

Федеральное государственное казенное военное образовательное учреждение  
высшего образования

“Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил  
«Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и  
Ю.А. Гагарина» (г.Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации

На правах рукописи

Бунтов Алексей Евгеньевич

**УСТОЙЧИВОСТЬ МОНОЛИТНЫХ КРЕПЕЙ ПОДЗЕМНЫХ  
СООРУЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ПОРИСТОЙ СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА И  
СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИИ СЖАТОГО СКЕЛЕТА**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, доцент  
Гоцев Дмитрий Викторович

Воронеж – 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
<b>Глава 1. Устойчивость деформирования пористых сред со сложной реологией сжатого скелета при малых докритических деформациях</b> .....	30
1.1. Уравнения, определяющие деформированное состояние пористой среды при упруго-вязкопластическом поведении сжатого скелета.....	31
1.2. Постановка задач об устойчивости деформирования пористых упруговязкопластических сред. Линеаризация соотношений по малым возмущениям.....	35
1.3. Предельные системы уравнений. Статические задачи первого и второго типа.....	43
1.4. Основные соотношения трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел в цилиндрической и сферической системах координат.....	48
1.5. Выбор метода решения статических упруговязкопластических задач устойчивости. Алгоритм поиска критических нагрузок.....	62
1.6. Анализ основных результатов главы 1.....	64
<b>Глава 2. Моделирование напряженно-деформированных состояний монолитных цилиндрических и сферических крепей подземных сооружений с учетом пористой структуры материала и сложной реологии сжатого скелета</b> .....	67
2.1. Математическая модель напряженно-деформированного состояния крепи вертикальной горной выработки с учетом начальной пористости материала и упругопластических свойств сжатого скелета.....	68
2.2. Определение напряженно-деформированного состояния круговой крепи вертикальной выработки при учете начальной пористости материала и упруговязкопластического поведения сжатого скелета.....	85
2.3. Определение напряженно-деформированного состояния пористой крепи подземной сферической полости с учетом упругопластических свойств сжатой матрицы.....	96
2.4. Моделирование процесса деформирования монолитной крепи подземной сферической полости с учетом пористости материала и упруговязкопластических свойств полностью сжатой матрицы.....	114
2.5. Анализ основных результатов главы 2.....	126
<b>Глава 3. Моделирование отказов монолитных цилиндрических и сферических крепей подземных сооружений с учетом начальной пористости материалов и сложной реологии сжатого скелета</b> .....	129

3.1. Устойчивость крепи вертикальной горной выработки с полностью сжатой матрицей при неупругом поведении материала (пространственная форма потери устойчивости).....	131
3.2. Моделирование отказа крепи вертикальной горной выработки со сжатой матрицей при неупругой работе конструкции (случай осесимметричной формы потери устойчивости).....	147
3.3. Моделирование отказа монолитной крепи подземной сферической полости с учетом начальной пористости материала и упругопластических свойств полностью сжатого скелета..	158
3.4. Анализ результатов главы 3.....	165
<b>Заключение</b> .....	167
<b>Список литературы</b> .....	171

## Введение

Эффективное развитие добывающих отраслей, являющихся одной из основ современной экономики, требует повышение эффективности производства за счет качественного преобразования материально-технической базы на основе внедрения в производство новейших достижений науки и техники.

В настоящее время актуальными остаются вопросы строительства новых объектов горных предприятий и подземных сооружений различного назначения, что связано с выполнением большого объема работ по проведению комплексов горных выработок. При этом возникает необходимость решения ряда сопутствующих задач таких, как борьба с горными ударами, взрывные подземные работы, охрана окружающей среды от загрязнения, проблемы сейсмобезопасности и сейсморазведки.

Цель расчета подземных конструкций заключается в определении полей напряжений и перемещений, возникающих в элементах этих сооружений и установлении условий их прочности и устойчивости. В соответствии с результатами расчета выбираются рациональные конструкции крепей и оптимальные размеры их сечений, обеспечивающих надежную работу сооружений при минимальных затратах.

Обеспечение устойчивости неглубоких выработок при достаточно прочных вмещающих породах, как правило, не составляет особых затруднений. Однако в настоящее время непрерывно увеличивается объем горных выработок, проходимых на больших глубинах и в сложных горно-геологических условиях (многолетняя мерзлота, высокая сейсмичность, неотектонические явления и т.п.), что отчасти связано с активным освоением арктического пространства. При нарушении условия благоприятного сочетания глубины и прочности материалов, обеспечение устойчивости выработок и их крепей, приобретает черты сложной инженерной и научной проблемы.

Для решения всех этих вопросов необходимы представления о разрушении горных массивов, а также об устойчивости крепей подземных сооружений.

Нарушение целостности горных пород в окрестности выработки может быть связано с реализацией следующих случаев: а) когда значение напряжений в приконтурной области массива достигнет предельных значений, соответствующих разрушению материала; б) когда значение напряжений возле выработки достигнет своих критических величин, которые соответствуют потере устойчивости основного состояния выработки.

Решению первой задачи посвящены работы [15, 20, 21, 149, 143, 152, 155] и [35, 121, 135, 161, 166, 169, 194, 234]. Исследованию второго случая посвящены статьи, часть которых выполнена с привлечением приближенного подхода в ТТУДТ (трехмерная теория устойчивости деформируемых тел).

Потеря устойчивости горного массива возле подземного сооружения может быть начальным этапом процесса разрушения, особенно при наличии пластических деформаций.

Теорию устойчивости горных выработок можно рассматривать как одно из приложений общей трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел.

Впервые использовать методы механики деформируемых твердых тел для определения полей напряжений и перемещений в массиве возле выработки при упругом поведении материала стали С.Г. Михлин [174], А.Н. Динник [118], Л.Д. Шевяков [253], Г.Н. Савин [204], Мор [175]. Однако экспериментальные данные показали [23], что на средних и больших глубинах вокруг выработки формируется зона неупругих деформаций достигающая размеров 2 – 9 метров.

Решение задачи об устойчивости равновесного состояния горного массива возле подземных конструкций остается актуальной проблемой в течение последнего времени. Первым исследованием, проведенным в этом направлении, стала работа Л. В. Ершов [126]. В этой статье решена задача об устойчивости состояния равновесия круговой вертикальной выработки в

осесимметричной постановке в случае, когда горная порода моделировалась упругой изотропной сжимаемой средой. В дальнейшем выполнены исследования отдельных задач, нашедших свое отражение в работах М. Т. Алимжанова, Л. В. Ершов и других авторов [10-14, 18, 19, 20, 21, 127, 129, 134]. Общим для этих и ряда других работ является использование приближенного подхода Лейбензона – Ишлинского. Суть этого подхода в ТТУДТ трехмерной состоит в замене линеаризированных уравнений устойчивости линейными уравнениями, при этом параметры нагружения вводятся в граничные условия, что значительно упрощает решение задач и дает возможность сравнительно легко получить конкретные результаты.

Ранее решение вопросов об устойчивости основных состояний проводилось в основном при использовании статического критерия Эйлера. Исследования, проведенные с привлечением данного критерия [28, 47, 104, 107, 124, 128] показали, что методы, основанные на бифуркации равновесных форм, не всегда приводят к верным решениям, то есть имеют ограниченную область применения. Статические подходы могут применяться в основном лишь в случае консервативных систем. Если же рассматриваемые системы, обладают свойством неконсервативности, то необходимо рассматривать процесс движения таких систем во времени, то есть применять динамические подходы.

В работах Ф. Энгессера, Ф.С. Ясинского и Т. Кармана нашла свое развитие теория устойчивости неупругих сжатых стержней. В настоящее время теория неупругой устойчивости преобразовалась в весьма разветвленную и самостоятельную отрасль механики [106, 107]. Результаты и методы неупругой теории устойчивости широко используются в различных отраслях промышленности при решении конкретных инженерных задач. При этом большинство исследователей, желая упростить решение задач устойчивости тонкостенных конструкций использовали одномерные или двумерные прикладные теории, получающиеся с помощью введения некоторых вспомогательных гипотез.

В дальнейшем внутренние потребности механики деформируемых тел, а также развитие науки и инженерных технологий, связанных с созданием и использованием новых материалов вызвали необходимость разработки трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел (далее ТЛТУДТ). Под трехмерными теориями неупругой устойчивости следует понимать исследования, в которых не привлекаются двумерные теории пластин и оболочек и одномерные теории стержней.

Деформируемые тела можно условно разделить на два класса. Первый класс - это материалы, которые испытывают малые (значительно меньшие единицы) деформации, второй – тела, испытывающие большие (конечные) деформации. В связи с этим различают линеаризованную механику деформируемых тел при малых или больших начальных деформациях, которую целесообразно применять для первого или второго класса материалов соответственно.

При построении ТЛТУДТ используются две гипотезы. Первая состоит в том, что в обоих состояниях (основном и возмущенном) действуют одинаковые внешние нагрузки, при этом НДС тела описывается соотношениями одной нелинейной теории деформируемых тел. Суть второй гипотезы заключается в том, что величины возмущений являются значительно меньшими по сравнению с компонентами основного состояния. Вследствие этого при постановке и решении задачи устойчивости возмущения принимаются сколь угодно малыми величинами. То есть, при построении линеаризованных соотношений в механике деформируемых тел даже в случае малых начальных деформаций, их следует считать конечными величинами по сравнению с возмущениями.

Р. В. Саусвелл [271], С. Бицено, Г. Генки [40] учитывая аргументы физического характера одними из первых получили трехмерные уравнения упругой устойчивости при малых начальных деформациях. М. А. Био [257, 258] с помощью линеаризации уравнений нелинейной теории упругости пришел к трехмерным соотношениям теории устойчивости. Эти же соотношения получил Е. Треффтц [273] на основе вариационного метода при конкретных

допущениях. Дальнейшее свое развитие его идеи получили в работе Р. Каппуса [267]. Он впервые для случая конечных докритических деформаций в строгой постановке получил линеаризованные уравнения движения деформируемого тела, а также для конкретных видов зависимостей напряжений от деформаций рассмотрел упрощения допустимые при малых деформациях.

Монография М. А. Био [256] стала первой монографией по трехмерной линеаризованной теории устойчивости и явилась обобщением его многочисленных публикаций по этой теме. Позднее В. В. Новожиловым [189, 190] в лагранжевых координатах были получены основные соотношения трехмерной линеаризованной теории устойчивости. Впоследствии пространственные линеаризованные задачи механики деформируемого тела при конечных докритических деформациях рассматривали А.Грин, Д. Адкинс, А.И. Лурье, А.Н. Гузь, И.Ю. Бабич, А.Н. Спорыхин [90, 102, 106 - 108, 168, 223 - 225, 272] и другие авторы.

Подробно история развития пространственной линеаризованной теории упругой и неупругой устойчивости представлены в работах [90, 106, 107].

А. Н. Спорыхин в своей монографии [234] выделил три направления публикаций по трехмерной теории устойчивости.

Первое направление связано с применением уравнений трехмерной теории устойчивости при конечных начальных деформациях. Не конкретизируя виды зависимостей между напряжениями и деформациями и, как следствие, варианты постановок задач, связанных с этим, приведем работы, выполненные в рамках этого подхода [164, 208-213, 224, 225, 228, 231, 238 и др.].

Ко второму направлению отнесены работы, в которых докритические деформации предполагаются малыми. Достаточно полно изучено поведение материалов при малых деформациях. Выведены уравнения состояния для различных реологических тел, в частности для тел, обладающих одновременно упругими, вязкими и пластическими свойствами, которые подвергались экспериментальной проверке. Большинство задач были решены с применением прикладных теорий в случае малых докритических деформаций. В рамках



второго подхода также можно моделировать устойчивость деформируемых тел на основе соотношений ТТУДТ. Таким образом, с помощью полученных решений в рамках второго подхода можно проверить точность гипотез и методов, с помощью которых пространственные задачи приводились к двумерным и одномерным прикладным теориям. К этому направлению можно отнести большое количество публикаций [1-6, 16, 17, 26, 27, 29- 32, 34, 36, 41, 54 – 75, 89, 91, 94, 95, 97 - 108, 113 – 117, 155, 161, 164–166, 171 – 173, 191, 205, 214 - 221, 226 - 230, 234, 235, 238, 239, 245 - 252, 258], в которых решены задачи устойчивости для различных сред.

К третьему направлению отнесены исследования основанные на использовании приближенного подхода Л. С. Лейбензона и А. Ю. Ишлинского [149, 162], суть которого состоит в замене соотношений пространственной теории устойчивости уравнениями Ламе. При этом, исходя из соображений физического характера, параметр нагружения вводится лишь в граничные условия. В этом случае решение задач существенно упрощается, поскольку параметр нагружения не входит в основные соотношения. В рамках этого направления проведены исследования, результаты которых нашли свое отражение в работах [8, 15, 23, 125 - 133, 146, 147, 149, 226 и др.]. При этом в рамках плоской деформации решены задачи о толстостенной трубе, находящейся под действием внутреннего давления в случаях, когда материал моделировался соотношениями теории малых упругопластических деформаций работы [146, 147] и соотношениями теории идеальной пластичности [141]. В работе [125] исследована устойчивость толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием равномерно сжимающих нагрузок

А.Н. Гузем показано, что результаты исследований явления внутренней и поверхностной неустойчивости [99] для упругих и упругопластических моделей деформируемых тел, полученные в рамках приближенного подхода, могут не согласовываться с соответствующими результатами, вычисленными на основе трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел. Такой же вывод в полной мере можно отнести и к

результатам теории устойчивости горных выработок, получаемым с позиций приближенного подхода.

Значительная часть указанных работ по трехмерной теории неупругой устойчивости выполнено таким образом, что для каждой новой модели, учитывающей неупругие деформации, составляются линеаризованные уравнения, исследуются общие вопросы, строятся общие решения. Достаточно общий метод предложен [99, 100, 106, 107] и систематически изложен в [94]. В этих работах в общей форме для различных моделей сред дается формулировка линеаризованных задач и исследуются общие вопросы.

Исследованию устойчивости деформирования сред, обладающих одновременно упругими, вязкими, пластическими, структурными и другими свойствами, которые позволяют полнее описывать разнообразные свойства реальных тел, посвящено ограниченное число работ. Сложность уравнений движения для большинства моделей реологически сложных сред приводит в задачах устойчивости значительным трудностям как принципиального, так и вычислительного характера. В работе [148] было выполнено первое исследование в этой области для вязкопластической среды. Исследованию устойчивости деформирования упрочняющихся упруговязкопластических или упругопластических тел при малых и больших докритических деформациях посвящены работы [63 – 71, 89, 98, 155, 210, 214 – 218, 222 – 231, 233 – 235, 239 и др.]. Результаты исследований в этом направлении достаточно полно представлены в монографиях [234, 239].

В монографии А.Н. Спорыхина [234], на основе построенных систем уравнений и общих идей теории возмущений, развита трехмерная линеаризованная теория устойчивости сложных сред при малых (строгая постановка) и больших (приближенная постановка) докритических деформациях и теория устойчивости нелинейно-упругих сред в «большом». Разработаны подходы и методы решения пространственных задач устойчивости для тел со сложными реологическими свойствами. Дана постановка и получено

решение классов задач при однородных и неоднородных основных состояниях при использовании различных моделей сред.

Группировка задач устойчивости деформируемых тел по методологии исследования приведена в работах [89, 106, 107, 234 ]. В рамках этой классификации выделяются динамический и статический критерии устойчивости. Первый является более общим и заключается в анализе поведения малых возмущений во времени. При этом следуя работам [83, 100, 106] для тел, обладающих реологическими свойствами в рамках линеаризированной теории, процесс деформирования или состояние равновесия считается неустойчивым, если возмущения во времени неограниченно возрастают, и неустойчивым – если затухают.

Применение теории устойчивости деформируемых тел в механике горных пород осуществляется в двух направлениях: первое связано с исследованием задач о складкообразовании в толще земной коры (задачи об устойчивости слоистых сред); второе – с исследованием задач устойчивости горных выработок.

Под устойчивостью горных пород понимается их свойство сохранять форму и размеры обнажений, образуемых при строительстве горных выработок и подземных сооружений. Булычев Н.С. в своей работе [42] выделяет три формы потери устойчивости горных пород:

- вывалообразование под действием собственного веса обрушающихся пород;
- разрушение пород в зонах концентрации напряжений, вызванных весом всей вышележащей толщи;
- чрезмерное смещение обнаженной поверхности без видимого разрушения пород вследствие их пластических деформаций.

М.А. Био одним из первых в своих работах [256, 257] применил к исследованию плоских задач о складкообразовании линеаризованную теорию устойчивости деформируемых тел, построенную им с привлечением некоторых соображений физического характера. В последующем Ж.С. Ержанов

с соавторами [122, 123] развили теорию складкообразования в толще земной коры в случае прерывистой, куполовидной и линейной складчатости на основе подхода Лейбензона-Ишлинского.

К основным задачам теории устойчивости горных выработок можно отнести [239] следующие задачи об устойчивости:

- вертикальных выработок (устойчивость шахтных стволов);
- горизонтальных выработок;
- подземных полостей;
- крепей горных выработок.

В каждом из указанных классов задачи различаются как по принятой модели горных пород (упругая, упругопластическая, вязкоупругая и т.д.), так и по форме поперечного сечения выработки, по принятой модели крепи и по ряду других специфических особенностей.

Впервые для решения задач геомеханики А. Н. Гузь в своей работе [91] применил аппарат трехмерной линеаризированной теорий устойчивости и разработал общий метод решения таких задач на основе вариационных принципов. Этот подход в дальнейшем получил широкое развитие в работах Ж.С. Акопяна [1-7, 183], Ф.М Асамидинова [26, 27, 161], А.Н. Спорыхина [210, 219, 223, 227, 229, 238 и др.], И.Ю. Бабича [5, 30 - 32], Л.В. Дериглазова [115 - 117], Г.Г. Кулиева [27, 160, 161], А.Н. Гузя [3-5, 27, 29, 30, 94, 96, 97, 98, 105, 109 - 112], А.И Шашкина [170, 227 – 230, 249, 250] и др.

Большинство публикаций, в том числе работы [6, 94, 105], относящихся к решению задач устойчивости горизонтальных и вертикальных выработок с различной формой поперечного сечения, а также подземных сферических полостей выполнено в рамках упругого моделирования материала горных пород и крепи.

Как следует из экспериментальных наблюдений по практике эксплуатации подземных сооружений глубокого заложения, а также из анализа соображений теоретического характера, которые были проведены в работах [23, 118] применение модели упругого тела в качестве материала массива горных

пород не дает настоящую картину процессов проходящих около глубоких выработок. Этот факт связан с тем, что напряжения, которые соответствуют критическому значению породного материала в приконтурной области во много раз превышают предел прочности горной породы. Поэтому материал горного массива возле выработки перейдет в неупругое состояние раньше, чем произойдет его потеря устойчивости. При этом, как отмечается в работе [23] более точные результаты по исследованию устойчивости глубоких подземных сооружений получаются, когда при решении задач используются более сложные (по сравнению с упругой) модели. Поэтому применение моделей сложных сред, учитывающих наряду с упругими свойствами такие свойства, как вязкость, пластичность, а также пористую структуру, обнаруживаемые у реальных материалов, является актуальной научной задачей, представляющей большой практический интерес. Исследования проводимые в этом направлении нашли свое отражение в работах [22, 24, 25, 33, 43 – 45, 49, 86-88, 120, 136 – 140, 143 – 150, 154, 157, 167, 181 – 185, 194 - 196, 199 – 207, 227 – 238, 241 – 243, 247 – 251, 254, 268, 275 – 277 и др. авторов].

Характерной особенностью большинства горных пород и грунтов является их пористость, изменяющаяся под влиянием внешних воздействий. Поэтому для решения ряда задач горной механики необходимым является учет закономерностей вытекающих из изучения пористых сред: закон уплотнения, характеризующий сжимаемость материалов в результате уменьшения объема пор; законы фильтрации, определяющие водопроницаемость грунтов; зависимость между деформациями и напряжениями, характерную для пористых сред.

Теория пористых и сыпучих сред представляет собой один из самых интересных и интенсивно развивающихся разделов механики. В первую очередь потому, что область применения этой теории весьма широка. Это задачи механики геоматериалов — грунтов и горных пород, связанные с оценкой прочности и устойчивости горных выработок, оснований и откосов при проведении проектных инженерно-строительных работ, задачи

проектирования бункеров и хранилищ. Сюда же относятся задачи проектирования производственных химических установок с кипящим зернистым слоем, задачи моделирования схода лавин и т. д.

Несмотря на то, что основы теории были заложены еще на заре развития механики сплошных сред в классических трудах Кулона и Рейнольдса, к настоящему времени она далека от завершения. Ситуация здесь существенно отличается от теории упругости, гидродинамики и газовой динамики, в которых определяющие уравнения были окончательно сформулированы почти два столетия назад, и вполне аналогична теории пластичности, где наряду с имеющимся множеством вариантов частных моделей пока еще нет окончательного решения вопроса об адекватном описании кинематики необратимого деформирования при произвольной величине деформаций, [158, 159, 177 - 180].

Основные трудности связаны с резким различием поведения сыпучих и пористых сред в экспериментах на растяжение и сжатие. Этим свойством — свойством разносопротивляемости (разнопрочности) — в той или иной мере обладают практически все известные природные и искусственные материалы. Для некоторых из них несоответствие модулей упругости, пределов текучести или диаграмм ползучести, полученных при растяжении и сжатии, настолько мало, что им целесообразно пренебречь. Однако при изучении знакопеременных деформаций в сыпучих средах такое пренебрежение невозможно. Например, идеальные среды, частицы которых свободно контактируют между собой, при сжатии ведут себя как упругие или упругопластические тела, в зависимости от уровня напряжений, и не сопротивляются растяжению. В связных средах (грунтах, горных породах) допустимые растягивающие напряжения существенно меньше сжимающих и не превышают критического значения, обусловленного сцеплением частиц. Для сравнительно широкого круга горных пород отношение пределов прочности на сжатие и растяжение изменяется в диапазоне от 8 до 10, но для некоторых видов достигает 50 и более высоких значений, [37]. К тому же механические

свойства сыпучих и пористых материалов, как правило, зависят от многих побочных факторов, таких, например, как неоднородность по размеру частиц и составу, анизотропия, трещиноватость, влажность и т. п. Это приводит к довольно большим погрешностям экспериментальных измерений феноменологических параметров моделей.

В настоящее время сформировались два класса математических моделей, соответствующие двум различным режимам деформирования сыпучей среды: квазистатическому режиму и режиму быстрых движений, [50]. Первый класс описывает поведение плотно упакованной среды при сжимающих нагрузках на основе теории пластического течения с предельным условием Кулона-Мора или Мизеса-Шлейхера. Этим условиям в пространстве тензоров напряжений отвечают не цилиндрические, как в теории идеальной пластичности, а конические области допустимых напряжений. Во втором классе рассматривается разрыхленная среда, которая моделируется как ансамбль большого числа частиц с позиций кинетической теории газов.

Для исследования квазистатического режима деформирования развита теория напряжений в статически определимых задачах, которая применяется в механике грунтов, [188]. В наиболее полной форме случай плоской деформации изучен Соколовским, [207], осесимметричный случай — Ишлинским, [150]. Поля скоростей в таких задачах определяются в соответствии с ассоциированным законом течения, впервые рассмотренным Друккером и Прагером, [120]. Мруз и Шиманский, [176], показали, что специальный неассоциированный закон дает более точные результаты в задаче о внедрении жесткого штампа в песок. Общий недостаток этих подходов заключается в том, что при разгрузке в кинематических законах теории пластического течения тензор скоростей деформации полагается равным нулю, поэтому деформирование материала возможно только по мере достижения напряжениями предельной поверхности. Отсюда следует, например, что разрыхленная сыпучая среда, напряженное состояние которой соответствует вершине конуса Кулона-Мора или конуса Мизеса-Шлейхера, не может быть

сжата гидростатическим давлением, поскольку любому состоянию гидростатического сжатия отвечает внутренняя точка на оси конуса. Это противоречит качественной картине. Кинематические законы оказываются применимыми на практике только в случае монотонного нагружения. Примерно таким же недостатком обладают определяющие уравнения гипопластичности в приложении к механике грунтов, [38, 265, 269, 274], поскольку в них состояние растяжения и состояние сжатия различаются между собой по знаку мгновенной скорости деформации, но не по знаку полной деформации.

Феноменологические модели пространственного напряженно-деформированного состояния (далее НДС) связных грунтов при конечных деформациях предложены Григоряном, [85], и Николаевским, [187]. Обобщению основных положений теории пластичности для описания динамики и статики сыпучих и пористых сред посвящены также работы, [39, 52, 144, 266].

Математическому моделированию поведения пористых сред под действием статических и динамических нагрузок посвящено достаточно большое число работ [48, 186, 259 - 261, 262, 263 и др]. Однако, единой теории к настоящему времени еще не создано. Основные трудности на этом пути связаны с тем, что пористые материалы также обладают свойством разносопротивляемости: под действием сжимающих напряжений вплоть до момента схлопывания пор такие материалы оказываются более податливыми, чем при дальнейшем сжатии. Процесс разгрузки сжатой пористой среды может быть обратимым или необратимым. В первом случае поровое пространство полностью восстанавливается при нулевом напряжении, во втором — в пределах цикла «нагружение-разгрузка» поры меняются в размерах, [264, 270].

В работе [204] используется подход, в котором определяющие соотношения пористых материалов строятся с помощью реологической схемы, включающей в себя специальный элемент — жесткий контакт. Путем комбинации этого элемента с традиционными элементами — упругой пружиной, вязким демпфером и пластическим шарниром — в монографии [76]



получена оригинальная математическая модель процесса деформирования пористой среды, учитывающая упруговязкопластические свойства сжатого скелета.

Переходя к вопросу об устойчивости крепей подземных сооружений необходимо отметить следующее. Проходка и крепление шахтных стволов имеют большое производственное и экономическое значение. Крепь подземных сооружений является сложной инженерной конструкцией, требующей для возведения значительных временных и финансовых затрат. Основным экономическим фактором при возведении крепи являются ее конструктивные размеры.

Различают монолитные и многослойные крепи. Основными преимуществами монолитной крепи являются: надежная и плотная связь с окружающими породами; широкие возможности механизации работ при ее возведении; достижение высокой водонепроницаемости; значительное снижение аэродинамического сопротивления

Существует достаточно большое количество исследований, направленных на определение минимальной (оптимальной) толщины монолитной крепи, обеспечивающей устойчивость подземных конструкций, согласно которым толщина крепи может быть уменьшена без ущерба для их устойчивости. При этом одни из исследователей этого вопроса рассматривают крепь выработок, пройденных в устойчивых породах, только лишь как оболочку, защищающую ствол от разрушения [193, 197]. Давление на внешнюю поверхность крепи в этом случае никак не определяется и считается независимым от физико-механических свойств горного массива и глубины заложения выработки. То есть, задача определения оптимальной толщины крепи выработки в существующих исследованиях полностью отождествляется с задачей устойчивости толстостенной оболочки, находящейся под действием постоянной внешней нагрузки [125, 132]. Другие авторы в том случае, когда проходка стволов происходит в сложных горногеологических условиях в

слабых, неустойчивых породах, моделируют крепь как грузонесущую конструкцию [153, 244, 253].

Как показывают исследования [153] и др., нагрузка на крепь в первую очередь определяется перемещениями горной породы и образованием зоны неупругого деформирования в приконтурной области массива горных пород. С учетом этого в работе [8] определена оптимальная толщина цилиндрической крепи, когда материал частично перешел в пластическое состояние, при этом решение определялось в рамках плоского и трехмерного осесимметричного подходов; в работе [9] определялись оптимальные толщины сферических крепей из несжимаемого идеально-пластического материала, при этом показано, что потеря устойчивости может произойти до того, как крепь исчерпает свою несущую способность, то есть полностью перейдет в неупругое состояние.

Впервые в работе [247] расчет крепи проводился совместно с расчетом проявления горного давления, при этом из решения задачи о докритическом состоянии находилось давление на крепь выработки как контактное давление на границе крепи и массива.

Большинство исследований, посвященных вопросам устойчивости крепей подземных сооружений, в частности работы [8, 23, 247] и др., проводились в рамках приближенного подхода Лейбензона-Ишлинского, а сами постановки задач являлись сугубо приближенными.

Для многослойной крепи помимо определения ее оптимальных размеров важным является также вопрос о влиянии разномодульности крепи на устойчивость подкрепленных подземных сооружений.

В работах [152, 163, 169, 198] и других проводился расчет многослойных крепей. Начальное напряженное состояние при этом находилось различными методами. Так в работе [163] оно определялось с помощью расчета характеристик напряженного состояния массива около подземной горной выработки, в исследовании [152] задача решена с позиции теории С.А. Амбарцумяна с использованием метода многослойных систем.

В работе [240] решалась задача по исследованию многослойной крепи вертикального ствола в пластовом массиве методом конечных элементов. При этом напряжения в крепи определялись согласно интегрально-операторному методу Вольтера – Работнова. В работе [46] проводился расчет трехслойной крепи стволов, состоящей из двух стальных труб с бетонным наполнителем. Решение выполнено методом Колосова – Мусхилишвили. В исследованиях [51, 53] изучался вопрос о влиянии овальности трехслойной кольцевой крепи на ее напряженное состояние. Анализ напряженного состояния произведен на основании расчета тонкостенных колец, когда заданное неоднородное трехслойное кольцо моделировалось однослойным кольцом постоянной толщины.

В рамках общей трехмерной линеаризированной теории устойчивости малых деформаций проблема моделирования горного массива с выработками, подкрепленными многослойными крепями исследована в работах [56 - 62] и обобщена в монографиях [76, 239]. При этом в зоне пластического деформирования горного массива и крепи, следуя [142] используется модель, учитывающая одновременно упругие и пластические свойства среды с трансляционным упрочнением с учетом предположений о несжимаемости материала, о совместной (без проскальзывания и отставания) работе слоев крепи, при условии разномодульности крепей. Наиболее полное исследование проблемы моделирования горного массива с выработками, подкрепленными многослойными крепями, когда в зоне пластического деформирования горного массива и крепи принята модель сложной упруговязкопластической среды (в том числе с учетом пористости среды) дано в работах [63 - 75]. При этом, в отличие от работ [56 – 62, 239], устойчивость горного массива с выработками, подкрепленными многослойными крепями, исследуется, когда основной процесс деформирования неустановившийся.

Как следует из вышеприведенного анализа проблемы устойчивости горных выработок и их крепей, в точной постановке в рамках трехмерной линеаризированной теории устойчивости, остались неизученными вопросы

устойчивости основных НДС монолитных крепей вертикальных выработок и подземных сферических полостей при учете пористой структуры материала и сложной реологии сжатого скелета. Исследования, которые проводились в данной работе посвящены изучению перечисленных выше вопросов, определяющих тему диссертации.

#### Актуальность темы.

Зачастую добыча и хранение твердых, жидких и газообразных полезных ископаемых продолжительное время ведется в одних и тех же месторождениях, вследствие чего актуальными становятся задачи по проектированию и возведению крепей подземных сооружений для надежной эксплуатации данных конструкций. Поэтому моделирование отказов подкрепленных горных выработок, а также моделирование отказов самих крепежных конструкций становятся одними из актуальных проблем механики горных пород. Использование современных достижений различных разделов механики, в частности трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел, а также большие возможности существующих ЭВМ позволяют успешно решать данные задачи.

Наряду с этим теоретический анализ и практика эксплуатации крепей подземных сооружений, находящихся на больших глубинах показывают, что наиболее достоверные результаты исследований по их устойчивости получаются с привлечением более сложных, чем упругая, моделей, как наиболее полно отражающих реальное поведение материалов при больших нагрузках. С этой точки зрения использование моделей сложных сред, в которых учитываются такие характеристики как пористость, пластичность, вязкость, упрочнение, обнаруживаемые у реальных материалов представляют существенный научный и практический интерес. Вместе с тем применение усложненных моделей сред, которые позволяют наиболее полно учитывать свойства обнаруживаемые у реальных тел, а также использование уточненных постановок, приводят к существенным трудностям математического характера, что в свою очередь требует разработки эффективных методов их решения.

Этим и определяется выбор темы диссертационной работы как актуальной для механики сплошных сред.

#### Цель работы.

Исследование на основе математического моделирования вопросов устойчивости крепежных конструкций подземных сооружений глубокого заложения и разработка на этой основе метода расчета критических нагрузок и оптимальных размеров крепей вертикальных горных выработок и подземных сферических полостей, соответствующих потери устойчивости основного состояния рассматриваемых подкрепляющих конструкций с учетом пористости материала и сложных реологических свойств полностью сжатой матрицы.

Средством достижения поставленных задач является:

- аналитическое исследование докритического НДС указанных сооружений в рамках модели среды, учитывающей пористость материала и упруговязкопластические свойства полностью сжатой матрицы;
- математическое моделирование потери устойчивости процессов деформирования и основных состояний равновесия крепей горных сооружений в рамках ТЛТУДТ;
- разработка метода решения характеристических уравнений, и на основе анализа полученных решений определение оптимальных размеров и критических нагрузок, соответствующих потери устойчивости крепей рассматриваемых подземных сооружений;
- проведение численного эксперимента и анализ полученных решений.

#### Методы исследования.

Исследования, проведенные в работе проводись на основе математического моделирования и анализа построенных моделей с помощью математического аппарата механики сплошных сред и ТЛТУДТ.

#### Научная новизна.

Впервые

получены аналитические решения математических моделей, описывающих докритические НДС цилиндрических и сферических

монолитных крепей подземных сооружений при учете пористой структуры материала и упругопластических (или упруговязкопластических) свойств сжатого скелета;

для рассматриваемого класса задач выведены уравнения, определяющие положения границ раздела зон упругого и пластического деформирования крепей подземных сооружений;

построены математические модели для анализа отказов монолитных крепей вертикальных горных выработок и подземных полостей сферической формы с учетом начальной пористости материала в случаях, когда сжатый скелет моделировался упругопластической или упруговязкопластической средами;

построен алгоритм, в рамках которого найдены приближенные решения математических моделей, представляющих собой трехмерных уравнения, описывающие потерю устойчивости крепей подземных сферических полостей и вертикальных горных выработок, когда начальное состояние зависит от одной координаты;

выведены характеристические уравнения рассмотренного класса задач устойчивости крепей подземных сооружений; выполнен численный эксперимент на основе которого были получены области величин критических давлений; выявлено влияние физико-механических характеристик (пластичность, упрочнение, вязкость, пористость) материала крепи на величину критического давления.

Практическая значимость диссертации и использование полученных результатов.

Полученные результаты по вопросам устойчивости подземных сооружений могут быть использованы для исследования НДС крепей вертикальных и сферических выработок за пределами упругости; при оптимальном выборе толщины крепижных конструкций на основе данных о глубине заложения выработки, а также при подборе расчетных схем, необходимых при возведении монолитных крепей горных выработок.

На основе проведенных исследований по моделированию отказов монолитных крепей рассмотренных подземных конструкций найдены характерные эффекты. Так учет наличия пор в материале крепи повлиял на значения критических нагрузок, соответствующих отказам монолитных цилиндрических и сферических крепей горных выработок; наличие в крепях поверхностей раздела зон упругого и пластического деформирования так же существенно влияет на их устойчивость. В очередной раз подтверждено, что исчерпанию несущей способности конструкции предшествует потеря устойчивости; с ростом глубины заложения выработки (при увеличении внешнего давления на крепь) критические значения внутреннего давления увеличиваются; с возрастанием предела текучести, а также при увеличении коэффициентов упрочнения и вязкости, область устойчивости увеличивается; потеря устойчивости крепи вертикальной выработки с круговой формой поперечного сечения, а также крепи подземной сферической полости происходит по осесимметричной форме. Анализ этих эффектов при проектировании позволяет назначать прочностные нормы для монолитных крепей подземных сооружений с достаточной степенью надежности.

Следует особо отметить, что решение задач устойчивости монолитных крепей вертикальных горных выработок и подземных сферических полостей проведено в строгой постановке, поэтому с помощью найденных решений можно выделить область применения результатов и оценить погрешность решений, полученных в рамках приближенных теорий.

### Достоверность

Проведенные в данной диссертационной работе исследования основаны на использовании положений ТЛТУДТ; использовании метода возмущений, показавшего высокую эффективность при решении задач устойчивости систем, и хорошо отработанного численного метода конечных разностей; корректной математической постановке исследуемых задач с дальнейшими строгими выкладками.

Достоверность выводов сделанных в работе обуславливается согласованием полученных результатов с общими физическими представлениями и сравнением найденных решений в частных случаях с уже известными, а также использованием апробированных моделей механики сплошных сред.

### Апробация

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на: Всероссийской научно-практической конференции «Академические Жуковские чтения». – Воронеж, 2013 г.; Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, 2013г., 2015 г.; XI-ой Международной научно-практической конференции «Современные инструментальные системы, информационные технологии и инновации», Курск, 2014 г.; VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела, Чебоксары, 2014 г; Межвузовской научно-практической конференции курсантов и слушателей «Молодежные чтения памяти Ю.А. Гагарина. Современные проблемы естествознания. Инженерный анализ объектов обеспечения авиации», Воронеж, 2014 г., 2015 г.; Всероссийской научной школе-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы», посвященной 85-летию профессора Д.Д. Ивлева, Чебоксары, 2015 г.; семинарах кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета 2013 – 2016 гг.

### Публикации

Автором опубликовано 18 работ по теме диссертации [58, 59, 65 ,66, 73,75, 77 - 83], из них 4 в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание учёной степени доктора и кандидата наук [66, 75, 83, 84].

### Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 277 наименований. Материал изложен на 201 страницах машинописного текста и содержит 38 рисунков.



Во введении представлен обзор исследований по вопросам устойчивости подземных конструкций и их крепей, решению задач теории пористых и сыпучих сред, проанализированы направления и методы, используемые в этих работах. Обоснована актуальность темы исследования и достоверность полученных результатов, указаны методы исследования, сформулирована цель работы, научная новизна, практическая значимость полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена исследованию устойчивости деформирования пористых сред со сложной реологией сжатого скелета на основе ТЛТУДТ при принятии второго варианта малых докритических деформаций.

Приведены соотношения, определяющие деформированное состояние пористой среды при упругопластическом или упруговязкопластическом поведении сжатого скелета. Дается постановка задач устойчивости для пористых сред с полностью сжатым скелетом, обладающим одновременно упругими, вязкими и пластическими свойствами. Приводится запись основных уравнений ТЛТУДТ в цилиндрической и сферической системах координат. Осуществляется выбор метода решения статических упруговязкопластических задач устойчивости горной механики, а так же алгоритм поиска критических нагрузок, соответствующих потери устойчивости.

Вторая глава посвящена математическому моделированию НДС монолитных цилиндрических и сферических крепей подземных сооружений при условии пористости материала и сложных реологических свойств полностью сжатой матрицы. При этом процесс деформирования пористого материала, находящегося под действием заданных равномерно распределенных сжимающих нагрузок делится на два взаимосвязанных этапа: упругое деформирование материала при наличии несжатых пор и неупругое (упругопластическое или упруговязкопластическое) деформирование полностью сжатого скелета. Решение задачи о распределении полей напряжений и перемещений круговой цилиндрической крепи на каждом этапе деформирования решается в предположении реализации плоского

деформированного состояния, а построение математической модели, описывающей поля напряжений и перемещений для сферической крепи, проводилось в рамках осесимметричной постановки. В аналитическом виде найдены НДС монолитных крепей цилиндрической и сферической формы на первом этапе деформирования; найдены нагрузки, под действием которых происходит полное сжатие пор для всей области крепи; выведены зависимости, описывающие НДС монолитных крепей цилиндрической и сферической формы в упругой и пластической областях деформирования сжатого скелета на втором этапе, а так же выведены уравнения для определения радиусов упругопластических границ в каждой рассматриваемой задаче.

Третья глава посвящена исследованию отказов монолитных крепей подземных сооружений цилиндрической и сферической форм с учетом начальной пористости материалов и неупругой работы сжатого скелета.

Проведено моделирование отказов крепей вертикальных горных выработок и подземных сферических полостей при упругопластическом или упруговязкопластическом поведении сжатой матрицы в для случае пространственной формы потери устойчивости. Кроме того для цилиндрической крепи исследуется вопрос осесимметрической формы потери устойчивости. Для каждой из рассматриваемых задач находятся области устойчивости, оценивается влияния геометрических параметров конструкции, а также различных физико-механических параметров материала на величины критических давлений, соответствующих потери устойчивости крепи. В рамках метода конечных разностей выведены в виде определителей характеристические уравнения для каждой из рассматриваемых задач.

Исследование вопросов устойчивости монолитных крепей горных выработок проводилось на основе соотношений точной трехмерной линеаризированной теории устойчивости в случае малых докритических деформаций при принятии концепции продолжающегося нагружения.

В заключении сформулированы результаты, полученные в диссертации. Приведем основные из них:

1. На основе выбранной модели материала на этапе упругого деформирования сжимаемой пористой среды и на этапе неупругого деформирования тела с полностью сжатой матрицей разработаны и проанализированы математические модели, описывающие НДС монолитных крепей подземных сферических полостей и вертикальных горных выработок в случаях, когда поведение материала с полностью сжатой матрицей моделировалось:

- a) упрочняющимся упругопластическим телом;
- b) упрочняющимся упруговязкопластическим телом.

2. На базе построенных моделей при статических нагрузках впервые произведён аналитический расчёт соответствующих докритических напряжённо-деформированных состояний монолитных крепей горных выработок.

3. Выявлено влияние физико-механических параметров материала крепи (начальной пористости, предела текучести, коэффициента упрочнения и др.), ее конструктивных размеров (толщины, величины внешнего и внутреннего радиусов), величин внешних сжимающих нагрузок на компоненты НДС, а также на размер пластической зоны полностью охватывающей внутренние контуры монолитных цилиндрических и сферических подкрепляющих сооружений.

4. В рамках ТЛТУДТ разработаны математические модели для исследования отказов монолитных крепей подземных сооружений при неупругой работе материалов с полностью сжатой матрицей.

5. На основе построенных моделей впервые решены следующие задачи:

- исследован вопрос о пространственной форме потери устойчивости основного состояния монолитной цилиндрической крепи вертикальной горной выработки для материалов обладающих одновременно упругими, вязкими и пластическими свойствами;

- решенная задача об осесимметричной форме потери устойчивости монолитной крепи вертикального шахтного ствола, в случае когда материал крепи ведет себя как упрочняющаяся упругопластическая среда;

- исследована пространственная форма потери устойчивости основного состояния монолитной сферической крепи подземной полости, когда имеется граница раздела областей упругого и пластического деформирования.

6. Разработан алгоритм решения задач отказов монолитных крепей горных выработок, на основе метода конечных разностей, в рамках которого задачи сведены к системам линейных уравнений для случая неоднородных основных состояний.

7. Выведены характеристические уравнения в виде определителей, с помощью которых находились критические нагрузки для каждой из рассматриваемых задач.

8. Проведены численные эксперименты в рамках разработанных математических моделей отказов монолитных крепей рассмотренных подземных сооружений, на основании которых сделаны следующие выводы:

- наличие в монолитных крепях вертикальных и сферических выработок поверхности разделяющей области упругого и пластического деформирования может существенно влиять на их устойчивость;

- знание докритического НДС подкрепляющей конструкции не достаточно для предсказания надежности ее эксплуатации, т. к. исчерпанию несущей способности предшествует потеря устойчивости основного состояния крепи;

- критическая величина внутреннего давления, соответствующего потери устойчивости монолитной крепи как вертикальной выработки, так и подземной сферической полости существенно зависит как от физико-механических, так и геометрических параметров конструкции. При этом, как при увеличении коэффициента упрочнения  $c$ , так и с ростом предела

текучести  $k$  материала крепи критическая величина внутреннего давления уменьшается, то есть область устойчивости расширяется;

- с ростом давления горного массива на крепь, который может наблюдаться, например, при увеличении глубины заложения выработки величина критического давления на внутренней поверхности крепи увеличивается;

- оптимальная толщина крепи как для цилиндрических, так и сферических подземных конструкций существенно зависит как от давления горного массива на крепь, так и от величины давления равномерно распределенного по внутренней поверхности крепи; при этом с ростом давления со стороны горного массива на крепь ее оптимальная толщина увеличивается, а при увеличении нагрузки на внутреннюю поверхность крепи оптимальная толщина последней может быть уменьшена.

