основании замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений несвязной термоупругости геометрически нерегулярных пластин, анализируется влияние геометрических и термомеханических параметров на термоупругое поведение подкрепленных пластин под действием быстропеременных по пространственным и временной координатам температурных и силовых воздействий.

Результаты приведенные в этой главе частично содержатся в работах [26], [92], [94], [95].

### 2.1 Влияние кратковременного воздействия сосредоточенной силы и скачкообразного повышения температуры среды на термоупругое поведение геометрически нерегулярной пластинки в условиях конвективного теплообмена

Рассмотрим геометрически нерегулярную изотропную пластину в условиях конвективного теплообмена через основные поверхности с окружающей средой. В некоторый момент времени  $t_1$  в точке с координатами  $(x_1, y_1)$  прикладывается сосредоточенная сила  $\bar{q}$ , действие которой продолжается до момента  $t_2$ . На этом же временном интервале  $|t_2 - t_1|$  происходит скачкообразное изменение температуры окружающей среды на постоянную величину  $T_1^+$ . Предполагается, что пластинка испытывает линейное демпфирование. Ввиду отсутствия внутренних источников тепла температурное поле принимается линейным по толщине  $h$  и высоте  $h_i$  подкрепляющих ребер, расположенных симметрично относительно срединной плоскости пластинки  $\Theta(x, y, z) = \theta_0(x, y) + \frac{z}{h}\theta_1(x, y, )$ . Решение несвязной термодинамической задачи сводится к интегрированию сингулярного дифференциального уравнения [18], [58]

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma h}{gD} \ddot{w} + \frac{\mu}{D} \dot{w} + \nabla^2 \nabla^2 w + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{D} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta(x - \tilde{x}_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\beta}_i}{D} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \Big|_{x=\tilde{x}_i} \frac{d\delta}{dx} + \quad (2.1) \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma h_i a_i}{gD} \ddot{w} \delta(x - \tilde{x}_i) = \frac{q_0 a_1 b_1}{D} \delta(x - x_1, y - y_1) (H(t - t_1) - H(t - t_2)) - \frac{1+\nu}{h} \alpha \nabla^2 \theta_1, \end{aligned}$$

где  $\mu$  - коэффициент демпфирования,  $\frac{\beta_i}{D} = \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 a_i$ ,  $\frac{\tilde{\beta}_i}{D} = 2(1 - \nu)\frac{\beta_i}{D}$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $\Phi_{3i} = 1 + 3\frac{h}{h_i} + 3\left(\frac{h_i}{h}\right)^2$ ,  $\theta_1(x, y)$  - температурная функция, которая является интегралом дифференциальных уравнений [19], [135]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta}\theta_{0,t} - \nabla^2\theta_0 + \frac{\kappa^+}{\lambda h}\theta_0 + \frac{\kappa^-}{2\lambda h}\theta_1 + \sum_i \left[ -\frac{h_i}{h}(\theta_{0,1}\varphi_i)_{,1} - \frac{h_i}{h}\theta_{0,22}\varphi_i + \frac{1}{2}\frac{h_i}{h}\frac{\kappa^-}{\lambda h}\varphi_i\theta_1 \right] + \\ \sum_i \left[ \frac{1}{4}\frac{h_i}{h}\frac{\kappa_i^+}{\lambda}\theta_0 + \frac{1}{16}\frac{\kappa_i^-}{\lambda}H_{2i}\theta_1 - \frac{1}{4}\frac{h_i}{h}\left(T^+\frac{\varkappa_i^+}{\lambda} + T^-\frac{\varkappa_i^-}{\lambda}\right) \right] \tilde{\delta}_i = \quad (2.2) \\ = \left(T^+\frac{\varkappa^+}{\lambda h} + T^-\frac{\varkappa^-}{\lambda h}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta}\theta_{1,t} - \nabla^2\theta_1 + \left(\frac{12}{h^2} + 3\frac{\kappa^+}{\lambda h}\right)\theta_1 - 6\frac{\kappa^-}{\lambda h}\theta_0 + \sum_i \left[ -\left(\frac{h_i}{h}\right)^3 \Phi_{3i}^*(\theta_{1,1}\varphi_i)_{,1} - \right. \\ \left. - \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 \Phi_{3i}^*\varphi_i\theta_{1,22} + \left(\frac{12}{h^2} + 3\frac{\kappa^+}{\lambda h}\left(\frac{h_i}{h}\right)^2\right)\varphi_i\theta_1 + 6\frac{h_i}{h}\frac{\kappa^-}{\lambda h}\varphi_i\theta_0 + \quad (2.3) \right. \\ \left. + 6\frac{h_i}{h}\left(T^-\frac{\varkappa^-}{\lambda h} - T^+\frac{\varkappa^+}{\lambda h}\right)\varphi_i \right] + \sum_i \left\langle \frac{3}{4}H_{2i}\frac{\kappa_i^-}{\lambda}\theta_0 + \frac{1}{4}H_{3i}\frac{\kappa_i^+}{\lambda}\theta_1 - \right. \\ \left. - \frac{3}{4}H_{2i}\left(T^+\frac{\varkappa_i^+}{\lambda} - T^-\frac{\varkappa_i^-}{\lambda}\right) \right\rangle \tilde{\delta}_i = \frac{6}{\lambda h}(T^+\varkappa^+ - T^-\varkappa^-). \end{aligned}$$

Здесь обозначено:  $\frac{h_i}{h}$  - относительная высота ребер и  $\frac{h_i}{h} \leq 5$  [18],  $\varkappa^\pm$  - коэффициенты теплоотдачи с основных плоскостей пластинки и торцов ребер,  $T^\pm$  - температуры окружающей среды со стороны основных поверхностей,  $\varphi_i(x, \tilde{x}_i, a_i) = H\left(x - \left(\tilde{x}_i - \frac{a_i}{2}\right)\right) - H\left(x - \left(\tilde{x}_i + \frac{a_i}{2}\right)\right)$ ,  $\lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\varphi_i}{a_i} \rightarrow \delta(x - \tilde{x}_i)$ ,  $a_i$  - ширина  $i$ -го ребра,  $H_{li} = \left(1 + \frac{h_i}{h}\right)^l - 1$  ( $l = 1, 2$ ),  $\tilde{\delta}_i = -\delta\left(x - \left(\tilde{x}_i - \frac{a_i}{2}\right)\right) + \delta\left(x - \left(\tilde{x}_i + \frac{a_i}{2}\right)\right)$ ,  $\Phi_{2i}^* = 1 + 2\frac{h}{h_i}$ ,  $\Phi_{3i}^* = 12 + 6\frac{h}{h_i} + 3\left(\frac{h}{h_i}\right)^2$ ,  $\kappa^\pm = \varkappa^+ \pm \varkappa^-$ ,  $\kappa_i^\pm = \varkappa_i^+ \pm \varkappa_i^-$ ,  $n$  - число ребер.

Совокупность уравнений (2.1), (2.2), (2.3) образует систему несвязной термоупругости геометрически нерегулярной пластинки в рамках модели типа Лява и теории теплопроводности Фурье. Следует отметить, что: 1) если коэффициенты теплопроводности одинаковы, то система сингулярных дифференциальных уравнений (2.2), (2.3) распадается на два самостоятельных уравнения относительно температурных функций  $\theta_p(x, y)$  ( $p = 0, 1$ ); 2) во многих технических приложениях относительная ширина подкрепляющих элементов мала  $\frac{a_i}{a} \leq 0,01$ . По этой причине в уравнениях системы (2.2), (2.3) на основании гипотезы «сжатых ребер»

[117], отсутствия внутренних источников тепла и симметричного расположения ребер относительно срединной плоскости пластинки слагаемые содержащие  $\delta$ -функции можно опустить [18], [19]. Тогда, при определении температурной функции  $\theta_1(x, y, t)$ , для пластинки со стороны внешней плоскости которой происходит скачкообразное изменение температуры окружающей среды на малом временном интервале  $|t_2 - t_1| \ll 1$ , следует исходить из уравнения (1.17), решение которого имеет вид (1.18).

1. Решение несвязной термоупругости геометрически нерегулярной пластинки при однородных краевых условиях (шарнирное опирание)

$$\begin{aligned} x = 0, \quad x = a : \quad w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad \theta_1 = 0; \\ y = 0, \quad y = b : \quad w = 0, \quad M_{22} = 0, \quad \theta_1 = 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

будем разыскивать в виде двойного тригонометрического ряда с переменными, по временной координате, коэффициентами

$$w(x, y, t) = \sum_{km} w_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (2.5)$$

Коэффициенты  $w_{km}(t)$ , на основании процедуры Галеркина, являются интегралами дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_{km}}{dt^2} + \frac{\mu g}{\gamma h} \frac{1}{H_i} \frac{dw_{km}}{dt} + \frac{gD}{\gamma h a^4} \frac{\tilde{H}_i}{H_i} w_{km} = \\ = 4 \frac{q_0 g}{\gamma h} \frac{1}{H_i} \frac{a_1 b_1}{ab} \sin^2 \frac{k\pi x_1}{a} \sin^2 \frac{m\pi y_1}{b} \langle H(t - t_1) - H(t - t_2) \rangle + \\ + \frac{1 + \nu}{h} \frac{gD}{\gamma h a^2} \frac{1}{H_i} L_{km} \alpha \vartheta_{km}(t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} L_{km} &= (k\pi)^2 + \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2, \quad H_i = 1 + 2 \frac{h_i}{h} \frac{a_i}{a} \sin^2 \frac{k\pi \tilde{x}_i}{a}, \\ \tilde{H}_i &= L_{km}^2 + 2 \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^4 \Phi_{3i} \left( \frac{h_i}{h} \right)^3 \frac{a_i}{a} \sin^2 \frac{k\pi \tilde{x}_i}{a} + \\ &+ 4 (k\pi)^2 \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 (1 - \nu) \Phi_{3i} \left( \frac{h_i}{h} \right)^3 \frac{a_i}{a} \cos^2 \frac{k\pi \tilde{x}_i}{a}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

При выполнении неравенства

$$4 \frac{gD}{\gamma h a^4} \frac{\tilde{H}_i}{H_i} > \left( \frac{\mu g}{\gamma h H_i} \right)^2 \quad (2.8)$$

фундаментальная система функций для однородного дифференциального уравнения соответствующего (2.6) запишется

$$\varphi_{km}^1(t) = e^{-\tilde{\mu}t} \sin(K_{km}t), \quad \varphi_{km}^2(t) = e^{-\tilde{\mu}t} \cos(K_{km}t), \quad (2.9)$$

здесь

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu g}{2\gamma h H_i}, \quad K_{km} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h a^4} \sqrt{4 \frac{\tilde{H}_i}{H_i} - 12(1 - \nu^2) \frac{\mu^2 g}{\gamma E} \left(\frac{a}{h}\right) \frac{1}{H_i^2}}}. \quad (2.10)$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (2.6) запишется в виде

$$\begin{aligned} w_{km}(t) = & (C_{km}^1 \sin(K_{km}t) + C_{km}^2 \cos(K_{km}t)) e^{-\tilde{\mu}t} + A_{km}^3 + B_{km}^3 e^{-\frac{\beta S_{km} t}{a^2}} + \\ & + \sum_{l=1}^2 (D_{km1}^l \sin(K_{km}t) + D_{km2}^l \cos(K_{km}t) + \tilde{w}_{km}^l) H(t - t_l) + \\ & + \sum_{l=1}^2 (F_{km1}^l \sin(K_{km}t) + F_{km2}^l \cos(K_{km}t) + \tilde{w}'_{km}^l) H(t - t_l). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Постоянные  $D_{km1}^l$ ,  $D_{km2}^l$ ,  $F_{km1}^l$ ,  $F_{km2}^l$  – являются решениями алгебраических систем

$$\begin{aligned} \sin(K_{km}t_l) e^{-\tilde{\mu}t_l} D_{km1}^l + \cos(K_{km}t_l) e^{-\tilde{\mu}t_l} D_{km2}^l = & (-1)^l \tilde{w}_{km}^l; \\ \left( \cos(K_{km}t_l) e^{-\tilde{\mu}t_l} - \frac{\tilde{\mu}}{K_{km}} \sin(K_{km}t_l) e^{-\tilde{\mu}t_l} \right) D_{km1}^l + & \\ + \left( -\sin(K_{km}t_l) e^{-\tilde{\mu}t_l} - \frac{\tilde{\mu}}{K_{km}} \cos(K_{km}t_l) e^{-\tilde{\mu}t_l} \right) D_{km2}^l = & 0; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \sin(K_{km}t_l) e^{-\tilde{\mu}t_l} F_{km1}^l + \cos(K_{km}t_l) e^{-\tilde{\mu}t_l} F_{km2}^l = & -\tilde{w}'_{km}^l \Big|_{t=t_l}; \\ \left( \cos(K_{km}t_l) e^{-\tilde{\mu}t_l} - \frac{\tilde{\mu}}{K_{km}} \sin(K_{km}t_l) e^{-\tilde{\mu}t_l} \right) F_{km1}^l + & \\ \left( -\sin(K_{km}t_l) e^{-\tilde{\mu}t_l} - \frac{\tilde{\mu}}{K_{km}} \cos(K_{km}t_l) e^{-\tilde{\mu}t_l} \right) F_{km2}^l = & \frac{1}{K_{km}} \left( -\tilde{w}'_{km}^l \right)' \Big|_{t=t_l}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Где обозначено

$$\tilde{w}_{km}^l = (-1)^{l+1} 4 \frac{q_0 a^4}{D} \frac{a_1 b_1}{ab} \frac{1}{\tilde{H}_i} \sin \frac{k\pi x_1}{a} \sin \frac{m\pi y_1}{b}, \quad \tilde{w}'_{km}^l = A_{km}^l + B_{km}^l e^{-\frac{\beta S_{km}}{a^2}(t-t_l)}, \quad (2.14)$$

$$A_{km}^l = \frac{(-1)^{l+1}(1+\nu)L_{km}\alpha E_{km}^3 a^2}{h\tilde{H}_i}, \quad B_{km}^l = \frac{(-1)^l \frac{1+\nu}{h} \frac{gD}{\gamma h a^2} \frac{L_{km}}{H_i} \alpha E_{km}^3}{\left(\frac{\beta S_{km}}{a^2}\right)^2 - \frac{\mu g}{\gamma h H_i} \frac{\beta S_{km}}{a^2} + \frac{gD}{\gamma h a^4} \frac{\tilde{H}_i}{H_i}}, \quad (2.15)$$

$$A_{km}^3 = \frac{1+\nu}{h} \frac{a^2 L_{km} \alpha E_{km}^2}{\tilde{H}_i}, \quad B_{km}^3 = \frac{\frac{1+\nu}{h} \frac{gD}{\gamma h a^2} \frac{L_{km}}{H_i} \alpha E_{km}^1}{\left(\frac{\beta S_{km}}{a^2}\right)^2 - \frac{\mu g}{\gamma h H_i} \frac{\beta S_{km}}{a^2} + \frac{gD}{\gamma h a^4} \frac{\tilde{H}_i}{H_i}}.$$

Постоянные интегрирования  $C_{km}^l$  ( $l = 1, 2$ ) определяются из начальных условий, согласно которым при  $0 \leq t < t_1$  пластина находилась в покое  $w = 0$ ,  $w_{,t} = 0$ .

2. Задача значительно усложняется в случае неоднородных краевых условий. Предположим, что на краях гладкой пластинки поддерживается постоянный по толщине перепад температуры  $\tilde{\theta}_1$ , тогда краевые условия (2.4) переписутся через функцию прогиба в виде

$$\text{при } x = 0, x = a : w = 0, w_{,11} = -\frac{1+\nu}{h} \alpha \tilde{\theta}_1, \theta_1 = \tilde{\theta}_1, \quad (2.16)$$

$$\text{при } y = 0, y = a : w = 0, w_{,22} = -\frac{1+\nu}{h} \alpha \tilde{\theta}_1, \theta_1 = \tilde{\theta}_1. \quad (2.17)$$

Температурная функция  $\theta_1$  в этом случае запишется

$$\theta_1(x, y, t) = \sum_{km} \vartheta_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} + \tilde{\theta}_1,$$

где  $\vartheta_{km}(t)$  определяется формулой (1.18) в которой, предварительно, подчеркнутое слагаемое следует заменить на

$$6 \frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{\Delta T_{km}}{S_{km}} - \left( 6 \frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a}{h} + 12 \left( \frac{a}{h} \right)^2 \right) \frac{e_{km}}{S_{km}} \tilde{\theta}_1.$$

Определить функцию  $f(x, y)$  тождественно удовлетворяющую всем условиям (2.16), (2.17) и искать решение термодинамической задачи в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{km} w_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} + f(x, y) \quad (2.18)$$

не представляется возможным. По этой причине решение будем разыскивать в виде, тождественно удовлетворяющем только условиям (2.16)

$$w(x, y, t) = \sum_{km} w_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} + \sum_k f_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a} - \frac{1+\nu}{2h} \alpha \tilde{\theta}_1 (x^2 - ax), \quad (2.19)$$

где

$$f_k(y) = \sum_{l=0}^3 A_l^k y^l. \quad (2.20)$$

Подстановка (2.19) в краевые условия (2.17) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0 : \quad \sum_k A_0^k \sin \frac{k\pi x}{a} &= \frac{1 + \nu}{2h} \alpha \tilde{\theta}_1 (x^2 - ax); \\ \sum_k A_2^k \sin \frac{k\pi x}{a} &= -\frac{1 + \nu}{2h} \alpha \tilde{\theta}_1; \\ \text{при } y = b : \quad \sum_k \sum_{l=0}^3 A_l^k b^l \sin \frac{k\pi x}{a} &= \frac{1 + \nu}{2h} \alpha \tilde{\theta}_1 (x^2 - ax) \\ \sum_k (A_2^k + 3A_3^k b) \sin \frac{k\pi x}{a} &= -\frac{1 + \nu}{2h} \alpha \tilde{\theta}_1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Раскладывая правые части равенств (2.21) в тригонометрические ряды получим неоднородную алгебраическую систему для коэффициентов  $A_l^k$

$$A_0^k = b_k^2; \quad A_2^k = -\frac{b_k^0}{2}; \quad 2A_2^k + 6A_3^k = -b_k^0; \quad \sum_{l=0}^3 A_l^k = b_k^2. \quad (2.22)$$

На основании решений этой системы выражение для  $f_k(y)$  запишется

$$\begin{aligned} f_k(y) &= -\frac{1 + \nu}{h} \frac{a^2}{2} \left( \frac{\cos k\pi}{k\pi} + \frac{4(1 - \cos k\pi)}{(k\pi)^3} \right) \alpha \tilde{\theta}_1 + \\ &+ \frac{1 + \nu}{h} \frac{(1 - \cos k\pi)}{2k\pi} \alpha \tilde{\theta}_1 b y - \frac{1 + \nu}{h} \frac{(1 - \cos k\pi)}{2k\pi} \alpha \tilde{\theta}_1 y^2. \end{aligned}$$

Структуру функции  $w(x, y, t)$ , по пространственным переменным можно считать известной, что дает возможность при определении дифференциальных уравнений для коэффициентов  $w_{km}(t)$  в аппроксимации (2.19) исходить, при отсутствии ребер, из метода двойных тригонометрических рядов либо, в случае дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами (2.1), обращаться к процедуре Галеркина.

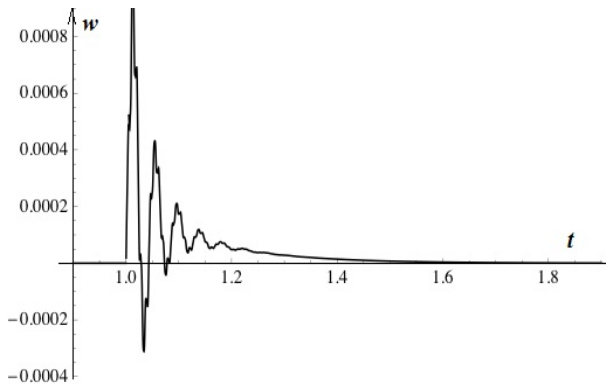


Рисунок 2.1 —  $w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right)$ .

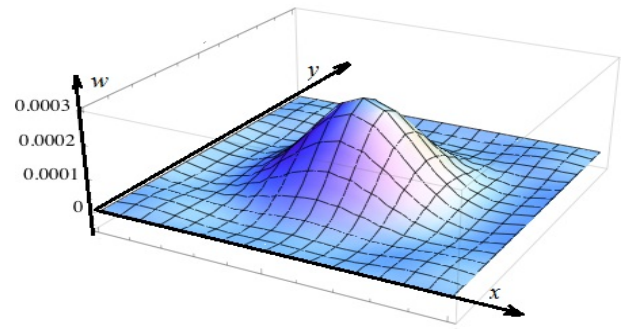


Рисунок 2.2 —  $w(x, y, 1.0025)$ .

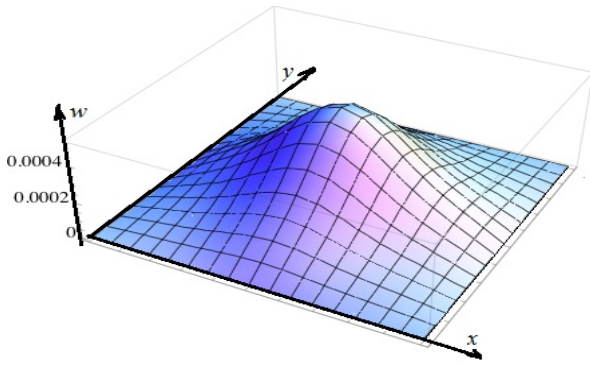


Рисунок 2.3 —  $w(x, y, 1.0053)$ .

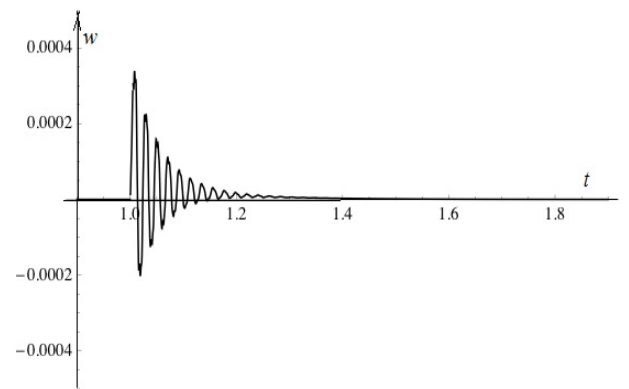


Рисунок 2.4 —  $w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right)$ .

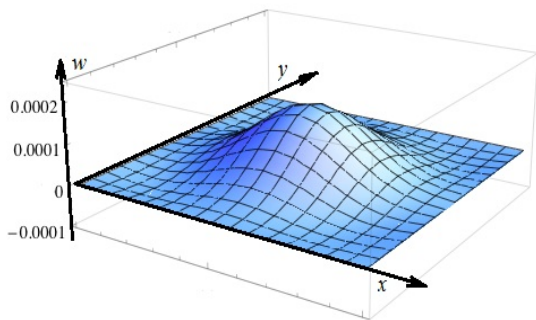


Рисунок 2.5 —  $w(x, y, 1.0025)$ .

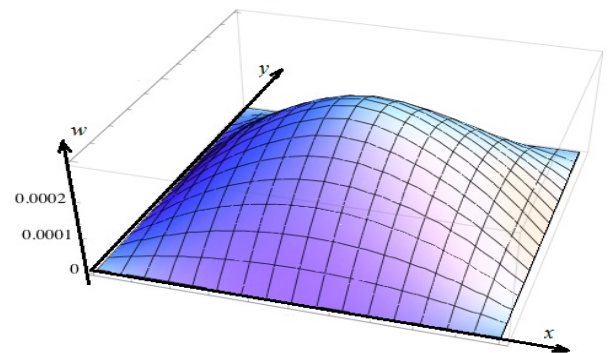


Рисунок 2.6 —  $w(x, y, 1.0053)$ .

На рисунках 2.1 - 2.16 приводятся изображения поверхностей прогибов тер-



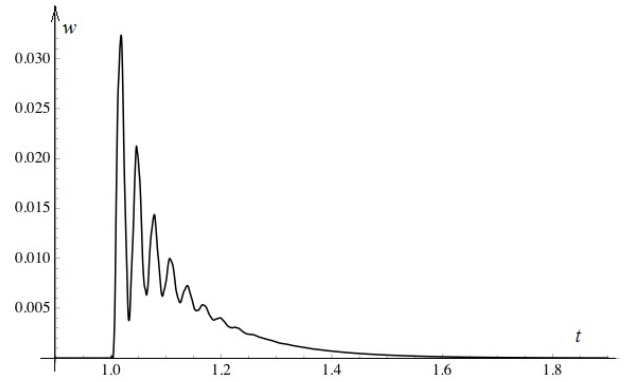
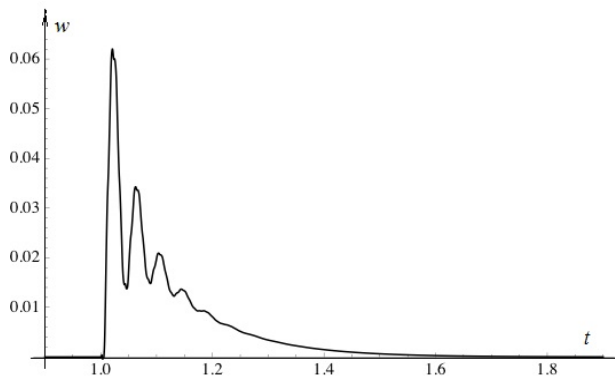


Рисунок 2.7 —  $w(x_1, y_1, t)$ ,  $Bio = 100$ ,  $\frac{h_i}{h} = 5$ ,  $n = 0$ . Рисунок 2.8 —  $w(x_1, y_1, t)$ ,  $Bio = 100$ ,  $\frac{h_i}{h} = 5$ ,  $n = 1$ .

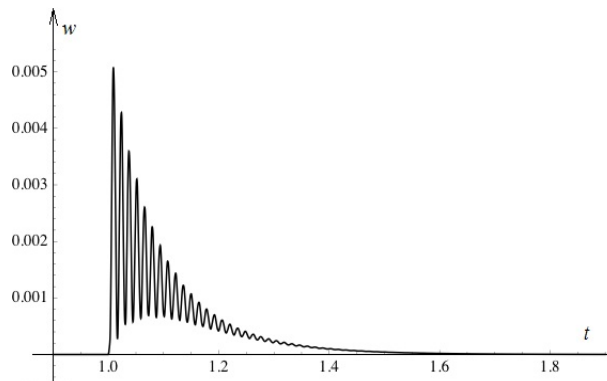


Рисунок 2.9 —  $w(x_1, y_1, t)$ ,  $Bio = 100$ ,  $\frac{h_i}{h} = 5$ ,  $n = 10$ .

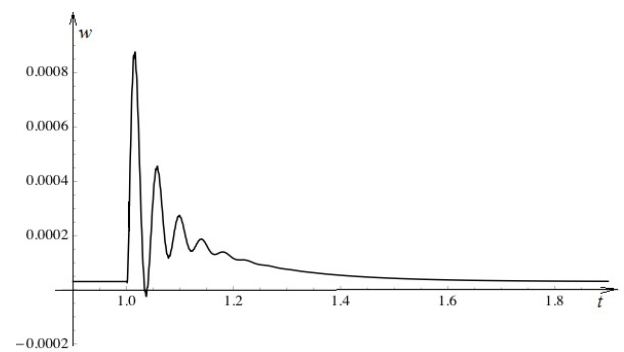
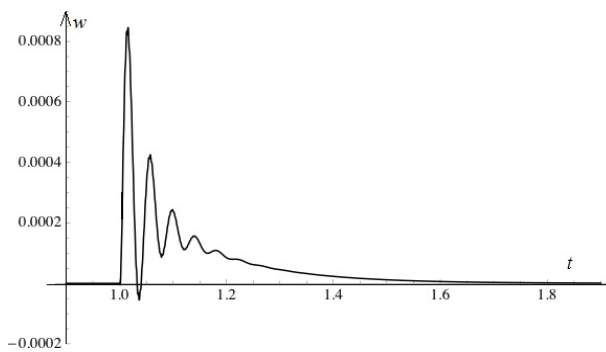


Рисунок 2.10 —  $w\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, t\right)$ ,  $Bio = 1$ ,  $\tilde{\theta}_1 = 0$ . Рисунок 2.11 —  $w\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, t\right)$ ,  $Bio = 1$ ,  $\tilde{\theta}_1 = 20$ .

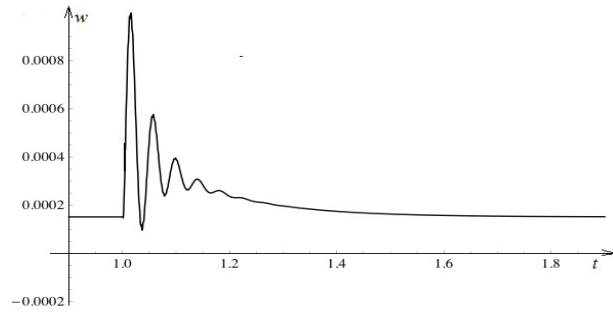


Рисунок 2.12 —  $w\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, t\right)$ ,  $Bio = 1$ ,  
 $\tilde{\theta}_1 = 100$ .

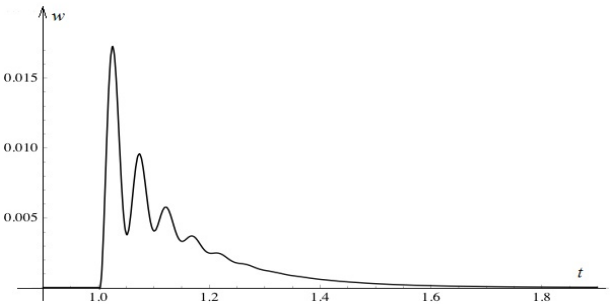
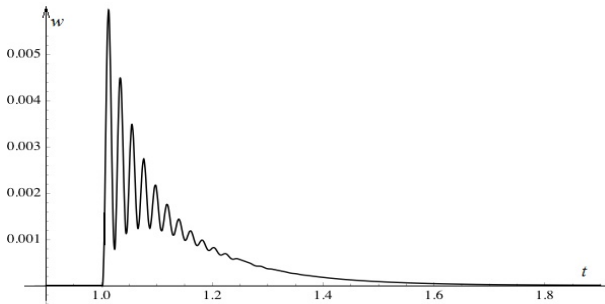


Рисунок 2.13 —  $w\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, t\right)$ ,  $Bio = 50$ ,  $\tilde{\theta}_1 = 100$ ,  $\frac{a}{b} = 1$ ,  $n = 3$ .  
 Рисунок 2.14 —  $w\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, t\right)$ ,  $Bio = 50$ ,  $\tilde{\theta}_1 = 100$ ,  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ ,  $n = 3$ .

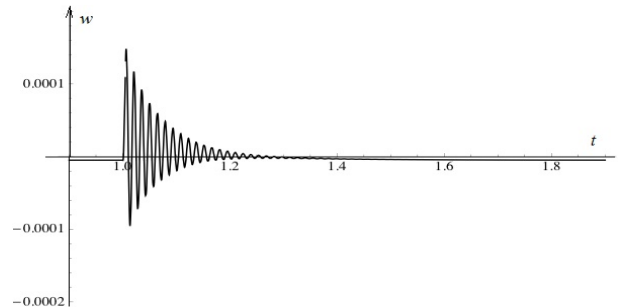
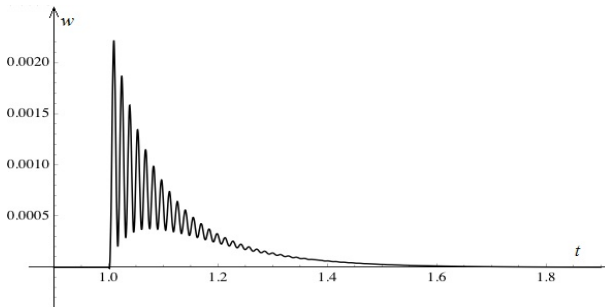


Рисунок 2.15 —  $w\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, t\right)$ ,  $Bio = 50$ ,  $\tilde{\theta}_1 = 100$ ,  $\frac{a}{b} = 1$ ,  $n = 9$ .  
 Рисунок 2.16 —  $w\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, t\right)$ ,  $Bio = 1$ ,  
 $\tilde{\theta}_1 = 100$ ,  $\frac{a}{b} = 1$ ,  $n = 9$ .

моупругой системы и графики движения точек срединной плоскости во времени при различных значениях относительной высоты ребер, их числа, величины температурного скачка, числа  $Bio$  и при фиксированных значениях параметров:

$\mu = 0,00007$ ;  $(x_1, y_1) = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ ,  $q_0 = 10$ ,  $T_0^+ = T^- = 20$ ,  $t_1 = 1$  сек,  $t_2 = 1,005$  сек,  $\frac{h}{a} = 0,005$ .

На рисунках 2.1 - 2.6 изображены поверхности прогиба гладкой (рисунки 2.1 - 2.3  $\frac{a}{b} = 1$ ,  $Bio = 0,5$ ,  $T_1^+ = 100$ .) и ребристой (рисунки 2.4 - 2.6  $\frac{a}{b} = 1$ ,  $\frac{h_i}{h} = 2$ ,  $Bio = 0,5$ ,  $T_1^+ = 100$ ,  $n = 3$ .) пластинки в различные моменты времени близких к верхней границе интервала температурно-силовых воздействий.

Количественный анализ полученных решений выявил следующие закономерности в отклике термоупругой системы на изменения перечисленных параметров:

1. С увеличением числа ребер (как и их жесткости на изгиб и кручение) размахи колебаний уменьшаются, частота значительно возрастает (рисунки 2.7 - 2.9). Следует отметить, что в термостатической постановке задачи увеличение изгибной жесткости ребер как и их числа ведет к росту прогиба, а увеличение жесткости на кручение к уменьшению прогиба, при прочих равных условиях;
2. При наличии на краях пластинки перепада температуры по толщине асимметричные затухающие колебания происходят около прямой параллельной временной оси. Расстояние между этими прямыми зависит от величины перепада (рисунки 2.10 - 2.12);
3. Существенное влияние на частоту и размахи колебаний ребристой пластинки оказывает параметр  $a/b$  (рисунки 2.13, 2.14) с уменьшением которого размахи колебаний возрастают, при этом частота колебаний существенно уменьшается. Этот факт объясняется изменением длины подкрепляющих элементов;
4. При малых значениях параметра  $Bio$  затухающие колебания геометрически нерегулярной пластинки происходят около прямой, практически совпадающей с временной осью (рисунки 2.15, 2.16)

Отмеченные закономерности термоупругого поведения геометрически нерегулярной пластинки происходят на временном промежутке значительно большем (более чем в 38 раз) временного интервала температурно-силового воздействия. В целом картина нестационарного термоупругого поведения геометрически нерегулярной пластины чрезвычайно сложная. Алгоритмизация полученных аналитических решений не представляет трудности, что весьма важно для инженерной практики в целях предварительного количественного и качественного анализов поведения геометрически нерегулярной пластины под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий, предусмотренных условиями эксплуатации конструкции.

## 2.2 Нагретая геометрически нерегулярная ортотропная пластинка в сверхзвуковом потоке газа

1. Решение задачи в квазистатической постановке. Рассматривается нагретая до постоянной температуры  $\theta_0$  геометрически нерегулярная ортотропная пластинка стандартным образом отнесенная к декартовым координатам ( $a \times b$  - размер пластинки,  $n$  - число ребер,  $i$  - номер ребра  $i = \overline{1, n}$ ,  $x_i$  - абсцисса ребра). Скорость набегающего газового потока со стороны внешней поверхности параллельна направлению подкрепляющих ребер симметрично расположенных относительно срединной плоскости пластинки. Интенсивности поперечной нагрузки, вызванной малым изгибом пластинки определяется по «поршневой» теории [37], [60], [107] в виде

$$q = p_0 \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v}{c_0} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}}, \quad (2.23)$$

где  $c_0$  - скорость звука на бесконечности;  $p_0$  - давление на бесконечности;  $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$  - отношение коэффициентов теплоемкостей;  $v$  - скорость набегающего газового потока. В квазистатической постановке задачи нормальная составляющая скоро-

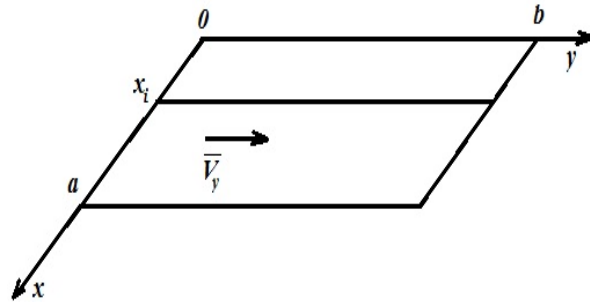


Рисунок 2.17

стей возмущенного потока запишется  $v = V_y w_{,2}$ , тогда  $\frac{V}{c_0} = M w_{,2}$ , где  $M = \frac{V_y}{c_0}$ . В силу малости величины  $w_{,2}$  (2.23) можно представить в виде ряда [37]:

$$q = -p_0 \kappa \left( M w_{,2} + \frac{\kappa - 1}{4} M^2 (w_{,2})^2 + \frac{\kappa + 1}{12} M^3 (w_{,2})^3 + \dots \right). \quad (2.24)$$

Уравнение равновесия термоупругой системы пластинка ребра при линейной аэродинамике будет иметь вид

$$D_1 w_{,1111} + 2(D_1 \nu_2 + 2D_k) w_{,1122} + D_2 w_{,2222} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n D_{2i} a_i w_{,2222} \delta(x - x_i) + p_0 \varkappa M w_{,2} - T^{11} w_{,11} - 2T^{12} w_{,12} - \quad (2.25)$$

$$- T^{22} w_{,22} - \sum_{i=1}^n T_i^{22} a_i w_{,22} \delta(x - x_i) = 0,$$

где  $D_j = \frac{E_j h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}$ , ( $j = 1, 2$ );  $D_k = \frac{G_{12} h^3}{12}$ .

Тангенциальные усилия  $T^{ij}$  определяются как решения системы дифференциальных уравнений [27]

$$u_{,11} + \frac{G_{12} h}{B_1} u_{,22} + \left( \nu_2 + \frac{G_{12} h}{B_1} \right) v_{,2} + \frac{G_{12}}{E_1} (1 - \nu_1 \nu_2) \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} a_i (u_{,2} + v_{,1})_{,2} \delta(x - x_i) = 0;$$

$$\left( \nu_1 + \frac{G_{12} h}{B_2} \right) u_{,12} + v_{,22} + \frac{G_{12} h}{B_2} v_{,11} + \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} a_i (v_{,2} + \nu u_{,1})_{,2} \delta(x - x_i) = 0. \quad (2.26)$$

при краевых условиях

$$\begin{aligned} u_{,2} + v_{,1} = 0, \quad u_{,1} + \nu_2 v_{,2} = (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) \theta_0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = a; \\ u_{,2} + v_{,1} = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b. \end{aligned}$$

Решения системы (2.26) запишутся

$$v = 0; \quad u = (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) \theta_0 x. \quad (2.27)$$

Тогда выражения для тангенциальных усилий в нагретой пластинке примут вид

$$T^{11} = T^{12} = 0; \quad T^{22} = -B_2 \alpha_2 (1 - \nu_1 \nu_2) \theta_0 = -E_2 h \alpha_2 \theta_0.$$

Дифференциальное уравнение (2.25) статической термоустойчивости подкрепленной пластинки в газовом потоке перепишем в виде

$$\begin{aligned} w_{,1111} + 2 \left( \nu_2 + 2 \frac{D_k}{D_1} \right) w_{,1122} + \frac{E_2}{E_1} w_{,2222} + \\ + \frac{E_2}{E_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{h_i}{h} \right)^3 \Phi_{3i} a_i w_{,2222} \delta(x - x_i) + p_0 \frac{\varkappa M}{D_1} w_{,2} + \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$+\frac{B_2}{D_1}\alpha_2(1-\nu_1\nu_2)\theta_0w_{,22}+\alpha_2(1-\nu_1\nu_2)\theta_0\sum_{i=1}^n\frac{B_{2i}}{D_1}a_iw_{,22}\delta(x-x_i)=0,$$

Решение дифференциального уравнения (2.28), тождественно удовлетворяющее краевым условиям

$$\text{при } x=0, \quad x=a: \quad w=0, \quad M^{11}=0; \tag{2.29}$$

$$\text{при } y=0, \quad y=b: \quad w=0, \quad M^{22}=0;$$

зададим в виде двойного тригонометрического ряда с постоянными коэффициентами:

$$w(x,y)=\sum_{km}A_{mk}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}. \tag{2.30}$$

Коэффициенты ряда (2.30) на основании процедуры Галёркина, при двучленной аппроксимации ( $m=1, k=1,2$ ), определяются как решение однородной алгебраической системы:

$$A_{11}H_{11}\left(1-\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)-A_{12}d_{12}=0; \tag{2.31}$$

$$A_{11}\frac{d_{12}}{4}+A_{12}H_{11}\left(1+\frac{H_{11}^0}{H_{11}}-\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)=0,$$

где

$$d_{12}=\frac{p_0\kappa M}{E_1}\frac{32(1-\nu_1\nu_2)}{\pi^4}\frac{a}{b}\left(\frac{a}{h}\right)^3, \tag{2.32}$$

$$H_{11}=1+2\left(\nu_2+2\frac{D_k}{D_1}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{E_2}{E_1}\left(\frac{a}{b}\right)^4+2\frac{E_2}{E_1}\left(\frac{a}{b}\right)^4\sum_{n=1}^n\left(\frac{h_i}{h}\right)^3\Phi_{3i}\frac{a_i}{a}\sin^2\frac{\pi x_i}{a},$$

$$H_{11}^0=3\left(\frac{a}{b}\right)^4\frac{E_2}{E_1}\left(1+2\sum_{i=1}^n\left(\frac{h_i}{h}\right)^3\Phi_{3i}\frac{a_i}{a}\sin^2\frac{\pi x_i}{a}\right)-\frac{3}{4},$$

$$\alpha_2\theta_{kp}=\frac{H_{11}}{\frac{12(1-\nu_1\nu_2)}{\pi^2}\frac{E_2}{E_1}\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{a}{\pi}\right)^4\left[1+2\sum_{i=1}^n\frac{h_i}{h}\frac{a_i}{a}\sin^2\frac{\pi x_i}{a}\right]}.$$

Вывод уравнений (2.31) приведен в приложении Д.

Из равенства нулю определителя системы (2.31) получим соотношение для определения критических значений скоростей.

$$H_{11}^2\left(1-\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)\left(1-\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}+\frac{H_{11}^0}{H_{11}}\right)+\frac{d_{12}^2}{4}=0.\Rightarrow$$

$$d_{12} = 2H_{11} \sqrt{\left(\frac{\theta_0}{\theta_{kp}} - 1\right) \left(1 + \frac{H_{11}^0}{H_{11}} - \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)}.$$

$d_{12}$  имеет вещественные положительные значения когда  $\frac{\theta_0}{\theta_{kp}} \in \left(1; 1 + \frac{H_{11}^0}{H_{11}}\right)$ .

$$\frac{16(1-\nu_1\nu_2)}{\pi^4} \frac{p_0 \kappa M}{E_1} \frac{a}{b} \left(\frac{a}{h}\right)^3 = H_{11} \sqrt{\left(\frac{\theta_0}{\theta_{kp}} - 1\right) \left(1 + \frac{H_{11}^0}{H_{11}} - \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)}. \quad (2.33)$$

(2.33) согласуются с результатами приведенными в работах [16], [37].

Введем безразмерный параметр

$$q^* = 12(1 - \nu_1\nu_2) \frac{p_0 \kappa M}{\pi^4 E_1} \left(\frac{a}{h}\right)^3, \quad (2.34)$$

тогда

$$q^* = \frac{3a}{4b} H_{11} \sqrt{\left(\frac{\theta_0}{\theta_{kp}} - 1\right) \left(1 + \frac{H_{11}^0}{H_{11}} - \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)}, \quad (2.35)$$

и будем рассматривать  $q^* = q^* \left(\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)$

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)_{\text{пр}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{H_{11}^0}{H_{11}}, \quad (2.36)$$

$$q_{\text{пр}}^* = \frac{3b}{4a} H_{11} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{H_{11}^0}{H_{11}} \frac{1}{2} H_{11}^0 H_{11}} = \frac{3b}{8a} |H_{11}^0|. \quad (2.37)$$

В таблицах 1-4 приведены значения  $\left(\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)_{\text{пр}}$  и  $q_{\text{пр}}^*$  в зависимости от параметров  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{h_i}{h}$ , для материалов [4]:

1. Стеклопластик АГ-4С  $\nu_2 = 0,07$ ,  $E_1 = 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ ,  $E_2 = 1,6 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ ,  $G = 0,42 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ ;
2. СВМ:  $\nu_2 = 0,12$ ,  $E_1 = 3,05 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ ,  $E_2 = 1,88 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ ,  $G = 0,49 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ ;
3.  $E = 0,72 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$

	$E_1$	$E_2$	$\nu_1$	$\nu_2$	$G_{12}$
(I)	$E$	$0,05E$	$0,6$	$0,03$	$0,04E$
(II)	$0,05E$	$E$	$0,03$	$0,6$	$0,04E$

Модули Юнга и коэффициенты Пуассона связаны соотношением  $\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1$ .

Таблица 1.  $n = 0$ .

$a:b$	АГ-4С		СВАМ		(I)		(II)	
	$q^*$	$(\theta/\theta_{kp})^*$	$q^*$	$(\theta/\theta_{kp})^*$	$q^*$	$(\theta/\theta_{kp})^*$	$q^*$	$(\theta/\theta_{kp})^*$
1/2	0,4553	0,763	0,4758	0,7593	0,5554	0,6497	2,25	1,4496
1	0,5759	1,28	0,4121	1,1574	0,225	0,7632	22,2188	2,1689
2	6,7165	2,05	5,4069	1,4738	0,3093	1,3091	179,859	2,4174

Таблица 2.  $n = 1$ .

$a:b$	$hi:h$	АГ-4С		СВАМ		(I)		(II)	
		$q^*$	$(\theta/\theta_{kp})^*$	$q^*$	$(\theta/\theta_{kp})^*$	$q^*$	$(\theta/\theta_{kp})^*$	$q^*$	$(\theta/\theta_{kp})^*$
1/2	1	0,4478	0,7675	0,4697	0,7629	0,5549	0,6502	2,4468	1,4765
	3	2,1771	1,5921	1,6539	1,4868	0,3827	0,7893	71,3531	2,3971
	5	51,9107	2,4093	41,8892	2,3861	2,8811	1,4671	1376,86	2,4943
1	1	0,6358	1,3083	0,4607	1,1738	0,221	0,7684	23,7938	2,1863
	3	21,6359	2,347	17,4501	2,2485	1,157	1,4142	575,044	2,4837
	5	419,504	2,4913	339,332	2,4846	27,2672	1,725	1101,1	2,4991
2	1	7,1965	2,0791	5,7952	1,4966	0,3408	1,3269	192,459	2,4225
	3	175,197	2,4763	141,71	2,3855	11,3659	1,7219	4602,46	2,4965
	5	3358,15	2,4985	2717,77	2,4935	220,247	1,7485	88154,9	2,4998

Таблица 3.  $n = 3$ .

$a:b$	$hi:h$	АГ-4С		СВАМ		(I)		(II)	
		$q^*$	$(\theta/\theta_{kp})^*$	$q^*$	$(\theta/\theta_{kp})^*$	$q^*$	$(\theta/\theta_{kp})^*$	$q^*$	$(\theta/\theta_{kp})^*$
1/2	1	0,4403	0,772	0,4667	0,7647	0,5544	0,6507	2,6437	1,5021
	3	4,8096	1,8854	2,7187	1,6619	0,2099	0,8974	140,456	2,4459
	5	104,277	2,4534	63,0717	2,4223	6,3175	1,5876	2751,47	2,4971
1	1	0,6958	1,3309	0,5092	1,1898	0,2171	0,774	25,3687	2,2019
	3	42,6959	2,4183	34,488	2,3613	2,5391	1,5477	1127,87	2,4916
	5	838,433	2,4956	678,252	2,4923	54,7594	1,7373	22016	2,4995
2	1	7,6765	2,0984	6,1835	1,5184	0,3723	1,3433	205,059	2,4271
	3	343,677	2,4878	278,013	2,4393	22,4224	1,7355	9025,06	2,4982
	5	6709,57	2,4993	5428,13	2,4967	440,184	1,7492	176130	2,4999



Таблица 4.  $n = 5$ .

$a:b$	$h_i:h$	АГ-4С		СВАМ		(I)		(II)	
		$q^*$	$(\theta/\theta_{кр})^*$	$q^*$	$(\theta/\theta_{кр})^*$	$q^*$	$(\theta/\theta_{кр})^*$	$q^*$	$(\theta/\theta_{кр})^*$
1/2	1	0,4328	0,7765	0,4576	0,7699	0,5539	0,6511	2,8406	1,5263
	3	7,4421	2,0355	5,9133	1,9481	0,0371	0,9836	209,559	2,4633
	5	156,643	2,4687	126,619	2,4603	9,7541	1,6361	4126,08	2,4981
1	1	0,7558	1,3528	0,5578	1,2054	0,2131	0,7793	26,9437	2,216
	3	63,7559	2,4443	51,5258	2,4042	3,9211	1,6052	1680,69	2,4944
	5	1257,36	2,4971	1017,17	2,4948	82,2516	1,7415	33012,8	2,4997
2	1	8,1565	2,116	6,5719	1,5392	0,4038	1,3584	217,65	2,4311
	3	512,157	2,4918	414,316	2,4587	33,4789	1,7402	13447,7	2,4988
	5	10061	2,4996	8139,49	2,4978	660,122	1,7495	264105	2,4999

2. Устойчивость относительного равновесия термоупругой системы в виде геометрически нерегулярной пластины.

Уравнение движения пластинки запишем в виде:

$$\begin{aligned}
 & w_{,1111} + 2 \left( \nu_2 + 2 \frac{D_k}{D_1} \right) w_{,1122} + \frac{E_2}{E_1} w_{,2222} + \frac{E_2}{E_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{h_i}{h} \right) \Phi_{3i} a_i w_{,2222} \delta(x - x_i) + \\
 & + p_0 \frac{\kappa M}{D_1} w_{,2} + \frac{B_2}{D_1} \alpha_2 \theta_0 (1 - \nu_1 \nu_2) w_{,22} + \alpha_2 \theta_0 (1 - \nu_1 \nu_2) \sum_{i=1}^n \frac{B_{2i}}{D_1} w_{,22} a_i \delta(x - x_i) + \\
 & + \frac{\gamma h}{g D_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma a_i h_i}{g D_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta(x - x_i) + \frac{\mu}{D_1} \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma$  – удельный вес материала пластинки,  $g$  – интенсивность поля тяжести,  $\mu$  – параметр демпфирования.

Решение уравнения (2.38), тождественно удовлетворяющее краевым условиям (2.29), зададим в виде двойного тригонометрического ряда с переменными по временной координате коэффициентами

$$w(x, y, t) = \sum_{k,m} \xi_{km}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (2.39)$$

Подстановка (2.39) в уравнение (2.38), с последующим применением процедуры Галеркина во втором приближении

$$\tilde{w}(x, y, t) = \xi_{11}(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \xi_{12}(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b},$$

приводит к системе двух однородных линейных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов ряда  $\xi_{11}(t)$  и  $\xi_{12}(t)$

$$\frac{d^2\xi_{11}}{dt^2} + \frac{\mu g}{hp_1\gamma} \frac{d\xi_{11}}{dt} + \frac{gD_1}{\gamma h} \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \frac{H_{11}}{p_1} \left(1 - \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right) \xi_{11} - \frac{8p_0}{3p_1} \frac{\varkappa Mg}{\gamma hb} \xi_{12} = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{8p_0}{3p_1} \frac{\varkappa Mg}{\gamma hb} \xi_{11} + \frac{d^2\xi_{12}}{dt^2} + \frac{\mu g}{hp_1\gamma} \frac{d\xi_{12}}{dt} + 4 \frac{gD_1}{\gamma h} \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \frac{H_{11}}{p_1} \left(1 + \frac{H_{11}^0}{H_{11}} - \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right) \xi_{12} = 0.$$

Здесь  $p_1 = 1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{a_i h_i}{a h} \sin^2 \frac{\pi x_i}{a}$ .

Подстановка  $\xi_{11}(t) = L_{12}(\eta(t))$ ,  $\xi_{12}(t) = L_{11}(\eta(t))$  обращает в тождество первое уравнение системы (2.40), второе уравнение примет вид

$$\frac{d^4\eta}{dt^4} + 2e_1 \frac{d^3\eta}{dt^3} + e_3 \frac{d^2\eta}{dt^2} + e_4 \frac{d\eta}{dt} + e_5\eta = 0, \quad (2.41)$$

где обозначено:  $e_1 = \frac{\mu g}{hp_1\gamma}$ ,  $e_3 = e_1^2 + \frac{gD_1}{\gamma h} \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \frac{H_{11}}{p_1} \left(5 + 4 \frac{H_{11}^0}{H_{11}} - 5 \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)$ ,

$$e_4 = e_1 \frac{gD_1}{\gamma h} \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \frac{H_{11}}{p_1} \left(5 + 4 \frac{H_{11}^0}{H_{11}} - 5 \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right),$$

$$e_5 = \left(\frac{8p_0}{3p_1} \frac{\varkappa Mg}{\gamma hb}\right)^2 + 4 \left(\frac{gD_1}{\gamma h} \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \frac{H_{11}}{p_1}\right)^2 \left(1 - \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right) \left(5 + 4 \frac{H_{11}^0}{H_{11}} - 5 \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right).$$

Характеристическое уравнение запишется

$$\lambda^4 + 2e_1\lambda^3 + e_3\lambda^2 + e_4\lambda + e_5 = 0. \quad (2.42)$$

В случае отсутствия демпфирования ( $\mu = 0$ )  $e_1 = e_4 = 0$  уравнение (2.42) биквадратное

$$\lambda^4 + e_2 \left(5 + 4 \frac{H_{11}^0}{H_{11}} - 5 \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right) \lambda^2 + e_5 = 0, \quad (2.43)$$

где  $e_2 = \frac{gD_1}{\gamma h} \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \frac{H_{11}}{p_1}$ .

Условие при котором хотя бы один из четырех корней алгебраического уравнения (2.43) будет положительным

$$-e_2 \left(5 + 4 \frac{H_{11}^0}{H_{11}} - 5 \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right) + \sqrt{e_2^2 \left(5 + 4 \frac{H_{11}^0}{H_{11}} - 5 \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)^2 - 4e_5} > 0$$

позволяет определить интервал изменения относительной скорости потока  $\frac{V_y}{c_0}$  в котором прогибы термоупругой системы растут

$$-4e_5 > 0 \quad \Rightarrow \quad e_5 < 0.$$

$$\left(\frac{8p_0 \varkappa Mg}{3p_1 \gamma hb}\right)^2 < 4 \left(\frac{gD_1}{\gamma h} \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \frac{H_{11}}{p_1}\right)^2 \left(\frac{\theta_0}{\theta_{kp}} - 1\right) \left(1 + \frac{H_{11}^0}{H_{11}} - \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)$$

$$\frac{\theta_0}{\theta_{kp}} \in \left(1; 1 + \frac{H_{11}^0}{H_{11}}\right)$$

$$1 < \frac{V_y}{c_0} < \frac{\pi^4 H_{11} E_1}{16(1 - \nu_1 \nu_2) p_0 \varkappa} \left(\frac{h}{a}\right)^3 \frac{b}{a} \sqrt{\left(\frac{\theta_0}{\theta_{kp}} - 1\right) \left(1 + \frac{H_{11}^0}{H_{11}} - \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)} \quad (2.44)$$

При учете демпфирования ( $\mu \neq 0$ ) возникает вопрос об устойчивости системы (2.40). Так как линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2.40) сведена к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка (2.41), то сами коэффициенты  $e_j$  этого уравнения, на основании критерия Гурвица [53], дают ответ на поставленный вопрос. Из определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2e_1 & e_4 & 0 & 0 \\ 1 & e_3 & e_5 & 0 \\ 0 & 2e_1 & e_4 & 0 \\ 0 & 1 & e_3 & e_5 \end{vmatrix}$$

и найдем зависимость между параметрами, при которых выполняются условия [53]:

$$\Delta_1 = 2e_1 > 0$$

$$\Delta_2 = 2e_1 e_3 - e_4 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2e_1 & e_4 & 0 \\ 1 & e_3 & e_5 \\ 0 & 2e_1 & e_4 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_3 = e_4(2e_1 e_3 - e_4) - 4e_1^2 e_5 > 0 \Rightarrow e_5 < \frac{e_4(2e_1 e_3 - e_4)}{4e_1^2}$$

$$\left(\frac{8p_0 \varkappa Mg}{3p_1 \gamma hb}\right)^2 < \frac{1}{4} \left(\frac{gD_1}{\gamma h} \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \frac{H_{11}}{p_1}\right)^2 \left\{ \left(5 + 4\frac{H_{11}^0}{H_{11}} - 5\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \left(\frac{\mu g}{hp_1 \gamma}\right)^2 \frac{\gamma h}{gD_1} \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 \frac{p_1}{H_{11}} \left(5 + 4\frac{H_{11}^0}{H_{11}} - 5\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right) + 16 \left(\frac{\theta_0}{\theta_{kp}} - 1\right) \left(1 + \frac{H_{11}^0}{H_{11}} - \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right) \right\}$$

$$\frac{v_y}{c_0} < \frac{E_1 \pi^4}{64(1 - \nu_1 \nu_2)} \left(\frac{h}{a}\right)^3 \frac{b H_{11}}{a \varkappa p_0} \cdot \sqrt{\left\{ \left(5 + 4\frac{H_{11}^0}{H_{11}} - 5\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right)^2 + \right.} \quad (2.45)$$

$$\left. + \frac{24(1 - \nu_1 \nu_2) \mu^2 g}{\pi^4 \gamma E_1 p_1 H_{11}} \left(\frac{a}{h}\right)^4 \left(5 + 4\frac{H_{11}^0}{H_{11}} - 5\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right) + 16 \left(\frac{\theta_0}{\theta_{kp}} - 1\right) \left(1 + \frac{H_{11}^0}{H_{11}} - \frac{\theta_0}{\theta_{kp}}\right) \right\}.$$

Таблица 5. Случай 1

$E_1=3.05 \cdot 10^5; E_2=1.88 \cdot 10^5; \nu_2=0.12; G_{12}=0.49 \cdot 10^5$				
$\mu=0.1$ $\theta_0/\theta_{кр}=6$	$hi/h$	$a/b$		
		2	1	1/2
нет		2354	659	612
$n=1$	3	7326	1281	690
	5	101544	13058	2162
$n=5$	3	17301	2528	846
	5	299953	37859	5262

$E_1=3.05 \cdot 10^5; E_2=1.88 \cdot 10^5; \nu_2=0.12; G_{12}=0.49 \cdot 10^5$				
$\mu=50$ $\theta_0/\theta_{кр}=6$	$hi/h$	$a/b$		
		2	1	1/2
нет		2332	644	587
$n=1$	3	7313	1258	661
	5	101529	13027	2109
$n=5$	3	17287	2502	812
	5	299939	37831	5208

Таблица 6. Случай 2

$E_1=1.88 \cdot 10^5; E_2=3.05 \cdot 10^5; \nu_1=0.12; G_{12}=0.49 \cdot 10^5$				
$\mu=0.1$ $\theta_0/\theta_{кр}=6$	$hi/h$	$a/b$		
		2	1	1/2
нет		258	244	382
$n=1$	3	7832	1255	509
	5	160685	20362	2897
$n=5$	3	24014	3278	762
	5	482571	60598	7927

$E_1=1.88 \cdot 10^5; E_2=3.05 \cdot 10^5; \nu_1=0.12; G_{12}=0.49 \cdot 10^5$				
$\mu=50$ $\theta_0/\theta_{кр}=6$	$hi/h$	$a/b$		
		2	1	1/2
нет		251	228	357
$n=1$	3	7815	1226	474
	5	160669	20330	2839
$n=5$	3	23998	3249	719
	5	482557	60569	7871

Результаты расчетов приводятся в таблицах 5 и 6. На рисунках Д.1 - Д.32 в приложении Д приведены графики зависимости относительной скорости потока от параметра демпфирования.