## ГЛАВА 1

### УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРИСТЫХ СРЕД СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ СЖАТОГО СКЕЛЕТА ПРИ МАЛЫХ ДОКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Освоение человеком земных недр всегда связано с образованием в породном массиве искусственных полостей – выработок различного назначения.

Задачи определения НДС подземных конструкций и неразрывно связанные с ними вопросы устойчивости горных выработок и их крепей, решаемых в рамках точных трехмерных уравнений, являются вниманием большого числа исследователей, что свидетельствует об их актуальности.

Характерной особенностью крепей горных выработок, находящихся на больших глубинах, является наличие зоны неупругих деформаций, образующейся между упруго деформированной частью крепи и ее внутренним контуром. Эта зона, как правило, является замкнутой. Поэтому при моделировании потери устойчивости крепей должны использоваться модели, учитывающие одновременно упругие, вязкие, пластические и другие свойства материалов, а так же их пористую структуру.

В рассматриваемой главе в рамках моделей пористой среды [76] со сложными реологическими свойствами сжатого скелета [145, 234] изложена трехмерная теория устойчивости деформируемых сред в случае малых начальных деформаций.

### 1.1. Уравнения, определяющие напряженно-деформированное состояние пористой среды при упруговязкопластическом поведении сжатого скелета

Описание механического поведения пористых тел со сложной реологией (упрочняющейся упруговязкопластической) сжатого скелета будем проводить в рамках модели предложенной в работе [76], структурная схема которой представлена на рисунке 1.1.

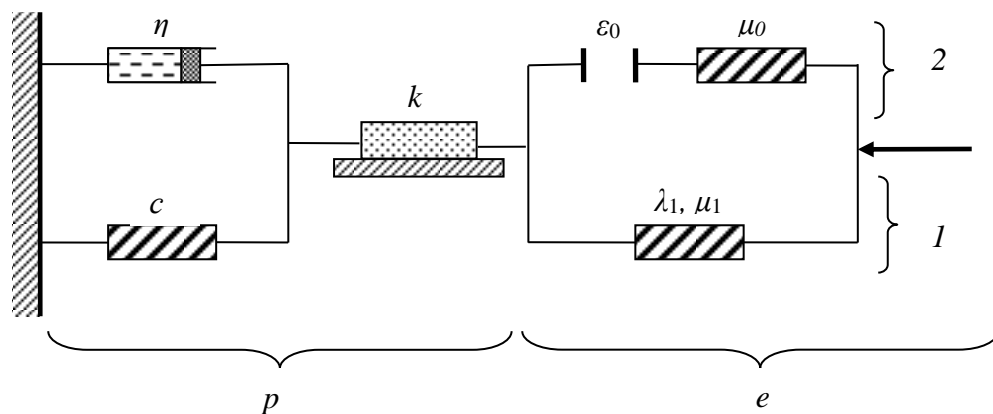


Рисунок 1.1

Модель представляет собой последовательное соединение двух частей: упругой – «*e*» [203] и пластической – «*p*» [234]. Упругая часть состоит из параллельного соединения связки «2» и элемента «1». Связка «2» представляет собой последовательное соединение элемента «жесткого контакта», характеризуемого величиной  $\varepsilon_0$ , определяемой удельным раствором пор и упругого несжимаемого элемента, характеризуемого коэффициентом упругости  $\mu_0$ . Элемент «1» является упругим сжимаемым элементом, характеризуемым коэффициентами Лямэ  $\lambda_1, \mu_1$ . Пластическая часть состоит из параллельной связки вязкого элемента, характеризуемого коэффициентом вязкости  $\eta$  и упругого элемента, характеризуемого коэффициентом упрочнения  $c$ , которая последовательно соединена с пластическим элементом, характеристикой которого является предел текучести  $k$ .

Материал, свойства которого описываются в рамках выбранной модели, будем считать сплошной средой. При этом напряженное состояние среды

описывается симметричным тензором напряжений  $\sigma_j^\beta$ . Компоненты деформаций и напряжений такой среды будем находить в рамках соотношений геометрически линейной теории.

Приведем основные соотношения, описывающие механическое поведение пористых сред при упруговязкопластическом поведении сжатого скелета в рамках выбранной модели (рисунок 1.1) в произвольной криволинейной системе координат.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\nabla_i \sigma_j^i + X_j = 0. \quad (1.1)$$

Здесь и далее  $X_j$  — массовые силы, символ  $\nabla_i$  - обозначает ковариантную производную по  $i$ -ой координате.

На части  $S_1$  поверхности тела, на которой известны напряжения граничные условия, запишем в форме

$$N_i \sigma_j^i = P_j, \quad (1.2)$$

где  $N_i$  — орты нормали к части поверхности  $S_1$  тела,  $P_j$  — составляющие вектора поверхностных сил.

Граничные условия на части  $S_2$  поверхности тела, где известны перемещения примем в форме

$$u_i = u_i^*, \quad (1.3)$$

где  $u_i$  - компоненты вектора перемещений.

В качестве геометрических соотношений при условии малых деформаций будем использовать соотношения Коши, связывающие компоненты  $\varepsilon_j^i$  симметричного тензора деформации с компонентами вектора перемещений  $u_i$

$$2\varepsilon_j^i = \nabla_j u^i + \nabla^i u_j. \quad (1.4)$$

В случае, когда в среде одновременно присутствуют упругая и пластическая области, на границе  $S$  раздела этих зон будут выполняться условия неразрывности вектора перемещений:



$$[u_j]_S = 0 \quad (1.5)$$

и поверхностных сил

$$[N_i \sigma_j^i]_S = 0. \quad (1.6)$$

В (1.5), (1.6) и далее квадратные скобки обозначают скачок значений выражений, заключенных в скобки, на границе  $S$  раздела упругой и пластической областей. По индексам, повторяющимся два раза, предполагается от 1 до 3, если не оговорено противное.

Следуя работе [203], процесс деформирования материала, имеющего пористую структуру с характеристикой  $\varepsilon_0$ , определяемой удельным раствором пор, разделим на два взаимосвязанных этапа. В качестве первого этапа примем деформирование упругого сжимаемого тела с пористой структурой. В качестве второго этапа рассмотрим процесс деформирования среды с полностью сжатой матрицей, обладающей упрочняющимися упруговязкопластическими свойствами. Зависимость между компонентами напряжений и деформаций на первом этапе примем в виде закона Гука для сжимаемого тела

$$\sigma_j^i = \begin{cases} \lambda_1 \varepsilon_\alpha^e g_j^i + 2\mu_1 \varepsilon_j^e, \\ -\varepsilon_\alpha^e < \varepsilon_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

Здесь и далее индекс « $e$ » написанный сверху величин обозначает, что эти величины соответствуют упругой области полностью сжатого скелета,  $\lambda_1, \mu_1$  - параметры Ламе, характеризующие упругий сжимаемый элемент,  $g_j^i$  - смешанные компоненты метрического тензора.

На этапе деформирования материала с полностью сжатой матрицей упругие деформации удовлетворяют закону Гука для несжимаемого тела [76]

$$S_j^i = \begin{cases} 2(\mu_0 + \mu_1) \varepsilon_j^i - 2\mu_0 \left( \varepsilon_j^i \right)_0 + \frac{2}{3} \mu_1 \varepsilon_0 g_j^i, \\ -\varepsilon_\alpha^e = \varepsilon_0, \end{cases} \quad (1.8)$$

где  $S_j^i$  - смешанные компоненты девиатора напряжений;  $\mu_0 + \mu_1$  - модуль сдвига материала с полностью сжатой матрицей, обладающей свойством

дальнейшей несжимаемости,  $\left(\begin{smallmatrix} e \\ \varepsilon_j^i \end{smallmatrix}\right)_0$  - смешанные компоненты тензора упругих деформаций, определяемые на момент полного сжатия пор, то есть при выполнении условия  $\varepsilon_\alpha^\alpha = -\varepsilon_0$ .

В области пластического деформирования материала с полностью сжатой матрицей примем модель А.Н. Спорыхина, учитывающей наряду с вязкими упругие и пластические свойства среды. В этом случае поверхность нагружения имеет вид [214]

$$F \equiv \left( S_j^i - c \varepsilon_j^i - \eta e_j^i \right) \left( S_i^j - c \varepsilon_i^j - \eta e_i^j \right) - k^2 = 0, \quad (1.9)$$

Здесь и далее индекс « $p$ » приписанный сверху величин обозначает, что эти величины соответствуют пластической зоне материала с полностью сжатым скелетом,  $\eta$ ,  $c$  - коэффициенты динамической вязкости и трансляционного упрочнения соответственно,  $k$  — предел текучести полностью сжатой матрицы,  $e_j^i$  - смешанные компоненты тензора скоростей пластических деформаций.

В качестве соотношений, связывающих полные  $\varepsilon_{ij}$ , упругие  $\varepsilon_{ij}^e$  и пластические деформации  $\varepsilon_{ij}^p$  в пластической области деформирования материала с полностью сжатым скелетом примем

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (1.10)$$

Объемная деформация в пластической и упругой областях соответственно удовлетворяет условиям несжимаемости

$$\varepsilon_\alpha^\alpha = 0, \quad \varepsilon_\alpha^\alpha = -\varepsilon_0. \quad (1.11)$$

Соотношения ассоциированного закона пластического течения, связывающие напряжения и скорости пластических деформаций при выполнении (1.9) выберем в виде

$$e_j^p = \psi \left( S_j^i - c \varepsilon_j^i - \eta e_j^i \right), \quad (1.12)$$

где  $\psi$  — положительный скалярный множитель.

В случае, когда для описания поведения материала в пластической зоне достаточно учитывать только упрочняющиеся упругопластические свойства полностью сжатой матрицы, то соотношения (1.9) и (1.12) соответственно переписутся в виде [45, 144, 150]

$$F \equiv \left( S_j^i - c \varepsilon_j^i \right) \left( S_i^j - c \varepsilon_i^j \right) - k^2 = 0, \quad (1.13)$$

$$e_j^p = \psi \left( s_j^i - c \varepsilon_j^i \right). \quad (1.14)$$

Отметим, что для осуществления перехода интегрированием от зависимостей вида «напряжения - скорости деформаций» к зависимостям вида «напряжения – деформации» необходимо, чтобы реализовывался процесс простого нагружения или близкие к нему процессы. Данная гипотеза основана как на анализе экспериментальных данных [267], так и на соображениях теоретического характера [146, 206].

Указанные условия применимости приведенных соотношений сужают класс решаемых задач и дают возможность получения только приближенного решения.

Приведенная система уравнений (1.1) - (1.14) положена в основу определения НДС рассматриваемых далее задач.

## **1.2. Постановка задач об устойчивости деформирования пористых упруговязкопластических сред. Линеаризация соотношений по малым возмущениям.**

Известно [216 - 221], что конструкции, испытывающие упругопластические или упруговязкопластические деформации, обладают

свойством внутренней неконсервативности, так как возникающие в них вязкие и пластические деформации необратимы. Следовательно, вопрос об устойчивости основного состояния такой системы при превышении предела упругости должен решаться в рамках динамического подхода, то есть на основе анализа движения этой системы вблизи начального состояния при сообщении ей малых возмущений.

При упругом поведении конструкции в рамках динамического подхода основное состояние считается устойчивым, если возмущения, накладываемые на компоненты основного состояния со временем затухают, и неустойчивым, когда возмущения возрастают при  $t \rightarrow \infty$ .

Основная трудность, возникающая при прямом переносе критерия устойчивости из механики упругого тела в механику упругопластического тела, заключается в том, что появление даже несущественных пластических деформаций приводит к неустойчивому состоянию в смысле критерия устойчивости сформулированного выше (в силу необратимости пластических деформаций). Кроме этого появляются затруднения связанные с тем, что при наличии необратимых (пластических) деформаций переход от одного равновесного состояния к другому может сопровождаться появлением дополнительных зон разгрузки в момент потери устойчивости. Это приводит к значительным математическим трудностям, связанным с решением задачи устойчивости с неизвестными границами раздела зон упругости и пластичности, которые должны быть определены в ходе решения задачи. В связи с этим естественны упрощения задач, связанные с осуществлением перехода к задачам с известными зонами разгрузки. Переход к ним может быть осуществлен следующим образом [94, 98]: *при исследовании вопроса устойчивости системы, в которой наблюдается явление разгрузки, применяется концепция Шенли (обобщенная концепция продолжающегося нагружения) и исследуется соответствующая линеаризованная задача с известными зонами разгрузки, возникшими в основном состоянии.*

При решении вопроса о бифуркации состояния равновесия или процесса деформирования пространственных тел с реологическими свойствами будем

придерживаться следующей гипотезы: об устойчивости докритического состояния пространственных тел с реологическими свойствами будем судить по поведению малых возмущений, накладываемых на основное состояние, во времени в рамках соответствующей линеаризованной задачи. При этом [90, 97, 98, 214, 224, 234] процесс деформирования или состояние равновесия считается неустойчивым, если возмущения при  $t \rightarrow \infty$  неограниченно возрастают и устойчивым - если со затухают (условно называют устойчивым также состояние, когда получаются только периодические решения).

Рассмотрим пористое тело с полностью сжатой матрицей произвольного объема  $V$ . Пусть на некоторой части поверхности  $S_2$  полностью сжатой матрицы, обладающей упруговязкопластическими свойствами известны перемещения  $u_i$ , а на другой части поверхности  $S_1$  с заданы поверхностные усилия  $P_i$ . При этом  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_i = P_i^0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_i = u_i^0$  и величины  $P_i^0$  и  $u_i^0$  не зависят от времени. Обозначим через  $x^i = x^i(\xi^\alpha, t)$  поверхность раздела упругого и пластического состояния среды с полностью закрытыми порами, а через  $\xi^\alpha$  - криволинейные координаты, определенные на этой поверхности.

Пусть при соответствующих граничных условиях (1.2), (1.3) и условиях сопряжения (1.5), (1.6), решение системы уравнений (1.1), (1.4), (1.7) - (1.12) в случае упруговязкопластического поведения сжатой матрицы или (1.1), (1.4), (1.7), (1.8), (1.10), (1.11), (1.13), (1.14) есть

$$\sigma_{ij}^0(x_k, t), \varepsilon_{ij}^0(x_k, t), \varepsilon_{ij}^{0p}(x_k, t), \varepsilon_{ij}^{0e}(x_k, t), u_i^0(x_k, t), \quad (1.15)$$

где  $x_k$  - криволинейные координаты,  $t$  - время.

Пусть при  $t \rightarrow \infty$  решения (1.15) сходятся к величинам, не зависящим от времени

$$\sigma_{ij}^0(x_k), \varepsilon_{ij}^0(x_k), \varepsilon_{ij}^{0p}(x_k), u_i^0(x_k). \quad (1.16)$$

В дальнейшем исследуется устойчивость этого состояния относительно малых возмущений геометрических параметров от исходной конфигурации тела, граничных условий, массовых сил. При этом под термином «состояние» будем понимать как процесс деформирования, если при его описании время является значимым параметром, так и состояние равновесия.

Решение для возмущенного состояния будем искать в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(x_k, t) &= \sigma_{ij}^0(x_k, t) + \sigma_{ij}^+(x_k, t), \\ \varepsilon_{ij}(x_k, t) &= \varepsilon_{ij}^0(x_k, t) + \varepsilon_{ij}^+(x_k, t), \\ \varepsilon_{ij}^P(x_k, t) &= \varepsilon_{ij}^{P0}(x_k, t) + \varepsilon_{ij}^{P+}(x_k, t), \\ u_i(x_k, t) &= u_i^0(x_k, t) + u_i^+(x_k, t).\end{aligned}\tag{1.17}$$

Здесь и далее индекс "0" вверху величин обозначает их принадлежность к компонентам основного (докритического) состояния, а индекс "+" соответствует компонентам возмущений.

Об устойчивости основного состояния будем судить по линеаризованной системе уравнений, которую получим в предположении «малости» компонент возмущений и сохраняя только линейные члены разложения.

Рассмотрим второй вариант теории малых докритических деформаций (удлинения и сдвиги малы по сравнению с единицей, а начальное деформированное состояние определяется по геометрически линейной теории) [100]. В этом случае трехмерные линеаризованные уравнения равновесия для областей пластического и упругого деформирования тела с полностью сжатой матрицей имеют вид

$$\nabla_i \left( \sigma_j^+ + \sigma_\alpha^0 \nabla^\alpha u_j^+ \right) + X_i^+ - \rho \frac{\partial^2 u_j^+}{\partial t^2} = 0,\tag{1.18}$$

Граничные условия на части внешней поверхности тела, где заданы напряжения следующие

$$N_i \left( \sigma_j^+ + \sigma_\alpha^0 \nabla^\alpha u_j^+ \right) = P_j^+, \quad (1.19)$$

при этом [104] в случае следящей нагрузки

$$P_j^+ = P_\alpha^0 \nabla^\alpha u_j^+, \quad X_j^+ = X_\alpha^0 \nabla^\alpha u_j^+, \quad (1.20)$$

а в случае «мертвой» нагрузки

$$P_j^+ = X_j^+ = 0. \quad (1.21)$$

Граничные условия на части поверхности тела, где заданы перемещения имеют вид

$$u_j^+ = 0. \quad (1.22)$$

Здесь  $X_j^+$ ,  $P_j^+$  - возмущения объёмных и поверхностных сил,  $\rho$  - плотность материала сжатой матрицы.

Для пористого тела с полностью сжатыми порами соотношения для полных деформаций (1.10), закон Гука (1.8), а также соотношения Коши (1.4), в силу их линейности в возмущениях переписутся так:

$$\varepsilon_j^i = \varepsilon_j^{ie} + \varepsilon_j^{ip}, \quad (1.23)$$

$$S_j^i = 2\mu \varepsilon_j^i, \quad (1.24)$$

$$2\varepsilon_j^i = \nabla^i u_j^+ + \nabla^j u_i^+. \quad (1.25)$$

$$\text{В (1.24) } S_j^i = \sigma_j^i - pg_j^i, \quad p = \frac{1}{3} \sigma_\alpha^\alpha, \quad \mu = \mu_0 + \mu_1.$$

На упругопластической границе  $x^i = x^i + x^i$  напряжения и перемещения непрерывны, то есть реализуются условия  $\left[ \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^+ \right] n_j = 0$ ,  $\left[ u_i^0 + u_i^+ \right] = 0$ .

Линеаризуя эти соотношения получим

$$\left[ \sigma_{ij}^+ + \nabla_\beta \left( \sigma_{ij}^0 x^\beta \left( \xi^\alpha, t \right) \right) \right] n_j = 0, \quad \left[ u_i^+ + \nabla_\beta \left( u_i^0 x^\beta \left( \xi^\alpha, t \right) \right) \right] = 0, \quad (1.26)$$

при  $x^{\beta+}(\xi^{\alpha}, t) = x^{\beta 0}(\xi^{\alpha}, t)$ . Здесь и далее квадратные скобки обозначают разность соответствующих величин, принадлежащих упругой и пластической областям тела,  $n_j$ - нормаль к поверхности  $x^{\beta 0} = x^{\beta 0}(\xi^{\alpha}, t)$ .

Для линейризации функции нагружения (1.9) и ассоциированного закона пластического течения (1.12), представим их в виде:

$$F = F\left(S_j^i, \varepsilon_j^i, e_j^i\right) = 0, \quad (1.27)$$

$$e_j^i = \psi \frac{\partial F}{\partial \sigma_j^i}. \quad (1.28)$$

Проведём разложение соотношений (1.27), (1.28) в ряд Тейлора и опустим члены этого ряда выше первого порядка

$$\frac{\partial F}{\partial S_j^i} S_j^i + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_j^i} \varepsilon_j^i + \frac{\partial F}{\partial e_j^i} e_j^i = 0, \quad (1.29)$$

$$e_j^i = \psi \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_j^i} \right)^0 + \psi \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_j^i} \right)^+ . \quad (1.30)$$

Учитывая (1.9), (1.12) после вычисления соответствующих производных из соотношений (1.29), (1.30) получим, что в области пластического деформирования сжатого скелета линейризованное условие пластичности и ассоциированный закон течения примут вид

$$\left( S_j^i - c \varepsilon_j^i - \eta e_j^i \right) \left( S_i^j - c \varepsilon_i^j - \eta e_i^j \right) = 0, \quad (1.31)$$

$$e_j^i = \psi \left( s_j^i - c \varepsilon_j^i - \eta e_j^i \right) + \psi \left( s_j^i - c \varepsilon_j^i - \eta e_j^i \right)^0. \quad (1.32)$$

Условие несжимаемости сжатого скелета таково

$$\varepsilon_{\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (1.33)$$



Исключая из соотношений (1.31), (1.32) вариации упругих  $\varepsilon_j^{+e}$  и пластических  $\varepsilon_j^{+p}$  деформаций, а также величину  $\psi^+$ , получим в области в пластической области сжатого скелета

$$\left(2\mu \dot{S}_j^+ - c \left(2\mu \varepsilon_j^+ - \dot{S}_j^+\right) - \eta \left(2\mu e_j^+ - \dot{S}_j^+\right)\right) \left(S_j^0 - c \varepsilon_j^{0p} - \eta e_j^0\right) = 0, \quad (1.34)$$

$$2\mu e_j^+ - \dot{S}_j^+ = \psi^0 \left(2\mu \dot{S}_j^+ - c \left(2\mu \varepsilon_j^+ - \dot{S}_j^+\right) - \eta \left(2\mu e_j^+ - \dot{S}_j^+\right)\right) + \\ + k^{-2} \left(2\mu e_\alpha^+ - \dot{S}_\alpha^+\right) \left(S_\beta^0 - c \varepsilon_\beta^{0p} - \eta e_\beta^0\right) \left(S_j^0 - c \varepsilon_j^{0p} - \eta e_j^0\right). \quad (1.35)$$

Таким образом, система уравнений (1.18) - (1.26), (1.33) – (1.35) является замкнутую линеаризированной системой уравнений, моделирующей возмущенное состояние тела с полностью сжатой матрицей, обладающей одновременно упругими, вязкими и пластическими свойствами и имеющей границу раздела сред.

Согласно принятому критерию устойчивости невозмущенный равновесный процесс будем считать устойчивым, если все решения системы уравнений (1.18), (1.20), (1.21) - (1.25), (1.33) – (1.35) с краевыми условиями (1.19), (1.22) и условиями (1.26) затухают во времени. Если же среди решений найдется хотя бы одно, неограниченно возрастающее во времени, то основное состояние является неустойчивым.

Указанная система является системой дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Поиск точных аналитических решений таких систем приводит к существенным трудностям математического плана. В виду этого, следуя [234], вводятся некоторые предположения и упрощения, позволяющие свести вышеуказанную систему уравнений к более простому виду.

Устремляя время  $t$  к бесконечности, и учитывая при этом, что скорости пластических деформаций в докритическом состоянии и скалярный множитель

в ассоциированной законе пластического течения стремятся к нулю,  $\left( \lim_{t \rightarrow \infty} e_j^{0p} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \psi^0 = 0 \right)$ , получим предельную систему уравнений.

Уравнения равновесия в областях упругого и пластического деформирования примут вид

$$\nabla_i (\sigma_j^+ + \sigma_\alpha^0 \nabla^\alpha u_j^+) - \rho \ddot{u}_j^+ = 0. \quad (1.36)$$

Уравнения состояния для пластической области сжатого скелета переписутся в форме

$$\left( 2\mu \dot{S}_j^+ - c \left( 2\mu \varepsilon_j^+ - \dot{S}_j^+ \right) - \eta \left( 2\mu e_j^+ - \dot{S}_j^+ \right) \right) \left( S_i^0 - c \varepsilon_i^{0p} \right) = 0, \quad (1.37)$$

$$2\mu e_j^+ - \dot{S}_j^+ = k^{-2} \left( 2\mu e_\alpha^+ - \dot{S}_\alpha^+ \right) \left( S_\beta^0 - c \varepsilon_\beta^{0p} \right) \left( S_j^0 - c \varepsilon_j^{0p} \right), \quad (1.38)$$

а в упругой области сжатого скелета примут вид

$$S^{ij} = 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^+. \quad (1.39)$$

Условия (1.26) на упругопластической границе  $\Gamma$  при предельном переходе преобразуются к виду

$$\left[ \sigma^{ij} \right] n_j \Big|_\Gamma = 0, \left[ u^i \right] \Big|_\Gamma = 0. \quad (1.40)$$

В уравнениях состояния для области пластического деформирования тела (1.37) – (1.39) вариации компонент тензора деформаций связаны с вариациями компонент вектора перемещений формулами Коши (1.25).

Полагая в соотношениях (1.36) – (1.40) коэффициент вязкости  $\eta = 0$ , получим краевую задачу для исследования устойчивости основного состояния среды с полностью сжатой матрицей обладающей одновременно упругими и пластическими свойствами с поверхностью нагружения вида (1.13).

### 1.3. Предельные системы уравнений. Статические задачи первого и второго типа.

В общем случае, учитывая наличие демпфирующих членов в возмущениях, возмущения поверхностных  $p_i^+$  и объемных  $X_i^+$  сил можно представить в следующем виде [92]:

$$X_i^+ = M_{i\alpha}^{(1)+} u_\alpha + M_{i\alpha}^{(2)+} \dot{u}_\alpha, p_i^+ = \Pi_{i\alpha}^{(1)+} u_\alpha + \Pi_{i\alpha}^{(2)+} \dot{u}_\alpha, \quad (1.41)$$

где  $M_{i\alpha}^{(1)}, M_{i\alpha}^{(2)}, \Pi_{i\alpha}^{(1)}, \Pi_{i\alpha}^{(2)}$  - линейные дифференциальные операторы по пространственным координатам, коэффициенты которых зависят от пространственных координат и времени.

По виду линеаризованных задач задачи теории устойчивости допускают разделение на статические и динамические. К статическим задачам теории устойчивости отнесем задачи, для которых  $M_{i\alpha}^{(2)} \equiv 0$  и  $\Pi_{i\alpha}^{(2)} \equiv 0$  при всех значениях  $i$  и  $\alpha$  и тогда выражения (1.41) применительно к таким задачам перепишутся в виде

$$X_i^+ = M_{i\alpha}^{(1)+} u_\alpha = M_{i\alpha}^+ u_\alpha, p_i^+ = \Pi_{i\alpha}^{(1)+} u_\alpha = \Pi_{i\alpha}^+ u_\alpha. \quad (1.42)$$

К динамическим задачам устойчивости отнесем задачи, для которых в выражениях (1.41)  $M_{i\alpha}^{(2)} \neq 0$  и  $\Pi_{i\alpha}^{(2)} \neq 0$ , хотя бы для некоторых значений  $i$  и  $\alpha$ .

При выполнении условий  $M_{i\alpha}^{(1)} = M_{i\alpha}^{(2)} = \Pi_{i\alpha}^{(1)} = \Pi_{i\alpha}^{(2)} = 0$ , действующие нагрузки называются «мертвыми» (направление действия нагрузок фиксировано и не изменяется при деформировании рассматриваемого тела).

Можно также классифицировать задачи теории устойчивости по подходам (методам) к их исследованию: статическому подходу (методу Эйлера) и динамическому подходу, связанному с анализом малых возмущений в окрестности начального состояния.

Динамический метод исследования является более общим по сравнению со статическим, хотя и более сложным. Он может применяться и к динамическим и к статическим задачам. В этом случае об устойчивости процесса деформирования или состояния равновесия пространственных тел, обладающих реологическими свойствами, судят по анализу поведения малых возмущений, накладываемых на компоненты основного состояния с течением времени. При этом неустойчивым называется такое состояние равновесия или движения, при котором возмущения неограниченно возрастают при  $t \rightarrow \infty$ ; если же возмущения со временем затухают (носят периодический характер) то такое состояние (равновесия или движения) называют устойчивыми (условно устойчивым).

В случае применения метода Эйлера (статического подхода) к задачам устойчивости состояние равновесия считается неустойчивым, если вместе с исходным (новозмущенным) состоянием могут существовать, близкие к нему состояния равновесия, то есть когда малые возмущения отличны от нуля. В этом случае требуется определить собственные значения (комбинации параметров нагружения) краевой задачи. Таким образом, при данном подходе задача сводится к нахождению точек разветвления формы равновесия основного состояния. Для решения статических задач можно использовать как метод Эйлера [98], так и динамический метод исследования. Отметим, что метод Эйлера значительно проще динамического метода. При этом условия, при которых оба метода (статический и динамический) дают одинаковые результаты для упругопластических тел при малых деформациях получены в работах [94, 100], а для упруговязкопластических сред в работе [234].

Исходя из сказанного, зная общее решение системы уравнений (1.25), (1.36) – (1.39), (1.25), (1.19) и устремляя в этих решениях  $t \rightarrow \infty$  (предельный случай), в рамках динамического подхода можно построить область устойчивости в пространстве параметров нагружения.

При исследовании задачи устойчивости (1.19), (1.25), (1.36) – (1.39) в компонентах возмущений тензоров деформаций и напряжений, а также вектора

перемещений, выделим множитель  $e^{\beta t}$  ( $\beta = i\omega$  - комплексная величина), то есть решения будем искать в виде

$$u_i^+(x_k, t) = u_i^+(x_k) e^{\beta t}, \sigma_j^+(x_k, t) = \sigma_j^+(x_k) e^{\beta t}, \varepsilon_j^+(x_k, t) = \varepsilon_j^+(x_k) e^{\beta t}. \quad (1.43)$$

Дальнейшее исследование линеаризованной задачи (1.19), (1.25), (1.36) – (1.39), (1.40) будем проводить для предельного случая. То есть исходную систему (1.19), (1.25), (1.36) – (1.39), (1.40) заменим на предельную, которая получается из данной, если в ее коэффициентах положить  $t \rightarrow \infty$ . При этом вопрос о правомерности такой замены, как отмечалось выше, рассматривался ранее в [106, 214, 234]. Итак, при исследовании устойчивости упруговязкопластических тел с полностью сжатой матрицей при малых докритических деформациях, примем эти предположения.

В этом случае соотношения (1.36) - (1.38) переписутся в виде

$$\nabla_i (\sigma_j^i + \sigma_\alpha^i \nabla^\alpha u_j) - \rho \omega^2 u_j = 0. \quad (1.44)$$

$$((c + 2\mu + \eta\beta) S_j^i - 2\mu(c + \eta\beta) \varepsilon_j^i) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0p \\ S_i^j - c \varepsilon_i^j \end{pmatrix} = 0, \quad (1.45)$$

$$2\mu \varepsilon_j^i - S_j^i = k^{-2} (2\mu \varepsilon_\alpha^l - S_\alpha^l) \begin{pmatrix} 0 & 0p \\ S_l^\alpha - c \varepsilon_l^\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0p \\ S_j^i - c \varepsilon_j^i \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

В силу линейности уравнения (1.23), (1.25), (1.39) сохраняют свой вид.

Из соотношений (1.45) и (1.46) можно получить

$$\sigma_j^i = p \delta_j^i + 2\mu \varepsilon_j^i - \frac{4\mu^2 \begin{pmatrix} 0 & 0p \\ S_j^i - c \varepsilon_j^i \end{pmatrix}}{k^2(c + 2\mu + \eta\beta)} \begin{pmatrix} 0 & 0p \\ S_l^\alpha - c \varepsilon_l^\alpha \end{pmatrix} \varepsilon_\alpha^l. \quad (1.47)$$

Формулу (1.21), для удобства дальнейшего использования, перепишем в виде

$$\sigma_j^i = p \delta_j^i + 2\mu \varepsilon_j^i - \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_j^i & f_l^\alpha \end{pmatrix} \varepsilon_\alpha^l, \quad (1.48)$$

где величина  $\nu$  в пластической области деформирования тела с полностью сжатой матрицей имеет вид

$$\nu = \frac{4\mu^2}{k^2(2\mu + c + \eta\beta)}, \quad (1.49)$$

в упругой области надо положить  $\nu = 0$ , величины  $f_j^i$  определяются соотношением

$$f_j^i = S_j^i - c \varepsilon_j^i. \quad (1.50)$$

Соотношение (1.48) представляет собой линеаризованную связь между амплитудными значениями компонент возмущений напряжения и компонент возмущений деформаций для несжимаемого упрочняющегося упруговязко-пластического тела с полностью сжатым скелетом.

В случае если докритическое НДС определяется только главными компонентами напряжений и деформаций уравнения состояния для пористых тел с полностью сжатой матрицей при условии ее дальнейшей несжимаемости, согласно [239], можно записать в виде

$$\sigma_j^i = (a_{i\alpha} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha u_\alpha + p) g_j^i + (1 - g_j^i) g^{ii} G_j^i (\nabla_j u^i + \nabla^i u_j). \quad (1.51)$$

Здесь присутствует суммирование по  $\alpha$  и не производится по  $i, j$ . Коэффициенты  $a_{i\alpha}$  и  $G_j^i$  в (1.51) имеют вид:

в упругой области деформирования материала с полностью сжатым скелетом

$$a_{\beta\alpha} = 2\mu g_{\beta\alpha}, \quad G_j^\beta = \mu \quad (1.52)$$

в пластической области упрочняющейся полностью сжатой матрицы обладающей одновременно упругим, вязкими и пластическим свойствами

$$a_{\beta\alpha} = 2\mu g_{\beta\alpha} - \nu f_{\alpha\alpha}^0 f_{\beta\beta}^0, \quad G_j^\beta = \mu, \quad (1.53)$$

Условие несжимаемости (1.33) для сжатого скелета представимо в форме

$$\nabla^\alpha u_\alpha = 0. \quad (1.54)$$

Граничные условия на поверхности, где заданы напряжения запишутся в форме

$$N_i \left( \sigma_j^i + \sigma_\alpha^i \nabla^\alpha u_j \right) = P_j. \quad (1.55)$$

Граничные на поверхности тела, где заданы перемещения имеют вид

$$u_i = 0. \quad (1.56)$$

Система уравнений (1.23), (1.25), (1.39), (1.44), (1.48) - (1.50), (1.54) – (1.56), является замкнутой в случае, когда всё тело находится в пластическом состоянии (первый тип задач).

В том случае, если нагружение происходит таким образом, что одна часть тела с полностью сжатыми порами находится в упругом, а другая часть – в пластическом состоянии (второй тип задач), необходимо к системе уравнений (1.23), (1.25), (1.39), (1.44), (1.48) - (1.50), (1.54) – (1.56) присоединить условия непрерывности на границе раздела упругой и пластической зон

$$\left[ \left( \sigma_j^i + \sigma_\alpha^i \nabla^\alpha u_j \right) N_i \right] \Big|_\Gamma = 0, [u_i] \Big|_\Gamma = 0. \quad (1.57)$$

Таким образом, статические задачи устойчивости при использовании динамического подхода в случае геометрически-линейной теории сводятся к однородной линейной задаче (1.44), (1.48), (1.25) с соответствующими граничными условиями (1.55), (1.56) и условиями непрерывности (1.57). Следовательно, в рамках динамического подхода статические задачи сводятся к задачам на собственные значения относительно параметра  $\beta$ . Обозначая через  $\beta_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$ ) собственные значения полученной краевой задачи, в рамках принятого критерия устойчивости получим, что основное состояние тела будет устойчивым, если для всех  $\beta_\alpha$  выполняются условия

$$\text{Im } \beta_\alpha \geq 0, (\alpha = 1, 2, \dots, \infty). \quad (1.58)$$

Условие (1.58) определяет область устойчивости в пространстве параметров нагружения, характеризующих конкретную задачу (величины  $\beta_\alpha$  зависят не только от геометрии тела и вида соотношений (1.48), но также от

величин внешних нагрузок). Поэтому граница области устойчивости и соответствующие критические значения комбинаций параметров нагружения (величины, характеризующие внешние нагрузки) определяются из условия

$$\min(\operatorname{Im} \beta_\alpha) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \infty). \quad (1.59)$$

Таким образом, статические задачи при динамическом методе исследования сводятся к нахождению не нулевых возмущений перемещений и соответствующих собственных чисел, удовлетворяющих (1.59), по которым вычисляется первые в истории нагружения критические значения внешних сил при неизменяющихся зонах разгрузки, возникших в основном состоянии.

#### 1.4. Основные соотношения трехмерной линейризированной теории устойчивости деформируемых тел в цилиндрической и сферической системах координат.

Для записи линейризованных соотношений (1.44), (1.48) - (1.50), (1.54) – (1.57) в цилиндрической и сферической системах координат, воспользуемся правилом нахождения ковариантных производных тензоров первого и второго рангов. Ковариантная производная смешанных компонент тензора второго ранга и ковариантная производная ковариантных компонент вектора определяются соотношениями

$$\nabla_k \sigma_i^j = \sigma_{i,k}^j - \sigma_\alpha^j \Gamma_{ik}^\alpha + \sigma_i^\alpha \Gamma_{\alpha k}^j, \quad \nabla_i w_j = w_{j,i} - w_\alpha \Gamma_{ij}^\alpha, \quad \nabla^i w_j = g^{i\alpha} \nabla_\alpha w_j. \quad (1.60)$$

Здесь и далее нижний индекс, стоящий после запятой, указывает на дифференцирование по координате, соответствующей этому индексу.

Здесь  $\Gamma_{ij}^\beta$  - символы Кристоффеля второго рода, при этом

$$\Gamma_{ij}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left( \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} \right). \quad (1.61)$$

В цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  компоненты метрических тензоров  $g_{ij}$ ,  $g^{ij}$  таковы



$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.62)$$

В этом случае с учетом (1.61) и (1.62) ненулевыми будут следующие компоненты  $\Gamma_{ij}^\beta$

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}. \quad (1.63)$$

Физические составляющие произвольного вектора  $\mathbf{u}$  и симметричного тензора второго ранга  $\mathbf{M}$  в системе координат  $(r, \theta, z)$  с учетом (1.62) есть

$$\begin{aligned} u_r = u^1 = u_1, \quad u_\theta = r \cdot u^2 = \frac{1}{r} \cdot u_2, \quad u_z = u^3 = u_3, \\ m_{rr} = m_r = m^{11} = m_{11}, \quad m_{r\theta} = r m^{12} = \frac{1}{r} m_{12}, \quad v_{rz} = m^{13} = m_{13}, \\ m_{\theta r} = m_{r\theta}, \quad m_{\theta\theta} = r^2 m^{22} = \frac{1}{r^2} m_{22}, \quad m_{\theta z} = r m^{23} = \frac{1}{r} m_{23}, \\ m_{zr} = m_{rz}, \quad m_{z\theta} = m_{\theta z}, \quad m_{zz} = m_z = m^{33} = m_{33}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Используя соотношения (1.60), (1.63) и (1.64), а также вводя обозначения  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $u_3 = w$ , линеаризированные уравнения равновесия (1.44) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{r,r} + \frac{1}{r}(\tau_{r\theta,\theta} + \sigma_r - \sigma_\theta) + \tau_{rz,z} + \frac{1}{r^2}(r^2 \rho \omega^2 - \sigma_\theta^0)u + \frac{1}{r}(r\sigma_{r,r}^0 + \tau_{r\theta,\theta}^0 + \sigma_r^0)u_r + \\ + \frac{1}{r^2}(r\tau_{r\theta,r}^0 + \sigma_{\theta,\theta}^0)u_\theta + \sigma_{z,z}^0 \cdot u_{,z} + \sigma_r^0 \cdot u_{,rr} + \frac{1}{r^2}\sigma_\theta^0 \cdot u_{,\theta\theta} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta}^0 \cdot u_{,r\theta} - \\ - \frac{1}{r^2}(r\tau_{r\theta,r}^0 + \sigma_{\theta,\theta}^0)v - \frac{2}{r}\tau_{r\theta}^0 \cdot v_{,r} - \frac{2}{r^2}\sigma_\theta^0 \cdot v_{,\theta} = 0, \\ 2\tau_{r\theta} + r(\tau_{r\theta,r} + \tau_{\theta z,z}) + \sigma_{\theta,\theta} + \frac{1}{r}(r\tau_{r\theta,r}^0 + \sigma_{\theta,\theta}^0)u + 2\tau_{r\theta}^0 \cdot u_{,r} + \frac{2}{r}\sigma_\theta^0 \cdot u_{,\theta} + \\ + \frac{1}{r}(r^2 \rho \omega^2 - \sigma_\theta^0)v + (r\sigma_{r,r}^0 + \tau_{r\theta,\theta}^0 + \sigma_r^0)v_{,r} + \frac{1}{r}(r\tau_{r\theta,r}^0 + \sigma_{\theta,\theta}^0)v_{,\theta} + \\ + r\sigma_r^0 \cdot v_{,rr} + \frac{1}{r}\sigma_\theta^0 \cdot v_{,\theta\theta} + r\sigma_z^0 \cdot v_{,zz} + 2\tau_{r\theta}^0 \cdot v_{,r\theta} = 0, \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$\begin{aligned} & \tau_{rz,r} + \frac{1}{r}(\tau_{rz} + \tau_{\theta z,\theta}) + \sigma_{z,z} + \rho\omega^2 w + \frac{1}{r}(r\sigma_{r,r}^0 + \tau_{r\theta,\theta}^0 + \sigma_r^0)w_{,r} + \\ & + \frac{1}{r^2}(r\tau_{r\theta,r}^0 + \sigma_{\theta,\theta}^0)w_{\theta} + \sigma_{z,z}^0 \cdot w_{,z} + \sigma_r^0 \cdot w_{,rr} + \frac{1}{r^2}\sigma_{\theta}^0 \cdot w_{,\theta\theta} + \sigma_z^0 \cdot w_{,zz} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta}^0 \cdot w_{,r\theta} = 0, \end{aligned}$$

где  $\tau_{ij}$  ( $i \neq j$ ) - касательные компоненты тензора напряжений.