Количественный анализ выявил следующие закономерности влияния геометрических параметров на поведение термоупругой ортотропной системы в потоке газа:

1. Во всех рассмотренных случаях параметр относительной высоты ребра как и увеличение числа ребер – параметр  $n$  ведут к существенному росту предельной скорости потока

$$\frac{q_{кр}^* \left( \frac{a}{b}=1, \frac{h_1}{h}=3, n=1 \right)}{q_{кр}^* \left( \frac{a}{b}=1, \frac{h_1}{h}=0, n=0 \right)} = 37.626; \quad \frac{q_{кр}^* \left( \frac{a}{b}=1, \frac{h_1}{h}=3, n=1 \right)}{q_{кр}^* \left( \frac{a}{b}=1, \frac{h_1}{h}=1, n=1 \right)} = 24.364; \quad \frac{q_{кр}^* \left( \frac{a}{b}=1, \frac{h_1}{h}=1, n=5 \right)}{q_{кр}^* \left( \frac{a}{b}=1, \frac{h_1}{h}=0, n=0 \right)} = 110.687.$$

материал АГ-4С

2. С увеличением параметра  $\frac{a}{b}$  (что ведет к уменьшению относительной длины ребер) величина относительной скорости потока значительно возрастает

$$\frac{q_{кр}^* \left( \frac{a}{b}=2, \frac{h_1}{h}=3, n=1 \right)}{q_{кр}^* \left( \frac{a}{b}=1, \frac{h_1}{h}=3, n=1 \right)} = 8.097; \quad \frac{q_{кр}^* \left( \frac{a}{b}=2, \frac{h_1}{h}=3, n=1 \right)}{q_{кр}^* \left( \frac{a}{b}=\frac{1}{2}, \frac{h_1}{h}=3, n=1 \right)} = 80.047.$$

материал АГ-4С

Эта тенденция сохраняется и для других ортотропных материалов, а также и в случае изотропных [16].

3. Главная ось упругости, для которой модуль упругости наибольший, должна быть параллельна скорости потока, так как при выполнении этого требования существенно повышается устойчивость геометрически нерегулярной пластинки – увеличивается наименьшее значение скорости потока при которых прогибы термоупругой системы неограниченно возрастают во времени.
4. Влияние параметра  $\mu$  (учет демпфирования) на величины наименьших скоростей, тем меньше, чем больше относительная высота ребер, их число и величина модуля упругости в направлении потока.
5. С увеличением температуры (параметр  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}}$ ) наименьшие скорости потока, при прочих равных условиях, убывают.
6. Существенное влияние на устойчивость ортотропной пластинки оказывает параметр  $\frac{a}{b}$  увеличение которого ведет к значительному росту относительной скорости потока. В случае гладкой пластинки эта закономерность нарушается.

Важно отметить, что перечисленные закономерности выявлены для случая двух полуволн в направлении газового потока и одной – в перпендикулярном направлении.

Аналитическое решение в предположении, что причиной возмущений для подкрепленной ортотропной нагретой пластинки являются малые колебания с частотой  $\omega$  около положения равновесия приведено в приложении Д.

### **2.3 Геометрически нерегулярная пластинка под действием быстровозрастающих температурных и силовых воздействий на границе (случай конвективного теплообмена с окружающей средой)**

Рассмотрим геометрически нерегулярную пластинку в условиях конвективного теплообмена через основные плоскости с окружающей средой. На краях пластинки, расположенных вдоль координатных прямых  $x = 0$ ,  $x = a$ , действуют температурная и силовая нагрузки [94]

$$\theta_1^0 f\left(\frac{y}{b}, \frac{y_1}{b}\right) H(y - y_1), \quad M^0 \tilde{f}\left(\frac{y}{b}, \frac{y_1}{b}\right) H(y - y_1),$$

где  $f$ ,  $\tilde{f}$  непрерывные быстро возрастающие функции и такие что,  $f^{(\beta)}|_{y=y_1} = 0$ ,  $\tilde{f}^{(\alpha)}|_{y=y_1} = 0$ , ( $\beta = 0, 1; \alpha = 0, 1, 2, 3$ ). Полагая, что ширина ребра  $b_1$  достаточно малая ( $\frac{b_1}{b} \leq 0,01$ ) и внутренние источники тепла отсутствуют, будем при решении стационарной тепловой задачи, исходить из уравнения для температурной функции  $\Theta_1(x, y)$  в виде (2.3)

$$\nabla^2 \Theta_1 - \left( \frac{6\kappa}{h\lambda} + \frac{12}{h^2} \right) \Theta_1 = -\frac{6\kappa}{h\lambda} (T^+(x, y) - T^-(x, y)). \quad (2.46)$$

Здесь  $\kappa$  - коэффициент теплоотдачи с основных плоскостей;  $T^+$ ,  $T^-$  - температуры окружающих сред с внешней и внутренней сторон соответственно.

Сингулярное дифференциальное уравнение термоупругости ребристой пластинки запишется

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \beta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta(y - y_2) + \beta_2 \frac{\partial^3 w}{\partial^2 x \partial y} \Big|_{y=y_2} \frac{d\delta(y - y_2)}{dy} = -\frac{\alpha(1 + \nu)}{h} \nabla^2 \Theta_1. \quad (2.47)$$

Здесь  $w(x, y)$  - функция прогиба;  $\beta_1 = b_1 \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 \Phi_{31}$ ;  $\beta_2 = 2(1 - \nu)b_1 \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 \Phi_{31}$ .

Пусть на краях  $x = 0$ ,  $x = a$  поддерживается заданная температура

$$\Theta_1 = \theta_1^0 f\left(\frac{y}{b}, \frac{y_1}{b}\right) H(y - y_1). \quad (2.48)$$

Решение дифференциального уравнения (2.46), тождественно удовлетворяющее граничным температурным условиям (2.48), будем искать в виде

$$\Theta_1 = \sum_k \theta_{1k} \sin \frac{k\pi x}{a} + \theta_1^0 f\left(\frac{y}{b}, \frac{y_1}{b}\right) H(y - y_1). \quad (2.49)$$

При  $T^- = const$ ,  $T^+ = T_0^+ H(y - y_0)$ , что соответствует одному температурному «скачку» над внешней поверхностью пластинки, коэффициенты тригонометрического ряда (2.49) являются решениями неоднородных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta_{1k}}{dy^2} - \frac{S_k^2}{a^2} \theta_{1k} &= B a_k^0 \theta_1^0 f\left(\frac{y}{b}, \frac{y_1}{b}\right) H(y - y_1) \frac{1}{a^2} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 a_k^2 \frac{d^2 f}{dy^2} H(y - y_1) \frac{1}{a^2} - \\ &- 6 \frac{\kappa a}{\lambda h} a_k^0 T_0^+ H(y - y_0) \frac{1}{a^2} + 6 \frac{\kappa a}{\lambda h} a_k^0 T^- \frac{1}{a^2}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_k^2 &= (k\pi)^2 + 6 \frac{\kappa a}{\lambda h} + 12 \left(\frac{a}{h}\right)^2; \\ B &= 6 \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(2 + \frac{\kappa a}{\lambda h}\right); \quad a_k^0 = \frac{2(1 - \cos k\pi)}{k\pi}; \quad \frac{\kappa a}{\lambda} - \text{параметр Био.} \end{aligned}$$

Замкнутые интегралы уравнения (2.50) определяются по той же схеме [12], [15], и при

$$f\left(\frac{y}{b}, \frac{y_1}{b}\right) = \left(\frac{y}{b} - \frac{y_1}{b}\right)^2$$

температурная функция  $\Theta_1$  преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Theta_1(x, y) = & \sum_k \left\langle C^1 e^{Y_k} + C^2 e^{-Y_k} - 6 \frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{a_k^0}{S_k^2} T^- + \right. \\ & + \left[ \frac{1}{2} \tilde{f}_k(y, y_1) A_{k0} + A_{k2} \left(\frac{y}{b} - \frac{y_1}{b}\right)^2 + A_{k0} \right] H(y - y_1) + \\ & \left. + \tilde{\theta}_{1k} \left[ 1 - \frac{1}{2} \tilde{f}_k(y, y_0) \right] H(y - y_0) \right\rangle \sin \frac{k\pi x}{a} + \theta_1^0 \left(\frac{y}{b} - \frac{y_1}{b}\right)^2 H(y - y_1), \end{aligned} \quad (2.51)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k &= e^{Y_k} e^{-Y_k^l} + e^{-Y_k} e^{Y_k^l}; \quad Y_k = \frac{S_k y}{a}; \quad Y_k^l = \frac{S_k Y_l}{a} \quad (l = 0, 1); \\ \tilde{\theta}_{1k} &= 6 \frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{a_k^0}{S_k^2} T_0^+; \quad A_{k2} = -B \theta_1^0 \frac{a_k^0}{S_k^2}; \quad A_{k0} = 2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{a_k^0}{S_k^2} \theta_1^0 \left(1 - \frac{B}{S_k^2}\right). \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования  $C^1$ ,  $C^2$  определяются из температурных граничных условий на двух оставшихся краях пластинки, которые в силу непрерывности функции  $\Theta_1$  в угловых точках запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0 \quad \Theta_1 &= 0; \\ \text{при } y = b \quad \Theta_1 &= \theta_1^0 \left(1 - \frac{y_1}{b}\right)^2. \end{aligned}$$

Система линейных неоднородных уравнений для  $C^1$  и  $C^2$  имеет вид:

$$\begin{aligned} C^1 + C^2 &= 6 \frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{b}{h} \frac{a_k^0}{S_k^0} T^-; \\ C^1 e^{\frac{S_k b}{a}} + C^2 e^{-\frac{S_k b}{a}} &= 6 \frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{b}{h} \frac{a_k^0}{S_k^0} T^- - \\ &- \left( -\frac{1}{2} f_k(b, y_1) A_{k0} + A_{k2} \left(1 - \frac{y_1}{b}\right)^2 + A_{k0} \right) - \left( -\frac{1}{2} f_k(b, y_0) \tilde{\theta}_{1k} + \tilde{\theta}_{1k} \right). \end{aligned}$$

Решение неоднородного сингулярного дифференциального уравнения (2.47) при шарнирном опирании краев, расположенных по прямым  $x = 0$ ,  $x = a$ :

$$w = 0, \quad w_{,22} = \frac{M^0}{D} \tilde{f}\left(\frac{y}{b}, \frac{y_1}{b}\right) H(y - y_1) - \frac{1 + \nu}{h} \alpha \theta_1^0 f\left(\frac{y}{b}, \frac{y_1}{b}\right) H(y - y_1), \quad (2.52)$$

будем разыскивать в виде

$$w(x, y) = \sum_k w_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a} +$$

$$+\frac{a}{2h} \left[ \frac{M^0 h}{D} \tilde{f} \left( \frac{y}{b}, \frac{y_1}{b} \right) H(y - y_1) + (1 + \nu) \alpha \theta_1^0 f \left( \frac{y}{b}, \frac{y_1}{b} \right) \right] \left( \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \right) a. \quad (2.53)$$

Коэффициенты тригонометрического ряда (2.53), при  $\tilde{f} \left( \frac{y}{b}, \frac{y_1}{b} \right) = \left( \frac{y}{b} - \frac{y_1}{b} \right)^4$  определяются как замкнутые интегралы сингулярных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 w_k}{dy^4} - 2 \left( \frac{k\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 w_k}{dy^2} + \left( \frac{k\pi}{a} \right)^4 w_k + \beta_1 \left( \frac{k\pi}{a} \right)^4 w_k \delta(y - y_2) - \\ & - \beta_2 \left( \frac{k\pi}{a} \right)^2 \frac{dw_k}{dy} \Big|_{y=y_2} \frac{d\delta(y - y_2)}{dy} = \frac{\beta_2}{h} F a_k^0 \frac{d\delta(y - y_2)}{dy} \frac{1}{b} + \\ & + 6(1 + \nu) \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{\varkappa a}{\lambda} a_k^0 \alpha T^- \left( \frac{1}{S_k^2} - 1 \right) \frac{1}{a^3} - (1 - \nu) B \frac{a}{h} \alpha \left( C^1 e^{\frac{S_k y}{b}} + C^2 e^{-\frac{S_k y}{b}} \right) \frac{1}{a^3} - \\ & - \left\langle \frac{1 + \nu}{2} B \frac{a}{b} f_k(y, y_1) \alpha A_{k0} - B \alpha (1 + \nu) \frac{a}{h} (A_{k2} + a_k^0) \left( \frac{y}{b} - \frac{y_1}{b} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 6(1 + \nu) \frac{\varkappa a}{\lambda} \left( \frac{a}{h} \right)^2 a_k^0 \alpha T_0^+ - (1 + \nu) B \frac{a}{h} \alpha A_{k0} \right\rangle \frac{1}{a^3} H(y - y_1). \quad (2.54) \end{aligned}$$

Здесь  $F = \frac{3M^0 h}{D} \left( \frac{y_2}{b} - \frac{y_1}{b} \right)^3 + 2(1 + \nu) \alpha \theta_1^0 \left( \frac{y_2}{b} - \frac{y_1}{b} \right)$ .

Фундаментальная система функций  $\{\psi_{km}(y)\}$  для однородного сингулярного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (2.54), запишется

$$\begin{aligned} \psi_{km}(y) = & \varphi_{km}(y) + \left[ \left( \sum_{n=1}^4 C_n^3 \varphi_{kn}(y) \right) \varphi_{km}(y_2) \right] H(y - y_2) + \\ & + k\pi \left[ \left( \sum_{n=1}^4 C_n^4 \varphi_{kn}(y) \right) \varphi_{km}^{(1)}(y_2) \right] H(y - y_2), \quad (2.55) \end{aligned}$$

где  $\{\varphi_{km}(y)\} \sim \left\{ \text{sh} \frac{k\pi y}{a}, \text{ch} \frac{k\pi y}{a}, \frac{k\pi y}{a} \text{sh} \frac{k\pi y}{a}, \frac{k\pi y}{a} \text{ch} \frac{k\pi y}{a} \right\}$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$ .

Отметим, что коэффициенты при функциях Хевисайда, в (2.55) обращаются в нуль в точке вместе со своими производными соответственно до третьего и второго порядка включительно.

Окончательно структура функции  $w_k(y)$  примет вид

$$\begin{aligned} w_k(y) = & \sum_{m=1}^4 C^m \left\{ \varphi_{km}(y) + \left[ \left( \sum_{n=1}^4 C_n^3 \varphi_{kn}(y) \right) \varphi_{km}(y_2) \right] H(y - y_2) + \right. \\ & \left. + k\pi \left[ \left( \sum_{n=1}^4 C_n^4 \varphi_{kn}(y) \right) \varphi_{km}^{(1)}(y_2) \right] H(y - y_2) \right\} + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \left[ \sum_{m=1}^4 C_m^3 \varphi_{km}(y) \right] \left\langle \left[ \sum_{m=1}^4 \widetilde{C}'_m \varphi_{km}(y_2) + \widetilde{D}'_1 e^{\frac{S_k y_2}{a}} + \widetilde{D}'_2 e^{-\frac{S_k y_2}{a}} + \widetilde{D}'_3 \right] + \right. \\
& \quad \left. + \left[ \sum_{m=1}^4 \widetilde{C}'_m \varphi_{km}(y_2) + \widetilde{D}'_1 e^{\frac{S_k y_2}{a}} + \widetilde{D}'_2 e^{-\frac{S_k y_2}{a}} + \widetilde{D}'_3 \right] + \right. \\
& \quad \left. + 6(1 + \nu) \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a_0^k}{(k\pi)^4} \alpha T^- \left( \frac{1}{S_k^2} - 1 \right) \right\rangle aH(y - y_2) + \\
& + \left[ \sum_{m=1}^4 C_m^4 \varphi_{km}(y) \right] \left\langle k\pi \sum_{m=1}^4 \left( \widetilde{C}'_m + \widetilde{C}'_m \right) \varphi_{km}^{(1)}(y_2) + S_k \left( \widetilde{D}'_1 + \widetilde{D}'_1 \right) e^{\frac{S_k y_2}{a}} - \right. \\
& \quad \left. - S_k \left( \widetilde{D}'_2 + \widetilde{D}'_2 \right) e^{-\frac{S_k y_2}{a}} + 2 \frac{a}{b} \widetilde{D}'_3 \left( \frac{y_2}{b} - \frac{y_1}{b} \right) \right\rangle aH(y - y_2) + \\
& \quad + \left[ \sum_{m=1}^4 C_m^5 \varphi_{km}(y) \right] aH(y - y_2) + \\
& + \left[ \sum_{m=1}^4 \widetilde{C}'_m \varphi_{km}(y) + \widetilde{D}'_1 e^{\frac{S_k y_2}{a}} + \widetilde{D}'_2 e^{-\frac{S_k y_2}{a}} + \widetilde{D}'_3 \right] aH(y - y_0) + \\
& + \left[ \sum_{m=1}^4 \widetilde{C}'_m \varphi_{km}(y) + \widetilde{D}'_1 e^{\frac{S_k y_2}{a}} + \widetilde{D}'_2 e^{-\frac{S_k y_2}{a}} + \widetilde{D}'_3 \left( \frac{y_2}{b} - \frac{y_1}{b} \right)^2 + \widetilde{D}'_4 \right] aH(y - y_1) + \\
& \quad + 6(1 + \nu) \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a_k^0}{(k\pi)^4} \alpha T^- \left( \frac{1}{S_k^2} - 1 \right) a, \tag{2.56}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}'_1 &= \frac{\frac{1+\nu}{2} B \frac{a}{h} \alpha A_{k0} e^{-\frac{S_k y_1}{a}}}{(S_k^2 - (k\pi)^2)^2}, & \widetilde{D}'_2 &= \frac{\frac{1+\nu}{2} B \frac{a}{h} \alpha A_{k0} e^{\frac{S_k y_1}{a}}}{(S_k^2 - (k\pi)^2)^2}, \\
\widetilde{D}'_3 &= \frac{\widetilde{B}_k}{(k\pi)^4}, & \widetilde{D}'_4 &= \frac{\widetilde{B}_k}{(k\pi)^4} + 4 \left( \frac{a}{b} \right)^2 \frac{\widetilde{B}_k}{(k\pi)^6}, \\
\widetilde{D}'_1 &= \frac{\frac{1+\nu}{2} \frac{a}{h} B \frac{a}{h} \alpha \widetilde{\theta}_{1k} e^{-\frac{S_k y_0}{a}}}{(S_k^2 - (k\pi)^2)^2}, & \widetilde{D}'_2 &= \frac{\frac{1+\nu}{2} \frac{a}{h} B \frac{a}{h} \alpha \widetilde{\theta}_{1k} e^{\frac{S_k y_0}{a}}}{(S_k^2 - (k\pi)^2)^2}, & \widetilde{D}'_3 &= \frac{\alpha \widetilde{\theta}_{1k}}{(k\pi)^4}, \\
\widetilde{B}_k &= -(1 + \nu) B \frac{a}{b} \alpha A_{k2} - (1 + \nu) B \alpha \theta_1^0 \frac{a}{h} a_k^0, \\
\widetilde{B}_k &= 6(1 + \nu) \frac{\varkappa a}{\lambda} \left( \frac{a}{h} \right)^2 a_k^0 \alpha T_0^+ - (1 + \nu) B \frac{a}{h} \alpha A_{k0}.
\end{aligned}$$

В (2.56)  $C^m$  - постоянные интегрирования;  $C_m^3, C_m^4, C_m^5, \tilde{C}_m, \tilde{\tilde{C}}_m$  - решения неоднородных алгебраических систем, полученных при формировании частного интеграла неоднородного сингулярного дифференциального уравнения (2.54):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^4 \tilde{\tilde{C}}_m \varphi_{km}(y_0) = - \left( \tilde{\tilde{D}}'_1 e^{\frac{S_k y_0}{a}} + \tilde{\tilde{D}}'_2 e^{-\frac{S_k y_0}{a}} + \tilde{\tilde{D}}'_3 \right) a, \\ \sum_{m=1}^4 \tilde{\tilde{C}}_m \varphi_{km}^{(1)}(y_0) = - \left( \tilde{\tilde{D}}'_1 e^{\frac{S_k y_0}{a}} - \tilde{\tilde{D}}'_2 e^{-\frac{S_k y_0}{a}} \right) \frac{S_k}{k\pi} a, \\ \sum_{m=1}^4 \tilde{\tilde{C}}_m \varphi_{km}^{(2)}(y_0) = - \left( \tilde{\tilde{D}}'_1 e^{\frac{S_k y_0}{a}} + \tilde{\tilde{D}}'_2 e^{-\frac{S_k y_0}{a}} \right) \frac{S_k^2}{(k\pi)^2} a, \\ \sum_{m=1}^4 \tilde{\tilde{C}}_m \varphi_{km}^{(3)}(y_0) = - \left( \tilde{\tilde{D}}'_1 e^{\frac{S_k y_0}{a}} - \tilde{\tilde{D}}'_2 e^{-\frac{S_k y_0}{a}} \right) \frac{S_k^3}{(k\pi)^3} a. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^4 \tilde{C}_m \varphi_{km}(y_1) = - \left( \tilde{D}'_1 e^{\frac{S_k y_1}{a}} + \tilde{D}'_2 e^{-\frac{S_k y_1}{a}} + \tilde{D}'_4 \right) a, \\ \sum_{m=1}^4 \tilde{C}_m \varphi_{km}^{(1)}(y_1) = - \left( \tilde{D}'_1 e^{\frac{S_k y_1}{a}} - \tilde{D}'_2 e^{-\frac{S_k y_1}{a}} \right) \frac{S_k}{k\pi} a, \\ \sum_{m=1}^4 \tilde{C}_m \varphi_{km}^{(2)}(y_1) = - \left( \tilde{D}'_1 S_k^2 e^{\frac{S_k y_1}{a}} + \tilde{D}'_2 S_k^2 e^{-\frac{S_k y_1}{a}} + \tilde{D}'_3 2 \frac{a^2}{b^2} \right) \frac{1}{(k\pi)^2} a, \\ \sum_{m=1}^4 \tilde{C}_m \varphi_{km}^{(3)}(y_1) = - \left( \tilde{D}'_1 e^{\frac{S_k y_1}{a}} - \tilde{D}'_2 e^{-\frac{S_k y_1}{a}} \right) \frac{S_k^3}{(k\pi)^3} a. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^4 C_m^3 \varphi_{km}(y_2) = 0, \\ \sum_{m=1}^4 C_m^3 \varphi_{km}^{(1)}(y_2) = 0, \\ \sum_{m=1}^4 C_m^3 \varphi_{km}^{(2)}(y_2) = 0, \\ \sum_{m=1}^4 C_m^3 \varphi_{km}^{(3)}(y_2) = -k\pi \frac{b_1}{b} \left( \frac{h_1}{h} \right)^3 \Phi_{31} w_k(y_2). \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^4 C_m^4 \varphi_{km}(y_2) = 0, \\ \sum_{m=1}^4 C_m^4 \varphi_{km}^{(1)}(y_2) = 0, \\ \sum_{m=1}^4 C_m^4 \varphi_{km}^{(2)}(y_2) = 0, \\ \sum_{m=1}^4 C_m^4 \varphi_{km}^{(3)}(y_2) = 2(1 - \nu) \frac{b_1}{b} \left( \frac{h_1}{h} \right)^3 \Phi_{31} w_k^{(1)}(y_2). \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^4 C_m^5 \varphi_{km}(y_2) = 0, \\ \sum_{m=1}^4 C_m^5 \varphi_{km}^{(1)}(y_2) = 0, \\ \sum_{m=1}^4 C_m^5 \varphi_{km}^{(2)}(y_2) = \frac{2(1-\nu)}{(k\pi)^2} \frac{b_1}{b} \frac{a}{h} \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 \Phi_{31} F a_k^0 a, \\ \sum_{m=1}^4 C_m^5 \varphi_{km}^{(3)}(y_2) = 0. \end{cases}$$

Постоянные интегрирования определялись из условий шарнирного закрепления краев пластинки, расположенных по координатным прямым  $y = 0$  и  $y = b$ , которые, предварительно, переписываются через функцию  $w_k$  (отметим, что эти краевые условия могут быть любыми из известных в теории пластин):

$$\text{при } y = 0 \quad w_k = 0, \quad w_k^{(2)} = 0;$$

$$\text{при } y = b$$

$$w_k = \frac{a}{h} \left( \frac{M^0 h}{D} \left(1 - \frac{y_1}{b}\right)^4 + (1 + \nu) \alpha \theta_1^0 \left(1 - \frac{y_1}{b}\right)^2 \right) \frac{\tilde{a}_k^2}{2} a;$$

$$w_k^{(2)} = -\frac{a}{h} \left( \frac{M^0 h}{D} 12 \left(1 - \frac{y_1}{b}\right)^2 + 2(1 + \nu) \alpha \theta_1^0 \right) \frac{\tilde{a}_k^2}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{1}{a},$$

где функция  $w_k(y)$  и ее вторая производная  $w_k^{(2)}(y)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} w_k(y) = & \sum_m C_m^m \left\{ \varphi_{km}(x) + \left[ \left( \sum_m C_m^3 \varphi_{km}(y) \right) \varphi_{km}(y_2) \right] H(y - y_2) + \right. \\ & + \left[ \left( \sum_m C_m^4 \varphi_{km}(y) \right) (k\pi) \varphi_{km}^{(1)}(y_2) \right] H(y - y_2) \left. \right\} + \left[ \sum_m C_m^3 \varphi_{km}(y) \right] \langle 1 \rangle a H(y - y_2) + \\ & + \left[ \sum_m C_m^4 \varphi_{km}(y) \right] \langle 2 \rangle a H(y - y_2) + \left[ \sum_m (C_m^5)' \varphi_{km}(y) \right] a H(y - y_2) + \\ & + \left[ \sum_m \tilde{C}'_m \varphi_{km}(y) + \tilde{D}'_1 e^{\frac{S_k y}{a}} + \tilde{D}'_2 e^{-\frac{S_k y}{a}} + \tilde{D}'_3 \right] a H(y - y_0) + \\ & + \left[ \sum_m \tilde{C}'_m \varphi_{km}(y) + \tilde{D}'_1 e^{\frac{S_k y}{a}} + \tilde{D}'_2 e^{-\frac{S_k y}{a}} + \tilde{D}'_3 \left(\frac{y}{b} - \frac{y_1}{b}\right)^2 + \tilde{D}'_4 \right] a H(y - y_1) + \\ & + 6(1 + \nu) \left(\frac{a}{h}\right)^2 \frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a_k^0}{(k\pi)^4} \alpha T^- \left(\frac{1}{S_k^2} - 1\right) a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_k^{(2)}(y) = & \sum_m C^m \left\{ \left( \frac{k\pi}{a} \right)^2 \varphi_{km}^{(2)}(x) + \left[ \left( \frac{k\pi}{a} \right)^2 \left( \sum_m C_m^3 \varphi_{km}^{(2)}(y) \right) \varphi_{km}(y_2) \right] H(y - y_2) + \right. \\
& + \left. \left[ \left( \left( \frac{k\pi}{a} \right)^2 \sum_m C_m^4 \varphi_{km}^{(2)}(y) \right) (k\pi) \varphi_{km}^{(1)}(y_2) \right] H(y - y_2) \right\} + \\
& + \frac{(k\pi)^2}{a} \left[ \sum_m C_m^3 \varphi_{km}^{(2)}(y) \right] \langle 1 \rangle H(y - y_2) + \\
& + \frac{(k\pi)^2}{a} \left[ \sum_m C_m^4 \varphi_{km}^{(2)}(y) \right] \langle 2 \rangle H(y - y_2) + \frac{(k\pi)^2}{a} \left[ \sum_m (C_m^5)' \varphi_{km}^{(2)}(y) \right] H(y - y_2) + \\
& + \left[ (k\pi)^2 \sum_m \tilde{C}'_m \varphi_{km}^{(2)}(y) + \tilde{D}'_1 S_k^2 e^{\frac{S_k y}{a}} + \tilde{D}'_2 S_k^2 e^{-\frac{S_k y}{a}} \right] \frac{1}{a} H(y - y_0) + \\
& + \left[ (k\pi)^2 \sum_m \tilde{C}'_m \varphi_{km}^{(2)}(y) + \tilde{D}'_1 S_k^2 e^{\frac{S_k y}{a}} + \tilde{D}'_2 S_k^2 e^{-\frac{S_k y}{a}} + \tilde{D}'_3 2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \tilde{D}'_4 \right] \frac{1}{a} H(y - y_1),
\end{aligned}$$

здесь  $C_m^5 = (C_m^5)' a$ ,

$$\begin{aligned}
\langle 1 \rangle = & \sum_m \tilde{C}'_m \varphi_{km}(y_2) + \tilde{D}'_1 e^{\frac{S_k y_2}{a}} + \tilde{D}'_2 e^{-\frac{S_k y_2}{a}} + \tilde{D}'_3 + \\
& + \sum_m \tilde{C}'_m \varphi_{km}(y_2) + \tilde{D}'_1 e^{\frac{S_k y_2}{a}} + \tilde{D}'_2 e^{-\frac{S_k y_2}{a}} + \tilde{D}'_3 \left( \frac{y_2}{b} - \frac{y_1}{b} \right)^2 + \tilde{D}'_4 + \\
& + 6(1 + \nu) \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a_k^0}{(k\pi)^4} \alpha T^- \left( \frac{1}{S_k^2} - 1 \right), \\
\langle 2 \rangle = & k\pi \sum_m \tilde{C}'_m \varphi_{km}^{(1)}(y_2) + S_k \tilde{D}'_1 e^{\frac{S_k y_2}{a}} - S_k \tilde{D}'_2 e^{-\frac{S_k y_2}{a}} + \\
& + k\pi \sum_m \tilde{C}'_m \varphi_{km}^{(1)}(y_2) + S_k \tilde{D}'_1 e^{\frac{S_k y_2}{a}} - S_k \tilde{D}'_2 e^{-\frac{S_k y_2}{a}} + 2 \frac{a}{b} \tilde{D}'_3 \left( \frac{y_2}{b} - \frac{y_1}{b} \right).
\end{aligned}$$

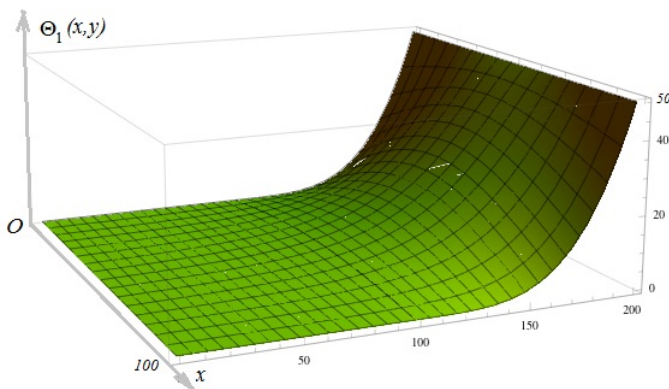


Рисунок 2.18 —  $\Theta_1(x, y)$ ,  $y_1^\ominus = \frac{b}{2}$ ,  $\theta_1^0 = 50$

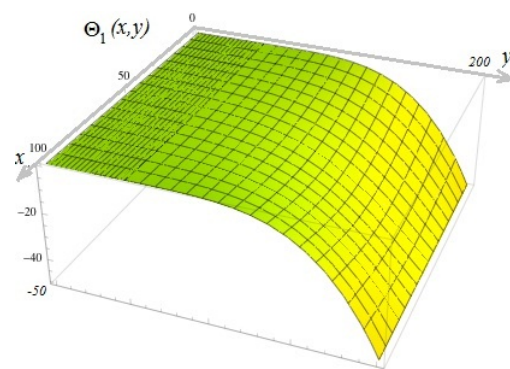


Рисунок 2.19 —  $\Theta_1(x, y)$ ,  $y_1^\ominus = \frac{b}{4}$ ,  $\theta_1^0 = -50$

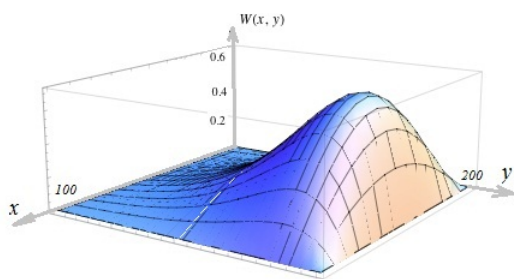


Рисунок 2.20 —  $w(x, y)$ ,  $y_1^\ominus = y_1^M = \frac{b}{2}$ ,  $M^0 = 50$ ,  $\theta_1^0 = 50$ ,  $w\left(\frac{a}{2}, \frac{4b}{5}\right) = 0,7211$

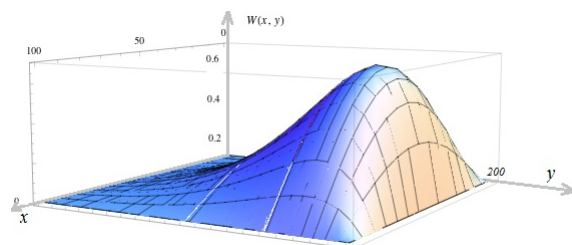


Рисунок 2.21 —  $w(x, y)$ ,  $y_1^\ominus = y_1^M = \frac{b}{2}$ ,  $y_2^p = \frac{3b}{4}$ ,  $M^0 = 50$ ,  $\theta_1^0 = 50$ ,  $w\left(\frac{a}{2}, \frac{4b}{5}\right) = 0,6883$

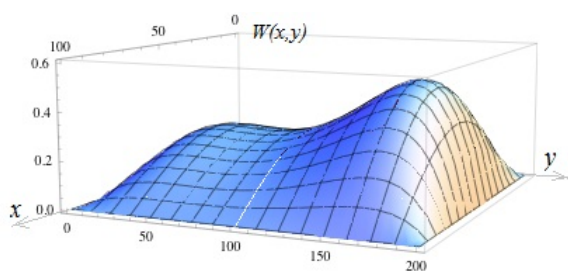


Рисунок 2.22 —  $w(x, y)$ ,  $y_1^\ominus = y_1^M = \frac{b}{2}$ ,  $M^0 = 50$ ,  $\theta_1^0 = 50$ ,  $w\left(\frac{a}{2}, \frac{4b}{5}\right) = 0,5123$

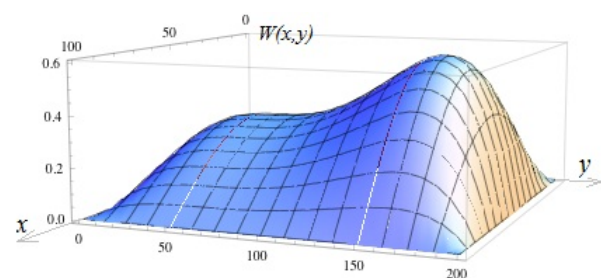


Рисунок 2.23 —  $w(x, y)$ ,  $y_1^\ominus = \frac{b}{4}$ ,  $y_1^M = \frac{3b}{4}$ ,  $M^0 = 50$ ,  $\theta_1^0 = 50$ ,  $w\left(\frac{a}{2}, \frac{4b}{5}\right) = 0,607$

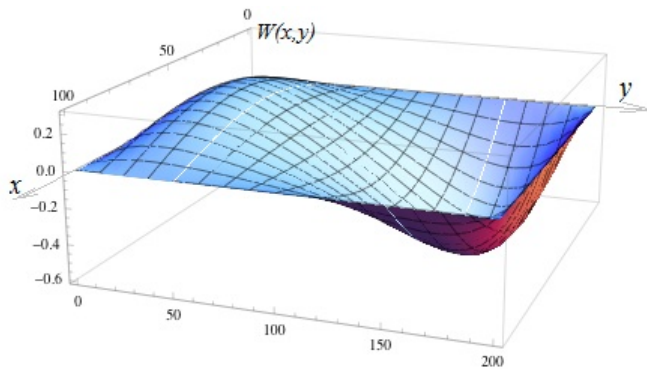


Рисунок 2.24 —  $w(x, y)$ ,  $y_1^\Theta = \frac{b}{4}$ ,  
 $y_1^M = \frac{3b}{4}$ ,  $M^0 = 50$ ,  $\theta_1^0 = -50$ ,  
 $w\left(\frac{a}{2}, \frac{4b}{5}\right) = -0,562$

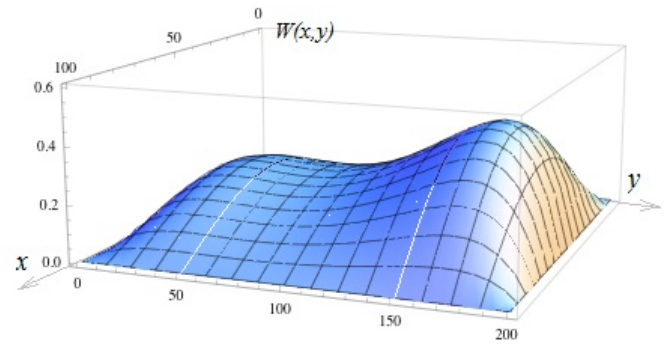


Рисунок 2.25 —  $w(x, y)$ ,  $y_1^\Theta = \frac{3b}{4}$ ,  
 $y_1^M = \frac{b}{4}$ ,  $M^0 = 50$ ,  $\theta_1^0 = 50$ ,  
 $w\left(\frac{a}{2}, \frac{4b}{5}\right) = 0,433$

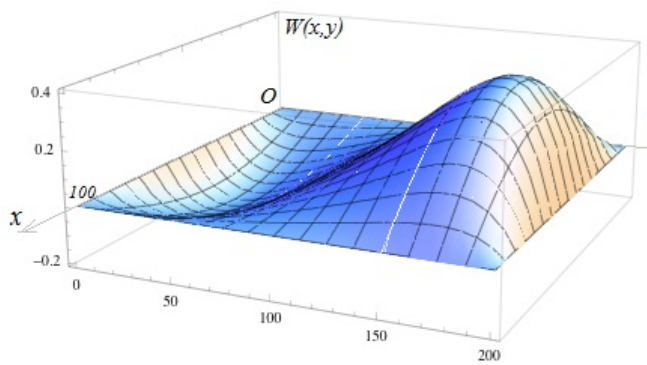


Рисунок 2.26 —  $w(x, y)$ ,  $y_1^\Theta = \frac{3b}{4}$ ,  
 $y_1^M = \frac{b}{4}$ ,  $M^0 = -50$ ,  $\theta_1^0 = 50$ ,  
 $w\left(\frac{a}{2}, \frac{4b}{5}\right) = 0,408$

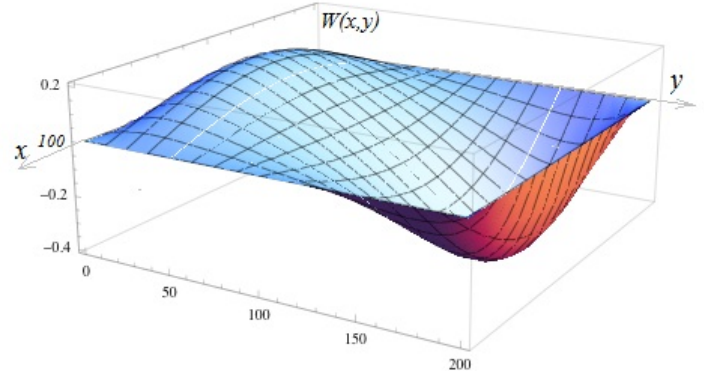


Рисунок 2.27 —  $w(x, y)$ ,  $y_1^\Theta = \frac{3b}{4}$ ,  
 $y_1^M = \frac{b}{4}$ ,  $M^0 = 50$ ,  $\theta_1^0 = -50$ ,  
 $w\left(\frac{a}{2}, \frac{4b}{5}\right) = -0,408$

На рисунках 2.18 - 2.27 приводятся изображения термических поверхностей и поверхностей прогиба геометрически нерегулярной пластинки.

Количественный анализ функции прогиба проводился с учетом конфигурации термической поверхности, изображения которой приводятся на рисунки 2.18, 2.19. Рассматривались различные случаи температурного и силового нагружений границ пластинки: воздействия в одном направлении из одной точки (рисунки 2.20, 2.21); в противоположных направлениях из той же точки (рисунок 2.22); в противоположных направлениях с пересечением из двух точек (рисунки 2.23, 2.24) и в противоположных направлениях без пересечения из тех же точек (рисунок 2.25,

2.26, 2.27). Во всех случаях, при указанных значениях параметров геометрического толка:  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{a}{h} = 100$ ,  $\frac{h_1}{h} = 2$ ,  $\frac{b_1}{b} = 0,01$  – области наибольших прогибов пластинки находятся в области наибольших значений температуры. Прогиб пластинки значительно менее чувствителен к интенсивности силовой нагрузки на границе по сравнению с перепадом температуры по толщине при прочих равных условиях.

Важно отметить, что постановка подкрепляющего элемента в виде «сжатого» ребра во всех рассмотренных случаях приводит к уменьшению величины прогиба пластинки.

### 3 Континуальная модель композиций из оболочек вращения, гладко сопряженных между собой

В этой главе на основании определения обобщенного вектора положения любой точки срединной поверхности композиции из оболочек вращения, гладко сопряженных между собой, методами теории поверхностей определяются обобщенные параметры Ламе и главные кривизны композиции. Во всех рассмотренных случаях проверяется выполнение условий Кодацци-Гаусса. Такой подход позволяет, при решении статических (и динамических) задач композиций, исходить из известных уравнений теории оболочек в триортогональных криволинейных координатах, полученных на основе различных по степени точности гипотез. Под гладким сопряжением понимаем случай равенства нулю коэффициентов и их первых производных при функциях Хевисайда в точках, где они не определены, но ограничены. Под сопряжением будем понимать случай равенства нулю коэффициентов при функциях Хевисайда в точках где они не определены, но ограничены.

Некоторые из результатов изложенных в этой главе содержатся в работах [21], [22], [23].

#### 3.1 Геометрия срединной поверхности композиции из гладко сопряженных оболочек вращения

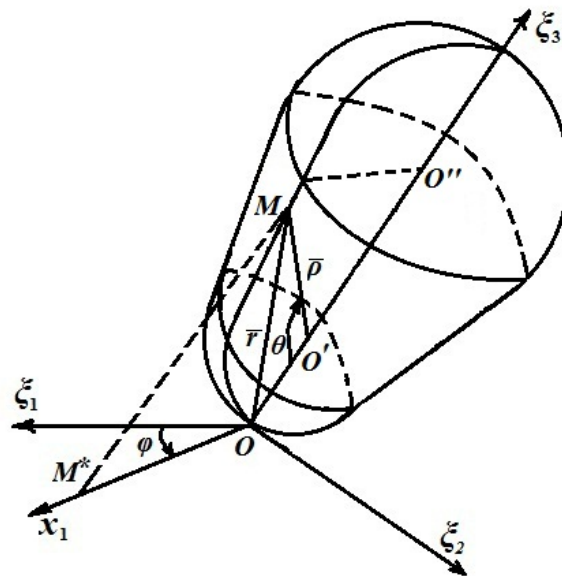


Рисунок 3.1



Основная идея определения вектора-положения  $\bar{r}(\alpha^1, \alpha^2)$  любой точки срединной поверхности композиции из  $n$  элементов заключается в конкретизации структуры правой части равенства

$$\bar{r}(\alpha^1, \alpha^2) = \bar{r}_1(\alpha^1, \alpha^2) + \sum_{i=1}^n (\bar{r}_{i+1}(\alpha^1, \alpha^2) - \bar{r}_i(\alpha^1, \alpha^2)) H(\alpha^1 - \alpha_i^1) \quad (3.1)$$

с учетом подходящей единой идентификации точек срединных поверхностей элементов композиции  $\bar{r}_i(\alpha^1, \alpha^2)$  и выполнении равенств  $\bar{r}_{i+1}(\alpha_i^1) = \bar{r}_i(\alpha_i^1)$ ,

$\frac{\partial \bar{r}_{i+1}}{\partial \alpha^1} \Big|_{\alpha^1=\alpha_i^1} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \alpha^1} \Big|_{\alpha^1=\alpha_i^1}$  при которых функции Хевисайда неопределены, но ограничены.

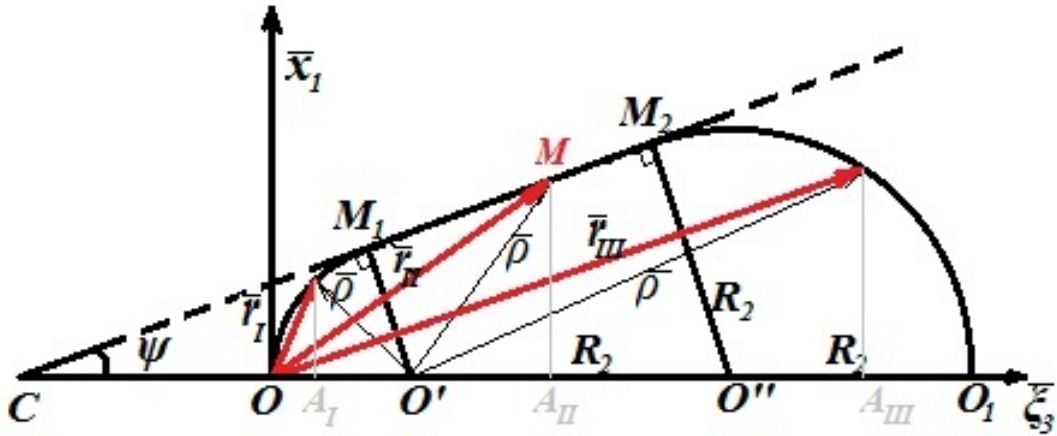


Рисунок 3.2

В качестве примера рассмотрим композицию из трех элементов «сфера–конус–сфера» изображенную на рисунке 3.1 отнесенную к декартовым координатам  $\xi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) с началом в точке  $O$  (на оси  $O\xi_3$ ) между отрицательным направлением оси  $O\xi_3$  и вспомогательным вектором  $\bar{\rho}$ , определяющим положение любой точки  $M$  меридиональной кривой относительно полюса  $O'$ .

Меридиональная кривая композиции, полученная от пересечения поверхности композиции плоскостью  $\pi(x_1 O\xi_3)$  изображена на рисунке 3.2.

Вектор положения  $\bar{r}$  любой точки указанной меридиональной кривой на основании равенств:

на  $\smile OM_1$

$$\bar{r}_I = (R_1 - R_1 \cos \theta) \bar{\xi}_3 + R_1 \sin \theta \bar{x}_1; \quad (3.2)$$

на  $\smile M_1M_2$

$$\bar{r}_{II} = \left( R_1 - \frac{R_1 \cos \theta}{\sin(\theta + \psi)} \right) \bar{\xi}_3 + \frac{R_1 \sin \theta}{\sin(\theta + \psi)} \bar{x}_1; \quad (3.3)$$

на  $\smile M_2O_1$

$$\bar{r}_{III} = (R_1 + R_2 + R_2 \cos 2\theta) \bar{\xi}_3 + R_2 \sin(2\pi - 2\theta) \bar{x}_1;$$

запишется в виде аналогичном (3.1)

$$\tilde{r} = \bar{r}_I(\theta) + (\bar{r}_{II} - \bar{r}_I)H(\theta - \theta_1) + (\bar{r}_{III} - \bar{r}_{II})H(\theta - \theta_2), \quad (3.4)$$

где  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ ) углы стыка элементов композиции:  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \psi$ ,  $\theta_2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\psi}{2}$ .

Введем в рассмотрение проектор  $\bar{\xi}_1 \otimes \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 \otimes \bar{\xi}_2$  и запишем выражение для обобщенного вектора - положения любой точки срединной поверхности композиции

$$\begin{aligned} \bar{r}(\theta, \varphi) &= \tilde{r}(\theta) \cdot (\bar{\xi}_1 \otimes \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 \otimes \bar{\xi}_2) = \\ &= \left\langle R_1(1 - \cos \theta) + \left( R_1 \frac{\sin(\theta + \psi) - \cos \theta}{\sin(\theta + \psi)} - R_1(1 - \cos \theta) \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\ &\quad \left. + \left( R_2(1 + \cos 2\theta) - \frac{-R_2 \cos \theta}{\sin(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle \bar{\xi}_3 + \\ &\quad + \left\langle R_1 \sin \theta + \left( \frac{R_1 \sin \theta}{\sin(\theta + \psi)} - R_1 \sin \theta \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\ &\quad \left. + \left( R_2 \sin(2\pi - 2\theta) - \frac{R_1 \sin \theta}{\sin(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle (\cos \varphi \bar{\xi}_1 + \sin \varphi \bar{\xi}_2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Связь между радиусами сфер  $R_1$  и  $R_2$  и углом конуса  $\psi$  имеет вид

$$R_1 = R_2(1 - \sin \psi). \quad (3.6)$$

Для определения компонент метрического тензора  $G_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) срединной поверхности композиции вычислим частные производные от обобщенного вектора положения (3.5) и запишем

$$\begin{aligned} \bar{r}_{,1} &= \left\langle R_1 \sin \theta + \left( \frac{R_1 \cos \psi}{\sin^2(\theta + \psi)} - R_1 \sin \theta \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\ &\quad \left. + \left( -2R_2 \sin 2\theta - \frac{R_1 \cos \psi}{\sin^2(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle \bar{\xi}_3 + \\ &\quad + \left\langle R_1 \cos \theta + \left( \frac{R_1 \sin \psi}{\sin^2(\theta + \psi)} - R_1 \cos \theta \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -2R_2 \cos(2\pi - 2\theta) - \frac{R_1 \sin \psi}{\sin^2(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \rangle (\cos \varphi_{\xi_1} + \sin \varphi_{\xi_2}); \\
\bar{r}_{,2} & = \left\langle R_1 \sin \theta + \left( \frac{R_1 \sin \theta}{\sin(\theta + \psi)} - R_1 \sin \theta \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& \left. + \left( R_2 \sin(2\pi - 2\theta) - \frac{R_1 \sin \theta}{\sin(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle (-\sin \varphi_{\xi_1} + \cos \varphi_{\xi_2}).
\end{aligned}$$

Сингулярные компоненты метрического тензора  $G_{ij}$  и параметры Ламе  $\sqrt{G_{ij}}$  примут вид

$$\begin{aligned}
G_{11} = (\bar{r}_{,1})^2 & = \left\langle R_1^2 + \left( \frac{R_1^2}{\sin^4(\theta + \psi)} - R_1^2 \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& \left. + \left( 4R_2^2 - \frac{R_1^2}{\sin^4(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle; \tag{3.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{22} = (\bar{r}_{,2})^2 & = \left\langle R_1^2 \sin^2 \theta + \left( \frac{R_1^2 \sin^2 \theta}{\sin^2(\theta + \psi)} - R_1^2 \sin^2 \theta \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& \left. + \left( R_2^2 \sin^2(2\pi - 2\theta) - \frac{R_1^2 \sin^2 \theta}{\sin^2(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle;
\end{aligned}$$

$$G_{12} = \bar{r}_{,1} \cdot \bar{r}_{,2} = 0.$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{G_{11}} & = \left\langle R_1 + \left( \frac{R_1}{\sin^2(\theta + \psi)} - R_1 \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& \left. + \left( 2R_2 - \frac{R_1}{\sin^2(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle; \tag{3.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{G_{22}} & = \left\langle R_1 \sin \theta + \left( \frac{R_1 \sin \theta}{\sin(\theta + \psi)} - R_1 \sin \theta \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& \left. + \left( R_2 \sin(2\pi - 2\theta) - \frac{R_1 \sin \theta}{\sin(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Единичные векторы локального триортогонального базиса  $\left( \frac{\bar{r}_{,1}}{\sqrt{G_{11}}}, \frac{\bar{r}_{,2}}{\sqrt{G_{22}}}, \bar{m} \right)$  срединной поверхности композиции запишутся:

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{r}_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} & = \langle \sin \theta + (\cos \theta - \sin \theta) H(\theta - \theta_1) + \\
& + (-\sin 2\theta - \cos \psi) H(\theta - \theta_2) \rangle \bar{\xi}_3 + \langle \cos \theta + (\sin \psi - \cos \theta) H(\theta - \theta_1) + \\
& + (-\cos(2\pi - 2\theta) - \sin \psi) H(\theta - \theta_2) \rangle (\cos \varphi_{\xi_1} + \sin \varphi_{\xi_2}); \\
\frac{\bar{r}_{,2}}{\sqrt{G_{22}}} & = -\sin \varphi_{\xi_1} + \cos \varphi_{\xi_2};
\end{aligned}$$

(3.10)

$$\begin{aligned}
\bar{m} &= \frac{\bar{r}_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \times \frac{\bar{r}_{,2}}{\sqrt{G_{22}}} = \\
&= -\cos \varphi \langle \sin \theta + (\cos \psi - \sin \theta) H(\theta - \theta_1) + (-\sin 2\theta - \cos \psi) H(\theta - \theta_2) \rangle \bar{\xi}_1 - \\
&\quad - \sin \varphi \langle \sin \theta + (\cos \psi - \sin \theta) H(\theta - \theta_1) + (-\sin 2\theta - \cos \psi) H(\theta - \theta_2) \rangle \bar{\xi}_2 + \\
&\quad + \langle \cos \theta + (\sin \psi - \cos \theta) H(\theta - \theta_1) + (-\cos 2\theta - \sin \psi) H(\theta - \theta_2) \rangle \bar{\xi}_3.
\end{aligned}$$

Главные кривизны срединной поверхности

$$k_i = \bar{m} \cdot \frac{\bar{r}_{,ii}}{G_{ii}} \quad (i = 1, 2), \quad (3.11)$$

на основании конкретизации вторых производных  $\bar{r}_{,ii}$  ( $i = 1, 2$ )

$$\begin{aligned}
\bar{r}_{,11} &= - \left\langle R_1 \sin \theta + \left( \frac{2R_1 \sin \psi \cos(\theta + \psi)}{\sin^3(\theta + \psi)} - R_1 \sin \theta \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
&\quad \left. + \left( -4R_2 \sin 2\theta - \frac{2R_1 \sin \psi \cos(\theta + \psi)}{\sin^3(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle (\cos \varphi \bar{\xi}_1 + \sin \varphi \bar{\xi}_2) + \\
&\quad + \left\langle R_1 \cos \theta + \left( -\frac{2R_1 \cos \psi \cos(\theta + \psi)}{\sin^3(\theta + \psi)} - R_1 \cos \theta \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
&\quad \left. + \left( -4R_2 \cos 2\theta - \frac{-2R_1 \cos \psi \cos(\theta + \psi)}{\sin^3(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle \bar{\xi}_3; \\
\bar{r}_{,22} &= \left\langle R_1 \sin \theta + \left( \frac{R_1 \sin \theta}{\sin(\theta + \psi)} - R_1 \sin \theta \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
&\quad \left. + \left( -R_2 \sin 2\theta - \frac{R_1 \sin \theta}{\sin(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle (-\cos \varphi \bar{\xi}_1 - \sin \varphi \bar{\xi}_2) \\
\frac{\bar{r}_{,11}}{G_{11}} &= - \left\langle \frac{\sin \theta}{R_1} + \left( \frac{\sin \psi \sin(2\theta + 2\psi)}{R_1} - \frac{\sin \theta}{R_1} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{-\sin 2\theta}{R_2} - \frac{\sin \psi \sin(2\theta + 2\psi)}{R_1} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle (\cos \varphi \bar{\xi}_1 + \sin \varphi \bar{\xi}_2) + \\
&\quad + \left\langle \frac{\cos \theta}{R_1} + \left( \frac{-\cos \psi \sin(2\theta + 2\psi)}{R_1} - \frac{\cos \theta}{R_1} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{-\cos 2\theta}{R_2} - \frac{-\cos \psi \sin(2\theta + 2\psi)}{R_1} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle \bar{\xi}_3; \\
\frac{\bar{r}_{,22}}{G_{22}} &= \left\langle \frac{1}{R_1 \sin \theta} + \left( \frac{\sin(\theta + \psi)}{R_1 \sin \theta} \right) H(\theta - \theta_1) + \right.
\end{aligned} \quad (3.12)$$

$$+ \left\langle \left( \frac{1}{R_2 \sin(2\pi - 2\theta)} - \frac{\sin(\theta + \psi)}{R_1 \sin \theta} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle (-\cos \varphi \bar{\xi}_1 - \sin \varphi \bar{\xi}_2);$$

преобразуются к виду

$$k_1 = \left\langle \frac{1}{R_1} + \left[ 0 - \frac{1}{R_1} \right] H(\theta - \theta_1) + \left[ \frac{1}{R_2} - 0 \right] H(\theta - \theta_2) \right\rangle, \quad (3.13)$$

$$k_2 = \left\langle \frac{1}{R_1} + \left[ \frac{\cos \psi \sin(\theta + \psi)}{R_1 \sin \theta} - \frac{1}{R_1} \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{R_2} - \frac{\cos \psi \sin(\theta + \psi)}{R_1 \sin \theta} \right] H(\theta - \theta_2) \right\rangle. \quad (3.14)$$

В приложении Ж помещены доказанные равенства в виде формул по которым проводились алгебраические операции со структурами в виде сумм произведений непрерывных функций на функции Хевисайда.

Докажем, что обобщенные параметры Ламе и главные кривизны удовлетворяют условиям Кодацци – Гаусса [42], [36], [104]

$$\left( \sqrt{G_{ii}} k_i \right)_{,j} = \left( \sqrt{G_{ii}} \right)_{,j} k_j, \quad i \neq j = 1, 2; \quad (3.15)$$

$$\left( \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1} + \left( \frac{(\sqrt{G_{11}})_{,2}}{\sqrt{G_{22}}} \right)_{,2} = -k_1 k_2 \sqrt{G_{11} G_{22}}. \quad (3.16)$$

Действительно, в случае равенств (3.15) получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{G_{22}} k_2 &= \sin \theta + [\cos \psi - \sin \theta] H(\theta - \theta_1) + [\sin(2\pi - 2\theta) - \cos \psi] H(\theta - \theta_2), \\ \underline{(\sqrt{G_{22}} k_2)_{,1}} &= \underline{\cos \theta + [0 - \cos \theta] H(\theta - \theta_1) + [-2 \cos(2\pi - 2\theta) - 0] H(\theta - \theta_2)}, \\ (\sqrt{G_{22}})_{,1} &= R_1 \cos \theta + \left[ \frac{R_1 \sin \psi}{\sin^2(\theta + \psi)} - R_1 \cos \theta \right] H(\theta - \theta_1) + \\ &+ \left[ -2R_2 \cos(2\pi - 2\theta) - \frac{R_1 \sin \psi}{\sin^2(\theta + \psi)} \right] H(\theta - \theta_2), \\ \underline{(\sqrt{G_{22}})_{,1} k_1} &= \underline{\cos \theta + [0 - \cos \theta] H(\theta - \theta_1) +} \\ &+ \underline{[-2 \cos(2\pi - 2\theta) - 0] H(\theta - \theta_2)}. \end{aligned}$$

Верно.

Проверка равенства (3.16)

$$\begin{aligned}
\frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} &= \cos \theta + [\sin \psi - \cos \theta] H(\theta - \theta_1) + \\
&+ [-\cos(2\pi - 2\theta) - \sin \psi] H(\theta - \theta_2), \\
\left(\frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}}\right)_{,1} &= -\langle \sin \theta + [0 - \sin \theta] H(\theta - \theta_1) + \\
&+ [2 \sin(2\pi - 2\theta) - 0] H(\theta - \theta_2) \rangle, \\
\sqrt{G_{11}G_{22}} &= R_1^2 \sin \theta + \left[ \frac{R_1^2 \sin \theta}{\sin^3(\theta + \psi)} - R_1^2 \sin \theta \right] H(\theta - \theta_1) + \\
&+ \left[ 2R_2^2 \sin(2\pi - 2\theta) - \frac{R_1^2 \sin \theta}{\sin^3(\theta + \psi)} \right] H(\theta - \theta_2), \\
\left(\frac{(\sqrt{G_{11}})_{,2}}{\sqrt{G_{22}}}\right)_{,2} &= 0, \\
-k_1 k_2 &= -\left\langle \frac{1}{R_1^2} + \left[0 - \frac{1}{R_1^2}\right] H(\theta - \theta_1) + \left[\frac{1}{R_2^2} - 0\right] H(\theta - \theta_2) \right\rangle, \\
-k_1 k_2 \sqrt{G_{11}G_{22}} &= -\langle \sin \theta + [0 - \sin \theta] H(\theta - \theta_1) + \\
&+ [2 \sin(2\pi - 2\theta) - 0] H(\theta - \theta_2) \rangle.
\end{aligned}$$

Верно.

Для других композиций из оболочек вращения и оболочки состоящей из цилиндров и плоскости приведем обобщенные вектора положения любой точки срединной поверхности, компоненты метрического тензора, главные кривизны (без вывода) и проверку условий Гаусса-Кодацци.

### Сфера - конус (Рис. 3.3)

$$\begin{aligned}
\bar{r}(\theta, \varphi) &= R \left\langle \sin \theta + \left[ \frac{\sin(\pi - \theta)}{\sin(\theta - \psi)} - \sin \theta \right] H(\theta - \theta_1) \right\rangle (\cos \varphi \bar{\xi}_1 + \sin \varphi \bar{\xi}_2) + \\
&+ R \left\langle 1 - \cos \theta + \left[ 1 - \cos \theta - \left( 1 + \frac{\cos(\pi - \theta)}{\sin(\theta - \psi)} \right) \right] H(\theta - \theta_1) \right\rangle \bar{\xi}_3, \\
\theta_1 &= \frac{\pi}{2} + \psi.
\end{aligned}$$

Параметры Ламе:

$$\sqrt{G_{11}} = R \left\langle 1 + \left( \frac{1}{\cos^2(\theta - \frac{\pi}{2} - \psi)} - 1 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle, \quad (3.17)$$

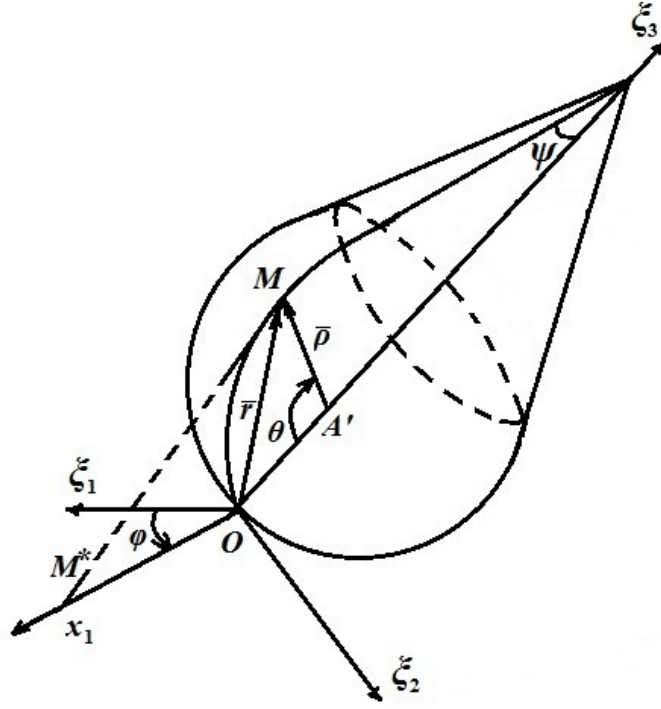


Рисунок 3.3

$$\sqrt{G_{22}} = R \left\langle \sin \theta + \left( \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\theta - \frac{\pi}{2} - \psi)} - \sin \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle. \quad (3.18)$$

Главные кривизны:

$$k_1 = \frac{1}{R} \langle 1 + (0 - 1) H(\theta - \theta_1) \rangle, \quad (3.19)$$

$$k_2 = \frac{1}{R} \left\langle 1 + \left( \frac{\cos \psi \sin(\theta - \psi)}{\sin \theta} - 1 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle. \quad (3.20)$$

Проверка равенства (3.15):

$$(k_1 \sqrt{G_{11}})_{,2} = 0, \quad (\sqrt{G_{11}})_{,2} = 0,$$

$$k_2 \sqrt{G_{22}} = \sin \theta + (\cos \theta - \sin \theta) H(\theta - \theta_1),$$

$$\underline{(k_2 \sqrt{G_{22}})_{,1} = \cos \theta + (0 - \cos \theta) H(\theta - \theta_1),}$$

$$(\sqrt{G_{22}})_{,1} = R \left\langle \cos \theta + \left( -\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \psi)}{\cos^2(\theta - \frac{\pi}{2} - \psi)} - \cos \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle,$$

$$\underline{k_2 (\sqrt{G_{22}})_{,1} = \cos \theta + (0 - \cos \theta) H(\theta - \theta_1).}$$

Верно.

Проверка равенства (3.16):

$$\left( \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1} = - \langle \sin \theta + (0 - \sin \theta) H(\theta - \theta_1) \rangle,$$

$$k_1 k_2 \sqrt{G_{11} G_{22}} = - \langle \sin \theta + (0 - \sin \theta) H(\theta - \theta_1) \rangle.$$

Верно.

**Конус - сфера - конус (Рис. 3.4)**

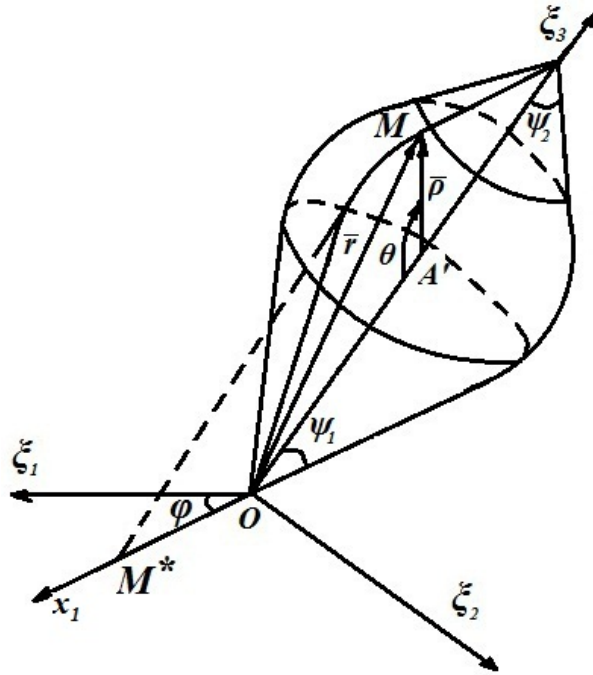


Рисунок 3.4

Обобщенный вектор положения точек срединной поверхности композиции

$$\begin{aligned} \bar{r}(\theta, \varphi) = & R \left\langle \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \psi_1)} + \left[ \sin \theta - \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \psi_1)} \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\sin(\pi - \theta)}{\sin(\pi - \theta + \psi_2)} - \sin \theta \right] H(\theta - \theta_2) \right\rangle (\cos \varphi \bar{\xi}_1 + \sin \varphi \bar{\xi}_2) + \\ & + R \left\langle \frac{\sin \theta \operatorname{ctg} \psi_1}{\sin(\theta + \psi_1)} + \left[ \frac{1}{\sin \psi_1} - \cos \theta - \frac{\sin \theta \operatorname{ctg} \psi_1}{\sin(\theta + \psi_1)} \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\ & \left. + \left[ \left( \frac{1}{\sin \psi_1} + \frac{\cos(\pi \theta)}{\sin(\pi - \theta + \psi_2)} \right) - \left( \frac{1}{\sin \psi_1} - \cos \theta \right) \right] H(\theta - \theta_2) \right\rangle \bar{\xi}_3, \end{aligned}$$



$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \psi; \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \psi.$$

Параметры Ламе:

$$\begin{aligned} \sqrt{G_{11}} = R \left\langle \frac{1}{\sin^2(\theta + \psi_1)} + \left[ 1 - \frac{1}{\sin^2(\theta + \psi_1)} \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{\sin^2(\pi - \theta + \psi_2)} - 1 \right] H(\theta - \theta_2) \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{G_{22}} = R \left\langle \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \psi_1)} + \left[ \sin \theta - \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \psi_1)} \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\sin(\pi - \theta)}{\sin(\pi - \theta + \psi_2)} - \sin \theta \right] H(\theta - \theta_2) \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.22)$$

Главные кривизны:

$$k_1 = \frac{1}{R} \langle 0 + [1 - 0] H(\theta - \theta_1) + [0 - 1] H(\theta - \theta_2) \rangle, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} k_2 = \frac{1}{R} \left\langle \frac{\cos \psi_1 \sin(\theta + \psi_1)}{\sin \theta} + \left( 1 - \frac{\cos \psi_1 \sin(\theta + \psi_1)}{\sin \theta} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\cos \psi_2 \sin(\pi - \theta + \psi_2)}{\sin(\pi - \theta)} - 1 \right] H(\theta - \theta_4) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Проверка равенства (3.15):

$$\begin{aligned} \sqrt{G_{22}} k_2 = \langle \cos \psi_1 + [\sin \theta - \cos \psi_1] H(\theta - \theta_1) + \\ + [\cos \psi_2 - \sin \theta] H(\theta - \theta_2) \rangle, \end{aligned}$$

$$\underline{(\sqrt{G_{22}} k_2)_{,1} = \langle 0 + [\cos \theta - 0] H(\theta - \theta_1) + [0 - \cos \theta] H(\theta - \theta_2) \rangle},$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{G_{22}})_{,1} = R \left\langle \frac{\sin \psi_1}{\sin^2(\theta + \psi_1)} + \left[ \cos \theta - \frac{\sin \psi_1}{\sin^2(\theta + \psi_1)} \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{-\sin \psi_2}{\sin^2(\pi - \theta + \psi_2)} - \cos \theta \right] H(\theta - \theta_2) \right\rangle, \end{aligned}$$

$$\underline{(\sqrt{G_{22}})_{,1} k_1 = \langle 0 + [\cos \theta - 0] H(\theta - \theta_1) + [0 - \cos \theta] H(\theta - \theta_2) \rangle}.$$

Верно.

Проверка равенства (3.16):

$$\frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} = \langle \sin \psi_1 + [\cos \theta - \sin \psi_1] H(\theta - \theta_1) + [-\sin \psi_2 - \cos \theta] H(\theta - \theta_2) \rangle,$$

$$\left( \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1} = - \langle 0 + [\sin \theta - 0] H(\theta - \theta_1) + [0 - \sin \theta] H(\theta - \theta_2) \rangle,$$

$$\sqrt{G_{11}G_{22}} = R^2 \left\langle \frac{\sin \theta}{\sin^3(\theta + \psi_1)} + \left[ \sin \theta - \frac{\sin \theta}{\sin^3(\theta + \psi_1)} \right] H(\theta - \theta_1) + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{\sin(\pi - \theta)}{\sin^3(\pi - \theta + \psi_2)} \right] H(\theta - \theta_2) \right\rangle,$$

$$k_1 k_2 = \frac{1}{R^2} \langle 0 + [1 - 0] H(\theta - \theta_1) + [0 - 1] H(\theta - \theta_2) \rangle,$$

$$\underline{-k_1 k_2 \sqrt{G_{11}G_{22}} = - \langle 0 + [\sin \theta - 0] H(\theta - \theta_1) + [0 - \sin \theta] H(\theta - \theta_2) \rangle}.$$

Верно.

Конус - сфера - цилиндр - сфера (Рис. 3.5)

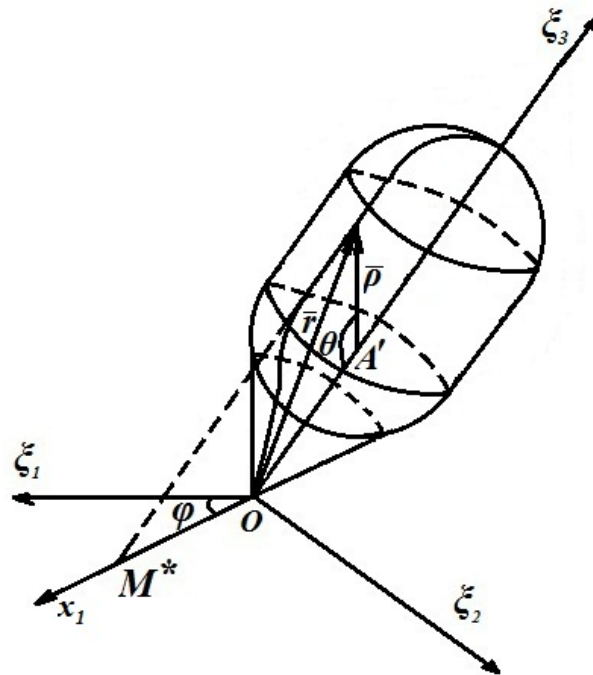


Рисунок 3.5

Обобщенный вектор положения точек срединной поверхности композиции

$$\begin{aligned}
\bar{r}(\theta, \varphi) = & R \left\langle \frac{\sin \theta}{\sin(\psi + \theta)} + \left[ \sin \theta - \frac{\sin \theta}{\sin(\psi + \theta)} \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& + [1 - \sin \theta] H(\theta - \theta_2) + [\sin(2\pi - 2\theta) - 1] H(\theta - \theta_3) \rangle (\cos \varphi \bar{\xi}_1 + \sin \varphi \bar{\xi}_2) + \\
& + R \left\langle \frac{\sin \theta}{\operatorname{tg} \psi \sin(\psi + \theta)} + \left[ \frac{1}{\sin \psi} - \cos \psi - \frac{\sin \theta}{\operatorname{tg} \psi \sin(\psi + \theta)} \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& + \left[ \frac{1}{\sin \psi} + \operatorname{ctg}(\pi - \theta) - \left( \frac{1}{\sin \psi} - \cos \theta \right) \right] H(\theta - \theta_2) + \\
& + \left. \left[ \frac{1}{\sin \psi} + 1 + \cos(2\pi - 2\theta) - \left( \frac{1}{\sin \psi} + \operatorname{ctg}(\pi - \theta) \right) \right] H(\theta - \theta_3) \right\rangle \bar{\xi}_3, \\
\theta_1 = & \frac{\pi}{2} - \psi; \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}; \quad \theta_3 = \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Параметры Ламе и главные кривизны:

$$\begin{aligned}
\sqrt{G_{11}} = & R \left\langle \frac{1}{\sin^2(\psi + \theta)} + \left[ 1 - \frac{1}{\sin^2(\psi + \theta)} \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& + \left[ \frac{1}{\sin^2(\pi - \theta) - 1} \right] H(\theta - \theta_2) + \left. \left[ 2 - \frac{1}{\sin^2(\pi - \theta)} \right] H(\theta - \theta_3) \right\rangle; \quad (3.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{G_{22}} = & R \left\langle \frac{\sin \theta}{\sin(\psi + \theta)} + \left[ \sin \theta - \frac{\sin \theta}{\sin(\psi + \theta)} \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& + [1 - \sin \theta] H(\theta - \theta_2) + [\sin(2\pi - 2\theta) - 1] H(\theta - \theta_3) \rangle; \quad (3.26)
\end{aligned}$$

$$k_1 = \frac{1}{R} \langle 0 + (1 - 0)H(\theta - \theta_1) + [0 - 1] H(\theta - \theta_2) + [1 - 0] H(\theta - \theta_3) \rangle; \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
k_2 = & \frac{1}{R} \left\langle \frac{\cos \theta \sin(\psi + \theta)}{\sin \theta} + \left[ 1 - \frac{\cos \theta \sin(\psi + \theta)}{\sin \theta} \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& + [1 - 1] H(\theta - \theta_2) + [1 - 1] H(\theta - \theta_3) \rangle. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Проверка равенства (3.15):

$$(\sqrt{G_{11}}k_2)_{,2} = (\sqrt{G_{11}})_{,2} k_2, \quad 0 = 0.$$

Верно.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{G_{22}}k_2 = \cos \psi + [\sin \theta - \cos \psi] H(\theta - \theta_1) + \\
& + [1 - \sin \theta] H(\theta - \theta_2) + [\sin(2\pi - 2\theta) - 1] H(\theta - \theta_3), \\
& \underline{(\sqrt{G_{22}}k_2)_{,1} = 0 + [\cos \theta - 0] H(\theta - \theta_1) + [0 - \cos \theta] h(\theta - \theta_2) +} \\
& + \underline{[-2 \cos(2\pi - 2\theta) - 0] H(\theta - \theta_3)}, \\
& (\sqrt{G_{22}})_{,1} = R \left\langle \frac{\sin \psi}{\sin^2(\psi+\theta)} + \left[ \cos \theta - \frac{\sin \psi}{\sin^2(\psi+\theta)} \right] H(\theta - \theta_1) \right. \\
& + [0 - \cos \theta] H(\theta - \theta_2) + \left. [-2 \cos(2\pi - 2\theta - 0)] H(\theta - \theta_3) \right\rangle; \\
& \underline{k_1 (\sqrt{G_{22}})_{,1} = 0 + [\cos \theta - 0] H(\theta - \theta_1) +} \\
& + \underline{[0 - \cos \theta] H(\theta - \theta_2) + [-2 \cos(2\pi - 2\theta) - 0] H(\theta - \theta_3)}.
\end{aligned}$$

Верно.

Проверка равенства (3.16):

$$\begin{aligned}
& \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} = \sin \psi + [\cos \theta - \sin \psi] H(\theta - \theta_1) + \\
& + [0 - \cos \theta] H(\theta - \theta_2) + [-2 \cos(2\pi - 2\theta) - 0] H(\theta - \theta_3), \\
& \underline{\left( \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1} = 0 + [-\sin \theta - 0] H(\theta - \theta_1) +} \\
& + \underline{[0 - (-\sin \theta)] H(\theta - \theta_2) + [-2 \sin(2\pi - 2\theta)] H(\theta - \theta_3)}, \\
& \sqrt{G_{11}G_{22}} = R^2 \left\langle \frac{\sin \theta}{\sin^3(\psi+\theta)} + \left[ \sin \theta - \frac{\sin \theta}{\sin^3(\psi+\theta)} \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& + \left[ \frac{1}{\sin^2(\pi-\theta) - \sin \theta} \right] H(\theta - \theta_2) + \left. \left[ 2 \sin(2\pi - 2\theta) - \frac{1}{\sin^2(\pi-\theta)} \right] H(\theta - \theta_3) \right\rangle, \\
& \underline{-\sqrt{G_{11}G_{22}}k_1k_2 = - \langle 0 + [\sin \theta - 0] H(\theta - \theta_1) +} \\
& + \underline{[0 - \sin \theta] H(\theta - \theta_2) + [2 \sin(2\pi - 2\theta) - 0] H(\theta - \eta_3) \rangle}.
\end{aligned}$$

Верно.

## Сфера-Цилиндр

Обобщенный вектор положения, параметры Ламе и главные кривизны:

$$\begin{aligned} \bar{r}(\theta, \varphi) = R \langle \sin \theta + [1 - \sin \theta] H(\theta - \theta_1) \rangle (\cos \varphi \bar{\xi}_1 + \sin \varphi \bar{\xi}_2) + \\ + R \langle 1 - \cos \theta + [1 + \operatorname{ctg}(\pi - \theta) - (1 - \cos \theta)] H(\theta - \theta_1) \rangle \bar{\xi}_3; \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\sqrt{G_{11}} = R \left\langle 1 + \left[ \frac{1}{\sin^2(\pi - \theta)} - 1 \right] H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \quad (3.29)$$

$$\sqrt{G_{22}} = R \langle \sin \theta + [1 - \sin \theta] H(\theta - \theta_1) \rangle, \quad (3.30)$$

$$k_1 = \frac{1}{R} \langle 1 + (0 - 1)H(\theta - \theta_1) \rangle; \quad (3.31)$$

$$k_2 = \frac{1}{R} \langle 1 + (1 - 1)H(\theta - \theta_1) \rangle. \quad (3.32)$$

Проверка равенства (3.15):

$$k_1 \sqrt{G_{11}} = \sin \theta + [0 - \sin \theta] H(\theta - \theta_1),$$

$$(k_1 \sqrt{G_{11}})_{,2} = 0, \quad (\sqrt{G_{11}})_{,2} = 0.$$

Верно.

Проверка равенства (3.16):

$$k_2 \sqrt{G_{22}} = \sin \theta + [\cos \psi - \sin \theta] H(\theta - \theta_1),$$

$$\underline{(k_2 \sqrt{G_{22}})_{,1} = \cos \theta + [0 - \cos \theta] H(\theta - \theta_1)},$$

$$(\sqrt{G_{22}})_{,1} = R \left\langle \cos \theta + \left[ -\frac{\sin \psi}{\sin^2(\theta - \psi)} \right] H(\theta - \theta_1) \right\rangle,$$

$$\underline{k_1 (\sqrt{G_{22}})_{,1} = \cos \theta + [0 - \cos \theta] H(\theta - \theta_1)}.$$

Верно.

**Сфера - Цилиндр - Сфера (Рис. 3.6)**

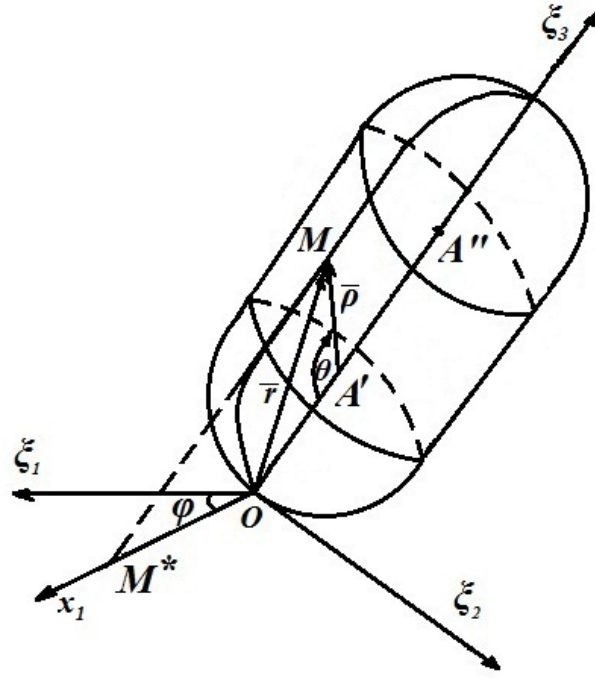


Рисунок 3.6

Обобщенный вектор положения:

$$\begin{aligned} \bar{r}(\theta, \varphi) = & R \langle \sin \theta + [1 - \sin \theta] H(\theta - \theta_1) + \\ & + [\sin(2\pi - 2\theta) - 1] H(\theta - \theta_2) \rangle (\cos \varphi \bar{\xi}_1 + \sin \varphi \bar{\xi}_2) + \\ & + R \langle 1 - \cos \theta + [1 + \operatorname{ctg}(\pi - \theta) - (1 - \cos \theta)] H(\theta - \theta_1) + \\ & + [2 + \cos(2\pi - 2\theta) - (1 + \operatorname{ctg}(\pi - \theta))] H(\theta - \theta_2) \rangle \bar{\xi}_3; \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

Здесь расстояние между центрами сфер равно радиусу сфер.

Параметры Ламе:

$$\begin{aligned} \sqrt{G_{11}} = & R \left\langle 1 + \left[ \frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\ & \left. + \left[ 2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] H(\theta - \theta_2) \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{G_{22}} = & R \langle \sin \theta + [1 - \sin \theta] H(\theta - \theta_1) + \\ & + [\sin(2\pi - 2\theta) - 1] H(\theta - \theta_2) \rangle, \end{aligned} \quad (3.34)$$

Главные кривизны:

$$k_1 = \frac{1}{R} \langle 1 + [0 - 1] H(\theta - \theta_1) + [1 - 0] H(\theta - \theta_2) \rangle, \quad (3.35)$$

$$k_2 = \frac{1}{R} \langle 1 + [1 - 1] H(\theta - \theta_1) + [1 - 1] H(\theta - \theta_2) \rangle. \quad (3.36)$$

Проверка равенства (3.15):

$$(\sqrt{G_{11}}k_1)_{,2} = 0, \quad (\sqrt{G_{11}})_{,2} = 0.$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{G_{22}}k_2)_{,1} = & \langle \cos \theta + [0 - \cos \theta] H(\theta - \theta_1) + \\ & + [-2 \cos(2\pi - 2\theta) - 0] H(\theta - \theta_2) \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{G_{22}})_{,1} = & R \langle \cos \theta + [0 - \cos \theta] H(\theta - \theta_1) + \\ & + [-2 \cos(2\pi - 2\theta) - 0] H(\theta - \theta_2) \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{G_{22}})_{,1} k_1 = & \langle \cos \theta + [0 - \cos \theta] H(\theta - \theta_1) + \\ & + [-2 \cos(2\pi - 2\theta) - 0] H(\theta - \theta_2) \rangle. \end{aligned}$$

Верно.

Проверка равенства (3.16):

$$\frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} = \langle \cos \theta + [0 - \cos \theta] H(\theta - \theta_1) + [-\cos(2\pi - 2\theta) - 0] H(\theta - \theta_2) \rangle,$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1} = & - \langle \sin \theta + [0 - \sin \theta] H(\theta - \theta_1) + \\ & + [-\sin(2\pi - 2\theta) - 0] H(\theta - \theta_2) \rangle, \end{aligned}$$

$$-k_1 k_2 = -\frac{1}{R^2} \langle 1 + [0 - 1] H(\theta - \theta_1) + [1 - 0] H(\theta - \theta_2) \rangle,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{G_{11}G_{22}} = & R^2 \left\langle \sin \theta + \left[ \frac{1}{\sin^2(\pi - \theta)} - \sin \theta \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\ & \left. + \left[ 2 \sin(2\pi - 2\theta) - \frac{1}{\sin^2(\pi - \theta)} \right] H(\theta - \theta_2) \right\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -k_1 k_2 \sqrt{G_{11} G_{22}} = & - \langle \sin \theta + [0 - \sin \theta] H(\theta - \theta_1) + \\ & + [-\sin(2\pi - 2\theta) - 0] H(\theta - \theta_2) \rangle. \end{aligned}$$

Верно.

Композиция из цилиндров и пластинки гладкосопряженных между собой (Рис. 3.7)

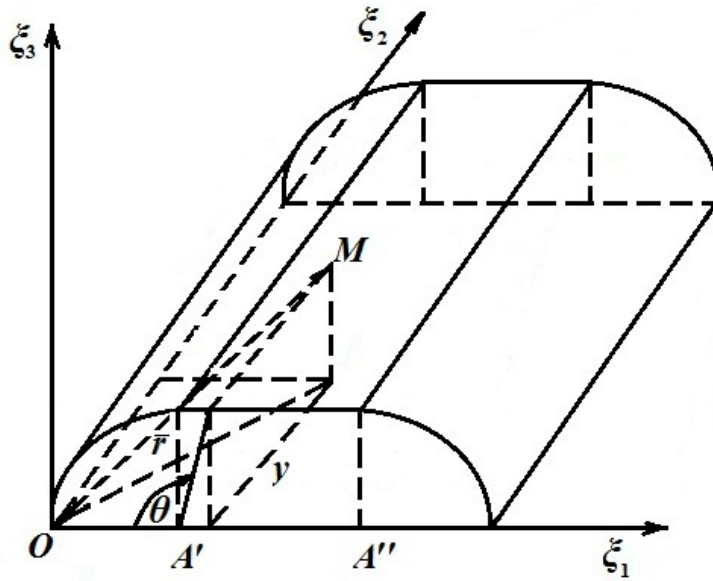


Рисунок 3.7

Обобщенный вектор положения:

$$\begin{aligned} \bar{r}(\theta, y) = R \left\langle (1 - \cos \theta) + \left[ \left(1 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) - (1 - \cos \theta) \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\ \left. + \left[ (2 + \cos 2\theta) - \left(1 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) \right] H(\theta - \theta_2) \right\rangle \bar{\xi}_1 + \\ + y \bar{\xi}_2 + R \langle \sin \theta + [1 - \sin \theta] H(\theta - \theta_1) + [-\sin 2\theta - 1] H(\theta - \theta_2) \rangle \bar{\xi}_3, \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{4}.$$



Параметры Ламе:

$$\begin{aligned} \sqrt{G_{11}} = R \left\langle \sin \theta + \left[ \frac{1}{\sin^2 \theta} - \sin \theta \right] H(\theta - \theta_1) + \right. \\ \left. + \left[ 2 \sin 2\theta - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] H(\theta - \theta_2) \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\sqrt{G_{22}} = 1. \quad (3.38)$$

Главные кривизны

$$k_1 = -\frac{1}{R} \langle 1 + [0 - 1] H(\theta - \theta_1) + [1 - 0] H(\theta - \theta_2) \rangle, \quad (3.39)$$

$$k_2 = 0. \quad (3.40)$$

Правые и левые части равенств (3.15) и (3.16) равны тождественно нулю.

**Сфера - Эллипсоид (Рис. 3.8)**

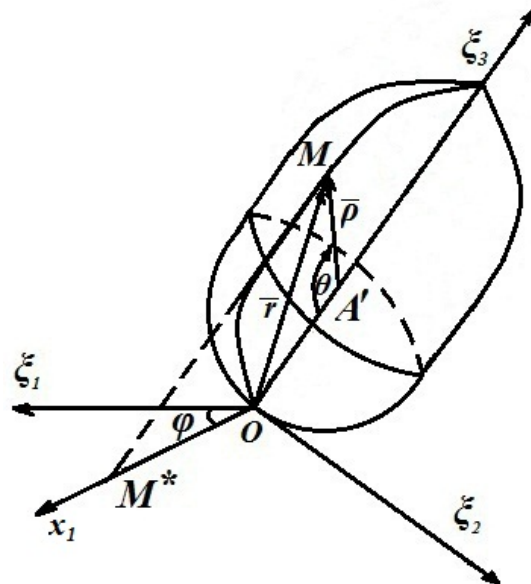


Рисунок 3.8

В случае композиции из двух элементов – полусферы радиуса  $R$  и эллипсоида с полуосями  $R$  и  $l$  (Рис. 3.8) обобщенный вектор положения любой точки меридиональной кривой в плоскости  $\pi(\bar{x}_3, \bar{\xi}_3)$  запишется в виде

$$\tilde{r}(\theta) = R \sin \theta \bar{x}_3 + \langle R(1 - \cos \theta) - R(\beta - 1) \cos \theta H(\theta - \theta_1) \rangle \bar{\xi}_3,$$

где  $\beta = \frac{l}{R}$ ,  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ .

Введем в рассмотрение проектор  $\bar{\xi}_1 \otimes \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 \otimes \bar{\xi}_2$  и определим обобщенный вектор положения любой точки срединной поверхности композиции «сфера-эллипсоид»

$$\begin{aligned} \bar{r}(\theta, \varphi) = R \cos \varphi \bar{\xi}_1 + r \sin \theta \sin \varphi \bar{\xi}_2 + \\ + \langle R(1 - \cos \theta) - R(\beta - 1) \cos \theta H(\theta - \theta_1) \rangle \bar{\xi}_3. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Вычисляя частные производные  $\bar{r}_{,i}$ ,  $\bar{r}_{,ii}$ , ( $i = 1, 2$ ), ( $1 \sim \theta$ ,  $2 \sim \varphi$ ) на основании формул приведенных в приложении Ж, определим компоненты метрического тензора срединной поверхности композиции

$$G_{11} = R^2 + R^2 \sin^2 \theta (\beta^2 - 1) H(\theta - \theta_1), \quad G_{22} = R^2 \sin^2 \theta, \quad G_{12} = 0, \quad (3.42)$$

обобщенные параметры Ламе

$$\sqrt{G_{11}} = R + \left( -R + R [1 + (\beta^2 - 1) \sin^2 \theta]^{1/2} \right) H(\theta - \theta_1), \quad \sqrt{G_{22}} = R \sin \theta, \quad (3.43)$$

и главные кривизны

$$\begin{aligned} k_1 = \frac{1}{R} \left\langle 1 + \left( -1 + \frac{\beta}{[1 + (\beta^2 - 1) \sin^2 \theta]^{3/2}} \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle, \\ k_2 = \frac{1}{R} \left\langle 1 + \left( -1 + \frac{\beta}{[1 + (\beta^2 - 1) \sin^2 \theta]^{1/2}} \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle. \end{aligned}$$

Полученные выражения для обобщенных параметров Ламе и главных кривизн тождественно удовлетворяют соотношениям Кодацци-Гаусса, которые в данном случае запишутся в виде

$$\left( \sin \theta \left[ 1 + \left( -1 + \frac{\beta}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{1/2}} \right) \right] H(\theta - \theta_1) \right)_{,1} = \quad (3.44)$$

$$= \cos \theta \left[ 1 + \left( -1 + \frac{\beta}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{3/2}} \right) \right] H(\theta - \theta_1),$$

$$\left( \frac{\cos \theta}{1 + \left( -1 + [1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{1/2} \right) H(\theta - \theta_1)} \right)_{,1} = \quad (3.45)$$

$$= \left[ \sin \theta + \left( -\sin \theta + \sin \theta [1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{1/2} \right) H(\theta - \theta_1) \right] \times \\ \times \left[ 1 + \left( -1 + \frac{\beta^2}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^2} \right) H(\theta - \theta_1) \right].$$

Действительно, раскрывая скобки в левых частях равенств (3.44), (3.45) и конкретизируя произведения в правых частях с учетом формул приведенных в приложении Ж приходим к выводу, что обобщенные параметры Ламе и главные кривизны, полученные на основании обобщенного вектора положения любой точки срединной поверхности композиции «сфера-эллипсоид» тождественно удовлетворяет условиям Кодацци-Гаусса. Второе из условий очевидное тождество, так как  $G_{ii}$  и  $k_i$  не зависят от  $\varphi$ .

### Эллипсоид – цилиндр (Рис. 3.9)

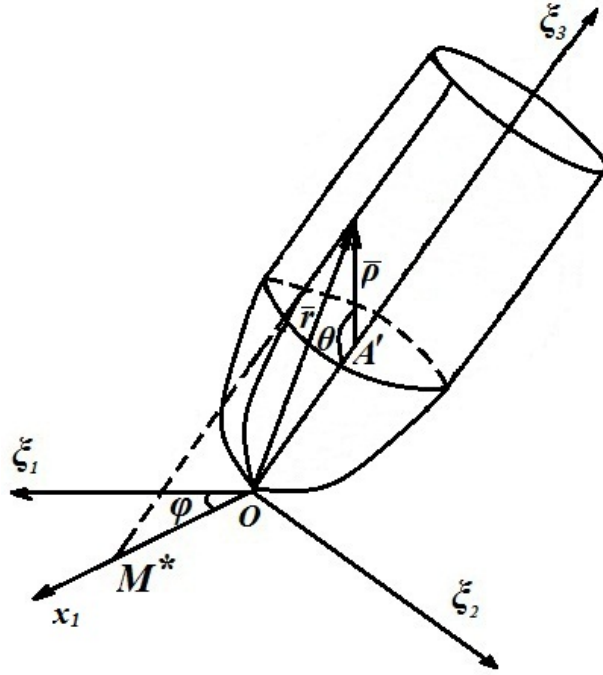


Рисунок 3.9

Обобщенный вектор положения точки меридиональной кривой

$$\tilde{r}(\theta) = R [\sin \theta + (1 - \sin \theta) H(\theta - \theta_1)] \bar{x}_3 + \\ + l \left\langle (1 - \cos \theta) + \left( \left( 1 - \beta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - (1 - \cos \theta) \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle \bar{\xi}_3.$$

Обобщенный вектор положения любой точки срединной поверхности

$$\begin{aligned}\bar{r}(\theta, \varphi) = & \langle R \sin \theta \cos \varphi + R(1 - \sin \theta) \cos \varphi H(\theta - \theta_1) \rangle \bar{\xi}_1 + \\ & + \langle R \sin \theta \sin \varphi + R(1 - \sin \theta) \sin \varphi H(\theta - \theta_1) \rangle \bar{\xi}_2 + \\ & + \left\langle l(1 - \cos \theta) + \left( -R \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + l \cos \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle \bar{\xi}_3.\end{aligned}$$

Обобщенные параметры Ламе композиции

$$\begin{aligned}\sqrt{G_{11}} = & R \left\langle [1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{1/2} + \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} - [1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{1/2} \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle, \\ \sqrt{G_{22}} = & R \sin \theta + R(1 - \sin \theta) H(\theta - \theta_1).\end{aligned}$$

Главные кривизны

$$\begin{aligned}k_1 = & \frac{1}{R} \left\langle \frac{\beta}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{3/2}} - \frac{\beta}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{3/2}} H(\theta - \theta_1) \right\rangle, \\ k_2 = & \frac{1}{R} \left\langle \frac{\beta}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{1/2}} + \left( 1 - \frac{\beta}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{1/2}} \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle,\end{aligned}$$

где  $\beta = l/R$ .

Условия Кодацци-Гаусса в этом случае примут вид

$$\begin{aligned}& \left( \frac{\beta \sin \theta}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{1/2}} + \left( 1 - \frac{\beta \sin \theta}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{1/2}} \right) H(\theta - \theta_1) \right)_{,1} = \\ & = \frac{\cos \theta}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{3/2}} - \frac{\cos \theta}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{3/2}} H(\theta - \theta_1), \\ & \left( \frac{\cos \theta}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{1/2}} - \frac{\cos \theta}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{1/2}} \right)_{,1} = \\ & = - \left\langle \frac{\beta^2 \sin \theta}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{1/2}} + \left( 0 - \frac{\beta^2 \sin \theta}{[1 + \sin^2 \theta (\beta^2 - 1)]^{1/2}} \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle.\end{aligned}$$

Вычисляя производные в левых частях приведенных равенств (с учетом формул приведенных в приложении Ж) нетрудно убедиться в их справедливости.

### 3.2 Основные уравнения осесимметричной термоупругости композиций из оболочек вращения в перемещениях

В рамках модели типа Лява рассмотрим произвольного очертания тонкостенную оболочку вращения, толщина которой, чувствительна к нагреву [29], [20], [21]. Компоненты поля перемещений  $\bar{U}(u_1, u_2, u_3)$  определяются как решения уравнений

$$u_{3,3} = \alpha\Theta(\alpha^1, \alpha^2, z), \quad (3.46)$$

$$u_{l,3} - \frac{u_l}{R_l + z} = -\frac{w_{,l}}{\sqrt{G_{ll}} \left(1 + \frac{z}{R_l}\right)} - \frac{\alpha}{\sqrt{G_{ll}} \left(1 + \frac{z}{R_l}\right)} \int \Theta_{,l} dz \quad (l = 1, 2)$$

и при линейном законе температурного поля по толщине оболочки [108], [115]  $\Theta = \Theta_0(\alpha^1, \alpha^2) + \frac{z}{h}\Theta_1(\alpha^1, \alpha^2)$ , запишется на основании метода «вариации» в виде

$$u_l = \tilde{u}_l + z \left( \tilde{u}_l k_l - \frac{w_{,l}}{\sqrt{G_{ll}}} \right) - \frac{\alpha\Theta_{0,l} z^2}{\sqrt{G_{ll}} 2} - \frac{\alpha\Theta_{1,l} z^3}{\sqrt{G_{ll}} 6h}, \quad (l = 1, 2)$$

$$u_3 = w + \alpha\Theta_0 z + \alpha\Theta_1 \frac{z^2}{2h}. \quad (3.47)$$

Здесь  $\tilde{u}_1 \equiv u$ ,  $\tilde{u}_2 \equiv v$ ,  $w$ ,  $k_l$ ,  $\sqrt{G_{ll}}$  – компоненты поля перемещений, главные кривизны, параметры Ламе срединной поверхности оболочки. Силовая функция термоупругой системы

$$I = \frac{1}{2} \int \int \int \sigma^{ij} e_{ij} \sqrt{G_{11}G_{22}} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) d\alpha^1 d\alpha^2 dz,$$

где  $e_{ij}$  упругие деформации, связанные с полными деформациями  $\tilde{e}_{ij}$  соотношениями Ф. Неймана

$$e_{ij} = \tilde{e}_{ij} - \alpha\Theta(\alpha^1, \alpha^2, z)\delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2)$$

после ряда стандартных преобразований с учетом осевой симметрии примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{I} = \pi \int_0^\pi \left\langle \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \left( \frac{u_{,1}^2}{G_{11}} + 2\frac{k_1}{\sqrt{G_{11}}}u_{,1}w + (k_1^2 + k_2^2)w^2 + \frac{G_{22,1}^2}{4G_{22}^2G_{11}}u^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{G_{22,1}k_2}{G_{22}\sqrt{G_{11}}}uw \right) + 2\nu \left( k_1k_2w^2 + \frac{G_{22,1}}{2G_{11}G_{22}}u_{,1}u + \frac{k_2}{\sqrt{G_{11}}}u_{,1}w + \frac{k_1G_{22,1}}{2G_{22}\sqrt{G_{11}}}uw \right) - \right. \\ \left. - 2(1+\nu)\alpha\Theta_0 \left( \frac{u_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} + (k_1 + k_2)w + \frac{G_{22,1}}{2G_{22}\sqrt{G_{11}}} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \left( \frac{1}{G_{11}} \left( \frac{w_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1}^2 - 2 \frac{k_1}{\sqrt{G_{11}}} \left( \frac{w_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1} \alpha \Theta_0 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{G_{22,1} k_{2,1}}{G_{11} G_{22} \sqrt{G_{11}}} w_{,1} u - \frac{G_{22,1} k_2}{G_{11} G_{22}} w_{,1} \alpha \Theta_0 + \frac{G_{22,1}^2}{4G_{11}^2 G_{22}^2} w_{,1}^2 \right) + \right. \\
& \left. + 2\nu \left( \frac{G_{22,1}}{2G_{11} G_{22} \sqrt{G_{11}}} \left( \frac{w_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1} w_{,1} - \frac{k_1 G_{22,1}}{2G_{11} G_{22}} \alpha \Theta_0 w_{,1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{k_{2,1}}{G_{11}} \left( \frac{w_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1} u - \frac{k_2}{\sqrt{G_{11}}} \left( \frac{w_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1} \alpha \Theta_0 \right) - \right. \\
& \left. - 2(1+\nu) \frac{\alpha \Theta_1}{h} \left( \frac{k_{2,1}}{\sqrt{G_{11}}} u - \frac{1}{\sqrt{G_{11}}} \left( \frac{w_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{G_{22,1}}{2G_{11} G_{22}} w_{,1} \right) \right] \Bigg\} \sqrt{G_{11} G_{22}} d\theta. \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Функционал (3.48) целесообразно переписать

$$\begin{aligned}
\tilde{I} = \pi \int_0^\pi \left\langle \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} u_{,1}^2 + 2\sqrt{G_{22}} (k_1 + \nu k_2) w u_{,1} + \right. \right. \\
\left. \left. + 2 \left( \sqrt{G_{22}} \right)_{,1} (k_2 + \nu k_1) u w + \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}^2}{\sqrt{G_{11} G_{22}}} u^2 + \right. \right. \\
\left. \left. + 2c_\nu \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} u u_{,1} + \sqrt{G_{11} G_{22}} (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2) w^2 - \right. \right. \\
\left. \left. - 2(1+\nu) \sqrt{G_{22}} \alpha \Theta_0 u_{,1} - 2(1+\nu) \sqrt{G_{11} G_{22}} \alpha \Theta_0 (k_1 + k_2) w - \right. \right. \\
\left. \left. - 2(1+\nu) \left( \sqrt{G_{22}} \right)_{,1} \alpha \Theta_0 u \right] + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} k_{1,1}^2 u^2 - \right. \right. \\
\left. \left. - 2\beta_0 u w_{,11} + 2\beta_3 u w_{,1} + c_{11} \frac{\sqrt{G_{22}}}{G_{11} \sqrt{G_{11}}} w_{,11}^2 + 2\beta_2 w_{,1} w_{,11} + \beta_1 w_{,1}^2 - \right. \right. \\
\left. \left. - 2\beta_5 \alpha \Theta_0 w_{,11} + 2\beta_6 \alpha \Theta_0 w_{,1} - 2(1+\nu) \sqrt{G_{22}} k_{2,1} \frac{\alpha \Theta_1}{h} u - \right. \right. \\
\left. \left. - 2(1+\nu) \beta_4 \frac{\alpha \Theta_1}{h} w_{,1} + 2(1+\nu) \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} \frac{\alpha \Theta_1}{h} w_{,11} \right] \right\rangle d\theta. \tag{3.49}
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\beta_0 = \nu \frac{\sqrt{G_{22}}}{G_{11}} k_{2,1};$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{\sqrt{G_{22}} (\sqrt{G_{11}})_{,1}^2}{\sqrt{G_{11}} G_{11}^2} + \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}^2}{G_{11} \sqrt{G_{11}} G_{22}} - 2\nu \frac{(\sqrt{G_{11}})_{,1} (\sqrt{G_{22}})_{,1}}{G_{11}^2}; \\
\beta_2 &= -\frac{\sqrt{G_{22}} (\sqrt{G_{11}})_{,1}}{G_{11}^2} + \nu \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{G_{11} \sqrt{G_{11}}}; \\
\beta_3 &= \nu \frac{\sqrt{G_{22}} (\sqrt{G_{11}})_{,1}}{G_{11} \sqrt{G_{11}}} k_{2,1} - \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{G_{11}} k_{2,1}; \\
\beta_4 &= \frac{\sqrt{G_{22}} (\sqrt{G_{11}})_{,1}}{G_{11}} - \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}}; \\
\beta_5 &= \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} (k_1 + \nu k_2); \\
\beta_6 &= \frac{\sqrt{G_{22}} (\sqrt{G_{11}})_{,1}}{G_{11}} (k_1 + \nu k_2) - \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} (k_2 + \nu k_1).
\end{aligned}$$

Уравнения равновесия несвязной термоупругости получим из дифференциального вариационного принципа Лагранжа. Вычисляя, стандартным образом, частные вариации  $\delta_{(u)} \tilde{I}$ ,  $\delta_{(w)} \tilde{I}$  и приравнявая их нулю получим систему двух неоднородных дифференциальных уравнений относительно перемещений  $u$  и  $w$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} u_{,11} + \sqrt{G_{22}} (k_1 + \nu k_2) w_{,1} + \left( \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} \right)_{,1} u_{,1} + \\
&+ \left( \sqrt{G_{22}} (k_1 + \nu k_2) \right)_{,1} w - \beta_7 u + \frac{h^2}{12} (\beta_0 w_{,11} + \beta_3 w_{,1}) = \quad (3.50) \\
&= (1 + \nu) \sqrt{G_{22}} \alpha \Theta_{0,1} - (1 + \nu) \sqrt{G_{22}} \frac{h}{12} k_{2,1} \alpha \Theta_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{G_{22}}}{G_{11} \sqrt{G_{11}}} w_{,1111} + 2 \left( \frac{\sqrt{G_{22}}}{G_{11} \sqrt{G_{11}}} \right)_{,1} w_{,111} + \left( \left( \frac{\sqrt{G_{22}}}{G_{11} \sqrt{G_{11}}} \right)_{,11} + (\beta_2)_{,1} - \beta_1 \right) w_{,11} + \\
&+ ((\beta_2)_{,11} - (\beta_1)_{,1}) w_{,1} + \frac{12}{h^2} \sqrt{G_{22} G_{11}} (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2) w - \beta_0 u_{,11} - \\
&- \left( \frac{12}{h^2} \sqrt{G_{22}} (k_1 + \nu k_2) + 2(\beta_0)_{,1} + \beta_3 \right) u_{,1} + \\
&+ \left( \frac{12}{h^2} \left( \sqrt{G_{22}} \right)_{,1} (k_2 + \nu k_1) - (\beta_0)_{,11} - (\beta_3)_{,1} \right) u = \quad (3.51) \\
&= \frac{12q(1 - \nu^2) \sqrt{G_{11}} G_{22}}{E h^3} + \left( \frac{12}{h^2} (1 + \nu) \sqrt{G_{11}} G_{22} (k_1 + k_2) + \beta_6 + (\beta_5)_{,11} \right) \alpha \Theta_0 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2(\beta_5)_{,1} (\alpha\Theta_0)_{,1} + \beta_5 (\alpha\Theta_0)_{,11} - (1 + \nu) \left( \left( \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} \right)_{,11} + (\beta_4)_{,1} \right) \frac{\alpha\Theta_1}{h} - \\
& - (1 + \nu) \left( 2 \left( \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} \right)_{,1} + \beta_4 \right) \left( \frac{\alpha\Theta_1}{h} \right)_{,1} - (1 + \nu) \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} \left( \frac{\alpha\Theta_1}{h} \right)_{,11};
\end{aligned}$$

Здесь

$$\beta_7 = \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}^2}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} - \nu \left( \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1}. \quad (3.52)$$