Соотношения Коши (1.25) и условие несжимаемости (1.54) в цилиндрической системе координат примут соответственно вид

$$\varepsilon_r = u_{,r}, \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{r}(v_{,\theta} + u), \quad \varepsilon_z = w_{,z}, \quad (1.66)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2r}(u_{,\theta} + rv_{,r} - v), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,r}), \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2r}(rv_{,z} + w_{\theta}).$$

$$u_{,r} + \frac{1}{r}(v_{,\theta} + u) + w_{,r} = 0. \quad (1.67)$$

Граничные условия в напряжениях (1.55), при выборе компонент вектора нормали  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = N_3 = 0$ , запишутся в форме

$$\begin{aligned} & \sigma_r + \sigma_r^0 \cdot u_{,r} + \frac{1}{r}\tau_{r\theta}^0 \cdot (u_{,\theta} - v) = 0, \\ & \tau_{r\theta} + \sigma_r^0 \cdot v_{,r} + \frac{\tau_{r\theta}^0}{r} \cdot (v_{,\theta} + u) = 0, \\ & \tau_{rz} + \sigma_r^0 \cdot w_{,r} + \frac{\tau_{r\theta}^0}{r} \cdot w_{,\theta} = 0. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Используя уравнения состояния (1.48) и соотношения Коши (1.66), получим запись уравнений равновесия (1.65) в перемещениях

$$\begin{aligned} & r \cdot p_{,r} + \frac{1}{r}(r^2 \rho \omega^2 - \sigma_{\theta}^0 - \alpha_5 + r\alpha_{2,r} + \alpha_{8,\theta}) \cdot u + (r\sigma_{r,r}^0 + \tau_{r\theta,\theta}^0 + \sigma_r^0 + \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 + \\ & + r\alpha_{1,r} + \alpha_{7,\theta}) \cdot u_{,r} + \left( \tau_{r\theta,r}^0 + \frac{\sigma_{\theta,\theta}^0}{r} + \alpha_3 - \alpha_6 + \frac{\alpha_8}{r} + r\alpha_{3,r} + \alpha_{9,\theta} \right) \cdot u_{,\theta} + r(\sigma_r^0 + \alpha_1) \cdot u_{,rr} + \\ & + \frac{1}{r}(\sigma_{\theta}^0 + r\alpha_9) \cdot u_{,\theta\theta} + r(\sigma_z^0 + \mu) \cdot u_{,zz} + (2\tau_{r\theta}^0 + r\alpha_3 + \alpha_7) \cdot u_{,r\theta} + \left( -\tau_{r\theta,r}^0 - \frac{\sigma_{\theta,\theta}^0}{r} - \alpha_3 + \right. \\ & + \alpha_6 - r\alpha_{3,r} - \alpha_{9,\theta}) \cdot v + (-2\tau_{r\theta}^0 + r(\alpha_3 - \alpha_6 + r\alpha_{3,r} + \alpha_{9,\theta})) \cdot v_{,r} + \frac{1}{r}(-2\sigma_{\theta}^0 - \alpha_5 + \alpha_{8,\theta} - \\ & - r\alpha_9 + r\alpha_{2,r}) \cdot v_{,\theta} + r^2 \alpha_3 \cdot v_{,rr} + \frac{1}{r} \alpha_8 \cdot v_{,\theta\theta} + (\alpha_2 + r\alpha_9) \cdot v_{,r\theta} + r\mu \cdot w_{,rz} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& p_{,\theta} + \frac{1}{r} \left( r\tau_{r\theta,r}^0 + \sigma_{\theta,\theta}^0 + \alpha_8 + r\alpha_{8,r} + \alpha_{5,\theta} \right) \cdot u + \left( 2\tau_{r\theta}^0 + 2\alpha_7 + \alpha_8 + r\alpha_{7,r} + \alpha_{4,\theta} \right) \cdot u_{,r} + \\
& + \left( \frac{2\sigma_{\theta}^0}{r} + \frac{\alpha_5}{r} + 2\alpha_9 + r\alpha_{9,r} + \alpha_{6,\theta} \right) \cdot u_{,\theta} + r\alpha_7 \cdot u_{,rr} + \alpha_6 \cdot u_{,\theta\theta} + (\alpha_4 + r\alpha_9) \cdot u_{,r\theta} + \\
& + \left( r\rho\omega^2 - \frac{\sigma_{\theta}^0}{r} - 2\alpha_9 - r\alpha_{9,r} - \alpha_{6,\theta} \right) \cdot v + \left( \sigma_r^0 + \tau_{r\theta,\theta}^0 + r(\sigma_{r,r}^0 + 2\alpha_9 + r\alpha_{9,r} + \alpha_{6,\theta}) \right) \cdot v_{,r} + \\
& + \frac{1}{r} \left( \sigma_{\theta,\theta}^0 + r(\tau_{r\theta,r}^0 - \alpha_6 + \alpha_{8,r}) + \alpha_8 + \alpha_{5,\theta} \right) \cdot v_{,\theta} + r(\sigma_r^0 + r\alpha_9) \cdot v_{,rr} + \frac{1}{r} (\sigma_{\theta}^0 + \alpha_5) \cdot v_{,\theta\theta} + \\
& + r(\sigma_z^0 + \mu) \cdot v_{,zz} + (2\tau_{r\theta}^0 + r\alpha_6 + \alpha_8) \cdot v_{,r\theta} + \mu \cdot w_{,\theta z} = 0, \tag{1.69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r \cdot p_{,z} + \mu(u_{,z} + r \cdot u_{,rz} + v_{,\theta z}) + r\rho\omega^2 \cdot w + (\mu + r\sigma_{r,r}^0 + \tau_{r\theta,\theta}^0 + \sigma_r^0) \cdot w_{,r} + \frac{1}{r} (r\tau_{r\theta,r}^0 + \sigma_{\theta,\theta}^0) \cdot w_{,\theta} + \\
& + r(\mu + \sigma_r^0) \cdot w_{,rr} + \frac{1}{r} (\mu + \sigma_{\theta}^0) \cdot w_{,\theta\theta} + r(2\mu + \sigma_z^0) \cdot w_{,zz} + 2\tau_{r\theta}^0 \cdot w_{,r\theta} = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -v \cdot f_r^2 + 2\mu, \quad \alpha_2 = -v \cdot f_r^0 \cdot f_{\theta}^0, \quad \alpha_3 = -\frac{v}{2} \left( r + \frac{1}{r^3} \right) \cdot f_r^0 \cdot f_{r\theta}^0, \quad \alpha_4 = -v \cdot f_r^0 \cdot f_{\theta}^0, \\
\alpha_5 &= 2\mu - v \cdot f_{\theta}^2, \quad \alpha_6 = -\frac{v}{2} \left( r + \frac{1}{r^3} \right) \cdot f_{\theta}^0 \cdot f_{r\theta}^0, \quad \alpha_7 = -v \cdot f_r^0 \cdot f_{r\theta}^0, \quad \alpha_8 = -v \cdot f_{\theta}^0 \cdot f_{r\theta}^0, \\
\alpha_9 &= -\frac{1}{2r} \left( \left( r^2 + \frac{1}{r^2} \right) v f_{r\theta}^2 - 2\mu \right), \quad v = \frac{4\mu^2}{k^2(2\mu + c + \eta\beta)}, \quad f_j^i = S_j^i - c \varepsilon_j^i. \tag{1.70}
\end{aligned}$$

В упругой области в соотношениях (1.69) надо положить  $v = 0$ .

Граничные условия (1.68) с учетом (1.48) и (1.66) запишутся в виде

$$\begin{aligned}
& \alpha_2 \cdot u + r(\sigma_r^0 + \alpha_1) \cdot u_{,r} + (\tau_{r\theta}^0 + r\alpha_3) \cdot u_{,\theta} + (-\tau_{r\theta}^0 - r\alpha_3) \cdot v + r^2\alpha_3 \cdot v_{,r} + \alpha_2 \cdot v_{,\theta} = 0, \\
& \frac{1}{r} (\tau_{r\theta}^0 + \alpha_8) \cdot u + \alpha_7 \cdot u_{,r} + \alpha_9 \cdot u_{,\theta} - \alpha_9 \cdot v + (r\alpha_9 + \sigma_r^0) \cdot v_{,r} + \frac{1}{r} (\tau_{r\theta}^0 + \alpha_8) \cdot v_{,\theta} = 0, \tag{1.71} \\
& \mu \cdot u_{,z} + (\sigma_r^0 + \mu) \cdot w_{,r} + \frac{\tau_{r\theta}^0}{r} \cdot w_{,\theta} = 0.
\end{aligned}$$

Условия непрерывности (1.57) выписываются аналогично.

Нетривиальное решение приведенной задачи соответствует потере устойчивости основного состояния. Для нахождения собственных значений

задачи перемещения и гидростатические давления в зонах упругого и пластического деформирования для горного массива и крепи аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами [128]

$$u = \sum_n \sum_m A_{nm}(r) \cdot \cos(m\theta) \cdot \cos(nz), \quad v = \sum_n \sum_m B_{nm}(r) \cdot \sin(m\theta) \cdot \cos(nz), \quad (1.72)$$

$$w = \sum_n \sum_m C_{nm}(r) \cdot \cos(m\theta) \cdot \sin(nz), \quad p = \sum_n \sum_m D_{nm}(r) \cdot \cos(m\theta) \cdot \cos(nz),$$

где  $n, m$  – параметры волнообразования. В силу того, что система уравнений (1.69), (1.71) является линейной и однородной ее можно записать для каждого члена с одинаковыми значениями  $n, m$ . Для упрощения записи в дальнейшем индексы  $n$  и  $m$  будем опускать. Тогда система уравнений (1.69), (1.71), (1.67), (1.56) с учетом (1.72) переписется в терминах функций  $A(r), B(r), C(r), D(r)$  в форме:

уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} & \frac{A}{r} \left( \left( r^2 \rho \omega^2 - \sigma_{\theta}^0 - \alpha_5 + r\alpha_{2,r} + \alpha_{8,\theta} - (\sigma_{\theta}^0 + r\alpha_9) m^2 - r^2 (\sigma_z^0 + \mu) n^2 \right) \cdot \cos m\theta - \right. \\ & \left. - m \left( \sigma_{\theta,\theta}^0 + r \left( \tau_{r\theta,r}^0 + \alpha_3 - \alpha_6 + r\alpha_{3,r} + \alpha_{9,\theta} \right) + \alpha_8 \right) \cdot \sin m\theta \right) + A' \left( \left( \sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0 + \tau_{r\theta,\theta}^0 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 + r\alpha_{1,r} + \alpha_{7,\theta} \right) \cdot \cos m\theta - m \left( 2\tau_{r\theta}^0 + r\alpha_3 + \alpha_7 \right) \cdot \sin m\theta \right) + A'' r \left( \alpha_1 + \sigma_r^0 \right) \cos m\theta + \\ & + \frac{B}{r} \left( m \left( -2\sigma_{\theta}^0 - \alpha_5 - r \left( \alpha_9 - \alpha_{2,r} \right) + \alpha_{8,\theta} \right) \cdot \cos m\theta + \left( -\sigma_{\theta,\theta}^0 - \alpha_8 m^2 - r \left( \tau_{r\theta,r}^0 + \alpha_3 - \alpha_6 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + r\alpha_{3,r} + \alpha_{9,\theta} \right) \right) \cdot \sin m\theta \right) + B' \left( m \left( \alpha_2 + r\alpha_9 \right) \cdot \cos m\theta + r \left( \alpha_3 - \alpha_6 + r\alpha_{3,r} + \alpha_{9,\theta} - \frac{2\tau_{r\theta}^0}{r} \right) \cdot \sin m\theta \right) + \\ & + B'' r^2 \alpha_3 \cdot \sin m\theta + C' r \mu n \cdot \cos m\theta + D' r \cdot \cos m\theta = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{A}{r} \left( (\sigma_{\theta,\theta}^0 + r(\tau_{r\theta,r}^0 + \alpha_{8,r} - r\alpha_6 m^2) + \alpha_8 + \alpha_{5,\theta}) \cdot \cos m\theta - m(2\sigma_{\theta}^0 + \alpha_5 + 2r\alpha_9 + r^2\alpha_{9,r} + \right. \\
& \left. + r\alpha_{6,\theta}) \cdot \sin m\theta \right) + A' \left( (2\tau_{r\theta}^0 + 2\alpha_7 + \alpha_8 + r\alpha_{7,r} + \alpha_{4,\theta}) \cdot \cos m\theta - m(\alpha_4 + r\alpha_9) \cdot \sin m\theta \right) + \\
& + A'' r \alpha_7 \cdot \cos m\theta + \frac{B}{r} \left( m(\alpha_8 + r\alpha_{8,r} + \alpha_{5,\theta} - r\alpha_6 \tau_{r\theta,r}^0 + \sigma_{\theta,\theta}^0) \cdot \cos m\theta + (r^2 \rho \omega^2 - \sigma_{\theta}^0 - \right. \\
& \left. - r^2(\mu + \sigma_z^0) n^2 - (\alpha_5 + \sigma_{\theta}^0) m^2 - r(2\alpha_9 + r\alpha_{9,r} + \alpha_{6,\theta})) \cdot \sin m\theta \right) + B' \left( m(2\tau_{r\theta}^0 + r\alpha_6 + \right. \\
& \left. + \alpha_8) \cdot \cos m\theta \right) + (\sigma_r^0 + \tau_{r\theta,\theta}^0 + r(\sigma_{r,r}^0 + 2\alpha_9 + r\alpha_{9,r} + \alpha_{6,\theta})) \cdot \sin m\theta + B'' r (\sigma_r^0 + r\alpha_9) \cdot \sin m\theta + \\
& + C \mu m n \cdot \sin m\theta + D m \cdot \sin m\theta = 0, \tag{1.73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu n (A + A' r + B m) \cdot \cos m\theta + \frac{C}{r} \left( (r^2 (\rho \omega^2 - n^2 (2\mu + \sigma_z^0)) - m^2 (\mu + \sigma_{\theta}^0)) \cdot \cos m\theta - \right. \\
& \left. - m(r\tau_{r\theta,r}^0 + \sigma_{\theta,\theta}^0) \cdot \sin m\theta \right) + C' \left( (\sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0 + \tau_{r\theta,\theta}^0 + \mu) \cdot \cos m\theta - 2\tau_{r\theta}^0 m \cdot \sin m\theta \right) + \\
& + C'' r (\mu + \sigma_r^0) \cdot \cos m\theta + D(-r)n \cdot \cos m\theta = 0;
\end{aligned}$$

граничные условия

$$\begin{aligned}
& \frac{A}{r} (\alpha_2 \cdot \cos m\theta - m(\tau_{r\theta}^0 + r\alpha_3) \cdot \sin m\theta) + A' (\sigma_r^0 + \alpha_1) \cdot \cos m\theta + \\
& + \frac{B}{r} (m\alpha_2 \cdot \cos m\theta - (\tau_{r\theta}^0 + r\alpha_3) \cdot \sin m\theta) + B' r \alpha_3 \cdot \sin m\theta + D \cdot \cos m\theta = 0, \\
& \frac{A}{r} ((\tau_{r\theta}^0 + \alpha_8) \cdot \cos m\theta - m r \alpha_9 \cdot \sin m\theta) + \alpha_7 A' \cdot \cos m\theta + \\
& + \frac{B}{r} (m(\tau_{r\theta}^0 + \alpha_8) \cdot \cos m\theta - r\alpha_9 \cdot \sin m\theta) + B' (\sigma_r^0 + r\alpha_9) \cdot \sin m\theta = 0, \tag{1.74} \\
& -A n \mu \cdot \cos m\theta - C m \frac{\tau_{r\theta}^0}{r} \cdot \sin m\theta + C' (\mu + \sigma_r^0) \cdot \cos m\theta = 0;
\end{aligned}$$

условие несжимаемости:

$$A + A' r + B m + C n r = 0. \tag{1.75}$$

В терминах функций  $A(r)$ ,  $B(r)$ ,  $C(r)$ ,  $D(r)$  подобным образом могут быть выписаны и условия непрерывности (1.57) на упругопластической границе.

В том случае, когда основное невозмущенное состояние определяется только главными компонентами напряжений и деформаций, зависящими от одной радиальной координаты из соотношений (1.70) получим

для пластической области

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -v \cdot f_r^0 + 2\mu, \quad \alpha_2 = \alpha_4 = -v \cdot f_r^0 \cdot f_\theta^0, \quad \alpha_5 = 2\mu - v \cdot f_\theta^2, \quad \alpha_9 = \frac{\mu}{r}, \\ \alpha_3 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0, \\ v = \frac{4\mu^2}{k^2(2\mu + c + \eta\beta)}, \quad f_r^0(r) = S_r^0 - c \varepsilon_r^p, \quad f_\theta^0(r) = S_\theta^0 - c \varepsilon_\theta^p; \end{aligned} \quad (1.76)$$

для упругой области

$$\alpha_1 = \alpha_5 = 2\mu, \quad \alpha_9 = \frac{\mu}{r}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0. \quad (1.77)$$

Из (1.76) с учетом того, что  $f_r = f_r(r)$ ,  $f_\theta = f_\theta(r)$  получим следующие ненулевые производные величин  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_4$ ,  $\alpha_5$ ,  $\alpha_9$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,r} = -2a \cdot f_r^0 \cdot f_{r,r}^0, \quad \alpha_{2,r} = \alpha_{4,r} = -v \left( f_{r,r}^0 \cdot f_\theta^0 + f_r^0 \cdot f_{\theta,r}^0 \right), \\ \alpha_{5,r} = 2\mu - 2v \cdot f_\theta^0 \cdot f_{\theta,r}^0, \quad \alpha_{9,r} = -\frac{\mu}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.78)$$

С учетом (1.76), (1.78) уравнения равновесия (1.73) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{A}{r} \left( r^2 \rho \omega^2 - \sigma_\theta^0 - 2\mu + v \cdot f_\theta^2 - rv \left( f_{r,r}^0 \cdot f_\theta^0 + f_r^0 \cdot f_{\theta,r}^0 \right) - (\sigma_\theta^0 + \mu) m^2 - r^2 (\sigma_z^0 + \mu) n^2 \right) + \\ + A' \left( \sigma_r^0 + r \sigma_{r,r}^0 - v \cdot f_r^2 + 2\mu - rv \cdot 2 f_r^0 \cdot f_{r,r}^0 \right) + A'' r \left( -v \cdot f_r^2 + 2\mu + \sigma_r^0 \right) + \\ + \frac{B}{r} m \left( -2\sigma_\theta^0 - 2\mu + v \cdot f_\theta^2 - \mu - vr \left( f_{r,r}^0 \cdot f_\theta^0 + f_r^0 \cdot f_{\theta,r}^0 \right) \right) + B' m \left( -v \cdot f_r^0 \cdot f_\theta^0 + \mu \right) + C' r \mu n + D' r = 0, \\ -m \frac{A}{r} \left( 2\sigma_\theta^0 - v \cdot f_\theta^2 + 3\mu \right) - mA' \left( -v \cdot f_r^0 \cdot f_\theta^0 + \mu \right) + \\ + \frac{B}{r} \left( r^2 \rho \omega^2 - \sigma_\theta^0 - r^2 (\mu + \sigma_z^0) n^2 - \left( 2\mu - v \cdot f_\theta^2 + \sigma_\theta^0 \right) m^2 - \mu \right) + \\ + B' (\sigma_r^0 + r \sigma_{r,r}^0 + \mu) + B'' r (\sigma_r^0 + \mu) + C \mu m n + D m = 0, \\ -\mu n (A + A' r + B m) + \frac{C}{r} \left( r^2 (\rho \omega^2 - n^2 (2\mu + \sigma_z^0)) - m^2 (\mu + \sigma_\theta^0) \right) + \\ + C' (\sigma_r^0 + r \sigma_{r,r}^0 + \mu) + C'' r (\mu + \sigma_r^0) - D m = 0. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Соотношения (1.79) будут справедливы для пластической области деформирования, если в них всем переменным величинам приписать сверху индекс « $p$ » и для упругой, если в этих соотношениях положить  $a=0$  и всем переменным величинам приписать сверху индекс « $e$ ».

Граничные условия (1.74) с учетом (1.76), (1.78) примут вид

$$-\frac{A}{r}v \cdot f_r^0 \cdot f_\theta^0 + A' \left( \sigma_r^0 - v \cdot f_r^2 + 2\mu \right) - \frac{B}{r}mv \cdot f_r^0 \cdot f_\theta^0 + D = 0,$$

$$Am\mu + B\mu - rB'(\sigma_r^0 + \mu) = 0,$$

$$An\mu - C'(\mu + \sigma_r^0) = 0. \quad (1.80)$$

Условия неразрывности напряжений (1.57) на упругопластической границе  $\gamma$  в этом случае запишутся в форме

$$[A'] \left( \sigma_r^e(\gamma) + 2\mu \right) + [D] - \frac{v \cdot f_r^0(\gamma) \cdot f_\theta^0(\gamma)}{\gamma} (A^p + mB^p) - A'^p v \cdot f_r^2(\gamma) = 0,$$

$$m\mu[A] + \mu[B] - [B']\gamma \left( \sigma_r^e(\gamma) + \mu \right) = 0,$$

$$n\mu[A] - \left( \sigma_r^e(\gamma) + \mu \right) [C'] = 0. \quad (1.81)$$

Выражая из (1.75) неизвестную  $C(r)$  и подставляя в (1.79) - (1.81) получим запись уравнений равновесия, граничных условий и условий непрерывности напряжений в терминах функций  $A(r)$ ,  $B(r)$ ,  $D(r)$ :

уравнения равновесия

$$\frac{A}{r} \left( r^2 \rho \omega^2 - \sigma_\theta^0 - \mu + v \cdot f_\theta^2 - rv \left( f_{r,r}^0 \cdot f_\theta^0 + f_r^0 \cdot f_{\theta,r}^0 \right) - (\sigma_\theta^0 + \mu)m^2 - r^2 (\sigma_z^0 + \mu)n^2 \right) +$$

$$+ A' \left( \sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0 - v \cdot f_r^2 + \mu - rv \cdot 2f_r^0 \cdot f_{r,r}^0 \right) + A''r \left( -v \cdot f_r^2 + \mu + \sigma_r^0 \right) +$$

$$+ \frac{B}{r}m \left( -2\sigma_\theta^0 - 2\mu + v \cdot f_\theta^2 - vr \left( f_{r,r}^0 \cdot f_\theta^0 + f_r^0 \cdot f_{\theta,r}^0 \right) \right) - B'mv \cdot f_r^0 \cdot f_\theta^0 + D'r = 0,$$

$$\begin{aligned}
& -m \frac{A}{r} \left( 2\sigma_{\theta}^0 - \nu \cdot f_{\theta}^2 + 4\mu \right) - mA' \left( -\nu \cdot f_r \cdot f_{\theta} + 2\mu \right) + \\
& + \frac{B}{r} \left( r^2 \rho \omega^2 - \sigma_{\theta}^0 - r^2 (\mu + \sigma_z^0) n^2 - \left( 3\mu - \nu \cdot f_{\theta}^2 + \sigma_{\theta}^0 \right) m^2 - \mu \right) + \quad (1.82) \\
& + B' (\sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0 + \mu) + B'' r (\sigma_r^0 + \mu) + Dm = 0, \\
& \left( r^2 (\rho \omega^2 - n^2 (2\mu + \sigma_z^0)) - m^2 (\mu + \sigma_{\theta}^0) + \mu n^2 r^2 + \mu + \sigma_r^0 - r\sigma_{r,r}^0 \right) (A + Bm) + \\
& + A' r \left( r^2 (\rho \omega^2 - n^2 (2\mu + \sigma_z^0)) - m^2 (\mu + \sigma_{\theta}^0) + \mu n^2 r^2 - \mu - \sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0 \right) + \\
& + r^2 A'' \left( 2(\mu + \sigma_r^0) + r\sigma_{r,r}^0 \right) + r^2 (\mu + \sigma_r^0) (rA''' + B''m) - rmB' (\mu + \sigma_r^0 - r\sigma_{r,r}^0) + Dr^3 n^2 = 0;
\end{aligned}$$

граничные условия

$$\begin{aligned}
& -\frac{\nu \cdot f_r \cdot f_{\theta}}{r} (A + Bm) + A' (\sigma_r^0 - \nu \cdot f_r^2 + 2\mu) + D = 0, \\
& Am + B - B' r \left( \frac{\sigma_r^0}{\mu} + 1 \right) = 0, \quad (1.83) \\
& A(n^2 r^2 \mu - \mu - \sigma_r^0) + (A' r + A'' r^2 - Bm + B' r m) (\mu + \sigma_r^0) = 0.
\end{aligned}$$

условия на границе  $\gamma$  зон упругого и пластического деформирования

$$\begin{aligned}
& \left( \sigma_r^e(\gamma) + 2\mu \right) [A'] + [D] - \frac{\nu \cdot f_r(\gamma) \cdot f_{\theta}(\gamma)}{\gamma} (A^p + mB^p) - A'^p \nu \cdot f_r^2(\gamma) = 0, \\
& m\mu[A] + \mu[B] - \gamma \left( \sigma_r^e(\gamma) + \mu \right) [B'] = 0, \quad (1.84) \\
& \left( 1 - \frac{\mu n^2 \gamma^2}{\sigma_r^e(\gamma) + \mu} \right) [A] - \gamma [A'] - \gamma^2 [A''] + m[B] - \gamma m [B'] = 0.
\end{aligned}$$

Далее приведем запись основных линеаризированных уравнений в сферических координатах. В сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  компоненты метрических тензоров  $g_{ij}$ ,  $g^{ij}$  таковы

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (1.85)$$



и ненулевые символы Кристоффеля второго рода определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -r, \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta, \Gamma_{33}^2 = -r \cos \theta \sin \theta, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Физические составляющие произвольного вектора  $\mathbf{u}$  и симметричного тензора второго ранга  $\mathbf{M}$  в системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  с учетом (1.85) есть

$$\begin{aligned} u_r &= u^1 = u_1, u_\theta = \frac{u_2}{r} = r \cdot u^2, u_\varphi = \frac{u_3}{r \sin \theta} = r \sin \theta \cdot u^3, \\ m_{rr} &= m_r = m_1^1 = m^{11} = m_{11}, m_{r\theta} = m_{\theta r} = r \cdot m_1^2 = \frac{m_2^1}{r} = \frac{m_{12}}{r} = r \cdot m_{12}, \\ m_{r\varphi} &= m_{\varphi r} = r \sin \theta \cdot m_1^3 = \frac{m_3^1}{r \sin \theta} = \frac{m_{13}}{r \sin \theta} = r \sin \theta \cdot m^{13}, \\ m_{\theta\theta} &= m_\theta = m_2^2 = r^2 \cdot m^{22} = \frac{m_{22}}{r^2}, \\ m_{\theta\varphi} &= m_{\varphi\theta} = \sin \theta \cdot m_2^3 = \frac{m_3^2}{\sin \theta} = \frac{m_{23}}{r^2 \sin \theta} = r^2 \sin \theta \cdot m^{23}, \\ m_{\varphi\varphi} &= m_\varphi = m_3^3 = r^2 \sin^2 \theta \cdot m^{33} = \frac{m_{33}}{r^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Линеаризованная система уравнений равновесия (1.44) для случая, когда  $\sigma_2^0 = \sigma_3^0$  с учетом (1.60), (1.86), (1.87) согласно [239] запишется в форме

$$\begin{aligned} &\sigma_{1,1}^1 + \sigma_{1,1}^2 + \sigma_{1,1}^3 + \frac{2}{r} \sigma_1^1 - \frac{1}{r} (\sigma_2^2 + \sigma_3^3) + \sigma_2^1 \operatorname{ctg} \theta + \sigma_1^1 u_{1,11} + \sigma_2^2 \frac{1}{r^2} \left( u_{1,22} - \frac{2}{r} u_{2,2} + \right. \\ &\left. + r u_{1,1} - u_1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( u_{1,33} + r \sin^2 \theta u_{1,1} + u_{1,2} \cos \theta \sin \theta - u_1 \sin^2 \theta - \frac{2}{r} u_{3,3} - \frac{1}{r} \sin 2\theta \right) \right) = 0, \\ &\sigma_{2,1}^1 + \sigma_{2,2}^2 + \sigma_{2,3}^3 + \frac{1}{r} \sigma_2^1 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^3) \operatorname{ctg} \theta + \sigma_1^2 r + \sigma_1^1 \left( u_{2,11} - \frac{2}{r} u_{2,1} - \frac{2}{r^2} u_2 \right) + \\ &+ \sigma_2^2 \left( \frac{1}{r^2} u_{2,22} + \frac{2}{r} u_{2,1} - \frac{2}{r^2} u_2 + \frac{2}{r} u_{1,2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} u_{2,2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{2,33} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2 \sin^2 \theta} u_{3,3} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_2 \right) = 0, \\ &\sigma_{3,1}^1 + \sigma_{3,2}^2 + \sigma_{3,3}^3 + \frac{1}{r} \sigma_3^1 + \sigma_1^3 r \sin^2 \theta + \sigma_2^3 \sin \theta \cos \theta + \sigma_1^1 \left( u_{3,11} - \frac{2}{r} u_{3,1} - \frac{2}{r^2} u_3 \right) + \\ &+ \sigma_2^2 \left( \frac{1}{r^2} u_{3,22} + \frac{2}{r} (u_{3,1} + u_{1,3}) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} u_{3,33} - 2 \operatorname{ctg} \theta u_{2,3} - 2 u_3 - \operatorname{ctg} \theta u_{3,2} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Граничные условия в напряжениях (1.55) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
& \sigma_1^i N_i + \sigma_1^1 N_1 u_{1,1} + \sigma_2^2 N_2 \frac{1}{r^2} \left( u_{1,2} - \frac{u_2}{r} \right) + \sigma_3^3 N_3 \frac{ru_{1,3} - u_3}{r^3 \sin^2 \theta} = 0, \\
& \sigma_2^i N_i + \sigma_1^1 \left( u_{2,1} - \frac{u_1}{r} \right) N_1 + \frac{\sigma_2^2}{r^2} (u_{2,2} + ru_1) N_2 + \frac{\sigma_3^3}{r^2 \sin^2 \theta} (u_{2,3} - ctg\theta u_3) N_3 = 0, \\
& \sigma_3^i N_i + \sigma_1^1 \left( u_{2,1} - \frac{u_3}{r} \right) N_1 + \frac{\sigma_2^2}{r^2} (u_{3,2} - ctg\theta u_3) N_2 + \frac{\sigma_3^3}{r^2 \sin^2 \theta} (u_{2,3} + \\
& \quad + \sin \theta \cos \theta u_2 + r \sin^2 \theta u_1) N_3 = 0.
\end{aligned} \tag{1.89}$$

Используя, как и ранее, обозначения  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $u_3 = w$ , а так же формулы (1.51) запишем уравнения равновесия (1.88) в перемещениях

$$\begin{aligned}
& \left( a_{11} + \sigma_r^0 \right) \cdot u_{,rr} + \frac{2}{r} \left( a_{11} - a_{21} + \sigma_\theta^0 + \frac{1}{2} (a_{12} + a_{13} + ra_{11,r}) \right) \cdot u_{,r} + \frac{k_1}{r^2} ctg\theta \cdot u_{,\theta} + \\
& + \frac{1}{r^2} \left( r(a_{12,r} + a_{13,r}) + a_{12} + a_{13} - 2(a_{22} + a_{23} + \sigma_\theta^0) \right) \cdot u + \frac{k_1}{r^2} \cdot u_{,\theta\theta} + \frac{k_1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot u_{,\varphi\varphi} + \\
& + \frac{ctg\theta}{r^3} (ra_{13,r} - 2k_1 - a_{22} - a_{23}) v + \frac{\mu + a_{13}}{r^2} ctg\theta \cdot v_{,r} + \frac{1}{r^3} (ra_{12,r} - 2k_1 - a_{22} - a_{23}) \cdot v_{,\theta} + \\
& + \frac{\mu + a_{12}}{r^2} \cdot v_{,r\theta} + \frac{\mu + a_{12}}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot w_{,r\varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (ra_{13,r} - 2k_1 - a_{22} - a_{23}) \cdot w_{,\varphi} + p_{,r} = 0, \\
& \frac{ctg\theta}{r} (a_{22} + a_{23} - a_{32} - a_{33}) \cdot u + ctg\theta (a_{21} - a_{31}) \cdot u_{,r} + \frac{1}{r} (a_{22} + a_{23} + 2k_1) \cdot u_{,\theta} + \\
& + (\mu + a_{21}) \cdot u_{,r\theta} + \frac{1}{r^2} \left( k_2 - a_{23} - ctg^2 \theta a_{33} - 2\mu - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \cdot v - \frac{k_2}{r} \cdot v_{,r} + \\
& + \frac{ctg\theta}{r^2} \left( a_{22} + a_{23} - a_{32} + \sigma_\theta^0 \right) \cdot v_{,\theta} + \left( \mu + \sigma_r^0 \right) \cdot v_{,rr} + \frac{1}{r} \left( a_{22} + \sigma_\theta^0 \right) \cdot v_{,\theta\theta} + \frac{k_1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot v_{,\varphi\varphi} + \\
& \quad + \frac{G + a_{23}}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot w_{,\varphi} + p_{,\theta} = 0, \tag{1.90} \\
& \frac{k_3}{r} \cdot u_{,\varphi} + (\mu + a_{31}) \cdot u_{,r\varphi} + \frac{\mu + a_{33}}{r^2} ctg\theta \cdot v_{,\varphi} + \frac{\mu + a_{32}}{r^2} \cdot v_{,\theta\varphi} + \frac{k_2}{r^2} \cdot w - \\
& - \frac{k_2}{r} \cdot w_{,r} - \frac{k_1}{r^2} ctg\theta \cdot w_{,\theta} + \frac{2}{r^2} ctg\theta \cdot w_{,\varphi} + k_1 \cdot w_{,rr} + \frac{k_1}{r^2} \cdot w_{,\theta\theta} + \frac{\sigma_\theta^0 + a_{33}}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot w_{,\varphi\varphi} + p_{,z} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь  $k_1 = \mu + \overset{0}{\sigma}_\theta$ ,  $k_2 = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma_r & -\sigma_\theta \end{pmatrix}$ ,  $k_3 = a_{33} + a_{32} + 2k_1$ .

Условие несжимаемости (1.54) представимо в форме

$$r^2 \cdot u_{,r} + v_{,\varphi} + 2r \cdot v + u \cdot \text{ctg} \varphi + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \cdot w_{,\theta} = 0. \quad (1.91)$$

Аналогично может быть записано и условие (1.57) на упругопластической границе.

Решение линеаризованных уравнений для сферических задач представим рядами по сферическим функциям [125, 234]

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} A_{jm}(r) Y_{jm}(\theta, \varphi), \quad v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} B_{jm}(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{jm}(\theta, \varphi), \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} C_{jm}(r) \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{jm}(\theta, \varphi), \quad p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} D_{jm}(r) Y_{jm}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1.92)$$

где  $Y_{jm}(\theta, \varphi) = P_j^m(\cos \theta) (\alpha_{jm} \cos m\varphi + \beta_{jm} \sin m\varphi)$  - сферические функции,  $P_j^m(\cos \theta)$  - присоединенные функции Лежандра первого рода степени  $j$  и порядка  $m$  ( $P_j^m = 0$  для  $m > j$ ). Функции  $Y_{jm}$  являются решениями уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + j(j+1) \right) Y_{jm}(\theta, \varphi) = 0.$$

Для случая симметричного начального состояния ( $\overset{0}{\sigma}_2^2 = \overset{0}{\sigma}_3^3$ ,  $\overset{0}{\sigma}_j^i = 0$  при  $i \neq j$ ) согласно (1.51) - (1.53) и (1.92)  $a_{12} = a_{13}$ ,  $a_{22} = a_{33}$ ,  $a_{23} = a_{32}$ ,  $a_{31} = a_{21}$ ,  $a_{22} - a_{23} = 2\mu$  и, следовательно,  $B_{jm}(r) = C_{jm}(r)$ .

Так как рассматриваемая система уравнений (1.89) - (1.91) линейна и однородна, то каждый член (1.92) можно рассматривать отдельно. В дальнейшем для краткости записи индексы  $m$  и  $j$  опустим. Тогда в терминах функций  $A(r)$ ,  $B(r)$ ,  $D(r)$ , согласно (1.92), а также при учете, что  $B(r) = C(r)$  система (1.89) - (1.91) переписется в виде:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^2} \left( 2 \left( r a_{12,r} + a_{12} - a_{22} - a_{23} - \sigma_{\theta}^0 \right) - (j^2 + j) \left( \mu + \sigma_{\theta}^0 \right) \right) \cdot A(r) + \frac{1}{r} \left( r a_{11,r} + \right. \\
& \left. + 2 \left( a_{11} + a_{12} - a_{21} + \sigma_{\theta}^0 \right) \right) \cdot A'(r) + \left( a_{11} + \sigma_r^0 \right) \cdot A''(r) - \frac{j^2 + j}{r^3} \left( r a_{12,r} - a_{22} - a_{23} - \right. \\
& \left. - 2 \left( \mu + \sigma_{\theta}^0 \right) \right) \cdot B(r) - \frac{\mu + a_{12}}{r^2} (j^2 + j) \cdot B'(r) + D'(r) = 0, \\
& \frac{1}{r^2} \left( 2 \left( \sigma_r^0 - \sigma_{\theta}^0 \right) - (j^2 + j) \left( a_{22} + \sigma_{\theta}^0 \right) \right) \cdot B(r) + \frac{2}{r} \left( \sigma_{\theta}^0 - \sigma_r^0 \right) \cdot B'(r) + \left( \mu + \sigma_r^0 \right) \cdot B''(r) + \\
& + (\mu + a_{21}) \cdot A'(r) + \frac{2}{r} \left( a_{22} + \sigma_{\theta}^0 \right) \cdot A(r) + D(r) = 0; \quad (1.93)
\end{aligned}$$

граничные условия

$$\begin{aligned}
& \frac{2a_{12}}{r} \cdot A(r) + \left( a_{11} + \sigma_r^0 \right) \cdot A'(r) - \frac{a_{12}}{r^2} (j^2 + j) \cdot B(r) + D(r) = 0, \\
& \mu \cdot A(r) - \frac{1}{r} \left( 2\mu + \sigma_r^0 \right) \cdot B(r) + \left( \mu + \sigma_r^0 \right) \cdot B'(r) = 0; \quad (1.94)
\end{aligned}$$

условие несжимаемости

$$\frac{2}{r} \cdot A(r) + A'(r) - \frac{1}{r^2} (j^2 + j) \cdot B(r) = 0. \quad (1.95)$$

Аналогично в терминах функций  $A(r)$ ,  $B(r)$ ,  $D(r)$  могут быть выписаны условия непрерывности (1.57). Конкретизация уравнений (1.93), (1.94) для областей пластического и упругого деформирования происходит соответствующим выбором коэффициентов  $a_{ij}$  согласно формулам (1.52) и (1.53).

Исключая из системы (1.93) – (1.95) функции  $B(r)$  и  $D(r)$  перейдем к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно функции  $A(r)$

$$\begin{aligned}
& r^2 \left( \mu + \sigma_r^0 \right) \cdot A^{(4)} + r \left( 2 \left( 4\mu + 3\sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 \right) + r \sigma_{r,r}^0 \right) \cdot A''' + \left( 4 \left( 3\mu + \sigma_r^0 + 2\sigma_\theta^0 \right) + 2r \times \right. \\
& \times \left. \left( 2\sigma_{r,r}^0 + \sigma_{\theta,r}^0 \right) - (j^2 + j) \left( a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} + \sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 - 2\mu \right) \right) \cdot A'' + \frac{1}{r} \left( 6r \sigma_{\theta,r}^0 + \right. \\
& + (j^2 + j) \left( 2 \left( \mu - a_{11} + a_{12} + a_{21} - 2\sigma_\theta^0 \right) - a_{22} - a_{23} - r \sigma_{\theta,r}^0 \right) \right) \cdot A' + \frac{1}{r^2} (j^2 + j) (j^2 + \\
& + j - 2) \left( \mu + \sigma_\theta^0 \right) \cdot A = 0. \tag{1.96}
\end{aligned}$$

Граничные условия (1.94) при этом переписутся в виде

$$\begin{aligned}
& r^2 \left( \mu + \sigma_r^0 \right) \cdot A''' + 2r \left( 3\mu + 2\sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 \right) \cdot A'' + \left( 6 \left( \mu + \sigma_\theta^0 \right) + (j^2 + j) \left( \mu - a_{11} + a_{12} + \right. \right. \\
& \left. \left. + a_{21} - a_{22} - \sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 \right) \right) \cdot A' = 0, \\
& r^2 \left( \mu + \sigma_r^0 \right) A'' + r \left( 2\mu + 3\sigma_r^0 \right) A' + \mu (j^2 + j - 2) A = 0, \tag{1.97}
\end{aligned}$$

а условия на границе раздела зон упругого и пластического деформирования запишутся в форме

$$\begin{aligned}
& \left[ r^2 \left( \mu + \sigma_r^0 \right) A''' + 2r \left( 3\mu + 2\sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 \right) A'' + \left( 6 \left( \mu + \sigma_\theta^0 \right) + (j^2 + j) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left( \mu - a_{11} + a_{12} + a_{21} - a_{22} - \sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 \right) \right) A' \right] = 0, \\
& \left[ r^2 \left( \mu + \sigma_r^0 \right) A'' + r \left( 2\mu + 3\sigma_r^0 \right) A' + (j^2 + j - 2) \mu A \right] = 0, \\
& [A'] = 0, [A] = 0. \tag{1.98}
\end{aligned}$$

Приведенные краевые задачи, полученные с использованием трехмерных уравнений устойчивости, будем применять для решения задач горной механики.

### 1.5. Метод решения статических упруговязкопластических задач устойчивости. Алгоритм поиска критических нагрузок

Нахождение точных аналитических решений, полученных в предыдущем параграфе краевых цилиндрических (1.73) – (1.75) или (1.82) – (1.84) и сферических (1.96) – (1.98) задач не представляется возможным в виду их сложности. Безусловно, трудности получения аналитических решений статических упруговязкопластических задач применительно к задачам горной механики при наличии границы раздела сред, учете начальной пористости материала крепи, неоднородности докритического состояния становятся еще значительней. В связи с этим, для поиска приближенного решения задач воспользуемся методом конечных разностей. Основная идея этого метода заключается в замене производных разностными отношениями, что в свою очередь приводит к замене дифференциальных уравнений разностными, решение которых в любой конечной области сводится к решению конечной системы алгебраических уравнений. Для непрерывной на отрезке функции  $y = y(r)$  это осуществляется следующим образом: отрезок  $[a, b]$  разбивается точками  $i=0, 1, \dots, M$  на  $S$  равных промежутков длины  $\tau = \frac{b-a}{M}$ . Производные функций на данном интервале заменяются во внутренних точках  $i=2, 3, \dots, M-2$  центральными разностями второго порядка аппроксимации

$$y'_i = \frac{1}{2\tau}(y_{i+1} - y_{i-1}), \quad y''_i = \frac{1}{\tau^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), \quad y'''_i = \frac{1}{2\tau^3}(y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}),$$

$$y_i^{(IV)} = \frac{1}{\tau^4}(y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}). \quad (1.99)$$

В приграничных точках  $r_1$  и  $r_{M-1}$  производные будем аппроксимировать следующими конечными разностями

$$y'_i = \frac{1}{2\tau}(y_{i+1} - y_{i-1}), \quad y''_i = \frac{1}{\tau^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}),$$

$$y_i''' = \pm \frac{1}{2\tau^3} (-y_{i\pm 3} + 6y_{i\pm 2} - 12y_{i\pm 1} + 10y_i - 3y_{i\mp 1}), \quad (1.100)$$

здесь верхние знаки соответствуют  $i = 1$ , нижние  $i = M - 1$ .

В крайних точках  $r_0$  и  $r_M$  производные будем аппроксимировать следующими конечными разностями

$$\begin{aligned} y_i' &= \pm \frac{1}{2\tau} (-3y_i + 4y_{i\pm 1} - y_{i\pm 2}), \quad y_i'' = \frac{1}{\tau^2} (2y_i - 5y_{i\pm 1} + 4y_{i\pm 2} - y_{i\pm 3}), \\ y_i''' &= \pm \frac{1}{2\tau^3} (-5y_i + 18y_{i\pm 1} - 24y_{i\pm 2} + 14y_{i\pm 3} - 3y_{i\pm 4}), \\ y_i^{iv} &= \frac{1}{\tau^4} (4y_i - 7y_{i\pm 1} + 14y_{i\pm 2} - 25y_{i\pm 3} + 6y_{i\pm 4} - y_{i\pm 5}), \end{aligned} \quad (1.101)$$

где верхние знаки соответствуют  $i = 0$ , нижние  $i = M$ .

Проблема поиска критических величин, соответствующих потере устойчивости докритического состояния, сводится к разрешимости характеристического уравнения

$$\det(X_{ij}) = 0, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (1.102)$$

совместно с условием (1.94). В (1.102)  $\det(X_{ij})$  - определитель соответствующей алгебраической системы.

При исследовании уравнения (1.102) необходимо учитывать, что элементы соответствующего характеристического определителя для пористого тела, сжатый скелет которого обладает упруговязкопластическими свойствами, будут зависеть как геометрических параметров крепи, внешних нагрузок и физико-механических характеристик материала, так и от произвольного комплексного числа  $\beta$ . Это приводит в определенным затруднениям вычислительного характера. Поэтому, при выполнении численного эксперимента будем полагать, что  $\beta = \hat{\beta}$  - действительное число. При этом случай, когда выполняется условие  $0 \leq \hat{\beta} < \infty$  будет соответствовать неограниченному росту компонент возмущенного состояния, то есть потере устойчивости. Выполнение условия  $-\infty < \hat{\beta} < 0$ , соответствует случаю затухания амплитудных величин возмущений во времени.

С учетом сказанного для нахождения величины критической нагрузки (внешней или внутренней) уравнение (1.102) переписывается в форме

$$\det(P, \hat{\beta}, \chi_i) = 0, \quad (1.103)$$

где через  $\chi_i$  - обозначены константы, характеризующие физико-механические свойства материала с полностью сжатой матрицей, а также геометрические параметры конструкции.

Поиск критической нагрузки, при  $\chi_i = const$  будем проводить по следующей схеме:

1) при фиксированном значении  $\hat{\beta}$  численным способом решается уравнение (1.103) и определяется зависимость  $P = P(\hat{\beta})$ ;

2) осуществляется минимизация нагрузки  $P$  по параметру  $\hat{\beta} \in [0, \infty)$  и в качестве критической нагрузки принимается минимальная  $P^* = \min_{\hat{\beta} \in [0, \infty)} P(\hat{\beta})$ ;

3) если в число параметров  $\chi_i$  входят параметры волнообразования  $m, n$  по контуру и образующей, то необходимо проводить дополнительную минимизацию по этим параметрам, кроме того минимизация величина  $P$  должна проводиться и по шагу разностной сетки  $\tau$ .

Таким образом, поиск критической величины внешней нагрузки, соответствующей потере устойчивости основного состояния сводится к задаче оптимизации величины  $P$  в зависимости от параметров  $\hat{\beta}, m, n, \tau$  при условии равенства нулю определителя соответствующей алгебраической системы:

$$\det(P, \hat{\beta}, m, n, \tau, \chi_i) = 0.$$

## 1.6. Анализ основных результатов главы 1.

Создание условий для безаварийной эксплуатации подземных объектов находящихся на значительном удалении от дневной поверхности, требует проведения работ по их укреплению. Разрушение подземной конструкции может произойти не только вследствие недостаточной прочности ее крепи, но и за счет



потери устойчивости последней. Решение вопроса об устойчивости горных выработок и их крепей с позиций точной ТТУДТ позволяет определить критические значения параметров рассматриваемых задач. Вместе с тем, как показывают эксперименты, при больших давлениях (средние и большие глубины) горные породы, а также материалы крепи приобретают явно выраженные неупругие свойства. Так же известно, что большинство твердых тел, в том числе грунты и горные породы, различные марки бетона могут содержать микротрещины, изолированные и связанные между собой поры, приводящие к некоторой внутренней структуре материала. В связи с вышесказанным вопросы предсказания отказов крепей подземных сооружений глубокого заложения должны решаться с использованием математических моделей сред, учитывающих более широкий спектр свойств таких, как вязкость, упрочнение, пластичность, пористость, обнаруживаемых у реальных материалов. Высказанные соображения, а также ряд других, которые отмечались во введении, определили исследование диссертационной работы, и в, частности, первой главы, результаты которой следующие:

- приведена математическая модель для описания НДС сплошной среды с учетом пористости материала и упрочняющихся упруго-пластических и (или) упруговязкопластических свойств полностью сжатой матрицы;
- в рамках трехмерной линеаризированной теории устойчивости в случае малых докритических деформаций построена краевая задача, для исследования отказов крепей горных выработок с учетом начальной пористости и сложной реологии материалов при принятии обобщенной концепции продолжающегося нагружения, что позволило решать задачи устойчивости с известной границей раздела зон упругого и пластического деформирования, которая находилась из решения задачи о докритическом состоянии;
- выведены основные линеаризированные уравнения устойчивости цилиндрических и сферических крепей подземных сооружений в перемещениях для общего и некоторых частных случаев докритического состояния, при этом выбор решений краевых задач осуществлялся в виде двойных

тригонометрических рядов для цилиндрической системы координат, а также в виде двойных рядов по сферическим функциям для сферических координат, что позволило разделить переменные и свести задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими краевыми условиями;

- для неоднородных докритических состояний построен алгоритм решения задач устойчивости монолитных цилиндрических и сферических крепей подземных сооружений на основе метода конечных разностей, сводящийся к решению задач многомерной оптимизации величин внешних нагрузок в зависимости от гармоник  $m$  и  $n$  при условии равенства нулю определителя соответствующей алгебраической системы.

## ГЛАВА 2

### МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ МОНОЛИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КРЕПЕЙ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ПОРИСТОЙ СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА И СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИИ СЖАТОГО СКЕЛЕТА

В настоящее время актуальными остаются вопросы строительства и охраны подземных сооружений различного назначения, в том числе вертикальных шахтных стволов и подземных сферических полостей. При этом возникает необходимость решения ряда сопутствующих задач таких, как борьба с горными ударами, взрывные подземные работы, охрана окружающей среды от загрязнения, проблемы сейсмобезопасности и др, что в свою очередь требует создания крепей подземных объектов.

Проходка, крепление и оборудование шахтных стволов имеют большое производственное и экономическое значение. Каждый ствол, а в особенности его крепь являются сложными инженерными сооружениями, требующими для возведения значительных временных и финансовых затрат. Чаще всего крепь выполняет грузонесущую функцию, кроме этого она может являться изолирующей конструкцией.

Отказ крепи горной выработки может произойти при реализации одной из двух ситуаций:

- 1) достижение НДС предела прочности материала конструкции;
- 2) достижение НДС критических значений, соответствующих потере устойчивости основного состояния (отказу).

Решение первой задачи основано на сравнении найденного (в аналитическом или численном виде) НДС с пределами прочности материалов. Во втором случае начальным этапом решения задачи устойчивости является нахождение в аналитическом виде основного НДС конструкции.

Учитывая вышесказанное, проведенные в этой главе моделирование и анализ НДС монолитных крепей вертикальных горных выработок и подземных полостей сферической формы имеют большое прикладное значение.

Решения полученные в этой главе будут использоваться в качестве основных (докритических) состояний при решении задач устойчивости крепей подземных сооружений.

### **2.1. Математическая модель напряженно-деформированного состояния крепи вертикальной горной выработки с учетом начальной пористости материала и упругопластических свойств сжатого скелета**

В этом параграфе рассмотрим вопрос нахождения НДС монолитной крепи вертикальной горной выработки. Крепь выработки будем моделировать цилиндрическим телом, с внутренним радиусом  $a$  и внешним -  $b$  (рисунок 2.1). Действие жидкости или газа на крепь заменим нагрузкой интенсивностью  $q_a$  равномерно распределенной по ее внутренней поверхности. На внешней поверхности крепи действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q_b$ , моделирующая давление горного массива на крепь. При этом реологические свойства материала крепи, обладающего внутренней структурой, будем определять согласно модели описанной в §1 первой главы.

Для подобных задач принимается следующая гипотеза [94]: при нахождении НДС не учитываются эффекты, связанные с наличием дневной поверхности и конечной глубины, то есть будем рассматривать бесконечное цилиндрическое тело, находящееся под действием сжимающих нагрузок.

Как отмечалось в §1 первой главы, деформирования материала крепи вертикальной выработки, обладающего внутренней структурой, разделим на два взаимосвязанных этапа. В качестве первого этапа рассмотрим деформирование упругой сжимаемой пористой среды, в качестве второго – деформирование полностью сжатой матрицы с упрочняющимися упругопластическими свойствами.

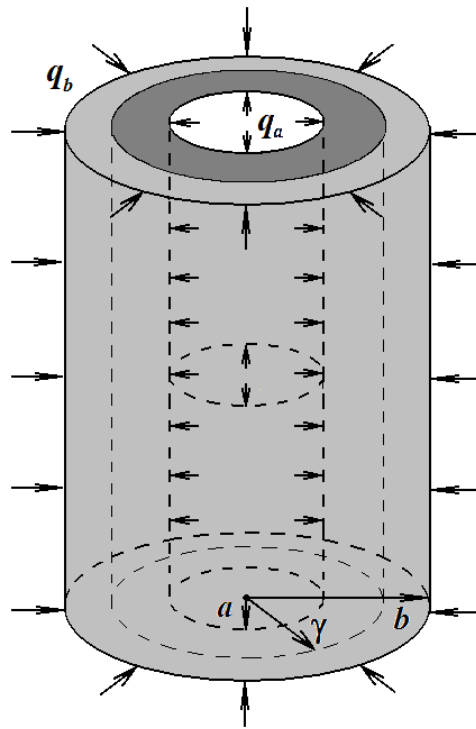


Рисунок 2.1 – Монолитная крепь вертикальной горной выработки под действием сжимающих нагрузок

Для случая осевой симметрии НДС крепи вертикальной выработки при реализации плоского деформированного состояния в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  будем моделировать согласно (1.1), (1.4), (1.3) следующими соотношениями

- уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \quad (2.1)$$

- соотношения Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (2.2)$$

где  $u$  – радиальная компонента вектора перемещений;

- граничные условия в напряжениях

$$\sigma_r|_{r=b} = -q_b, \quad \sigma_r|_{r=a} = -q_a, \quad (q_a > 0, q_b > 0), \quad (2.3)$$

Закон Гука (1.7), связывающий напряжения и деформации на этапе упругого деформирования материала с пористой структурой с учетом указанных предположений переписывается в форме

$$\sigma_r = (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_r + \lambda_1\varepsilon_\theta, \quad \sigma_\theta = \lambda_1\varepsilon_r + (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_\theta, \quad \sigma_z = \lambda_1(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta). \quad (2.4)$$

Соотношениями (1.8), связывающие упругие деформации полностью сжатой матрицы с напряжениями, в нашем случае преобразуются к виду

$$S_r = 2(\mu_0 + \mu_1)\varepsilon_r - 2\mu_0\varepsilon_{r0} + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0, \quad S_\theta = 2(\mu_0 + \mu_1)\varepsilon_\theta - 2\mu_0\varepsilon_{\theta0} + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0, \quad S_z = \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0. \quad (2.5)$$

В (2.5) и далее индекс «0», приписанный внизу компонент вектора перемещений, а также компонент тензоров напряжений и деформаций, указывает на то, что они вычислены на момент полного сжатия пор.

Условие пластичности (1.13), выражения для полных деформаций в пластической зоне материала крепи с полностью сжатой матрицей (1.10), условия несжимаемости (1.11) с учетом принятых предположений примут вид

$$(S_r - c\varepsilon_r^p)^2 + (S_\theta - c\varepsilon_\theta^p)^2 + S_z^2 = 2k^2, \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p, \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_r^e + \varepsilon_\theta^e = -\varepsilon_0, \quad \varepsilon_r^p + \varepsilon_\theta^p = 0. \quad (2.8)$$

Условия непрерывности компонент перемещений (1.5) и напряжений (1.6) на упругопластической границе  $\gamma$  в нашем случае запишутся в виде

$$[u]_{r=\gamma} = 0, \quad [\sigma_r]_{r=\gamma} = 0, \quad [\sigma_\theta]_{r=\gamma} = 0. \quad (2.9)$$

Соотношения (2.1) – (2.9), описывают НДС монолитной крепи вертикальной горной выработки на этапе упругого деформирования материала крепи при наличии несжатых пор и на этапе неупругого деформирования полностью сжатой матрицы.

**Определим НДС крепи на этапе упругого деформирования пористого материала** следующим образом.

Запишем уравнение равновесия (2.1) в перемещениях, для чего подставим (2.2) в (2.4), а получившееся напряжения в (2.1), получим обыкновенное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (2.10)$$

Тогда деформации и напряжения, согласно (2.2), (2.4) и (2.10) определяются в форме

$$\varepsilon_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = C_1 + \frac{C_2}{r^2}, \quad (2.11)$$

$$\sigma_r = 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - 2\mu_1 \frac{C_2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 + 2\mu_1 \frac{C_2}{r^2}. \quad (2.12)$$

Согласно (2.11) объемная деформация на этом этапе имеет вид

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = C_1 - \frac{C_2}{r^2} + C_1 + \frac{C_2}{r^2} = 2C_1. \quad (2.13)$$

Как следует из (2.13) объемная деформация является постоянной величиной для всей области крепи. Следовательно, полное закрытие пор будет осуществляться одновременно во всей крепи, когда объемная деформация достигнет своего предельного, определяемого величиной начального раствора пор.

С учетом этого условие наличия несхлопнутых пор в теле запишем в форме

$$-(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) < \varepsilon_0,$$

или с учетом (2.13)

$$-2C_1 < \varepsilon_0. \quad (2.14)$$

Константы интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$  определим из граничных условий (2.3) следующим образом

$$\begin{cases} 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - 2\mu_1 \frac{C_2}{b^2} = -q_b \\ 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - 2\mu_1 \frac{C_2}{a^2} = -q_a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{q_b - q_a}{2\mu_1} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \\ 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 = -q_a + 2\mu_1 \frac{C_2}{a^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{q_b - q_a}{2\mu_1} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \\ C_1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \frac{(q_b b^2 - q_a a^2)}{2(\lambda_1 + \mu_1)} \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{q_b b^2 - q_a a^2}{2(\lambda_1 + \mu_1)(a^2 - b^2)}, \quad C_2 = \frac{(q_b - q_a)a^2 b^2}{2\mu_1(a^2 - b^2)}. \quad (2.15)$$

Тогда условие (2.14) при учете (2.15) примет вид

$$q_b b^2 - q_a a^2 < \varepsilon_0 (\lambda_1 + \mu_1) (b^2 - a^2). \quad (2.16)$$

При этом поля перемещений, деформаций и напряжений согласно (2.10) – (2.12) с учетом найденных констант (2.15) перепишутся в форме

$$\begin{aligned} u &= \frac{q_b b^2 - q_a a^2}{2(\lambda_1 + \mu_1)(a^2 - b^2)} \cdot r + \frac{(q_b - q_a)a^2 b^2}{2\mu_1(a^2 - b^2)} \cdot \frac{1}{r}, \\ \varepsilon_r &= \frac{q_b b^2 - q_a a^2}{2(\lambda_1 + \mu_1)(a^2 - b^2)} - \frac{(q_b - q_a)a^2 b^2}{2\mu_1(a^2 - b^2)} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{q_b b^2 - q_a a^2}{2(\lambda_1 + \mu_1)(a^2 - b^2)} + \frac{(q_b - q_a)a^2 b^2}{2\mu_1(a^2 - b^2)} \cdot \frac{1}{r^2}, \\ \sigma_r &= q_a \cdot \frac{a^2(r^2 - b^2)}{r^2(b^2 - a^2)} + q_b \cdot \frac{b^2(a^2 - r^2)}{r^2(b^2 - a^2)}, \quad \sigma_\theta = q_a \cdot \frac{a^2(r^2 + b^2)}{r^2(b^2 - a^2)} - q_b \cdot \frac{b^2(r^2 + a^2)}{r^2(b^2 - a^2)}, \\ \sigma_z &= q_a \cdot \frac{\lambda_1 a^2}{(\lambda_1 + \mu_1)(b^2 - a^2)} - q_b \cdot \frac{\lambda_1 b^2}{(\lambda_1 + \mu_1)(b^2 - a^2)}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из (2.13), (2.15) следует, что полное закрытие пор во всей крепи произойдет под действием сжимающие усилия удовлетворяющих условию

$$q_b b^2 = \varepsilon_0 (\lambda_1 + \mu_1) (b^2 - a^2) + q_a a^2. \quad (2.18)$$

При этом НДС (2.17), при выполнении условия (2.18), определится соотношениями

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot r + \frac{(q_a - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))}{2\mu_1} \cdot \frac{a^2}{r}, \\ \varepsilon_r &= -\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{(q_a - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))}{2\mu_1} \cdot \frac{a^2}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{(q_a - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))}{2\mu_1} \cdot \frac{a^2}{r^2}, \end{aligned} \quad (2.19)$$



$$\sigma_r = -\varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1) - \frac{(q_a - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = -\varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1) + \frac{(q_a - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{r^2}, \quad \sigma_z = -\lambda_1 \varepsilon_0.$$

Если после схлопывания пор среда испытывает дальнейшие деформации, то записанное НДС (2.19) будет частью НДС после схлопывания пор, которое реализуется при выполнении неравенства

$$q_b > q_a \left( \frac{a}{b} \right)^2 + \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1) \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (2.20)$$

Условие  $\varepsilon_0 = 0$  будет означать отсутствие изначальной пористости, и в этом случае НДС (2.19) не должно входить в общее НДС. То есть при  $\varepsilon_0 = 0$  компоненты определяемые соотношениями (2.19) должны быть нулевыми:  $u = 0$ ,  $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = 0$ ,  $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = 0$ . Для этого положим  $q_a = q_a \cdot f(\varepsilon_0)$ , где

$$f(\varepsilon_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varepsilon_0 \neq 0 \\ 0, & \text{если } \varepsilon_0 = 0 \end{cases}.$$

С учетом этого НДС на момент полного сжатия пор будет иметь вид

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot r + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{2\mu_1} \cdot \frac{1}{r}, \\ \varepsilon_{r0} &= -\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{2\mu_1 r^2}, \quad \varepsilon_{\theta 0} = -\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{2\mu_1 r^2}, \\ \sigma_{r0} &= -\varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1) - \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{r^2}, \quad \sigma_{\theta 0} = -\varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1) + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{r^2}, \\ \sigma_{z0} &= -\lambda_1 \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

**Перейдем теперь к определению НДС монолитной крепи вертикальной выработки на этапе деформирования материала с полностью сжатой матрицей, обладающей упрочняющимися упруго-пластическими свойствами.**

Если внешние нагрузки таковы, что выполняются условия (2.20) и (2.6), то наряду с упругой  $-V^e$ , возникает пластическая  $V^p$  зона, развитию которой будет препятствовать упрочнение (с) материала. Таким образом, материал крепи с полностью сжатой матрицей будет деформироваться как упрочняющаяся

несжимаемая упругопластическая среда с пределом текучести  $k$ , модулем сдвига  $\mu = \mu_1 + \mu_0$  и коэффициентом упрочнения  $s$ . В каждой из зон  $V^p$  и  $V^e$  величины, описывающие НДС раскладываются на две составляющие - компоненты, определяемые формулами (2.21) и компоненты, определяемые из решения упругопластической задачи.

*Поиск перемещений и полных деформаций.*

Согласно (2.7) и (2.8) для полных деформаций и в упругой, и в пластической зонах и будет выполняться условие

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = -\varepsilon_0. \quad (2.22)$$

Записывая условие (2.22) в перемещениях с использованием формул Коши (2.2) получим неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = -\varepsilon_0,$$

общим решением которого будет

$$u = \frac{D}{r} - \frac{\varepsilon_0}{2} r. \quad (2.23)$$

Из (2.2) с учетом (2.23) полные деформации в упругой и пластической областях определяются в форме

$$\varepsilon_r = -\frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (2.24)$$

*Поиск напряжений в упругой зоне.*

Запишем разность напряжений  $\sigma_r - \sigma_\theta$ , входящую в уравнение равновесия (2.1) через разность компонент девиатора напряжений  $\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta$ , которая в свою очередь с учетом (2.5) представима в форме

$$\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta = 2(\mu_0 + \mu_1)(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) - 2\mu_0(\varepsilon_{r0} - \varepsilon_{\theta 0}). \quad (2.25)$$

При этом разность полных деформаций с учетом (2.24) имеет вид

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = -\frac{2D}{r^2}; \quad (2.26)$$

разность деформаций на момент полного сжатия пор определим из (2.21) в виде

$$\varepsilon_{r0} - \varepsilon_{\theta0} = -\frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{\mu_1 r^2}. \quad (2.27)$$

Соотношение (2.25) с учетом (2.26) и (2.27) переписывается в форме

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -4(\mu_0 + \mu_1) \frac{D}{r^2} + \frac{2\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{\mu_1 r^2}. \quad (2.28)$$

Подставляя полученную разность (2.28) в уравнение равновесия (2.1) приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными вида

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 4(\mu_0 + \mu_1) \frac{D}{r^3} - \frac{2\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{\mu_1 r^3},$$

интегрируя которое, получим:

$$\sigma_r = \left( \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{\mu_1} - 2(\mu_0 + \mu_1) D \right) \frac{1}{r^2} + C, \quad (2.29)$$

где  $C$  – константа интегрирования, которую с помощью граничного условия (2.3) на внешней поверхности крепи можно выразить через константу  $D$  следующим образом:

$$C = -q_b - \left( \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{\mu_1} - 2(\mu_0 + \mu_1) D \right) \frac{1}{b^2}. \quad (2.30)$$

Тогда из (2.29) и (2.28) с учетом (2.30) напряжения в упругой области крепи при реализации условия (2.20) определяются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \left( 2(\mu_0 + \mu_1) D - \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{\mu_1} \right) \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right) - q_b, \\ \sigma_\theta &= \left( 2(\mu_0 + \mu_1) D - \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{\mu_1} \right) \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right) - q_b. \end{aligned} \quad (2.31)$$

*Поиск пластических деформаций.*

Условие пластичности (2.6) с учетом (2.8) запишем в форме

$$(S_r - c\varepsilon_r^p)^2 + (S_\theta + c\varepsilon_r^p)^2 + S_z^2 = 2k^2. \quad (2.32)$$

Из соотношений (2.5) получим

$$S_r + S_\theta = 2(\mu_0 + \mu_1)(\varepsilon_r^e + \varepsilon_\theta^e) - 2\mu_0(\varepsilon_{r0} + \varepsilon_{\theta0}) + \frac{4}{3}\mu_1\varepsilon_0. \quad (2.33)$$

Так как  $\varepsilon_r^e + \varepsilon_\theta^e = \varepsilon_{r0} + \varepsilon_{\theta0} = -\varepsilon_0$ , то из (2.33) получим

$$S_r + S_\theta = -\frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0$$

или

$$S_\theta = -S_r - \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0. \quad (2.34)$$

Подставляя равенство (2.34) в (2.32), с учетом (2.5) приходим к следующему виду условия пластичности:

$$(S_r - c\varepsilon_r^p)^2 + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0(S_r - c\varepsilon_r^p) + \left(\frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0\right)^2 - k^2 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно  $(S_r - c\varepsilon_r^p)$ , найдем, что

$$S_r - c\varepsilon_r^p = -\frac{1}{3}\mu_1\varepsilon_0 - \chi\sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2},$$

где  $\chi = \pm 1$ .

Откуда, учитывая (2.5) и (2.7) после преобразований получим уравнение для определения пластических деформаций

$$(c + 2(\mu_0 + \mu_1))\varepsilon_r^p = 2(\mu_0 + \mu_1)\varepsilon_r - 2\mu_0\varepsilon_{r0} + \mu_1\varepsilon_0 + \chi\sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2},$$

где величины  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_{r0}$  определяются соответственно равенствами (2.24) и (2.21).

С учетом этого из последнего уравнения пластические деформации выразятся в виде

$$\varepsilon_r^p = \frac{(-2D\mu_1(\mu_0 + \mu_1) + \mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2)}{\mu_1(c + 2(\mu_0 + \mu_1))} \frac{1}{r^2} + \frac{\chi\sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2}}{c + 2(\mu_0 + \mu_1)}. \quad (2.35)$$

*Поиск напряжений в пластической области.*

Как и для упругой зоны запишем разность напряжений  $\sigma_r - \sigma_\theta$ , входящую в уравнение равновесия (2.1) через разность компонент девиатора напряжений  $\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta$ , которая в свою очередь с учетом (2.5) и (2.34) представима в форме

$$\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta = 4(\mu_0 + \mu_1)\varepsilon_r^e - 4\mu_0\varepsilon_{r0} + 2\mu_1\varepsilon_0.$$

Откуда учитывая, что упругие деформации связаны с полными и пластическими формулами (2.7), а также тот факт, что полные деформации определяются из соотношений (2.24), а деформации на момент схлопывания пор  $\varepsilon_{r0}$  - из (2.21) получим разность компонент напряжений в виде

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -4(\mu_0 + \mu_1)\varepsilon_r^p - \frac{2}{r^2} \left( 2(\mu_0 + \mu_1)D - \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1} \right). \quad (2.36)$$

С учетом этого уравнение равновесие (2.1) примет вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 4(\mu_0 + \mu_1)\frac{\varepsilon_r^p}{r} + \frac{2}{r^3} \left( 2(\mu_0 + \mu_1)D - \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1} \right),$$

интегрируя которое определим радиальную компоненту напряжений в форме

$$\sigma_r = 4(\mu_0 + \mu_1) \int_a^r \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} \cdot d\rho - \frac{1}{r^2} \left( 2(\mu_0 + \mu_1)D - \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1} \right) + C. \quad (2.37)$$

При этом константа интегрирования  $C$  выражается из граничного условия (2.3) на внутреннем контуре крепи следующим образом

$$C = -q_a + 2(\mu_0 + \mu_1)\frac{D}{a^2} - \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))}{\mu_1}. \quad (2.38)$$

С учетом (2.38) из (2.37) и (2.136) получим, что напряжения в пластической зоне будут находиться по следующим формулам

$$\sigma_r = -q_a + 4(\mu_0 + \mu_1) \int_a^r \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} \cdot d\rho + \left( 2(\mu_0 + \mu_1)D - \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1} \right) \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad (2.39)$$

$$\sigma_\theta = -q_a + 4(\mu_0 + \mu_1) \left( \varepsilon_r^p + \int_a^r \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} \cdot d\rho \right) + \left( 2(\mu_0 + \mu_1)D - \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1} \right) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right).$$

Поиск упруго-пластической границы  $\gamma$  и неизвестной константы интегрирования  $D$  осуществим с использованием условий непрерывности (2.9), которые с учетом (2.31) и (2.39) запишутся в форме

$$q_b - q_a + 4\mu \int_a^\gamma \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} \cdot d\rho + \left( 2\mu D - \frac{\mu_0 (q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{\mu_1} \right) \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 0, \quad (2.40)$$

$$q_b - q_a + 4\mu \left( \varepsilon_r^p \Big|_{r=\gamma} + \int_a^\gamma \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} \cdot d\rho \right) + \left( 2\mu D - \frac{\mu_0 (q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{\mu_1} \right) \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 0.$$

Здесь и далее  $\mu = \mu_0 + \mu_1$ .

Полусумма и разность уравнений (2.40) дает следующую систему

$$\begin{cases} q_b - q_a + 2\mu \left( \varepsilon_r^p \Big|_{r=\gamma} + 2 \int_a^\gamma \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} \cdot d\rho \right) + \left( 2\mu D - \frac{\mu_0 (q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{\mu_1} \right) \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 0, \\ \varepsilon_r^p \Big|_{r=\gamma} = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения полученной системы с учетом (2.35) выразим константу  $D$ :

$$D = \frac{\chi \mu_1 \gamma^2 \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \mu_1^2 \varepsilon_0^2} + \mu_0 (q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{2\mu_1 \mu}. \quad (2.41)$$

С учетом второго уравнения системы найденной константы  $D$  первое уравнение переписывается в виде

$$q_b - q_a + 4\mu \int_a^\gamma \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} \cdot d\rho + \chi \gamma^2 \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 0. \quad (2.42)$$

Это уравнение и будет использовано для нахождения радиуса границы раздела сред  $\gamma$ .

Найдем значение интеграла, входящего в уравнение (2.39) используя при этом формулы (2.35) и (2.41)

$$\int_a^r \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} d\rho = \frac{\chi \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \mu_1^2 \varepsilon_0^2}}{2(c + 2\mu)} \left( \frac{\gamma^2}{r^2} - \frac{\gamma^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r}{a} \right). \quad (2.43)$$

Очевидно, что эта формула так же будет справедлива, если в ней положить  $r = \gamma$ .

Таким образом, перемещения и полные деформации в упругой и пластической областях монолитной цилиндрической крепи при реализации неравенства (2.20) определяются соотношениями (2.23) и (2.24), при этом константа интегрирования  $D$  определяется из (2.41).

Напряжения (2.31) в упругой области сжатого скелета с учетом (2.41) примут вид

$$\sigma_r = \chi\gamma^2 \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right) - q_b, \quad \sigma_\theta = \chi\gamma^2 \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right) - q_b. \quad (2.44)$$

Пластические деформации (2.35) с учетом (2.41) переписутся в форме

$$\varepsilon_r^p = -\varepsilon_\theta^p = \frac{\chi \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2 \varepsilon_0^2}}{c + 2\mu} \left( 1 - \frac{\gamma^2}{r^2} \right). \quad (2.45)$$

Напряжения в пластической области полностью сжатой матрицы при учете (2.43), а также при учете (2.41) и (2.45) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -q_a + \chi \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left( \frac{\gamma^2}{a^2} - \frac{\gamma^2}{r^2} + \frac{2\mu}{c + 2\mu} \left( \frac{\gamma^2}{r^2} - \frac{\gamma^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r}{a} \right) \right), \\ \sigma_\theta &= -q_a + \chi \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left( \frac{2\mu}{c + 2\mu} \left( 2 - \frac{\gamma^2}{r^2} - \frac{\gamma^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r}{a} \right) + \frac{\gamma^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Уравнение (2.42) для нахождения радиуса границы раздела зон упругого и пластического деформирования при условии (2.43) преобразуется к виду

$$q_b - q_a + \chi \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left( \frac{\gamma^2}{a^2} - \frac{\gamma^2}{b^2} + \frac{2\mu}{c + 2\mu} \left( 1 - \frac{\gamma^2}{a^2} + 2 \ln \frac{\gamma}{a} \right) \right) = 0. \quad (2.47)$$

Таким образом, НДС цилиндрической крепи вертикальной горной выработки, на этапе упругого деформирования материала крепи с пористой структурой, находящейся под действием сжимающих нагрузок  $q_a$  и  $q_b$ , удовлетворяющих неравенству (2.16) имеет вид (2.17). Полное закрытие пор происходит одновременно во всей крепи при действии нагрузок, удовлетворяющих условию (2.18), при этом поля перемещений, деформаций и напряжений определяются соотношениями (2.19). На этапе неупругого

деформирования крепи с полностью сжатой матрицей, необходимым условием реализации которого является условие (2.20), перемещения и полные деформации в упругой и пластической зонах определяются по формулам (2.23), (2.24), (2.41); напряжения в упругой зоне описываются соотношениями (2.44); пластические составляющие тензора деформаций и поле напряжений в пластической области крепи выражаются зависимостями (2.45) и (2.46) соответственно, при этом радиус раздела зон упругого и пластического деформирования крепи находится из решения уравнения (2.47).

Далее все соотношения, определяющие НДС монолитной крепи вертикальной горной выработки на каждом этапе деформирования, запишем в безразмерном виде. Для этого величины имеющие размерность длины отнесем к внешнему радиусу  $b$ , а величины имеющие размерность напряжений к величине  $\mu_1$ .

Получим, что условие (2.16) необходимое для реализации первого этапа деформирования, переписывается в виде

$$q_b < \varepsilon_0 (\lambda_1 + 1)(1 - a^2) + q_a \cdot f(\varepsilon_0) a^2; \quad (2.48)$$

условие (2.18) полного сжатия пор во всей крепи примет форму

$$q_b = \varepsilon_0 (\lambda_1 + 1)(1 - a^2) + q_a \cdot f(\varepsilon_0) a^2, \quad (2.49)$$

условие (2.20) необходимое для реализации неупругого этапа деформирования крепи с полностью сжатым скелетом преобразуется к виду

$$q_b > \varepsilon_0 (\lambda_1 + 1)(1 - a^2) + q_a \cdot f(\varepsilon_0) a^2; \quad (2.50)$$

соотношения (2.17), описывающие НДС крепи на первом этапе примут вид

$$u = \frac{q_b - q_a a^2}{2(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)} \cdot r + \frac{(q_b - q_a) a^2}{2(a^2 - 1)} \cdot \frac{1}{r},$$

$$\varepsilon_r = \frac{q_b - q_a a^2}{2(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)} - \frac{(q_b - q_a) a^2}{2(a^2 - 1)} \frac{1}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{q_b - q_a a^2}{2(\lambda_1 + 1)(a^2 - 1)} + \frac{(q_b - q_a) a^2}{2(a^2 - 1)} \frac{1}{r^2},$$

$$\sigma_r = q_a \cdot \frac{a^2 (r^2 - 1)}{r^2 (1 - a^2)} + q_b \cdot \frac{a^2 - r^2}{r^2 (1 - a^2)}, \quad \sigma_\theta = q_a \cdot \frac{a^2 (r^2 + 1)}{r^2 (1 - a^2)} - q_b \cdot \frac{r^2 + a^2}{r^2 (1 - a^2)},$$



$$\sigma_z = q_a \cdot \frac{\lambda_1 a^2}{(\lambda_1 + 1)(1 - a^2)} - q_b \cdot \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + 1)(1 - a^2)}; \quad (2.51)$$

формулы (2.21), моделирующие распределение перемещений, деформаций и напряжений, на момент полного закрытия пор преобразуются к форме

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot r + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + 1))}{2} \cdot \frac{a^2}{r}, \\ \varepsilon_{r0} &= -\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + 1))}{2} \frac{a^2}{r^2}, \quad \varepsilon_{\theta 0} = -\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + 1))}{2} \frac{a^2}{r^2}, \\ \sigma_{r0} &= -\varepsilon_0(\lambda_1 + 1) - \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + 1))a^2}{r^2}, \quad \sigma_{\theta 0} = -\varepsilon_0(\lambda_1 + 1) + \frac{(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + 1))a^2}{r^2}, \\ \sigma_{z0} &= -\lambda_1 \varepsilon_0; \end{aligned} \quad (2.52)$$

зависимости (2.23), (2.24), описывающие поля перемещений и полных деформации в упругой и пластической зонах крепи с полностью сжатой матрицей сохраняют свой вид, при этом константа интегрирования  $D$ , определяемая равенством (2.41) преобразуется к виду

$$D = \frac{\chi \gamma^2 \sqrt{k^2 - \varepsilon_0^2/3} + \mu_0 (q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + 1))a^2}{2\mu}, \quad (2.53)$$

где  $\chi = \text{sign}(q_a - q_b)$ ;

равенства (2.44), определяющие напряжения в упругой области крепи при  $\gamma < r < 1$  на втором этапе деформирования переписутся в форме

$$\sigma_r = \chi \gamma^2 \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_0^2} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) - q_b, \quad \sigma_\theta = \chi \gamma^2 \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_0^2} \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) - q_b; \quad (2.54)$$

соотношения (2.45), (2.46), описывающие пластические деформации и поле напряжений в пластической зоне крепи при  $a < r < \gamma$  на этапе неупругого деформирования полностью сжатой матрицы преобразуются к следующим выражениям соответственно

$$\varepsilon_r^p = -\varepsilon_\theta^p = \frac{\chi \sqrt{k^2 - \varepsilon_0^2/3}}{c + 2\mu} \left(1 - \frac{\gamma^2}{r^2}\right), \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -q_a + \chi \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_0^2} \left( \frac{\gamma^2}{a^2} - \frac{\gamma^2}{r^2} + \frac{2\mu}{c+2\mu} \left( \frac{\gamma^2}{r^2} - \frac{\gamma^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r}{a} \right) \right), \\ \sigma_\theta &= -q_a + \chi \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_0^2} \left( \frac{\gamma^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{r^2} + \frac{2\mu}{c+2\mu} \left( 2 - \frac{\gamma^2}{r^2} - \frac{\gamma^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r}{a} \right) \right).\end{aligned}\quad (2.56)$$

безразмерная форма уравнение (2.47), из решения которого определяется радиус  $\gamma$  упругопластической границы имеет следующий вид

$$q_b - q_a + \chi \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_0^2} \left( \frac{\gamma^2}{a^2} - \gamma^2 + \frac{2\mu}{c+2\mu} \left( 1 - \frac{\gamma^2}{a^2} + 2 \ln \frac{\gamma}{a} \right) \right) = 0. \quad (2.57)$$

Результаты численного эксперимента, проведенного на основе безразмерных соотношений (2.48) – (2.57) представлены на рисунках 2.2 – 2.7.

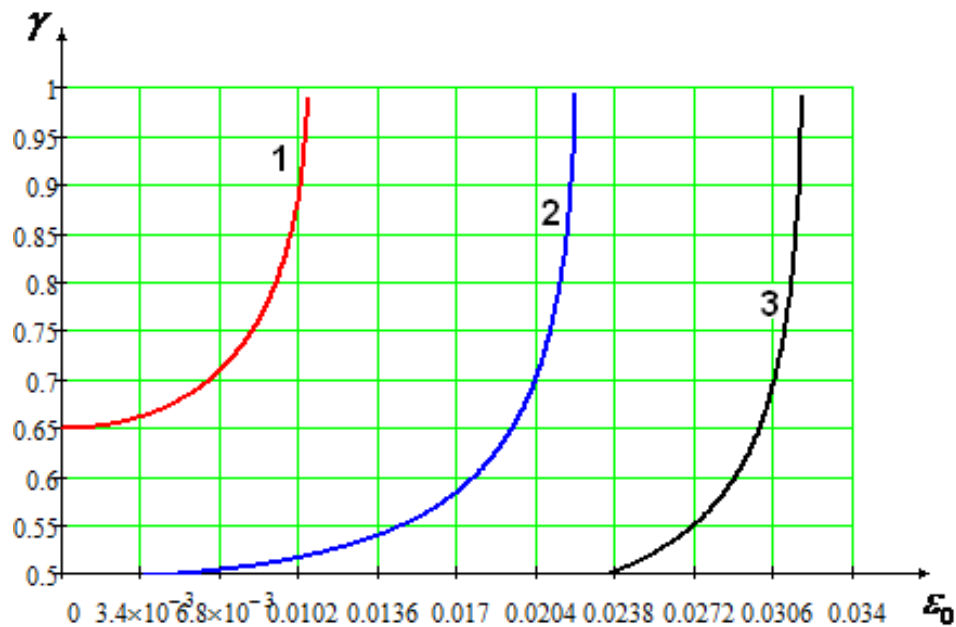


Рисунок 2.2

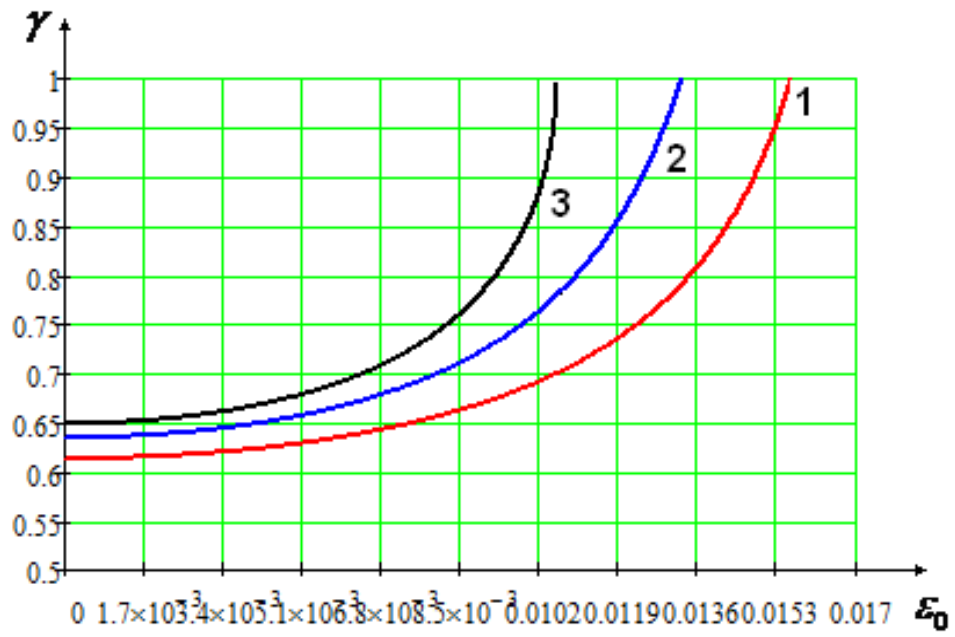


Рисунок 2.3

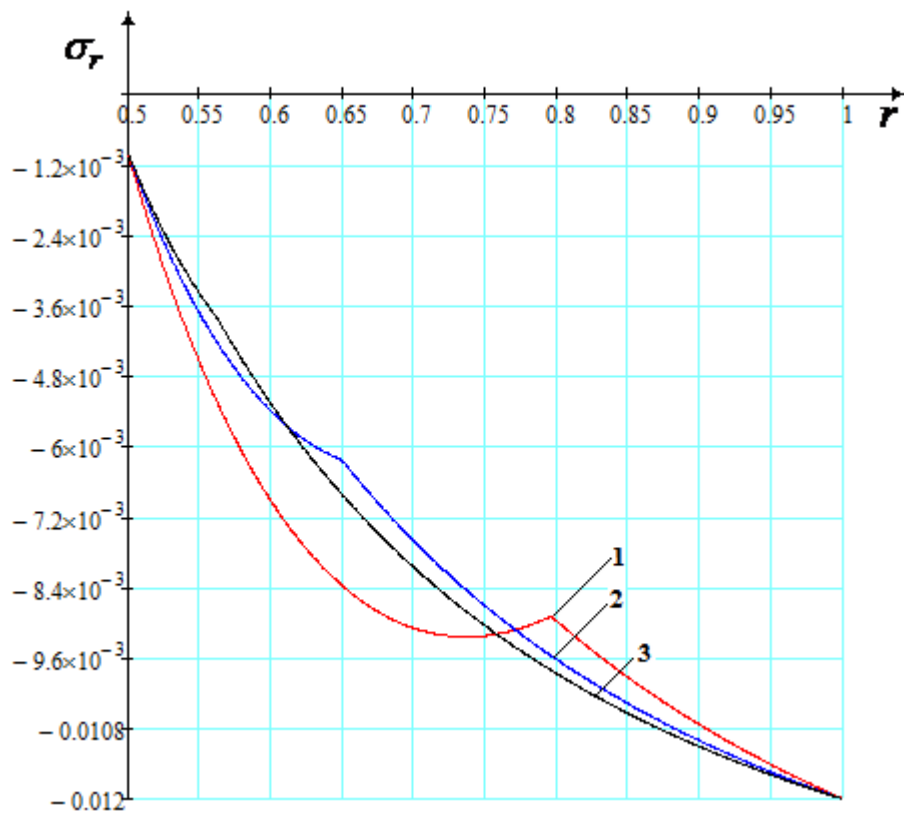


Рисунок 2.4

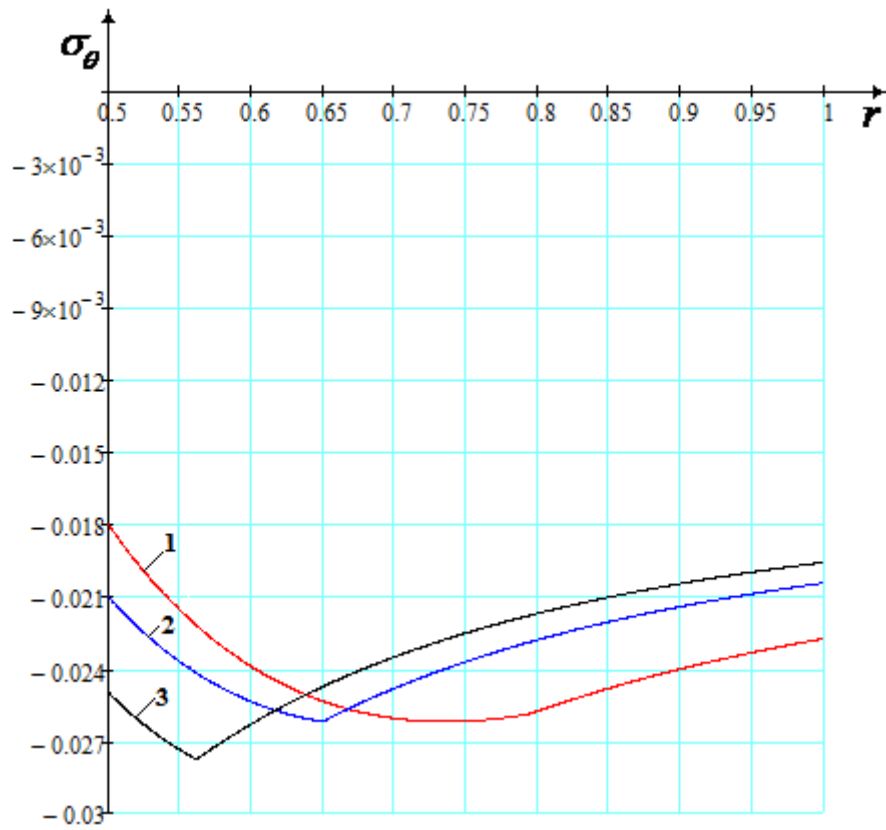


Рисунок 2.5

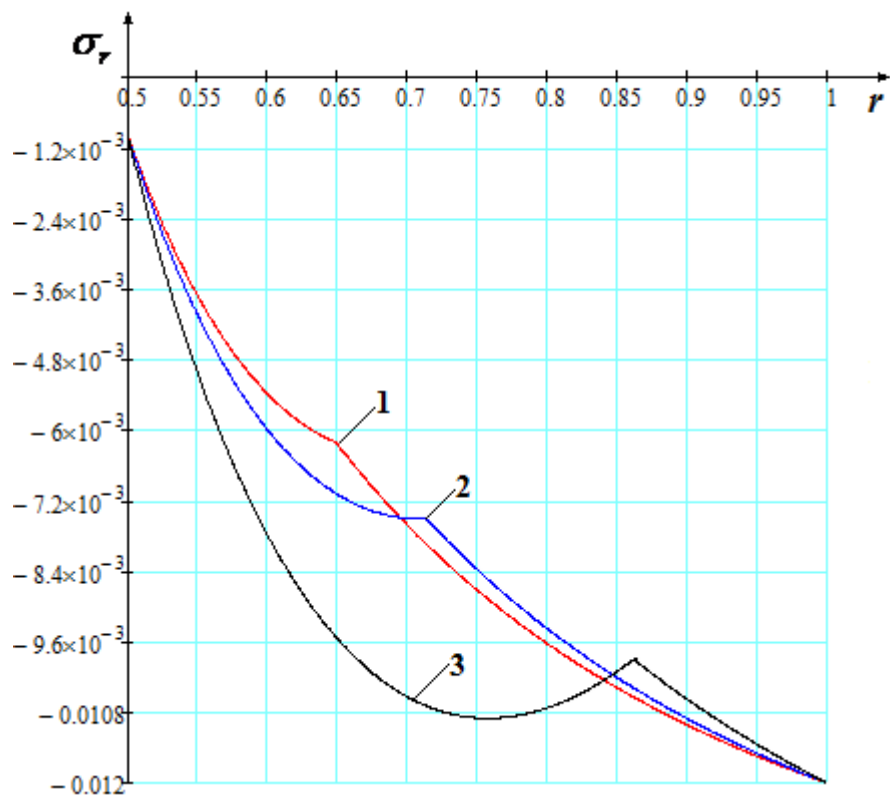


Рисунок 2.6

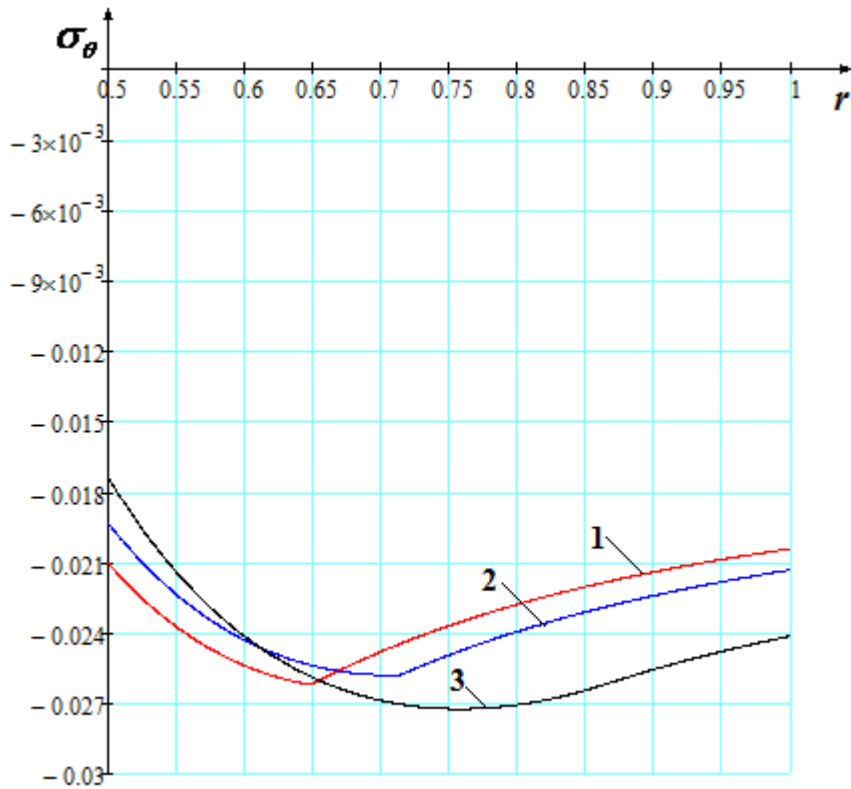


Рисунок 2.7

На рисунках 2.2, 2.3 показаны зависимости величины радиуса  $\gamma$  раздела зон упругого и пластического деформирования от начального раствора пор  $\varepsilon_0$ . При этом на рисунке 2.2 линия 1 соответствует  $k = 0.01$ , линия 2-  $k = 0.015$ , линия 3-  $k = 0.02$ . На рисунке 2.3 линия 1 соответствует  $\mu = 1$ , линия 2-  $\mu = 2$ , линия 3-  $\mu = 3$ .