Систему дифференциальных уравнений (3.50), (3.51) целесообразно, в целях дальнейшей конкретизации, переписать в виде:

$$\begin{aligned}
& a_{12}u_{,11} + b_{12}w_{,11} + a_{11}u_{,1} + b_{11}w_{,1} + a_{10}u + b_{10}w = d_{11} (\alpha\Theta_0)_{,1} + f_{10} \frac{\alpha\Theta_1}{h}; \\
& a_{24}w_{,1111} + a_{23}w_{,111} + a_{22}w_{,11} + a_{21}w_{,1} + a_{20}w + b_{22}u_{,11} + b_{21}u_{,1} + b_{20}u = \quad (3.53) \\
& = d + d_{20}\alpha\Theta_0 + d_{21} (\alpha\Theta_0)_{,1} + d_{22} (\alpha\Theta_0)_{,11} + f_{20} \frac{\alpha\Theta_1}{h} + f_{21} \left( \frac{\alpha\Theta_1}{h} \right)_{,1} + f_{22} \left( \frac{\alpha\Theta_1}{h} \right)_{,11}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты в уравнениях системы (3.53) в случае композиции «конус-сфера» запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
a_{12} &= \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} = \sin \theta + (\sin \theta \sin(\theta - \psi) - \sin \theta) H(\theta - \theta_1); \\
a_{11} &= \left( \frac{\sqrt{G_{22}}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1} = \cos \theta + (\sin(2\theta - \psi) - \cos \theta) H(\theta - \theta_1); \\
a_{10} &= - \left( \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}^2}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} - \nu \left( \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1} \right) = \\
&= - \left\langle \frac{\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta}{\sin \theta} + \left( \frac{\sin^2 \psi}{\sin \theta \sin(\theta - \psi)} - \frac{\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta}{\sin \theta} \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \\
b_{12} &= \frac{h^2}{12} \beta_0 = \frac{h^2 \nu \sqrt{G_{22}}}{12 G_{11}} k_{2,1} = \\
&= \frac{h^2 \nu}{24R^2} \left\langle 0 + \left( \frac{\sin 2\psi \sin^3(\theta - \psi)}{\sin \theta} - 0 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \\
b_{11} &= \sqrt{G_{22}}(k_1 + \nu k_2) - \frac{h^2}{12} k_{2,1} \left[ \nu \frac{\sqrt{G_{22}} (\sqrt{G_{11}})_{,1}}{G_{11} \sqrt{G_{11}}} - \frac{(\sqrt{G_{22}})_{,1}}{G_{11}} \right] = \\
&= \left\langle (1 + \nu) \sin \theta + \left( \nu \cos \psi - \right. \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{h^2 \sin 2\psi \sin^2(\theta - \psi)}{24R^2 \sin \theta} (1 - 2\nu \cos(\theta - \psi)) - (1 + \nu) \sin \theta \Big) H(\theta - \theta_1) \Big\rangle; \\
b_{10} &= \left( \sqrt{G_{22}} \right)_{,1} (k_1 + \nu k_2) + \nu \sqrt{G_{22}} k_{2,1} = \left\langle (1 + \nu) \cos \theta + \right. \\
& \quad \left. + (0 - (1 + \nu) \cos \theta) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \\
d_{11} &= (1 + \nu) \sqrt{G_{22}} = (1 + \nu) R \left\langle \sin \theta + \left( \frac{\sin \theta}{\sin(\theta - \psi)} - \sin \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \\
f_{10} &= -\frac{(1 + \nu)h}{12} \sqrt{G_{22}} k_{2,1} = \\
&= -\frac{(1 + \nu)h}{12R} \left\langle 0 + \left( \frac{\sin 2\psi}{2 \sin \theta \sin(\theta - \psi)} - 0 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \\
a_{24} &= \frac{\sqrt{G_{22}}}{G_{11} \sqrt{G_{11}}} = \frac{1}{R^2} \left\langle \sin \theta + (\sin \theta \sin^5(\theta - \psi) - \sin \theta) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \\
a_{23} &= 2 \left( \frac{\sqrt{G_{22}}}{G_{11} \sqrt{G_{11}}} \right)_{,1} = \\
&= \frac{2}{R^2} \left\langle \cos \theta + (\sin^4(\theta - \psi) (3 \sin(2\theta - \psi) + 2 \sin \psi) - \cos \theta) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \\
a_{22} &= \left( \frac{\sqrt{G_{22}}}{G_{11} \sqrt{G_{11}}} \right)_{,11} + (\beta_2)_{,1} - \beta_1 = \\
&= \frac{1}{R^2} \left\langle -\frac{1 + \nu \sin^2 \theta}{\sin \theta} + \left( \sin^3(\theta - \psi) \left\{ (10 - 2\nu) \sin \theta + (-6 + 2\nu) \sin(\theta - 2\psi) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 12 \sin(3\theta - 2\psi) - 4 \cos(\theta - \psi) (\cos(\theta - \psi) \sin \psi - \nu \sin \psi) - \frac{\sin^2 \psi}{\sin \theta} \right\} - \right. \\
& \quad \left. - \left( -\frac{1 + \nu \sin^2 \theta}{\sin \theta} \right) \right) H(\theta - \theta_1) \Big\rangle; \\
a_{21} &= (\beta_2)_{,11} - (\beta_1)_{,1} = \\
&= \frac{1}{R^2} \left\langle \frac{\cos \theta (1 + (1 - \nu) \sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta} + \left( \sin^2(\theta - \psi) \left\{ 4(-1 + \nu) \sin(2\theta - 3\psi) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 9 \sin(4\theta - 3\psi) + (6 - 4\nu) \sin(2\theta - \psi) + (5 - 4\nu) \sin \psi - 12 \cos^3(\theta - \psi) \sin \theta - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 4 \cos^2(\theta - \psi) (\cos \theta \sin(\theta - \psi) - 3\nu \sin \psi) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sin(\theta - \psi) \sin \psi \left( -4\nu \sin(\theta - \psi) + \frac{\operatorname{ctg} \theta \sin \psi}{\sin \theta} \right) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos(\theta - \psi) \left( 8 \sin \theta \sin^2(\theta - \psi) - 3 \frac{\sin^2 \psi}{\sin \theta} \right) \left. \vphantom{\frac{\cos \theta (1 + (1 - \nu) \sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta}} \right\} - \\
& - \frac{\cos \theta (1 + (1 - \nu) \sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta} \left. \vphantom{\frac{\cos \theta (1 + (1 - \nu) \sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta}} \right) H(\theta - \theta_1) \left. \vphantom{\frac{\cos \theta (1 + (1 - \nu) \sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta}} \right\rangle + \frac{(-2 + \nu) \cos \psi}{R^2} \delta(\theta - \theta_1); \\
a_{20} & = \frac{12}{h^2} \sqrt{G_{11} G_{22}} (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2) = \\
& = \frac{12}{h^2} \left\langle 2(1 + \nu) \sin \theta + \left( \frac{\cos^2 \psi}{\sin \psi \sin(\theta - \psi)} - 2(1 + \nu) \sin \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \\
b_{22} & = -\beta_0 = -\frac{1}{R^2} \left\langle 0 + \left( \frac{\sin 2\psi \sin^3(\theta - \psi)}{2 \sin \theta} - 0 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \\
b_{21} & = -\frac{12}{h^2} \sqrt{G_{22}} (k_1 + \nu k_2) - 2(\beta_0)_{,1} - \beta_3 = -\frac{2\nu \sin \psi}{R^2} \delta(\theta - \theta_1) - \\
& - \frac{12}{h^2} \langle (1 + \nu) \sin \theta + (\nu \cos \psi - (1 + \nu) \sin \theta) H(\theta - \theta_1) \rangle - \\
& - \frac{1}{R^2} \left\langle 0 + \left( \frac{\sin 2\psi}{2} \left( \frac{2\nu \sin \psi}{\sin^2 \theta} + \sin \psi - 2\nu \sin \theta \cos(\theta - \psi) \right) - 0 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \\
b_{20} & = \frac{12}{h^2} \sqrt{G_{22}} (k_2 + \nu k_1) - (\beta_0)_{,11} - (\beta_3)_{,1} = \\
& = \frac{\cos \psi}{R^2} \frac{d^2 \delta(\theta - \theta_1)}{d\theta^2} - \frac{(1 + \nu) \sin \psi}{R^2} \frac{d\delta(\theta - \theta_1)}{d\theta} - \frac{\sin^2 \psi}{R^2} \left( \frac{\nu + \cos^2 \psi}{\cos \psi} \right) \delta(\theta - \theta_1) + \\
& + \frac{12}{h^2} \left\langle (1 + \nu) \cos \theta + \left( -\frac{\sin 2\psi}{2 \sin \theta \sin(\theta - \psi)} - (1 + \nu) \cos \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle + \\
& + \frac{\nu}{R^2} \left\langle 0 + \left( \sin 2\psi \left( \frac{\sin \psi \cos \theta}{\sin^3 \theta} + \cos(2\theta - \psi) \right) - 0 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \\
d & = \frac{12q(1 - \nu^2) \sqrt{G_{11} G_{22}}}{E h^3} = \\
& = \frac{12q(1 - \nu^2) R^2}{E h^3} \left\langle \sin \theta + \left( \frac{\sin \theta}{\sin^3(\theta - \psi)} - \sin \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \\
d_{20} & = \frac{12}{h^2} \sqrt{G_{11} G_{22}} (k_1 + k_2) + \beta_6 + (\beta_5)_{,11} = \\
& = -\frac{\cos \psi}{R} \frac{d\delta(\theta - \theta_1)}{d\theta} + \frac{(1 + \nu) \sin \psi}{R} \delta(\theta - \theta_1) + \\
& + \frac{12R(1 + \nu)}{h^2} \left\langle 2 \sin \theta + \left( \frac{\cos \psi}{\sin^2(\theta - \psi)} - 2 \sin \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle + \\
& + \frac{1}{R} \left\langle -(1 + \nu) (\sin \theta + \cos \theta) + \left( \nu \cos \psi \left( 2 \cos(2\theta - 2\psi) + \frac{\sin(\theta - \psi) \sin \psi}{\sin \theta} \right) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sin(2\theta - 2\psi) \Big) - (-1 - \nu) (\sin \theta + \cos \theta) \Big) H(\theta - \theta_1) \Big\rangle ; \\
d_{21} &= 2(\beta_5)_{,1} = -\frac{2 \cos \psi}{R} \delta(\theta - \theta_1) + \\
& + \frac{2}{R} \langle (1 + \nu) \cos \theta + (\nu \cos \psi \sin(2\theta - 2\psi) - (1 + \nu) \cos \theta) H(\theta - \theta_1) \rangle ; \\
d_{22} &= \beta_5 = \frac{1}{R} \langle (1 + \nu) \sin \theta + (\nu \cos \psi \sin^2(\theta - \psi) - (1 + \nu) \sin \theta) H(\theta - \theta_1) \rangle ; \\
f_{20} &= -(1 + \nu) \left( \left( \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} \right)_{,11} + (\beta_4)_{,1} \right) = \\
& = (1 + \nu) \langle 2 \sin \theta + (2 \cos(2\theta - \psi) - 2 \sin \theta) H(\theta - \theta_1) \rangle ; \\
f_{21} &= -(1 + \nu) \left( 2 \left( \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} \right)_{,1} + \beta_4 \right) = \\
& = -(1 + \nu) \langle 3 \cos \theta + (-3 \sin \psi - 2 \sin \theta \cos(\theta - \psi) - 3 \cos \theta) H(\theta - \theta_1) \rangle ; \\
f_{22} &= -(1 + \nu) \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} = -(1 + \nu) \langle \sin \theta + (\sin \theta \sin(\theta - \psi) - \sin \theta) H(\theta - \theta_1) \rangle .
\end{aligned}$$

Температурные функции  $\Theta_0$ ,  $\Theta_1$  входящие в систему (3.53) предварительно определяются как решения системы

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} \left( \sqrt{\frac{G_{ii}}{G_{jj}}} \Theta_{0,j} \right)_{,j} + \frac{\varkappa^+ + \varkappa^-}{\lambda h} \Theta_0 + \frac{2hk_j}{12\sqrt{G_{11}G_{22}}} \left( \sqrt{\frac{G_{ii}}{G_{jj}}} \Theta_{1,j} \right)_{,j} + \\
& + \frac{\varkappa^+ - \varkappa^-}{\lambda h} \Theta_1 - \frac{k_{11} + k_{22}}{h} \Theta_1 = \frac{1}{\lambda h} (\varkappa^+ T^+ + \varkappa^- T^-), \quad (3.54) \\
& \frac{2hk_j}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} \left( \sqrt{\frac{G_{ii}}{G_{jj}}} \Theta_{0,j} \right)_{,j} + 6 \frac{\varkappa^+ - \varkappa^-}{\lambda h} \Theta_0 - \frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} \left( \sqrt{\frac{G_{ii}}{G_{jj}}} \Theta_{1,j} \right)_{,j} + \\
& + 3 \frac{\varkappa^+ + \varkappa^-}{\lambda h} \Theta_1 + \frac{12}{h^2} \Theta_1 = \frac{6}{\lambda h} (\varkappa^+ T^+ - \varkappa^- T^-), \quad (i \neq j = 1, 2).
\end{aligned}$$

Сингулярные коэффициенты в уравнениях в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} \left( \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} \right)_{,1} &= \frac{1}{R^2} \left\langle \operatorname{ctg} \theta + \left( \frac{\sin(2\theta - \psi) \sin^3(\theta - \psi)}{\sin \theta} - \operatorname{ctg} \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle, \\
\frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} &= \frac{1}{G_{11}} = \frac{1}{R^2} \langle 1 + (\sin^4(\theta - \psi) - 1) H(\theta - \theta_1) \rangle, \\
\frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} \left( \sqrt{\frac{G_{11}}{G_{22}}} \right)_{,2} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}}\sqrt{\frac{G_{11}}{G_{22}}} = \frac{1}{G_{22}} = \frac{1}{R^2} \left\langle \frac{1}{\sin^2 \theta} + \left( \frac{\sin^2(\theta - \psi)}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle,$$

$$\frac{k_1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} \left( \sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} \right)_{,1} = \frac{1}{R^3} \langle \text{ctg } \theta + (0 - \text{ctg } \theta) H(\theta - \theta_1) \rangle,$$

$$\frac{k_1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}}\sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} = \frac{k_1}{G_{11}} = \frac{1}{R^3} \langle 1 + (0 - 1) H(\theta - \theta_1) \rangle,$$

$$\frac{k_1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} \left( \sqrt{\frac{G_{11}}{G_{22}}} \right)_{,2} = 0,$$

$$\frac{k_2}{\sqrt{G_{11}G_{22}}}\sqrt{\frac{G_{11}}{G_{22}}} = \frac{k_{22}}{G_{22}} = \frac{1}{R^3} \left\langle \frac{1}{\sin^2 \theta} + \left( \frac{\cos \psi \sin^3(\theta - \psi)}{\sin^3 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle,$$

$\varkappa^+$ ,  $\varkappa^-$  – коэффициенты теплоотдачи с внешней и внутренней поверхностей,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

В приложении Ж приводятся выражения для кинетической энергии упругой системы в перемещениях.

### 3.3 Замкнутые интегралы сингулярных уравнений осесимметричного безмоментного состояния гладко сопряженных оболочек вращения

В этом параграфе интегрирование сингулярных систем дифференциальных уравнений сводится к интегрированию уравнений связанных в систему через условия сопряжения, что позволило стандартным образом определять фундаментальные системы функций и записывать решения сингулярных дифференциальных уравнений в замкнутом виде, чрезвычайно удобном для количественного и качественного анализов.

При определении замкнутых интегралов уравнений использовались структуры аналогичные (3.1).

Уравнения статики осесимметричного безмоментного состояния оболочек вращения произвольного очертания имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} \left( \left( \sqrt{G_{22}} T^{11} \right)_{,1} - \left( \sqrt{G_{22}} \right)_{,1} T^{22} \right) &= -q_1; \\ \frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} \left( \left( \sqrt{G_{22}} T^{12} \right)_{,1} + \left( \sqrt{G_{22}} \right)_{,1} T^{12} \right) &= -q_2; \\ T^{11} k_1 + T^2 k_2 &= q_3. \end{aligned} \tag{3.55}$$

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда композиции из оболочек вращения деформируются нагрузками, вызывающими только тангенциальные усилия  $T^{11}$  и  $T^{22}$ .

1. В случае «сферы - конуса» разрешающие уравнения в усилиях запишутся

$$\begin{aligned} \frac{dT^{11}}{d\theta} + T^{11} \left\langle 2 \operatorname{ctg} \theta + \left( -\frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\theta - \psi)} - 2 \operatorname{ctg} \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle = \\ = q_3 R \left\langle \operatorname{ctg} \theta + \left( -\frac{\operatorname{tg} \psi}{\sin^2(\theta - \psi)} - \operatorname{ctg} \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} T^{22} = q_3 R \left\langle 1 + \left( \frac{\sin \theta}{\cos \psi \sin(\theta - \psi)} - 1 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle - \\ - T^{11} \langle 1 + (0 - 1)H(\theta - \theta_1) \rangle. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Решение дифференциального уравнения (3.56) запишется в виде

$$\begin{aligned} T^{11} = \frac{q_3 R}{4} \left\langle \frac{1}{\sin^2 \theta} + \left( \frac{\sin(\theta - \psi)}{\cos \psi \sin \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle - \\ - \frac{q_3 R}{4} \left\langle \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} + \left( \frac{\sin(\theta - \psi)}{\cos \psi \sin \theta} - \frac{2 \sin \theta}{\cos \psi \sin(\theta - \psi)} - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle. \end{aligned}$$

После ряда преобразований выражения для усилий переписутся

$$T^{11} = \frac{q_3 R}{2} \left\langle 1 + \left( \frac{\sin \theta}{\cos \psi \sin(\theta - \psi)} - 1 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \quad (3.58)$$

$$T^{22} = \frac{q_3 R}{2} \left\langle 1 + \left( \frac{2 \sin \theta}{\cos \psi \sin(\theta - \psi)} - 1 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle.$$

Когда композиция сфера-конус находится под действием линейного температурного поля по переменной  $\theta$

$$\Theta_0(\theta) = \tilde{\theta}_0 \left( 1 - \frac{\theta}{\pi} \right), \quad \text{где } \tilde{\theta}_0 = \text{const},$$

то, на основании гипотезы Ф. Неймана [115], [118]  $\tilde{e}_{ii} = e_{ii} + \alpha \Theta$ , запишем:

$$T^{ii} = \tilde{T}^{ii} - \frac{E h \alpha}{1 - \nu} \Theta_0 \quad (i = 1, 2).$$

Уравнения термостатики примут вид

$$\frac{d\tilde{T}^{11}}{d\theta} + \tilde{T}^{11} \left\langle 2 \operatorname{ctg} \theta + \left( -\frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\theta - \psi)} - 2 \operatorname{ctg} \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Eh\alpha}{1-\nu} \Theta_{0,1} + \frac{Eh\alpha}{1-\nu} \left\langle 2 \operatorname{ctg} \theta + \left( -\frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\theta - \psi)} - 2 \operatorname{ctg} \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle \Theta_0 + \\
&\quad + q_3 R \left\langle \operatorname{ctg} \theta + \left( -\frac{\operatorname{tg} \psi}{\sin^2(\theta - \psi)} - \operatorname{ctg} \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \quad (3.59) \\
\tilde{T}^{22} &= q_3 R \left\langle 1 + \left( \frac{\sin \theta}{\cos \psi \sin(\theta - \psi)} - 1 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle - \\
&\quad - \tilde{T}^{11} \langle 1 + (0 - 1)H(\theta - \theta_1) \rangle + \Theta_0 \langle 1 + (0 - 1)H(\theta - \theta_1) \rangle + \Theta_0.
\end{aligned}$$

Решение уравнений системы (3.59) имеет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{11} &= \frac{q_3 R}{2} \left\langle 1 + \left( \frac{\sin \theta}{\cos \psi \sin(\theta - \psi)} - 1 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle + \frac{Eh\alpha\tilde{\theta}_0}{1-\nu} \left( 1 - \frac{\theta}{\pi} \right), \\
\tilde{T}^{22} &= \frac{q_3 R}{2} \left\langle 1 + \left( \frac{2 \sin \theta}{\cos \psi \sin(\theta - \psi)} - 1 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle + \frac{Eh\alpha\tilde{\theta}_0}{1-\nu} \left( 1 - \frac{\theta}{\pi} \right). \quad (3.60)
\end{aligned}$$

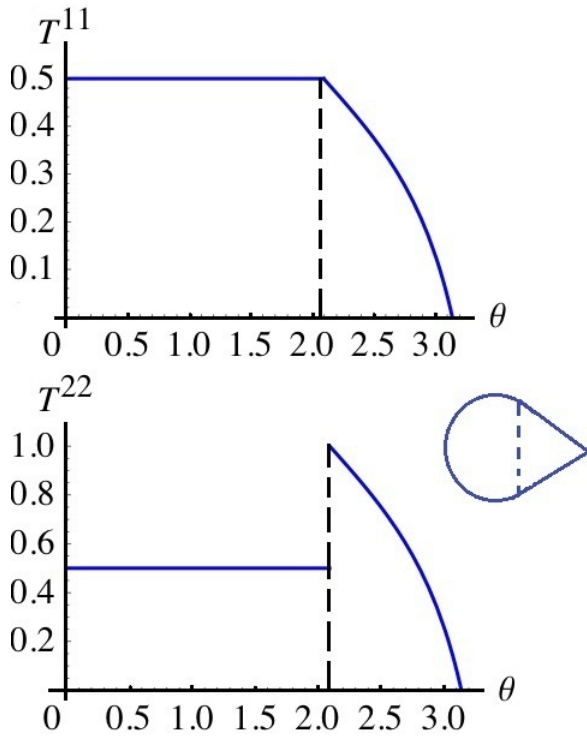


Рисунок 3.10 — Сфера - конус

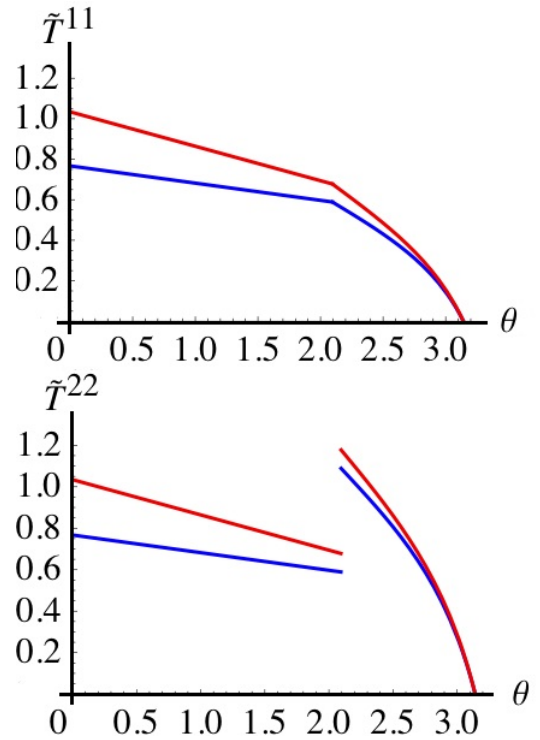


Рисунок 3.11 — Сфера - конус. Красный  $\tilde{\theta}_0 = 100$ , синий  $\tilde{\theta}_0 = 50$ .

На рисунках 3.10, 3.11 приведены изображения тангенциальных усилий для композиции сфера - конус. Композиция находится под действием внутреннего давления  $q_3 = 1$  кг/см<sup>2</sup>. Рисунок 3.10 соответствует «холодной» композиции, рисунок 3.11 – композиции под действием температурного поля  $\Theta_0(\theta) = \tilde{\theta}_0 \left( 1 - \frac{\theta}{\pi} \right)$ .

Введем в рассмотрение дополнительную нормально распределенную нагрузку интенсивности  $q$  в области сферы

$$q^*(\theta) = q(1 - H(\theta - \theta_1)).$$

Уравнения термоупругости примут вид

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{11},_1 + \left\langle 2 \operatorname{ctg} \theta + \left( -\frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\theta - \psi)} - 2 \operatorname{ctg} \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle \tilde{T}^{11} = \\ = \frac{Eh\alpha}{1-\nu} \Theta_{0,1} + \frac{Eh\alpha}{1-\nu} \left\langle 2 \operatorname{ctg} \theta + \left( -\frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\theta - \psi)} - 2 \operatorname{ctg} \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle \Theta_0 + \\ + R \left\langle (q_3 + q) \operatorname{ctg} \theta + \left( -\frac{q_3 \operatorname{tg} \psi}{\sin^2(\theta - \psi)} - (q_3 + q) \operatorname{ctg} \theta \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \quad (3.61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{22} = q_3 R \left\langle 1 + \left( \frac{\sin \theta}{\cos \psi \sin(\theta - \psi)} - 1 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle + qR \langle 1 + (0 - 1)H(\theta - \theta_1) \rangle - \\ - \tilde{T}^{11} \langle 1 + (0 - 1)H(\theta - \theta_1) \rangle + \Theta_0 \langle 1 + (0 - 1)H(\theta - \theta_1) \rangle + \Theta_0. \end{aligned}$$

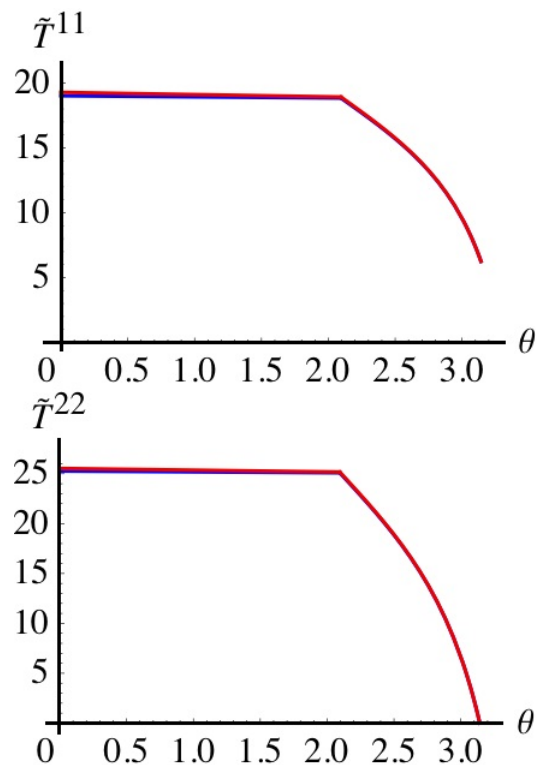
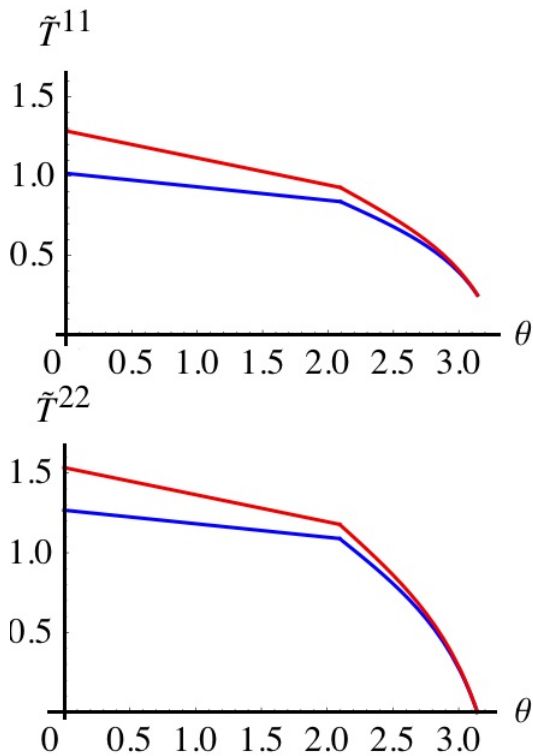


Рисунок 3.12 — Сфера - конус. Красный  $\tilde{\theta}_0 = 100$ , синий  $\tilde{\theta}_0 = 50$ ,  $R = 1$

Рисунок 3.13 — Сфера - конус. Красный  $\tilde{\theta}_0 = 100$ , синий  $\tilde{\theta}_0 = 50$ ,  $R = 25$

Решения этих уравнений запишутся

$$\begin{aligned}\tilde{T}^{11} &= \frac{q_3 R}{2} \left\langle 1 + \left( \frac{\sin \theta}{\cos \psi \sin(\theta - \psi)} - 1 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle + \frac{qR}{2} + \frac{Eh\alpha\tilde{\theta}_0}{1 - \nu} \left( 1 - \frac{\theta}{\pi} \right), \\ \tilde{T}^{22} &= \frac{q_3 R}{2} \left\langle 1 + \left( \frac{2 \sin \theta}{\cos \psi \sin(\theta - \psi)} - 1 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle + \\ &+ \frac{qR}{2} \langle 1 + (0 - 1) H(\theta - \theta_1) \rangle + \frac{Eh\alpha\tilde{\theta}_0}{1 - \nu} \left( 1 - \frac{\theta}{\pi} \right).\end{aligned}$$

На рисунках 3.12, 3.13 приводятся кривые изменения усилий  $\tilde{T}^{11}$  и  $\tilde{T}^{22}$  путем изменения интенсивности дополнительного давления  $q = q_3$  на сфере, что обеспечивает безмоментное состояние композиции в целом.

2. В случае композиции из трех элементов сфера - цилиндр - сфера под действием внутреннего давления  $q_3$  уравнения преобразуются к виду

$$\begin{aligned}\frac{dT^{11}}{d\theta} &+ \left\langle 2 \operatorname{ctg} \theta + (0 - 2 \operatorname{ctg} \theta) H(\theta - \theta_1) + \right. \\ &+ \left. \left( -4 \operatorname{tg} \left( 2\theta - \frac{3\pi}{2} \right) - 0 \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle T^{11} = \quad (3.62) \\ &= q_3 R \left\langle \operatorname{ctg} \theta + (0 - \operatorname{ctg} \theta) H(\theta - \theta_1) + \left( -2 \operatorname{ctg} \left( 2\theta - \frac{3\pi}{2} \right) - 0 \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle; \\ T^{22} &= - \langle 1 + (0 - 1) H(\theta - \theta_1) + (1 - 0) H(\theta - \theta_2) \rangle T^{11} + q_3 R.\end{aligned}$$

Решение первого уравнения системы (3.62) в этом случае примет вид:

$$\begin{aligned}T^{11} &= C \left\langle \frac{1}{\sin^2 \theta} + \left( 1 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{1}{\sin^2 2\theta} - 1 \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle - \frac{q_3 R}{2} \langle \operatorname{ctg}^2 \theta + \\ &+ (0 - \operatorname{ctg}^2 \theta) H(\theta - \theta_1) + (2 \operatorname{ctg}^2 2\theta - 0) H(\theta - \theta_2) \rangle.\end{aligned}$$

После ряда преобразований решение системы переписется

$$T^{11} = \frac{q_3 R}{2};$$

$$T^{22} = \frac{q_3 R}{2} \langle 1 + (2 - 1) H(\theta - \theta_1) + (1 - 2) H(\theta - \theta_2) \rangle.$$

Отметим, что полученные решения на основе континуальной модели в случае композиции из трех элементов сфера - цилиндр - сфера полностью согласуются с результатами, приведенными в книге [104] академика В.В. Новожилова.



3. Разрешающая система для композиции из трех элементов «конус - сфера - конус» имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dT^{11}}{d\theta} + \left\langle \frac{\sin \psi_1}{\sin \theta \sin(\theta + \psi_1)} + \left( 2 \operatorname{ctg} \theta - \frac{\sin \psi_1}{\sin \theta \sin(\theta + \psi_1)} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\sin \psi_2}{\sin \theta \sin(\psi_2 - \theta)} - 2 \operatorname{ctg} \theta \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle T^{11} = \\ = q_3 R \left\langle \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\sin^2(\theta + \psi_1)} + \left( \operatorname{ctg} \theta - \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\sin^2(\theta + \psi_1)} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\ \left. + \left( -\frac{\operatorname{tg} \psi_2}{\sin^2(\psi_2 - \theta)} - \operatorname{ctg} \theta \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle; \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} T^{22} = - \langle 0 + (1 - 0)H(\theta - \theta_1) + (0 - 1)H(\theta - \theta_2) \rangle T^{11} + \\ + q_3 R \left\langle \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \psi_1) \cos \psi_1} + \left( 1 - \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \psi_1) \cos \psi_1} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\sin \theta}{\sin(\theta - \psi_2) \cos \psi_2} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Решения этих уравнений запишутся

$$\begin{aligned} T^{11} = \frac{q_3 R}{2 \cos \psi_1} \left\langle \frac{\sin^2(\theta + \psi_1) - \sin(2\theta + \psi_1) \sin \psi_1}{\sin \theta \sin(\theta + \psi_1)} + \right. \\ \left. + \left( \cos \psi_1 - \frac{\sin^2(\theta + \psi_1) - \sin(2\theta + \psi_1) \sin \psi_1}{\sin \theta \sin(\theta + \psi_1)} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\sin^2 \theta \cos \psi_1}{\cos \psi_2 \sin \theta \sin(\theta - \psi_2)} - \cos \psi_1 \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle; \\ T^{22} = q_3 R \left\langle \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \psi_1) \cos \psi_1} + \left( \frac{1}{2} - \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \psi_1) \cos \psi_1} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\sin \theta}{\sin(\theta - \psi_2) \cos \psi_2} - \frac{1}{2} \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle. \end{aligned}$$

4. Уравнения для определения усилий  $T^{11}$  и  $T^{22}$  в случае композиции сфера - конус - сфера запишутся

$$\begin{aligned} \frac{dT^{11}}{d\theta} + \left\langle 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \left( \frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\theta + \psi)} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\ \left. + \left( 4 \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} - \frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle T^{11} = \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned}
&= q_3 R_1 \left\langle \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \left( \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sin^2(\theta + \psi)} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
&\quad \left. + \left( 2 \frac{R_2 \cos 2\theta}{R_1 \sin 2\theta} - \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sin^2(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle; \\
T^{22} &= - \langle 1 + (0 - 1)H(\theta - \theta_1) + (1 - 0)H(\theta - \theta_2) \rangle T^{11} + \\
&\quad + q_3 R_1 \left\langle 1 + \left( \frac{\sin \theta}{\cos \psi \sin(\theta + \psi)} - 1 \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{R_2}{R_1} - \frac{\sin \theta}{\cos \psi \sin(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Решение уравнения (3.65), как и предыдущих, будем разыскивать в виде

$$T^{11}(\theta) = T_1^{11} + (T_2^{11} - T_1^{11})H(\theta - \theta_1) + (T_3^{11} - T_1^{11})H(\theta - \theta_2). \quad (3.66)$$

На основании подстановки (3.66) уравнение (3.65) распадется на систему уравнений

$$\frac{dT_1^{11}}{d\theta} + 2 \operatorname{ctg} \theta T_1^{11} = q_3 R_1 \operatorname{ctg} \theta; \quad (3.67)$$

$$\frac{dT_2^{11}}{d\theta} + \frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\theta + \psi)} T_2^{11} = \frac{q_3 R_1 \operatorname{tg} \psi}{\sin^2(\theta + \psi)}; \quad (3.68)$$

$$\frac{dT_3^{11}}{d\theta} + 4 \operatorname{ctg} 2\theta T_3^{11} = 2q_3 R_1 \operatorname{ctg} 2\theta, \quad (3.69)$$

и условия сопряжения

$$T_1^{11}|_{\theta_1} = T_2^{11}|_{\theta_1}; \quad (3.70)$$

$$T_3^{11}|_{\theta_2} = T_2^{11}|_{\theta_2}, \quad (3.71)$$

где  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \psi$ ,  $\theta_2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\psi}{2}$ .

Решения уравнений (3.67), (3.68) и (3.69) запишутся:

$$T_1^{11} = \frac{D_1}{\sin^2 \theta} + \frac{q_3 R_1}{2}. \quad (3.72)$$

$$T_2^{11} = \frac{D_2 \sin(\theta + \psi)}{\sin \theta} + \frac{q_3 R_1}{2} \frac{1 - \cos(2\theta + \psi) \cos \psi}{\sin \theta \sin(\theta + \psi) \cos \psi}. \quad (3.73)$$

$$T_3^{11} = \frac{D_3}{\sin^2 2\theta} + \frac{q_3 R_2}{2}. \quad (3.74)$$

Условия (3.70) и (3.71) позволяют записать равенства связывающие постоянные интегрирования:

$$D_1 = D_2 \cos \psi + \frac{q_3 R_1}{2}; \quad (3.75)$$

$$D_3 = D_2(1 - \sin \psi) \cos \psi + \frac{q_3 R_2}{2}(1 - \sin \psi)^2. \quad (3.76)$$

Решение сингулярного уравнения (3.65) запишется

$$\begin{aligned}
T^{11}(\theta) = & D_2 \left\langle \frac{\cos \psi}{\sin^2 \theta} + \left( \frac{\sin(\theta + \psi)}{\sin \theta} - \frac{\cos \psi}{\sin^2 \theta} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& + \left. \left( \frac{(1 - \sin \psi) \cos \psi}{\sin^2 2\theta} - \frac{\sin(\theta + \psi)}{\sin \theta} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle + \\
& + \frac{q_3 R_1}{2 \sin^2 \theta} + \frac{q_3 R_1}{2} + \left( \frac{q_3 R_1 (1 - \cos(2\theta + \psi) \cos \psi)}{\sin \theta \sin(\theta + \psi) \cos \psi} - \right. \\
& \left. - \left( \frac{q_3 R_1}{2 \sin^2 \theta} + \frac{q_3 R_1}{2} \right) \right) H(\theta - \theta_1) + \\
& + \left( \frac{q_3 R_2 (1 - \sin \psi)^2}{2 \sin^2 2\theta} + \frac{q_3 R_2}{2} - \frac{q_3 R_1 (1 - \cos(2\theta + \psi) \cos \psi)}{\sin \theta \sin(\theta + \psi) \cos \psi} \right) H(\theta - \theta_2).
\end{aligned}$$

На основании стандартных преобразований и вида постоянной  $D_2$

$$D_2 = -\frac{q_3 R_1}{2 \cos \psi},$$

усилия  $T^{11}$  и  $T^{22}$  запишутся

$$\begin{aligned}
T^{11} = & \frac{q_3 R_1}{2 \cos \psi} \left\langle \cos \psi + \right. \\
& + \left( \frac{2(1 - \cos(2\theta + \psi) \cos \psi) - \sin^2(\theta + \psi)}{\sin \theta \sin(\theta + \psi)} - \cos \psi \right) H(\theta - \theta_1) + \\
& + \left. \left( \frac{R_2}{R_1} \cos \psi - \frac{2(1 - \cos(2\theta + \psi) \cos \psi) - \sin^2(\theta + \psi)}{\sin \theta \sin(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle; \quad (3.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{22} = & \frac{q_3 R_1}{2 \cos \psi} \left\langle \cos \psi + \left( \frac{2 \sin \theta}{\sin(\theta + \psi)} - \cos \psi \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& + \left. \left( \frac{R_2}{R_1} \cos \psi - \frac{2 \sin \theta}{\sin(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_2) \right\rangle. \quad (3.78)
\end{aligned}$$

Если в выражениях (3.77) и (3.78) положить  $R_1 = R_2 = R$  и  $\psi = 0$ , то получим выражения усилий для композиции сфера-цилиндр-сфера.

5. Для композиции из четырех элементов конус - сфера - цилиндр - сфера система для  $T^{11}$  и  $T^{22}$  имеет вид

$$T_{,1}^{11} + \left\langle \frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\theta + \psi)} + \left( 2 \operatorname{ctg} \theta - \frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_1) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (0 - 2 \operatorname{ctg} \theta) H(\theta - \theta_2) + (4 \operatorname{ctg} 2\theta - 0) H(\theta - \theta_3) \Big\rangle T^{11} = \\
& = q_3 R \left\langle \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sin^2(\theta + \psi)} + \left( \operatorname{ctg} \theta - \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sin^2(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& \quad \left. + (0 - \operatorname{ctg} \theta) H(\theta - \theta_2) + (2 \operatorname{ctg} 2\theta - 0) H(\theta - \theta_3) \right\rangle;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{22} & = - \langle 0 + (1 - 0)H(\theta - \theta_1) + (0 - 1)H(\theta - \theta_2) + (1 - 0)H(\theta - \theta_3) \rangle T^{11} + \\
& + q_3 R \left\langle \frac{\sin \theta}{\cos \psi \sin(\theta + \psi)} + \left( 1 - \frac{\sin \theta}{\cos \psi \sin(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& \quad \left. + (1 - 1)H(\theta - \theta_2) + (1 - 1)H(\theta - \theta_3) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Решения запишутся

$$\begin{aligned}
T^{11} & = \frac{q_3 R}{2} \left\langle \frac{1 - \cos(2\theta + \psi) \cos \psi}{\sin \theta \sin(\theta + \psi) \cos \psi} + \left( 1 - \frac{1 - \cos(2\theta + \psi) \cos \psi}{\sin \theta \sin(\theta + \psi) \cos \psi} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& \quad \left. + (1 - 1)H(\theta - \theta_2) + (1 - 1)H(\theta - \theta_3) \right\rangle;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{22} & = \frac{q_3 R}{2} \left\langle \frac{2 \sin \theta}{\sin(\theta + \psi) \cos \psi} + \left( 1 - \frac{2 \sin \theta}{\sin(\theta + \psi) \cos \psi} \right) H(\theta - \theta_1) + \right. \\
& \quad \left. + (2 - 1)H(\theta - \theta_2) + (1 - 2)H(\theta - \theta_3) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Анализ замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений осесимметричного безмоментного состояния композиций обнаружил локальные нарушения безмоментного состояния на линиях искажения, которые проявляются в виде разрывов первого рода усилий  $T^{22}$  при  $\theta = \theta_l$ . Этот факт является причиной скачкообразного поведения одной из главных кривизн обобщенной срединной поверхности композиции. Графики тангенциальных усилий  $T^{ii}$  ( $i = 1, 2$ ) приведены в приложении Ж.

6. Система для  $T^{11}$  и  $T^{22}$ , на случай композиции из двух элементов конус - сфера в соответствии с рисунком 3.14, находящейся под внутренним давлением  $q_3$  и сжимающим усилием  $q_1$ , имеет вид [22]:

$$T^{11},_1 + \beta(\theta)T^{11} = \tilde{q}_3(\theta), \quad (3.79)$$

$$T^{22} = q_3 R f(\theta) - H(\theta - \theta_1)T^{11}. \quad (3.80)$$

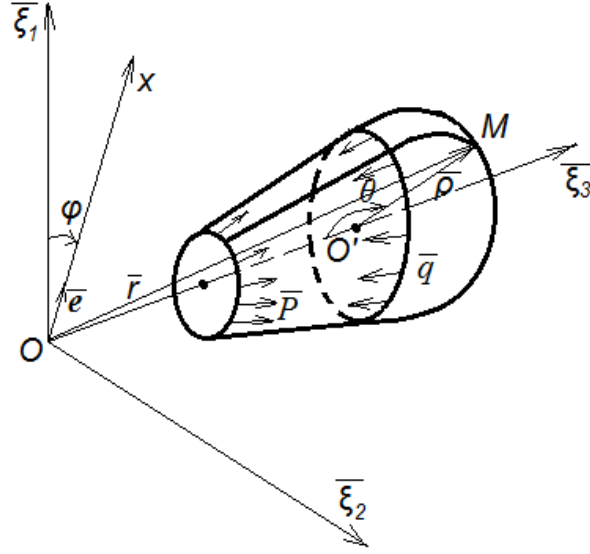


Рисунок 3.14

Здесь

$$\beta(\theta) = \frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\psi + \theta)} + \left( \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\psi + \theta)} \right) H(\theta - \theta_1),$$

$$\tilde{q}_3(\theta) = q_3 R \left\langle \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sin^2(\psi + \theta)} + \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sin^2(\psi + \theta)} \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle - q_1 R \tilde{H}(\theta^*) \delta(\theta - \theta^*),$$

$$f(\theta) = \frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\psi + \theta)} + \left( 1 - \frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\psi + \theta)} \right) H(\theta - \theta_1),$$

$$\tilde{H}(\theta^*) = \begin{cases} \frac{1}{\sin^2(\psi + \theta^*)}, & \theta^0 \leq \theta^* \leq \frac{\pi}{2} - \psi; \\ 1, & \frac{\pi}{2} - \psi < \theta^* \leq \pi. \end{cases}$$

Решение уравнения (3.79) имеет вид:

$$\begin{aligned} T^{11}(\theta) = q_3 R & \left( \left\langle \frac{\sin(\psi + \theta)}{\sin \theta} + \left( \frac{\cos \psi}{\sin^2 \theta} - \frac{\sin(\psi + \theta)}{\sin \theta} \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle \cdot \right. \\ & \cdot \left\langle \frac{\sin \psi (\operatorname{tg} \psi - \sin(2\theta + 2\psi))}{2 \sin^2(\theta + \psi)} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\sin^2 \theta - \cos 2\psi}{2 \cos \psi} - \frac{\sin \psi (\operatorname{tg} \psi - \sin(2\theta + 2\psi))}{2 \sin^2(\theta + \psi)} \right) H(\theta - \theta_1) - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{q_1}{q_3} \tilde{H}(\theta^*) H(\theta - \theta_1) \rangle + C),$$

где

$$\tilde{H}(\theta^*) = \begin{cases} \frac{\sin \theta^*}{\sin^3(\psi + \theta^*)}, & \theta^0 \leq \theta^* \leq \frac{\pi}{2} - \psi; \\ \frac{\sin^2 \theta^*}{\cos \psi}, & \frac{\pi}{2} - \psi < \theta^* \leq \pi. \end{cases}$$

Постоянная интегрирования  $C$ , в случае свободного торца композиции  $T^{11}(\theta^0) = 0$ , имеет вид

$$C = -\frac{\sin \psi (\operatorname{tg} \psi - \sin(2\theta^0 + 2\psi))}{2 \sin^2(\theta^0 + \psi)},$$

а в случае неоднородных условий  $T^{11}(\theta^0) = -P$

$$C = -\frac{P \sin \theta^0}{q_3 R \sin(\theta^0 + \psi)} - \frac{\sin \psi (\operatorname{tg} \psi - \sin(2\theta^0 + 2\psi))}{2 \sin^2(\theta^0 + \psi)}.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе:

1. На основании метода суперпозиции тригонометрических рядов с переменными коэффициентами, многочленов и других функций получены новые аналитические решения (содержащие замкнутые интегралы для коэффициентов аппроксимирующих рядов) статических и динамических задач несвязной термоупругости ПО и ГНП под действием локальных быстро возрастающих силовых и температурных воздействий на краях и основных поверхностях.

1.1. Построены новые точные решения сингулярной задачи несвязной термоупругости пологой оболочки двоякой кривизны два противоположных края которой нагружены быстропеременными усилиями и моментами, а закрепление двух оставшихся может быть любым из известных в теории пологих оболочек способами. На основании полученных решений написана программа (помещена в приложении А) позволяющая эффективно проводить количественный анализ влияния геометрических параметров, интенсивности силовых и температурных нагрузок на термоупругое поведение оболочки.

1.2. Получено новое решение динамической задачи пологой постоянного кручения под действием кратковременного воздействия сосредоточенной силы на одну из основных поверхностей оболочки в предположении конвективного теплообмена оболочки через основные поверхности с окружающей средой. Кратковременное воздействие сосредоточенной силы сопровождается скачкообразным изменением температуры окружающей среды со стороны силовой нагрузки.

На основании полученных точных решений теплопроводности и термоупругости построены изображения изменений форм прогибов в разные моменты времени (внутри и вне временного интервала воздействия сосредоточенной силы) и графики движения точки срединной поверхности оболочки наглядно иллюстрирующие влияние геометрических параметров, параметра БИО, величину температурного скачка на динамику термоупругой системы. Разработанная для количественного анализа программа помещена в приложении Б.

1.3. Решены задачи несвязной термоупругости для пологой оболочки постоянного кручения и цилиндрической оболочки подверженных внезапному воздействию теплового потока со стороны внешних поверхностей по причине мгновенного нарушения термоизоляции. Решение, как и в других случаях, сводится к интегрированию одного дифференциального уравнения шестого порядка в частных производных относительно пространственной и восьмого порядка относительно временной переменных. На основании замкнутых интегралов для функции перемещений получены выражения функций прогиба для указанного класса пологих

оболочек, испытывающих термодинамический удар. Проводится сравнительный количественный анализ влияния геометрических параметров на величины относительных прогибов термоупругих систем. Соответствующие программы приводятся в приложении В.

1.4. На основании замкнутого интеграла сингулярного дифференциального уравнения термоупругости геометрически нерегулярной пластинки проводится количественный анализ влияния подкрепляющих элементов на динамику термоупругой системы «пластинка - ребра» при кратковременном воздействии сосредоточенной силы и скачкообразном изменении температуры окружающей среды на этом же временном интервале. Предлагается подход, позволяющий получать решения в случае неоднородных условий на всех четырех сторонах пластинки. Программы численной реализации решений помещены в приложении Г.

1.5. В квазистатической и динамической постановках, на основе «поршневой» теории при определении интенсивности поперечной нагрузки, решены задачи устойчивости ортотропной геометрически нерегулярной нагретой пластинки в сверхзвуковом потоке газа. Проводится анализ влияния температуры и относительной высоты ребер на интервалы изменения относительной скорости потока при которых прогибы термоупругой системы увеличиваются.

1.6. Получено в замкнутом виде решение сингулярной краевой задачи термоупругости геометрически нерегулярной пластинки в условиях конвективного теплообмена через основные поверхности с окружающей средой и быстропеременных температурных и силовых нагрузок на двух противоположных краях (два других края закреплены любым из известных способов в теории тонких пластин). На основании замкнутых интегралов сингулярных уравнений теплопроводности и термоупругости построены конфигурации термических поверхностей и функций прогиба наглядно иллюстрирующих влияние геометрических параметров, силовых и температурных нагрузок на термоупругое поведение пластинки. Программы по которым проводились расчеты помещены в приложении Е.

2. Впервые построена строгая континуальная модель композиций из различных по геометрическим свойствам оболочек вращения, гладко сопряженных между собой. Рассмотрены различные варианты составных оболочек из элементов в виде сферы, конуса, цилиндра и эллипсоида. Во всех рассмотренных случаях доказано, что сингулярные параметры Ламе и главные кривизны композиции удовлетворяют условиям Кодацци - Гаусса, что позволяет при решении статических и динамических задач для составных оболочек вращения исходить из различных по степени точности уравнений теории тонких оболочек в триортогональных криволинейных координатах.

2.1. Разработана методика построения обобщенного вектора положения любой точки срединной поверхности композиции из оболочек вращения, что позволило стандартными методами теории поверхностей определять обобщенные параметры



Ламе и главные кривизны для различных композиций из оболочек вращения.

В процессе определения обобщенного вектора положения, обобщенных параметров Ламе и главных кривизн возникла необходимость в математическом обосновании алгебраических действий над структурами в виде сумм произведений подходящих непрерывных функций на функции Хевисайда. Эта часть работы в виде конечных формул помещена в приложении Ж.

2.2. Вариационным путем получены основные уравнения осесимметричной термоупругости из оболочек вращения с термочувствительной толщиной в компонентах поля перемещений. На примере композиции из двух элементов – сфера - конус определены сингулярные коэффициенты в уравнениях теплопроводности и термоупругости.

2.3. Получены замкнутые интегралы сингулярных уравнений осесимметричного безмоментного состояния для различных вариантов композиций из оболочек вращения под действием нормального давления.

2.4. На примере нагретой композиции из двух элементов сфера - конус доказана возможность устранения разрыва первого рода в одном из тангенциальных усилий на линии искажения, что обеспечивает безмоментное состояние композиции в целом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 *Абовский Н.П.* О вариационных уравнениях для гибких ребристых и других конструктивно-анизотропных пологих оболочек. В кн.: Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. – С 4-7.
- 2 *Аксельрад Э.Л.* Большие осесимметричные прогибы пологой оболочки вращения при нагреве и нагрузке // Расчет родственных конструкций под редакцией А.А. Уманского, 1961, вып. 6. С. 275-298.
- 3 *Аксельрад Э.Л.* О температурных деформациях неоднородных изотропных оболочек. Изв. АН СССР, ОТН, №8. 1958.
- 4 *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. - 383 с.
- 5 *Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С.* Ребристые цилиндрические оболочки. Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.
- 6 *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М.: Мир., 1976. 331 с.
- 7 *Антуфьев Б.А.* колебания пологой оболочки с присоединенной массой, распределенной по участку ее поверхности // Изв. ВУЗов. Авиационная техника, 1982. № 4. С. 16-20.
- 8 *Антуфьев Б.А.* К расчету колебаний пологой оболочки с жестким включением. // Прикладная механика. 1983, Т 19. №9. С. 45-49.
- 9 *Антуфьев Б.А.* Колебания оболочки с дискретно присоединенной динамической подсистемой. // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. 2008, №3. С. 3-5.
- 10 *Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н.* Контактная постановка задач механики подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем / Известия высших учебных заведений. Математика. Изд-во ФГАОУ ВПО КФУ. Казань, 2017. № 1. С. 77-85.

- 11 *Балабух Л.И.* Изгиб и кручение конических оболочек // Тр. ЦАГИ. 1946. № 577.
- 12 *Белосточный Г.Н., Гуцин Б.А.* Эффективный метод решения неоднородных дифференциальных уравнений. Прикладные задачи напряженного состояния упругих тел: Межвуз. научн. сб./Сарат. политех. ин-т. Саратов, 1987 г. с. 54-58.
- 13 *Белосточный Г.Н., Гуцин Б.А., Рассудов В.М.* Методы отыскания решения уравнений, правые части которых содержат обобщенные функции./ Саратов. политех. ин-т. Саратов. 1987г. 6 с. Деп. в ВИНТИ 17.95.88 № 3767 — В.88.
- 14 *Белосточный Г.Н., Гуцин Б.А.* Секвенциальный подход к интегрированию линейного дифференциального уравнения. // Прикладная теория упругости: Межвуз. науч. сб./ Саратов. политех. ин-т. Саратов, 1989 г. с. 92-99.
- 15 *Белосточный Г.Н.* Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек.//Доклады академии военных наук. 1999. № 1. с. 14-26.
- 16 *Белосточный Г.Н., Рассудов В.М.* Термоупругие системы типа «пластинка-ребра» в сверхзвуковом потоке газа // Прикладная теория упругости. Межвузовский научный сборник. Саратовск. политех. ин-т., 1983. с. 114-121.
- 17 *Белосточный Г.Н., Рассудов В.М.* Колебания термоупругой изотропной системы пластинка - ребра, подверженной тепловому удару. Рукопись депонирована в ВИНТИ. № 87-82 Деп. Печатается в соответствии с решением РИСО Саратовского политехнического института от 23.11.1981. - 11 с.
- 18 *Белосточный Г.Н.* Геометрически нерегулярные оболочки и пластинки под действием температурных факторов. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, МАИ, М., 1992, 593 с.
- 19 *Белосточный Г.Н., Гуцин Б.А.* Уравнения теплопроводности оболочек со ступенчато изменяющейся толщиной.// Рукопись деп. в ВИНТИ 14.06.90 № 3434 - В 90, Сарат. политехн. ин-т. 11 с.
- 20 *Белосточный Г.Н., Русина Е.А.* Оболочки и геометрически нерегулярные пластинки с термочувствительной толщиной // Доклады Российской академии естественных наук. Поволжское межрегиональное отделение. 1999. №1. С. 28-37.
- 21 *Белосточный Г.Н., Мылъцина О.А.* Уравнения термоупругости композиций из оболочек вращения. Вестник Саратовского государственного технического

университета, г. Саратов, Издательство СГТУ. Т. 4, № 1. 2011 г. С. 56-64, ISSN 1999-8341

- 22 *Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А.* Динамические уравнения несвязной осесимметричной термоупругости тонкостенной конструкции в виде гладкосопряженных оболочек вращения. Вестник Саратовского государственного технического университета, г. Саратов, Издательство СГТУ. Т. 4, № 2. 2011 г. С. 66-69, ISSN 1999-8341
- 23 *Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А.* К вопросу статической устойчивости композиции из различных, по геометрическим свойствам, оболочек вращения // Доклады академии военных наук. №5 (54), ОАО «КБ ЭЛЕКТРОПРИБОР», г. Саратов, 2012, с. 21-25. ISSN 1728-2454
- 24 *Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А.* Статистическое и динамическое поведение пологих оболочек под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий. // Электронный журнал «Труды МАИ», выпуск № 82, 26 июня 2015 г. [www.mai.ru/science/trudy/](http://www.mai.ru/science/trudy/)
- 25 *Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А.* Пологие оболочки и пластинки под действием быстропеременных по пространственной и временной координатам температурных и силовых воздействий. В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов (Казань, 20-24 августа 2015 г.). Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров. – Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. С. 427-429.
- 26 *Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А.* Геометрически нерегулярные пластинки под действием быстропеременных по временной координате силовых и температурных воздействий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 442-451.
- 27 *Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А.* Устойчивость нагретой геометрически нерегулярной ортотропной пластинки в сверхзвуковом потоке газа // Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова. Т.1. – М.: ООО "ТР-принт 2016.- С. 39-42.
- 28 *Белосточный Г.Н.* Эффективный метод определения замкнутых интегралов дифференциальных уравнений, связанных в системы. // Проблемы прочности материалов и конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами: Межвуз. научн. сб. / Саратов, СПИ, 1992.- С. 91-97

- 29 *Белосточный Г. Н., Русина Е. А.* Основные уравнения термоупругости геометрически нелинейных оболочек с термочувствительной толщиной // Проблемы прочности материалов и конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами. Межвузовский научный сборник. - Саратов: СГТУ, 1999. - С. 127-135.
- 30 *Бурмистров Е.Ф.* Симметричные деформации конструктивно-ортотропных оболочек вращения. Саратов, Изд-во СГУ, 1962, 107 с.
- 31 *Вайнберг Д.В., Ротфарб И.З.* Расчет пластин и оболочек с разрывными параметрами. // Расчет конструкций. - М.: Стройиздат. 1965. Вып. 10. С. 39-80.
- 32 *Васильев В. В.* О теориях тонких пластин // Изв. РАН, МТТ, 1992, - №3 - С. 26-47.
- 33 *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. - М.: Машиностроение, 1988, - 272 с.
- 34 *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. Изд. 2-е, испр. и дополненное. Серия: Современные физико-технические проблемы; Наука, М., 1997, 320с.
- 35 *Власов В.З.* Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек // ПММ. 1944. 8, вып. 2. С. 109-140.
- 36 *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
- 37 *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем.- Наука, 1967. - 984 с.
- 38 *Галимов К.З.* Общая теория упругих оболочек при конечных перемещениях // Изв. Каз. филиала АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1950. № 2
- 39 *Галфоян П.О.* Решение одной смешанной задачи теории упругости для прямоугольника // Известия АН Арм. ССР. Т.XVII, №1, 1964. С. 39-61.
- 40 *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз., 1958. 429 с.
- 41 *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.- М.: Гос. изд-во физ - мат. литер., 1958.-274 с.
- 42 *Гольденвейзер А.Л.* Теории тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
- 43 *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.

- 44 Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Локальные динамические воздействия на круговые трехслойные пластины. // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы 8-го международного симпозиума. М., 2002. С. 181-192.
- 45 Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Наука, Физматлит, 1995. – 352 с.
- 46 Гребень Е.С. О погрешности полубезмоментной теории оболочек. В кн.: Труды Ленингр. ин-та инженеров железнодорожного транспорта, Л., ЛиИЖДТ, 1967, Вып. 267, с. 46-53.
- 47 Григолюк С.А. Колебания пластинок, нагруженных сосредоточенными массами // ПММ, 1933. Т 1., вып. 1. С. 25-37.
- 48 Григоренко Я.М., Максименко В.П. Напряженно-деформированное состояние гладких и ребристых цилиндрических оболочек при локальных нагрузках. - Докл. АН. УССР, 1982, сер. А, №3, с.22-25.
- 49 Даниловская В.И. Об одной динамической задаче термоупругости. ПМИ., 1952. Т 16, №3. С. 341-344.
- 50 Даревский В.М. Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках. – В кн.: прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение, 1964, С. 23-83.
- 51 Даревский В.М. Оболочки под действием локальных нагрузок. – В кн.: Прочность, устойчивость, Колебания. М., Машиностроение, 1968. С. 49-96.
- 52 Дмитриева Л.М., Жигалко Ю.П. Колебания пологой цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами жесткости под давлением локальных динамических нагрузок. // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во КГУ, 1979. № 14. С. 197-202.
- 53 Егоров К.В. Основы теории автоматического регулирования. [Текст]: учеб. пос./ К.В. Егоров. – 2-е изд., перераб. и доп. – М., «Энергия», 1967. 648 с.
- 54 Жигалко Ю.П. Расчет тонких упругих цилиндрических оболочек на локальные нагрузки. – В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, КГУ, 1966, Вып. 4, с. 3-41.
- 55 Жилин П.А. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 5. С. 139–142.

- bibitemgilin4 *Жилин П.А., Кизима Г.А.* Оболочки нулевой гауссовой кривизны с меридиональными ребрами // Прочность гидротурбин: Тр. ЦКТИ. 1966. № 72. С. 41–52.
- 56 *Жилин П.А.* Общая теория ребристых оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 6.
- 57 *Жилин П.А.* Теория ребристых оболочек и ее приложения // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 5.
- 58 *Жилин П.А.* Линейная теория ребристых оболочек // Известия АН СССР. МТТ. 1970. Вып. 4. С 150-162.
- 59 *Жилин П.А.* Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. // СПб.: Нестор, 2001. 275 с.
- 60 *Ильюшин А.А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПМИ., 1965, Т 20, вып. 6.
- 61 *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей. М.: Гостехиздат. Т. 1, 1947; Т.2, 1948.
- 62 *Кадисов Г.М.* методы пространственных расчетов неразрезных плитно-ребристых пролетных строений и тонкостенных призматических упругих систем. Изд-во Сиб АДН, Омск, 1982. - 80 с.
- 63 *Кадисов Г.М.* Динамика и устойчивость сооружений. Изд-во Сиб АДН, Омск, 2000. - 267 с.
- 64 *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. - М.: Госуд. изд-во технико-теоретич. литер., 1952. - 390с.
- 65 *Карпов В.В.* Геометрически нелинейные задачи для пластин и оболочек и методы их решения.- М.,СПб: изд-во АСВ, СПбГАСУ, 1999.-154 с
- 66 *Карпов В.В., Рябикова Т.В.* Оболочки вращения в единой системе координат // Вестник гражданских инженеров. СПб.: изд-во СПГАСУ, 2010. С.44-47.
- 67 *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. Перевод с румынского О.Е. Булгару. Под редакцией Б.Е. Победри. Из-во Мир. М. 1978 г. 520 с.
- 68 *Кильчевский Н.А.* Обобщение современной теории оболочек // ПММ. 1942. 6, вып. 2–3. — с. 153–167.
- 69 *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. Киев: "Наукова Думка". - 1970. - 303 с.