На рисунках 2.4 – 2.7 представлены зависимости компонент напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  от радиальной координаты  $r$  на этапе неупругого деформирования крепи с полностью сжатой матрицей. При этом на рисунках 2.4 и 2.5 кривые 1 соответствуют  $k = 8.5 \cdot 10^{-3}$ , кривые 2-  $k = 0.01$ , кривая 3-  $k = 0.012$ . На рисунках 2.6 и 2.7 кривые 1 соответствуют  $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ , кривые 2-  $\varepsilon_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ , кривая 3-  $\varepsilon_0 = 0.01$ .

Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, брались следующими  $a = 0.5$ ,  $b = 1$ ,  $q_a = 0.001$ ,  $q_b = 0.012$ ,  $c = 0.06$ ,  $\lambda_1 = 3$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $k = 0.01$ ,  $\varepsilon_0 = 0.001$ ,  $\mu = 2$ .

Отметим, что для соотношений (2.48) – (2.57) будет справедлив предельный переход к формулам для расчета монолитной крепи в случае материала не обладающего внутренней структурой. То есть, если в указанных соотношениях положить  $\varepsilon_0 = 0$ , то получим результаты работы [76].

## **2.2. Определение напряженно-деформированного состояния круговой крепи вертикальной выработки при учете начальной пористости материала и упруговязкопластического поведения сжатого скелета**

В настоящем параграфе проводится моделирование НДС цилиндрической монолитной крепи (рисунок 2.1) вертикальной выработки для материала, обладающего пористой структурой, сжатый скелет которой обладает упруговязкопластическими свойствами. То есть, в отличие от предыдущего в настоящем параграфе материал крепи на этапе неупругого деформирования полностью сжатого скелета моделируется более сложной средой, учитывающей наряду с упрочняющимися упругопластическими свойствами вязкие свойства сжатой матрицы. Постановка задачи аналогична постановке, изложенной в первом параграфе настоящей главы.

Для осесимметричного случая НДС монолитной крепи вертикального шахтного ствола в рамках плоского деформированного состояния в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  на этапе упругого деформирования пористого материала будем моделировать соотношениями (2.1) – (2.4). На этапе деформирования материала крепи с полностью сжатым скелетом, обладающим одновременно упругими, вязкими и пластическими свойствами поля напряжений, деформаций и перемещений в упругой и пластической областях, будем находить из решения системы (2.1) – (2.5), (2.7) – (2.9), присоединяя к ней условие пластичности вида

$$\left(s_r - c\varepsilon_r^p - \eta\dot{\varepsilon}_r^p\right)^2 + \left(s_\theta - c\varepsilon_\theta^p - \eta\dot{\varepsilon}_\theta^p\right)^2 + s_z^2 = 2k^2. \quad (2.58)$$

Проводя выкладки аналогичные (2.10) – (2.31) получим, что НДС круговой монолитной крепи вертикальной выработки, на этапе упругого деформирования материала крепи с пористой структурой, находящейся под действием сжимающих нагрузок  $q_a$  и  $q_b$ , удовлетворяющих неравенству (2.16) имеет вид (2.17). Случай полного закрытия пор реализуется одновременно во всей крепи при действии нагрузок, удовлетворяющих условию (2.18), при этом поля перемещений, деформаций и напряжений определяются соотношениями (2.19). На этапе неупругого деформирования крепи с полностью сжатой матрицей, необходимым условием реализации которого является условие (2.20), перемещения и полные деформации в упругой и пластической зонах определяются по формулам (2.23), (2.24), напряжения в упругой зоне описываются соотношениями (2.31).

*Найдем пластические составляющие деформаций в пластической области крепи с полностью сжатой матрицей.*

Условие пластичности (2.58) с учетом (2.8) запишем в форме

$$\left(S_r - c\varepsilon_r^p - \eta\dot{\varepsilon}_r^p\right)^2 + \left(S_\theta + c\varepsilon_r^p + \eta\dot{\varepsilon}_r^p\right)^2 + S_z^2 = 2k^2. \quad (2.59)$$

Из соотношений (2.5) получим

$$S_r + S_\theta = 2\mu\left(\varepsilon_r^e + \varepsilon_\theta^e\right) - 2\mu_0\left(\varepsilon_{r0} + \varepsilon_{\theta0}\right) + \frac{4}{3}\mu_1\varepsilon_0, \quad (2.60)$$

где  $\mu = \mu_0 + \mu_1$ .

Так как  $\varepsilon_r^e + \varepsilon_\theta^e = \varepsilon_{r0} + \varepsilon_{\theta0} = -\varepsilon_0$ , то из (2.60) получим

$$S_\theta = -S_r - \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0. \quad (2.61)$$

Подставляя равенство (2.61) в (2.59) с учетом (2.5) приходим к следующему виду условия пластичности:

$$\left(S_r - c\varepsilon_r^p - \eta\dot{\varepsilon}_r^p\right)^2 + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0\left(S_r - c\varepsilon_r^p - \eta\dot{\varepsilon}_r^p\right) + \left(\frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0\right)^2 - k^2 = 0$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно  $\left(S_r - c\varepsilon_r^p - \eta\dot{\varepsilon}_r^p\right)$  найдем, что

$$S_r - c\varepsilon_r^p - \eta\dot{\varepsilon}_r^p = -\frac{1}{3}\mu_1\varepsilon_0 - \chi\sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2},$$

где  $\chi = \pm 1$ .

Откуда, учитывая (2.5) и (2.7) после преобразований получим уравнение для определения пластических деформаций

$$\eta\dot{\varepsilon}_r^p + (c + 2\mu)\varepsilon_r^p = 2\mu\varepsilon_r - 2\mu_0\varepsilon_{r0} + \mu_1\varepsilon_0 + \chi\sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2}, \quad (2.62)$$

где величины  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_{r0}$  определяются соответственно равенствами (2.24) и (2.21).

При этом выражение (2.62) с учетом (2.24) и (2.21) переписывается в форме

$$\eta\dot{\varepsilon}_r^p + (c + 2\mu)\varepsilon_r^p = -2\mu\frac{D}{r^2} + \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1 r^2} + \chi\sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2}, \quad (2.63)$$

где  $D$  константа интегрирования, возникающая при определении перемещений из формулы (2.23).

Общее решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения (2.63) будем искать в виде

$$(\varepsilon_r^p)_{он} = (\varepsilon_r^p)_{оо} + (\varepsilon_r^p)_{чн}, \quad (2.64)$$

где  $(\varepsilon_r^p)_{оо}$  - общее решение соответствующего однородного уравнения, определяемое равенством

$$(\varepsilon_r^p)_{оо} = F(r) \cdot e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t}; \quad (2.65)$$

$(\varepsilon_r^p)_{чн}$  - частное решение неоднородного уравнения (2.63), которое выражается формулой

$$(\varepsilon_r^p)_{чн} = -\frac{2\mu}{\eta r^2} e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \int D \cdot e^{\frac{c+2\mu}{\eta}t} dt + \frac{\mu_0(q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(\lambda_1 + \mu_1))a^2}{\mu_1(c+2\mu)r^2} + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2}. \quad (2.66)$$

Здесь в (2.65)  $F(r)$  - константа интегрирования не зависящая от времени, возникающая при нахождении общего решения однородного уравнения соответствующего (2.63).



Из (2.64) при учете (2.65) и (2.66) получим, что общее решение неоднородного уравнения (2.63) определится следующим соотношением

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^p = & F(r) e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} - \frac{2\mu}{\eta r^2} e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \int D \cdot e^{\frac{c+2\mu}{\eta} t} dt + \\ & + \frac{\mu_0 (q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{\mu_1 (c+2\mu)} \frac{1}{r^2} + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \mu_1^2 \varepsilon_0^2}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Из условия равенства нулю пластической деформации  $\varepsilon_r^p$  на границе  $\gamma$  раздела областей упругого и пластического деформирования материала определим второе слагаемое правой части равенства (2.67). То есть, при выполнении условия

$$\varepsilon_r^p \Big|_{r=\gamma} = 0, \quad (2.68)$$

второе слагаемое правой части равенства (2.67) определится в виде

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{\eta r^2} e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \int D \cdot e^{\frac{c+2\mu}{\eta} t} dt = & F(\gamma) e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \frac{\gamma^2}{r^2} + \\ & + \frac{\mu_0 (q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{\mu_1 (c+2\mu) r^2} + \frac{\chi \gamma^2}{r^2 (c+2\mu)} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \mu_1^2 \varepsilon_0^2}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Тогда из (2.67) при условии (2.69) получим

$$\varepsilon_r^p = \left( F(r) - F(\gamma) \frac{\gamma^2}{r^2} \right) e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left( 1 - \frac{\gamma^2}{r^2} \right). \quad (2.70)$$

Константу интегрирования  $F(r)$  найдем из начального условия, которое в общей форме представимо в виде

$$\varepsilon_r^p \Big|_{t=0} = \tilde{\varepsilon}_0, \quad (2.71)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_0$  - неизвестная константа.

Покажем, что  $\tilde{\varepsilon}_0$  будет равно нулю. Для этого введем следующие обозначения

$$\gamma(0) = \gamma_0, \quad F(\gamma(0)) = F(\gamma_0) = F_0. \quad (2.72)$$

Тогда из начального условия (2.71) с учетом (2.70) и (2.72) получим

$$F(r) - F_0 \frac{\gamma_0^2}{r^2} + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left(1 - \frac{\gamma_0^2}{r^2}\right) = \tilde{\varepsilon}_0$$

или

$$F(r) = \tilde{\varepsilon}_0 + F_0 \frac{\gamma_0^2}{r^2} + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left(\frac{\gamma_0^2}{r^2} - 1\right). \quad (2.73)$$

Откуда при учете (2.72)

$$F_0 = F(\gamma_0) = \tilde{\varepsilon}_0 + F_0$$

или, как следствие,  $\tilde{\varepsilon}_0 = 0$ .

Итак,

$$\begin{aligned} F(r) &= F_0 \frac{\gamma_0^2}{r^2} + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left(\frac{\gamma_0^2}{r^2} - 1\right), \\ F(\gamma) &= F_0 \frac{\gamma_0^2}{\gamma^2} + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left(\frac{\gamma_0^2}{\gamma^2} - 1\right). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Тогда, из (2.70) при учете двух последних равенств получим выражение для определения пластических деформаций в форме

$$\varepsilon_r^p = \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left(\frac{\gamma^2}{r^2} - 1\right) \left(e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} - 1\right). \quad (2.75)$$

*Поиск напряжений в пластической области, константы интегрирования  $D$  и радиуса упругопластической границы.*

Согласно алгоритму, описанному в параграфе 1 настоящей главы, напряжения в пластической области будем моделировать зависимостями (2.39).

Поиск упругопластической границы  $\gamma$  и неизвестной константы интегрирования  $D$  осуществим с использованием условия (2.9) непрерывности радиальной компоненты тензора деформаций и условия (2.68) равенства нулю пластической деформации на границе  $\gamma$ .

Из условия (2.68) и как следствие (2.69) с учетом (2.74) получим, что

$$\int D(t) \cdot e^{\frac{c+2\mu}{\eta} t} dt = \frac{\eta}{2\mu} \left( F_0 \gamma_0^2 + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left( \gamma_0^2 + \gamma^2 \left( e^{\frac{c+2\mu}{\eta} t} - 1 \right) \right) \right) +$$

$$+e^{\frac{c+2\mu}{\eta}t} \frac{\mu_0 (q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{\mu_1 (c + 2\mu)} \Bigg).$$

Дифференцируя левую и правую части получившегося равенства по времени и выражая константу  $D(t)$ , получим:

$$D(t) = \frac{\eta\chi}{2\mu(c+2\mu)} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left( 2\gamma\dot{\gamma} \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) + \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^2 \right) + \frac{\mu_0 (q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + \mu_1)) a^2}{2\mu\mu_1}. \quad (2.76)$$

Условие (2.9) непрерывности радиальной компоненты тензора напряжений при учете (2.31), (2.39) и (2.76) запишется в форме

$$q_b - q_a + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left( \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) \left( 2\mu \left( \frac{\gamma^2}{a^2} - 1 + 2 \ln \frac{a}{\gamma} \right) + 2\gamma\dot{\gamma}\eta \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right) + (c+2\mu)\gamma^2 \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right) = 0. \quad (2.77)$$

Дифференциальное уравнение (2.77) будем использовать для определения положения радиуса упругопластической границы  $\gamma$ . Как следует из (2.77) в начальный момент времени положение упругопластической границы будет определяться соотношением

$$\gamma^2 = \frac{|q_a - q_b| b^2 a^2}{\sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} (b^2 - a^2)}. \quad (2.78)$$

Напряжения в упругой области при  $\gamma \leq r \leq b$ , моделируемые формулами (2.31), с учетом (2.76) примут вид

$$\sigma_r = \frac{\eta\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left( 2\gamma\dot{\gamma} \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) + \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^2 \right) \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right) - q_b, \\ \sigma_\theta = \frac{\eta\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left( 2\gamma\dot{\gamma} \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) + \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^2 \right) \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right) - q_b. \quad (2.79)$$

Соотношения (2.39), описывающие распределение поля напряжений в пластической области крепи при  $a \leq r \leq \gamma$  с учетом (2.75) и (2.76), переписутся в форме

$$\begin{aligned} \sigma_r = & -q_a + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left\{ 2 \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \right) \left( \mu \left( \frac{\gamma^2}{r^2} - \frac{\gamma^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r}{a} \right) + \gamma \dot{\gamma} \eta \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right) + \right. \\ & \left. + (c+2\mu) \left( \frac{\gamma^2}{a^2} - \frac{\gamma^2}{r^2} \right) \right\}, \\ \sigma_\theta = & -q_a + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \mu_1^2 \varepsilon_0^2} \left\{ 2 \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \right) \left( \mu \left( 2 - \frac{\gamma^2}{r^2} - \frac{\gamma^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r}{a} \right) + \gamma \dot{\gamma} \eta \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right) \right) + \right. \\ & \left. + (c+2\mu) \left( \frac{\gamma^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{r^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Далее запишем все соотношения, определяющие НДС монолитной крепи вертикальной выработки на каждом этапе деформирования, в безразмерном виде. Для этого, все величины имеющие размерность длины отнесем к внешнему радиусу  $b$ , а величины имеющие размерность напряжений к величине.

Тогда безразмерное НДС на этапе упругого деформирования пористого материала, то есть при реализации условия (2.48), определяется зависимостями (2.51). Безразмерные поля перемещений, деформаций и напряжений на момент полного закрытия пор, которое происходит при действии нагрузок, удовлетворяющих равенству (2.49), моделируются соотношениями (2.52). При переходе к безразмерной форме зависимости (2.23), (2.24), описывающие поля перемещений и полных деформаций в упругой и пластической зонах крепи на втором этапе деформирования, необходимым условием реализации которого является условие (2.50), сохраняют свой вид, при этом константа интегрирования  $D$ , определяемая равенством (2.76) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} D(t) = & \frac{\eta \chi}{2\mu(c+2\mu)} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_0^2} \left( 2\gamma \dot{\gamma} \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \right) + \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^2 \right) + \\ & + \frac{\mu_0 (q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 (\lambda_1 + 1)) a^2}{2\mu}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

где  $\chi = \text{sign}(q_a - q_b)$ ,  $\mu = \mu_0 + 1$ .

Формулы (2.79), определяющие напряжения в упругой области крепи при  $\gamma < r < 1$  на втором этапе деформирования в безразмерной форме переписутся в виде

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\eta\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_0^2} \left( 2\gamma\dot{\gamma} \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) + \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^2 \right) \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) - q_b, \\ \sigma_\theta &= \frac{\eta\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_0^2} \left( 2\gamma\dot{\gamma} \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) + \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^2 \right) \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) - q_b.\end{aligned}\quad (2.82)$$

Соотношения (2.75) и (2.80), описывающие пластические деформации и поле напряжений в пластической зоне крепи при  $a < r < \gamma$  на этапе неупругого деформирования полностью сжатой матрицы преобразуются к следующим выражениям соответственно

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^p &= -\varepsilon_\theta^p = \frac{\chi\sqrt{k^2 - \varepsilon_0^2/3}}{c+2\mu} \left( 1 - \frac{\gamma^2}{r^2} \right) \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right), \\ \sigma_r &= -q_a + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left\{ 2 \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) \left( \mu \left( \frac{\gamma^2}{r^2} - \frac{\gamma^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r}{a} \right) + \gamma\dot{\gamma}\eta \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + (c+2\mu) \left( \frac{\gamma^2}{a^2} - \frac{\gamma^2}{r^2} \right) \right\}, \\ \sigma_\theta &= -q_a + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left\{ 2 \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) \left( \mu \left( 2 - \frac{\gamma^2}{r^2} - \frac{\gamma^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r}{a} \right) + \gamma\dot{\gamma}\eta \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + (c+2\mu) \left( \frac{\gamma^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{r^2} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (2.84)$$

Безразмерная форма уравнение (2.77), из решения которого определяется радиус  $\gamma$  упругопластической границы, имеет следующий вид

$$\begin{aligned}q_b - q_a + \frac{\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_0^2} \left( 2 \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) \left( \mu \left( \frac{\gamma^2}{a^2} - 1 + 2 \ln \frac{a}{\gamma} \right) + \gamma\dot{\gamma}\eta \left( 1 - \frac{1}{a^2} \right) \right) + \right. \\ \left. + (c+2\mu) \gamma^2 \left( \frac{1}{a^2} - 1 \right) \right) = 0.\end{aligned}\quad (2.85)$$

Результаты численного эксперимента, проведенного на основе безразмерных соотношений (2.51), (2.52), (2.23), (2.24), (2.72), (2.83) – (2.85), представлены на рисунках 2.8 – 2.14.

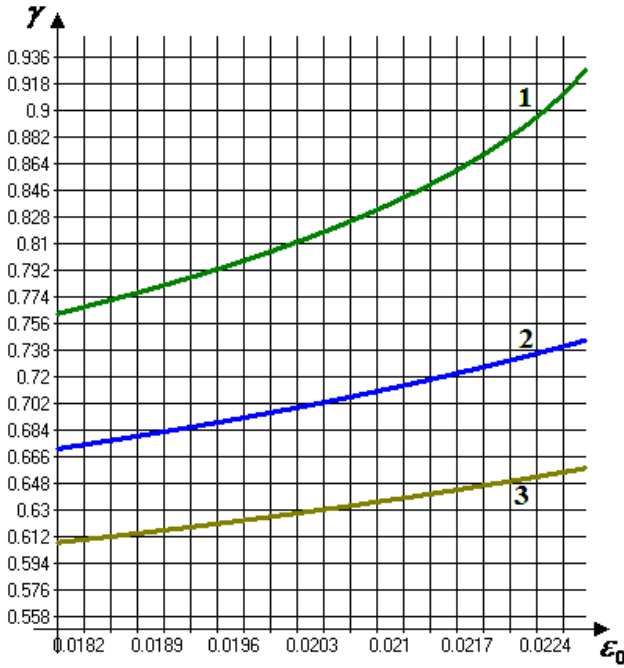


Рисунок 2.8

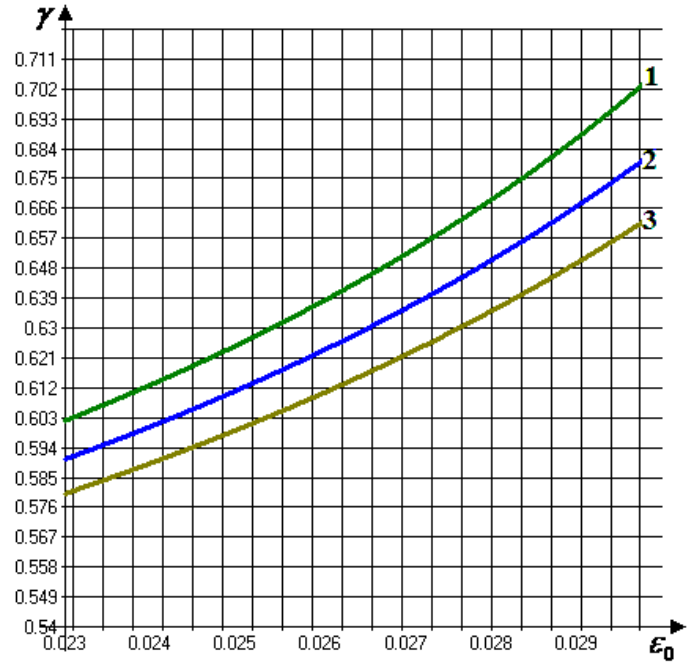


Рисунок 2.9

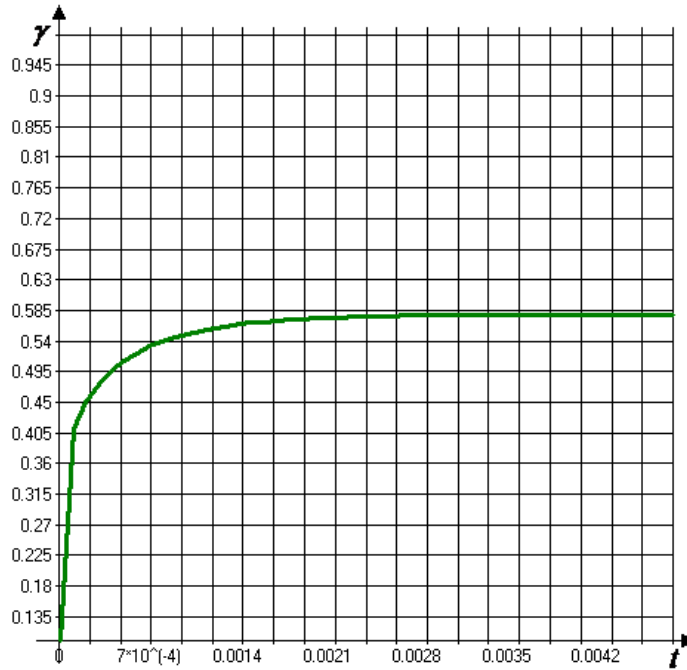


Рисунок 2.10

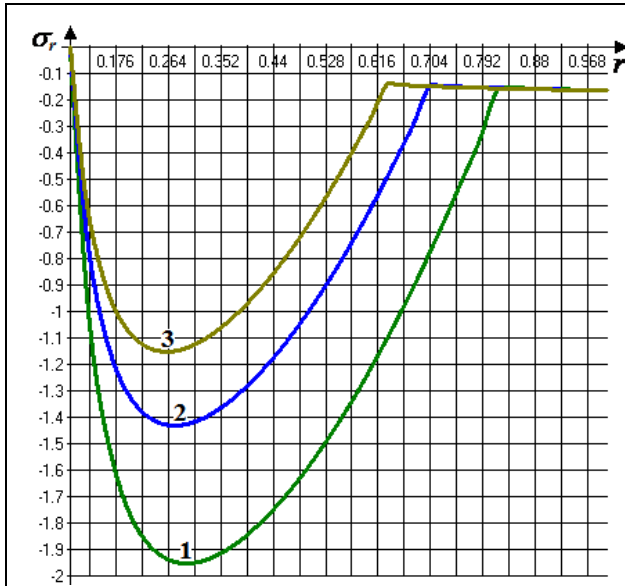


Рисунок 2.11

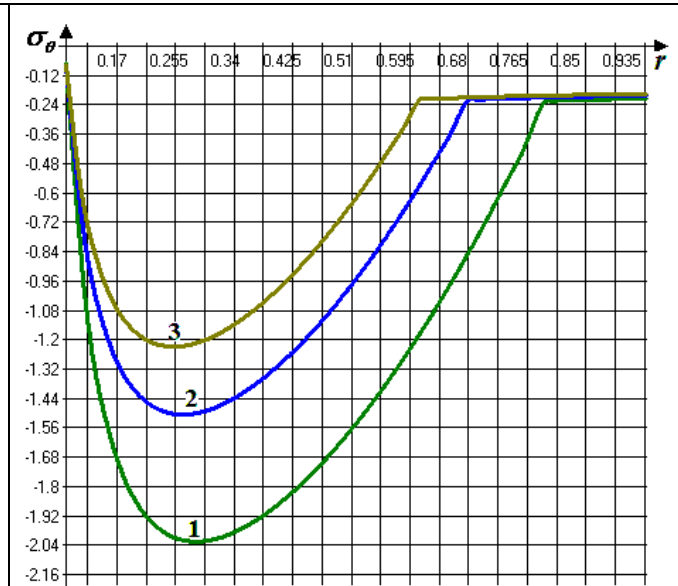


Рисунок 2.12

На рисунках 2.8 и 2.9 представлены зависимости величины радиуса  $r$  границы раздела зон упругого и пластического деформирования от величины  $\varepsilon_0$ , при различных значениях предела текучести  $k$  и коэффициента упрочнения  $c$  материала сжатой матрицы. При этом на рисунке 2.8 кривая 1 соответствует  $k = 0.038$ , кривая 2-  $k = 0.039$ , кривая 3-  $k = 0.04$ ; на рисунке 2.9 кривая 1 соответствует  $c = 0.05$ , кривая 2-  $c = 0.08$ , кривая 3-  $c = 0.1$ .

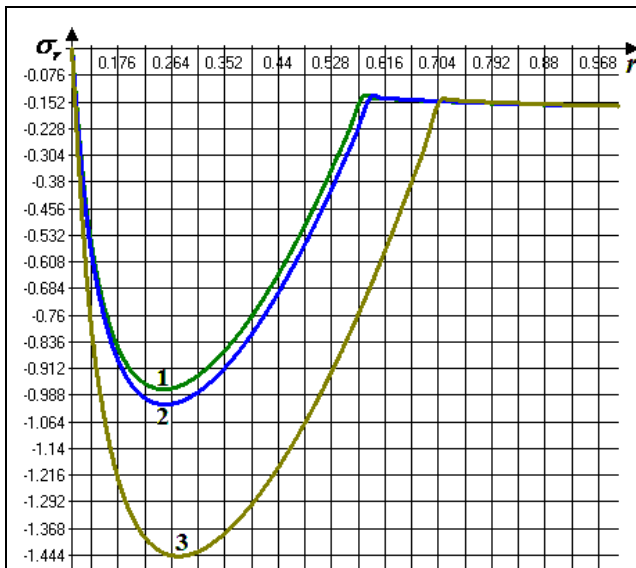


Рисунок 2.13

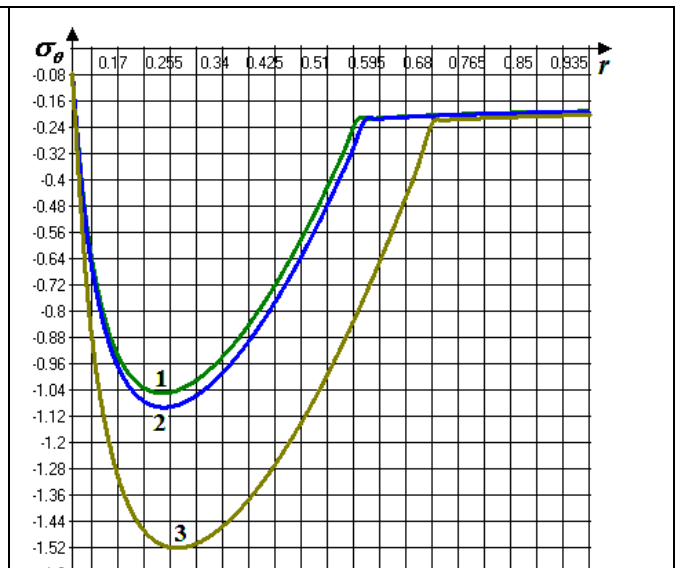


Рисунок 2.14

На рисунке 2.10 показана зависимость величины  $\gamma$  материала крепи с полностью сжатой матрицей от времени. На рисунках 2.11, 2.13 и 2.12, 2.14 представлены зависимости соответственно радиальной  $\sigma_r$  и тангенциальной  $\sigma_\theta$  компонент напряжений от текущего радиуса при различных значениях предела текучести  $k$  материала сжатой матрицы (рисунки 2.11, 2.12) и при различных значениях начального раствора пор  $\varepsilon_0$  материала крепи (рисунки 2.13, 2.14). При этом на обоих рисунках 2.11 и 2.12 кривые 1 соответствуют  $k = 0.038$ , кривые 2-  $k = 0.039$ , кривые 3-  $k = 0.04$ , а на рисунках 2.13 и 2.14 кривые 1 соответствуют  $\varepsilon_0 = 0.02048$ , кривые 2-  $\varepsilon_0 = 0.022$ , кривые 3-  $\varepsilon_0 = 0.03$ .

Относительные значения других физико-механических и геометрических параметров, если не оговорено особо, брались следующими:  $a = 0.1$ ,  $b = 1$ ,  $q_a = 10^{-5}$ ,  $q_b = 0.16384$ ,  $c = 0.15$ ,  $\eta = 3.2 \cdot 10^{-4}$ ,  $\lambda_1 = 3$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $k = 0.04096$ ,  $\varepsilon_0 = 0.02048$ ,  $\mu = 2$ .

Отметим, что согласно [119], приведенные в расчетах безразмерные характеристики материалов соответствуют допустимым диапазонам значений для различных марок бетона и растворов используемых для подземного шахтного строительства.

Из анализа решений следует, что как при увеличении коэффициента упрочнения, так и с ростом предела текучести сжатой матрицы величина радиуса упругопластической границы уменьшается. Область неупругих деформаций сжатой матрицы расширяется с увеличением величины начального раствора пор. При увеличении времени до определенного значения  $t^*$  пластическая зона расширяется, при этом дальнейший рост времени практически не приводит к изменению радиуса упругопластической границы, который соответствует упрочняющейся упруго-пластической модели [142]. Абсолютные величины главных компонент тензора напряжений в пластической области уменьшаются при увеличении предела текучести материала сжатой матрицы и увеличиваются с ростом параметра  $\varepsilon_0$ .



Отметим, что для полученных решений справедлив предельный переход аналогичный переходу в предыдущем параграфе.

### **2.3. Определение напряженно-деформированного состояния пористой крепи подземной сферической полости с учетом упругопластических свойств сжатой матрицы**

В настоящее время одной из важнейших задач экономического и социального развития северных территорий является использование подземного пространства для различных хозяйственных нужд. Под землей могут размещаться хранилища нефтепродуктов, сжиженного газа, конденсата, воды, сельскохозяйственной продукции, теплоаккумулирующие выработки и т.д., которые рассматриваются как подземные резервуары. Обычно такие подземные сооружения имеют сферическую форму. Для надежности эксплуатации горных выработок, представляющих собой подземные сферические полости, в них возводят крепи. Крепи, предназначенные для обеспечения безопасности труда, сохранности находящегося внутри сырья и оборудования, как правило, изготавливаются из железобетона. Отметим, что в случае подземных полостей, созданных методом камуфлетных взрывов, роль крепи выполняет уплотненная (под действием взрывных волн) приконтурная область массива горных пород. В связи с этим актуальной является задача получения новых аналитических выражений для описания НДС толстостенного сферического тела (крепь подземной полости), учитывающих внутреннюю структуру материала и неупругие свойства полностью сжатого скелета.

В этом параграфе рассматривается задача нахождения НДС монолитной крепи подземной сферической полости. Крепь будем моделировать сферическим телом с внешним радиусом  $b$  и внутренним -  $a$  (рисунок 2.15). Давление жидкости или газа на крепь заменим сжимающей нагрузкой интенсивностью  $q_a$  равномерно распределенной по ее внутренней поверхности. Сжимающая нагрузка интенсивностью  $q_b$  равномерно распределенная по внешней поверхности

моделирует собой действие массива горных пород на крепь. Реологические свойства материала крепи, обладающего пористой структурой, как и прежде, будем определять согласно модели описанной в §1 первой главы.

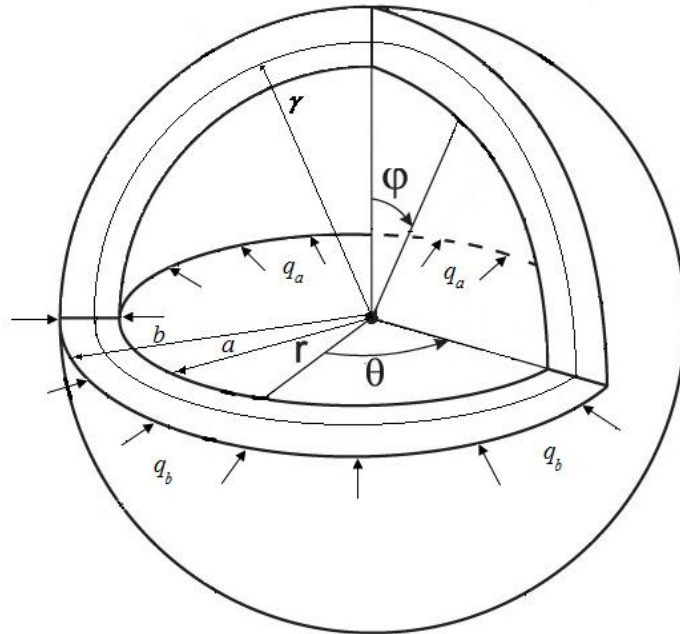


Рисунок 2.15 – Монолитная крепь подземной сферической полости под действием всестороннего равномерного сжатия

При определении НДС крайевые эффекты, связанные с наличием дневной поверхности, не учитываются. Это предположение уместно для полостей, проведенных на достаточно больших глубинах.

Как и ранее, процесс деформирования пористого материала монолитной сферической крепи разделим на два взаимосвязанных этапа. В качестве первого рассматривается этап деформирования упругой сжимаемой пористой среды, в качестве второго – деформирование полностью сжатой матрицы с упрочняющимися упругопластическими свойствами.

Для случая центральной симметрии НДС монолитной крепи подземной сферической полости в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , определяемое следующим ненулевыми компонентами тензора напряжений  $\sigma_r = \sigma_r(r)$ ,  $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r) = \sigma_\varphi = \sigma_\varphi(r)$ , будем моделировать согласно (1.1), (1.4), (1.3) следующими соотношениями

- уравнение равновесия

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + 2(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0; \quad (2.86)$$

- соотношения Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad (2.87)$$

- граничные условия в напряжениях

$$\sigma_r|_{r=b} = -q_b, \quad \sigma_r|_{r=a} = -q_a, \quad (q_a > 0, q_b > 0), \quad (2.88)$$

Закон Гука (1.7), связывающий напряжения и деформации на этапе упругого деформирования материала с пористой структурой с учетом указанных предположений переписется в форме

$$\sigma_r = (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_r + 2\lambda_1\varepsilon_\theta, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \lambda_1\varepsilon_r + 2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_\theta. \quad (2.89)$$

Соотношениями (1.8), связывающие упругие деформации полностью сжатой матрицы с напряжениями, в нашем случае преобразуются к виду

$$\begin{aligned} S_r &= 2\mu\varepsilon_r - 2\mu_0\varepsilon_{r0} + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0, \quad S_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta - 2\mu_0\varepsilon_{\theta0} + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0, \\ S_\varphi &= 2\mu\varepsilon_\varphi - 2\mu_0\varepsilon_{\varphi0} + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.90)$$

В (2.90) как и ранее индекс «0», приписанный внизу компонент вектора перемещений, а также компонент тензоров напряжений и деформаций, указывает на то, что они вычислены на момент полного закрытия пор.

Условие пластичности (1.13), выражения для полных деформаций в пластической зоне материала крепи с полностью сжатой матрицей (1.10), условия несжимаемости (1.11) с учетом принятых предположений примут соответственно вид

$$(s_r - c\varepsilon_r^p)^2 + (s_\theta - c\varepsilon_\theta^p)^2 + (s_\varphi - c\varepsilon_\varphi^p)^2 = 2k^2, \quad (2.91)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^e + \varepsilon_\varphi^p, \quad (2.92)$$

$$\varepsilon_r^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_\varphi^p = 0, \quad \varepsilon_r^e + \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\varphi^e = -\varepsilon_0. \quad (2.93)$$

Условия непрерывности компонент перемещений (1.5) и напряжений (1.6) на упругопластической границе  $\gamma$  в данном случае запишутся в форме

$$[u]_{r=\gamma} = 0, [\sigma_r]_{r=\gamma} = 0. \quad (2.94)$$

Соотношения (2.86) – (2.94), описывают НДС монолитной крепи подземной сферической поплости на этапе упругого деформирования материала крепи при наличии несжатых пор и на этапе неупругого деформирования полностью сжатой матрицы.

**Моделирование НДС монолитной сферической крепи на первом этапе,** проведем по следующему алгоритму.

Запишем уравнение равновесия (2.1) в перемещениях, для чего подставим (2.87) в (2.89), а получившееся напряжения в (2.86), получим обыкновенное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + 2 \left( r \frac{du}{dr} - u \right) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}. \quad (2.95)$$

Тогда деформации и напряжения, согласно (2.87), (2.89) и (2.95) определяются в форме

$$\varepsilon_r = C_1 - \frac{2C_2}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = C_1 + \frac{C_2}{r^3}, \quad (2.96)$$

$$\sigma_r = C_1(3\lambda_1 + 2\mu_1) - 4\mu_1 \frac{C_2}{r^3}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = C_1(3\lambda_1 + 2\mu_1) + 2\mu_1 \frac{C_2}{r^3}. \quad (2.97)$$

Согласно (2.96), объемная деформация на этом этапе имеет вид

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = \varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = 3C_1. \quad (2.98)$$

Следовательно, как и для цилиндрических задач, рассмотренных в первых двух параграфах настоящей главы, объемная деформация есть постоянная величина, одинаковая для всей области крепи. Вследствие чего полное закрытие

пор также будет происходить одновременно во всей крепи при достижении величины объемной деформацией своего предельного значения равного значению начального раствора пор ( $\varepsilon_0 > 0$ ), взятого с противоположным знаком.

С учетом этого, условие наличия несхлопнутых пор в теле запишем в форме

$$-(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) < \varepsilon_0,$$

или с учетом (2.98)

$$-3C_1 < \varepsilon_0. \quad (2.99)$$

Константы интегрирования  $C_1, C_2$  определим из граничных условий (2.88) следующим образом

$$C_1 = \frac{q_b b^3 - q_a a^3}{(3\lambda_1 + 2\mu_1)(a^3 - b^3)}, \quad C_2 = \frac{(q_a - q_b)a^3 b^3}{4\mu_1(b^3 - a^3)}. \quad (2.100)$$

Условие (2.99) при учете (2.100) примет вид

$$q_b b^3 - q_a a^3 < \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2\mu_1)(b^3 - a^3). \quad (2.101)$$

При этом поля перемещений, деформаций и напряжений согласно (2.95) – (2.97) с учетом найденных констант (2.100) переписутся в форме

$$\begin{aligned} u &= \frac{q_b b^3 - q_a a^3}{(3\lambda_1 + 2\mu_1)(a^3 - b^3)} \cdot r + \frac{(q_a - q_b)a^3 b^3}{4\mu_1(b^3 - a^3)} \cdot \frac{1}{r^2}, \\ \varepsilon_r &= \frac{q_b b^3 - q_a a^3}{(3\lambda_1 + 2\mu_1)(a^3 - b^3)} - \frac{(q_a - q_b)a^3 b^3}{2\mu_1(b^3 - a^3)} \cdot \frac{1}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{q_b b^3 - q_a a^3}{(3\lambda_1 + 2\mu_1)(a^3 - b^3)} + \frac{(q_a - q_b)a^3 b^3}{4\mu_1(b^3 - a^3)} \cdot \frac{1}{r^3}, \\ \sigma_r &= q_a \cdot \frac{a^3(r^3 - b^3)}{r^3(b^3 - a^3)} + q_b \cdot \frac{b^3(a^3 - r^3)}{r^3(b^3 - a^3)}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = q_a \cdot \frac{a^3(2r^3 + b^3)}{2(b^3 - a^3)r^3} - q_b \cdot \frac{b^3(2r^3 + a^3)}{2(b^3 - a^3)r^3}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Из (2.98), (2.100) следует, что полное закрытие пор во всей крепи произойдет под действием сжимающие усилий удовлетворяющих условию

$$q_b = q_a \left( \frac{a}{b} \right)^3 + \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2\mu_1) \cdot \frac{b^3 - a^3}{b^3}. \quad (2.103)$$

При этом НДС (2.102) на момент полного закрытия пор, то есть при реализации условия (2.103), определится соотношениями

$$\begin{aligned}
u &= -\frac{\varepsilon_0}{3} \cdot r + \frac{3q_a - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1)}{12\mu_1} \cdot \frac{a^3}{r^2}, \\
\varepsilon_r &= -\frac{\varepsilon_0}{3} - \frac{3q_a - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1)}{6\mu_1} \cdot \frac{a^3}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = -\frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{3q_a - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1)}{12\mu_1} \cdot \frac{a^3}{r^3}, \\
\sigma_r &= -q_a \cdot \frac{a^3}{r^3} + \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2\mu_1) \left( \frac{a^3}{r^3} - 1 \right), \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = q_a \cdot \frac{a^3}{2r^3} - \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2\mu_1) \left( \frac{a^3}{2r^3} + 1 \right).
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Если после полно сжатия пор среда испытывает дальнейшие деформации, то записанное НДС (2.104) будет частью НДС после схлопывания пор, которое реализуется при выполнении неравенства

$$q_b > q_a \left( \frac{a}{b} \right)^3 + \frac{\varepsilon_0}{3} (3\lambda_1 + 2\mu_1) \cdot \frac{b^3 - a^3}{b^3}. \tag{2.105}$$

Условие  $\varepsilon_0 = 0$  будет означать отсутствие изначальной пористости, и в этом случае НДС (2.104) не должно входить в общее НДС. То есть, при  $\varepsilon_0 = 0$  компоненты определяемые соотношениями (2.104) должны быть нулевыми:  $u = 0$ ,  $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = 0$ ,  $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = 0$ . Для этого положим  $q_a = q_a \cdot f(\varepsilon_0)$ , где

$$f(\varepsilon_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varepsilon_0 \neq 0 \\ 0, & \text{если } \varepsilon_0 = 0 \end{cases}.$$

С учетом этого НДС на момент полного сжатия пор будет иметь вид

$$\begin{aligned}
u_0 &= -\frac{\varepsilon_0}{3} \cdot r + \frac{3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1)}{12\mu_1} \cdot \frac{a^3}{r^2}, \\
\varepsilon_{r0} &= -\frac{\varepsilon_0}{3} - \frac{3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1)}{6\mu_1} \cdot \frac{a^3}{r^3}, \quad \varepsilon_{\theta 0} = \varepsilon_{\varphi 0} = -\frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1)}{12\mu_1} \cdot \frac{a^3}{r^3}, \\
\sigma_{r0} &= -q_a \cdot f(\varepsilon_0) \cdot \frac{a^3}{r^3} + \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2\mu_1) \left( \frac{a^3}{r^3} - 1 \right), \\
\sigma_{\theta 0} = \sigma_{\varphi 0} &= q_a \cdot f(\varepsilon_0) \cdot \frac{a^3}{2r^3} - \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2\mu_1) \left( \frac{a^3}{2r^3} + 1 \right).
\end{aligned} \tag{2.106}$$

**Определение НДС сферической крепи подземной полости при упругопластическом деформировании материала с полностью сжатой матрицей.**

Если внешние нагрузки таковы, что выполняются условия (2.105) и (2.91), то наряду с упругой  $-V^e$ , возникает пластическая  $-V^p$  зона. Таким образом,

материал крепи с полностью сжатой матрицей будет деформироваться как упрочняющаяся несжимаемая упругопластическая среда с пределом текучести  $k$ , модулем сдвига  $\mu = \mu_1 + \mu_0$  и коэффициентом упрочнения  $c$ .

*Поиск перемещений и полных деформаций.*

Согласно (2.92) и (2.93) для полных деформаций и в упругой, и в пластической зонах и будет выполняться условие

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = -\varepsilon_0. \quad (2.107)$$

Записывая условие (2.107) в перемещениях с использованием формул Коши (2.87) получим неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{du}{dr} + \frac{2u}{r} = -\varepsilon_0,$$

общим решением которого будет

$$u = \frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{3} r. \quad (2.108)$$

Из (2.87) с учетом (2.108) полные деформации в упругой и пластической областях определяются в форме

$$\varepsilon_r = -\frac{2D}{r^3} - \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{2D}{r^3} - \frac{\varepsilon_0}{3}. \quad (2.109)$$

*Поиск напряжений в упругой зоне.*

Запишем разность напряжений  $\sigma_r - \sigma_\theta$ , входящую в уравнение равновесия (2.86) через разность компонент девиатора напряжений  $\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta$ , которая в свою очередь с учетом (2.90) представима в форме

$$\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta = 2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) - 2\mu_0(\varepsilon_{r0} - \varepsilon_{\theta 0}). \quad (2.110)$$

При этом разность полных деформаций с учетом (2.109) имеет вид

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = -\frac{4D}{r^3}; \quad (2.111)$$

разность деформаций на момент полного сжатия пор определим из (2.106) в виде

$$\varepsilon_{r0} - \varepsilon_{\theta0} = -\frac{3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1)}{4\mu_1} \cdot \frac{a^3}{r^3}. \quad (2.112)$$

Соотношение (2.110) с учетом (2.111) и (2.112) перепишется в форме

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -\frac{8D}{r^3} \mu + \frac{3q_a \cdot f(\varepsilon_0) \mu_0 - \varepsilon_0 \mu_0 (3\lambda_1 + 2\mu_1)}{2\mu_1} \cdot \frac{a^3}{r^3}. \quad (2.113)$$

Подставляя полученную разность (2.113) в уравнение равновесия (2.86) приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными вида

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{16\mu D}{r^4} - \frac{3q_a \cdot f(\varepsilon_0) \mu_0 - \varepsilon_0 \mu_0 (3\lambda_1 + 2\mu_1)}{\mu_1} \cdot \frac{a^3}{r^4},$$

интегрируя которое получим:

$$\sigma_r = -\frac{16\mu D}{3r^3} + \frac{3q_a \cdot f(\varepsilon_0) \mu_0 - \varepsilon_0 \mu_0 (3\lambda_1 + 2\mu_1)}{3\mu_1} \cdot \frac{a^3}{r^3} + C, \quad (2.114)$$

где  $C$  – константа интегрирования, которую с помощью граничного условия (2.88) на внешней поверхности крепи можно выразить через константу  $D$  следующим образом:

$$C = -q_b + \frac{1}{3b^3} \left( 16\mu D - \frac{3q_a \cdot f(\varepsilon_0) \mu_0 - \varepsilon_0 \mu_0 (3\lambda_1 + 2\mu_1)}{\mu_1} \cdot a^3 \right). \quad (2.115)$$

Тогда из (2.114) и (2.113) с учетом (2.115) напряжения в упругой области крепи при реализации условия (2.105) определятся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -q_b + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3} \right) \left( 16D\mu + \frac{(\varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1) - 3q_a \cdot f(\varepsilon_0)) \mu_0 a^3}{\mu_1} \right), \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi &= -q_b + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{b^3} + \frac{1}{r^3} \right) \left( 8D\mu + \frac{(\varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1) - 3q_a \cdot f(\varepsilon_0)) \mu_0 a^3}{2\mu_1} \right). \end{aligned} \quad (2.116)$$

*Поиск пластических деформаций.*

Условие пластичности (2.91) с учетом (2.93) запишем в форме

$$(S_r - c\varepsilon_r^p)^2 + 2(S_\theta - c\varepsilon_\theta^p)^2 = 2k^2. \quad (2.117)$$

Из соотношений (2.90) получим



$$S_r + 2S_\theta = 2\mu(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) - 2\mu_0(\varepsilon_{r0} + 2\varepsilon_{\theta0}) + 2\mu_1\varepsilon_0. \quad (2.118)$$

Так как  $\varepsilon_r^e + 2\varepsilon_\theta^e = \varepsilon_{r0} + 2\varepsilon_{\theta0} = -\varepsilon_0$ , то из (2.118) получим

$$S_r + 2S_\theta = 0$$

или

$$S_\theta = -\frac{1}{2}S_r. \quad (2.119)$$

Подставляя равенство (2.119) в (2.117) с учетом (2.90) приходим к следующему виду условия пластичности:

$$(S_r - c\varepsilon_r^p)^2 = \frac{4}{3}k^2,$$

или

$$S_r - c\varepsilon_r^p = \chi \frac{2}{\sqrt{3}}k,$$

где  $\chi = \pm 1$ .

Откуда, учитывая (2.90) и (2.92) после преобразований получим уравнение для определения пластических деформаций

$$\varepsilon_r^p (2\mu + c) = 2\mu\varepsilon_r - 2\mu_0\varepsilon_{r0} + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0 - \chi \frac{2}{\sqrt{3}}k,$$

где величины  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_{r0}$  определяются соответственно равенствами (2.109) и (2.106). С учетом этого из последнего уравнения пластические деформации выразятся в виде

$$\varepsilon_r^p = \frac{-12D\mu\mu_1 + (3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1)) \cdot \mu_0 a^3}{3\mu_1(2\mu + c)} \frac{1}{r^3} - \frac{2\chi k}{\sqrt{3}(2\mu + c)}. \quad (2.120)$$

*Поиск напряжений в пластической области.*

Как и для упругой зоны запишем разность напряжений  $\sigma_r - \sigma_\theta$ , входящую в уравнение равновесия (2.86) через разность компонент девиатора напряжений  $\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta$ , которая в свою очередь с учетом (2.90) и (2.119) представима в форме

$$\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta = 3\mu\varepsilon_r^e - 3\mu_0\varepsilon_{r0} + \mu_1\varepsilon_0.$$

Откуда учитывая, что упругие деформации связаны с полными и пластическими формулами (2.92), а также тот факт, что полные деформации определяются из соотношений (2.109), а деформации на момент схлопывания пор  $\varepsilon_{r0}$  - из (2.106) получим разность компонент напряжений в виде

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -3\mu\varepsilon_r^p + \frac{1}{r^3} \left( -6D\mu + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0 a^3}{2\mu_1} \right). \quad (2.121)$$

С учетом этого уравнение равновесие (2.86) примет вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 6\mu \frac{\varepsilon_r^p}{r} + \frac{1}{r^4} \left( 12D\mu - \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0 a^3}{\mu_1} \right),$$

интегрируя которое определим радиальную компоненту напряжений в форме

$$\sigma_r = 6\mu \int_a^r \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} d\rho - \left( 4D\mu - \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0 a^3}{3\mu_1} \right) \frac{1}{r^3} + C. \quad (2.122)$$

При этом константа интегрирования  $C$  выражается из граничного условия (2.88) на внутреннем контуре крепи следующим образом

$$C = -q_a + \frac{4\mu D}{a^3} - \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0}{3\mu_1}. \quad (2.123)$$

С учетом (2.123) из (2.122) и (2.121) получим, что напряжения в пластической зоне будут находится по следующим формулам

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -q_a + 6\mu \int_a^r \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} d\rho + \left( 4D\mu - \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0 a^3}{3\mu_1} \right) \left( \frac{1}{a^3} - \frac{1}{r^3} \right), \quad (2.124) \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi &= -q_a + 3\mu \left( \varepsilon_r^p + 2 \int_a^r \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} d\rho \right) + \left( 2D\mu - \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0 a^3}{6\mu_1} \right) \left( \frac{2}{a^3} + \frac{1}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Неизвестную константу интегрирования  $D$  найдем из условия равенства нулю пластических деформаций на границе  $\gamma$ . То есть, из (2.120) получим

$$D = \frac{-2\sqrt{3}\chi k \mu_1 \gamma^3 + (3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1)) \cdot \mu_0 a^3}{12\mu_1}. \quad (2.125)$$

Поиск упругопластической границы  $\gamma$  осуществим с использованием условия непрерывности радиальных компонент тензора напряжений (2.94), которое с учетом (2.116) и (2.124) запишется в форме

$$q_b - q_a + 6\mu \int_a^\gamma \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} d\rho + 4D\mu \left( \frac{1}{a^3} - \frac{4}{3b^3} + \frac{1}{3\gamma^3} \right) + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1)) \mu_0 a^3}{3\mu_1} \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{a^3} \right) = 0. \quad (2.126)$$

С учетом (2.125) из (2.120) найдем значение интеграла, входящего в (2.124)

$$\int_a^r \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} d\rho = \frac{2\sqrt{3}\chi k}{9(2\mu + c)} \left( \frac{\gamma^3}{a^3} - \frac{\gamma^3}{r^3} - 3 \ln \frac{r}{a} \right). \quad (2.127)$$

И так, получим, что перемещения и полные деформации в упругой и пластической областях монолитной крепи подземной сферической полости при выполнении условия (2.105) определяются соотношениями (2.108) и (2.109), при этом константа интегрирования  $D$  определяется из (2.125).

Напряжения (2.116) в упругой области сжатого скелета с учетом (2.125) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -q_b + \frac{1}{9} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3} \right) \left( 8\sqrt{3}\chi k \gamma^3 - \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1)) \cdot \mu_0 a^3}{\mu_1} \right), \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi &= -q_b - \frac{1}{18} \left( \frac{2}{b^3} + \frac{1}{r^3} \right) \left( 8\sqrt{3}\chi k \gamma^3 - \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1)) \cdot \mu_0 a^3}{\mu_1} \right). \end{aligned} \quad (2.128)$$

Пластические деформации (2.120) с учетом (2.125) переписутся в форме

$$\varepsilon_r^p = -2\varepsilon_\theta^p = -2\varepsilon_\varphi^p = \frac{2\sqrt{3}\chi k}{3(2\mu + c)} \cdot \left( \frac{\gamma^3}{r^3} - 1 \right). \quad (2.129)$$

Напряжения в пластической области полностью сжатой матрицы при учете (2.127), а также при учете (2.125) переписутся в виде

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -q_a + \frac{2\sqrt{3}\chi k}{3} \left( \frac{2\mu}{2\mu+c} \left( \frac{\gamma^3}{a^3} - \frac{\gamma^3}{r^3} - 3\ln \frac{r}{a} \right) + \frac{\gamma^3}{r^3} - \frac{\gamma^3}{a^3} \right), \\ \sigma_\theta &= -q_a + \frac{2\sqrt{3}\chi k}{3} \left( \frac{\mu}{2\mu+c} \left( \frac{\gamma^3}{r^3} + \frac{2\gamma^3}{a^3} - 3 - 6\ln \frac{r}{a} \right) - \frac{\gamma^3}{2r^3} - \frac{\gamma^3}{a^3} \right).\end{aligned}\quad (2.130)$$

Уравнение (2.126) для нахождения радиуса границы раздела зон упругого и пластического деформирования с учетом (2.127), где надо положить  $r = \gamma$ , а также условия (2.125), преобразуется к виду

$$\begin{aligned}q_b - q_a - \frac{2\sqrt{3}\chi k}{3} \left( \frac{\gamma^3}{a^3} - \frac{4\gamma^3}{3b^3} + \frac{1}{3} - \frac{2\mu}{2\mu+c} \left( 3\ln \frac{a}{\gamma} + \frac{\gamma^3}{a^3} - 1 \right) \right) + \\ + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1)) \cdot \mu_0 a^3}{9\mu_1} \left( \frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{b^3} \right) = 0.\end{aligned}\quad (2.131)$$

Таким образом, НДС крепи сферической выработки, на этапе упругого деформирования материала крепи с пористой структурой, находящейся под действием сжимающих нагрузок  $q_a$  и  $q_b$ , удовлетворяющих неравенству (2.101) имеет вид (2.102). Полное закрытие пор происходит одновременно во всей крепи при действии нагрузок, удовлетворяющих условию (2.103), при этом поля перемещений, деформаций и напряжений определяются по формулам (2.104). На этапе неупругого деформирования крепи с полностью сжатой матрицей, необходимым условием реализации которого является условие (2.105), перемещения и полные деформации в упругой и пластической зонах определяются по формулам (2.108), (2.109), (2.125); напряжения в упругой зоне описываются соотношениями (2.128); пластические составляющие тензора деформаций и поле напряжений в пластической области крепи выражаются зависимостями (2.129) и (2.130) соответственно, при этом радиус раздела зон упругого и пластического деформирования крепи находится из решения уравнения (2.131).

Далее все соотношения, определяющие НДС монолитной крепи подземной сферической полости на каждом этапе деформирования, запишем в безразмерном виде. Для этого, как и в предыдущих параграфах настоящей главы, величины

имеющие размерность длины отнесены к внешнему радиусу  $b$ , а величины имеющие размерность напряжений к величине  $\mu_1$ .

Получим, что условие (2.101) необходимое для реализации первого этапа деформирования, переписывается в виде

$$q_b < \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2)(1 - a^3) + q_a \cdot f(\varepsilon_0)a^3; \quad (2.132)$$

условие (2.103) полного сжатия пор во всей крепи примет форму

$$q_b = \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2) \cdot (1 - a^3) + q_a \cdot f(\varepsilon_0)a^3; \quad (2.133)$$

условие (2.105) необходимое для реализации неупругого этапа деформирования крепи с полностью сжатым скелетом преобразуется к виду

$$q_b > \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2) \cdot (1 - a^3) + q_a \cdot f(\varepsilon_0)a^3; \quad (2.134)$$

соотношения (2.102), описывающие НДС крепи на первом этапе примут вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{q_b - q_a a^3}{(3\lambda_1 + 2)(a^3 - 1)} \cdot r + \frac{(q_a - q_b)a^3}{4(1 - a^3)} \cdot \frac{1}{r^2}, \\ \varepsilon_r &= \frac{q_b - q_a a^3}{(3\lambda_1 + 2)(a^3 - 1)} - \frac{(q_a - q_b)a^3}{2(1 - a^3)} \cdot \frac{1}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{q_b - q_a a^3}{(3\lambda_1 + 2)(a^3 - 1)} + \frac{(q_a - q_b)a^3}{4(1 - a^3)} \cdot \frac{1}{r^3}, \\ \sigma_r &= q_a \cdot \frac{a^3(r^3 - 1)}{r^3(1 - a^3)} + q_b \cdot \frac{a^3 - r^3}{r^3(1 - a^3)}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = q_a \cdot \frac{a^3(2r^3 + 1)}{2(1 - a^3)r^3} - q_b \cdot \frac{2r^3 + a^3}{2(1 - a^3)r^3}; \end{aligned} \quad (2.135)$$

формулы (2.106), определяющие компоненты перемещений, деформаций и напряжений, на момент полного закрытия пор преобразуются к форме

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{\varepsilon_0}{3} \cdot r + \frac{3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1)}{12} \cdot \frac{a^3}{r^2}, \quad (2.136) \\ \varepsilon_{r0} &= -\frac{\varepsilon_0}{3} - \frac{3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2)}{6} \cdot \frac{a^3}{r^3}, \quad \varepsilon_{\theta 0} = \varepsilon_{\varphi 0} = -\frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2)}{12} \cdot \frac{a^3}{r^3}, \\ \sigma_{r0} &= -q_a \cdot f(\varepsilon_0) \cdot \frac{a^3}{r^3} + \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2) \left( \frac{a^3}{r^3} - 1 \right), \quad \sigma_{\theta 0} = \sigma_{\varphi 0} = q_a \cdot f(\varepsilon_0) \cdot \frac{a^3}{2r^3} - \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2) \left( \frac{a^3}{2r^3} + 1 \right); \end{aligned}$$

зависимости (2.108), (2.109), описывающие поля перемещений и полных деформации в упругой и пластической зонах крепи с полностью сжатой матрицей

сохранят свой вид, при этом константа интегрирования  $D$ , определяемая равенством (2.125) преобразуется к виду

$$D = \frac{-2\sqrt{3}\chi k \gamma^3 + (3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2)) \cdot \mu_0 a^3}{12\mu}, \quad (2.137)$$

где  $\chi = \text{sign}(q_a - q_b)$ ,  $\mu = 1 + \mu_0$ ;

равенства (2.128), определяющие напряжения в упругой области крепи при  $\gamma < r < 1$  на втором этапе деформирования переписутся в форме

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -q_b + \frac{1}{9} \left( \frac{1}{r^3} - 1 \right) \left( 8\sqrt{3}\chi k \gamma^3 - (3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2)) \cdot \mu_0 a^3 \right), \\ \sigma_\theta &= -q_b - \frac{1}{9} \left( \frac{1}{r^3} + 2 \right) \left( 4\sqrt{3}\chi k \gamma^3 - \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2)) \cdot \mu_0 a^3}{2} \right); \end{aligned} \quad (2.138)$$

соотношения (2.129), (2.130), описывающие пластические деформации и поле напряжений в пластической зоне крепи при  $a < r < \gamma$  на этапе неупругого деформирования полностью сжатой матрицы преобразуются к следующим выражениям соответственно

$$\varepsilon_r^p = \frac{2\sqrt{3}\chi k}{3(2\mu + c)} \cdot \left( \frac{\gamma^3}{r^3} - 1 \right), \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -q_a + \frac{2\sqrt{3}\chi k}{3} \left( \frac{2\mu}{2\mu + c} \left( \frac{\gamma^3}{a^3} - \frac{\gamma^3}{r^3} - 3 \ln \frac{r}{a} \right) + \frac{\gamma^3}{r^3} - \frac{\gamma^3}{a^3} \right), \\ \sigma_\theta &= -q_a + \frac{2\sqrt{3}\chi k}{3} \left( \frac{\mu}{2\mu + c} \left( \frac{\gamma^3}{r^3} + \frac{2\gamma^3}{a^3} - 3 - 6 \ln \frac{r}{a} \right) - \frac{\gamma^3}{2r^3} - \frac{\gamma^3}{a^3} \right); \end{aligned} \quad (2.140)$$

безразмерная форма уравнение (2.131), из решения которого определяется безразмерный радиус  $\gamma$  упругопластической границы имеет следующий вид

$$\begin{aligned} q_b - q_a - \frac{2\sqrt{3}\chi k}{3} \left( \frac{\gamma^3}{a^3} - \frac{4}{3}\gamma^3 + \frac{1}{3} - \frac{2\mu}{2\mu + c} \left( 3 \ln \frac{a}{\gamma} + \frac{\gamma^3}{a^3} - 1 \right) \right) + \\ + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2)) \cdot \mu_0 a^3}{9} \left( \frac{1}{\gamma^3} - 1 \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Результаты численного эксперимента, проводимого проведенного на основе безразмерных соотношений (2.132) – (2.141) представлены на рисунках 2.16 – 2.22.

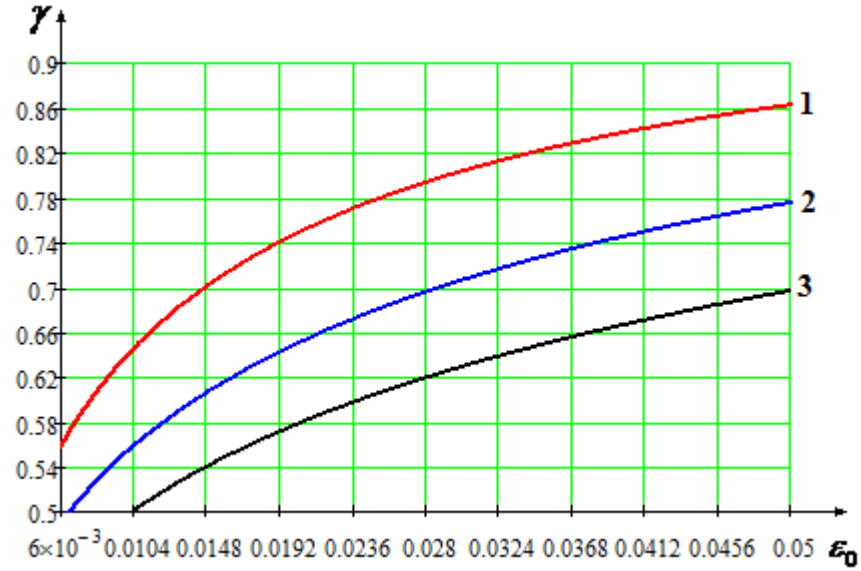


Рисунок 2.16

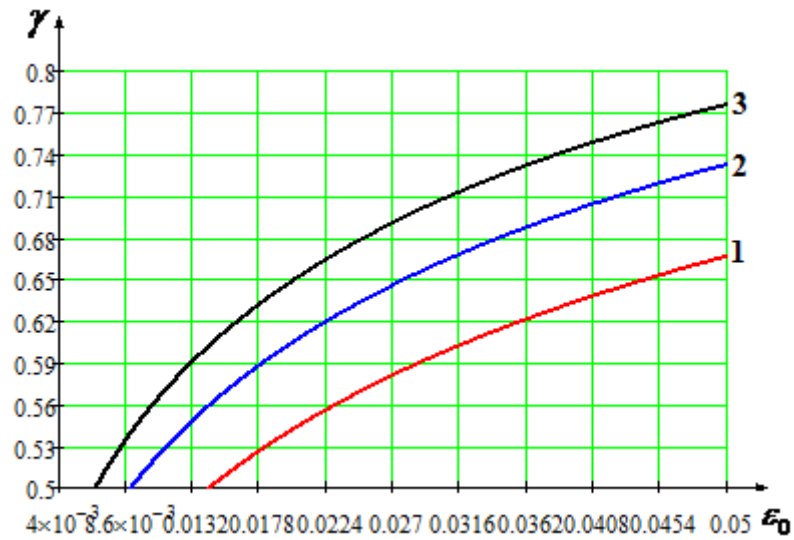


Рисунок 2.17

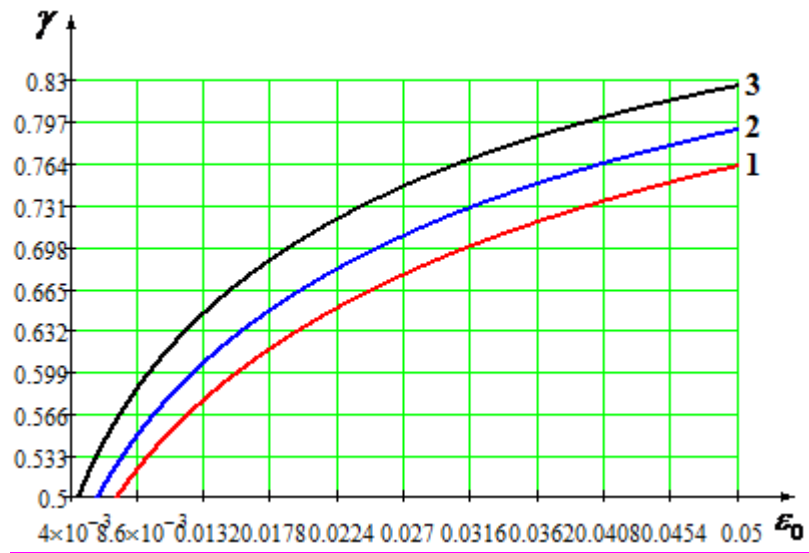


Рисунок 2.18

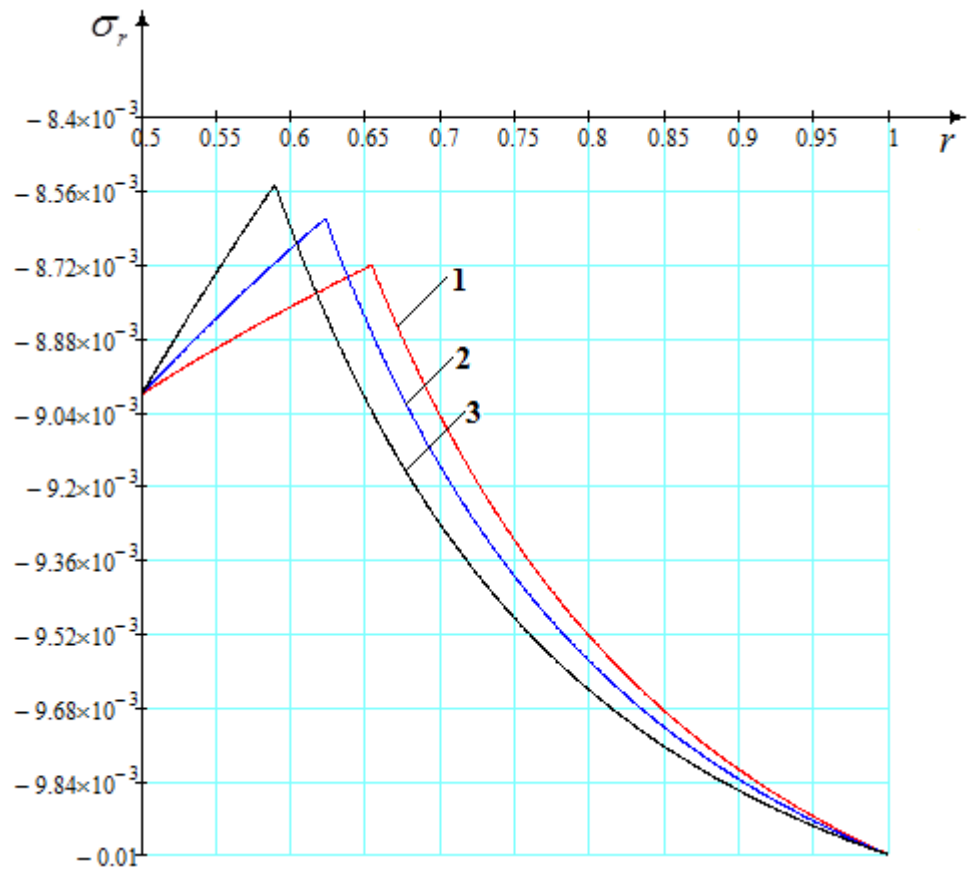


Рисунок 2.19



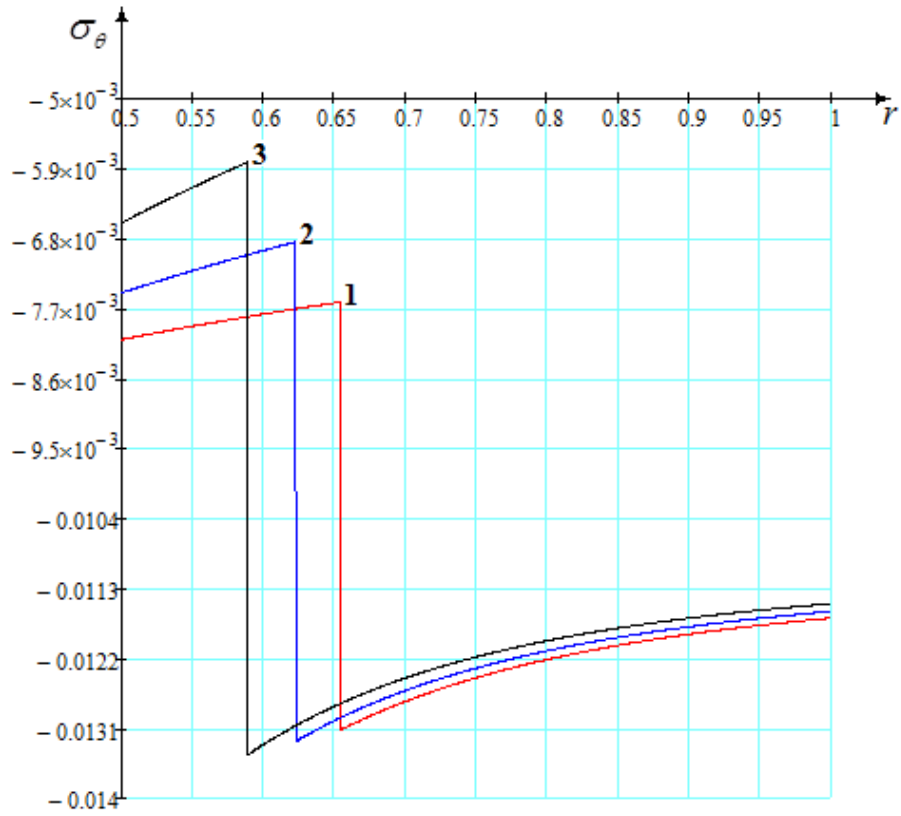


Рисунок 2.20

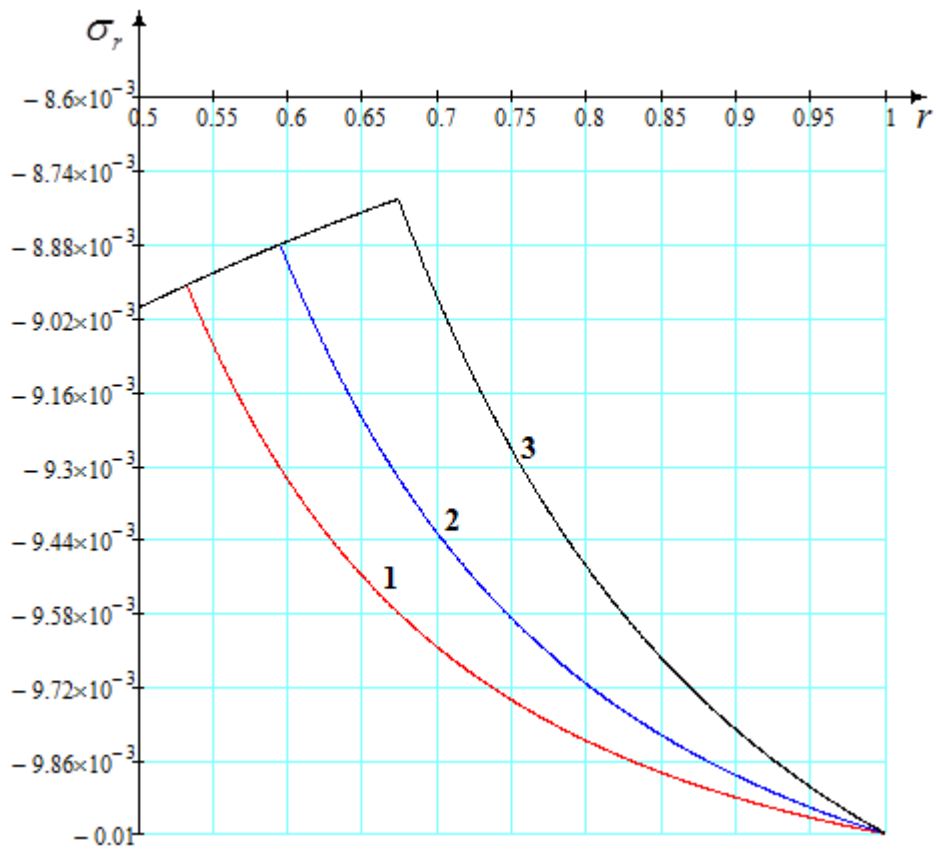


Рисунок 2.21

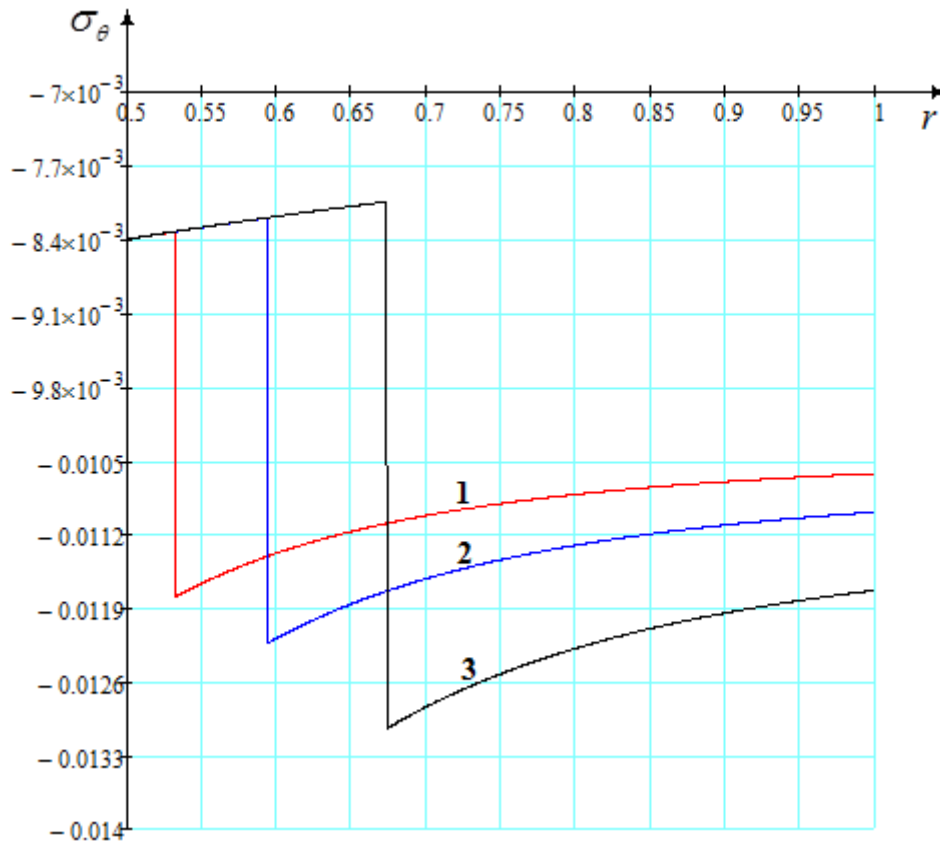


Рисунок 2.22

На рисунках 2.16 - 2.18 показаны зависимости радиуса упругопластической границы  $\gamma$  от начального раствора пор  $\varepsilon_0$ . При этом на рисунке 2.16 кривая 1 соответствует  $k=0.0001$ , кривая 2-  $k=0.002$ , кривая 3-  $k=0.005$ . На рисунке 2.17 кривая 1 соответствует  $\lambda_1=1$ , кривая 2-  $\lambda_2=2$ , кривая 3-  $\lambda_3=3$ . На рисунке 2.18 кривая 1 соответствует  $q_a=0$ , кривая 2-  $q_a=0.002$ , кривая 3-  $q_a=0.005$ .

Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, если не оговорено особо, для этих рисунков брались следующими:  $a=0.5$ ,  $b=1$ ,  $q_a=0.001$ ,  $q_b=0.005$ ,  $c=0.06$ ,  $\lambda_1=3$ ,  $\mu_1=1$ ,  $k=0.002$ ,  $\varepsilon_0=0.006$ ,  $\mu=2$ .

На рисунках 2.19 – 2.22 представлены зависимости компонент напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  от радиальной координаты  $r$  на этапе неупругого деформирования крепи с полностью сжатой матрицей. При этом на рисунках 2.19 и 2.20 кривые 1 соответствуют  $k=3 \cdot 10^{-4}$ , кривые 2-  $k=5 \cdot 10^{-4}$ , кривая 3-  $k=8 \cdot 10^{-4}$ . На рисунках 2.21 и 2.22 кривые 1 соответствуют  $\lambda_1=1.5$ , кривые 2-  $\lambda_1=2$ , кривая 3-  $\lambda_1=3$ .

Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, если не оговорено особо, для этих рисунков брались следующими:  $a=0.5$ ,  $b=1$ ,  $q_a=0.009$ ,  $q_b=0.01$ ,  $c=0.08$ ,  $\lambda_1=3$ ,  $\mu_1=0.9$ ,  $k=2 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_0=0.006$ ,  $\mu=2$ .

Отметим, что для соотношений (2.132) – (2.141) будет справедлив предельный переход к формулам для расчета монолитной крепи в случае материала не обладающего внутренней структурой. То есть, если в указанных соотношениях положить  $\varepsilon_0=0$ , то получим результаты работы [76].

#### **2.4. Моделирование процесса деформирования монолитной крепи подземной сферической полости с учетом пористости материала и упруговязкопластических свойств полностью сжатой матрицы**

В настоящем параграфе проводится моделирование НДС монолитной крепи (рисунок 2.15) подземной сферической полости с учетом начальной пористости материала и упруговязкопластических свойств сжатого скелета. То есть, в отличие от предыдущего в настоящем параграфе материал крепи на этапе неупругого деформирования полностью сжатого скелета моделируется более сложной средой, учитывающей наряду с упрочняющимися упругопластическими свойствами вязкие свойства сжатой матрицы. Постановка задачи аналогична постановке изложенной в третьем параграфе настоящей главы.

Для случая центральной симметрии НДС монолитной крепи подземной сферической полости в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , определяемое следующим ненулевыми компонентами тензора напряжений  $\sigma_r = \sigma_r(r)$ ,  $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r) = \sigma_\varphi = \sigma_\varphi(r)$ , будем моделировать:

- на этапе упругого деформирования пористого материала - соотношениями (2.86) – (2.89);

- на этапе деформирования материала крепи с полностью сжатым скелетом, обладающим одновременно упругими, вязкими и пластическими свойствами – формулами (2.86) – (2.90), (2.92) – (2.94) присоединяя к ним условие пластичности вида

$$\left(s_r - c\varepsilon_r^p - \eta\dot{\varepsilon}_r^p\right)^2 + \left(s_\theta - c\varepsilon_\theta^p - \eta\dot{\varepsilon}_\theta^p\right)^2 + \left(s_\varphi - c\varepsilon_\varphi^p - \eta\dot{\varepsilon}_\varphi^p\right)^2 = 2k^2. \quad (2.142)$$

Проводя выкладки аналогичные (2.95) – (2.116) получим, что НДС сферической крепи подземной полости, на этапе упругого деформирования материала крепи с пористой структурой, находящейся под действием сжимающих нагрузок  $q_a$  и  $q_b$ , удовлетворяющих неравенству (2.101) имеет вид (2.102). На момент полного закрытия пор, которое происходит одновременно во всей крепи под действием нагрузок, удовлетворяющих условию (2.103), компоненты перемещений, деформаций и напряжений, определяются соотношениями (2.104). На этапе неупругого деформирования крепи с полностью сжатой матрицей, необходимым условием реализации которого является условие (2.105), перемещения и полные деформации в упругой и пластической зонах определяются по формулам (2.108), (2.109), напряжения в упругой зоне описываются соотношениями (2.116).