- 70 *Коляно Ю.М.* Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно однородных тел // Математические методы и физико-математические поля. 1978. Вып. 7. С.7-11.
- 71 *Коноплев Ю.Г.* Экспериментальное исследование задачи о действии сосредоточенных сил на цилиндрическую оболочку. В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, КГУ, 1966, Вып. 4, С. 83-90.
- 72 *Кончковский З.* Плиты. Статические расчеты. Стройиздат. М., 1984. – 480 с.
- 73 *Коссович Л.Ю., Каплунов Ю.Д.* Асимптотический анализ нестационарных упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях // Известия Саратовского государственного университета. 2001. Т. 1. № 2. С. 111-131.
- 74 *Коссович Л.Ю.* Асимптотика динамики цилиндрической оболочки переменной толщины при действии внезапно приложенного нормального давления // Механика деформируемых сред. 1976. № 4. С. 64-69.
- 75 *Красюков В.П., Панкратов Н.Д., Рассудов В.М.* Метод тригонометрических рядов в решении температурных задач теории пологих оболочек // Механика деформируемых сред, вып. 1. - Саратов; СГУ. 1974. - 156с.
- 76 *Крысько В. А.* Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. - Саратов: СГУ, 1978.
- 77 *Крысько В.А., Шагивалеев К.Ф.* Нелинейная динамика замкнутых цилиндрических оболочек при действии локальных поперечных нагрузок / Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. Изд-во РУДН. Москва, 2010. № 4. С. 3-11.
- 78 *Кун П.* Расчет на прочность оболочек в самолетостроении. – М.: - «Оборонгиз», 1961, - 306 с.
- 79 *Кушнир Р.М.* О построении решений обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами//Докл. АН УССР. сер. А. 1980. №9. с. 55-59.
- 80 *Лебедев Н. Н.* Температурные напряжения в теории упругости. - Оренбург: ОНТИ, 1937. - 351с.
- 81 *Лиходед А.И.* О влиянии на динамику оболочки массы, Распределенной по участку ее поверхности // Изв. АН СССР, МТТ, 1973. №1. С. 163-166.
- 82 *Лукаевич С.* Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. – М., Мир. 1982.



- 83 *Лурье А. И.* Общая теория упругих тонких оболочек. /Ред. ж. ПММ, т. 4, вып. 2,-М.: АН СССР, 1940. - 275с.
- 84 *Лурье А.И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
- 85 *Лурье С. А., Гавва Л. М.* Метод расчета напряженно-деформированного состояния несимметрично подкрепленных панелей из композиционных материалов с граничными условиями общего вида. // Вестн. Московск. авиац. ин-та. - М., 1996. - 2,№1. - С. 43-50.
- 86 *Львин Я.В.* Соппротивление оболочек вращения краевым циклическим нагрузкам. // В кн.: Расчет пространственных конструкций, Вып. 7, Стройиздат, 1962. – С 135-161.
- 87 *Матюшев Ю.С., Шклярчук Ф.Н.* К расчету цилиндрической оболочки с днищем, сопряженным посредством шпангоута, нагруженного системой сосредоточенных сил. // Изв. вузов. Авиационная техника. 1973., №3. – С. 40-45.
- 88 *Михайлов Б.К.* Пластины и оболочки с разрывными параметрами. Л.:Изд-во Ленинградск. ун-та. 1980. 96 с.
- 89 *Морозов Н.Ф.* К нелинейной теории тонких пластин // ДАН СССР. 1957. 114 № 5, с. 968–971.
- 90 *Мотовиловец И.А.* Теплопроводность пластин и тел вращения. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1969. 143 с.
- 91 *Муштарь Х.М., Терегулов И.Г.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Тат. кн. изд-во, 1959. 433 с.
- 92 *Мыльцина О.А., Белосточный Г.Н.* Термоупругое поведение пластин под действием быстропеременных температурных и силовых факторов // Доклады академии военных наук. №3 (58), ОАО «КБ ЭЛЕКТРОПРИБОР», г. Саратов, 2013, с. 33-38. ISSN 1728-2454
- 93 *Мыльцина О.А., Савина Е.В., Белосточный Г.Н.* Колебания пологих оболочек при внезапном воздействии теплового потока // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2014 г., том 14, выпуск 2. с. 227-232. ISSN 1816-9791
- 94 *Мыльцина О.А., Белосточный Г.Н.* Термоупругость подкрепленной пластинки под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий на границе // Вестник московского авиационного института, 2014 г., том 21, № 2. с. 169-174. ISSN 0869-6101

- 95 *Мыльцина О.А., Сурова М.Ю.* Динамика пластинки под действием импульсных нагрузок // Математика. Механика: Сб. науч. тр. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2015. - Вып.17.- С. 145-148.
- 96 *Назаров А.А.* Основы теории и методы расчета пологих оболочек. Л. : Стройиздат ; М., 1966. 303 с.
- 97 *Назаров А.Г.* Некоторые контактные задачи теории оболочек. Доклады АН Арм.ССР, вып. 7, №2, 1958.
- 98 *Назаров А.Г.* К определению импульсных функций. Докл. АН Арм.ССР, вып.7, №1, 1947.
- 99 *Нахди П.М.* О теории тонких упругих оболочек. // Механика: Сб. переводов ин. ст. 1959. № 2. 1959. № 2.
- 100 *Нерубайло Б.В.* Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. – М.,: Машиностроение, 1983, 247 с.
- 101 *Нерубайло Б.В.* К расчету напряжений в цилиндрических оболочках, нагруженных по линиям контура. – Прикладная механика, 1975, Том 2, Вып. 2, С. 41-48.
- 102 *Никитин В.А.* Приближенное решение задачи о действии сосредоточенных сил на цилиндрическую оболочку. Ученые записки ЛГУ, Сер. мат. наук., Л., 1960, № 280, Вып. 35, С. 87-96.
- 103 *Новицкий В.В.* Дельта-функция и ее применение в строительной механике. В кн.: Расчет пространственных конструкций, 1962. Вып. 8. С. 207-245.
- 104 *Новожиллов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962, 431 с.
- 105 *Новожиллов В.В., Черных К.Ф.* К расчету оболочек на сосредоточенные воздействия. В кн.: Исследования по теории упругости и пластичности. Л., ЛГУ, 1963. – С. 48-58.
- 106 *Образцов И.Ф., Онанов Г.Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем. М.: Машиностроение, 1973, - 660 с.
- 107 *Огibalов П. М.* Вопросы динамики и устойчивости оболочек.- М.: МГУ, 1963.- 417 с.
- 108 *Огibalов П. М., Грибанов В. Ф.* Термоустойчивость пластин и оболочек – М.: МГУ, 1968.

- 109 *Огибалов П.М., Колтунов М.А.* Оболочки и пластины. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1969. 695 с.
- 110 *Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарное движение нормальной сосредоточенной нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости / Труды МАИ. 2015. № 82. С. 2.
- 111 *Онанов Г.Г.* Уравнения с сингулярными коэффициентами типа дельта-функций и ее производных // ДАН СССР, 1970, Т.191, №5. С.997-1000.
- 112 *Ониашвили О.Д.* Некоторые динамические задачи теории оболочек. Изд-во АН СССР., М., 1957. 193 с.
- 113 *Павилайнен В.Я.* К расчету пологих оболочек, подкрепленных ребрами. В кн.: Исследования по упругости и пластичности. Л., ЛГУ, 1968. С. 27-40.
- 114 *Пелех Б.Л.* Обобщенная теория оболочек.- Львов: Вища школа, 1978. - 158с.
- 115 *Подстригач Я.С., Швец Р.Н.* Термоупругость тонких оболочек. Киев: "Наукова Думка". - 1978. - 343 с.
- 116 *Работнов Ю.Н.* Основные уравнения теории оболочек // ДАН СССР. 1945. 47, № 5.
- 117 *Рассудов В.М.* Деформации пологих оболочек, подкрепленных ребрами жесткости. // Уч. записки СГУ. Саратов, 1956. Т. 52. С. 51-91.
- 118 *Рассудов В.М., Красюков В.П., Панкратов Н.Д.* Некоторые задачи термоупругости пластинок и пологих оболочек. Изд-во Саратовского ун-та. 1973 г. 157 с.
- 119 *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М., Гос. изд-во техн.-теорет. Литерат. 1956. 420 с.
- 120 *Салтыкова О.А., Вецель Л.С., Вецель С.С., Крысько В.А.* Контактное взаимодействие замкнутой цилиндрической оболочки, подкрепленной балкой с внешней стороны, с учетом физической и геометрической нелинейностей / В сборнике: Компьютерные науки и информационные технологии Материалы Международной научной конференции. Ответственные за выпуск: Т.В. Семенова, А.Г. Федорова. Изд-во ИЦ «Наука». Саратов, 2016. С. 351-354.
- 121 *Салтыкова О.А., Кузнецова Э.С., Крысько В.А.* Нелинейная динамика двухслойных замкнутых цилиндрических оболочек / Современное состояние естественных и технических наук. ООО Изд-во «Спутник+». Москва, 2014. № XV. С. 22-25.

- 122 *Сапожников Г.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Решение нестационарной задачи для цилиндрической оболочки с упругим наполнителем с применением асимптотических методов и численного обращения интегрального преобразования Лапласа / Сапожников Г.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. В книге: Тезисы докладов IV Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). Москва, 2016. С. 133-134.
- 123 *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.:ГИТТЛ, 1954. 444 с.
- 124 *Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Тарлаковский Д.В.* Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Проблемы машиностроения и автоматизации. Изд-во ОАО НИАТ. Москва, 2016. № 1. С. 91-97.
- 125 *Старовойтов Э. И., Яровая А.В., Леоненко Д.В.* Локальные и импульсные нагрузки в трехслойных элементах конструкций. Гомель, БелГУТ, 2003, - 367 С.
- 126 *Сухнин С.Н.* Действие локальных нагрузок на ортотропную цилиндрическую оболочку. В кн.: Расчет пространственных конструкций. М., Стройиздат, 1969, Вып. 12. С.80-95.
- 127 *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Воздействие нестационарного давления на цилиндрическую оболочку с упругим наполнителем / Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. Изд-во ФГАОУ ВПО КФУ. Казань, 2016. Т. 158. № 1. С. 141-151.
- 128 *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966 г. 636 с.
- 129 *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во ИЛ., 1962. 351 с.
- 130 *Урбанович Н.В., Чернышов Г.Н.* Линейные напряжения в оболочке от сосредоточенных нагрузок и тепловых поточников. Изв. АН СССР, МТТ, №2, 1970.
- 131 *Филлин А. П.* Элементы теории оболочек. - Л.: Стройиздат, 1975. -290с.
- 132 *Цветкова О.А.* Термоустойчивость композиций из пологих оболочек и пластин // Проблемы прочности материалов и конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами: Межвуз. научн. сб. – Саратов: СГТУ, 1998. – С. 131-136.

- 133 *Цирков И.С.* Об изгибе замкнутой цилиндрической оболочки сосредоточенной силой. Инженерный сборник, 1960. Т 27. С. 114-123.
- 134 *Чернина В.С.* Статика тонкостенных оболочек вращения. Л.: Наука, 1968. 456 с.
- 135 *Чернуха Ю.А.* Дискретно-континуальная модель температурных полей орбитальных оболочек // Матем. методы и физ.-мех. поля. 1978. Т. 7. С. 43–47. URL: <http://journals.iarpm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/688/734> (дата обращения 10.09.15).
- 136 *Черных К.Ф.* Сопряженные задачи теории тонких оболочек // Проблемы механики сплошных сред (К семидесятилетию акад. Н.И.Мусхелишвили): Изв. АН СССР. М., 1961. С. 499–503.
- 137 *Черных К.Ф.* Линейная теория оболочек. Часть 1. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1962. 274 с.
- 138 *Черных К.Ф.* Линейная теория оболочек. Часть 2. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1964. 395 с.
- 139 *Чернышов Г.Н.* О контактных задачах в теории оболочек // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Днепропетровск. 1969. – М.: Изд-во МАИ. 2011. – 176 с.
- 140 *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир. 1965. 412 с.
- 141 *Шклярчук Ф.Н., Кочемасова Е.И., Тютюнников Н.П.* Решение задачи о деформировании анизотропной безмоментной цилиндрической оболочки // «Механика композиционных материалов и конструкций», 2002, Т. 8, №4. С. 447-455.
- 142 *Шклярчук Ф.Н.* Динамика конструкций летательных аппаратов. – М.: МАИ, 1983. – 80 с.
- 143 *Ярема С.Я.* Исследование распределения температуры в пологих оболочках и пластин при разрывных граничных условиях на поверхности. // Тепловые напряжения в элементах конструкций: Сборник статей. Киев, Наукова Думка, 1965. С. 57-67.
- 144 *Mylytcina O.A.* On the Solution to Problem of Uncoupled Thermoelasticity for Plate under Influence of Quick Change along Coordinate of Thermal and Force Factors on the Boundary. Представляем научные интересы миру. Естественные науки: Материалы V международной научной конференции молодых ученых

«PRESENTING ACADEMIC ACHIEVEMENTS TO THE WORLD». – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2014. – Вып. 5. – с. 143-150.

- 145 *O. A. Myltcina, V. V. Myltcin* THE DYNAMICS OF PLATE UNDER THE INFLUENCE OF SINGULARITY EFFORT // Представляем научные достижения миру. Естественные науки: материалы VI международной научной конференции молодых ученых «Presenting Academic Achievements to the World». – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2015. – Вып. 6. – С. 205 - 211.: ил.
- 146 *Reissner E.* Reflections on the theory of elastic plates // Appl. Mech. Rev. 1985, 38. №11. P. 1453-1464.

## Приложение А

### Графики нагрузок приложенных на краях пологой оболочки двойкой кривизны

Графики построены по формулам (1.2)

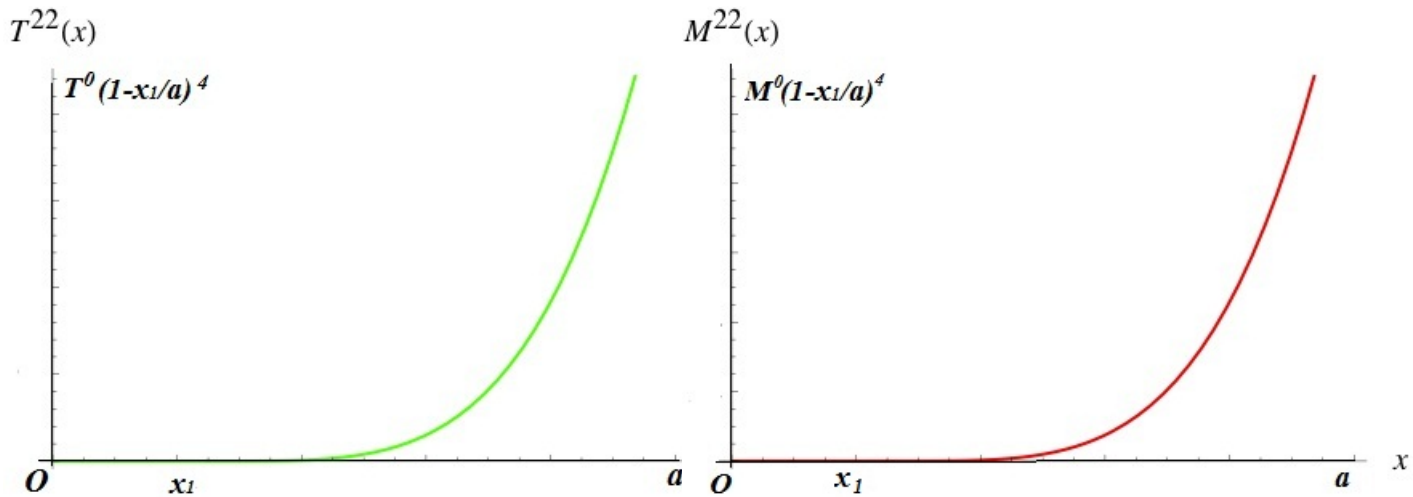


Рисунок А.1

Рисунок А.2

Программный код для вычисления функции прогиба и построения ее графиков при различных значениях температуры и моментов для задачи о нагретой пологой оболочке двойкой кривизны, края которой нагружены быстропеременными усилиями и моментами

Входные данные.

$$a:=100;$$

$$b:=5/4 * a;$$

$$x1:=\frac{a}{4};$$

$$h:=0.005a;$$

$$\delta:=h * 5;$$

$$k1 := -4 \frac{\delta}{a^2};$$

$$k2 := -4 \frac{\delta}{b^2};$$

$$\alpha := 25 \cdot 10^{-6};$$

$$Ee := 0.7210^6;$$

$$\nu := 0.32;$$

$$Dd := \frac{Eeh^3}{12(1-\nu^2)};$$

$$Bb := \frac{Eeh}{1-\nu^2};$$

$$\theta1 := 50;$$

$$Mm := 100;$$

$$\theta0 := 50;$$

$$T0 := -20;$$

$$aa[k_] := 2(1 - \text{Cos}[k\pi]) / (k\pi);$$

$$bb[k_] := -2(1 - \text{Cos}[k\pi]) / (k\pi)^2;$$

$$a2[k_] := -4(1 - \text{Cos}[k\pi]) / (k\pi)^3;$$

Решение однородного дифференциального уравнения восьмого порядка для функции  $\Phi_k(x)$ .

$$\lambda^8 + \xi_6 \lambda^6 + \xi_4 \lambda^4 + \xi_2 \lambda^2 + \xi_0 = 0$$

1. Решение характеристического уравнения.

$$\xi6[k_] := -4 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2;$$

$$\xi4[k_] := 6 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^4 + 12(1 - \nu^2) k^2 a^2 \left( \frac{a}{h} \right)^2;$$

$$\xi2[k_] := -4 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^6 - 24(1 - \nu^2) \left( \frac{a}{h} \right)^2 k1 k2 a^2 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2;$$

$$\xi0[k_] := \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^8 + 12(1 - \nu^2) \left( \frac{a}{h} \right)^2 k1^2 a^2 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^4;$$

$$\text{Solve}[(\lambda[k])^8 + \xi6[k](\lambda[k])^6 + \xi4[k](\lambda[k])^4 + \xi2[k](\lambda[k])^2 + \xi0[k] = 0, \lambda[k]]$$

2. Все решения характеристического уравнения комплексные, поэтому фундаментальная система функций представляется через  $e^{\frac{\lambda_{ix}}{a}} \text{Sin}[\frac{\lambda_{ix}}{a}]$ ,  $e^{\frac{\lambda_{ix}}{a}} \text{Cos}[\frac{\lambda_{ix}}{a}]$ ,



$i, j = \overline{1, 4}$

$$\phi 1[x\_]:=e^{\frac{\lambda 1 x}{a}} \text{Sin}\left[\frac{\lambda 2 x}{a}\right];$$

$$\phi 2[x\_]:=e^{\frac{\lambda 1 x}{a}} \text{Cos}\left[\frac{\lambda 2 x}{a}\right];$$

$$\phi 3[x\_]:=e^{-\frac{\lambda 1 x}{a}} \text{Sin}\left[\frac{\lambda 2 x}{a}\right];$$

$$\phi 4[x\_]:=e^{-\frac{\lambda 1 x}{a}} \text{Cos}\left[\frac{\lambda 2 x}{a}\right];$$

$$\phi 5[x\_]:=e^{\frac{\lambda 3 x}{a}} \text{Sin}\left[\frac{\lambda 4 x}{a}\right];$$

$$\phi 6[x\_]:=e^{\frac{\lambda 3 x}{a}} \text{Cos}\left[\frac{\lambda 4 x}{a}\right];$$

$$\phi 7[x\_]:=e^{-\frac{\lambda 3 x}{a}} \text{Sin}\left[\frac{\lambda 4 x}{a}\right];$$

$$\phi 8[x\_]:=e^{-\frac{\lambda 3 x}{a}} \text{Cos}\left[\frac{\lambda 4 x}{a}\right];$$

$$\text{Fkk}[k\_ , x\_]:=C1[k]\phi 1[x] + C2[k]\phi 2[x] + C3[k]\phi 3[x] + C4[k]\phi 4[x] + C5[k]\phi 5[x] + C6[k]\phi 6[x] + C7[k]\phi 7[x] + C8[k]\phi 8[x];$$

$$\text{Fk0}[k\_ , x\_]:=e^{\frac{x\lambda 1}{a}} C1[k]\text{Sin}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] + e^{\frac{x\lambda 1}{a}} C2[k]\text{Cos}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] + e^{-\frac{x\lambda 1}{a}} C3[k]\text{Sin}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] + e^{-\frac{x\lambda 1}{a}} C4[k]\text{Cos}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] + e^{\frac{x\lambda 3}{a}} C5[k]\text{Sin}\left[\frac{x\lambda 4}{a}\right] + e^{\frac{x\lambda 3}{a}} C6[k]\text{Cos}\left[\frac{x\lambda 4}{a}\right] + e^{-\frac{x\lambda 3}{a}} C7[k]\text{Sin}\left[\frac{x\lambda 4}{a}\right] + e^{-\frac{x\lambda 3}{a}} C8[k]\text{Cos}\left[\frac{x\lambda 4}{a}\right];$$

$$\text{Fk1}[k\_ , x\_]:= \left( e^{\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 2 \text{Cos}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] + e^{\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 1 \text{Sin}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] \right) C1[k] + \left( e^{\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 1 \text{Cos}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] - e^{\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 2 \text{Sin}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] \right) C2[k] + \left( e^{-\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 2 \text{Cos}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] - e^{-\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 1 \text{Sin}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] \right) C3[k]$$

$$\left( -e^{-\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 1 \text{Cos}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] - e^{-\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 2 \text{Sin}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] \right) C4[k] + \left( e^{\frac{x\lambda 3}{a}} \lambda 4 \text{Cos}\left[\frac{x\lambda 4}{a}\right] + e^{\frac{x\lambda 3}{a}} \lambda 3 \text{Sin}\left[\frac{x\lambda 4}{a}\right] \right) C5[k]$$

$$\left( e^{\frac{x\lambda 3}{a}} \lambda 3 \text{Cos}\left[\frac{x\lambda 4}{a}\right] - e^{\frac{x\lambda 3}{a}} \lambda 4 \text{Sin}\left[\frac{x\lambda 4}{a}\right] \right) C6[k] + \left( e^{-\frac{x\lambda 3}{a}} \lambda 4 \text{Cos}\left[\frac{x\lambda 4}{a}\right] - e^{-\frac{x\lambda 3}{a}} \lambda 3 \text{Sin}\left[\frac{x\lambda 4}{a}\right] \right) C7[k]$$

$$\left( -e^{-\frac{x\lambda 3}{a}} \lambda 4 \text{Sin}\left[\frac{x\lambda 4}{a}\right] - e^{-\frac{x\lambda 3}{a}} \lambda 3 \text{Cos}\left[\frac{x\lambda 4}{a}\right] \right) C8[k];$$

$$\text{Fk2}[k\_ , x\_]:=C1[k] \left( 2e^{\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 1 \lambda 2 \text{Cos}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] + e^{\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 1^2 \text{Sin}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] - e^{\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 2^2 \text{Sin}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] \right) + C2[k] \left( e^{\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 1^2 \text{Cos}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] - e^{\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 2^2 \text{Cos}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] - 2e^{\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 1 \lambda 2 \text{Sin}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] \right) + C3[k] \left( -2e^{-\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 1 \lambda 2 \text{Cos}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] + e^{-\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 1^2 \text{Sin}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] - e^{-\frac{x\lambda 1}{a}} \lambda 2^2 \text{Sin}\left[\frac{x\lambda 2}{a}\right] \right) +$$









$$35e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] + 7e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] \Big) +$$

$$C8[k] \left( -e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] + 21e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] - 35e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] + \right.$$

$$7e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] - 7e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] + 35e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] -$$

$$\left. 21e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] + e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^4 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] \Big);$$

$$B1[k\_]:=2\frac{(1+\nu)T0}{Bb}aa[k] + \frac{2(k1+\nu k2)aMma}{Dd} \left(\frac{b}{a}\right)^2 a2[k];$$

$$B2[k\_]:= \frac{(\nu k1+k2)a}{h} * b\alpha\theta1(1+\nu)bb[k];$$

$$B3[k\_]:= -\frac{6(1-\nu)T0b}{aBb}bb[k];$$

$$B4[k\_]:= \frac{(\nu k1+k2)aMmab}{Dda}bb[k];$$

$$B5[k\_]:=12\frac{Mma}{Dd} \left(\frac{b}{a}\right)^2 a2[k];$$

$$B6[k\_]:= \frac{24Mma}{Dd}aa[k];$$

$$B7[k\_]:=12 \left( \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{(k1^2+2\nu k1k2+k2^2)a^2Mmaa2[k]}{2Dd} + \frac{T0}{Bb}(\nu k1+k2)aaa[k] \right) \left(\frac{a}{h}\right)^2;$$

$$B8[k\_]:= \left(\frac{b}{a}\right)^2 6(k1^2+2\nu k1k2+k2^2)a^2\alpha\theta1(1+\nu)\left(\frac{a}{h}\right)^3 a2[k] - 12(1-\nu^2)ak1\alpha\theta0\left(\frac{a}{h}\right)^2;$$

$$\{Ck[k\_], Ak[k\_]\} =$$

$$\text{LinearSolve} \left[ \left\{ \{20, -4(k1+\nu k2)a\}, \left\{ \frac{5(1+\nu)k\pi a}{2b} + \frac{15(1-\nu^2)k\pi a(k2+\nu k1)a}{2b(6(k1+\nu k2)a+3(1+\nu)(k2+\nu k1)a)}, \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. -(\nu k1+k2)a\left(\frac{k\pi a}{b}\right) \right\} \right], \left\{ B1[k] + \frac{(1+\nu)k\pi a}{3(1-\nu)b}B3[k], B4[k] + \frac{B3[k]}{6(1-\nu)}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 \right\};$$

$$Dk[k\_]:= -\frac{(1-\nu)}{2} \frac{\left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 Ck[k]}{(6(k1+\nu k2)a+3(1+\nu)(\nu k1+k2)a)};$$

$$Fk[k\_]:= \left(\frac{b}{ak\pi}\right)^2 B2[k];$$

$$Ek[k\_]:= \frac{(1-\nu)}{2} \frac{(k2+\nu k1)aCk[k]}{(6(k1+\nu k2)a+3(1+\nu)(k2+\nu k1)a)};$$

$$Bk[k\_]:= \frac{B3[k]}{6(1-\nu)};$$

$$tW[k\_ , x\_]:= \frac{2}{(1-\nu)} Ak[k] \left(\frac{x}{a} - \frac{x1}{a}\right)^4 a\text{HeavisideTheta}[x-x1] +$$

$$Dk[k] \left(\frac{x}{a} - \frac{x1}{a}\right)^6 a\text{HeavisideTheta}[x-x1];$$

$$Gk[k\_]:= B8[k] - 12\left(\frac{a}{h}\right)^2 (\nu k1+k2)a\left(\frac{k\pi a}{b}\right) Fk[k];$$

$$Gk0[k\_]:= -24\frac{2}{(1-\nu)} Ak[k] + B5[k];$$

$$\text{Gk2}[k\_]:= - 360\text{Dk}[k] + 24 \left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 \frac{2}{(1-\nu)}\text{Ak}[k] + \text{B6}[k];$$

$$\text{Gk4}[k\_]:=60 \left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 \text{Dk}[k] - \left(\left(\frac{k\pi a}{b}\right)^4 + 12 \left(\frac{a}{h}\right)^2 (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) a^2\right) \frac{2}{(1-\nu)}\text{Ak}[k] + 60(k_1 + \nu k_2)a \left(\frac{a}{h}\right)^2 \frac{2}{(1-\nu)}\text{Ck}[k] - 12 \left(\frac{k\pi a}{b}\right) \left(\frac{a}{h}\right)^2 (k_2 + \nu k_1)a\text{Bk}[k] + \text{B7}[k];$$

$$\text{Gk6}[k\_]:= - \left(\left(\frac{k\pi a}{b}\right)^4 + 12 \left(\frac{a}{h}\right)^2 (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) a^2\right) \text{Dk}[k] - 12 \left(\frac{a}{h}\right)^2 (k_2 + \nu k_1)a \left(\frac{k\pi a}{b}\right)$$

Решение системы уравнений для нахождения  $\tilde{C}_m$

$$\text{tA6}[k\_]:= \frac{\text{Gk6}[k]}{\xi_0[k]};$$

$$\text{tA4}[k\_]:= \frac{1}{\xi_0[k]}(\text{Gk4}[k] - 30\xi_2[k]\text{tA6}[k]);$$

$$\text{tA2}[k\_]:= \frac{1}{\xi_0[k]}(\text{Gk2}[k] - 12\xi_2[k]\text{tA4}[k] - 360\xi_4[k]\text{tA6}[k]);$$

$$\text{tA0}[k\_]:= \frac{1}{\xi_0[k]}(\text{Gk0}[k] - 2\xi_2[k]\text{tA2}[k] - 24\xi_4[k]\text{tA4}[k] - 720\xi_6[k]\text{tA6}[k]);$$

$$\{\text{tC1}[k\_], \text{tC2}[k\_], \text{tC3}[k\_], \text{tC4}[k\_], \text{tC5}[k\_], \text{tC6}[k\_], \text{tC7}[k\_], \text{tC8}[k\_]\} =$$

$$\text{LinearSolve} \left[ \left\{ \left\{ e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right], e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right], e^{-\frac{x_1\lambda_1}{a}} \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right], e^{-\frac{x_1\lambda_1}{a}} \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right], e^{\frac{x_1\lambda_3}{a}} \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right], e^{\frac{x_1\lambda_3}{a}} \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right], e^{-\frac{x_1\lambda_3}{a}} \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right], e^{-\frac{x_1\lambda_3}{a}} \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] \right\}, \left\{ \left( e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_2 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] + e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_1 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] \right), \left( e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_1 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] - e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_2 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] \right), \left( e^{-\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_2 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] - e^{-\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_1 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] \right), \left( -e^{-\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_1 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] - e^{-\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_2 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] \right), \left( e^{\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_4 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] + e^{\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_3 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] \right), \left( e^{\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_3 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] - e^{\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_4 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] \right), \left( e^{-\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_4 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] - e^{-\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_3 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] \right), \left( -e^{-\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_4 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] - e^{-\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_3 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] \right) \right\}, \left\{ \left( 2e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_1 \lambda_2 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] + e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_1^2 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] - e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_2^2 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] \right), \left( e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_1^2 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] - e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_2^2 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] - 2e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] \right), \left( -2e^{-\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_1 \lambda_2 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] + e^{-\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_1^2 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] - e^{-\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_2^2 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] \right), \left( e^{-\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_1^2 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] - e^{-\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_2^2 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] + 2e^{-\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] \right), \left( 2e^{\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_3 \lambda_4 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] + e^{\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_3^2 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] - e^{\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_4^2 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] \right), \left( e^{\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_3^2 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] - e^{\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_4^2 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] - 2e^{\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_3 \lambda_4 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] \right), \left( -2e^{-\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_3 \lambda_4 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] + e^{-\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_3^2 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] - e^{-\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_4^2 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] \right), \left( e^{-\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_3^2 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] - e^{-\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_4^2 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] + 2e^{-\frac{x_1\lambda_3}{a}} \lambda_3 \lambda_4 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_4}{a} \right] \right) \right\}, \left\{ \left( 3e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_1^2 \lambda_2 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] - e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_2^3 \text{Cos} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] + e^{\frac{x_1\lambda_1}{a}} \lambda_1^3 \text{Sin} \left[ \frac{x_1\lambda_2}{a} \right] - \right.$$









$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{x1\lambda1}{a}} \lambda 2^7 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 2}{a} \right] - e^{-\frac{x1\lambda 1}{a}} \lambda 1^7 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 2}{a} \right] + 21 e^{-\frac{x1\lambda 1}{a}} \lambda 1^5 \lambda 2^2 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 2}{a} \right] - \\
& 35 e^{-\frac{x1\lambda 1}{a}} \lambda 1^3 \lambda 2^4 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 2}{a} \right] + 7 e^{-\frac{x1\lambda 1}{a}} \lambda 1 \lambda 2^6 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 2}{a} \right] \Big), \\
& \left( -e^{-\frac{x1\lambda 1}{a}} \lambda 1^7 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 2}{a} \right] + 21 e^{-\frac{x1\lambda 1}{a}} \lambda 1^5 \lambda 2^2 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 2}{a} \right] - 35 e^{-\frac{x1\lambda 1}{a}} \lambda 1^3 \lambda 2^4 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 2}{a} \right] + \right. \\
& 7 e^{-\frac{x1\lambda 1}{a}} \lambda 1 \lambda 2^6 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 2}{a} \right] - 7 e^{-\frac{x1\lambda 1}{a}} \lambda 1^6 \lambda 2 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 2}{a} \right] + 35 e^{-\frac{x1\lambda 1}{a}} \lambda 1^4 \lambda 2^3 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 2}{a} \right] - \\
& 21 e^{-\frac{x1\lambda 1}{a}} \lambda 1^2 \lambda 2^5 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 2}{a} \right] + e^{-\frac{x1\lambda 1}{a}} \lambda 2^7 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 2}{a} \right] \Big), \\
& \left( 7 e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^6 \lambda 4 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - 35 e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^4 \lambda 4^3 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] + 21 e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^2 \lambda 4^5 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - \right. \\
& e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 4^7 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] + e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^7 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - 21 e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^5 \lambda 4^2 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] + \\
& 35 e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^3 \lambda 4^4 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - 7 e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3 \lambda 4^6 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] \Big), \\
& \left( e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^7 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - 21 e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^5 \lambda 4^2 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] + 35 e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^3 \lambda 4^4 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - \right. \\
& 7 e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3 \lambda 4^6 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - 7 e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^6 \lambda 4 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] + 35 e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^4 \lambda 4^3 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - \\
& 21 e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^2 \lambda 4^5 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] + e^{\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 4^7 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] \Big), \\
& \left( 7 e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^6 \lambda 4 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - 35 e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^4 \lambda 4^3 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] + 21 e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^2 \lambda 4^5 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - \right. \\
& e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 4^7 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^7 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] + 21 e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^5 \lambda 4^2 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - \\
& 35 e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^3 \lambda 4^4 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] + 7 e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3 \lambda 4^6 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] \Big), \\
& \left( -e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^7 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] + 21 e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^5 \lambda 4^2 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - 35 e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^3 \lambda 4^4 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] + \right. \\
& 7 e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3 \lambda 4^6 \text{Cos} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - 7 e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^6 \lambda 4 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] + 35 e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^4 \lambda 4^3 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] - \\
& \left. \left. 21 e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 3^2 \lambda 4^5 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] + e^{-\frac{x1\lambda 3}{a}} \lambda 4^7 \text{Sin} \left[ \frac{x1\lambda 4}{a} \right] \right) \right\} \Big), \\
& \{-tA0[k], 0, -2tA2[k], 0, -24tA4[k], 0, -720tA6[k], 0\};
\end{aligned}$$

Simplify[tC8[1]]

Вспомогательные действия для удовлетворения граничным условиям

$$R1[k\_ , x\_ ] := (-k1 + (2 + \nu)k2)a \left( \frac{k\pi a}{b} \right) Fk2[k, x] - (\nu k1 + k2)a \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^3 Fk0[k, x];$$

$$R2[k\_ , x\_ ] := (k1 + \nu k2)a Fk4[k, x] + (k2 - (2 + \nu)k1)a \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 Fk2[k, x];$$

$$R3[k\_ , x\_ ] := Fk4[k, x] - 2 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 Fk2[k, x] + \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^4 Fk0[k, x];$$

$$R4[k\_ , x\_ ] := Fk6[k, x] - 2 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 Fk4[k, x] + \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^4 Fk2[k, x];$$

Collect[R3[k, 0], {C1[k], C2[k], C3[k], C4[k], C5[k], C6[k], C7[k], C8[k]}];

$$\begin{aligned}
\text{Rk1}[k_-] &:= \frac{a^2 k \pi \lambda_1 \lambda_2 (1-\nu)(-k_1+k_2(2+\nu)) C_1[k]}{b} + \\
&\frac{1}{2}(1-\nu) \left( -\frac{a^4 k^3 \pi^3 (k_2+k_1\nu)}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (\lambda_1^2-\lambda_2^2)(-k_1+k_2(2+\nu))}{b} \right) C_2[k] - \\
&\frac{a^2 k \pi \lambda_1 \lambda_2 (1-\nu)(-k_1+k_2(2+\nu)) C_3[k]}{b} + \\
&\frac{1}{2}(1-\nu) \left( -\frac{a^4 k^3 \pi^3 (k_2+k_1\nu)}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (\lambda_1^2-\lambda_2^2)(-k_1+k_2(2+\nu))}{b} \right) C_4[k] + \\
&\frac{a^2 k \pi \lambda_3 \lambda_4 (1-\nu)(-k_1+k_2(2+\nu)) C_5[k]}{b} + \\
&\frac{1}{2}(1-\nu) \left( -\frac{a^4 k^3 \pi^3 (k_2+k_1\nu)}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (\lambda_3^2-\lambda_4^2)(-k_1+k_2(2+\nu))}{b} \right) C_6[k] - \\
&\frac{a^2 k \pi \lambda_3 \lambda_4 (1-\nu)(-k_1+k_2(2+\nu)) C_7[k]}{b} + \\
&\frac{1}{2}(1-\nu) \left( -\frac{a^4 k^3 \pi^3 (k_2+k_1\nu)}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (\lambda_3^2-\lambda_4^2)(-k_1+k_2(2+\nu))}{b} \right) C_8[k]; \\
\text{Rk2}[k_-] &:= \frac{1}{2}(1-\nu) \left( a(4\lambda_1^3\lambda_2 - 4\lambda_1\lambda_2^3)(k_1+k_2\nu) + \frac{2a^3 k^2 \pi^2 \lambda_1 \lambda_2 (k_2-k_1(2+\nu))}{b^2} \right) C_1[k] + \\
&\frac{1}{2}(1-\nu) \left( a(\lambda_1^4 - 6\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4)(k_1+k_2\nu) + \frac{a^3 k^2 \pi^2 (\lambda_1^2-\lambda_2^2)(k_2-k_1(2+\nu))}{b^2} \right) C_2[k] + \\
&\frac{1}{2}(1-\nu) \left( a(-4\lambda_1^3\lambda_2 + 4\lambda_1\lambda_2^3)(k_1+k_2\nu) - \frac{2a^3 k^2 \pi^2 \lambda_1 \lambda_2 (k_2-k_1(2+\nu))}{b^2} \right) C_3[k] + \\
&\frac{1}{2}(1-\nu) \left( a(\lambda_1^4 - 6\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4)(k_1+k_2\nu) + \frac{a^3 k^2 \pi^2 (\lambda_1^2-\lambda_2^2)(k_2-k_1(2+\nu))}{b^2} \right) C_4[k] + \\
&\frac{1}{2}(1-\nu) \left( a(4\lambda_3^3\lambda_4 - 4\lambda_3\lambda_4^3)(k_1+k_2\nu) + \frac{2a^3 k^2 \pi^2 \lambda_3 \lambda_4 (k_2-k_1(2+\nu))}{b^2} \right) C_5[k] + \\
&\frac{1}{2}(1-\nu) \left( a(\lambda_3^4 - 6\lambda_3^2\lambda_4^2 + \lambda_4^4)(k_1+k_2\nu) + \frac{a^3 k^2 \pi^2 (\lambda_3^2-\lambda_4^2)(k_2-k_1(2+\nu))}{b^2} \right) C_6[k] + \\
&\frac{1}{2}(1-\nu) \left( a(-4\lambda_3^3\lambda_4 + 4\lambda_3\lambda_4^3)(k_1+k_2\nu) - \frac{2a^3 k^2 \pi^2 \lambda_3 \lambda_4 (k_2-k_1(2+\nu))}{b^2} \right) C_7[k] + \\
&\frac{1}{2}(1-\nu) \left( a(\lambda_3^4 - 6\lambda_3^2\lambda_4^2 + \lambda_4^4)(k_1+k_2\nu) + \frac{a^3 k^2 \pi^2 (\lambda_3^2-\lambda_4^2)(k_2-k_1(2+\nu))}{b^2} \right) C_8[k]; \\
\text{Rk3}[k_-] &:= \left( -\frac{4a^2 k^2 \pi^2 \lambda_1 \lambda_2}{b^2} + 4\lambda_1^3\lambda_2 - 4\lambda_1\lambda_2^3 \right) C_1[k] + \\
&\left( \frac{a^4 k^4 \pi^4}{b^4} + \lambda_1^4 - 6\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4 - \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{b^2} \right) C_2[k] + \\
&\left( \frac{4a^2 k^2 \pi^2 \lambda_1 \lambda_2}{b^2} - 4\lambda_1^3\lambda_2 + 4\lambda_1\lambda_2^3 \right) C_3[k] + \\
&\left( \frac{a^4 k^4 \pi^4}{b^4} + \lambda_1^4 - 6\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4 - \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{b^2} \right) C_4[k] + \\
&\left( -\frac{4a^2 k^2 \pi^2 \lambda_3 \lambda_4}{b^2} + 4\lambda_3^3\lambda_4 - 4\lambda_3\lambda_4^3 \right) C_5[k] + \\
&\left( \frac{a^4 k^4 \pi^4}{b^4} + \lambda_3^4 - 6\lambda_3^2\lambda_4^2 + \lambda_4^4 - \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (\lambda_3^2-\lambda_4^2)}{b^2} \right) C_6[k] + \\
&\left( \frac{4a^2 k^2 \pi^2 \lambda_3 \lambda_4}{b^2} - 4\lambda_3^3\lambda_4 + 4\lambda_3\lambda_4^3 \right) C_7[k] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{a^4 k^4 \pi^4}{b^4} + \lambda 3^4 - 6\lambda 3^2 \lambda 4^2 + \lambda 4^4 - \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (\lambda 3^2 - \lambda 4^2)}{b^2} \right) C8[k]; \\
\text{Rk4}[k\_]&:= \frac{1}{2} \left( \frac{2a^4 k^4 \pi^4 \lambda 1 \lambda 2}{b^4} + 6\lambda 1^5 \lambda 2 - 20\lambda 1^3 \lambda 2^3 + 6\lambda 1 \lambda 2^5 - \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (4\lambda 1^3 \lambda 2 - 4\lambda 1 \lambda 2^3)}{b^2} \right) \\
& (1 - \nu) C1[k] + \\
& \frac{1}{2} \left( \lambda 1^6 - 15\lambda 1^4 \lambda 2^2 + 15\lambda 1^2 \lambda 2^4 - \lambda 2^6 + \frac{a^4 k^4 \pi^4 (\lambda 1^2 - \lambda 2^2)}{b^4} - \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (\lambda 1^4 - 6\lambda 1^2 \lambda 2^2 + \lambda 2^4)}{b^2} \right) \\
& (1 - \nu) C2[k] + \frac{1}{2} \left( -\frac{2a^4 k^4 \pi^4 \lambda 1 \lambda 2}{b^4} - 6\lambda 1^5 \lambda 2 + 20\lambda 1^3 \lambda 2^3 - 6\lambda 1 \lambda 2^5 - \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (-4\lambda 1^3 \lambda 2 + 4\lambda 1 \lambda 2^3)}{b^2} \right) \\
& (1 - \nu) C3[k] + \\
& \frac{1}{2} \left( \lambda 1^6 - 15\lambda 1^4 \lambda 2^2 + 15\lambda 1^2 \lambda 2^4 - \lambda 2^6 + \frac{a^4 k^4 \pi^4 (\lambda 1^2 - \lambda 2^2)}{b^4} - \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (\lambda 1^4 - 6\lambda 1^2 \lambda 2^2 + \lambda 2^4)}{b^2} \right) \\
& (1 - \nu) C4[k] + \frac{1}{2} \left( \frac{2a^4 k^4 \pi^4 \lambda 3 \lambda 4}{b^4} + 6\lambda 3^5 \lambda 4 - 20\lambda 3^3 \lambda 4^3 + 6\lambda 3 \lambda 4^5 - \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (4\lambda 3^3 \lambda 4 - 4\lambda 3 \lambda 4^3)}{b^2} \right) \\
& (1 - \nu) C5[k] + \\
& \frac{1}{2} \left( \lambda 3^6 - 15\lambda 3^4 \lambda 4^2 + 15\lambda 3^2 \lambda 4^4 - \lambda 4^6 + \frac{a^4 k^4 \pi^4 (\lambda 3^2 - \lambda 4^2)}{b^4} - \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (\lambda 3^4 - 6\lambda 3^2 \lambda 4^2 + \lambda 4^4)}{b^2} \right) \\
& (1 - \nu) C6[k] + \frac{1}{2} \left( -\frac{2a^4 k^4 \pi^4 \lambda 3 \lambda 4}{b^4} - 6\lambda 3^5 \lambda 4 + 20\lambda 3^3 \lambda 4^3 - 6\lambda 3 \lambda 4^5 - \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (-4\lambda 3^3 \lambda 4 + 4\lambda 3 \lambda 4^3)}{b^2} \right) \\
& (1 - \nu) C7[k] + \\
& \frac{1}{2} \left( \lambda 3^6 - 15\lambda 3^4 \lambda 4^2 + 15\lambda 3^2 \lambda 4^4 - \lambda 4^6 + \frac{a^4 k^4 \pi^4 (\lambda 3^2 - \lambda 4^2)}{b^4} - \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (\lambda 3^4 - 6\lambda 3^2 \lambda 4^2 + \lambda 4^4)}{b^2} \right) \\
& (1 - \nu) C8[k];
\end{aligned}$$

$$\text{Rk5}[k\_]:=$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (1 - \nu) C1[k] \\
& \left( -\frac{a^4 e^{\lambda 1} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Sin}[\lambda 2]}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2 (2 + \nu)) (2e^{\lambda 1} \lambda 1 \lambda 2 \text{Cos}[\lambda 2] + e^{\lambda 1} \lambda 1^2 \text{Sin}[\lambda 2] - e^{\lambda 1} \lambda 2^2 \text{Sin}[\lambda 2])}{b} \right) + \\
& \frac{1}{2} (1 - \nu) C2[k] \\
& \left( -\frac{a^4 e^{\lambda 1} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Cos}[\lambda 2]}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2 (2 + \nu)) (e^{\lambda 1} \lambda 1^2 \text{Cos}[\lambda 2] - e^{\lambda 1} \lambda 2^2 \text{Cos}[\lambda 2] - 2e^{\lambda 1} \lambda 1 \lambda 2 \text{Sin}[\lambda 2])}{b} \right) + \\
& \frac{1}{2} (1 - \nu) C3[k] \\
& \left( -\frac{a^4 e^{-\lambda 1} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Sin}[\lambda 2]}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2 (2 + \nu)) (-2e^{-\lambda 1} \lambda 1 \lambda 2 \text{Cos}[\lambda 2] + e^{-\lambda 1} \lambda 1^2 \text{Sin}[\lambda 2] - e^{-\lambda 1} \lambda 2^2 \text{Sin}[\lambda 2])}{b} \right) +
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C4[k] \\ \left( -\frac{a^4 e^{-\lambda^1} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Cos}[\lambda_2]}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2(2 + \nu)) (e^{-\lambda^1} \lambda_1^2 \text{Cos}[\lambda_2] - e^{-\lambda^1} \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + 2e^{-\lambda^1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b} \right) +$$

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C5[k] \\ \left( -\frac{a^4 e^{\lambda^3} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Sin}[\lambda_4]}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2(2 + \nu)) (2e^{\lambda^3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{\lambda^3} \lambda_3^2 \text{Sin}[\lambda_4] - e^{\lambda^3} \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4])}{b} \right) +$$

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C6[k] \\ \left( -\frac{a^4 e^{\lambda^3} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Cos}[\lambda_4]}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2(2 + \nu)) (e^{\lambda^3} \lambda_3^2 \text{Cos}[\lambda_4] - e^{\lambda^3} \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] - 2e^{\lambda^3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4])}{b} \right) +$$

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C7[k] \\ \left( -\frac{a^4 e^{-\lambda^3} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Sin}[\lambda_4]}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2(2 + \nu)) (-2e^{-\lambda^3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{-\lambda^3} \lambda_3^2 \text{Sin}[\lambda_4] - e^{-\lambda^3} \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4])}{b} \right) +$$

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C8[k] \\ \left( -\frac{a^4 e^{-\lambda^3} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Cos}[\lambda_4]}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2(2 + \nu)) (e^{-\lambda^3} \lambda_3^2 \text{Cos}[\lambda_4] - e^{-\lambda^3} \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] + 2e^{-\lambda^3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4])}{b} \right);$$

Rk6[k\_] :=

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C1[k] \left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (2e^{\lambda^1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda^1} \lambda_1^2 \text{Sin}[\lambda_2] - e^{\lambda^1} \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} + a(k_1 + k_2 \nu) (4e^{\lambda^1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] - 4e^{\lambda^1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda^1} \lambda_1^4 \text{Sin}[\lambda_2] - 6e^{\lambda^1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2] + e^{\lambda^1} \lambda_2^4 \text{Sin}[\lambda_2]) \right) +$$

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C2[k] \left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (e^{\lambda^1} \lambda_1^2 \text{Cos}[\lambda_2] - e^{\lambda^1} \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] - 2e^{\lambda^1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} + a(k_1 + k_2 \nu) (e^{\lambda^1} \lambda_1^4 \text{Cos}[\lambda_2] - 6e^{\lambda^1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda^1} \lambda_2^4 \text{Cos}[\lambda_2] - 4e^{\lambda^1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2] + 4e^{\lambda^1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Sin}[\lambda_2]) \right) +$$

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C3[k] \left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (-2e^{-\lambda^1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda^1} \lambda_1^2 \text{Sin}[\lambda_2] - e^{-\lambda^1} \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} +$$

$$a(k_1 + k_2\nu) \left( -4e^{-\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + 4e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Sin}[\lambda_2] - 6e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Sin}[\lambda_2] \right) +$$

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C4[k]$$

$$\left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Cos}[\lambda_2] - e^{-\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + 2e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} + \right.$$

$$a(k_1 + k_2\nu) \left( e^{-\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Cos}[\lambda_2] - 6e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Cos}[\lambda_2] + 4e^{-\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2] - 4e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Sin}[\lambda_2] \right) +$$

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C5[k]$$

$$\left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (2e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Sin}[\lambda_4] - e^{\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} + \right.$$

$$a(k_1 + k_2\nu) \left( 4e^{\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] - 4e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^3 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_3^4 \text{Sin}[\lambda_4] - 6e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_4^4 \text{Sin}[\lambda_4] \right) +$$

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C6[k]$$

$$\left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Cos}[\lambda_4] - e^{\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] - 2e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} + \right.$$

$$a(k_1 + k_2\nu) \left( e^{\lambda_3} \lambda_3^4 \text{Cos}[\lambda_4] - 6e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_4^4 \text{Cos}[\lambda_4] - 4e^{\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4] + 4e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^3 \text{Sin}[\lambda_4] \right) +$$

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C7[k]$$

$$\left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (-2e^{-\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{-\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Sin}[\lambda_4] - e^{-\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} + \right.$$

$$a(k_1 + k_2\nu) \left( -4e^{-\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] + 4e^{-\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^3 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{-\lambda_3} \lambda_3^4 \text{Sin}[\lambda_4] - 6e^{-\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4] + e^{-\lambda_3} \lambda_4^4 \text{Sin}[\lambda_4] \right) +$$

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C8[k]$$

$$\left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (e^{-\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Cos}[\lambda_4] - e^{-\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] + 2e^{-\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} + \right.$$

$$a(k_1 + k_2\nu) \left( e^{-\lambda_3} \lambda_3^4 \text{Cos}[\lambda_4] - 6e^{-\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{-\lambda_3} \lambda_4^4 \text{Cos}[\lambda_4] + 4e^{-\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4] - 4e^{-\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^3 \text{Sin}[\lambda_4] \right) ;$$

$$\text{Rk7}[k\_]:=$$

$$C1[k] \left( 4e^{\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] - 4e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Cos}[\lambda_2] + \frac{a^4 e^{\lambda_1} k^4 \pi^4 \text{Sin}[\lambda_2]}{b^4} + e^{\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Sin}[\lambda_2] - \right.$$

$$6e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2] + e^{\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Sin}[\lambda_2] -$$

$$\left. \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (2e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Sin}[\lambda_2] - e^{\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& C2[k] \left( \frac{a^4 e^{\lambda_1 k^4 \pi^4} \text{Cos}[\lambda_2]}{b^4} + e^{\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Cos}[\lambda_2] - 6e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Cos}[\lambda_2] - \right. \\
& 4e^{\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2] + 4e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Sin}[\lambda_2] - \\
& \left. \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Cos}[\lambda_2] - e^{\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] - 2e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} \right) + \\
& C3[k] \left( -4e^{-\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + 4e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Cos}[\lambda_2] + \frac{a^4 e^{-\lambda_1} k^4 \pi^4 \text{Sin}[\lambda_2]}{b^4} + e^{-\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Sin}[\lambda_2] - \right. \\
& 6e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Sin}[\lambda_2] - \\
& \left. \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (-2e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Sin}[\lambda_2] - e^{-\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} \right) + \\
& C4[k] \left( \frac{a^4 e^{-\lambda_1} k^4 \pi^4 \text{Cos}[\lambda_2]}{b^4} + e^{-\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Cos}[\lambda_2] - 6e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Cos}[\lambda_2] + \right. \\
& 4e^{-\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2] - 4e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Sin}[\lambda_2] - \\
& \left. \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Cos}[\lambda_2] - e^{-\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + 2e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} \right) + \\
& C5[k] \left( 4e^{\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] - 4e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^3 \text{Cos}[\lambda_4] + \frac{a^4 e^{\lambda_3} k^4 \pi^4 \text{Sin}[\lambda_4]}{b^4} + e^{\lambda_3} \lambda_3^4 \text{Sin}[\lambda_4] - \right. \\
& 6e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_4^4 \text{Sin}[\lambda_4] - \\
& \left. \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (2e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Sin}[\lambda_4] - e^{\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} \right) + \\
& C6[k] \left( \frac{a^4 e^{\lambda_3} k^4 \pi^4 \text{Cos}[\lambda_4]}{b^4} + e^{\lambda_3} \lambda_3^4 \text{Cos}[\lambda_4] - 6e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_4^4 \text{Cos}[\lambda_4] - \right. \\
& 4e^{\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4] + 4e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^3 \text{Sin}[\lambda_4] - \\
& \left. \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Cos}[\lambda_4] - e^{\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] - 2e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} \right) + \\
& C7[k] \left( -4e^{-\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] + 4e^{-\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^3 \text{Cos}[\lambda_4] + \frac{a^4 e^{-\lambda_3} k^4 \pi^4 \text{Sin}[\lambda_4]}{b^4} + e^{-\lambda_3} \lambda_3^4 \text{Sin}[\lambda_4] - \right. \\
& 6e^{-\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4] + e^{-\lambda_3} \lambda_4^4 \text{Sin}[\lambda_4] - \\
& \left. \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (-2e^{-\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{-\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Sin}[\lambda_4] - e^{-\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} \right) + \\
& C8[k] \left( \frac{a^4 e^{-\lambda_3} k^4 \pi^4 \text{Cos}[\lambda_4]}{b^4} + e^{-\lambda_3} \lambda_3^4 \text{Cos}[\lambda_4] - 6e^{-\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{-\lambda_3} \lambda_4^4 \text{Cos}[\lambda_4] + \right. \\
& 4e^{-\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4] - 4e^{-\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^3 \text{Sin}[\lambda_4] - \\
& \left. \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (e^{-\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Cos}[\lambda_4] - e^{-\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] + 2e^{-\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} \right);
\end{aligned}$$