*Найдем пластические составляющие деформаций в пластической области крепи с полностью сжатой матрицей.*

Условие пластичности (2.142) с учетом (2.93) запишем в форме

$$\left(S_r - c\varepsilon_r^p - \eta\dot{\varepsilon}_r^p\right)^2 + 2\left(S_\theta - c\varepsilon_\theta^p - \eta\dot{\varepsilon}_\theta^p\right)^2 = 2k^2. \quad (2.143)$$

Из соотношений (2.90) получим

$$S_r + 2S_\theta = 2\mu(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) - 2\mu_0(\varepsilon_{r0} + 2\varepsilon_{\theta0}) + 2\mu_1\varepsilon_0, \quad (2.144)$$

где  $\mu = \mu_0 + \mu_1$ .

Так как  $\varepsilon_r^e + 2\varepsilon_\theta^e = \varepsilon_{r0} + 2\varepsilon_{\theta0} = -\varepsilon_0$ , то из (2.144) получим

$$S_r + 2S_\theta = 0$$

или

$$S_\theta = -\frac{1}{2}S_r. \quad (2.145)$$

Подставляя равенство (2.145) в (2.143) с учетом (2.90) приходим к следующему виду условия пластичности:

$$(S_r - c\varepsilon_r^p - \eta\dot{\varepsilon}_r^p)^2 = \frac{4}{3}k^2,$$

или

$$S_r - c\varepsilon_r^p - \eta\dot{\varepsilon}_r^p = \chi \frac{2}{\sqrt{3}}k,$$

где  $\chi = \pm 1$ .

Откуда, учитывая (2.90) и (2.92) после преобразований получим следующее уравнение для определения пластических деформаций

$$\eta\dot{\varepsilon}_r^p + (2\mu + c)\varepsilon_r^p = 2\mu\varepsilon_r - 2\mu_0\varepsilon_{r0} + \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0 - \chi \frac{2}{\sqrt{3}}k, \quad (2.146)$$

где величины  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_{r0}$  определяются соответственно равенствами (2.109) и (2.106). При этом выражение (2.146) с учетом (2.109) и (2.106) переписется в форме

$$\eta\dot{\varepsilon}_r^p + (2\mu + c)\varepsilon_r^p = -4\mu \frac{D}{r^3} + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0}{3\mu_1} \cdot \frac{a^3}{r^3} - \chi \frac{2}{\sqrt{3}}k, \quad (2.147)$$

где  $D$  константа интегрирования, возникающая при определении перемещений из формулы (2.108).

Общее решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения (2.147) будем искать в виде

$$(\varepsilon_r^p)_{он} = (\varepsilon_r^p)_{оо} + (\varepsilon_r^p)_{чн}, \quad (2.148)$$

где  $(\varepsilon_r^p)_{оо}$  - общее решение соответствующего однородного уравнения, определяемое равенством

$$(\varepsilon_r^p)_{оо} = F(r) \cdot e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}r}; \quad (2.149)$$

$(\varepsilon_r^p)_{чн}$  - частное решение неоднородного уравнения (2.147), которое выражается формулой

$$(\varepsilon_r^p)_{\text{ин}} = -\frac{4\mu}{\eta r^3} e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \int D e^{\frac{c+2\mu}{\eta} t} dt + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0}{3\mu_1(c+2\mu)} \cdot \frac{a^3}{r^3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\chi k}{(c+2\mu)}. \quad (2.150)$$

Здесь в (2.149)  $F(r)$  - константа интегрирования не зависящая от времени, возникающая при нахождении общего решения однородного уравнения соответствующего (2.147).

Из (2.148) при учете (2.149) и (2.150) получим, что общее решение неоднородного уравнения (2.147) определится следующим соотношением

$$(\varepsilon_r^p)_{\text{он}} = F(r) e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} - \frac{4\mu}{\eta r^3} e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \int D \cdot e^{\frac{c+2\mu}{\eta} t} dt + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0}{3\mu_1(c+2\mu)} \cdot \frac{a^3}{r^3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\chi k}{(c+2\mu)}. \quad (2.151)$$

Из условия равенства нулю пластической деформации  $\varepsilon_r^p$  на границе  $\gamma$  раздела областей упругого и пластического деформирования материала определим второе слагаемое правой части равенства (2.151). То есть при выполнении условия

$$\varepsilon_r^p \Big|_{r=\gamma} = 0, \quad (2.152)$$

второе слагаемое правой части равенства (2.151) определится в виде

$$\frac{4\mu}{\eta r^3} e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \int D e^{\frac{c+2\mu}{\eta} t} dt = F(\gamma) e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \cdot \frac{\gamma^3}{r^3} + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0}{3\mu_1(c+2\mu)} \cdot \frac{a^3}{r^3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\chi k}{(c+2\mu)} \cdot \frac{\gamma^3}{r^3}. \quad (2.153)$$

Тогда из (2.151) при условии (2.153) получим

$$\varepsilon_r^p = \left( F(r) - F(\gamma) \cdot \frac{\gamma^3}{r^3} \right) e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\chi k}{(c+2\mu)} \cdot \left( \frac{\gamma^3}{r^3} - 1 \right). \quad (2.154)$$

Константу интегрирования  $F(r)$  найдем из начального условия, которое в общей форме представимо в виде

$$\varepsilon_r^p \Big|_{t=0} = \tilde{\varepsilon}_0, \quad (2.155)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_0$  - неизвестная константа.

Покажем, что  $\tilde{\varepsilon}_0$  будет равно нулю. Для этого введем следующие обозначения

$$\gamma(0) = \gamma_0, \quad F(\gamma(0)) = F(\gamma_0) = F_0. \quad (2.156)$$

Тогда из начального условия (2.155) с учетом (2.154) и (2.156) получим

$$F(r) - F_0 \cdot \frac{\gamma_0^3}{r^3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\chi k}{(c+2\mu)} \cdot \left( \frac{\gamma_0^3}{r^3} - 1 \right) = \tilde{\varepsilon}_0$$

или

$$F(r) = \tilde{\varepsilon}_0 + F_0 \cdot \frac{\gamma_0^3}{r^3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\chi k}{(c+2\mu)} \cdot \left( \frac{\gamma_0^3}{r^3} - 1 \right). \quad (2.157)$$

Откуда при учете (2.156)

$$F_0 = F(\gamma_0) = \tilde{\varepsilon}_0 + F_0$$

или, как следствие,  $\tilde{\varepsilon}_0 = 0$ .

Итак,

$$\begin{aligned} F(r) &= F_0 \cdot \frac{\gamma_0^3}{r^3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\chi k}{(c+2\mu)} \cdot \left( \frac{\gamma_0^3}{r^3} - 1 \right), \\ F(\gamma) &= F_0 \cdot \frac{\gamma_0^3}{\gamma^3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\chi k}{(c+2\mu)} \cdot \left( \frac{\gamma_0^3}{\gamma^3} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.158)$$

Тогда, из (2.154) при учете двух последних равенств получим выражение для определения пластических деформаций в форме

$$\varepsilon_r^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\chi k}{(c+2\mu)} \cdot \left( \frac{\gamma^3}{r^3} - 1 \right) \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \right). \quad (2.159)$$

*Поиск напряжений в пластической области, константы интегрирования  $D$  и радиуса упругопластической границы.*

Согласно алгоритму, описанному в параграфе 3 настоящей главы, напряжения в пластической области будем моделировать зависимостями (2.124).

Поиск упругопластической границы  $\gamma$  и неизвестной константы интегрирования  $D$  осуществим с использованием условия (2.94) непрерывности

радиальной компоненты тензора деформаций и условия (2.152) равенства нулю пластической деформации на границе  $\gamma$ .

Из условия (2.152) и как следствие (2.153) с учетом (2.158) получим, что

$$\int D(t) e^{\frac{c+2\mu_t}{\eta}} dt = \frac{\eta}{4\mu} F_0 \cdot \gamma_0^3 - \frac{\chi\eta k}{2\sqrt{3}\mu(c+2\mu)} \cdot \left( \gamma_0^3 - \gamma^3 \left( 1 - e^{\frac{c+2\mu_t}{\eta}} \right) \right) + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\eta\mu_0 a^3}{12\mu\mu_1(c+2\mu)} \cdot e^{\frac{c+2\mu_t}{\eta}}.$$

Дифференцируя левую и правую части получившегося равенства по времени и выражая константу  $D(t)$ , получим:

$$D(t) = \frac{\chi\eta k}{2\sqrt{3}\mu(c+2\mu)} \left( 3\gamma^2 \dot{\gamma} \left( e^{\frac{c+2\mu_t}{\eta}} - 1 \right) - \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^3 \right) + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0 a^3}{12\mu\mu_1}. \quad (2.160)$$

Условие (2.94) непрерывности радиальной компоненты тензора напряжений при учете (2.116), (2.124) и (2.160) запишется в форме

$$q_b - q_a + \frac{2\chi k}{\sqrt{3}(c+2\mu)} \left( \mu \left( 1 - e^{\frac{c+2\mu_t}{\eta}} \right) \left( 2 \left( \frac{\gamma^3}{a^3} - 1 \right) + 6 \ln \frac{a}{\gamma} \right) + \gamma^2 \left( 3\eta \dot{\gamma} \left( e^{\frac{c+2\mu_t}{\eta}} - 1 \right) - (c+2\mu)\gamma \right) \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{3\gamma^3} - \frac{4}{3b^3} \right) \right) + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0}{9\mu_1} \left( \frac{a^3}{\gamma^3} - \frac{a^3}{b^3} \right) = 0. \quad (2.161)$$

Дифференциальное уравнение (2.161) будем использовать для определения положения радиуса упругопластической границы  $\gamma$ .

Как следует из (2.161) в начальный момент времени (при  $t=0$ ) положение упругопластической границы будет определяться соотношением

$$\gamma = \left( \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.162)$$

где

$$A = \frac{2\chi k}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{a^3} - \frac{4}{3b^3} \right), \quad B = \frac{2\chi k}{3\sqrt{3}} - q_b + q_a + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0 a^3}{9\mu_1 b^3}, \\ C = \frac{(\varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1) - 3q_a \cdot f(\varepsilon_0))\mu_0 a^3}{9\mu_1}.$$



Напряжения в упругой области при  $\gamma \leq r \leq b$ , моделируемые формулами (2.116), с учетом (2.160) примут вид

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3} \right) \left\{ \frac{8\chi\eta k}{\sqrt{3}(c+2\mu)} \cdot \left( 3\gamma^2 \dot{\gamma} \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}} - 1 \right) - \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^3 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0 a^3}{3\mu_1} \right\} - q_b, \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{3} \left( \frac{2}{b^3} + \frac{1}{r^3} \right) \left\{ \frac{4\chi\eta k}{\sqrt{3}(c+2\mu)} \cdot \left( 3\gamma^2 \dot{\gamma} \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}} - 1 \right) - \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^3 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2\mu_1))\mu_0 a^3}{6\mu_1} \right\} - q_b.\end{aligned}\quad (2.163)$$

Соотношения (2.124), описывающие распределение поля напряжений в пластической области крепи при  $a \leq r \leq \gamma$  с учетом (2.159) и (2.160), переписутся в форме

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -q_a + \frac{2\chi k}{\sqrt{3}(c+2\mu)} \left\{ \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}} - 1 \right) \left( \left( \frac{\gamma^2}{r^3} - \frac{\gamma^2}{a^3} \right) (2\mu\gamma - 3\dot{\gamma}\eta) + 6\mu \ln \frac{r}{a} \right) - \right. \\ &\quad \left. - (c+2\mu) \left( \frac{\gamma^3}{a^3} - \frac{\gamma^3}{r^3} \right) \right\}, \\ \sigma_\theta &= -q_a + \frac{\chi k}{\sqrt{3}(c+2\mu)} \left\{ \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}} - 1 \right) \left( (3\eta\dot{\gamma} - 2\mu\gamma) \left( \frac{\gamma^2}{r^3} + \frac{2\gamma^2}{a^3} \right) + 6\mu \left( 1 + 2 \ln \frac{r}{a} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - (c+2\mu) \left( \frac{\gamma^3}{r^3} + \frac{2\gamma^3}{a^3} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (2.164)$$

Далее запишем все соотношения, определяющие НДС монолитной сферической крепи подземной полости на первом и втором этапах деформирования, в безразмерном виде. Как и прежде величины имеющие размерность длины отнесем к внешнему радиусу  $b$ , а величины имеющие размерность напряжений к величине  $\mu_1$ .

Тогда безразмерное НДС на первом этапе деформирования, который реализуется при выполнении условия (2.132), определяется зависимостями (2.135). Безразмерный вид компонент перемещений, деформаций и напряжений

на момент полного закрытия пор, которое происходит под действием нагрузок, удовлетворяющих условию (2.133), будет описываться формулами (2.136). При переходе к безразмерной форме зависимости (2.108), (2.109), описывающие поля перемещений и полных деформаций в упругой и пластической зонах крепи на этапе неупругого деформирования материала с полностью сжатой матрицей, необходимым условием реализации которого является выполнение неравенства (2.134), сохранят свой вид, при этом константа интегрирования  $D$ , определяемая равенством (2.160) преобразуется к виду

$$D(t) = \frac{\chi\eta k}{2\sqrt{3}\mu(c+2\mu)} \cdot \left( 3\gamma^2 \dot{\gamma} \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} - 1 \right) - \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^3 \right) + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2))\mu_0 a^3}{12\mu}, \quad (2.165)$$

где  $\chi = \text{sign}(q_a - q_b)$ ,  $\mu = \mu_0 + 1$ .

Формулы (2.163), определяющие напряжения в упругой области крепи при  $\gamma < r < 1$  на втором этапе деформирования в безразмерной форме переписутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{r^3} \right) \left\{ \frac{8\chi\eta k}{\sqrt{3}(c+2\mu)} \cdot \left( 3\gamma^2 \dot{\gamma} \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} - 1 \right) - \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^3 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2))\mu_0 a^3}{3} \right) \right\} - q_b, \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{3} \left( 2 + \frac{1}{r^3} \right) \left\{ \frac{4\chi\eta k}{\sqrt{3}(c+2\mu)} \cdot \left( 3\gamma^2 \dot{\gamma} \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} - 1 \right) - \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^3 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2))\mu_0 a^3}{6} \right) \right\} - q_b. \end{aligned} \quad (2.166)$$

Соотношения (2.159) и (2.164), описывающие пластические деформации и поле напряжений в пластической зоне крепи при  $a < r < \gamma$  на этапе неупругого деформирования полностью сжатой матрицы преобразуются к следующим выражениям соответственно

$$\varepsilon_r^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\chi k}{(c+2\mu)} \cdot \left( \frac{\gamma^3}{r^3} - 1 \right) \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \right), \quad (2.167)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r = -q_a + \frac{2\chi k}{\sqrt{3}(c+2\mu)} & \left\{ \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) \left( \left( \frac{\gamma^2}{r^3} - \frac{\gamma^2}{a^3} \right) (2\mu\gamma - 3\dot{\gamma}\eta) + 6\mu \ln \frac{r}{a} \right) - \right. \\
& \left. - (c+2\mu) \left( \frac{\gamma^3}{a^3} - \frac{\gamma^3}{r^3} \right) \right\}, \\
\sigma_\theta = -q_a + \frac{\chi k}{\sqrt{3}(c+2\mu)} & \left\{ \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) \left( (3\eta\dot{\gamma} - 2\mu\gamma) \left( \frac{\gamma^2}{r^3} + \frac{2\gamma^2}{a^3} \right) + 6\mu \left( 1 + 2 \ln \frac{r}{a} \right) \right) - \right. \\
& \left. - (c+2\mu) \left( \frac{\gamma^3}{r^3} + \frac{2\gamma^3}{a^3} \right) \right\}. \quad (2.168)
\end{aligned}$$

Безразмерная форма уравнение (2.161), из решения которого определяется радиус  $\gamma$  упругопластической границы, имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
q_b - q_a + \frac{2\chi k}{\sqrt{3}(c+2\mu)} & \left( \mu \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) \left( 2 \left( \frac{\gamma^3}{a^3} - 1 \right) + 6 \ln \frac{a}{\gamma} \right) + \gamma^2 \left( 3\eta\dot{\gamma} \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) - (c+2\mu)\gamma \right) \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{3\gamma^3} - \frac{4}{3b^3} \right) \right) + \\
& + \frac{(3q_a \cdot f(\varepsilon_0) - \varepsilon_0(3\lambda_1 + 2))\mu_0}{9} \left( \frac{a^3}{\gamma^3} - \frac{a^3}{b^3} \right) = 0. \quad (2.169)
\end{aligned}$$

Результаты численного эксперимента, проведенного на основе безразмерных соотношений (2.135), (2.136), (2.108), (2.24), (2.156), (2.167) – (2.169), представлены на рисунках 2.23 – 2.29.

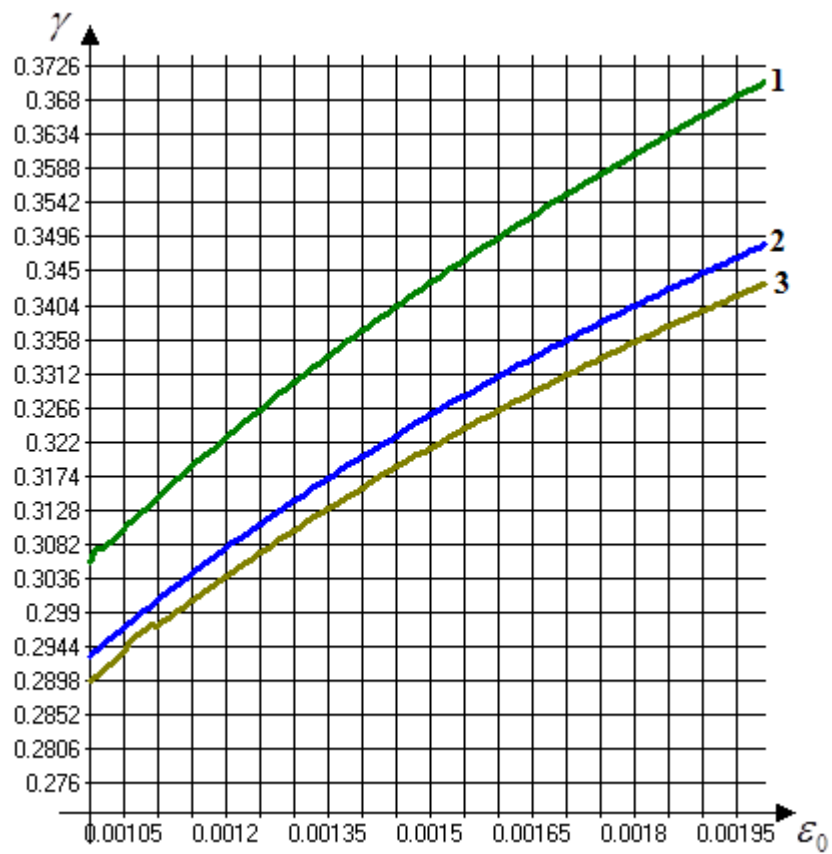


Рисунок 2.23

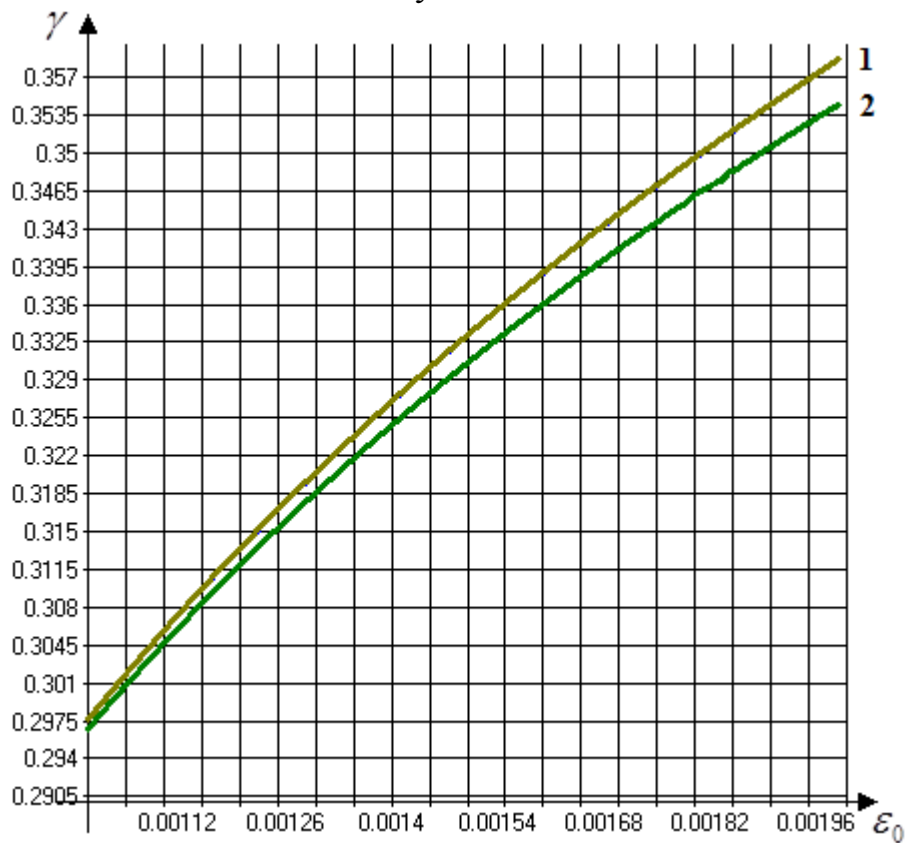


Рисунок 2.24

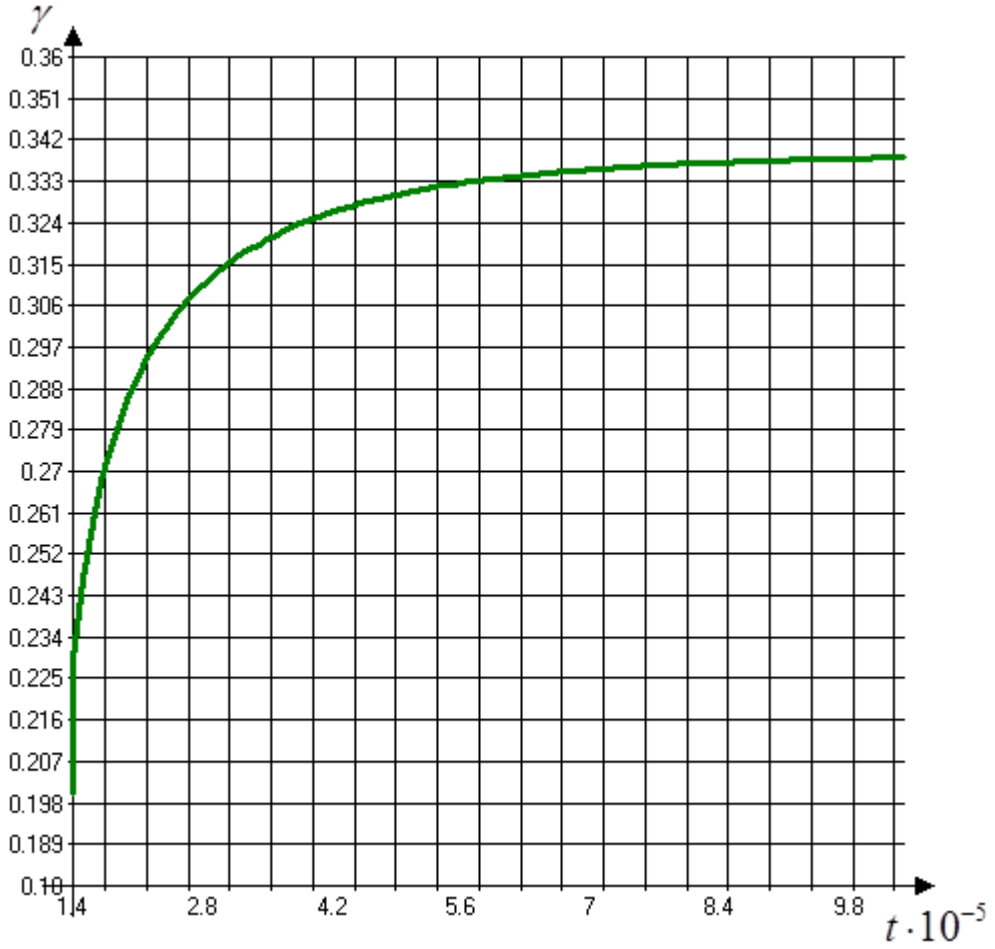


Рисунок 2.25

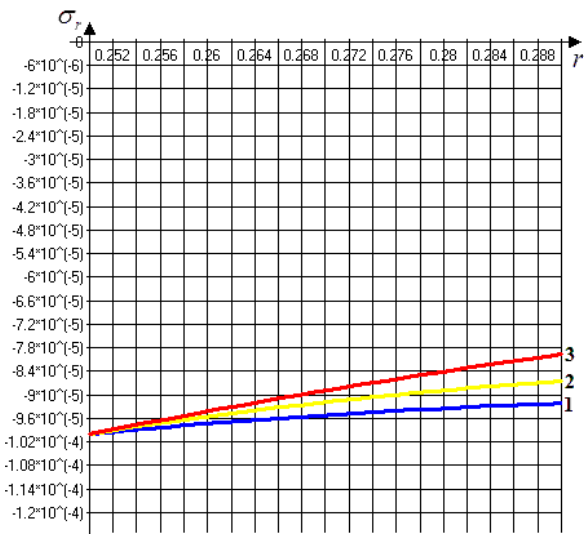


Рисунок 2.26

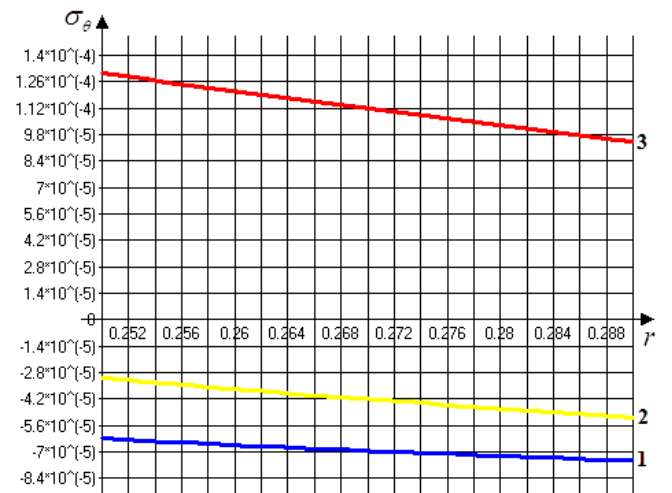


Рисунок 2.27

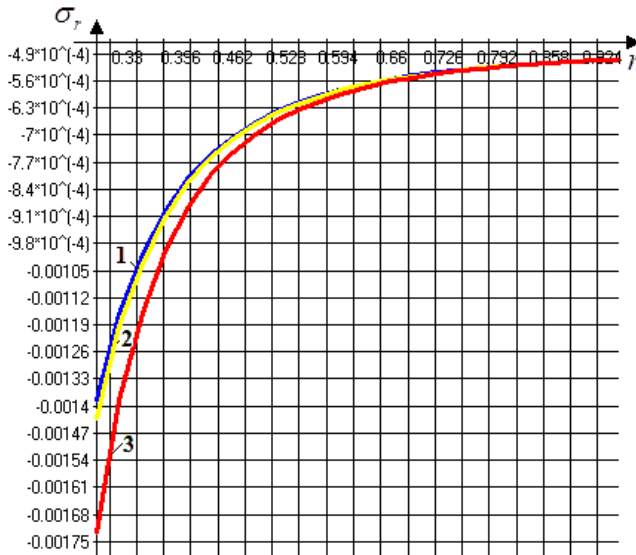


Рисунок 2.28

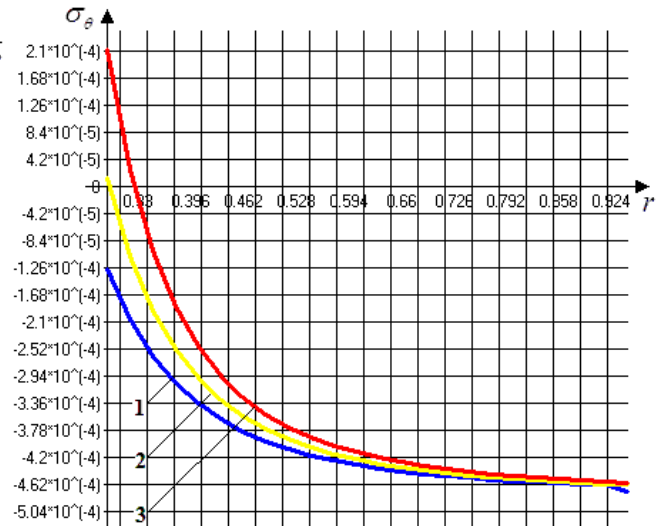


Рисунок 2.29

На рисунках 2.23 и 2.24 представлены зависимости величины радиуса  $\gamma$  раздела зон пластического и упругого деформирования от величины  $\varepsilon_0$  при различных значениях предела текучести  $k$  и коэффициента упрочнения  $c$  материала сжатой матрицы. При этом на рисунке 2.23 кривая 1 соответствует значению  $k = 2 \cdot 10^{-5}$ , кривая 2 -  $k = 5 \cdot 10^{-5}$ , кривая 3 -  $k = 6 \cdot 10^{-5}$ ; на рисунке 2.24 кривая 1 соответствует  $c = 0.01$ , кривая 2 -  $c = 0.05$ , кривая 3 -  $c = 0.09$ . На рисунке 2.25 показан рост величины  $\gamma$  от времени. На рисунках 2.26, 2.28 и 2.27, 2.29 представлены зависимости соответственно радиальной  $\sigma_r$  и тангенциальной  $\sigma_\theta$  компонент напряжений от текущего радиуса при различных значениях предела текучести  $k$  для пластической области деформирования материала сжатой матрицы (рисунки 2.26, 2.27) и для упругой зоны материала крепи (рисунки 2.28, 2.29). При этом на рисунках 2.26 - 2.29 кривые 1 соответствуют  $k = 10^{-5}$ , кривые 2 -  $k = 2 \cdot 10^{-5}$ , кривые 3 -  $k = 10^{-4}$ .

Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, если не оговорено особо, брались следующими:  $a = 0.25$ ,  $b = 1$ ,  $q_a = 10^{-4}$ ,  $q_b = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $c = 0.01$ ,  $k = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\eta = 3.2 \cdot 10^{-4}$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu = 2$ ,  $\varepsilon_0 = 0.0008$ .

Отметим, что согласно [119], приведенные в расчетах безразмерные характеристики материалов соответствуют допустимым диапазонам значений для

различных марок бетона и растворов используемых для подземного шахтного строительства.

Из анализа решений следует, что рост величины начального раствора пор ведет к увеличению пластической зоны сжатой матрицы. При увеличении предела текучести, а также с ростом коэффициента упрочнения сжатого скелета величина радиуса упругопластической границы уменьшается. При увеличении времени до определенного значения  $t^*$  пластическая зона расширяется, при этом дальнейший рост времени практически не приводит к изменению радиуса упругопластической границы, который соответствует упрочняющейся упруго-пластической модели [142]. Абсолютные величины главных компонент тензора напряжений в пластической области уменьшаются при увеличении предела текучести материала сжатой матрицы и увеличиваются с ростом параметра  $\varepsilon_0$ .

## **2.5. Анализ основных результатов главы 2.**

Основные результаты этой главы сводятся к следующему:

В рамках выбранной модели среды, учитывающей внутреннюю структуру материала и сложные реологические свойства полностью сжатого скелета, процесс деформирования состоит из двух взаимосвязанных этапов. В качестве первого этапа рассматривается упругое деформирование сжимаемой пористой среды, в качестве второго – деформирование материала с полностью сжатой матрицей, обладающей упрочняющимися упругопластическими или упруговязкопластическими свойствами. На каждом из указанных этапов построены математические модели, описывающие НДС монолитных крепей различных подземных сооружений. А именно:

1. построены математические модели, описывающие НДС монолитных цилиндрических и сферических крепей подземных горных выработок в случае, когда поведение материала с полностью сжатой матрицей моделировалось упрочняющимся упругопластическим телом;

2. получены аналитические зависимости, описывающие процессы деформирования монолитных крепей вертикальной горной выработки и подземной сферической полости в случае, когда материал крепи с полностью сжатой матрицей моделировался упрочняющимся упруговязкопластическим телом.

Моделирование НДС монолитных крепей вертикальных горных выработок с круговыми формами поперечных сечений проводилось в рамках плоской деформации с учетом предположения о том, что рассматриваемые процессы происходят на большом удалении от дневной поверхности и выработка не имеет конечной глубины.

Задачи определения НДС сферических крепей подземных полостей на каждом этапе деформирования решались в рамках осесимметричной постановки.

Для каждой из рассматриваемых задач выведены зависимости, описывающие поля перемещений и напряжений на этапе упругого деформирования пористой среды; определена зависимость нагрузок, при которых во всей крепи происходит полное закрытие пор; в аналитическом виде получены соотношения моделирующие НДС в упругой и пластической областях деформирования материала с полностью сжатой матрицей, а так же выведено уравнение для нахождения упругопластической границы. При этом предполагалась непрерывность радиальной компоненты вектора перемещений и отдельных компонент тензора напряжений на границе раздела зон упругого и пластического деформирования, а также обращение в ноль пластических деформаций на ней. Проведен численный эксперимент.

Из анализа численных экспериментов, проведенных как для цилиндрических, так и для сферических крепей, следует, что

- в случае, когда материал крепи с полностью сжатой матрицей моделируется упрочняющимся упруговязкопластическим телом, то при увеличении времени до определенного значения  $t^*$  пластическая зона расширяется, при этом дальнейший рост времени практически не приводит к изменению радиуса упругопластической границы, который соответствует упрочняющейся упругопластической модели;



- с ростом коэффициента Ламе  $\mu_0$  пористого сжимаемого материала, величина радиуса упругопластической границы уменьшается;
- увеличение величины начального раствора пор приводит к расширению области неупругих деформаций сжатой матрицы;
- рост упрочнения, а так же предела текучести материала сжатой матрицы приводит к уменьшению зоны пластических деформаций сжатого скелета.

Аналитические решения полученные в этой главе позволяют перейти к исследованию вопросов устойчивости монолитных крепей вертикальных горных выработок и подземных сферических полостей.

### ГЛАВА 3.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКАЗОВ МОНОЛИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КРЕПЕЙ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОЙ ПОРИСТОСТИ МАТЕРИАЛОВ И СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИИ СЖАТОГО СКЕЛЕТА**

Переходя к вопросу об устойчивости крепей подземных сооружений необходимо отметить следующее. Проходка и крепление шахтных стволов имеют большое производственное и экономическое значение. Крепь подземных сооружений является сложной инженерной конструкцией, требующей для возведения значительных временных и финансовых затрат. Поэтому изучение вопросов устойчивости крепей подземных сооружений является важной и актуальной задачей.

При исследовании устойчивости монолитных крепей подземных сооружений должны быть решены следующие вопросы:

1. при заданном внешнем давлении на крепь со стороны массива горных пород определено критическое значение нагрузки (нагрузка, при которой конструкция теряет устойчивость), действующей на внутреннем контуре крепи;
2. на основе найденной критической нагрузки определена оптимальная толщина крепи, обеспечивающая ее устойчивость.

Величина критического давления на крепь может находиться из разных условий, например из условия возникновения в области крепи предельного состояния. При этом у упругой крепи остаются существенные резервы несущей способности. Этот же вопрос можно решить и из условия перехода всего материала крепи в пластическое состояние. При этом потеря устойчивости может произойти раньше, чем крепь перейдет в указанное состояние. В связи с этим для определения критического давления на крепь желательно привлекать аппарат теории устойчивости деформируемых тел.

Существует достаточно большое количество исследований направленных на определение оптимальной толщины монолитной крепи, обеспечивающей устойчивость подземных конструкций, согласно которым толщина крепи может

быть уменьшена без ущерба для их устойчивости. При этом, одни из исследователей этого вопроса рассматривают крепь выработок, пройденных в устойчивых породах, только лишь как оболочку, защищающую ствол от разрушения [193, 197] и как следствие отождествляют задачу определения оптимальной толщины крепи выработки с задачей устойчивости толстостенной оболочки, находящейся под действием постоянной внешней нагрузки [8, 9, 125, 132]. Другие авторы в том случае, когда проходка стволов происходит в сложных горногеологических условиях в слабых, неустойчивых породах, моделируют крепь как грузонесущую конструкцию [153, 244, 253].

В данной главе моделируется потеря устойчивости основных состояний монолитных крепей вертикальной горной выработки и сферической подземной полости в случае неупругого деформирования материала крепи с полностью сжатой матрицей.

В отличие от классических задач устойчивости где нагрузка, как правило, возрастает от нуля до некоторого критического значения, в задачах по исследованию устойчивости горных выработок нагрузка убывает от своего верхнего значения  $p = gh$  ( $g$  - средний объемный вес вышележащих пород,  $h$  - глубина заложения выработки) до некоторой критической величины. Будем проводить исследование отказов крепей подземных сооружений на достаточном удалении от дневной поверхности, а для вертикальных выработок кроме этого не будем учитывать эффекты, связанные с тем, что выработка имеет конечную глубину. Вследствие этого будем считать, что потеря устойчивости будет происходить от действия внешних нагрузок и никак не связана с краевыми эффектами. Действие массива горных пород на крепь будем моделировать постоянной нагрузкой, равномерно распределенной по внешнему контуру крепи.

Для описания пластических свойств материала крепи с полностью сжатым скелетом воспользуемся несжимаемой упруговязкопластической моделью среды с трансляционным упрочнением с поверхностью нагружения (1.9) или несжимаемой упругопластической средой с поверхностью нагружения (1.13).

### 3.1. Устойчивость крепи вертикальной горной выработки с полностью сжатой матрицей при неупругом поведении материала (пространственная форма потери устойчивости)

Рассмотрим вопрос о пространственной форме потери устойчивости монолитной крепи с внешним радиусом  $b$  и внутренним -  $a$  вертикальной горной выработки. Нагрузка интенсивностью  $q_b$  равномерно распределенная по внешней поверхности крепи моделирует собой давление массива горных пород на крепь. По внутренней поверхности крепи равномерно распределена сжимающая нагрузка интенсивностью  $q_a$  критическое значение которой требуется определить. Величины  $q_b$  и  $q_a$  таковы, что материал крепи имеет полностью сжатую неупругую матрицу и образовавшаяся пластическая область полностью охватывает внутренний контур крепи.

Для такого рода задач можно ввести упрощения за счет следующих предположений [94]:

- при определении докритического основного состояния и исследования линеаризированной задачи устойчивости не учитываются эффекты связанные с тем, что выработка имеет конечную глубину;
- при исследовании задач устойчивости можно не учитывать наличие дневной поверхности и рассматривать устойчивость состояния равновесия бесконечного цилиндрического тела, находящегося под действием равномерно распределенных сжимающих нагрузок.

В случае если материал крепи на этапе неупругого деформирования полностью сжатого скелета описывается упрочняющимся упругопластическим телом с поверхностью нагружения (1.13) основное НДС цилиндрической крепи вертикальной горной выработки в зоне неупругих деформаций моделируется соотношениями (2.50), (2.55), (2.56), (2.23), (2.24), (2.53) а в области упругого деформирования – (2.50), (2.23), (2.24), (2.53), (2.54). Граница раздела упругой и пластической областей находится из уравнения (2.57). Линеаризованную связь между амплитудными значениями напряжений и перемещений примем в форме (1.48), где надо положить  $\eta = 0$ .

Если же материал крепи с полностью сжатой матрицей моделируется упрочняющейся упруговязкопластической средой с функцией нагружения (1.9), то процесс деформирования крепи описывается в пластической зоне соотношениями (2.50), (2.83), (2.84), (2.23), (2.24), (2.81) а в упругой области – (2.50), (2.23), (2.24), (2.81), (2.124). Граница раздела упругой и пластической областей находится из уравнения (2.85). Линеаризованную связь между амплитудными значениями напряжений и перемещений в этом случае примем в форме (1.48).

В обоих случаях основное невозмущенное состояние крепи с полностью сжатой матрицей определяется только главными компонентами тензоров напряжений и деформаций, зависящими лишь от одной радиальной координаты. При этом будут справедливы следующие формулы

$$S_r^0 = -S_\theta^0 - \frac{2}{3}\mu_1\varepsilon_0, \quad \varepsilon_r^0 = -\varepsilon_\theta^0, \quad S_r^0 - c\varepsilon_r^p = \alpha_1^0, \quad S_\theta^0 - c\varepsilon_\theta^p = \alpha_2^0, \quad (3.1)$$

где  $d_1^0 = -\frac{\mu_1\varepsilon_0}{3} - \chi\sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2}$ ,  $d_2^0 = -\frac{1}{3}\mu_1\varepsilon_0 + \chi\sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2}$ .

С учетом (3.1) ненулевые величины  $f_j^i = S_j^i - c\varepsilon_j^{0p}$  входящие в соотношения (1.70) примут вид

$$f_r^0 = d_1^0, \quad f_\theta^0 = d_2^0. \quad (3.2)$$

Тогда из соотношений (1.76) и (1.77) при учете (3.2) получим для пластической области

$$\alpha_1 = 2\mu - \nu \cdot \psi_1^0, \quad \alpha_2 = \alpha_4 = -\nu \cdot \psi_3^0, \quad \alpha_5 = 2\mu - \nu \cdot \psi_2^0, \quad \alpha_9 = \frac{\mu}{r},$$

$$\alpha_3 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0, \quad (3.3)$$

$$\nu = \frac{4\mu^2}{k^2(2\mu + c + \eta\beta)}, \quad \psi_1^0 = \left(d_1^0\right)^2, \quad \psi_2^0 = \left(d_2^0\right)^2, \quad \psi_3^0 = d_1^0 \cdot d_2^0;$$

для упругой области будут справедливы формулы (3.3), в которых надо положить  $\nu = 0$ .

С учетом (3.3) уравнения равновесия (1.73) переписутся в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{A}{r} \left( r^2 \rho \omega^2 - \sigma_\theta^0 - 2\mu + \nu \cdot \psi_2^0 - \left( \sigma_\theta^0 + \mu \right) m^2 - r^2 \left( \sigma_z^0 + \mu \right) n^2 \right) + A' \left( \sigma_r^0 + r \sigma_{r,r}^0 - \nu \cdot \psi_1^0 + 2\mu \right) + \\
& + A'' r \left( -\nu \cdot \psi_1^0 + 2\mu + \sigma_r^0 \right) + \frac{B}{r} m \left( -2\sigma_\theta^0 - 2\mu + \nu \cdot \psi_2^0 - \mu \right) + B' m \left( -\nu \cdot \psi_3^0 + \mu \right) + C' r \mu n + D' r = 0, \\
& -m \frac{A}{r} \left( 2\sigma_\theta^0 - \nu \cdot \psi_2^0 + 3\mu \right) - mA' \left( \mu - \nu \cdot \psi_3^0 \right) + \frac{B}{r} \left( r^2 \rho \omega^2 - \sigma_\theta^0 - r^2 \left( \mu + \sigma_z^0 \right) n^2 - \right. \\
& \left. - \left( 2\mu - \nu \cdot \psi_2^0 + \sigma_\theta^0 \right) m^2 - \mu \right) + B' \left( \sigma_r^0 + r \sigma_{r,r}^0 + \mu \right) + B'' r \left( \sigma_r^0 + \mu \right) + C \mu m n + D m = 0, \\
& -\mu n \left( A + A' r + B m \right) + \frac{C}{r} \left( r^2 \left( \rho \omega^2 - n^2 \left( 2\mu + \sigma_z^0 \right) \right) - m^2 \left( \mu + \sigma_\theta^0 \right) \right) + \\
& + C' \left( \sigma_r^0 + r \sigma_{r,r}^0 + \mu \right) + C'' r \left( \mu + \sigma_r^0 \right) - D r n = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Соотношения (3.4) будут справедливы для пластической области ( $a < r < \gamma$ ) деформирования крепи, если в них всем переменным величинам приписать сверху индекс « $p$ » и для упругой ( $\gamma < r < 1$ ), если в этих соотношениях положить  $\nu = 0$  и всем переменным величинам приписать сверху индекс « $e$ ».