Rk8[k\_] :=

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(1 - \nu) C1[k] (6e^{\lambda_1} \lambda_1^5 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] - 20e^{\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2^3 \text{Cos}[\lambda_2] + 6e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^5 \text{Cos}[\lambda_2] + \\
& e^{\lambda_1} \lambda_1^6 \text{Sin}[\lambda_2] - 15e^{\lambda_1} \lambda_1^4 \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2] + 15e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^4 \text{Sin}[\lambda_2] - e^{\lambda_1} \lambda_2^6 \text{Sin}[\lambda_2] + \\
& \frac{a^4 k^4 \pi^4 (2e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Sin}[\lambda_2] - e^{\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^4}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b^2} 2a^2 k^2 \pi^2 (4e^{\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] - 4e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Sin}[\lambda_2] - 6e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2] + \\
& e^{\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Sin}[\lambda_2])) + \\
& \frac{1}{2} (1 - \nu) C2[k] (e^{\lambda_1} \lambda_1^6 \text{Cos}[\lambda_2] - 15e^{\lambda_1} \lambda_1^4 \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + 15e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^4 \text{Cos}[\lambda_2] - \\
& e^{\lambda_1} \lambda_2^6 \text{Cos}[\lambda_2] - 6e^{\lambda_1} \lambda_1^5 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2] + 20e^{\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2^3 \text{Sin}[\lambda_2] - 6e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^5 \text{Sin}[\lambda_2] + \\
& \frac{a^4 k^4 \pi^4 (e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Cos}[\lambda_2] - e^{\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] - 2e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^4} - \\
& \frac{1}{b^2} 2a^2 k^2 \pi^2 (e^{\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Cos}[\lambda_2] - 6e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Cos}[\lambda_2] - 4e^{\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2] + \\
& 4e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Sin}[\lambda_2])) + \\
& \frac{1}{2} (1 - \nu) C3[k] (-6e^{-\lambda_1} \lambda_1^5 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + 20e^{-\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2^3 \text{Cos}[\lambda_2] - 6e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^5 \text{Cos}[\lambda_2] + \\
& e^{-\lambda_1} \lambda_1^6 \text{Sin}[\lambda_2] - 15e^{-\lambda_1} \lambda_1^4 \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2] + 15e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^4 \text{Sin}[\lambda_2] - e^{-\lambda_1} \lambda_2^6 \text{Sin}[\lambda_2] + \\
& \frac{a^4 k^4 \pi^4 (-2e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Sin}[\lambda_2] - e^{-\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^4} - \\
& \frac{1}{b^2} 2a^2 k^2 \pi^2 (-4e^{-\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + 4e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Sin}[\lambda_2] - \\
& 6e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Sin}[\lambda_2])) + \\
& \frac{1}{2} (1 - \nu) C4[k] (e^{-\lambda_1} \lambda_1^6 \text{Cos}[\lambda_2] - 15e^{-\lambda_1} \lambda_1^4 \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + 15e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^4 \text{Cos}[\lambda_2] - \\
& e^{-\lambda_1} \lambda_2^6 \text{Cos}[\lambda_2] + 6e^{-\lambda_1} \lambda_1^5 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2] - 20e^{-\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2^3 \text{Sin}[\lambda_2] + 6e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^5 \text{Sin}[\lambda_2] + \\
& \frac{a^4 k^4 \pi^4 (e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Cos}[\lambda_2] - e^{-\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + 2e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^4} - \\
& \frac{1}{b^2} 2a^2 k^2 \pi^2 (e^{-\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Cos}[\lambda_2] - 6e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Cos}[\lambda_2] + 4e^{-\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2] - \\
& 4e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Sin}[\lambda_2])) + \\
& \frac{1}{2} (1 - \nu) C5[k] (6e^{\lambda_3} \lambda_3^5 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] - 20e^{\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4^3 \text{Cos}[\lambda_4] + 6e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^5 \text{Cos}[\lambda_4] + \\
& e^{\lambda_3} \lambda_3^6 \text{Sin}[\lambda_4] - 15e^{\lambda_3} \lambda_3^4 \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4] + 15e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^4 \text{Sin}[\lambda_4] - e^{\lambda_3} \lambda_4^6 \text{Sin}[\lambda_4] + \\
& \frac{a^4 k^4 \pi^4 (2e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Sin}[\lambda_4] - e^{\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4])}{b^4} - \\
& \frac{1}{b^2} 2a^2 k^2 \pi^2 (4e^{\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] - 4e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^3 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_3^4 \text{Sin}[\lambda_4] - 6e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4] + \\
& e^{\lambda_3} \lambda_4^4 \text{Sin}[\lambda_4])) + \\
& \frac{1}{2} (1 - \nu) C6[k] (e^{\lambda_3} \lambda_3^6 \text{Cos}[\lambda_4] - 15e^{\lambda_3} \lambda_3^4 \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] + 15e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^4 \text{Cos}[\lambda_4] - \\
& e^{\lambda_3} \lambda_4^6 \text{Cos}[\lambda_4] - 6e^{\lambda_3} \lambda_3^5 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4] + 20e^{\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4^3 \text{Sin}[\lambda_4] - 6e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^5 \text{Sin}[\lambda_4] + \\
& \frac{a^4 k^4 \pi^4 (e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Cos}[\lambda_4] - e^{\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] - 2e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4])}{b^4} - \\
& \frac{1}{b^2} 2a^2 k^2 \pi^2 (e^{\lambda_3} \lambda_3^4 \text{Cos}[\lambda_4] - 6e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_4^4 \text{Cos}[\lambda_4] - 4e^{\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4] +
\end{aligned}$$

$$4e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4]) +$$

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C7[k] \left( -6e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] + 20e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] - 6e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] + \right. \\ \left. e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] - 15e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] + 15e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] - e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] + \right. \\ \left. a^4 k^4 \pi^4 \left( -2e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] + e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] - e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] \right) \right) \\ \frac{1}{b^4}$$

$$\frac{1}{b^2} 2a^2 k^2 \pi^2 \left( -4e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] + 4e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] + e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] - \right. \\ \left. 6e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] + e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] \right) +$$

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)C8[k] \left( e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] - 15e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] + 15e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] - \right. \\ \left. e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] + 6e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] - 20e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] + 6e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] + \right. \\ \left. a^4 k^4 \pi^4 \left( e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] - e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] + 2e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] \right) \right) \\ \frac{1}{b^4}$$

$$\frac{1}{b^2} 2a^2 k^2 \pi^2 \left( e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] - 6e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] + e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \cos[\lambda^4] + 4e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] - \right. \\ \left. 4e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \sin[\lambda^4] \right) ;$$

Система для отыскания постоянных интегрирования  $C_k$

$$TFk0[k_, x_] := e^{\frac{x\lambda^1}{a}} tC1[k] \sin \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] + e^{\frac{x\lambda^1}{a}} tC2[k] \cos \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] + e^{-\frac{x\lambda^1}{a}} tC3[k] \sin \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] + \\ e^{-\frac{x\lambda^1}{a}} tC4[k] \cos \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] + e^{\frac{x\lambda^3}{a}} tC5[k] \sin \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] + e^{\frac{x\lambda^3}{a}} tC6[k] \cos \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] + e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} tC7[k] \sin \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] +$$

$$e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} tC8[k] \cos \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] ;$$

$$TFk2[k_, x_] := tC1[k] \left( 2e^{\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^1 \lambda^2 \cos \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] + e^{\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^1 \lambda^2 \sin \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] - e^{\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^2 \lambda^2 \sin \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] \right) +$$

$$tC2[k] \left( e^{\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^1 \lambda^2 \cos \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] - e^{\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^2 \lambda^2 \cos \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] - 2e^{\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^1 \lambda^2 \sin \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] \right) +$$

$$tC3[k] \left( -2e^{-\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^1 \lambda^2 \cos \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] + e^{-\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^1 \lambda^2 \sin \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] - e^{-\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^2 \lambda^2 \sin \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] \right) +$$

$$tC4[k] \left( e^{-\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^1 \lambda^2 \cos \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] - e^{-\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^2 \lambda^2 \cos \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] + 2e^{-\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^1 \lambda^2 \sin \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] \right) +$$

$$tC5[k] \left( 2e^{\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \cos \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] + e^{\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \sin \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] - e^{\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^4 \lambda^4 \sin \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] \right) +$$

$$tC6[k] \left( e^{\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \cos \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] - e^{\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^4 \lambda^4 \cos \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] - 2e^{\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \sin \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] \right) +$$

$$tC7[k] \left( -2e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \cos \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] + e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \sin \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] - e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^4 \lambda^4 \sin \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] \right) +$$

$$tC8[k] \left( e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \cos \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] - e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^4 \lambda^4 \cos \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] + 2e^{-\frac{x\lambda^3}{a}} \lambda^3 \lambda^4 \sin \left[ \frac{x\lambda^4}{a} \right] \right) ;$$

$$TFk4[k_, x_] :=$$

$$tC1[k] \left( 4e^{\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^1 \lambda^2 \cos \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] - 4e^{\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^1 \lambda^2 \cos \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] + e^{\frac{x\lambda^1}{a}} \lambda^1 \lambda^2 \sin \left[ \frac{x\lambda^2}{a} \right] - \right.$$



$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{x\lambda_1}{a}} \lambda_2^6 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_2}{a} \right] + 6e^{-\frac{x\lambda_1}{a}} \lambda_1^5 \lambda_2 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_2}{a} \right] - 20e^{-\frac{x\lambda_1}{a}} \lambda_1^3 \lambda_2^3 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_2}{a} \right] + \\
& 6e^{-\frac{x\lambda_1}{a}} \lambda_1 \lambda_2^5 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_2}{a} \right] \Big) + \\
& \text{tC5}[k] \left( 6e^{\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^5 \lambda_4 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] - 20e^{\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^3 \lambda_4^3 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] + 6e^{\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3 \lambda_4^5 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] + \right. \\
& \left. e^{\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^6 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] - 15e^{\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^4 \lambda_4^2 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] + 15e^{\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^2 \lambda_4^4 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] - e^{\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_4^6 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] \right) + \\
& \text{tC6}[k] \left( e^{\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^6 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] - 15e^{\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^4 \lambda_4^2 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] + 15e^{\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^2 \lambda_4^4 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] - \right. \\
& \left. e^{\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_4^6 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] - 6e^{\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^5 \lambda_4 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] + 20e^{\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^3 \lambda_4^3 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] - 6e^{\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3 \lambda_4^5 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] \right) + \\
& \text{tC7}[k] \left( -6e^{-\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^5 \lambda_4 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] + 20e^{-\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^3 \lambda_4^3 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] - 6e^{-\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3 \lambda_4^5 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] + \right. \\
& \left. e^{-\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^6 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] - 15e^{-\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^4 \lambda_4^2 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] + 15e^{-\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^2 \lambda_4^4 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] - \right. \\
& \left. e^{-\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_4^6 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] \right) + \\
& \text{tC8}[k] \left( e^{-\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^6 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] - 15e^{-\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^4 \lambda_4^2 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] + 15e^{-\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^2 \lambda_4^4 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] - \right. \\
& \left. e^{-\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_4^6 \text{Cos} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] + 6e^{-\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^5 \lambda_4 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] - 20e^{-\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3^3 \lambda_4^3 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] + \right. \\
& \left. 6e^{-\frac{x\lambda_3}{a}} \lambda_3 \lambda_4^5 \text{Sin} \left[ \frac{x\lambda_4}{a} \right] \right);
\end{aligned}$$

$$\text{Bb1}[k\_]:= -\frac{2}{(1-\nu)}(1+\nu)\alpha\frac{\theta_0\text{bb}[k]b}{a} + (k_2 + k_1\nu)a\left(\frac{k\pi a}{b}\right)^3\left(\frac{\text{Gk}[k]}{\xi_0[k]}\right) - \frac{2}{(1-\nu)}\text{Fk}[k];$$

$$\text{Bb2}[k\_]:= \frac{2}{(1-\nu)}(1+\nu)\alpha\theta_0\text{aa}[k];$$

$$\text{Bb3}[k\_]:= -\left(\frac{k\pi a}{b}\right)^4\left(\frac{\text{Gk}[k]}{\xi_0[k]}\right) + \frac{2}{(1-\nu)}(1+\nu)\alpha\frac{\theta_1\text{a2}[k]ab^2}{2ha^2};$$

$$\text{Bb4}[k\_]:= -\frac{2}{(1-\nu)}(1+\nu)\alpha\frac{\theta_1\text{aa}[k]a}{h};$$

$$\text{Bb5}[k\_]:= -\frac{2}{(1-\nu)}\left((1+\nu)\alpha\theta_0 + \frac{\text{T0}}{\text{Bb}}\left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4\right)\frac{\text{bb}[k]b}{a} -$$

$$a(-k_1 + k_2(2 + \nu))\left(\frac{k\pi a}{b}\right)\left(\text{TFk2}[k, a] + 2\text{tA2}[k] + 12\text{tA4}[k]\left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^2 + 30\text{tA6}[k]\left(1 - \frac{x_1}{a}\right)\right)$$

$$a(k_2 + k_1\nu)\left(\frac{k\pi a}{b}\right)^3$$

$$\left(\frac{\text{Gk}[k]}{\xi_0[k]} + \text{TFk0}[k, a] + \text{tA0}[k] + \text{tA2}[k]\left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^2 + \text{tA4}[k]\left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 + \text{tA6}[k]\left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^6\right) -$$

$$\frac{2}{(1-\nu)}\text{Bk}[k]\left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^4 - \frac{2}{(1-\nu)}\text{Ek}[k]\left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^6 - \frac{2}{(1-\nu)}\text{Fk}[k];$$

$$\begin{aligned} \text{Bb6}[k\_]:= & \frac{2}{(1-\nu)} \left( (1+\nu)\alpha\theta 0 + \frac{\text{T0}}{\text{Bb}} \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^4 \right) \text{aa}[k] - \\ & a(k1 + k2\nu) \left( \text{TFk4}[k, a] + 24tA4[k] + 360tA6[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^2 \right) - \\ & (k2 - k1(2 + \nu))a \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 \left( \text{TFk2}[k, a] + 2tA2[k] + 12tA4[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^2 + 30tA6[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^4 \right) \end{aligned}$$

$$5 \frac{2}{(1-\nu)} \text{Ck}[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^4 ;$$

$$\begin{aligned} \text{Bb7}[k\_]:= & \frac{2}{(1-\nu)} \left( \frac{(1+\nu)a\alpha\theta 1}{h} + \frac{\text{Mma}}{\text{Dd}} \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^4 \right) * \frac{a2[k]b^2}{2a^2} - \\ & \left( \text{TFk4}[k, a] + 24tA4[k] + 360tA6[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^2 \right) + \\ & 2 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 \left( \text{TFk2}[k, a] + 2tA2[k] + 12tA4[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^2 + 30tA6[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^4 \right) - \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^4 \frac{\text{Gk}[k]}{\xi 0[k]} - \end{aligned}$$

$$\left( \frac{k\pi a}{b} \right)^4 \left( \text{TFk0}[k, a] + tA0[k] + tA2[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^2 + tA4[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^4 + tA6[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^6 \right) -$$

$$\frac{2}{(1-\nu)} \text{Ak}[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^4 - \frac{2}{(1-\nu)} \text{Dk}[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^6 ;$$

$$\text{Bb8}[k\_]:= - \frac{2}{(1-\nu)} \left( \frac{\text{Mma}}{\text{Dd}} \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^4 + \frac{(1+\nu)a\alpha\theta 1}{h} \right) \text{aa}[k] + \frac{2}{(1-\nu)} \frac{\text{Mma}}{\text{Dd}} 6 \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 a2[k] -$$

$$(\text{TFk6}[k, a] + 720tA6[k]) + 2 \left( \frac{k\pi a}{b} \right)^2 \left( \text{TFk4}[k, a] + 24tA4[k] + 360tA6[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^2 \right) -$$

$$\left( \frac{k\pi a}{b} \right)^4 \left( \text{TFk2}[k, a] + 2tA2[k] + 12tA4[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^2 + 30tA6[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^4 \right) -$$

$$12 \frac{2}{(1-\nu)} \text{Ak}[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^2 - 30 \frac{2}{(1-\nu)} \text{Dk}[k] \left(1 - \frac{x1}{a}\right)^4 ;$$

$$\{\text{C1}[k\_], \text{C2}[k\_], \text{C3}[k\_], \text{C4}[k\_], \text{C5}[k\_], \text{C6}[k\_], \text{C7}[k\_], \text{C8}[k\_]\} =$$

LinearSolve[

$$\begin{aligned} & \left\{ \left\{ \frac{2a^2 k \pi \lambda 1 \lambda 2 (-k1+k2(2+\nu))}{b}, \left( -\frac{a^4 k^3 \pi^3 (k2+k1\nu)}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (\lambda 1^2 - \lambda 2^2) (-k1+k2(2+\nu))}{b} \right), \right. \right. \\ & - \frac{2a^2 k \pi \lambda 1 \lambda 2 (-k1+k2(2+\nu))}{b}, \left( -\frac{a^4 k^3 \pi^3 (k2+k1\nu)}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (\lambda 1^2 - \lambda 2^2) (-k1+k2(2+\nu))}{b} \right), \\ & \frac{2a^2 k \pi \lambda 3 \lambda 4 (-k1+k2(2+\nu))}{b}, \left( -\frac{a^4 k^3 \pi^3 (k2+k1\nu)}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (\lambda 3^2 - \lambda 4^2) (-k1+k2(2+\nu))}{b} \right), \\ & \left. \left. - \frac{2a^2 k \pi \lambda 3 \lambda 4 (-k1+k2(2+\nu))}{b}, \left( -\frac{a^4 k^3 \pi^3 (k2+k1\nu)}{b^3} + \frac{a^2 k \pi (\lambda 3^2 - \lambda 4^2) (-k1+k2(2+\nu))}{b} \right) \right\}, \right. \\ & \left. \left\{ \left( a (4\lambda 1^3 \lambda 2 - 4\lambda 1 \lambda 2^3) (k1 + k2\nu) + \frac{2a^3 k^2 \pi^2 \lambda 1 \lambda 2 (k2 - k1(2+\nu))}{b^2} \right), \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( a (\lambda_1^4 - 6\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4) (k_1 + k_2\nu) + \frac{a^3k^2\pi^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(k_2 - k_1(2+\nu))}{b^2} \right), \\
& \left( a (-4\lambda_1^3\lambda_2 + 4\lambda_1\lambda_2^3) (k_1 + k_2\nu) - \frac{2a^3k^2\pi^2\lambda_1\lambda_2(k_2 - k_1(2+\nu))}{b^2} \right), \\
& \left( a (\lambda_1^4 - 6\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4) (k_1 + k_2\nu) + \frac{a^3k^2\pi^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(k_2 - k_1(2+\nu))}{b^2} \right), \\
& \left( a (4\lambda_3^3\lambda_4 - 4\lambda_3\lambda_4^3) (k_1 + k_2\nu) + \frac{2a^3k^2\pi^2\lambda_3\lambda_4(k_2 - k_1(2+\nu))}{b^2} \right), \\
& \left( a (\lambda_3^4 - 6\lambda_3^2\lambda_4^2 + \lambda_4^4) (k_1 + k_2\nu) + \frac{a^3k^2\pi^2(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(k_2 - k_1(2+\nu))}{b^2} \right), \\
& \left( a (-4\lambda_3^3\lambda_4 + 4\lambda_3\lambda_4^3) (k_1 + k_2\nu) - \frac{2a^3k^2\pi^2\lambda_3\lambda_4(k_2 - k_1(2+\nu))}{b^2} \right), \\
& \left. \left( a (\lambda_3^4 - 6\lambda_3^2\lambda_4^2 + \lambda_4^4) (k_1 + k_2\nu) + \frac{a^3k^2\pi^2(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)(k_2 - k_1(2+\nu))}{b^2} \right) \right\}, \\
& \left\{ \left( -\frac{4a^2k^2\pi^2\lambda_1\lambda_2}{b^2} + 4\lambda_1^3\lambda_2 - 4\lambda_1\lambda_2^3 \right), \left( \frac{a^4k^4\pi^4}{b^4} + \lambda_1^4 - 6\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4 - \frac{2a^2k^2\pi^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{b^2} \right) \right\}, \\
& \left( \frac{4a^2k^2\pi^2\lambda_1\lambda_2}{b^2} - 4\lambda_1^3\lambda_2 + 4\lambda_1\lambda_2^3 \right), \left( \frac{a^4k^4\pi^4}{b^4} + \lambda_1^4 - 6\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4 - \frac{2a^2k^2\pi^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{b^2} \right), \\
& \left( -\frac{4a^2k^2\pi^2\lambda_3\lambda_4}{b^2} + 4\lambda_3^3\lambda_4 - 4\lambda_3\lambda_4^3 \right), \left( \frac{a^4k^4\pi^4}{b^4} + \lambda_3^4 - 6\lambda_3^2\lambda_4^2 + \lambda_4^4 - \frac{2a^2k^2\pi^2(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)}{b^2} \right), \\
& \left. \left( \frac{4a^2k^2\pi^2\lambda_3\lambda_4}{b^2} - 4\lambda_3^3\lambda_4 + 4\lambda_3\lambda_4^3 \right), \left( \frac{a^4k^4\pi^4}{b^4} + \lambda_3^4 - 6\lambda_3^2\lambda_4^2 + \lambda_4^4 - \frac{2a^2k^2\pi^2(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)}{b^2} \right) \right\}, \\
& \left\{ \left( \frac{2a^4k^4\pi^4\lambda_1\lambda_2}{b^4} + 6\lambda_1^5\lambda_2 - 20\lambda_1^3\lambda_2^3 + 6\lambda_1\lambda_2^5 - \frac{2a^2k^2\pi^2(4\lambda_1^3\lambda_2 - 4\lambda_1\lambda_2^3)}{b^2} \right), \right. \\
& \left( \lambda_1^6 - 15\lambda_1^4\lambda_2^2 + 15\lambda_1^2\lambda_2^4 - \lambda_2^6 + \frac{a^4k^4\pi^4(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{b^4} - \frac{2a^2k^2\pi^2(\lambda_1^4 - 6\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4)}{b^2} \right), \\
& \left( -\frac{2a^4k^4\pi^4\lambda_1\lambda_2}{b^4} - 6\lambda_1^5\lambda_2 + 20\lambda_1^3\lambda_2^3 - 6\lambda_1\lambda_2^5 - \frac{2a^2k^2\pi^2(-4\lambda_1^3\lambda_2 + 4\lambda_1\lambda_2^3)}{b^2} \right), \\
& \left( \lambda_1^6 - 15\lambda_1^4\lambda_2^2 + 15\lambda_1^2\lambda_2^4 - \lambda_2^6 + \frac{a^4k^4\pi^4(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{b^4} - \frac{2a^2k^2\pi^2(\lambda_1^4 - 6\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^4)}{b^2} \right), \\
& \left( \frac{2a^4k^4\pi^4\lambda_3\lambda_4}{b^4} + 6\lambda_3^5\lambda_4 - 20\lambda_3^3\lambda_4^3 + 6\lambda_3\lambda_4^5 - \frac{2a^2k^2\pi^2(4\lambda_3^3\lambda_4 - 4\lambda_3\lambda_4^3)}{b^2} \right), \\
& \left( \lambda_3^6 - 15\lambda_3^4\lambda_4^2 + 15\lambda_3^2\lambda_4^4 - \lambda_4^6 + \frac{a^4k^4\pi^4(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)}{b^4} - \frac{2a^2k^2\pi^2(\lambda_3^4 - 6\lambda_3^2\lambda_4^2 + \lambda_4^4)}{b^2} \right), \\
& \left( -\frac{2a^4k^4\pi^4\lambda_3\lambda_4}{b^4} - 6\lambda_3^5\lambda_4 + 20\lambda_3^3\lambda_4^3 - 6\lambda_3\lambda_4^5 - \frac{2a^2k^2\pi^2(-4\lambda_3^3\lambda_4 + 4\lambda_3\lambda_4^3)}{b^2} \right), \\
& \left. \left( \lambda_3^6 - 15\lambda_3^4\lambda_4^2 + 15\lambda_3^2\lambda_4^4 - \lambda_4^6 + \frac{a^4k^4\pi^4(\lambda_3^2 - \lambda_4^2)}{b^4} - \frac{2a^2k^2\pi^2(\lambda_3^4 - 6\lambda_3^2\lambda_4^2 + \lambda_4^4)}{b^2} \right) \right\}, \\
& \left\{ \left( -\frac{a^4e^{\lambda_1}k^3\pi^3(k_2+k_1\nu)\text{Sin}[\lambda_2]}{b^3} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{a^2k\pi(-k_1+k_2(2+\nu))(2e^{\lambda_1}\lambda_1\lambda_2\text{Cos}[\lambda_2]+e^{\lambda_1}\lambda_1^2\text{Sin}[\lambda_2]-e^{\lambda_1}\lambda_2^2\text{Sin}[\lambda_2])}{b} \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{a^4 e^{\lambda_1} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Cos}[\lambda_2]}{b^3} + \right. \\
& \left. \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2(2 + \nu)) (e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Cos}[\lambda_2] - e^{\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] - 2e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b} \right), \\
& \left( -\frac{a^4 e^{-\lambda_1} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Sin}[\lambda_2]}{b^3} + \right. \\
& \left. \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2(2 + \nu)) (-2e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Sin}[\lambda_2] - e^{-\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b} \right), \\
& \left( -\frac{a^4 e^{-\lambda_1} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Cos}[\lambda_2]}{b^3} + \right. \\
& \left. \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2(2 + \nu)) (e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Cos}[\lambda_2] - e^{-\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + 2e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b} \right), \\
& \left( -\frac{a^4 e^{\lambda_3} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Sin}[\lambda_4]}{b^3} + \right. \\
& \left. \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2(2 + \nu)) (2e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Sin}[\lambda_4] - e^{\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4])}{b} \right), \\
& \left( -\frac{a^4 e^{\lambda_3} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Cos}[\lambda_4]}{b^3} + \right. \\
& \left. \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2(2 + \nu)) (e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Cos}[\lambda_4] - e^{\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] - 2e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4])}{b} \right), \\
& \left( -\frac{a^4 e^{-\lambda_3} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Sin}[\lambda_4]}{b^3} + \right. \\
& \left. \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2(2 + \nu)) (-2e^{-\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{-\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Sin}[\lambda_4] - e^{-\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4])}{b} \right), \\
& \left( -\frac{a^4 e^{-\lambda_3} k^3 \pi^3 (k_2 + k_1 \nu) \text{Cos}[\lambda_4]}{b^3} + \right. \\
& \left. \frac{a^2 k \pi (-k_1 + k_2(2 + \nu)) (e^{-\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Cos}[\lambda_4] - e^{-\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] + 2e^{-\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4])}{b} \right) \Bigg\}, \\
& \left\{ \left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Sin}[\lambda_2] - e^{\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} + \right. \right. \\
& a(k_1 + k_2 \nu) (4e^{\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] - 4e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Sin}[\lambda_2] - \\
& 6e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2] + e^{\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Sin}[\lambda_2]) \Bigg), \\
& \left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Cos}[\lambda_2] - e^{\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] - 2e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} + \right. \\
& a(k_1 + k_2 \nu) (e^{\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Cos}[\lambda_2] - 6e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Cos}[\lambda_2] - 4e^{\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2] + \\
& 4e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Sin}[\lambda_2]) \Bigg), \\
& \left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (-2e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Sin}[\lambda_2] - e^{-\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} + \right. \\
& a(k_1 + k_2 \nu) (-4e^{-\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + 4e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Sin}[\lambda_2] - \\
& 6e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Sin}[\lambda_2]) \Bigg), \\
& \left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Cos}[\lambda_2] - e^{-\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + 2e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a(k_1 + k_2\nu) (e^{-\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Cos}[\lambda_2] - 6e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Cos}[\lambda_2] + 4e^{-\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2] - \\
& 4e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Sin}[\lambda_2])) , \\
& \left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (2e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Sin}[\lambda_4] - e^{\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} + \right. \\
& a(k_1 + k_2\nu) (4e^{\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] - 4e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^3 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_3^4 \text{Sin}[\lambda_4] - \\
& 6e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_4^4 \text{Sin}[\lambda_4])) , \\
& \left. \left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Cos}[\lambda_4] - e^{\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] - 2e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} + \right. \right. \\
& a(k_1 + k_2\nu) (e^{\lambda_3} \lambda_3^4 \text{Cos}[\lambda_4] - 6e^{\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{\lambda_3} \lambda_4^4 \text{Cos}[\lambda_4] - 4e^{\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4] + \\
& 4e^{\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^3 \text{Sin}[\lambda_4])) , \\
& \left. \left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (-2e^{-\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{-\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Sin}[\lambda_4] - e^{-\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} + \right. \right. \\
& a(k_1 + k_2\nu) (-4e^{-\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4 \text{Cos}[\lambda_4] + 4e^{-\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^3 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{-\lambda_3} \lambda_3^4 \text{Sin}[\lambda_4] - \\
& 6e^{-\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^2 \text{Sin}[\lambda_4] + e^{-\lambda_3} \lambda_4^4 \text{Sin}[\lambda_4])) , \\
& \left. \left( \frac{a^3 k^2 \pi^2 (k_2 - k_1(2 + \nu)) (e^{-\lambda_3} \lambda_3^2 \text{Cos}[\lambda_4] - e^{-\lambda_3} \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] + 2e^{-\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} + \right. \right. \\
& a(k_1 + k_2\nu) (e^{-\lambda_3} \lambda_3^4 \text{Cos}[\lambda_4] - 6e^{-\lambda_3} \lambda_3^2 \lambda_4^2 \text{Cos}[\lambda_4] + e^{-\lambda_3} \lambda_4^4 \text{Cos}[\lambda_4] + 4e^{-\lambda_3} \lambda_3^3 \lambda_4 \text{Sin}[\lambda_4] - \\
& 4e^{-\lambda_3} \lambda_3 \lambda_4^3 \text{Sin}[\lambda_4])) \} , \\
& \left\{ \left( 4e^{\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] - 4e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Cos}[\lambda_2] + \frac{a^4 e^{\lambda_1} k^4 \pi^4 \text{Sin}[\lambda_2]}{b^4} + e^{\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Sin}[\lambda_2] - \right. \right. \\
& 6e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2] + e^{\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Sin}[\lambda_2] - \\
& \left. \left. \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (2e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Sin}[\lambda_2] - e^{\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} \right) \right) , \\
& \left( \frac{a^4 e^{\lambda_1} k^4 \pi^4 \text{Cos}[\lambda_2]}{b^4} + e^{\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Cos}[\lambda_2] - 6e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Cos}[\lambda_2] - \right. \\
& 4e^{\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2] + 4e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Sin}[\lambda_2] - \\
& \left. \left. \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (e^{\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Cos}[\lambda_2] - e^{\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] - 2e^{\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} \right) \right) , \\
& \left( -4e^{-\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + 4e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Cos}[\lambda_2] + \frac{a^4 e^{-\lambda_1} k^4 \pi^4 \text{Sin}[\lambda_2]}{b^4} + e^{-\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Sin}[\lambda_2] - \right. \\
& 6e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Sin}[\lambda_2] - \\
& \left. \left. \frac{2a^2 k^2 \pi^2 (-2e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \text{Sin}[\lambda_2] - e^{-\lambda_1} \lambda_2^2 \text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} \right) \right) , \\
& \left( \frac{a^4 e^{-\lambda_1} k^4 \pi^4 \text{Cos}[\lambda_2]}{b^4} + e^{-\lambda_1} \lambda_1^4 \text{Cos}[\lambda_2] - 6e^{-\lambda_1} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda_1} \lambda_2^4 \text{Cos}[\lambda_2] + \right. \\
& 4e^{-\lambda_1} \lambda_1^3 \lambda_2 \text{Sin}[\lambda_2] - 4e^{-\lambda_1} \lambda_1 \lambda_2^3 \text{Sin}[\lambda_2] -
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left. \frac{2a^2k^2\pi^2(e^{-\lambda^1}\lambda_1^2\text{Cos}[\lambda_2]-e^{-\lambda^1}\lambda_2^2\text{Cos}[\lambda_2]+2e^{-\lambda^1}\lambda_1\lambda_2\text{Sin}[\lambda_2])}{b^2} \right), \\
& \left( 4e^{\lambda^3}\lambda_3^3\lambda_4\text{Cos}[\lambda_4] - 4e^{\lambda^3}\lambda_3\lambda_4^3\text{Cos}[\lambda_4] + \frac{a^4e^{\lambda^3}k^4\pi^4\text{Sin}[\lambda_4]}{b^4} + e^{\lambda^3}\lambda_3^4\text{Sin}[\lambda_4] - \right. \\
& 6e^{\lambda^3}\lambda_3^2\lambda_4^2\text{Sin}[\lambda_4] + e^{\lambda^3}\lambda_4^4\text{Sin}[\lambda_4] - \\
& \left. \frac{2a^2k^2\pi^2(2e^{\lambda^3}\lambda_3\lambda_4\text{Cos}[\lambda_4]+e^{\lambda^3}\lambda_3^2\text{Sin}[\lambda_4]-e^{\lambda^3}\lambda_4^2\text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} \right), \\
& \left( \frac{a^4e^{\lambda^3}k^4\pi^4\text{Cos}[\lambda_4]}{b^4} + e^{\lambda^3}\lambda_3^4\text{Cos}[\lambda_4] - 6e^{\lambda^3}\lambda_3^2\lambda_4^2\text{Cos}[\lambda_4] + e^{\lambda^3}\lambda_4^4\text{Cos}[\lambda_4] - \right. \\
& 4e^{\lambda^3}\lambda_3^3\lambda_4\text{Sin}[\lambda_4] + 4e^{\lambda^3}\lambda_3\lambda_4^3\text{Sin}[\lambda_4] - \\
& \left. \frac{2a^2k^2\pi^2(e^{\lambda^3}\lambda_3^2\text{Cos}[\lambda_4]-e^{\lambda^3}\lambda_4^2\text{Cos}[\lambda_4]-2e^{\lambda^3}\lambda_3\lambda_4\text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} \right), \\
& \left( -4e^{-\lambda^3}\lambda_3^3\lambda_4\text{Cos}[\lambda_4] + 4e^{-\lambda^3}\lambda_3\lambda_4^3\text{Cos}[\lambda_4] + \frac{a^4e^{-\lambda^3}k^4\pi^4\text{Sin}[\lambda_4]}{b^4} + e^{-\lambda^3}\lambda_3^4\text{Sin}[\lambda_4] - \right. \\
& 6e^{-\lambda^3}\lambda_3^2\lambda_4^2\text{Sin}[\lambda_4] + e^{-\lambda^3}\lambda_4^4\text{Sin}[\lambda_4] - \\
& \left. \frac{2a^2k^2\pi^2(-2e^{-\lambda^3}\lambda_3\lambda_4\text{Cos}[\lambda_4]+e^{-\lambda^3}\lambda_3^2\text{Sin}[\lambda_4]-e^{-\lambda^3}\lambda_4^2\text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} \right), \\
& \left( \frac{a^4e^{-\lambda^3}k^4\pi^4\text{Cos}[\lambda_4]}{b^4} + e^{-\lambda^3}\lambda_3^4\text{Cos}[\lambda_4] - 6e^{-\lambda^3}\lambda_3^2\lambda_4^2\text{Cos}[\lambda_4] + e^{-\lambda^3}\lambda_4^4\text{Cos}[\lambda_4] + \right. \\
& 4e^{-\lambda^3}\lambda_3^3\lambda_4\text{Sin}[\lambda_4] - 4e^{-\lambda^3}\lambda_3\lambda_4^3\text{Sin}[\lambda_4] - \\
& \left. \frac{2a^2k^2\pi^2(e^{-\lambda^3}\lambda_3^2\text{Cos}[\lambda_4]-e^{-\lambda^3}\lambda_4^2\text{Cos}[\lambda_4]+2e^{-\lambda^3}\lambda_3\lambda_4\text{Sin}[\lambda_4])}{b^2} \right) \left. \right\}, \\
& \{ (6e^{\lambda^1}\lambda_1^5\lambda_2\text{Cos}[\lambda_2] - 20e^{\lambda^1}\lambda_1^3\lambda_2^3\text{Cos}[\lambda_2] + 6e^{\lambda^1}\lambda_1\lambda_2^5\text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda^1}\lambda_1^6\text{Sin}[\lambda_2] - \\
& 15e^{\lambda^1}\lambda_1^4\lambda_2^2\text{Sin}[\lambda_2] + 15e^{\lambda^1}\lambda_1^2\lambda_2^4\text{Sin}[\lambda_2] - e^{\lambda^1}\lambda_2^6\text{Sin}[\lambda_2] + \\
& \frac{a^4k^4\pi^4(2e^{\lambda^1}\lambda_1\lambda_2\text{Cos}[\lambda_2]+e^{\lambda^1}\lambda_1^2\text{Sin}[\lambda_2]-e^{\lambda^1}\lambda_2^2\text{Sin}[\lambda_2])}{b^4} - \\
& \frac{1}{b^2}2a^2k^2\pi^2(4e^{\lambda^1}\lambda_1^3\lambda_2\text{Cos}[\lambda_2] - 4e^{\lambda^1}\lambda_1\lambda_2^3\text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda^1}\lambda_1^4\text{Sin}[\lambda_2] - \\
& 6e^{\lambda^1}\lambda_1^2\lambda_2^2\text{Sin}[\lambda_2] + e^{\lambda^1}\lambda_2^4\text{Sin}[\lambda_2])) , \\
& (e^{\lambda^1}\lambda_1^6\text{Cos}[\lambda_2] - 15e^{\lambda^1}\lambda_1^4\lambda_2^2\text{Cos}[\lambda_2] + 15e^{\lambda^1}\lambda_1^2\lambda_2^4\text{Cos}[\lambda_2] - e^{\lambda^1}\lambda_2^6\text{Cos}[\lambda_2] - \\
& 6e^{\lambda^1}\lambda_1^5\lambda_2\text{Sin}[\lambda_2] + 20e^{\lambda^1}\lambda_1^3\lambda_2^3\text{Sin}[\lambda_2] - 6e^{\lambda^1}\lambda_1\lambda_2^5\text{Sin}[\lambda_2] + \\
& \frac{a^4k^4\pi^4(e^{\lambda^1}\lambda_1^2\text{Cos}[\lambda_2]-e^{\lambda^1}\lambda_2^2\text{Cos}[\lambda_2]-2e^{\lambda^1}\lambda_1\lambda_2\text{Sin}[\lambda_2])}{b^4} - \\
& \frac{1}{b^2}2a^2k^2\pi^2(e^{\lambda^1}\lambda_1^4\text{Cos}[\lambda_2] - 6e^{\lambda^1}\lambda_1^2\lambda_2^2\text{Cos}[\lambda_2] + e^{\lambda^1}\lambda_2^4\text{Cos}[\lambda_2] - 4e^{\lambda^1}\lambda_1^3\lambda_2\text{Sin}[\lambda_2] + \\
& 4e^{\lambda^1}\lambda_1\lambda_2^3\text{Sin}[\lambda_2])) , \\
& (-6e^{-\lambda^1}\lambda_1^5\lambda_2\text{Cos}[\lambda_2] + 20e^{-\lambda^1}\lambda_1^3\lambda_2^3\text{Cos}[\lambda_2] - 6e^{-\lambda^1}\lambda_1\lambda_2^5\text{Cos}[\lambda_2] + e^{-\lambda^1}\lambda_1^6\text{Sin}[\lambda_2] - \\
& 15e^{-\lambda^1}\lambda_1^4\lambda_2^2\text{Sin}[\lambda_2] + 15e^{-\lambda^1}\lambda_1^2\lambda_2^4\text{Sin}[\lambda_2] - e^{-\lambda^1}\lambda_2^6\text{Sin}[\lambda_2] +
\end{aligned}$$

$$\frac{a^4 k^4 \pi^4 (-2e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^2 \text{Cos}[\lambda^2] + e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^2 \text{Sin}[\lambda^2] - e^{-\lambda^1} \lambda^2 \text{Sin}[\lambda^2])}{b^4} -$$

$$\frac{1}{b^2} 2a^2 k^2 \pi^2 (-4e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^3 \lambda^2 \text{Cos}[\lambda^2] + 4e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^2 \lambda^3 \text{Cos}[\lambda^2] + e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^2] -$$

$$6e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^2 \lambda^2 \text{Sin}[\lambda^2] + e^{-\lambda^1} \lambda^2 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^2])) ,$$

$$(e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^6 \text{Cos}[\lambda^2] - 15e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^4 \lambda^2 \text{Cos}[\lambda^2] + 15e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^2 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^2] - e^{-\lambda^1} \lambda^2 \lambda^6 \text{Cos}[\lambda^2] +$$

$$6e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^5 \lambda^2 \text{Sin}[\lambda^2] - 20e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^3 \lambda^2 \text{Sin}[\lambda^2] + 6e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^2 \lambda^5 \text{Sin}[\lambda^2] +$$

$$\frac{a^4 k^4 \pi^4 (e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^2 \text{Cos}[\lambda^2] - e^{-\lambda^1} \lambda^2 \text{Cos}[\lambda^2] + 2e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^2 \text{Sin}[\lambda^2])}{b^4} -$$

$$\frac{1}{b^2} 2a^2 k^2 \pi^2 (e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^2] - 6e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^2 \lambda^2 \text{Cos}[\lambda^2] + e^{-\lambda^1} \lambda^2 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^2] + 4e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^3 \lambda^2 \text{Sin}[\lambda^2] -$$

$$4e^{-\lambda^1} \lambda^1 \lambda^2 \lambda^3 \text{Sin}[\lambda^2])) ,$$

$$(6e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^5 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] - 20e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^3 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] + 6e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \lambda^5 \text{Cos}[\lambda^4] + e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^6 \text{Sin}[\lambda^4] -$$

$$15e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \lambda^2 \text{Sin}[\lambda^4] + 15e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^2 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4] - e^{\lambda^3} \lambda^4 \lambda^6 \text{Sin}[\lambda^4] +$$

$$\frac{a^4 k^4 \pi^4 (2e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] + e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^2 \text{Sin}[\lambda^4] - e^{\lambda^3} \lambda^4 \lambda^2 \text{Sin}[\lambda^4])}{b^4} -$$

$$\frac{1}{b^2} 2a^2 k^2 \pi^2 (4e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^3 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] - 4e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \lambda^3 \text{Cos}[\lambda^4] + e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4] -$$

$$6e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^2 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4] + e^{\lambda^3} \lambda^4 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4])) ,$$

$$(e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^6 \text{Cos}[\lambda^4] - 15e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \lambda^2 \text{Cos}[\lambda^4] + 15e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^2 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] - e^{\lambda^3} \lambda^4 \lambda^6 \text{Cos}[\lambda^4] -$$

$$6e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^5 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4] + 20e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^3 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4] - 6e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \lambda^5 \text{Sin}[\lambda^4] +$$

$$\frac{a^4 k^4 \pi^4 (e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^2 \text{Cos}[\lambda^4] - e^{\lambda^3} \lambda^4 \lambda^2 \text{Cos}[\lambda^4] - 2e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4])}{b^4} -$$

$$\frac{1}{b^2} 2a^2 k^2 \pi^2 (e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] - 6e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^2 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] + e^{\lambda^3} \lambda^4 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] - 4e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^3 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4] +$$

$$4e^{\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \lambda^3 \text{Sin}[\lambda^4])) ,$$

$$(-6e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^5 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] + 20e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^3 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] - 6e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \lambda^5 \text{Cos}[\lambda^4] + e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^6 \text{Sin}[\lambda^4] -$$

$$15e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \lambda^2 \text{Sin}[\lambda^4] + 15e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^2 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4] - e^{-\lambda^3} \lambda^4 \lambda^6 \text{Sin}[\lambda^4] +$$

$$\frac{a^4 k^4 \pi^4 (-2e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] + e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^2 \text{Sin}[\lambda^4] - e^{-\lambda^3} \lambda^4 \lambda^2 \text{Sin}[\lambda^4])}{b^4} -$$

$$\frac{1}{b^2} 2a^2 k^2 \pi^2 (-4e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^3 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] + 4e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \lambda^3 \text{Cos}[\lambda^4] + e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4] -$$

$$6e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^2 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4] + e^{-\lambda^3} \lambda^4 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4])) ,$$

$$(e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^6 \text{Cos}[\lambda^4] - 15e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \lambda^2 \text{Cos}[\lambda^4] + 15e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^2 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] - e^{-\lambda^3} \lambda^4 \lambda^6 \text{Cos}[\lambda^4] +$$

$$6e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^5 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4] - 20e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^3 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4] + 6e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \lambda^5 \text{Sin}[\lambda^4] +$$

$$\frac{a^4 k^4 \pi^4 (e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^2 \text{Cos}[\lambda^4] - e^{-\lambda^3} \lambda^4 \lambda^2 \text{Cos}[\lambda^4] + 2e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4])}{b^4} -$$

$\frac{1}{b^2} 2a^2 k^2 \pi^2 (e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] - 6e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^2 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] + e^{-\lambda^3} \lambda^4 \lambda^4 \text{Cos}[\lambda^4] + 4e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^3 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4] - 4e^{-\lambda^3} \lambda^3 \lambda^4 \text{Sin}[\lambda^4])) \} \} , \{ \text{Bb1}[k], \text{Bb2}[k], \text{Bb3}[k], \text{Bb4}[k], \text{Bb5}[k], \text{Bb6}[k], \text{Bb7}[k], \text{Bb8}[k] \} \} ;$

Функция прогиба

$W[x_, y_] := (W1[k, x] - \frac{a^2[k]}{2} (\frac{b}{a})^2 (\frac{(1+\nu)aa\theta 1}{h} + \frac{Mma}{Dd} (\frac{x}{a} - \frac{x1}{a})^4 \text{HeavisideTheta}[x - x1])) ;$

Построение графиков функции прогиба

$g1 := \text{Plot3D}[W[x, y], \{x, 0, a\}, \{y, 0, b\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Green}, \text{PlotPoints} \rightarrow \{40, 40\}, \text{Mesh} \rightarrow \text{Full}, \text{BoundaryStyle} \rightarrow \text{Thick}]; g1$

$g4 := \text{Plot}[W[x1 - 0.0001, y], \{y, 0, b\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Red}];$

$g5 := \text{Plot}[W[x1 + 0.0001, y], \{y, 0, b\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Blue}]; \text{Show}[g4, g5]$

$g3 := \text{Plot}[W[x, b/2], \{x, 0, a\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Black}]; g3$

## Приложение Б

Программный код для построения графиков в задаче о полой оболочке постоянного кручения, находящейся в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой через основные поверхности и кратковременного воздействия сосредоточенной силы

1. Входные данные.

$$a:=100;$$

$$b:=a;$$

$$a1:=\frac{a}{1000};$$

$$b1:=\frac{b}{1000};$$

$$x1:=\frac{a}{2};$$

$$y1:=\frac{b}{2};$$

$$t1:=1;$$

$$t2:=1.005;$$

$$h:=0.005a;$$

$$\alpha:=25 \cdot 10^{-6};$$

$$Ee:=0.72 \cdot 10^6;$$

$$\nu:=0.32;$$

$$Dd:=\frac{Eeh^3}{12(1-\nu^2)};$$

$$Bb:=\frac{Eeh}{1-\nu^2};$$

$$\gamma:=2.78 \cdot 10^{-3};$$

$$gg:=981;$$

$$\beta:=0.14;$$

$$Bio:=500;$$

$$\delta:=0 * 2.5;$$

$$q_0 := 5;$$

$$T_0^+ := 20;$$

$$T_1^+ := 50;$$

$$T^- := 20;$$

$$K_{12} := \frac{\delta}{ab};$$

$$G := \sqrt{\frac{\gamma ha^2}{ggBb}};$$

$$ee[k_, m_] := \frac{4(1 - \text{Cos}[k\pi])(1 - \text{Cos}[m\pi])}{km\pi^2};$$

$$S[k_, m_] := (k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 + 6\text{Bio}\left(\frac{a}{h}\right) + 12\left(\frac{a}{h}\right)^2;$$

$$\Delta T[k_, m_] := (T_0^+ - T^-) ee[k, m];$$

$$L[k_, m_] := (k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2;$$

$$L\nu[k_, m_] := (k\pi)^2 - \nu \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2;$$

$$tL\nu[k_, m_] := \nu(k\pi)^2 - \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2;$$

$$tL[k_, m_] := (k\pi)^2 - \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2;$$

$$G4[k_, m_] := \frac{3-\nu}{2} L[k, m] + \frac{Dd(L[k, m])^2}{Bba^2} + 2(1 - \nu) (K_{12}a)^2;$$

$$G2[k_, m_] :=$$

$$\frac{1-\nu}{2} (L[k, m])^2 + L[k, m] \left( \frac{3-\nu}{2} \frac{Dd(L[k, m])^2}{Bba^2} + 2(1 - \nu) (K_{12}a)^2 \right);$$

$$G0[k_, m_] := \frac{1-\nu}{2} (L[k, m])^4 \frac{Dd}{Bba^2} +$$

$$(1 - \nu)^2 (K_{12}a)^2 \left( (L[k, m])^2 - (k\pi)^2 L\nu[k, m] + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 tL\nu[k, m] \right);$$

$$A1[k_, m_] := \frac{(1+\nu)aDd}{hBba^2} L[k, m] \alpha 6\text{Bio} \frac{a}{h} \frac{\Delta T[k, m]}{S[k, m]};$$

$$A2[k_, m_] := \frac{(1+\nu)aDd}{hBba^2} L[k, m] \alpha \Delta T[k, m] \left( 1 - 6\text{Bio} \frac{a}{h} \frac{1}{S[k, m]} \right);$$

$$A3[k_, m_] := \frac{(1+\nu)aDd}{hBba^2} L[k, m] \alpha 6\text{Bio} \frac{a}{h} \frac{ee[k, m]}{S[k, m]} T_1^+;$$

$$q[k_, m_] := 4 \frac{q_0 a a_1 b_1}{Bbab} \text{Sin} \left[ \frac{k\pi x_1}{a} \right] \text{Sin} \left[ \frac{m\pi y_1}{b} \right];$$

$$f[k_, m_] := \frac{G^6 \beta^6}{a^{12}} S[k, m]^6 + \frac{G^4 \beta^4}{a^8} S[k, m]^4 G4[k, m] + \frac{G^2 \beta^2}{a^4} S[k, m]^2 G2[k, m] +$$

$$G0[k, m];$$

2. Корни характеристического уравнения

$$\lambda^6 + G4\lambda^4 + G2\lambda^2 + G0 = 0.$$

$$\lambda1[k\_ , m\_ ]:=$$

Im[

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(-\frac{1}{3}G4[k, m] - (2^{1/3}G2[k, m])\right) /} \\ & \left(-27G0[k, m] + 9G2[k, m]G4[k, m] - 2G4[k, m]^3 + \right. \\ & \left. \sqrt{\left(4(3G2[k, m] - G4[k, m]^2)\right)^3 + \right.} \\ & \left. \left(-27G0[k, m] + 9G2[k, m]G4[k, m] - 2G4[k, m]^3\right)^2\right)^{1/3} + \\ & \left. (2^{1/3}G4[k, m]^2) / \right. \end{aligned}$$

(3

$$\begin{aligned} & \left(-27G0[k, m] + 9G2[k, m]G4[k, m] - 2G4[k, m]^3 + \right. \\ & \left. \sqrt{\left(4(3G2[k, m] - G4[k, m]^2)\right)^3 + \right.} \\ & \left. \left(-27G0[k, m] + 9G2[k, m]G4[k, m] - 2G4[k, m]^3\right)^2\right)^{1/3} \left. + \right. \\ & \left. 1 / (3 \cdot 2^{1/3}) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(-27G0[k, m] + 9G2[k, m]G4[k, m] - 2G4[k, m]^3 + \right. \\ & \left. \sqrt{\left(4(3G2[k, m] - G4[k, m]^2)\right)^3 + \right.} \\ & \left. \left(-27G0[k, m] + 9G2[k, m]G4[k, m] - 2G4[k, m]^3\right)^2\right)^{1/3} \left. \right] ; \end{aligned}$$

$$\lambda2[k\_ , m\_ ]:=\lambda1[k, m];$$

$$\lambda3[k\_ , m\_ ]:=$$

Im[

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(-\frac{1}{3}G4[k, m] + \right.} \\ & \left. G2[k, m] / \right.} \\ & \left. (2^{2/3} \right. \\ & \left. \left(-27G0[k, m] + 9G2[k, m]G4[k, m] - 2G4[k, m]^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{\left(4(3G2[k, m] - G4[k, m]^2)\right)^3 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( (-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3)^2 \right)^{1/3} + \\
& (i\sqrt{3}G_2[k, m]) / \\
& (2^{2/3} \\
& (-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3 + \\
& \sqrt{4(3G_2[k, m] - G_4[k, m]^2)^3 + \\
& (-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3)^2})^{1/3}) - \\
& G_4[k, m]^2 / \\
& (3 \cdot 2^{2/3} \\
& (-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3 + \\
& \sqrt{4(3G_2[k, m] - G_4[k, m]^2)^3 + \\
& (-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3)^2})^{1/3}) - \\
& (iG_4[k, m]^2) / \\
& (2^{2/3}\sqrt{3} \\
& (-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3 + \\
& \sqrt{4(3G_2[k, m] - G_4[k, m]^2)^3 + \\
& (-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3)^2})^{1/3}) - \\
& 1 / (6 \cdot 2^{1/3}) \\
& (-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3 + \\
& \sqrt{4(3G_2[k, m] - G_4[k, m]^2)^3 + \\
& (-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3)^2})^{1/3} + \\
& 1 / (2 \cdot 2^{1/3}\sqrt{3}) i \\
& (-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3 + \\
& \sqrt{4(3G_2[k, m] - G_4[k, m]^2)^3 + \\
& (-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3)^2})^{1/3} \Big] ; \\
& \lambda_4[k_, m_] := \lambda_3[k, m];
\end{aligned}$$

$\lambda_5[k, m] :=$

$\text{Im}[$

$\sqrt{(-\frac{1}{3}G_4[k, m] +$

$G_2[k, m] /$

$(2^{2/3}$

$(-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3 +$

$\sqrt{4(3G_2[k, m] - G_4[k, m]^2)^3 +$

$(-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3)^2})^{1/3}) -$

$(i\sqrt{3}G_2[k, m]) /$

$(2^{2/3}$

$(-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3 +$

$\sqrt{4(3G_2[k, m] - G_4[k, m]^2)^3 +$

$(-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3)^2})^{1/3}) -$

$G_4[k, m]^2 /$

$(3 \cdot 2^{2/3}$

$(-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3 +$

$\sqrt{4(3G_2[k, m] - G_4[k, m]^2)^3 +$

$(-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3)^2})^{1/3}) +$

$(iG_4[k, m]^2) /$

$(2^{2/3}\sqrt{3}$

$(-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3 +$

$\sqrt{4(3G_2[k, m] - G_4[k, m]^2)^3 +$

$(-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3)^2})^{1/3}) -$

$1 / (6 \cdot 2^{1/3})$

$(-27G_0[k, m] + 9G_2[k, m]G_4[k, m] - 2G_4[k, m]^3 +$



$$\begin{aligned}
& \sqrt{\left(4(3G^2[k, m] - G^4[k, m]^2)^3 + \right. \\
& \left. (-27G^0[k, m] + 9G^2[k, m]G^4[k, m] - 2G^4[k, m]^3)^2\right)^{1/3} - } \\
& 1 / (2 \cdot 2^{1/3} \sqrt{3}) i \\
& \left. \left( -27G^0[k, m] + 9G^2[k, m]G^4[k, m] - 2G^4[k, m]^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{\left(4(3G^2[k, m] - G^4[k, m]^2)^3 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (-27G^0[k, m] + 9G^2[k, m]G^4[k, m] - 2G^4[k, m]^3)^2\right)^{1/3} \right) \right] ; \\
& \lambda_6[k, m] := \lambda_5[k, m];
\end{aligned}$$

3. Решение системы уравнений для нахождения  $\tilde{C}_m[k]$

$$\{tC1[tt\_ , kt\_ , mt\_ ], tC2[tt\_ , kt\_ , mt\_ ], tC3[tt\_ , kt\_ , mt\_ ], \\
tC4[tt\_ , kt\_ , mt\_ ], tC5[tt\_ , kt\_ , mt\_ ], tC6[tt\_ , kt\_ , mt\_ ]\} =$$

LinearSolve[

$$\left\{ \left\{ \text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 1}{G} \right], \text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 2}{G} \right], \text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 3}{G} \right], \text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 4}{G} \right], \text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 5}{G} \right], \right. \right.$$

$$\left. \text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 6}{G} \right] \right\}, \left\{ \right.$$

$$\frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 1}{G} \right] \lambda\lambda 1}{G}, -\frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 2}{G} \right] \lambda\lambda 2}{G}, \frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 3}{G} \right] \lambda\lambda 3}{G}, -\frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 4}{G} \right] \lambda\lambda 4}{G},$$

$$\left. \frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 5}{G} \right] \lambda\lambda 5}{G}, -\frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 6}{G} \right] \lambda\lambda 6}{G} \right\}, \left\{ \right.$$

$$-\frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 1}{G} \right] (\lambda\lambda 1)^2}{G^2}, -\frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 2}{G} \right] \lambda\lambda 2^2}{G^2}, -\frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 3}{G} \right] \lambda\lambda 3^2}{G^2},$$

$$\left. -\frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 4}{G} \right] \lambda\lambda 4^2}{G^2}, -\frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 5}{G} \right] \lambda\lambda 5^2}{G^2}, -\frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 6}{G} \right] \lambda\lambda 6^2}{G^2} \right\}, \left\{ \right.$$

$$-\frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 1}{G} \right] \lambda\lambda 1^3}{G^3}, \frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 2}{G} \right] \lambda\lambda 2^3}{G^3}, -\frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 3}{G} \right] \lambda\lambda 3^3}{G^3}, \frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 4}{G} \right] \lambda\lambda 4^3}{G^3},$$

$$\left. -\frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 5}{G} \right] \lambda\lambda 5^3}{G^3}, \frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 6}{G} \right] \lambda\lambda 6^3}{G^3} \right\}, \left\{ \right.$$

$$\frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 1}{G} \right] \lambda\lambda 1^4}{G^4}, \frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 2}{G} \right] \lambda\lambda 2^4}{G^4}, \frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 3}{G} \right] (\lambda\lambda 3)^4}{G^4}, \frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 4}{G} \right] \lambda\lambda 4^4}{G^4},$$

$$\left. \frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 5}{G} \right] \lambda\lambda 5^4}{G^4}, \frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 6}{G} \right] \lambda\lambda 6^4}{G^4} \right\}, \left\{ \right.$$

$$\frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 1}{G} \right] \lambda\lambda 1^5}{G^5}, -\frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 2}{G} \right] \lambda\lambda 2^5}{G^5}, \frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 3}{G} \right] \lambda\lambda 3^5}{G^5}, -\frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 4}{G} \right] \lambda\lambda 4^5}{G^5},$$

$$\left. \frac{\text{Cos} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 5}{G} \right] \lambda\lambda 5^5}{G^5}, -\frac{\text{Sin} \left[ \frac{tt\lambda\lambda 6}{G} \right] \lambda\lambda 6^5}{G^5} \right\} \left. \right\},$$

$$\left\{ -\frac{q[kt, mt] + A3[kt, mt]}{G0[kt, mt]} + \frac{A3[kt, mt]}{f[kt, mt]}, \frac{A3[kt, mt]}{f[kt, mt]} \left( -\frac{\beta S[kt, mt]}{a^2} \right)^1 \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{A3[kt,mt]}{f[kt,mt]} \left( -\frac{\beta S[kt,mt]}{a^2} \right)^2, \frac{A3[kt,mt]}{f[kt,mt]} \left( -\frac{\beta S[kt,mt]}{a^2} \right)^3, \\ & \frac{A3[kt,mt]}{f[kt,mt]} \left( -\frac{\beta S[kt,mt]}{a^2} \right)^4, \frac{A3[kt,mt]}{f[kt,mt]} \left( -\frac{\beta S[kt,mt]}{a^2} \right)^5 \end{aligned} \right\};$$

4. Начальные условия при  $t = 0$ :  $\frac{d^l \Phi}{dt^l} = 0$ ,  $l = \overline{0, 5}$ .

$$\{C1[k_, m_], C2[k_, m_], C3[k_, m_], C4[k_, m_], C5[k_, m_], C6[k_, m_]\} =$$

$$\text{LinearSolve} \left[ \left\{ \left\{ 0, 1, 0, 1, 0, 1 \right\}, \left\{ \frac{\lambda 1[k, m]}{G}, 0, \frac{\lambda 3[k, m]}{G}, 0, \frac{\lambda 5[k, m]}{G}, 0 \right\}, \right. \right. \\ \left. \left\{ 0, -\frac{\lambda 2[k, m]^2}{G^2}, 0, -\frac{\lambda 4[k, m]^2}{G^2}, 0, -\frac{\lambda 6[k, m]^2}{G^2} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ -\frac{\lambda 1[k, m]^3}{G^3}, 0, -\frac{\lambda 3[k, m]^3}{G^3}, 0, -\frac{\lambda 5[k, m]^3}{G^3}, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ 0, \frac{\lambda 2[k, m]^4}{G^4}, 0, \frac{\lambda 4[k, m]^4}{G^4}, 0, \frac{\lambda 6[k, m]^4}{G^4} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{\lambda 1[k, m]^5}{G^5}, 0, \frac{\lambda 3[k, m]^5}{G^5}, 0, \frac{\lambda 5[k, m]^5}{G^5}, 0 \right\} \right\}, \\ \left. \left\{ -\frac{A1[k, m]}{G0[k, m]} a - \frac{A2[k, m]}{f[k, m]} a, -\frac{A2[k, m]}{f[k, m]} \left( -\frac{\beta S[k, m]}{a^2} \right)^1 a, \right. \right. \\ \left. -\frac{A2[k, m]}{f[k, m]} \left( -\frac{\beta S[k, m]}{a^2} \right)^2 a, -\frac{A2[k, m]}{f[k, m]} \left( -\frac{\beta S[k, m]}{a^2} \right)^3 a, \right. \\ \left. \left. -\frac{A2[k, m]}{f[k, m]} \left( -\frac{\beta S[k, m]}{a^2} \right)^4 a, -\frac{A2[k, m]}{f[k, m]} \left( -\frac{\beta S[k, m]}{a^2} \right)^5 a \right\} \right];$$

$$C1[k_, m_] :=$$

$$\frac{G\beta A2[k, m]S[k, m](G^2\beta^2 S[k, m]^2 + a^4\lambda\lambda 3^2)(G^2\beta^2 S[k, m]^2 + a^4\lambda\lambda 5^2)}{a^9 f[k, m]\lambda\lambda 1(\lambda\lambda 1^2 - \lambda\lambda 3^2)(\lambda\lambda 1^2 - \lambda\lambda 5^2)};$$

$$C2[k_, m_] :=$$

$$- (a^8 A1[k, m] f[k, m] \lambda\lambda 4^2 \lambda\lambda 6^2 + A2[k, m] G0[k, m] (G^2\beta^2 S[k, m]^2 + a^4\lambda\lambda 4^2) \\ (G^2\beta^2 S[k, m]^2 + a^4\lambda\lambda 6^2)) / \\ (a^7 f[k, m] G0[k, m] (\lambda\lambda 2^2 - \lambda\lambda 4^2) (\lambda\lambda 2^2 - \lambda\lambda 6^2));$$

$$C3[k_, m_] :=$$

$$\frac{G\beta A2[k, m]S[k, m](G^2\beta^2 S[k, m]^2 + a^4\lambda\lambda 1^2)(G^2\beta^2 S[k, m]^2 + a^4\lambda\lambda 5^2)}{a^9 f[k, m]\lambda\lambda 3(-\lambda\lambda 1^2 + \lambda\lambda 3^2)(\lambda\lambda 3^2 - \lambda\lambda 5^2)};$$

$$C4[k_, m_] :=$$

$$(a^8 A1[k, m] f[k, m] \lambda\lambda 2^2 \lambda\lambda 6^2 + \\ A2[k, m] G0[k, m] (G^2\beta^2 S[k, m]^2 + a^4\lambda\lambda 2^2) (G^2\beta^2 S[k, m]^2 + a^4\lambda\lambda 6^2)) /$$

$$(a^7 f[k, m]G0[k, m] (\lambda\lambda 2^2 - \lambda\lambda 4^2) (\lambda\lambda 4^2 - \lambda\lambda 6^2));$$

$$C5[k_, m_] :=$$

$$\frac{G\beta A2[k, m]S[k, m](G^2\beta^2 S[k, m]^2 + a^4\lambda\lambda 1^2)(G^2\beta^2 S[k, m]^2 + a^4\lambda\lambda 3^2)}{a^9 f[k, m]\lambda\lambda 5(-\lambda\lambda 1^2 + \lambda\lambda 5^2)(-\lambda\lambda 3^2 + \lambda\lambda 5^2)};$$

$$C6[k_, m_] :=$$

$$(a^8 A1[k, m]f[k, m]\lambda\lambda 2^2\lambda\lambda 4^2 + A2[k, m]G0[k, m] (G^2\beta^2 S[k, m]^2 + a^4\lambda\lambda 2^2) (G^2\beta^2 S[k, m]^2 + a^4\lambda\lambda 4^2))/ (a^7 f[k, m]G0[k, m] (\lambda\lambda 2^2 - \lambda\lambda 6^2) (-\lambda\lambda 4^2 + \lambda\lambda 6^2));$$

5. Составляем функцию  $\Phi$  в виде:  $\Phi[t, k, m] = \Phi_1[t, k, m] + \Phi_2[t, k, m]H[t - t1]a - \Phi_3[t, k, m]H[t - t2]a$ .

$$\Phi_1[t_, k_, m_] := C1[k, m]\text{Sin}\left[\frac{\lambda\lambda 1t}{G}\right] + C2[k, m]\text{Cos}\left[\frac{\lambda\lambda 2t}{G}\right] + C3[k, m]\text{Sin}\left[\frac{\lambda\lambda 3t}{G}\right] + C4[k, m]\text{Cos}\left[\frac{\lambda\lambda 4t}{G}\right] + C5[k, m]\text{Sin}\left[\frac{\lambda\lambda 5t}{G}\right] + C6[k, m]\text{Cos}\left[\frac{\lambda\lambda 6t}{G}\right] + \frac{A1[k, m]}{G0[k, m]}a + \frac{A2[k, m]}{f[k, m]}e^{-\frac{\beta}{a^2}S[k, m]t}a;$$

$$\Phi_2[t_, k_, m_] := tC1[t1, k, m]\text{Sin}\left[\frac{\lambda\lambda 1t}{G}\right] + tC2[t1, k, m]\text{Cos}\left[\frac{\lambda\lambda 2t}{G}\right] + tC3[t1, k, m]\text{Sin}\left[\frac{\lambda\lambda 3t}{G}\right] + tC4[t1, k, m]\text{Cos}\left[\frac{\lambda\lambda 4t}{G}\right] + tC5[t1, k, m]\text{Sin}\left[\frac{\lambda\lambda 5t}{G}\right] + tC6[t1, k, m]\text{Cos}\left[\frac{\lambda\lambda 6t}{G}\right] + \frac{q[k, m] + A3[k, m]}{G0[k, m]} - \frac{A3[k, m]}{f[k, m]}e^{-\frac{\beta}{a^2}S[k, m](t-t1)};$$

$$\Phi_3[t_, k_, m_] := tC1[t2, k, m]\text{Sin}\left[\frac{\lambda\lambda 1t}{G}\right] + tC2[t2, k, m]\text{Cos}\left[\frac{\lambda\lambda 2t}{G}\right] + tC3[t2, k, m]\text{Sin}\left[\frac{\lambda\lambda 3t}{G}\right] + tC4[t2, k, m]\text{Cos}\left[\frac{\lambda\lambda 4t}{G}\right] + tC5[t2, k, m]\text{Sin}\left[\frac{\lambda\lambda 5t}{G}\right] + tC6[t2, k, m]\text{Cos}\left[\frac{\lambda\lambda 6t}{G}\right] + \frac{q[k, m] + A3[k, m]}{G0[k, m]} - \frac{A3[k, m]}{f[k, m]}e^{-\frac{\beta}{a^2}S[k, m](t-t2)};$$

$$\Phi\Phi 21[t_, kf_, mf_] := -\frac{\text{Sin}\left[\frac{t\lambda\lambda 1}{G}\right]\lambda\lambda 1^2}{G^2}C1[kf, mf] - \frac{\text{Cos}\left[\frac{t\lambda\lambda 2}{G}\right]\lambda\lambda 2^2}{G^2}C2[kf, mf] - \frac{\text{Sin}\left[\frac{t\lambda\lambda 3}{G}\right]\lambda\lambda 3^2}{G^2}C3[kf, mf] - \frac{\text{Cos}\left[\frac{t\lambda\lambda 4}{G}\right]\lambda\lambda 4^2}{G^2}C4[kf, mf] - \frac{\text{Sin}\left[\frac{t\lambda\lambda 5}{G}\right]\lambda\lambda 5^2}{G^2}C5[kf, mf] - \frac{\text{Cos}\left[\frac{t\lambda\lambda 6}{G}\right]\lambda\lambda 6^2}{G^2}C6[kf, mf] + \frac{A2[kf, mf]}{f[kf, mf]}\left(-\frac{\beta S[kf, mf]}{a^2}\right)^2 ae^{-\frac{\beta}{a^2}S[kf, mf]t};$$

$$\Phi\Phi 22[t_, kf_, mf_] := -\frac{\text{Sin}\left[\frac{t\lambda\lambda 1}{G}\right]\lambda\lambda 1^2}{G^2}tC1[t1, kf, mf] - \frac{\text{Cos}\left[\frac{t\lambda\lambda 2}{G}\right]\lambda\lambda 2^2}{G^2}tC2[t1, kf, mf] - \frac{\text{Sin}\left[\frac{t\lambda\lambda 3}{G}\right]\lambda\lambda 3^2}{G^2}tC3[t1, kf, mf] -$$

$$\frac{\cos\left[\frac{t\lambda\lambda 4}{G}\right]\lambda\lambda 4^2}{G^2}tC4[t1, kf, mf] - \frac{\sin\left[\frac{t\lambda\lambda 5}{G}\right]\lambda\lambda 5^2}{G^2}tC5[t1, kf, mf] -$$

$$\frac{\cos\left[\frac{t\lambda\lambda 6}{G}\right]\lambda\lambda 6^2}{G^2}tC6[t1, kf, mf] -$$

$$\frac{A3[kf, mf]}{f[kf, mf]} \left(-\frac{\beta S[kf, mf]}{a^2}\right)^2 e^{-\frac{\beta}{a^2}S[kf, mf](t-t1)};$$

$$\Phi\Phi 23[t_, kf_, mf_] := -\frac{\sin\left[\frac{t\lambda\lambda 1}{G}\right]\lambda\lambda 1^2}{G^2}tC1[t2, kf, mf] -$$

$$\frac{\cos\left[\frac{t\lambda\lambda 2}{G}\right]\lambda\lambda 2^2}{G^2}tC2[t2, kf, mf] - \frac{\sin\left[\frac{t\lambda\lambda 3}{G}\right]\lambda\lambda 3^2}{G^2}tC3[t2, kf, mf] -$$

$$\frac{\cos\left[\frac{t\lambda\lambda 4}{G}\right]\lambda\lambda 4^2}{G^2}tC4[t2, kf, mf] - \frac{\sin\left[\frac{t\lambda\lambda 5}{G}\right]\lambda\lambda 5^2}{G^2}tC5[t2, kf, mf] -$$

$$\frac{\cos\left[\frac{t\lambda\lambda 6}{G}\right]\lambda\lambda 6^2}{G^2}tC6[t2, kf, mf] -$$

$$\frac{A3[kf, mf]}{f[kf, mf]} \left(-\frac{\beta S[kf, mf]}{a^2}\right)^2 e^{-\frac{\beta}{a^2}S[kf, mf](t-t2)};$$

$$\Phi\Phi 41[t_, fk_, fm_] := \frac{\sin\left[\frac{t\lambda\lambda 1}{G}\right]\lambda\lambda 1^4}{G^4}C1[fk, fm] + \frac{\cos\left[\frac{t\lambda\lambda 2}{G}\right]\lambda\lambda 2^4}{G^4}C2[fk, fm] +$$

$$\frac{\sin\left[\frac{t\lambda\lambda 3}{G}\right]\lambda\lambda 3^4}{G^4}C3[fk, fm] + \frac{\cos\left[\frac{t\lambda\lambda 4}{G}\right]\lambda\lambda 4^4}{G^4}C4[fk, fm] +$$

$$\frac{\sin\left[\frac{t\lambda\lambda 5}{G}\right]\lambda\lambda 5^4}{G^4}C5[fk, fm] + \frac{\cos\left[\frac{t\lambda\lambda 6}{G}\right]\lambda\lambda 6^4}{G^4}C6[fk, fm] +$$

$$e^{-\frac{t\beta S[fk, fm]}{a^2}} \frac{A2[fk, fm]}{f[fk, fm]} \left(-\frac{\beta S[fk, fm]}{a^2}\right)^4 a;$$

$$\Phi\Phi 42[t_, fk_, fm_] := \frac{\sin\left[\frac{t\lambda\lambda 1}{G}\right]\lambda\lambda 1^4}{G^4}tC1[t1, fk, fm] +$$

$$\frac{\cos\left[\frac{t\lambda\lambda 2}{G}\right]\lambda\lambda 2^4}{G^4}tC2[t1, fk, fm] + \frac{\sin\left[\frac{t\lambda\lambda 3}{G}\right]\lambda\lambda 3^4}{G^4}tC3[t1, fk, fm] +$$

$$\frac{\cos\left[\frac{t\lambda\lambda 4}{G}\right]\lambda\lambda 4^4}{G^4}tC4[t1, fk, fm] + \frac{\sin\left[\frac{t\lambda\lambda 5}{G}\right]\lambda\lambda 5^4}{G^4}tC5[t1, fk, fm] +$$

$$\frac{\cos\left[\frac{t\lambda\lambda 6}{G}\right]\lambda\lambda 6^4}{G^4}tC6[t1, fk, fm] - e^{-\frac{(t-t1)\beta S[fk, fm]}{a^2}} \frac{A3[fk, fm]}{f[fk, fm]} \left(-\frac{\beta S[fk, fm]}{a^2}\right)^4;$$

$$\Phi\Phi 43[t_, fk_, fm_] := \frac{\sin\left[\frac{t\lambda\lambda 1}{G}\right]\lambda\lambda 1^4}{G^4}tC1[t2, fk, fm] +$$

$$\frac{\cos\left[\frac{t\lambda\lambda 2}{G}\right]\lambda\lambda 2^4}{G^4}tC2[t2, fk, fm] + \frac{\sin\left[\frac{t\lambda\lambda 3}{G}\right]\lambda\lambda 3^4}{G^4}tC3[t2, fk, fm] +$$

$$\frac{\cos\left[\frac{t\lambda\lambda 4}{G}\right]\lambda\lambda 4^4}{G^4}tC4[t2, fk, fm] + \frac{\sin\left[\frac{t\lambda\lambda 5}{G}\right]\lambda\lambda 5^4}{G^4}tC5[t2, fk, fm] +$$

$$\frac{\cos\left[\frac{t\lambda\lambda 6}{G}\right]\lambda\lambda 6^4}{G^4}tC6[t2, fk, fm] - e^{-\frac{(t-t2)\beta S[fk, fm]}{a^2}} \frac{A3[fk, fm]}{f[fk, fm]} \left(-\frac{\beta S[fk, fm]}{a^2}\right)^4;$$

6. Составляем функции прогиба и перемещений:

$$w[t_, kw_, mw_] :=$$

$$G^4(\Phi\Phi 41[t, kw, mw] + \Phi\Phi 42[t, kw, mw]\text{HeavisideTheta}[t - t1]a -$$

$$\Phi\Phi 43[t, kw, mw]\text{HeavisideTheta}[t - t2]a) +$$

$$\frac{3-\nu}{2}L[kw, mw]G^2$$

$$\begin{aligned}
& (\Phi\Phi21[t, kw, mw] + \Phi\Phi22[t, kw, mw]\text{HeavisideTheta}[t - t1]a - \\
& \Phi\Phi23[t, kw, mw]\text{HeavisideTheta}[t - t2]a) + \\
& \frac{1-\nu}{2}(L[kw, mw])^2 \\
& (\Phi1[t, kw, mw] + \Phi2[t, kw, mw]\text{HeavisideTheta}[t - t1]a - \\
& \Phi3[t, kw, mw]\text{HeavisideTheta}[t - t2]a);
\end{aligned}$$

$$W1[x_, y_, t_] := w[t, 1, 1] \text{Sin} \left[ \frac{\pi x}{a} \right] \text{Sin} \left[ \frac{\pi y}{b} \right];$$

$$U[x_, y_, t_] := \text{Sum} \left[ \text{Sum} [u[t, kf1, mf1] \text{Sin} \left[ \frac{kf1 \pi x}{a} \right], \{kf1, 1, 1\}] \text{Cos} \left[ \frac{mf1 \pi y}{b} \right], \{mf1, 1, 1\} \right];$$

$$V[x_, y_, t_] := \text{Sum} \left[ \text{Sum} [v[t, kf2, mf2] \text{Cos} \left[ \frac{kf2 \pi x}{a} \right], \{kf2, 1, 1\}] \text{Sin} \left[ \frac{mf2 \pi y}{b} \right], \{mf2, 1, 1\} \right];$$

$$W[x_, y_, t_] := \text{Sum} \left[ \text{Sum} [w[t, kf3, mf3] \text{Sin} \left[ \frac{kf3 \pi x}{a} \right], \{kf3, 1, 1\}] \text{Sin} \left[ \frac{mf3 \pi y}{b} \right], \{mf3, 1, 1\} \right];$$

7. Построение графиков.

$$g1 := \text{Plot}[W1[a/2, y, 1.0025], \{y, 0, b\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Green},$$

$$\text{PlotRange} \rightarrow \{-.01, .01\}];$$

$$g2 := \text{Plot}[W1[a/2, y, 2], \{y, 0, b\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Red}, \text{PlotRange} \rightarrow \{-.01, .01\}];$$

$$g3 := \text{Plot}[W1[a/2, y, 3], \{y, 0, b\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Blue}, \text{PlotRange} \rightarrow \{-.01, .01\}];$$

$$\text{Show}[g1, g2, g3]$$

$$g11 := \text{Plot}[W1[x, b/2, 1.0015], \{x, 0, a\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Green},$$

$$\text{PlotRange} \rightarrow \{-.001, .12\}];$$

$$g22 := \text{Plot}[W1[x, b/2, 1.0025], \{x, 0, a\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Red},$$

$$\text{PlotRange} \rightarrow \{-.001, .12\}];$$

$$g33 := \text{Plot}[W1[x, b/2, 1.0045], \{x, 0, a\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Blue},$$

$$\text{PlotRange} \rightarrow \{-.001, .12\}];$$

```
g44:=Plot[W1[x, b/2, 1.007], {x, 0, a}, PlotStyle → Black,  
PlotRange → {-.001, .12}];  
Show[g11, g22, g33, g44]
```

```
g5[t_]:=Plot3D[W[x, y, t], {x, 0, a}, {y, 0, b}, PlotStyle → Green,  
PerformanceGoal → "Quality"];
```

```
g3:=Plot[W1[a/2, y, 1.05], {y, 0, b}, PlotStyle → Blue,  
PlotRange → {-.01, .025}];
```

```
g4:=Plot[W1[a/2, y, 1.08], {y, 0, b}, PlotStyle → Gray,  
PlotRange → {-.01, .025}];
```

```
g5:=Plot[W1[a/2, y, 1.09], {y, 0, b}, PlotStyle → Yellow,  
PlotRange → {-.01, .025}];
```

```
g6:=Plot[W1[a/2, y, 1.099], {y, 0, b}, PlotStyle → Brown,  
PlotRange → {-.01, .025}];
```

```
Show[g1, g2, g3, g4, g5, g6]
```

```
g7:=Plot[W1[a/2, b/2, t], {t, 0.999, 1.03}, PlotStyle → Blue];
```

```
g7
```

```
g8:=Plot[W1[a/2, b/2, t], {t, 0.999, 1.1}, PlotStyle → Blue];
```

```
g8
```

## Приложение В

Программный код для вычисления значений и построения графиков функции прогиба для задачи о колебании оболочки постоянного кручения при внезапном воздействии теплового потока

1. Входные данные

$$b:=100;$$

$$h:=1;$$

$$\beta:=1.44;$$

$$\nu:=0.32;$$

$$q:=0.01;$$

$$\lambda:=10.1 * 10^{(-4)};$$

$$\alpha:=24 * 10^{-6};$$

$$Ee:=0.7210^6;$$

$$g:=9.8110^2;$$

$$\gamma:=2.710^{(-3)};$$

$$qstar1:=\frac{q\alpha h}{\lambda};$$

$$qstar2:=0.1;$$

$$qstar:=qstar1 * b/h;$$

$$\gammastar:=\frac{gEe}{\gamma h^2};$$

$$\beta1[n\_]:= (\text{Cos}[n\pi](1 - \text{Cos}[n\pi])) / (n\pi)^2 ;$$

$$ach[m\_]:= - (2(1 - \text{Cos}[m\pi])) / (m\pi)^3 ;$$

$$acht[m\_]:= (2(1 - \text{Cos}[m\pi])) / (m\pi)^5 ;$$

$$skob1[m\_ , k12\_]:= \frac{(m\pi)^4}{12} \left(\frac{h}{b}\right)^2 + 2(1 - \nu) \left(\frac{b}{h}\right)^2 (h * k12)^2 + \frac{1-\nu}{2} (m\pi)^2;$$

$$\begin{aligned}
d1[m\_ , k12\_ ] &:= \\
&\frac{h}{b} \sqrt{\left(\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left(\text{skob1}[m, k12] - \sqrt{\left(\text{skob1}[m, k12]\right)^2 - \frac{1-\nu}{6}(m\pi)^6 \left(\frac{h}{b}\right)^2}\right)\right)}; \\
d2[m\_ , k12\_ ] &:= \\
&\frac{h}{b} \sqrt{\left(\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left(\text{skob1}[m, k12] + \sqrt{\left(\text{skob1}[m, k12]\right)^2 - \frac{1-\nu}{6}(m\pi)^6 \left(\frac{h}{b}\right)^2}\right)\right)}; \\
C1[m\_ , k12\_ ] &:= \sqrt{\gamma\text{stard1}[m, k12]}; \\
C2[m\_ , k12\_ ] &:= \sqrt{\gamma\text{stard2}[m, k12]}; \\
\text{skob2}[m\_ , k12\_ ] &:= (2(1 - \text{Cos}[m\pi])) / (6(1 - \nu)m\pi) \left(\frac{h}{b}\right)^2 + \\
&4 \left(\frac{h}{b}\right)^2 \left((hk12)^2 2(1 - \text{Cos}[m\pi])\right) / (m\pi)^5 + (2(1 - \text{Cos}[m\pi])) / (m\pi)^3; \\
B[n\_ , m\_ , k12\_ ] &:= \frac{48(1+\nu)}{1-\nu} \text{acht}[m](n\pi)^8 \beta1[n] + \\
&2 / ((1 - \nu)(\alpha\text{star})^2) \text{skob2}[m, k12] \left(\frac{h}{b}\right)^4 \beta1[n](n\pi)^4; \\
A2[n\_ , m\_ , k12\_ ] &:= \left(\text{qstar} \left(\frac{h}{b}\right)^3 B[n, m, k12]\right) / \\
&\left((n\pi)^8 + \text{skob1}[m, k12](n\pi)^4 \left(\frac{h}{b}\right)^2 1 / ((\alpha\text{star})^2 (1 - \nu^2)) + \right. \\
&\left.(1 - \nu) / \left(24 (1 - \nu^2)^2 (\alpha\text{star})^4\right) (m\pi)^6 \left(\frac{h}{b}\right)^6\right);
\end{aligned}$$

2. Решение систем уравнений для нахождения D1, D2, D3, D4

$$\begin{aligned}
a21[j\_ , k12\_ ] &:= (d1[j, k12])^2; \\
a22[j\_ , k12\_ ] &:= (d2[j, k12])^2; \\
a13[j\_ , k12\_ ] &:= - \left(\frac{h}{b}\right)^3 \text{Sum}[A2[i, j, k12], \{i, 1, 5, 1\}] - \\
&((1 + \nu) * \text{qstar} * \text{ach}[j]) / ((1 - \nu)(j\pi)^2) (1 + 48 \text{Sum}[\beta1[l], \{l, 1, 5, 1\}]); \\
a23[j\_ , k12\_ ] &:= (h^3 (\alpha\text{star})^2) / b^3 \text{Sum} [(i\pi)^4 A2[i, j, k12], \{i, 1, 5, 1\}] - \\
&\frac{1}{(1-\nu)} 48(1 + \nu) \text{qstar} (\alpha\text{star})^2 \text{acht}[j] \text{Sum} [(o\pi)^4 \beta1[o], \{o, 1, 5, 1\}]; \\
a31[j\_ , k12\_ ] &:= d1[j, k12]; \\
a32[j\_ , k12\_ ] &:= d2[j, k12]; \\
a41[j\_ , k12\_ ] &:= (d1[j, k12])^3; \\
a42[j\_ , k12\_ ] &:= (d2[j, k12])^3; \\
a33[j\_ , k12\_ ] &:=
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \alpha_{\text{star}} \left( \left( \frac{h}{b} \right)^3 \text{Sum} \left[ (i_1 \pi)^2 A_2[i_1, j, k_{12}], \{i_1, 1, 5, 1\} \right] + \right. \\
& (48 q_{\text{star}} (1 + \nu) \text{ach}[j]) / ((1 - \nu) (j \pi)^2) \\
& \left. \text{Sum} \left[ \beta_1[i_2] (i_2 \pi)^2, \{i_2, 1, 5, 1\} \right] \right); \\
& a_{43}[j\_ , k_{12}\_] := - \left( \frac{h}{b} \right)^3 (\alpha_{\text{star}})^3 \text{Sum} \left[ (i_3 \pi)^6 A_2[i_3, j, k_{12}], \{i_3, 1, 5, 1\} \right] + \\
& \frac{1}{(1-\nu)} 48 (1 + \nu) q_{\text{star}} * \text{acht}[j] * (\alpha_{\text{star}})^3 \text{Sum} \left[ \beta_1[i_4] (i_4 \pi)^6, \{i_4, 1, 5, 1\} \right]; \\
& R_1[j\_ , k_{12}\_] := (a_{22}[j, k_{12}] a_{13}[j, k_{12}] - a_{23}[j, k_{12}]) / \\
& (a_{22}[j, k_{12}] - a_{21}[j, k_{12}]); \\
& R_3[j\_ , k_{12}\_] := (a_{23}[j, k_{12}] - a_{21}[j, k_{12}] a_{13}[j, k_{12}]) / \\
& (a_{22}[j, k_{12}] - a_{21}[j, k_{12}]); \\
& R_2[j\_ , k_{12}\_] := (a_{33}[j, k_{12}] a_{42}[j, k_{12}] - a_{43}[j, k_{12}] a_{32}[j, k_{12}]) / \\
& (a_{31}[j, k_{12}] a_{42}[j, k_{12}] - a_{32}[j, k_{12}] a_{41}[j, k_{12}]); \\
& R_4[j\_ , k_{12}\_] := (a_{43}[j, k_{12}] a_{31}[j, k_{12}] - a_{33}[j, k_{12}] a_{41}[j, k_{12}]) / \\
& (a_{31}[j, k_{12}] a_{42}[j, k_{12}] - a_{32}[j, k_{12}] a_{41}[j, k_{12}]);
\end{aligned}$$

### 3. Вычисление прогиба

$$\begin{aligned}
& W[y\_ , t\_ , k_{12}\_] = \\
& \text{Sum}[ \\
& \left( \frac{1-\nu}{2} (K \pi)^2 (-R_1[K, k_{12}] \text{Cos}[C_1[K, k_{12}]t] - R_2[K, k_{12}] \text{Sin}[C_1[K, k_{12}]t] - \right. \\
& R_3[K, k_{12}] \text{Cos}[C_2[K, k_{12}]t] - R_4[K, k_{12}] \text{Sin}[C_2[K, k_{12}]t] - \\
& \left. \left( \frac{h}{b} \right)^3 \text{Sum} \left[ A_2[k_1, K, k_{12}] e^{-\beta t \left( \frac{k_1 \pi}{h} \right)^2}, \{k_1, 1, 5, 1\} \right] - \right. \\
& \left. \left. \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) * q_{\text{star}} * \frac{\text{ach}[K]}{(K \pi)^2} \left( 1 + 48 \text{Sum} \left[ \beta_1[k_2] e^{-\beta t \left( \frac{k_2 \pi}{h} \right)^2}, \{k_2, 1, 5, 1\} \right] \right) \right) \right) + \\
& (1 - \nu^2) \left( \frac{b}{h} \right)^2 (R_1[K, k_{12}] (d_1[K, k_{12}])^2 \text{Cos}[C_1[K, k_{12}]t] + \\
& R_2[K, k_{12}] (d_1[K, k_{12}])^2 \text{Sin}[C_1[K, k_{12}]t] + \\
& R_3[K, k_{12}] (d_2[K, k_{12}])^2 \text{Cos}[C_2[K, k_{12}]t] + \\
& R_4[K, k_{12}] (d_2[K, k_{12}])^2 \text{Sin}[C_2[K, k_{12}]t] - \\
& \left. \left( \frac{h}{b} \right)^3 (\alpha_{\text{star}})^2 \text{Sum} \left[ (k_3 \pi)^4 A_2[k_3, K, k_{12}] e^{-\beta \left( \frac{k_3 \pi}{h} \right)^2 t}, \{k_3, 1, 5, 1\} \right] + \right. \\
& \left. 48 \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) (\alpha_{\text{star}})^2 q_{\text{star}} \text{acht}[K] \right)
\end{aligned}$$

Sum  $\left[ \beta_1[k_4](k_4\pi)^4 e^{-\beta\left(\frac{k_4\pi}{h}\right)^2 t}, \{k_4, 1, 5, 1\} \right] \right) \sin \left[ \frac{K\pi y}{b} \right],$   
 $\{K, 1, 1, 1\}$ ;

4. Вычисление значений прогиба для различных кривизн.

Table[N[W[b/2, 0.015, k12]], {k12, 0, 0.05, 0.005}]

5. Построение графиков.

g1[t\_]:=Plot[W[y, t, 0], {y, 0, b}, PerformanceGoal -> "Quality"];

ListAnimate[Table[Show[{g1[t]}, PlotRange -> {{0, 100}, {-0.035, 0.03}}],  
{t, 0, 0.3, 0.001}]]

g1[t\_]:=Plot[W[y, t, 0], {y, 0, b}, PerformanceGoal -> "Quality"];

BBH = ListAnimate[Table[Show[{g1[t]}, PlotRange -> {{0, 100}, {-0.035, 0.03}}],  
{t, 0, 5, 0.001}]]

Export["PKterm.avi", BBH]

g86:=Plot[{W[50, t, 0], W[50, t, 0.01], W[50, t, 0.02], W[50, t, 0.03],  
W[50, t, 0.04]}, {t, 0, 0.1},

PlotStyle -> {Black, Red, Green, Blue, Orange}, AxesLabel -> {t, w}];

g86

g18:=Plot[W[b/2, t, 0], {t, 0, 0.04}, PlotStyle -> Red];

g28:=Plot[W[b/2, t, 0.01], {t, 0, 0.04}, PlotStyle -> Orange];

g38:=Plot[W[b/2, t, 0.02], {t, 0, 0.04}, PlotStyle -> Blue];

g48:=Plot[W[b/2, t, 0.03], {t, 0, 0.04}, PlotStyle -> Green];

```
g58:=Plot[W[b/2, t, 0.04], {t, 0, 0.04}];  
g68:=Plot[W[b/2, t, 0.05], {t, 0, 0.04}, PlotStyle → Yellow];  
Show[{g18, g28, g38, g48, g58, g68}, AxesLabel → {t, w}]
```

## Приложение Г

Программный код программы для задачи о влиянии кратковременного воздействия сосредоточенной силы и скачкообразного повышения температуры среды на термоупругое поведение геометрически нерегулярной пластинки в условиях конвективного теплообмена

1. Входные данные

$$a:=100;$$

$$b:=a;$$

$$a1:=\frac{a}{1000};$$

$$b1:=\frac{b}{1000};$$

$$ai[z_]:= \frac{a}{100};$$

$$x1:=\frac{a}{2};$$

$$y1:=\frac{b}{2};$$

$$ll:=10;$$

$$xi[z_]:=z * \frac{a}{ll+1};$$

$$t1:=1;$$

$$t2:=1.005;$$

$$h:=0.005a;$$

$$hi[z_]:=5 * h;$$

$$\alpha:=25 \cdot 10^{-6};$$

$$Ee:=0.72 \cdot 10^6;$$

$$\nu:=0.32;$$

$$Dd:=\frac{Eeh^3}{12(1-\nu^2)};$$

$$Bb:=\frac{Eeh}{1-\nu^2};$$

$$\gamma:=2.78 \cdot 10^{-3};$$

$$gg:=981;$$

$$\beta:=0.14;$$

$$\text{Bio}:=100;$$

$$q_0:=10;$$

$$T_0^+:=20;$$

$$T_1^+:=100;$$

$$T^-:=20;$$

$$\mu:=.00007;$$

$$\Phi 3i[z\_]:=3\left(\frac{h}{hi[z]}\right)^2 + 3 * \frac{h}{hi[z]} + 1;$$

$$\beta i[z\_]:=Dd * \Phi 3i[z] \left(\frac{hi[z]}{h}\right)^3 ai[z];$$

$$t\beta i[z\_]:=2(1 - \nu)Dd * \Phi 3i[z] \left(\frac{hi[z]}{h}\right)^3 ai[z];$$

$$ee[k\_ , m\_]:= \frac{4(1 - \text{Cos}[k\pi])(1 - \text{Cos}[m\pi])}{km\pi^2};$$

$$S[k\_ , m\_]:= (k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 + 6\text{Bio} \left(\frac{a}{h}\right) + 12 \left(\frac{a}{h}\right)^2;$$

$$\Delta T[k\_ , m\_]:= (T_0^+ - T^-) ee[k, m];$$

$$L[k\_ , m\_]:= (k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2;$$

$$Hi[k\_]:= 1 + \text{Sum} \left[ \frac{2hi[z]ai[z]}{ha} \left( \text{Sin} \left[ \frac{k\pi xi[z]}{a} \right] \right)^2, \{z, 1, ll, 1\} \right];$$

$$tHi[k\_ , m\_]:=$$

$$\left( (L[k, m])^2 + \text{Sum} \left[ \frac{2\beta i[z]}{aDd} \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^4 \left( \text{Sin} \left[ \frac{k\pi xi[z]}{a} \right] \right)^2 + \frac{2t\beta i[z]}{aDd} (k\pi)^2 \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \left( \text{Cos} \left[ \frac{k\pi xi[z]}{a} \right] \right)^2, \{z, 1, ll, 1\} \right] \right);$$

$$\mu v[k\_]:= \frac{\mu gg}{2\gamma h} * \frac{1}{Hi[k]};$$

$$Kk[k\_ , m\_]:= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4ggDd}{\gamma ha^4} * \frac{tHi[k, m]}{Hi[k]} - \left( \frac{\mu gg}{\gamma h} * \frac{1}{Hi[k]} \right)^2};$$

$$Kkk:= \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\mu gg}{\gamma h} \right)^2 - \frac{4ggDd}{\gamma ha^4}};$$

$$E2[k\_ , m\_]:= 6\text{Bio} \frac{a}{h} \frac{\Delta T[k, m]}{S[k, m]};$$

$$E1[k_, m_] := \alpha \Delta T[k, m] \left( 1 - 6 \text{Bio} \frac{a}{h} \frac{1}{S[k, m]} \right);$$

$$E3[k_, m_] := 6 \text{Bio} \frac{a}{h} \frac{ee[k, m]}{S[k, m]} T_1^+;$$

$$q[k_, m_, i_] := 4 \frac{q_0 a^4 a_1 b_1}{\text{DdtHi}[k, m]} \frac{1}{ab} \text{Sin} \left[ \frac{k \pi x_1}{a} \right] \text{Sin} \left[ \frac{m \pi y_1}{b} \right];$$

$$A[k_, m_, i_] := \frac{(-1)^{i+1} (1+\nu) \alpha E3[k, m] L[k, m] a^2}{ht \text{Hi}[k, m]};$$

$$B[k_, m_, i_] := \frac{\frac{(-1)^i (1+\nu) \text{ggDd} \frac{L[k, m]}{\text{Hi}[k]} \alpha E3[k, m]}{h \gamma ha^2}}{\left( \frac{\beta S[k, m]}{a^2} \right)^2 - \frac{\mu \text{gg} \beta S[k, m]}{\gamma ha^2 \text{Hi}[k]} + \frac{\text{ggDd} \frac{t \text{Hi}[k, m]}{\text{Hi}[k]}}{\gamma ha^4}};$$

$$A3[k_, m_] := \frac{a^2 E2[k, m] (1+\nu) \alpha L[k, m]}{ht \text{Hi}[k, m]};$$

$$B3[k_, m_] := \frac{\frac{(1+\nu) \text{ggDd} \frac{L[k, m]}{\text{Hi}[k]} \alpha E1[k, m]}{h \gamma ha^2}}{\left( \frac{\beta S[k, m]}{a^2} \right)^2 - \frac{\mu \text{gg} \beta S[k, m]}{\gamma ha^2 \text{Hi}[k]} + \frac{\text{ggDd} \frac{t \text{Hi}[k, m]}{\text{Hi}[k]}}{\gamma ha^4}};$$

2. Решение систем уравнений для определения  $F_1, F_2, D_1, D_2, C^1, C^2$ .

$$\{F1[tt_, k_, m_, i_], F2[tt_, k_, m_, i_]\} =$$

$$\text{LinearSolve} [\{ \{ \text{Sin}[\text{Kk}[k, m] \text{tt}] e^{-\mu v \text{tt}}, \text{Cos}[\text{Kk}[k, m] \text{tt}] e^{-\mu v \text{tt}} \},$$

$$\left\{ \text{Cos}[\text{Kk}[k, m] \text{tt}] e^{-\mu v \text{tt}} - \frac{\mu v}{\text{Kk}[k, m]} \text{Sin}[\text{Kk}[k, m] \text{tt}] e^{-\mu v \text{tt}}, \right. \\ \left. - \text{Sin}[\text{Kk}[k, m] \text{tt}] e^{-\mu v \text{tt}} - \frac{\mu v}{\text{Kk}[k, m]} \text{Cos}[\text{Kk}[k, m] \text{tt}] e^{-\mu v \text{tt}} \right\} \},$$

$$\left\{ -A[k, m, i] - B[k, m, i], \frac{\beta S[k, m]}{a^2 \text{Kk}[k, m]} B[k, m, i] \right\};$$

$$\text{Simplify}[F1[tt, k, m, i]]$$

$$\text{Simplify}[F2[tt, k, m, i]]$$

$$D1[tt_, k_, m_, i_] := (-1)^i q[k, m, i] \left( \text{Sin}[\text{Kk}[k, m] \text{tt}] + \frac{\mu v [k]}{\text{Kk}[k, m]} \text{Cos}[\text{Kk}[k, m] \text{tt}] \right);$$

$$D2[tt_, k_, m_, i_] := (-1)^i q[k, m, i] \left( \text{Cos}[\text{Kk}[k, m] \text{tt}] - \frac{\mu v [k]}{\text{Kk}[k, m]} \text{Sin}[\text{Kk}[k, m] \text{tt}] \right);$$

$$F1[tt_, k_, m_, i_] :=$$

$$-\frac{1}{a^2 \text{Kk}[k, m]}$$

$$\left( a^2 A[k, m, i] (\mu v [k] \text{Cos}[\text{ttKk}[k, m]] + \text{Kk}[k, m] \text{Sin}[\text{ttKk}[k, m]]) + \right.$$

$$B[k, m, i]$$

$$\left. \left( -\beta \text{Cos}[\text{ttKk}[k, m]] S[k, m] + a^2 (\mu v [k] \text{Cos}[\text{ttKk}[k, m]] + \text{Kk}[k, m] \text{Sin}[\text{ttKk}[k, m]]) \right) \right);$$

$$F2[tt_, k_, m_, i_] :=$$

$$\frac{1}{a^2 \text{Kk}[k, m]} \left( -a^2 A[k, m, i] (\text{Cos}[\text{ttKk}[k, m]] \text{Kk}[k, m] - \mu v [k] \text{Sin}[\text{ttKk}[k, m]]) - \right.$$

$$B[k, m, i] \left( a^2 \text{Cos}[\text{ttKk}[k, m]] \text{Kk}[k, m] + (-a^2 \mu v [k] + \beta S[k, m]) \text{Sin}[\text{ttKk}[k, m]] \right) \right);$$

$$C1[k_, m_] := \frac{\beta S[k, m]}{a^2 Kk[k, m]} B3[k, m] - \frac{\mu v[k]}{Kk[k, m]} (A3[k, m] + B3[k, m]);$$

$$C2[k_, m_] := - (A3[k, m] + B3[k, m]);$$

3. составление функции прогиба и построение ее графиков.

$$w1[t_, k_, m_] := e^{-\mu v[k]t} (C1[k, m] \text{Sin}[Kk[k, m]t] + C2[k, m] \text{Cos}[Kk[k, m]t]) + A3[k, m] +$$

$$B3[k, m] e^{\frac{-\beta S[k, m]}{a^2} t} +$$

$$((D1[t1, k, m, 1] \text{Sin}[Kk[k, m]t] + D2[t1, k, m, 1] \text{Cos}[Kk[k, m]t]) e^{-\mu v[k](t-t1)} + q[k, m, 1])$$

$$\text{HeavisideTheta}[t - t1] +$$

$$((D1[t2, k, m, 2] \text{Sin}[Kk[k, m]t] + D2[t2, k, m, 2] \text{Cos}[Kk[k, m]t]) e^{-\mu v[k](t-t2)} - q[k, m, 2])$$

$$\text{HeavisideTheta}[t - t2] +$$

$$((F1[t1, k, m, 1] \text{Sin}[Kk[k, m]t] + F2[t1, k, m, 1] \text{Cos}[Kk[k, m]t]) e^{-\mu v[k](t-t1)} +$$

$$A[k, m, 1] + B[k, m, 1] e^{\frac{-\beta S[k, m]}{a^2} (t-t1)}) \text{HeavisideTheta}[t - t1] +$$

$$((F1[t2, k, m, 2] \text{Sin}[Kk[k, m]t] + F2[t2, k, m, 2] \text{Cos}[Kk[k, m]t]) e^{-\mu v[k](t-t2)} +$$

$$A[k, m, 2] + B[k, m, 2] e^{\frac{-\beta S[k, m]}{a^2} (t-t2)}) \text{HeavisideTheta}[t - t2];$$

$$W[x_, y_, t_] := \text{Sum} [\text{Sum} [w1[t, k, m] \text{Sin} [\frac{k\pi x}{a}], \{k, 1, 5, 1\}] \text{Sin} [\frac{m\pi y}{b}], \{m, 1, 5, 1\}];$$

$$g15[t_] := \text{Plot}[W[x1, y1, t], \{t, 0.9, 1.9\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Black}, \text{PlotRange} \rightarrow \{-.0005, .006\}];$$

$$g51 := \text{Plot3D}[W[x, y, 1.0025], \{x, 0, a\}, \{y, 0, b\}, \text{PlotLabel} \rightarrow w[x, y, 1.0025],$$

$$\text{PlotRange} \rightarrow \{-0.0001, .00025\}, \text{PerformanceGoal} \rightarrow \text{"Quality"}];$$

$$g52 := \text{Plot3D}[W[x, y, 1.0053], \{x, 0, a\}, \{y, 0, b\}, \text{PlotLabel} \rightarrow w[x, y, 1.0053],$$

$$\text{PerformanceGoal} \rightarrow \text{"Quality"}];$$

$$g1 := \text{Plot}[W[a/2, y, 1.0025], \{y, 0, b\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Green}, \text{PlotRange} \rightarrow \{-.8, 3\}];$$

$$g2 := \text{Plot}[W[a/2, y, 2], \{y, 0, b\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Red}, \text{PlotRange} \rightarrow \{-.8, 3\}];$$

$$\text{Show}[g1, g2]$$

```
g1x:=Plot[W[x, b/2, 1.0025], {x, 0, a}, PlotStyle → Green, PlotRange → {-2.2, .7}];
g2x:=Plot[W[x, b/2, 2], {x, 0, a}, PlotStyle → Red, PlotRange → {-2, .7}];
Show[g1x, g2x]
```

```
ListAnimate[Table[Show[{g5[t]}, PlotRange → {{0, a}, {0, b}, {0, 100}}], {t, 0, 11, 0.05}]]
```

```
g3:=Plot[W[a/2, y, 1.05], {y, 0, b}, PlotStyle → Blue, PlotRange → {-0.01, .025}];
g4:=Plot[W[a/2, y, 1.08], {y, 0, b}, PlotStyle → Gray, PlotRange → {-0.01, .025}];
g5:=Plot[W[a/2, y, 1.09], {y, 0, b}, PlotStyle → Yellow, PlotRange → {-0.01, .025}];
g6:=Plot[W[a/2, y, 1.099], {y, 0, b}, PlotStyle → Brown, PlotRange → {-0.01, .025}];
Show[g3, g4, g5, g6]
```



## Приложение Д

Вывод уравнений системы (2.31).

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \\
 & \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 A_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \\
 & 2 \left(\nu_2 + 2\frac{D_k}{D_1}\right) \left[ \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 A_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right] + \\
 & + \frac{E_2}{E_1} \left[ \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^4 A_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right] + \\
 & + \frac{E_2}{E_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 \Phi_{3i} a_i \left[ \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^4 A_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right] \delta(x - x_i) + \\
 & + p_0 \frac{\varkappa M}{D_1} \left[ A_{11} \frac{\pi}{b} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + A_{12} \frac{2\pi}{b} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \right] - \\
 & - \frac{B_2}{D_1} \alpha_2 \theta_0 (1 - \nu_1 \nu_2) \left[ \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 A_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right] - \\
 & - \sum_{i=1}^n \frac{B_{2i}}{D_1} \alpha_2 \theta_0 (1 - \nu_1 \nu_2) a_i \left[ \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 A_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \right] \delta(x - x_i) = 0. \tag{Д.1}
 \end{aligned}$$

Преобразуем

$$\frac{B_2}{D_1} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{12(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1 h^2} = \frac{E_1}{E_2} \frac{12}{h^2},$$

$$\frac{B_{2i}}{D_1} = \frac{E_2 h_i}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{12(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1 h^2} = \frac{E_1}{E_2} \frac{h_i}{h} \frac{12}{h^2} = \frac{B_2}{D_1} \frac{h_i}{h},$$

Уравнение (Д.1) умножим на  $\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy$  и интегрируем  $\int_0^a \int_0^b$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \frac{a}{2} \frac{b}{2} + 2 \left(\nu_2 + 2\frac{D_k}{D_1}\right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \frac{a}{2} \frac{b}{2} + \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \frac{a}{2} \frac{b}{2} + \right. \\
 & + \frac{E_2}{E_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 \Phi_{3i} a_i \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \frac{b}{2} \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} - \frac{B_2}{D_1} \alpha_2 \theta_0 (1 - \nu_1 \nu_2) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \frac{a}{2} \frac{b}{2} - \\
 & \left. - \sum_{i=1}^n \frac{B_{2i}}{D_1} \alpha_2 \theta_0 (1 - \nu_1 \nu_2) a_i \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} \right] A_{11} - \\
 & - p_0 \frac{\varkappa M}{D_1} \frac{2\pi}{b} \frac{a}{2} \frac{b}{3\pi} A_{12} = 0.
 \end{aligned}$$

Уравнение (Д.1) умножим на  $\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} dx dy$  и интегрируем  $\int_0^a \int_0^b$

$$\begin{aligned} & \left[ \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \frac{a}{2} \frac{b}{2} + 2 \left(\nu_2 + 2\frac{D_k}{D_1}\right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 \frac{a}{2} \frac{b}{2} + \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{2\pi}{b}\right)^4 \frac{a}{2} \frac{b}{2} + \right. \\ & + \frac{E_2}{E_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 \Phi_{3i} a_i \left(\frac{2\pi}{b}\right)^4 \frac{b}{2} \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} - \frac{B_2}{D_1} \alpha_2 \theta_0 (1 - \nu_1 \nu_2) \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 \frac{a}{2} \frac{b}{2} - \\ & \left. - \sum_{i=1}^n \frac{B_{2i}}{D_1} \alpha_2 \theta_0 (1 - \nu_1 \nu_2) a_i \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} \right] A_{12} + \\ & + p_0 \frac{\nu M}{D_1} \frac{2\pi}{b} \frac{a}{2} \frac{4}{3} \frac{b}{\pi} A_{11} = 0. \end{aligned}$$

## Графики зависимости относительной скорости потока от параметра демпфирования

В случае 1  $\nu_2 = 0,12$ ,  $E_1 = 3,05 \cdot 10^5 \frac{\text{КГ}}{\text{СМ}^2}$ ,  $E_2 = 1,88 \cdot 10^5 \frac{\text{КГ}}{\text{СМ}^2}$ ,  $G = 0,49 \cdot 10^5 \frac{\text{КГ}}{\text{СМ}^2}$   
 В случае 2  $\nu_1 = 0,12$ ,  $E_1 = 1,88 \cdot 10^5 \frac{\text{КГ}}{\text{СМ}^2}$ ,  $E_2 = 3,05 \cdot 10^5 \frac{\text{КГ}}{\text{СМ}^2}$ ,  $G = 0,49 \cdot 10^5 \frac{\text{КГ}}{\text{СМ}^2}$

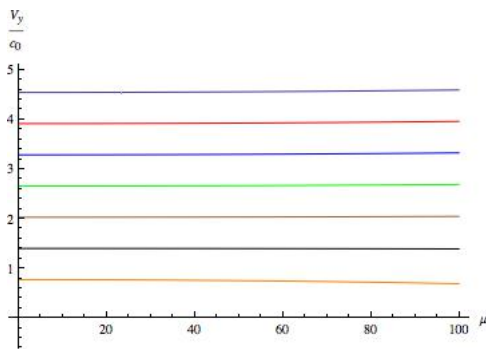


Рисунок Д.1 — Случай 1.  $n = 0$

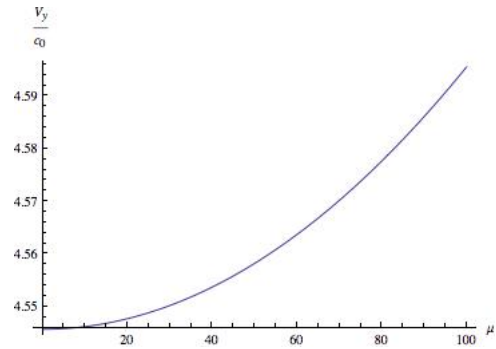


Рисунок Д.2 — Случай 1.  $n = 0$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 0$

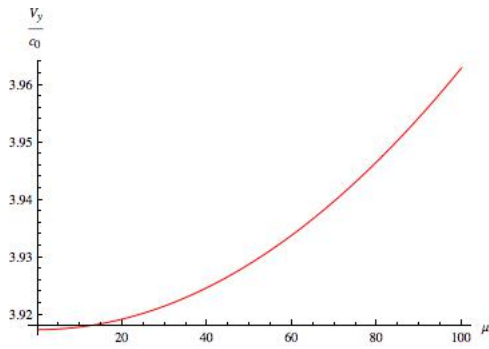


Рисунок Д.3 — Случай 1.  $n = 0$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 1$

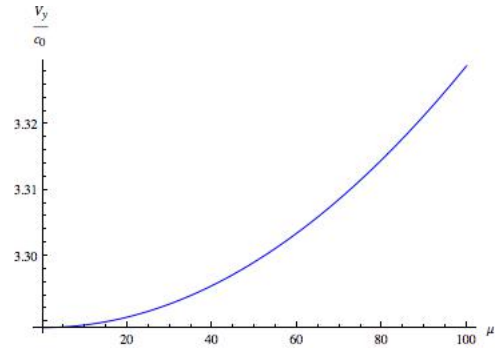


Рисунок Д.4 — Случай 1.  $n = 0$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 2$

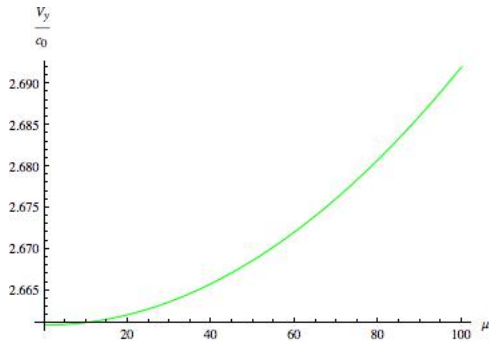


Рисунок Д.5 — Случай 1.  $n = 0$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 3$

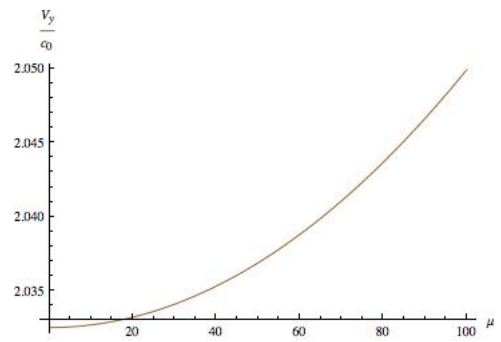


Рисунок Д.6 — Случай 1.  $n = 0$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 4$

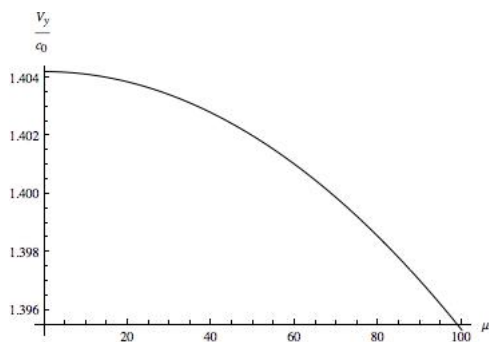


Рисунок Д.7 — Случай 1.  $n = 0$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 5$

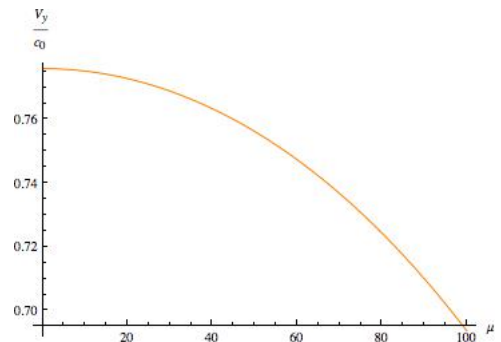


Рисунок Д.8 — Случай 1.  $n = 0$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 6$

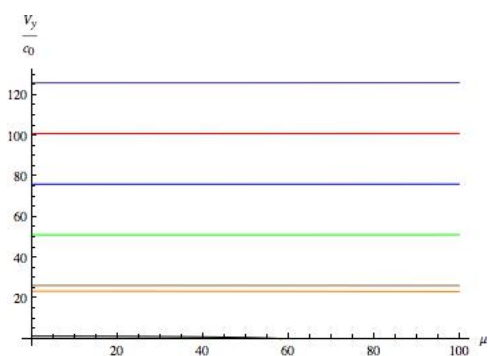


Рисунок Д.9 — Случай 1.  $n = 1$ ,  $\frac{h_i}{h} = 3$

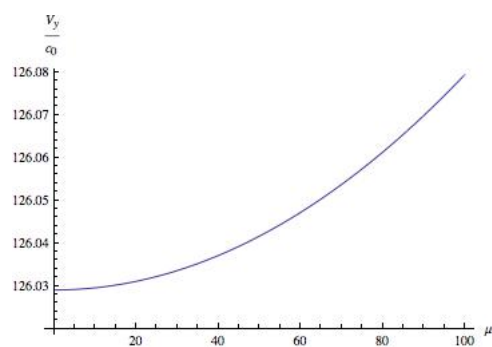


Рисунок Д.10 — Случай 1.  $n = 1$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 0$

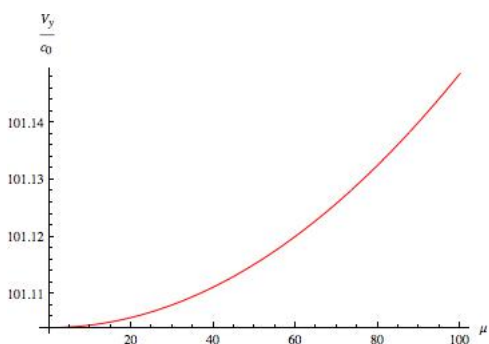


Рисунок Д.11 — Случай 1.  $n = 1$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 1$

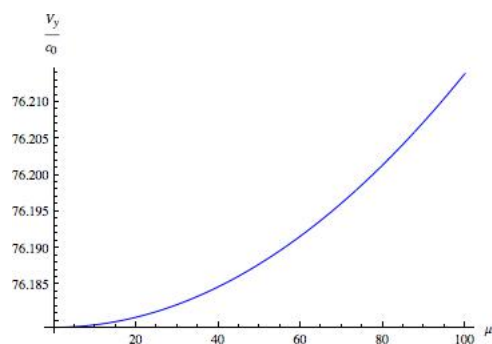


Рисунок Д.12 — Случай 1.  $n = 1$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 2$

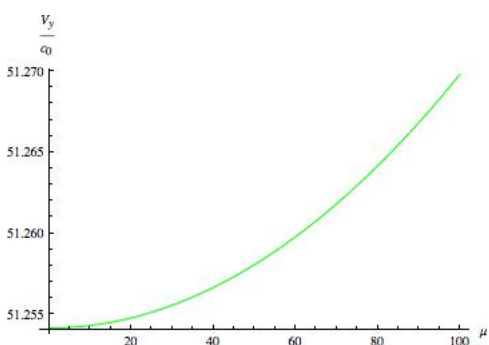


Рисунок Д.13 — Случай 1.  $n = 1$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 3$

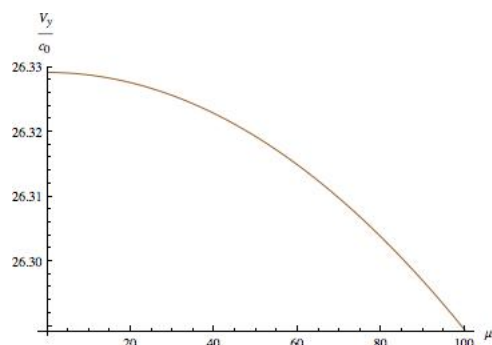


Рисунок Д.14 — Случай 1.  $n = 1$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 4$

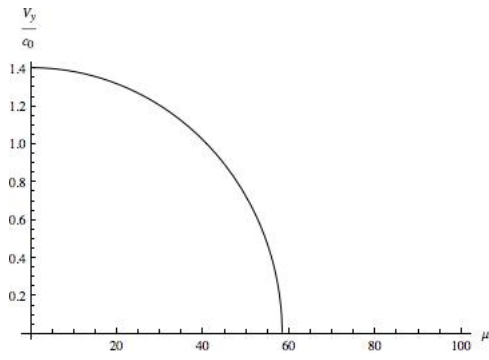


Рисунок Д.15 — Случай 1.  $n = 1$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 5$

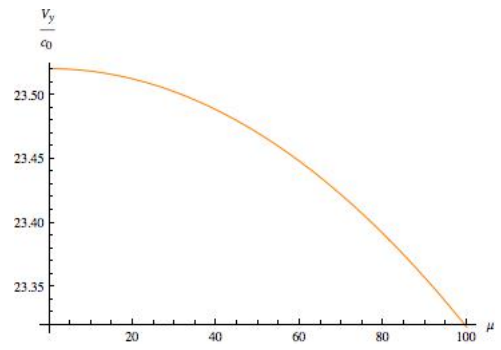


Рисунок Д.16 — Случай 1.  $n = 1$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 6$

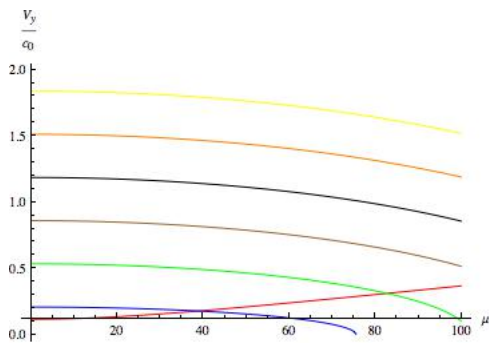


Рисунок Д.17 — Случай 2.  $n = 0$

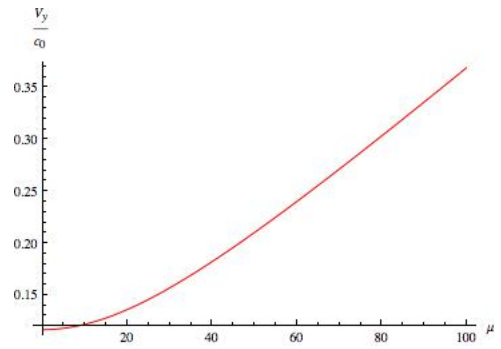


Рисунок Д.18 — Случай 2.  $n = 0$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 0$

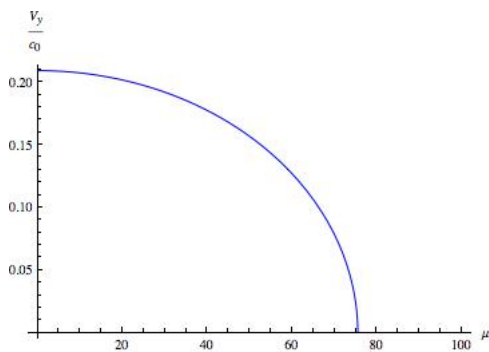


Рисунок Д.19 — Случай 2.  $n = 0$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 1$

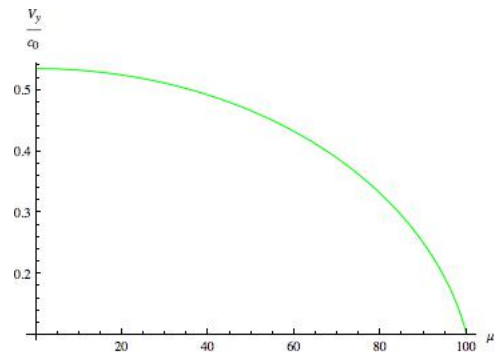


Рисунок Д.20 — Случай 2.  $n = 0$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 2$

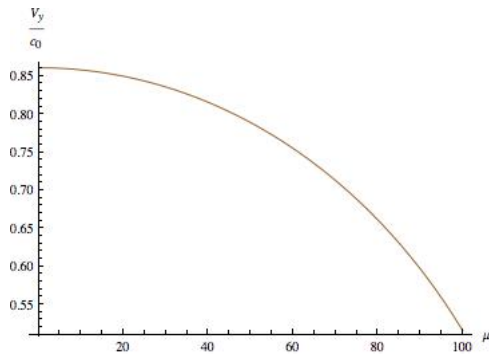


Рисунок Д.21 — Случай 2.  $n = 0$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 3$

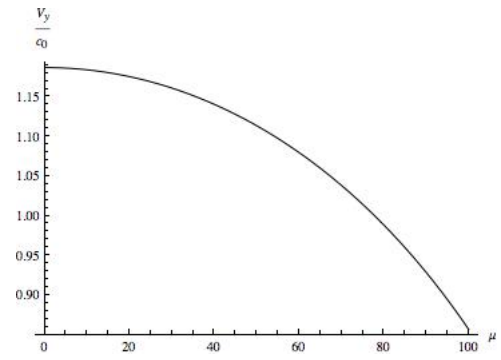


Рисунок Д.22 — Случай 2.  $n = 0$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 4$

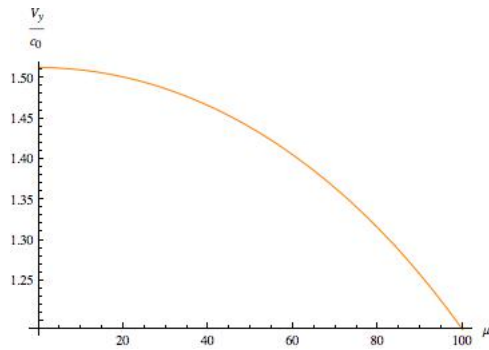


Рисунок Д.23 — Случай 2.  $n = 0$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 5$

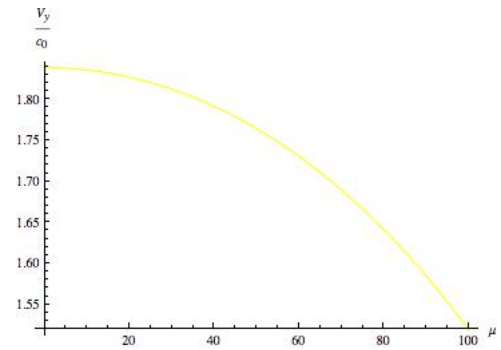


Рисунок Д.24 — Случай 2.  $n = 0$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 6$

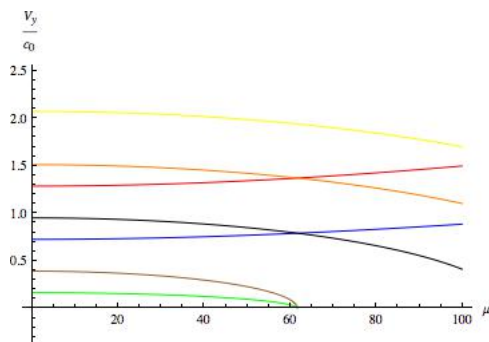


Рисунок Д.25 — Случай 2.  $n = 1$ ,  $\frac{h_i}{h} = 3$

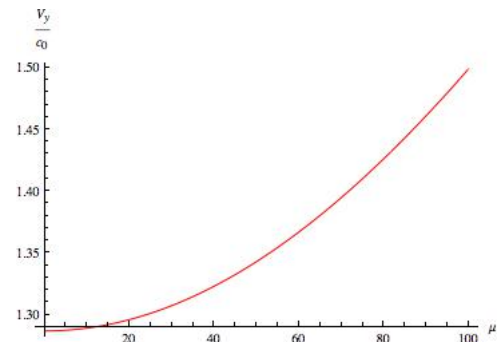


Рисунок Д.26 — Случай 2.  $n = 1$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 0$

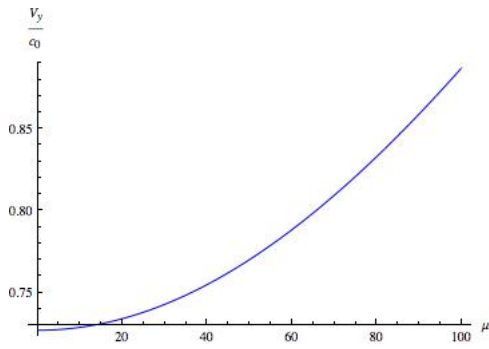


Рисунок Д.27 — Случай 2.  $n = 1$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 1$

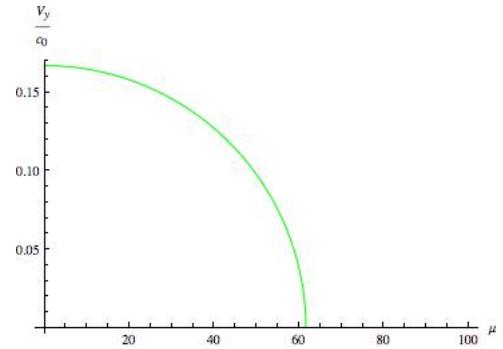


Рисунок Д.28 — Случай 2.  $n = 1$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 2$

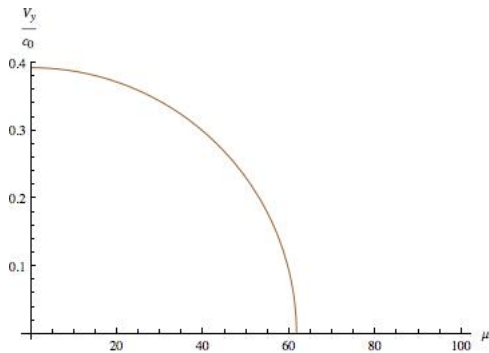


Рисунок Д.29 — Случай 2.  $n = 1$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 3$

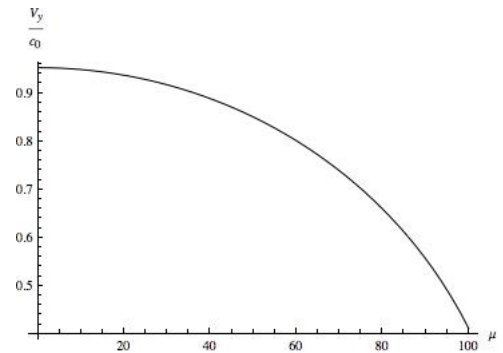


Рисунок Д.30 — Случай 2.  $n = 1$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 4$

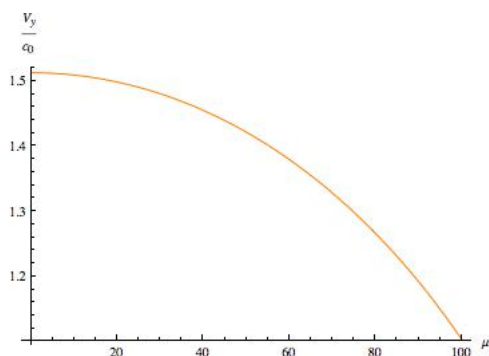


Рисунок Д.31 — Случай 2.  $n = 1$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 5$

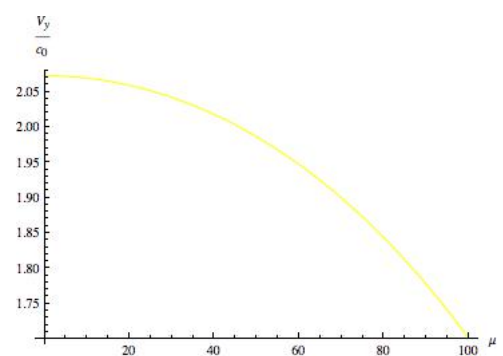


Рисунок Д.32 — Случай 2.  $n = 1$ ,  $\frac{\theta_0}{\theta_{кр}} = 6$

### Исследование малых колебаний

Если предположить, что результатом возмущений для ортотропной нагретой

ГПН являются малые колебания с частотой  $\omega$  около положения равновесия, то прогиб можно представить в виде

$$w(x, y, t) = \xi(x, y) \sin(\omega t + \beta).$$

Функцию  $\xi(x, y)$  в случае шарнирного опирания

$$\xi = 0, \quad \xi_{,11} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = a;$$

$$\xi = 0, \quad \xi_{,22} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b,$$

зададим в виде двойного тригонометрического ряда с постоянными коэффициентами

$$\xi(x, y) = \sum_{k,m} A_{km} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Коэффициенты ряда, на основании процедуры Галеркина во втором приближении, определяются как решения линейной однородной системы:

$$H_{11} \left( 1 - \frac{\theta_0}{\theta_{kp}} - \frac{p_1}{H_{11}} \Omega^2 \right) A_{11} - d_{12} A_{12} = 0;$$

(Д.4)

$$\frac{d_{12}}{4} A_{11} + H_{11} \left( 1 + \frac{p_1}{H_{11}} - \frac{\theta_0}{\theta_{kp}} - \frac{p_1}{H_{11}} \frac{\Omega^2}{4} \right) A_{12} = 0.$$

Здесь  $\Omega^2 = \frac{\omega^2 \gamma}{gD} \left( \frac{a}{\pi} \right)^4$ .

Из равенства нулю определителя системы (Д.4) следует уравнение связывающее параметры:  $\frac{\theta_0}{\theta_{kp}}, M, \Omega, \frac{h_i}{h}, \frac{E_2}{E_1}$ .

$$d_{12} = 2H_{11} \sqrt{\left( \Omega^2 \frac{p_1}{H_{11}} + \frac{\theta_0}{\theta_{kp}} - 1 \right) \left( 1 + \frac{p_1}{H_{11}} - \frac{\theta_0}{\theta_{kp}} - \frac{p_1}{H_{11}} \frac{\Omega^2}{4} \right)}. \quad (\text{Д.5})$$

$d_{12}$  определяется выражением (2.32).

$$\begin{aligned} \left( \frac{\theta_0}{\theta_{kp}} \right)^* &= \frac{1 - \Omega^2 \frac{p_1}{H_{11}} + 1 + \frac{p_1}{H_{11}} - \Omega^2 \frac{p_1}{4H_{11}}}{2} = \\ &= 1 + \frac{p_1}{H_{11}} \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{8} \Omega^2 \right). \end{aligned}$$

$$d_{21}^* = 2p_1 \sqrt{\left( \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \Omega^2 \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \Omega^2 \right)}. \quad (\text{Д.6})$$



## Приложение Е

Построение графиков функции прогиба для задачи о геометрически нерегулярной пластинке, находящейся под действием быстро возрастающих температурных и силовых воздействий на границе

Ребро в точке  $y = y_2$  в интервале действия краевых условий.

1. Входные данные

$$a:=100;$$

$$b:=2a;$$

$$a1:=0/100;$$

$$h1:=0.02a;$$

$$y1:=\frac{b}{4};$$

$$y2:=\frac{2b}{3};$$

$$\nu:=0.3;$$

$$h:=0.01a;$$

$$\alpha:=25 \cdot 10^{-6};$$

$$Ee:=0.7210^6;$$

$$\nu:=0.32;$$

$$Dd:=\frac{Eeh^3}{12(1-\nu^2)};$$

$$f[y\_]:= \frac{(y-y1)^4}{24b^4};$$

$$\theta10:=\frac{50}{f[b]};$$

$$Mm:=\frac{500}{f[b]};$$

$$M\theta:=\frac{\alpha(1+\nu)*\theta10*Dd+Mm*h}{b^4hDd};$$

$$aa[k\_]:= \frac{2(1-\text{Cos}[k\pi])}{k\pi};$$

2. Решение температурной задачи.

Нахождение неизвестных в коэффициенте при функции Хевисайда

$$\{F_1[k\_], F_2[k\_]\} = \text{LinearSolve}[\{\{\text{Sinh}[k\pi y_1/a], \text{Cosh}[k\pi y_1/a]\}, \{\text{Cosh}[k\pi y_1/a], \text{Sinh}[k\pi y_1/a]\}\}, \left\{\frac{-\theta_{10} aa[k]}{b^4} \left(\frac{a}{k\pi}\right)^4, 0\right\}\};$$

$$f[k\_ , y1\_ , y\_]:= F_1[k]\text{Sinh}\left[\frac{k\pi y}{a}\right] + F_2[k]\text{Cosh}\left[\frac{k\pi y}{a}\right] + \left(\frac{a}{k\pi}\right)^2 * \frac{\theta_{10}aa[k]}{2b^4}(y - y1)^2 + \frac{\theta_{10}aa[k]}{b^4} \left(\frac{a}{k\pi}\right)^4$$

Нахождение постоянных интегрирования. Краевые условия  $y = 0 \theta_1 = 0$ ,  $y = b \theta_1 = \frac{\theta_1^0}{24b^4} (b - y_1)^4$ .

$$\{C_1[k\_], C_2[k\_]\} = \text{LinearSolve}[\{\{0, 1\}, \{\text{Sinh}[k\pi b/a], \text{Cosh}[k\pi b/a]\}\}, \{0, -f[k, y1, b]\}];$$

Составим температурную функцию:

$$\theta_1[x\_ , y\_]:= \text{Sum}\left[\left(C_1[k]\text{Sinh}\left[\frac{k\pi y}{a}\right] + C_2[k]\text{Cosh}\left[\frac{k\pi y}{a}\right]\right) \text{Sin}\left[\frac{k\pi x}{a}\right], \{k, 1, 1, 1\}\right];$$

$$\theta_2[x\_ , y\_]:= \text{Sum}\left[\left(C_1[k]\text{Sinh}\left[\frac{k\pi y}{a}\right] + C_2[k]\text{Cosh}\left[\frac{k\pi y}{a}\right] + f[k, y1, y]\right) \text{Sin}\left[\frac{k\pi x}{a}\right], \{k, 1, 1, 1\}\right];$$

$$\frac{\theta_{10}}{24b^4}(y - y1)^4;$$

Построение графиков температурной функции.

$$g7:=\text{Plot}[\theta_1[a/2, y], \{y, 0, y1\}];$$

$$g8:=\text{Plot}[\theta_2[a/2, y], \{y, y1, b\}];$$

$$\text{Show}[\{g7, g8\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{-0.00001, z\}]$$

$$g5:=\text{Plot3D}[\theta_1[x, y], \{x, 0, a\}, \{y, 0, y1\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Yellow}];$$

$$g6:=\text{Plot3D}[\theta_2[x, y], \{x, 0, a\}, \{y, y1, b\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Yellow}];$$

$$\text{Show}[\{g5, g6\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{0, a\}, \{0, b\}, \{-0.0001, z\}\}]$$

2. Решение упругой задачи. Решение системы линейных дифференциальных уравнений для нахождения констант в

$$\{Ff_1[k\_], Ff_2[k\_], Ff_3[k\_], Ff_4[k\_]\} =$$

$$\text{LinearSolve}[\{\{\text{Sinh}[k\pi y_1/a], \text{Cosh}[k\pi y_1/a], k\pi y_1/a \text{Sinh}[k\pi y_1/a], k\pi y_1/a \text{Cosh}[k\pi y_1/a]\},$$

$\{\text{Cosh}[k\pi y_1/a], \text{Sinh}[k\pi y_1/a], \text{Sinh}[k\pi y_1/a] + k\pi y_1/a \text{Cosh}[k\pi y_1/a],$   
 $\text{Cosh}[k\pi y_1/a] + k\pi y_1/a \text{Sinh}[k\pi y_1/a]\},$   
 $\{\text{Sinh}[k\pi y_1/a], \text{Cosh}[k\pi y_1/a], 2\text{Cosh}[k\pi y_1/a] + k\pi y_1/a \text{Sinh}[k\pi y_1/a],$   
 $2\text{Sinh}[k\pi y_1/a] + k\pi y_1/a \text{Cosh}[k\pi y_1/a]\},$   
 $\{\text{Cosh}[k\pi y_1/a], \text{Sinh}[k\pi y_1/a], 3\text{Sinh}[k\pi y_1/a] + k\pi y_1/a \text{Cosh}[k\pi y_1/a],$   
 $3\text{Cosh}[k\pi y_1/a] + k\pi y_1/a \text{Sinh}[k\pi y_1/a]\}, \{-3(a/(k\pi))^6 \text{aa}[k] \text{M}\theta, 0, -2(a/(k\pi))^6 \text{aa}[k] \text{M}\theta\}$   
 $\text{Simplify} [\text{Ff}_1[k] \text{Sinh}[k\pi y/a] + \text{Ff}_2[k] \text{Cosh}[k\pi y/a] + \text{Ff}_3[k] k\pi y/a \text{Sinh}[k\pi y/a] +$   
 $\text{Ff}_4[k] k\pi y/a \text{Cosh}[k\pi y/a]]$   
 $\{\text{Fff}_1 [\text{Cc}_1[k\_], \text{Cc}_2[k\_], \text{Cc}_3[k\_], \text{Cc}_4[k\_]], \text{Fff}_2 [\text{Cc}_1[k\_], \text{Cc}_2[k\_], \text{Cc}_3[k\_], \text{Cc}_4[k\_]],$   
 $\text{Fff}_3 [\text{Cc}_1[k\_], \text{Cc}_2[k\_], \text{Cc}_3[k\_], \text{Cc}_4[k\_]], \text{Fff}_4 [\text{Cc}_1[k\_], \text{Cc}_2[k\_], \text{Cc}_3[k\_], \text{Cc}_4[k\_]]\} =$   
 $\text{LinearSolve}[\{\{\text{Sinh}[k\pi y_2/a], \text{Cosh}[k\pi y_2/a], k\pi y_2/a \text{Sinh}[k\pi y_2/a], k\pi y_2/a \text{Cosh}[k\pi y_2/a]\},$   
 $\{\text{Cosh}[k\pi y_2/a], \text{Sinh}[k\pi y_2/a], \text{Sinh}[k\pi y_2/a] + k\pi y_2/a \text{Cosh}[k\pi y_2/a],$   
 $\text{Cosh}[k\pi y_2/a] + k\pi y_2/a \text{Sinh}[k\pi y_2/a]\},$   
 $\{\text{Sinh}[k\pi y_2/a], \text{Cosh}[k\pi y_2/a], 2\text{Cosh}[k\pi y_2/a] + k\pi y_2/a \text{Sinh}[k\pi y_2/a],$   
 $2\text{Sinh}[k\pi y_2/a] + k\pi y_2/a \text{Cosh}[k\pi y_2/a]\},$   
 $\{\text{Cosh}[k\pi y_2/a], \text{Sinh}[k\pi y_2/a], 3\text{Sinh}[k\pi y_2/a] + k\pi y_2/a \text{Cosh}[k\pi y_2/a],$   
 $3\text{Cosh}[k\pi y_2/a] + k\pi y_2/a \text{Sinh}[k\pi y_2/a]\},$   
 $\{0, 0, 0, \frac{-a^1(h_1)^3}{h^3} (\frac{k\pi}{a}) \text{aa}[k]$   
 $((\text{Cc}_1[k] \text{Sinh}[k\pi y_2/a] + \text{Cc}_2[k] \text{Cosh}[k\pi y_2/a] + \text{Cc}_3[k] k\pi y_2/a \text{Sinh}[k\pi y_2/a] +$   
 $\text{Cc}_4[k] k\pi y_2/a \text{Cosh}[k\pi y_2/a]) +$   
 $(\text{Ff}_1[k] \text{Sinh}[k\pi y_2/a] + \text{Ff}_2[k] \text{Cosh}[k\pi y_2/a] + \text{Ff}_3[k] k\pi y_2/a \text{Sinh}[k\pi y_2/a] +$   
 $\text{Ff}_4[k] k\pi y_2/a \text{Cosh}[k\pi y_2/a] + (\frac{a}{k\pi})^4 \text{aa}[k] \text{M}\theta (y_2 - y_1)^2 + 3 (\frac{a}{k\pi})^6 \text{aa}[k] \text{M}\theta) +$   
 $(\frac{a}{k\pi})^2 \text{aa}[k] \text{M}\theta (y_2 - y_1)^4 / 24 + q/\text{Dd} (\frac{a}{k\pi})^4 \text{aa}[k])\}];$   
 $\text{FullSimplify} [\text{Fff}_1 [\text{Cc}_1[k], \text{Cc}_2[k], \text{Cc}_3[k], \text{Cc}_4[k]]];$

FullSimplify [Fff<sub>2</sub> [Cc<sub>1</sub>[k], Cc<sub>2</sub>[k], Cc<sub>3</sub>[k], Cc<sub>4</sub>[k]]] ;

FullSimplify [Fff<sub>3</sub> [Cc<sub>1</sub>[k], Cc<sub>2</sub>[k], Cc<sub>3</sub>[k], Cc<sub>4</sub>[k]]] ;

FullSimplify [Fff<sub>4</sub> [Cc<sub>1</sub>[k], Cc<sub>2</sub>[k], Cc<sub>3</sub>[k], Cc<sub>4</sub>[k]]] ;

R<sub>1</sub>[k\_]:=0;

R<sub>2</sub>[k\_]:= - Ff<sub>1</sub>[k]Sinh[kπb/a] - Ff<sub>2</sub>[k]Cosh[kπb/a] - Ff<sub>3</sub>[k]kπb/aSinh[kπb/a]-  
Ff<sub>4</sub>[k]kπb/aCosh[kπb/a] - (a/kπ)<sup>4</sup> aa[k]Mθ(b - y1)<sup>2</sup> - 3 (a/kπ)<sup>6</sup> aa[k]Mθ - 1/24 (a/kπ)<sup>2</sup> aa[k]Mθ(b

R<sub>3</sub>[k\_]:=0;

R<sub>4</sub>[k\_]:= - Ff<sub>1</sub>[k](kπ/a)<sup>2</sup>Sinh[kπb/a] - Ff<sub>2</sub>[k](kπ/a)<sup>2</sup>Cosh[kπb/a]-  
Ff<sub>3</sub>[k](kπ/a)<sup>2</sup>(2Cosh[kπb/a] + kπb/aSinh[kπb/a])-  
Ff<sub>4</sub>[k](kπ/a)<sup>2</sup>(2Sinh[kπb/a] + kπb/aCosh[kπb/a]) - aa[k]2Mθ(a/(kπ))<sup>4</sup>-  
1/2aa[k]Mθ(b - y1)<sup>2</sup>(a/(kπ))<sup>2</sup> - 1/24aa[k]Mθ(b - y1)<sup>4</sup>;

sol =

Solve[

Cc<sub>2</sub>[k]==R<sub>1</sub>[k]&&Cc<sub>1</sub>[k]Sinh[kπb/a] + Cc<sub>2</sub>[k]Cosh[kπb/a] + Cc<sub>3</sub>[k]kπb/aSinh[kπb/a]+

Cc<sub>4</sub>[k]kπb/aCosh[kπb/a] + Fff<sub>1</sub> [Cc<sub>1</sub>[k], Cc<sub>2</sub>[k], Cc<sub>3</sub>[k], Cc<sub>4</sub>[k]] Sinh[kπb/a]+

Fff<sub>2</sub> [Cc<sub>1</sub>[k], Cc<sub>2</sub>[k], Cc<sub>3</sub>[k], Cc<sub>4</sub>[k]] Cosh[kπb/a]+

Fff<sub>3</sub> [Cc<sub>1</sub>[k], Cc<sub>2</sub>[k], Cc<sub>3</sub>[k], Cc<sub>4</sub>[k]] kπb/aSinh[kπb/a]+

Fff<sub>4</sub> [Cc<sub>1</sub>[k], Cc<sub>2</sub>[k], Cc<sub>3</sub>[k], Cc<sub>4</sub>[k]] kπb/aCosh[kπb/a]==R<sub>2</sub>[k]&&

Cc<sub>2</sub>[k](kπ/a)<sup>2</sup> + Cc<sub>3</sub>[k]2(kπ/a)<sup>2</sup>==R<sub>3</sub>[k]&&

Cc<sub>1</sub>[k]Sinh[kπb/a](kπ/a)<sup>2</sup> + Cc<sub>2</sub>[k]Cosh[kπb/a](kπ/a)<sup>2</sup>+

Cc<sub>3</sub>[k](kπ/a)<sup>2</sup>(2Cosh[kπb/a] + kπb/aSinh[kπb/a])+

Cc<sub>4</sub>[k](kπ/a)<sup>2</sup>(2Sinh[kπb/a] + kπ b/aCosh[kπb/a])+

Fff<sub>1</sub> [Cc<sub>1</sub>[k], Cc<sub>2</sub>[k], Cc<sub>3</sub>[k], Cc<sub>4</sub>[k]] (kπ/a)<sup>2</sup>Sinh[kπb/a]+

Fff<sub>2</sub> [Cc<sub>1</sub>[k], Cc<sub>2</sub>[k], Cc<sub>3</sub>[k], Cc<sub>4</sub>[k]] (kπ/a)<sup>2</sup>Cosh[kπb/a]+

$$\begin{aligned} & \text{Fff}_3 [\text{Cc}_1[k], \text{Cc}_2[k], \text{Cc}_3[k], \text{Cc}_4[k]] (k\pi/a)^2(2\text{Cosh}[k\pi b/a] + k\pi b/a\text{Sinh}[k\pi b/a]) + \\ & \text{Fff}_4 [\text{Cc}_1[k], \text{Cc}_2[k], \text{Cc}_3[k], \text{Cc}_4[k]] (k\pi/a)^2(2\text{Sinh}[k\pi b/a] + k\pi b/a\text{Cosh}[k\pi b/a]) = R_4[k], \\ & \{\text{Cc}_1[k], \text{Cc}_2[k], \text{Cc}_3[k], \text{Cc}_4[k]\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fff}_1[k] := & -\frac{1}{48a^3\text{Dd}h^3k^5\pi^5}a1h1^3aa[k] \left( -a\text{Cosh} \left[ \frac{k\pi y2}{a} \right] + k\pi y2\text{Sinh} \left[ \frac{k\pi y2}{a} \right] \right) \\ & (a^3aa[k] (72a^4\text{Dd}M\theta + 24a^2k^2\pi^2 (q + \text{Dd}M\theta(y1 - y2)^2) + \text{Dd}k^4M\theta\pi^4(y1 - y2)^4 + \\ & 12a^3\text{Dd}M\theta \left( -6a\text{Cosh} \left[ \frac{k\pi(y1-y2)}{a} \right] + k\pi(y1 - y2)\text{Sinh} \left[ \frac{k\pi(y1-y2)}{a} \right] \right)) + \\ & 24\text{Dd}k^6\pi^6 \left( \text{Sinh} \left[ \frac{k\pi y2}{a} \right] (a\text{Cc}_1[k] + k\pi y2\text{Cc}_3[k]) + \text{Cosh} \left[ \frac{k\pi y2}{a} \right] (a\text{Cc}_2[k] + k\pi y2\text{Cc}_4[k]) \right)); \\ \text{Fff}_2[k] := & \frac{1}{48a^3\text{Dd}h^3k^5\pi^5}a1h1^3aa[k] \left( k\pi y2\text{Cosh} \left[ \frac{k\pi y2}{a} \right] - a\text{Sinh} \left[ \frac{k\pi y2}{a} \right] \right) \\ & (a^3aa[k] (72a^4\text{Dd}M\theta + 24a^2k^2\pi^2 (q + \text{Dd}M\theta(y1 - y2)^2) + \text{Dd}k^4M\theta\pi^4(y1 - y2)^4 + \\ & 12a^3\text{Dd}M\theta \left( -6a\text{Cosh} \left[ \frac{k\pi(y1-y2)}{a} \right] + k\pi(y1 - y2)\text{Sinh} \left[ \frac{k\pi(y1-y2)}{a} \right] \right)) + \\ & 24\text{Dd}k^6\pi^6 \left( \text{Sinh} \left[ \frac{k\pi y2}{a} \right] (a\text{Cc}_1[k] + k\pi y2\text{Cc}_3[k]) + \text{Cosh} \left[ \frac{k\pi y2}{a} \right] (a\text{Cc}_2[k] + k\pi y2\text{Cc}_4[k]) \right)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fff}_3[k] := & \frac{1}{48a^2\text{Dd}h^3k^5\pi^5}a1h1^3aa[k]\text{Sinh} \left[ \frac{k\pi y2}{a} \right] \\ & (a^3aa[k] (72a^4\text{Dd}M\theta + 24a^2k^2\pi^2 (q + \text{Dd}M\theta(y1 - y2)^2) + \text{Dd}k^4M\theta\pi^4(y1 - y2)^4 + \\ & 12a^3\text{Dd}M\theta \left( -6a\text{Cosh} \left[ \frac{k\pi(y1-y2)}{a} \right] + k\pi(y1 - y2)\text{Sinh} \left[ \frac{k\pi(y1-y2)}{a} \right] \right)) + \\ & 24\text{Dd}k^6\pi^6 \left( \text{Sinh} \left[ \frac{k\pi y2}{a} \right] (a\text{Cc}_1[k] + k\pi y2\text{Cc}_3[k]) + \text{Cosh} \left[ \frac{k\pi y2}{a} \right] (a\text{Cc}_2[k] + k\pi y2\text{Cc}_4[k]) \right)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fff}_4[k] := & -\frac{1}{48a^2\text{Dd}h^3k^5\pi^5}a1h1^3aa[k]\text{Cosh} \left[ \frac{k\pi y2}{a} \right] \\ & (a^3aa[k] (72a^4\text{Dd}M\theta + 24a^2k^2\pi^2 (q + \text{Dd}M\theta(y1 - y2)^2) + \text{Dd}k^4M\theta\pi^4(y1 - y2)^4 + \\ & 12a^3\text{Dd}M\theta \left( -6a\text{Cosh} \left[ \frac{k\pi(y1-y2)}{a} \right] + k\pi(y1 - y2)\text{Sinh} \left[ \frac{k\pi(y1-y2)}{a} \right] \right)) + \\ & 24\text{Dd}k^6\pi^6 \left( \text{Sinh} \left[ \frac{k\pi y2}{a} \right] (a\text{Cc}_1[k] + k\pi y2\text{Cc}_3[k]) + \text{Cosh} \left[ \frac{k\pi y2}{a} \right] (a\text{Cc}_2[k] + k\pi y2\text{Cc}_4[k]) \right)); \end{aligned}$$

$$\text{CC}_1[k] = \text{Cc}_1[k];$$

$$\text{CC}_2[k] = \text{Cc}_2[k];$$

$$\text{CC}_3[k] = \text{Cc}_3[k];$$

$$\text{CC}_4[k] = \text{Cc}_4[k];$$

$$q:=0;$$

$$\text{Simplify} [\text{Fff}_1[k]\text{Sinh}[k\pi y/a] + \text{Fff}_2[k]\text{Cosh}[k\pi y/a] + \text{Fff}_3[k]k\pi y/a\text{Sinh}[k\pi y/a] +$$

FfF<sub>4</sub>[k]kπy/aCosh[kπy/a];

Simplify [CC<sub>1</sub>[k]Sinh[kπy/a] + CC<sub>2</sub>[k]Cosh[kπy/a] + CC<sub>3</sub>[k]kπy/aSinh[kπy/a]+  
CC<sub>4</sub>[k]kπy/aCosh[kπy/a]]

WW[x\_, y\_] :=

Sum [

(CC<sub>1</sub>[k]Sinh[kπy/a] + CC<sub>2</sub>[k]Cosh[kπy/a] + CC<sub>3</sub>[k]kπy/aSinh[kπy/a] + CC<sub>4</sub>[k]kπy/aCos

(Ff<sub>1</sub>[k]Sinh[kπy/a] + Ff<sub>2</sub>[k]Cosh[kπy/a] + Ff<sub>3</sub>[k]kπy/aSinh[kπy/a]+

Ff<sub>4</sub>[k]kπy/aCosh[kπy/a] + (a/kπ)<sup>4</sup> aa[k]Mθ(y - y1)<sup>2</sup> + 3 (a/kπ)<sup>6</sup> aa[k]Mθ) HeavisideTheta[y -

(FfF<sub>1</sub>[k]Sinh[kπy/a] + FfF<sub>2</sub>[k]Cosh[kπy/a] + FfF<sub>3</sub>[k]kπy/aSinh[kπy/a]+

FfF<sub>4</sub>[k]kπy/aCosh[kπy/a]) HeavisideTheta[y - y2]+

1/24 (a/kπ)<sup>2</sup> aa[k]Mθ(y - y1)<sup>4</sup>HeavisideTheta[y - y1] + q/Dd (a/kπ)<sup>4</sup> aa[k]) Sin[kπx/a], {k, 1, 1,

g1:=Plot3D[WW[x, y], {x, 0, a}, {y, 0, b}, PlotPoints -> {15, 30}, Mesh -> Full, PlotLabel -

g1

g3:=Plot[WW[a/2, y], {y, 0, b}];

g3

## Приложение Ж

### Алгебраические действия над выражениями содержащими функции Хевисайда

Введем обозначения  $H_i = H(x - x_i)$ , для определенности  $x_{i+1} > x_i$ .

Алгебраические действия над выражениями содержащими функции Хевисайда ( $\Phi X$ ) с целью выноса  $\Phi X$  из под знака функции, т.е.

$$F(f(x, x_i)H_i) = \tilde{F}(\tilde{f}(x, x_i))H_i. \quad (\text{Ж.1})$$

Интерес представляют две структуры:

1.

$$a_1 + \sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i)H_i;$$

2.

$$a_1 + \sum_{i=1}^n (b_i + c_i)H_i.$$

Для первой структуры верны равенства:

1.

$$\langle a + (b - a)H_1 \rangle \pm \langle c + (d - c)H_1 \rangle = (a \pm c) + ((b \pm c) - (a \pm c))H_1; \quad (\text{Ж.2})$$

2.

$$\langle a + (b - a)H_1 \rangle \cdot \langle c + (d - c)H_1 \rangle = ac + (bc - ac)H_1; \quad (\text{Ж.3})$$

3. Если  $c \neq 0$ ,  $d \neq 0$ , тогда

$$\frac{\langle a + (b - a)H_1 \rangle}{\langle c + (d - c)H_1 \rangle} = \frac{a}{c} + \left( \frac{b}{d} - \frac{a}{c} \right) H_1; \quad (\text{Ж.4})$$

4. (a)

$$\langle a + (b - a)H_1 \rangle^2 = a^2 + (b^2 - a^2)H_1; \quad (\text{Ж.5})$$

(b)

$$\langle a + (b - a)H_1 \rangle^n = a^n + (b^n - a^n)H_1, \quad n \in N; \quad (\text{Ж.6})$$

5. Если  $a \geq 0, b \geq 0$ , тогда

$$\sqrt{\langle a + (b - a) H_1 \rangle} = \sqrt{a} + (\sqrt{b} - \sqrt{a}) H_1. \quad (\text{Ж.7})$$

Эти операции распространяются на аналогичные выражения содержащие функции Хевисайда в нескольких слагаемых.

6.

$$\begin{aligned} \langle a_1 + (b_1 - a_1) H_1 + (c_1 - b_1) H_2 \rangle \cdot \langle a_2 + (b_2 - a_2) H_1 + (c_2 - b_2) H_2 \rangle = \\ = a_1 a_2 + (b_1 b_2 - a_1 a_2) H_1 + (c_1 c_2 - b_1 b_2) H_2; \end{aligned} \quad (\text{Ж.9})$$

7.

$$\langle a + (b - a) H_1 + (c - b) H_2 \rangle^2 = a^2 + (b^2 - a^2) H_1 + (c^2 - b^2) H_2; \quad (\text{Ж.10})$$

8. Если  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$  тогда

$$\frac{1}{a + (b - a) H_1 + (c - b) H_2} = \frac{1}{a} + \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) H_1 + \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) H_2; \quad (\text{Ж.11})$$

9. Если  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$  тогда

$$\sqrt{\langle a + (b - a) H_1 + (c - b) H_2 \rangle} = \sqrt{a} + (\sqrt{b} - \sqrt{a}) H_1 + (\sqrt{c} - \sqrt{b}) H_2. \quad (\text{Ж.12})$$

Структуру коэффициентов при функциях Хевисайда в процессе алгебраических преобразований необходимо сохранять.

Доказательства равенств (Ж.2)-(Ж.12) содержащие функции Хевисайда.

1. -

2.

$$\begin{aligned} \langle a + (b - a) H_1 \rangle \cdot \langle c + (d - c) H_1 \rangle = \\ = ac + (ad - ac) H_1 + (bc - ac) H_1 + (bd - ad - bc + ac) H_1 H_1 = \\ = ac + (ad - ac + bc - ad - bc + ac) H_1 = \\ = ac + (bd - ac) H_1. \quad \text{Чтд.} \end{aligned}$$



3.

$$\frac{\langle a + (b - a) H_1 \rangle}{\langle c + (d - c) H_1 \rangle} = \frac{a}{c} + \left( \frac{b}{c} - \frac{a}{c} \right) H_1.$$

Домножим обе части равенства (Ж.4) на  $\langle c + (d - c) H_1 \rangle$ , с использованием 2, получим верное равенство.

4. Доказательство равенств (Ж.5) и (Ж.6) основано на свойстве умножения таких структур.

5. При доказательстве этого равенства необходимо учесть, что  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  (\*).

Пусть

$$\sqrt{\langle a + (b - a) H_1 \rangle} = x + (y - x) H_1.$$

Возведем в квадрат обе части равенства, тогда по свойству 4 получим:

$$a + (b - a) H_1 = x^2 + (y^2 - x^2) H_1.$$

И учитывая (\*), получаем  $a = x^2$ ,  $b = y^2 \implies x = \sqrt{a}$ ,  $y = \sqrt{b}$ . Чтд.

6. Раскрывая скобки в левой части равенства, запишем

$$\begin{aligned} & \langle a_1 + (b_1 - a_1) H_1 + (c_1 - b_1) H_2 \rangle \cdot \langle a_2 + (b_2 - a_2) H_1 + (c_2 - b_2) H_2 \rangle = \\ & = a_1 a_2 + a_1 (b_2 - a_2) H_1 + a_1 (c_2 - b_2) H_2 + a_2 (b_1 - a_1) H_1 + (b_1 - a_1) (b_2 - a_2) H_1 H_1 + \\ & + (b_1 - a_1) (c_2 - b_2) H_1 H_2 + a_2 (c_1 - b_1) H_2 + (c_1 - b_1) (b_2 - a_2) H_2 H_1 + \\ & + (c_1 - b_1) (c_2 - b_2) H_1 H_2 = \\ & = a_1 a_2 + (a_1 b_2 - a_1 a_2 + a_2 b_1 - a_1 a_2 + b_1 b_2 - b_1 a_2 - a_1 b_2 + a_1 a_2) H_1 + \\ & + (a_1 c_2 - a_1 b_2 + b_1 c_2 - b_1 b_2 - a_1 c_2 + a_1 b_2 + a_2 c_1 - a_2 b_1 + \\ & + c_1 b_2 - c_1 a_2 - b_1 b_1 + b_1 a_2 + c_1 c_2 - c_1 b_2 - b_1 c_2 + b_1 b_2) H_2 = \\ & = a_1 a_2 + (b_1 b_2 - a_1 a_2) H_1 + (c_1 c_2 - b_1 b_2) H_2. \text{ Чтд.} \end{aligned}$$

7. Доказательство равенства (Ж.10), автоматически следует из равенства (Ж.8), если положить  $a_1 = a_2$ ,  $b_1 = b_2$ ,  $c_1 = c_2$ .

8. Требуется найти выражение вида  $x + (y - x) H_1 + (z - y) H_2$ , которое в произведении с выражением  $a + (b - a) H_1 + (c - b) H_2$  дает 1.

$$\begin{aligned} & \langle a + (b - a) H_1 + (c - b) H_2 \rangle \langle x + (y - x) H_1 + (z - y) H_2 \rangle = \text{по тождеству 6} \\ & = ax + (by - ax) H_1 + (cz - by) H_2 \equiv 1 \implies ax = 1, by = 1, cz = 1. \end{aligned}$$

Так как  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , то  $x = \frac{1}{a}$ ,  $y = \frac{1}{b}$ ,  $z = \frac{1}{c}$ . Чтд.

9. Доказательство проводится аналогично доказательству тождества 5.

Для второй структуры верны равенства:

$$1. \quad \langle a + bH_1 \rangle^2 = a^2 + (2ab + b^2)H_1; \quad (\text{Ж.20})$$

$$2. \quad \langle a + bH_1 \rangle^3 = a^3 + (3a^2b + 3ab^2 + b^3)H_1; \quad (\text{Ж.21})$$

$$3. \quad \langle a + bH_1 \rangle \langle c + dH_2 \rangle = ac + bcH_1 + (ad + bd)H_2; \quad (\text{Ж.22})$$

$$4. \quad \frac{1}{a + bH_1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a(a + b)}H_1; \quad (\text{Ж.23})$$

$$5. \quad \frac{1}{\sqrt{a + bH_1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \left( -\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a + b}} \right) H_1; \quad (\text{Ж.24})$$

$$6. \quad \frac{1}{(a + bH_1)^{3/2}} = \frac{1}{a\sqrt{a}} + \frac{(ba - a - 2b)\sqrt{a + b} + (a + b - ab)\sqrt{a}}{a\sqrt{a}(a + b)\sqrt{a + b}}H_1; \quad (\text{Ж.25})$$

$$7. \quad \frac{1}{a + (b + (c - b)H_1)} = \frac{1}{a + b} - \frac{c - b}{(a + b)(a + c)}H_1; \quad (\text{Ж.26})$$

$$8. \quad \sqrt{a^2 + b^2 + (c^2 - b^2)H} = \sqrt{a^2 + b^2} + \left( \sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \right) H_1; \quad (\text{Ж.27})$$

$$9. \quad \sqrt{a^2 + (b^2 - c^2)H_1} = a + \left( -a + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \right) H_1; \quad (\text{Ж.28})$$

$$10. \quad \frac{1}{a + (-a + a\sqrt{b + c})H_1} = \frac{1}{a} + \frac{1 - \sqrt{b + c}}{a\sqrt{b + c}}H_1. \quad (\text{Ж.29})$$

## Кинетическая энергия упругой системы в перемещениях

Выражение для кинетической энергии термоупругой системы в перемещениях на основе модели типа Лява:

$$T = \frac{\rho}{2} \int \int \left[ (u^2_{,t} + v^2_{,t} + w^2_{,t}) h + \frac{h^3}{12} \left( \frac{w^2_{,1t}}{G_{11}} + \frac{w^2_{,2t}}{G_{22}} \right) \right] \sqrt{G_{11}G_{22}} d\alpha^1 d\alpha^2.$$

В случае осевой симметрии кинетическая энергия имеет вид:

$$T = \rho\pi \int_0^\pi \left[ (u^2_{,t} + w^2_{,t}) h + \frac{h^3}{12} \frac{w^2_{,1t}}{G_{11}} \right] \sqrt{G_{11}G_{22}} d\theta.$$

Выражение для кинетической энергии композиции толщина которой чувствительна к нагреву:

$$T = \frac{\rho}{2} \int \int \left[ (u^2_{,t} + v^2_{,t} + w^2_{,t}) h + \frac{h^3}{12} \left( \frac{w^2_{,1t}}{G_{11}} + \frac{w^2_{,2t}}{G_{22}} \right) + \frac{\alpha h^2}{12} w_{,t} \Theta_{1,t} \right] \sqrt{G_{11}G_{22}} d\alpha^1 d\alpha^2.$$

В случае осевой симметрии кинетическая энергия имеет вид:

$$T = \rho\pi \int_0^\pi \left[ (u^2_{,t} + w^2_{,t}) h + \frac{h^3}{12} \frac{w^2_{,1t}}{G_{11}} + \frac{\alpha h^2}{12} w_{,t} \Theta_{1,t} \right] \sqrt{G_{11}G_{22}} d\theta.$$

Коэффициенты в выражениях для кинетической энергии в случае оболочки из двух элементов «сферы - конуса»:

$$\sqrt{\frac{G_{22}}{G_{11}}} = \langle \sin \theta + (\sin \theta \sin(\theta - \psi) - \sin \theta) H(\theta - \theta_1) \rangle ;$$

$$\sqrt{G_{11}G_{22}} = R^2 \left\langle \sin \theta + \left( \frac{\sin \theta}{\sin^3(\theta - \psi)} \right) H(\theta - \theta_1) \right\rangle .$$

## Проекция тангенциальных усилий

Выражение суммы проекций тангенциальных усилий на нормаль, возникающих в композиции при нагреве или силовых нагрузок в ее исходном безмоментном состоянии увеличение интенсивности которых вызывает скачкообразный переход тонкостенной конструкции к новой форме равновесия

$$T_0^{22} \sqrt{G_{11}} \left( \frac{w_{,2}}{\sqrt{G_{22}}} \right)_{,2} + T_0^{12} \left[ \sqrt{G_{11}} \left( \frac{w_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,2} + \sqrt{G_{22}} \left( \frac{w_{,2}}{\sqrt{G_{22}}} \right)_{,2} \right] +$$

$$+T_0^{11} \sqrt{G_{22}} \left( \frac{w_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1}.$$

В случае осевой симметрии запишется

$$T_0^{11} \sqrt{G_{22}} \left( \frac{w_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \right)_{,1}.$$

### Графики тангенциальных усилий $T^{11}$ и $T^{22}$

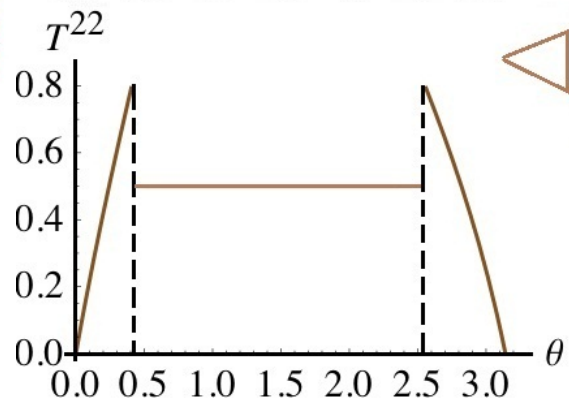
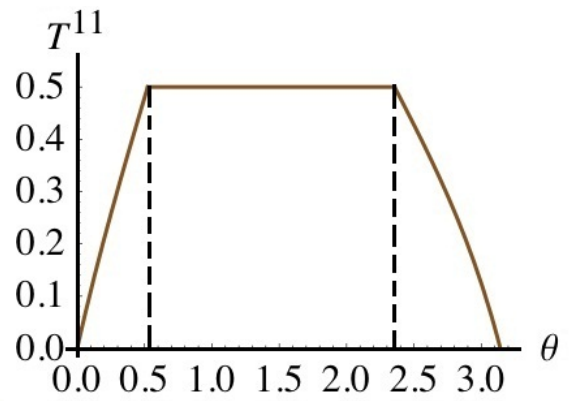
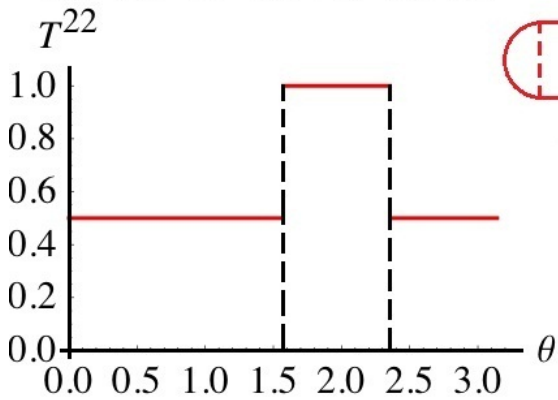
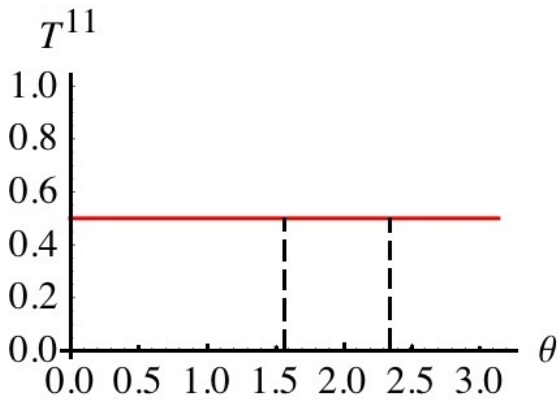


Рисунок Ж.1 — Сфера - цилиндр - сфера

Рисунок Ж.2 — Конус -сфера -конус

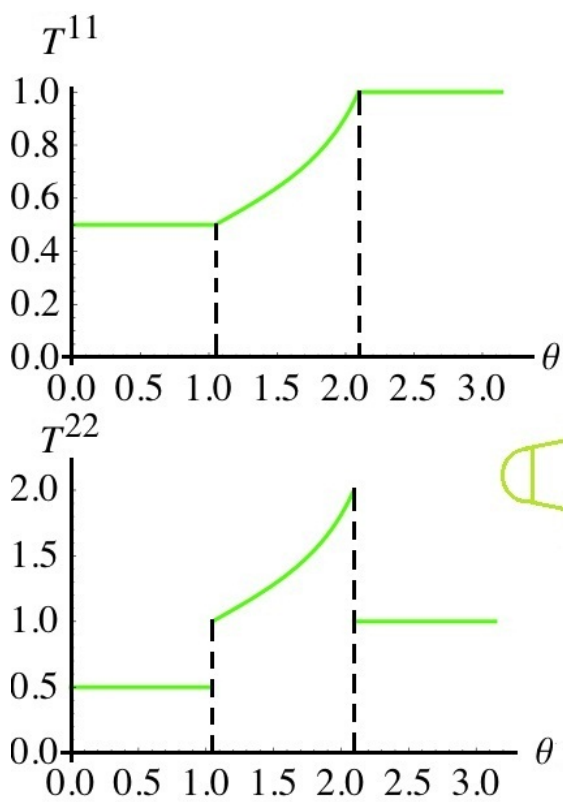


Рисунок Ж.3 — Сфера - конус - сфера

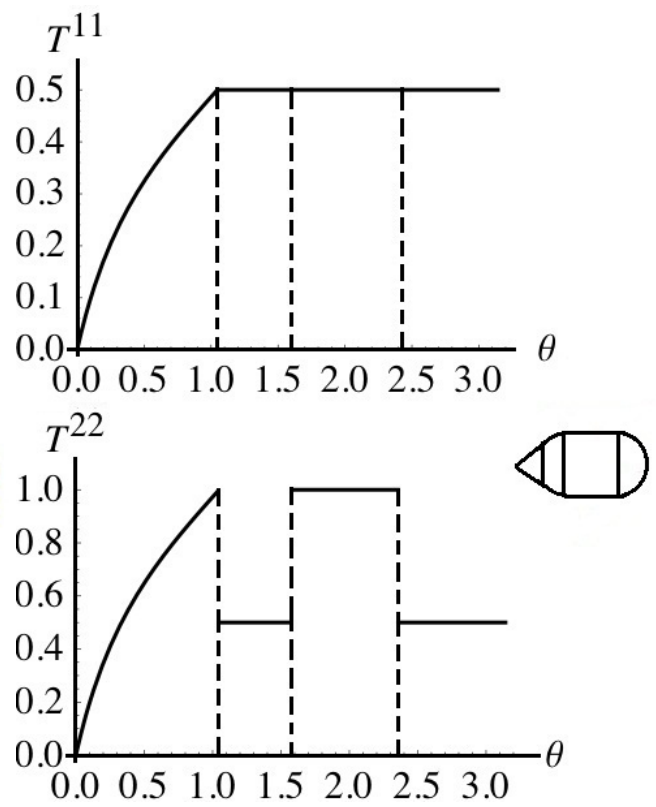


Рисунок Ж.4 — Конус - сфера - цилиндр - сфера

# Приложение И. Заключение о возможности использования материалов

Ф А Н О   Р О С С И И

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ТОЧНОЙ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ**  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ул. Рабочая, 24, Саратов, 410028  
т. (8452) 22-23-76, ф. 22-23-40 e-mail: [iptmuran@san.ru](mailto:iptmuran@san.ru)  
ОКПО 04864826, ИНН/КПП 6454004600/645401001, БИК 046311001

23.03.2017г. № 11506-67

На \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

## Заключение возможности использования материалов кандидатской диссертации Мыльциной О.А. «Термоупругость геометрически нерегулярных пластин и оболочек под действием быстропеременных температурных и силовых воздействий»

При тепловом и термоупругом анализе элементов приборов специального назначения, для которых специфическими является разнообразие геометрических форм и быстро возрастающие по пространственным и временной координатам температурные и силовые нагрузки на основные поверхности и края, эффективно используются подходы и методы интегрирования сингулярных дифференциальных уравнений специального класса, изложенные в работах и кандидатской диссертации Мыльциной О.А.

Самостоятельный интерес представляет метод определения обобщенных параметров Ламе и главных кривизн конструкций в виде совокупностей, различных по геометрическим свойствам, оболочек вращения гладко сопряженных между собой и возможность устранения разрыва первого рода в тангенциальном усилии.

Зав. лабораторией анализа и синтеза динамических  
систем в прецизионном машиностроении,  
д.т.н., профессор



В.М. Панкратов