Граничные условия (1.74) с учетом (3.3) примут вид

на внутренней поверхности крепи

$$\begin{aligned}
& -\frac{A^p}{a} \nu \cdot \psi_3^0 + A'^p \left( -q_a - \nu \cdot \psi_1^0 + 2\mu \right) - \frac{B^p}{a} m \nu \cdot \psi_3^0 + D^p = 0, \\
& A^p m \mu + B^p \mu - a B'^p \left( \mu - q_a \right) = 0, \\
& A^p n \mu - C'^p \left( \mu - q_a \right) = 0;
\end{aligned} \tag{3.5}$$

на внешней поверхности крепи

$$\begin{aligned}
& A^e \left( 2\mu - q_b \right) + D^e = 0, \quad A^e m \mu + B^e \mu - B'^e \left( \mu - q_b \right) = 0, \\
& A^e n \mu - C'^e \left( \mu - q_b \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Условия неразрывности напряжений (1.57) на упругопластической границе  $\gamma$  в этом случае запишутся в форме

$$\begin{aligned}
[A']\left(\overset{0}{\sigma}_r^e(\gamma)+2\mu\right)+[D]-\frac{\nu\cdot\overset{0}{\psi}_3}{\gamma}(A^p+mB^p)-A'^p\nu\cdot\overset{0}{\psi}_1=0, \\
m\mu[A]+\mu[B]-[B']\gamma\left(\overset{0}{\sigma}_r^e(\gamma)+\mu\right)=0, \\
n\mu[A]-\left(\overset{0}{\sigma}_r^e(\gamma)+\mu\right)[C']=0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Выражая из (1.75) неизвестную  $C(r)$  и подставляя в (3.4) - (3.7) получим запись уравнений равновесия, граничных условий и условий непрерывности напряжений в терминах функций  $A(r)$ ,  $B(r)$ ,  $D(r)$ :

уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
\frac{A(r)}{r}\left(r^2\rho\omega^2-\left(\overset{0}{\sigma}_\theta+\mu\right)(1+m^2)+\nu\cdot\overset{0}{\psi}_2-r^2\left(\overset{0}{\sigma}_z+\mu\right)n^2\right)+A'(r)\left(\overset{0}{\sigma}_r+r\overset{0}{\sigma}_{r,r}-\nu\cdot\overset{0}{\psi}_1+\mu\right)+ \\
+A''(r)\cdot r\left(-\nu\cdot\overset{0}{\psi}_1+\mu+\overset{0}{\sigma}_r\right)+\frac{B(r)}{r}m\left(-2\overset{0}{\sigma}_\theta-2\mu+\nu\cdot\overset{0}{\psi}_2\right)-B'(r)m\nu\cdot\overset{0}{\psi}_3+D'(r)\cdot r=0, \\
-m\frac{A(r)}{r}\left(2\overset{0}{\sigma}_\theta-\nu\cdot\overset{0}{\psi}_2+4\mu\right)-mA'(r)\left(-\nu\cdot\overset{0}{\psi}_3+2\mu\right)+ \\
+\frac{B(r)}{r}\left(r^2\rho\omega^2-\overset{0}{\sigma}_\theta-r^2\left(\mu+\overset{0}{\sigma}_z\right)n^2-\left(3\mu-\nu\cdot\overset{0}{\psi}_2+\overset{0}{\sigma}_\theta\right)m^2-\mu\right)+ \\
+B'(r)\left(\overset{0}{\sigma}_r+r\overset{0}{\sigma}_{r,r}+\mu\right)+B''(r)\cdot r\left(\overset{0}{\sigma}_r+\mu\right)+D(r)m=0,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\left(r^2\left(\rho\omega^2-n^2\left(2\mu+\overset{0}{\sigma}_z\right)\right)-m^2\left(\mu+\overset{0}{\sigma}_\theta\right)+\mu n^2 r^2+\mu+\overset{0}{\sigma}_r-r\overset{0}{\sigma}_{r,r}\right)(A(r)+mB(r))+ \\
+A'(r)\cdot r\left(r^2\left(\rho\omega^2-n^2\left(2\mu+\overset{0}{\sigma}_z\right)\right)-m^2\left(\mu+\overset{0}{\sigma}_\theta\right)+\mu n^2 r^2-\mu-\overset{0}{\sigma}_r+r\overset{0}{\sigma}_{r,r}\right)+ \\
+r^2A''(r)\left(2\left(\mu+\overset{0}{\sigma}_r\right)+r\overset{0}{\sigma}_{r,r}\right)+r^2\left(\mu+\overset{0}{\sigma}_r\right)(r\cdot A'''(r)+B''(r)m)- \\
-rmB'(r)\left(\mu+\overset{0}{\sigma}_r-r\overset{0}{\sigma}_{r,r}\right)+D(r)\cdot r^3n^2=0;
\end{aligned}$$

граничные условия на внутренней поверхности крепи

$$\begin{aligned}
-\frac{\nu\cdot\overset{0}{\psi}_3}{a}(A^p(a)+B^p(a)m)+A'^p(a)\left(-q_a-\nu\cdot\overset{0}{\psi}_1+2\mu\right)+D^p(a)=0, \\
m\mu A^p(a)+\mu B^p(a)-a(\mu-q_a)B'^p(a)=0, \\
A^p(a)(n^2a^2\mu-\mu-q_a)+(A'^p(a)a+A''^p(a)a^2-B^p(a)m+B'^p(a)am)(\mu-q_a)=0;
\end{aligned} \tag{3.9}$$

граничные условия на внешней поверхности крепи

$$\begin{aligned} A^e(1)(2\mu - q_b) + D^e(1) &= 0, \\ m\mu A^e(1) + \mu B^e(1) - (\mu - q_a)B'^e(1) &= 0, \\ A^e(1)(n^2\mu - \mu - q_a) + (A^e(1) + A''^e(1) - B^e(1)m + B'^e(1)m)(\mu - q_a) &= 0; \end{aligned} \quad (3.10)$$

условия на границе  $\gamma$  зон упругого и пластического деформирования

$$\begin{aligned} \left( \sigma_r^e(\gamma) + 2\mu \right) [A'] + [D] - \frac{\nu \cdot \psi_3^0}{\gamma} (A^p + mB^p) - A'^p \nu \cdot \psi_1^0 &= 0, \\ m\mu [A] + \mu [B] - \gamma \left( \sigma_r^e(\gamma) + \mu \right) [B'] &= 0, \\ \left( 1 - \frac{\mu n^2 \gamma^2}{\sigma_r^e(\gamma) + \mu} \right) [A] - \gamma [A'] - \gamma^2 [A''] + m[B] - \gamma m [B'] &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для удобства дальнейших выкладок перепишем систему уравнений (3.8) – (3.11) в следующем виде:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \xi_1^0(r)A(r) + \xi_2^0(r)A'(r) + \xi_3^0(r)A''(r) + \xi_4^0(r)B(r) + \xi_5^0(r)B'(r) + r \cdot D'(r) &= 0, \\ \xi_6^0(r)A(r) + \xi_7^0(r)A'(r) + \xi_8^0(r)B(r) + \xi_9^0(r)B'(r) + \xi_{10}^0(r)B''(r) + m \cdot D(r) &= 0, \\ \xi_{11}^0(r)A(r) + \xi_{12}^0(r)A'(r) + \xi_{13}^0(r)A''(r) + \xi_{14}^0(r)r \cdot A'''(r) + \xi_{11}^0(r)mB(r) + \xi_{15}^0(r)B'(r) + \\ + \xi_{14}^0(r)m \cdot B''(r) + D(r) \cdot r^3 n^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1^0(r) &= \frac{1}{r} \left( r^2 \rho \omega^2 - \left( \sigma_\theta^0 + \mu \right) (1 + m^2) + \nu \cdot \psi_2^0 - r^2 \left( \sigma_z^0 + \mu \right) n^2 \right), \quad \xi_2^0(r) = \sigma_r^0 + r \sigma_{r,r}^0 - \nu \cdot \psi_1^0 + \mu, \\ \xi_3^0(r) &= r \left( -\nu \cdot \psi_1^0 + \mu + \sigma_r^0 \right), \quad \xi_4^0(r) = \frac{m}{r} \left( -2\sigma_\theta^0 - 2\mu + \nu \cdot \psi_2^0 \right), \quad \xi_5^0(r) = -m\nu \cdot \psi_3^0, \\ \xi_6^0(r) &= -\frac{m}{r} \left( 2\sigma_\theta^0 - \nu \cdot \psi_2^0 + 4\mu \right), \quad \xi_7^0(r) = m \left( \nu \cdot \psi_3^0 - 2\mu \right), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\xi_8^0(r) &= \frac{1}{r} \left( r^2 \rho \omega^2 - \sigma_\theta^0 - r^2 \left( \mu + \sigma_z^0 \right) n^2 - \left( 3\mu - \nu \cdot \psi_2 + \sigma_\theta^0 \right) m^2 - \mu \right), \quad \xi_9^0(r) = \sigma_r^0 + r \sigma_{r,r}^0 + \mu, \\
\xi_{10}^0(r) &= r \left( \sigma_r^0 + \mu \right), \quad \xi_{11}^0(r) = \left( r^2 \left( \rho \omega^2 - n^2 \left( 2\mu + \sigma_z^0 \right) \right) - m^2 \left( \mu + \sigma_\theta^0 \right) + \mu n^2 r^2 + \mu + \sigma_r^0 - r \sigma_{r,r}^0 \right), \\
\xi_{12}^0(r) &= r \left( r^2 \left( \rho \omega^2 - n^2 \left( 2\mu + \sigma_z^0 \right) \right) - m^2 \left( \mu + \sigma_\theta^0 \right) + \mu n^2 r^2 - \mu - \sigma_r^0 + r \sigma_{r,r}^0 \right), \\
\xi_{13}^0(r) &= r^2 \left( 2 \left( \mu + \sigma_r^0 \right) + r \sigma_{r,r}^0 \right), \quad \xi_{14}^0(r) = r^2 \left( \mu + \sigma_r^0 \right), \quad \xi_{15}^0(r) = -r m \left( \mu + \sigma_r^0 - r \sigma_{r,r}^0 \right);
\end{aligned}$$

граничные условия на внутренней и внешней поверхностях крепи соответственно перепишем в виде

$$\begin{aligned}
(A^p(a) + B^p(a)m) \varphi_1^0 + \varphi_2^0 A'^p(a) + D^p(a) &= 0, \\
m \mu A^p(a) + \mu B^p(a) + \varphi_3^0 B'^p(a) &= 0, \\
\varphi_4^0 A^p(a) + (A'^p(a)a + A''^p(a)a^2 - B^p(a)m + B'^p(a)am) \varphi_5^0 &= 0;
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
A'^e(1) \varphi_6^0 + D^e(1) &= 0, \\
m \mu A^e(1) + \mu B^e(1) - \varphi_5^0 B'^e(1) &= 0, \\
A^e(1) \varphi_7^0 + (A'^e(1) + A''^e(1) - B^e(1)m + B'^e(1)m) \varphi_5^0 &= 0,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi_1^0 &= -\frac{\nu \cdot \psi_3^0}{a}, \quad \varphi_2^0 = -q_a - \nu \cdot \psi_1^0 + 2\mu, \quad \varphi_3^0 = -a(\mu - q_a), \quad \varphi_4^0 = n^2 a^2 \mu - \mu - q_a, \quad \varphi_5^0 = \mu - q_a, \\
\varphi_6^0 &= 2\mu - q_b, \quad \varphi_7^0 = n^2 \mu - \mu - q_a;
\end{aligned}$$

условия на границе  $\gamma$  зон упругого и пластического деформирования

$$\begin{aligned}
\varphi_8^0 [A'] + [D] + \varphi_9^0 (A^p + mB^p) - A'^p \nu \cdot \psi_1^0 &= 0, \\
m \mu [A] + \mu [B] + \varphi_{10}^0 [B'] &= 0, \\
\varphi_{11}^0 [A] - \gamma [A'] - \gamma^2 [A''] + m [B] - \gamma m [B'] &= 0,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

где

$$\varphi_8^0 = \sigma_r^e(\gamma) + 2\mu, \quad \varphi_9^0 = -\frac{\nu \cdot \psi_3^0}{\gamma}, \quad \varphi_{10}^0 = -\gamma \left( \sigma_r^e(\gamma) + \mu \right), \quad \varphi_{11}^0 = 1 - \frac{\mu n^2 \gamma^2}{\sigma_r^e(\gamma) + \mu}.$$

Таким образом, математическая модель отказа монолитной крепи вертикальной горной выработки представляется в виде бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.12) с краевыми условиями (3.13), (3.14) и условиями сопряжения (3.15). Для решения этой системы уравнений относительно параметров  $A_{nm}(r)$ ,  $B_{nm}(r)$ ,  $D_{nm}(r)$ , будем использовать метод конечных разностей, суть которого изложена §5 главы 1. Обозначим через  $M^p$  и  $M^e$  количество точек разбиения в областях пластического и упругого деформирования материала крепи соответственно. Заменяя производные функций  $A(r)$ ,  $B(r)$  и  $D(r)$  в (3.12) для пластической области -  $V^p$  в точках  $j=2, 3, 4, \dots, M^p-1$  и для упругой области -  $V^e$  в точках  $j=M^p+3, M^p+4, \dots, M^p+M^e$  через конечные разности (1.99), получим

$$\begin{aligned}
& \left(2\xi_3^0 - \tau \xi_2^0\right) A_{j-1} + \left(2\tau^2 \xi_1^0 - 4\xi_3^0\right) A_j + A_{j+1} \left(\tau \xi_2^0 + 2\xi_3^0\right) - \tau \xi_5^0 B_{j-1} + 2\tau^2 \xi_4^0 B_j + \tau \xi_5^0 B_{j+1} - \\
& \quad - r\tau \xi_2^0 D_{j-1} + r\tau \xi_2^0 D_{j+1} = 0, \\
& -\tau \xi_7^0 A_{j-1} + 2\tau^2 \xi_6^0 A_j + \tau \xi_7^0 A_{j+1} + \left(2\xi_{10}^0 - \tau \xi_9^0\right) B_{j-1} + 2\left(\tau^2 \xi_8^0 - 2\xi_{10}^0\right) B_j + \\
& \quad + \left(\tau \xi_9^0 + 2\xi_{10}^0\right) B_{j+1} + m \cdot D_j = 0, \tag{3.16} \\
& -r\xi_{14}^0 A_{j-2} + \left(2\tau \xi_{13}^0 - \tau^2 \xi_{12}^0 + 2r\xi_{14}^0\right) A_{j-1} + \left(2\tau^3 \xi_{11}^0 - 4\tau \xi_{13}^0\right) A_j + \left(\tau^2 \xi_{12}^0 + 2\tau \xi_{13}^0 - 2r\xi_{14}^0\right) A_{j+1} + \\
& + r\xi_{14}^0 A_{j+2} + \left(2\tau m\xi_{14}^0 - \tau^2 \xi_{15}^0\right) B_{j-1} + \left(2\tau^3 m\xi_{11}^0 - 4\tau m\xi_{14}^0\right) B_j + \left(\tau^2 \xi_{15}^0 + 2\tau m\xi_{14}^0\right) B_{j+1} + 2\tau^3 r^3 n^2 D_j = 0
\end{aligned}$$

Здесь и далее  $\xi_i^0 = \xi_i^0(r)$  ( $i=1, 2, \dots, 15$ ) - коэффициенты в уравнениях равновесия (3.12).

В точках  $j=M^p, M^p+M^e+1$  согласно тому, что в приграничных точках производные будем аппроксимировать схемой (1.100) – нижние знаки), для уравнений равновесия (3.12) запишем

$$\begin{aligned}
& \left(2\xi_3^0 - \tau \xi_2^0\right) A_{j-1} + \left(2\tau^2 \xi_1^0 - 4\xi_3^0\right) A_j + \left(\tau \xi_2^0 + 2\xi_3^0\right) A_{j+1} - \tau \xi_5^0 B_{j-1} + 2\tau^2 \xi_4^0 B_j + \tau \xi_5^0 B_{j+1} - \\
& \quad - r\tau \xi_2^0 D_{j-1} + r\tau \xi_2^0 D_{j+1} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\tau \xi_7^0 A_{j-1} + 2\tau^2 \xi_6^0 A_j + \tau \xi_7^0 A_{j+1} + \left(2\xi_{10}^0 - \tau \xi_9^0\right) B_{j-1} + 2\left(\tau^2 \xi_8^0 - 2\xi_{10}^0\right) B_j + \\
& + \left(\tau \xi_9^0 + 2\xi_{10}^0\right) B_{j+1} + m \cdot D_j = 0,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& r \xi_{14}^0 A_{j-3} - 6r \xi_{14}^0 A_{j-2} + \left(2\tau \xi_{13}^0 - \tau^2 \xi_{12}^0 + 12r \xi_{14}^0\right) A_{j-1} + 2\left(\tau^3 \xi_{11}^0 - 2\tau \xi_{13}^0 - 5r \xi_{14}^0\right) A_j + \\
& + \left(\tau^2 \xi_{12}^0 + 2\tau \xi_{13}^0 + 3r \xi_{14}^0\right) A_{j+1} + \tau \left(2m \xi_{14}^0 - \tau \xi_{15}^0\right) B_{j-1} + 2\tau m \left(\tau^2 \xi_{11}^0 - 2\xi_{14}^0\right) B_j + \\
& + \tau \left(\tau \xi_{15}^0 + 2m \xi_{14}^0\right) B_{j+1} + 2\tau^3 r^3 n^2 D_j = 0
\end{aligned}$$

В точках  $j=1, M^p+2$ , согласно тому, что в приграничных точках производные будем аппроксимировать схемой (1.100) - верхние знаки), для уравнений равновесия (3.12) запишем

$$\begin{aligned}
& A_{j-1} \left(2\xi_3^0 - \tau \xi_2^0\right) + A_j \left(2\tau^2 \xi_1^0 - 4\xi_3^0\right) + A_{j+1} \left(\tau \xi_2^0 + 2\xi_3^0\right) - \tau \xi_5^0 B_{j-1} + 2\tau^2 \xi_4^0 B_j + \tau \xi_5^0 B_{j+1} - \\
& - r\tau \xi_2^0 D_{j-1} + r\tau \xi_2^0 D_{j+1} = 0, \\
& -\tau \xi_7^0 A_{j-1} + 2\tau^2 \xi_6^0 A_j + \tau \xi_7^0 A_{j+1} + \left(2\xi_{10}^0 - \tau \xi_9^0\right) B_{j-1} + 2\left(\tau^2 \xi_8^0 - 2\xi_{10}^0\right) B_j + \\
& + \left(\tau \xi_9^0 + 2\xi_{10}^0\right) B_{j+1} + mD_j = 0,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
& \left(2\tau \xi_{13}^0 - \tau^2 \xi_{12}^0 - 3r \xi_{14}^0\right) A_{j-1} + 2\left(\tau^3 \xi_{11}^0 - 2\tau \xi_{13}^0 + 5r \xi_{14}^0\right) A_j + \left(\tau^2 \xi_{12}^0 + 2\tau \xi_{13}^0 - 12r \xi_{14}^0\right) A_{j+1} + 6r \xi_{14}^0 A_{j+2} - \\
& - r \xi_{14}^0 A_{j+3} + \tau \left(2m \xi_{14}^0 - \tau \xi_{15}^0\right) B_{j-1} + 2\tau m \left(\tau^2 \xi_{11}^0 - 2\xi_{14}^0\right) B_j + \tau \left(\tau \xi_{15}^0 + 2m \xi_{14}^0\right) B_{j+1} + 2\tau^3 r^3 n^2 D_j = 0.
\end{aligned}$$

Шаг разностной сетки в каждой из зон  $V^p$  и  $V^e$  есть

$$\tau^p = \frac{\gamma - a}{M^p + 1}, \quad \tau^e = \frac{1 - \gamma}{M^e + 1}. \tag{3.19}$$

Отметим, что если соотношения (3.16) – (3.18) записываются для пластической области, то в них надо приписать всем неизвестным и переменным величинам вверху индекс « $p$ », для упругой области - индекс « $e$ ».

В случае если материал крепи на этапе неупругого деформирования полностью сжатого скелета описывается упрочняющимся упругопластическим телом с поверхностью нагружения, то граница раздела упругой и пластической областей находится из уравнения (2.57). Если же материал крепи с полностью

сжатой матрицей моделируется упрочняющейся упруговязко-пластической средой, то граница раздела упругой и пластической областей находится из уравнения (2.85).

Производные функций  $A(r)$ ,  $B(r)$  и  $D(r)$  в условиях (3.13 – 3.15) аппроксимируются конечными разностями типа (1.101). При этом условиям (3.13) соответствует разностный вид

$$\begin{aligned} & \left( 2\tau^p \overset{0}{\varphi}_1 - 3\overset{0}{\varphi}_2 \right) A_0^p + 4\overset{0}{\varphi}_2 A_1^p - \overset{0}{\varphi}_2 A_2^p + 2\tau^p m \overset{0}{\varphi}_1 B_0^p + 2\tau^p D_0^p = 0, \\ & 2\tau^p m \mu A_0^p + \left( 2\tau^p \mu - 3\overset{0}{\varphi}_3 \right) B_0^p + 4\overset{0}{\varphi}_3 B_1^p - \overset{0}{\varphi}_3 B_2^p = 0, \\ & \left( 2\tau^2 \left( \overset{0}{\varphi}_4 / \overset{0}{\varphi}_5 \right) - a(3\tau^p - 4a) \right) A_0^p + 2a(2\tau^p - 5a) A_1^p + a(8a - \tau^p) A_2^p - 2a^2 A_3^p - \\ & - \tau^p m(3a + 2\tau^p) B_0^p + 4\tau^p a m B_1^p - \tau^p a m B_2^p = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

условиям (3.14) - вид

$$\begin{aligned} & -A_{M-2}^e + 4A_{M-1}^e - 3A_M^e - \left( 2\tau^e / \overset{0}{\varphi}_6 \right) D_M^e = 0, \\ & 2\tau^e m \mu A_M^e - \overset{0}{\varphi}_5 B_{M-2}^e + 4\overset{0}{\varphi}_5 B_{M-1}^e + \left( 2\tau^e \mu - 3\overset{0}{\varphi}_5 \right) B_M^e = 0, \\ & -2A_{M-3}^e + (8 + \tau^e) A_{M-2}^e - 2(5 + 2\tau^e) A_{M-1}^e + \left( 4 + 3\tau^e + 2(\tau^e)^2 \left( \overset{0}{\varphi}_7 / \overset{0}{\varphi}_5 \right) \right) A_M^e + \\ & + \tau^e m B_{M-2}^e - 4\tau^e m B_{M-1}^e + \tau^e m(3 - 2\tau^e) B_M^e = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где  $M = M^p + M^e + 2$ ;

условиям (3.15) - вид

$$\begin{aligned} & -\tau^e \left( \overset{0}{\varphi}_8 + \nu \cdot \overset{0}{\psi}_1 \right) A_{j-2}^p + 4\tau^e \left( \overset{0}{\varphi}_8 + \nu \psi_1 \right) A_{j-1}^p + \tau^e \left( 2\tau^p \overset{0}{\varphi}_9 - 3\overset{0}{\varphi}_8 - 3\nu \psi_1 \right) A_j^p - 3\tau^p \overset{0}{\varphi}_8 A_j^e + 4\tau^p \overset{0}{\varphi}_8 A_{j+1}^e - \\ & - \tau^p \overset{0}{\varphi}_8 A_{j+2}^e + 2\tau^e \tau^p m \overset{0}{\varphi}_9 B_j^p + 2\tau^e \tau^p (D_j^e - D_j^p) = 0, \\ & 2\tau^e \tau^p m \mu (A_j^e - A_j^p) - \tau^e \overset{0}{\varphi}_{10} B_{j-2}^p + 4\tau^e \overset{0}{\varphi}_{10} B_{j-1}^p - \tau^e \left( 3\overset{0}{\varphi}_{10} + 2\tau^p \mu \right) B_j^p + \tau^p \left( 2\tau^e \mu - 3\overset{0}{\varphi}_{10} \right) B_j^e + \\ & + 4\tau^p \overset{0}{\varphi}_{10} B_{j+1}^e - \tau^p \overset{0}{\varphi}_{10} B_{j+2}^e = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(\tau^e)^2 \gamma^2 A_{j-3}^p + (\tau^e)^2 \gamma (8\gamma + \tau^p) A_{j-2}^p - 2(\tau^e)^2 \gamma (5\gamma + 2\tau^p) A_{j-1}^p + (\tau^e)^2 \left( 4\gamma^2 - 2(\tau^p)^2 \varphi_{11}^0 + 3\tau^p \gamma \right) A_j^p + \\
& + (\tau^p)^2 \left( 2(\tau^e)^2 \varphi_{11}^0 + 3\tau^e \gamma - 4\gamma^2 \right) A_j^e + 2(\tau^p)^2 \gamma (5\gamma - 2\tau^e) A_{j+1}^e + (\tau^p)^2 \gamma (\tau^e - 8\gamma) A_{j+2}^e + 2(\tau^p)^2 \gamma^2 A_{j+3}^e + \\
& + \tau^p (\tau^e)^2 \gamma m B_{j-2}^p - 4\tau^p (\tau^e)^2 \gamma m B_{j-1}^p + \tau^p (\tau^e)^2 m (3\gamma - 2\tau^p) B_j^p + \tau^e (\tau^p)^2 m (2\tau^e + 3\gamma) B_j^e - \\
& - 4\tau^e (\tau^p)^2 \gamma m B_{j+1}^e + \tau^e (\tau^p)^2 \gamma m B_{j+2}^e = 0, \tag{3.22}
\end{aligned}$$

где  $j = M^p + 1$ .

Так как, искомые функции  $A(r)$ ,  $B(r)$  и  $D(r)$  непрерывны, то есть выполняются следующие условия  $[A]=[B]=[D]=0$ , то выражения (3.22) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
& \tau^e \left( \varphi_8^0 + \nu \cdot \psi_1^0 \right) \left( -A_{j-2}^p + 4A_{j-1}^p \right) + \left( 2\tau^e \tau^p \varphi_9^0 - 3\tau^e \left( \varphi_8^0 + \nu \cdot \psi_1^0 \right) - 3\tau^p \varphi_8^0 \right) A_j + \tau^p \varphi_8^0 \left( 4A_{j+1}^e - A_{j+2}^e \right) + \\
& + 2\tau^e \tau^p m \varphi_9^0 B_j = 0, \\
& \tau^e \left( -B_{j-2}^p + 4B_{j-1}^p \right) - 3(\tau^e + \tau^p) B_j + \tau^p \left( 4B_{j+1}^e - B_{j+2}^e \right) = 0, \tag{3.23} \\
& 2\gamma (\tau^e)^2 A_{j-3}^p - (\tau^e)^2 (\tau^p + 8\gamma) A_{j-2}^p + 2(\tau^e)^2 (2\tau^p + 5\gamma) A_{j-1}^p + \left( 4\gamma \left( (\tau^p)^2 - (\tau^e)^2 \right) - 3\tau^e \tau^p (\tau^e + \tau^p) \right) A_j + \\
& + 2(\tau^p)^2 (2\tau^e - 5\gamma) A_{j+1}^e + (\tau^p)^2 (8\gamma - \tau^e) A_{j+2}^e - 2\gamma (\tau^p)^2 A_{j+3}^e = 0.
\end{aligned}$$

Здесь также  $j = M^p + 1$ .

В результате получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений, которая в матричной форме может быть представлена в виде

$$[\mathbf{X}_{ij}] \times [\mathbf{Y}_j] = 0. \tag{3.24}$$

Здесь  $[\mathbf{Y}_j]$  вектор неизвестных, который имеет следующие компоненты

$$\begin{aligned}
& \left( A_0^p, A_1^p, \dots, A_{M^p}^p, A_{M^p+1}^p, A_{M^p+1}^e, A_{M^p+2}^e, \dots, A_{M^p+M^e+1}^e, A_{M^p+M^e+2}^e, \right. \\
& [\mathbf{Y}_j] = \left. B_0^p, B_1^p, \dots, B_{M^p}^p, B_{M^p+1}^p, B_{M^p+1}^e, B_{M^p+2}^e, \dots, B_{M^p+M^e+1}^e, B_{M^p+M^e+2}^e, \right. \\
& \left. D_0^p, D_1^p, \dots, D_{M^p}^p, D_{M^p+1}^p, D_{M^p+1}^e, D_{M^p+2}^e, \dots, D_{M^p+M^e+1}^e, D_{M^p+M^e+2}^e \right)
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что определение критического значения внутреннего давления интенсивностью  $q_a$ , соответствующего потери устойчивости

монолитной крепи вертикальной горной выработки сводится к разрешимости матричного уравнения, что в свою очередь соответствует равенству нулю определителя конечной разностной системы уравнений (3.16) – (3.18), (3.20), (3.21), (3.23) при ограничении числа членов в рядах (1.72). При вычислении определителя наряду с нахождением основного НДС крепи для каждой из областей  $V^p$  и  $V^e$  необходимо учитывать уравнение, определяющие положения упруго пластической границы  $\gamma$ . Минимизация должна производиться по шагу разностной сетки, параметрам волнообразования по контуру  $m$  и образующей  $n$ , параметрам материала и конструкции  $\lambda_j$ . Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величины  $q_a$  в зависимости от  $m$ ,  $n$  при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы (3.24).

Ненулевые элементы определителя  $\|x_{ij}\|$  следующие:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 2\tau \varphi_1^0 - 3\varphi_2^0, \quad x_{12} = 4\varphi_2^0, \quad x_{13} = -\varphi_2^0, \quad x_{1,M+2} = 2\tau m \varphi_1^0, \quad x_{1,2M+3} = 2\tau; \\ x_{21} &= 2\tau m \mu, \quad x_{2,M+2} = 2\tau \mu - 3\varphi_3^0, \quad x_{2,M+3} = 4\varphi_3^0, \quad x_{2,M+4} = -\varphi_3^0; \\ x_{31} &= 2\tau^2 \left( \frac{\varphi_4^0}{\varphi_5^0} \right) - a(3\tau - 4a), \quad x_{32} = 2a(2\tau - 5a), \quad x_{33} = a(8a - \tau), \quad x_{34} = -2a^2, \\ x_{3,M+2} &= -\tau m(3a + 2\tau), \quad x_{3,M+3} = 4\tau a m, \quad x_{3,M+4} = -\tau a m, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $\tau = \tau^p$ . Вышеприведенные элементы записаны в точке  $r = a$  и соответствуют условиям (3.20).

$$\begin{aligned} x_{i,j-1} &= 2\xi_3^0 - \tau \xi_2^0, \quad x_{ij} = 2\tau^2 \xi_1^0 - 4\xi_3^0, \quad x_{i,j+1} = \tau \xi_2^0 + 2\xi_3^0, \quad x_{i,j+M} = x_{i,j+M+2} = -\tau \xi_5^0, \quad x_{i,j+M+1} = 2\tau^2, \\ x_{i,j+2M+1} &= -x_{i,j+2M+3} = -r\tau \xi_2^0; \\ x_{i+1,j-1} &= -x_{i+1,j+1} = -\tau \xi_7^0, \quad x_{i+1,j} = 2\tau^2 \xi_6^0, \quad x_{i+1,j+M} = 2\xi_{10}^0 - \tau \xi_9^0, \quad x_{i+1,j+M+1} = 2 \left( \tau^2 \xi_8^0 - 2\xi_{10}^0 \right), \\ x_{i+1,j+M+2} &= \tau \xi_9^0 + 2\xi_{10}^0, \quad x_{i+1,j+2M+2} = m; \\ x_{i+2,j-1} &= 2\tau \xi_{13}^0 - \tau^2 \xi_{12}^0 - 3r \xi_{14}^0, \quad x_{i+2,j} = 2 \left( \tau^3 \xi_{11}^0 - 2\tau \xi_{13}^0 + 5r \xi_{14}^0 \right), \quad x_{i+2,j+1} = \tau^2 \xi_{12}^0 + 2\tau \xi_{13}^0 - 12r \xi_{14}^0, \\ x_{i+2,j+2} &= 6r \xi_{14}^0, \quad x_{i+2,j+3} = -r \xi_{14}^0, \quad x_{i+2,j+M} = \tau \left( 2m \xi_{14}^0 - \tau \xi_{15}^0 \right), \quad x_{i+2,j+M+1} = 2\tau m \left( \tau^2 \xi_{11}^0 - 2\xi_{14}^0 \right), \\ x_{i+2,j+M+2} &= \tau \left( \tau \xi_{15}^0 + 2m \xi_{14}^0 \right), \quad x_{i+2,j+2M+2} = 2\tau^3 r^3 n^2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Здесь в (3.26)  $j=2$ ,  $M^p+3$ ,  $i=3j-2$ . При этом, если  $j=2$ , то в (3.26) следует принять  $\xi_n^0 = \xi_n^p(r)$ ,  $r=a+\tau^p$ ,  $\tau=\tau^p$ , если же  $j=M^p+3$ , то в (3.26) следует принять  $\xi_n^0 = \xi_n^e(r)$ ,  $r=\gamma+\tau^e$ ,  $\tau=\tau^e$ . Элементы (3.26) выписывались согласно уравнениям (3.18).

$$\begin{aligned}
x_{i,j-1} &= 2\xi_3^0 - \tau\xi_2^0, \quad x_{ij} = 2\tau^2\xi_1^0 - 4\xi_3^0, \quad x_{i,j+1} = \tau\xi_2^0 + 2\xi_3^0, \\
x_{i,j+M} &= -x_{i,j+M+2} = -\tau\xi_5^0, \quad x_{i,j+M+1} = 2\tau^2\xi_4^0, \quad x_{i,j+2M+1} = -x_{i,j+2M+3} = -r\tau\xi_2^0; \\
x_{i+1,j-1} &= -x_{i+1,j+1} = -\tau\xi_7^0, \quad x_{i+1,j} = 2\tau^2\xi_6^0, \quad x_{i+1,j+M} = 2\xi_{10}^0 - \tau\xi_9^0, \\
x_{i+1,j+M+1} &= 2\left(\tau^2\xi_8^0 - 2\xi_{10}^0\right), \quad x_{i+1,j+M+2} = \tau\xi_9^0 + 2\xi_{10}^0, \quad x_{i+1,j+2M+2} = m; \quad (3.27) \\
x_{i+2,j-2} &= -x_{i+2,j+2} = -r\xi_{14}^0, \quad x_{i+2,j-1} = -x_{i+2,j+1} = 2\tau\xi_{13}^0 - \tau^2\xi_{12}^0 + 2r\xi_{14}^0, \quad x_{i+2,j} = 2\tau^3\xi_{11}^0 - 4\tau\xi_{13}^0, \\
x_{i+2,j+M} &= 2\tau m\xi_{14}^0 - \tau^2\xi_{15}^0, \quad x_{i+2,j+M+1} = 2\tau^3 m\xi_{11}^0 - 4\tau m\xi_{14}^0, \quad x_{i+2,j+M+2} = \tau^2\xi_{15}^0 + 2\tau m\xi_{14}^0, \quad x_{i+2,j+2M+2} = 2\tau^3 r^3 n^2.
\end{aligned}$$

Здесь в (3.27)  $j=3, 4, 5, \dots, M^p, M^p+4, M^p+5, \dots, M^p+M^e+1$ ,  $i=3j-2$ . При этом, если  $j=3, 4, 5, \dots, M^p$ , то в (3.27) следует принять  $\xi_n^0 = \xi_n^p(r)$ ,  $r=a+(j-1)\cdot\tau^p$ ,  $\tau=\tau^p$ , если же  $j=M^p+4, M^p+5, \dots, M^p+M^e+1$ , то в (3.27) следует принять  $\xi_n^0 = \xi_n^e(r)$ ,  $r=\gamma+(j-1)\cdot\tau^e$ ,  $\tau=\tau^e$ . Элементы (3.27) выписывались согласно уравнениям (3.16).

$$\begin{aligned}
x_{i,j-1} &= 2\xi_3^0 - \tau\xi_2^0, \quad x_{ij} = 2\tau^2\xi_1^0 - 4\xi_3^0, \quad x_{i,j+1} = \tau\xi_2^0 + 2\xi_3^0, \quad x_{i,j+M} = x_{i,j+M+2} = -\tau\xi_5^0, \quad x_{i,j+M+1} = 2\tau^2, \\
x_{i,j+2M+1} &= -x_{i,j+2M+3} = -r\tau\xi_2^0; \\
x_{i+1,j-1} &= -x_{i+1,j+1} = -\tau\xi_7^0, \quad x_{i+1,j} = 2\tau^2\xi_6^0, \quad x_{i+1,j+M} = 2\xi_{10}^0 - \tau\xi_9^0, \quad x_{i+1,j+M+1} = 2\left(\tau^2\xi_8^0 - 2\xi_{10}^0\right), \\
x_{i+1,j+M+2} &= \tau\xi_9^0 + 2\xi_{10}^0, \quad x_{i+1,j+2M+2} = m; \\
x_{i+2,j-3} &= r\xi_{14}^0, \quad x_{i+2,j-2} = -6r\xi_{14}^0, \quad x_{i+2,j-1} = 2\tau\xi_{13}^0 - \tau^2\xi_{12}^0 + 12r\xi_{14}^0, \quad x_{i+2,j} = 2\left(\tau^3\xi_{11}^0 - 2\tau\xi_{13}^0 - 5r\xi_{14}^0\right), \\
x_{i+2,j+1} &= \tau^2\xi_{12}^0 + 2\tau\xi_{13}^0 + 3r\xi_{14}^0, \quad x_{i+2,j+M} = \tau\left(2m\xi_{14}^0 - \tau\xi_{15}^0\right), \quad x_{i+2,j+M+1} = 2\tau m\left(\tau^2\xi_{11}^0 - 2\xi_{14}^0\right), \\
x_{i+2,j+M+2} &= \tau\left(\tau\xi_{15}^0 + 2m\xi_{14}^0\right), \quad x_{i+2,j+2M+2} = 2\tau^3 r^3 n^2. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Здесь в (3.28)  $j = M^p + 1$ ,  $M$ ,  $i = 3j - 2$ . При этом, если  $j = M^p + 1$ , то в (3.28) следует принять  $\xi_n^0 = \xi_n^0(r)$ ,  $r = \gamma - \tau^p$ ,  $\tau = \tau^p$ , если же  $j = M$ , то в (3.28) следует принять  $\xi_n^0 = \xi_n^0(r)$ ,  $r = 1 - \tau^e$ ,  $\tau = \tau^e$ . Элементы (3.28) выписывались согласно уравнениям (3.17).

$$\begin{aligned}
x_{i,j-2} &= -\tau^e \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_8 + \nu \cdot \psi_1 \end{pmatrix}, x_{i,j-1} = 4\tau^e \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_8 + \nu \cdot \psi_1 \end{pmatrix}, x_{ij} = 2\tau^e \tau^p \varphi_9^0 - 3\tau^e \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_8 + \nu \cdot \psi_1 \end{pmatrix} - 3\tau^p \varphi_8^0, \\
x_{i,j+1} &= 4\tau^p \varphi_8^0, x_{i,j+2} = -\tau^p \varphi_8^0, x_{i,j+M+1} = 2\tau^e \tau^p m \varphi_9^0; \\
x_{i+1,j+M-1} &= -\tau^e, x_{i+1,j+M} = 4\tau^e, x_{i+1,j+M+1} = -3(\tau^e + \tau^p), x_{i+1,j+M+2} = 4\tau^p, x_{i+1,j+M+3} = -\tau^p; \\
x_{i+2,j-3} &= 2\gamma(\tau^e)^2, x_{i+2,j-2} = -(\tau^e)^2(\tau^p + 8\gamma), x_{i+2,j-1} = 2(\tau^e)^2(2\tau^p + 5\gamma), \\
x_{i+2,j} &= 4\gamma((\tau^p)^2 - (\tau^e)^2) - 3\tau^e \tau^p(\tau^e + \tau^p), x_{i+2,j+1} = 2(\tau^p)^2(2\tau^e - 5\gamma), \\
x_{i+2,j+2} &= (\tau^p)^2(8\gamma - \tau^e), x_{i+2,j+3} = -2\gamma(\tau^p)^2.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Здесь в (3.29)  $j = M^p + 2$ ,  $i = 3j - 2$ . Элементы (3.28) выписывались согласно уравнениям (3.23) и соответствуют точке  $r = \gamma$ .

Оставшиеся элементы соответствуют значению  $r = 1$ ,  $\tau = \tau^e$  и выписываются согласно условиям (3.21) в виде

$$\begin{aligned}
x_{3M+1,M-2} &= -1, x_{3M+1,M-1} = 4, x_{3M+1,M} = -3, x_{3M+1,3M+3} = -\left(2\tau^e / \varphi_6^0\right); \\
x_{3M+2,M} &= 2\tau^e m \mu, x_{3M+2,2M} = -\varphi_5^0, x_{3M+2,2M+1} = 4\varphi_5^0, x_{3M+2,2M+2} = 2\tau^e \mu - 3\varphi_5^0; \\
x_{3M+3,M-3} &= -2, x_{3M+3,M-2} = 8 + \tau^e, x_{3M+3,M-1} = -2(5 + 2\tau^e), x_{3M+3,M} = 4 + 3\tau^e + 2(\tau^e)^2 \left(\varphi_7^0 / \varphi_5^0\right), \\
x_{3M+3,2M} &= \tau^e m, x_{3M+3,2M+1} = -4\tau^e m, x_{3M+3,2M+2} = \tau^e m(3 - 2\tau^e).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Таким образом, в рамках конечно-разностной схемы, задача отказа монолитной крепи вертикальной горной выработки в трехмерном случае сведена к разрешимости матричного уравнения  $\|x_{ij}\| = 0$ , элементы которого имеют вид (3.25) - (3.30). При исследовании этого уравнения необходимо учитывать, что элементы соответствующего характеристического определителя для пористого тела, сжатый скелет которого обладает упруговязкопластическими свойствами,



будут зависеть как геометрических параметров крепи, внешних нагрузок и физико-механических характеристик материала, так и от произвольного комплексного числа  $\beta$ . Это приводит в определенным затруднениям вычислительного характера. Поэтому, при выполнении численного эксперимента будем полагать, что  $\beta = \hat{\beta}$  - действительное число. При этом случай, когда выполняется условие  $0 \leq \hat{\beta} < \infty$  будет соответствовать неограниченному росту компонент возмущенного состояния, то есть потере устойчивости. Выполнение условия  $-\infty < \hat{\beta} < 0$ , соответствует случаю затухания амплитудных величин возмущений во времени.

Результаты вычислительного эксперимента представлены на рисунках 3.1 - 3.2. На рисунке 3.1 показана зависимость критической величины внутреннего давления интенсивностью  $q_a$  от внешней нагрузки интенсивностью  $q_b$ , моделирующей собой давление горного массива на крепь при различных значениях внутреннего радиуса  $a$  монолитной крепи. При этом кривая 1 соответствует  $a = 0.6$ , кривая 2 -  $a = 0.5$ , кривая 3 -  $a = 0.4$ . На рисунке 3.2 представлена зависимость критического давления интенсивностью  $q_a$  от внутреннего относительного радиуса  $a$  монолитной крепи величины при различных значениях внешнего давления (давление горного массива) интенсивностью  $q_b$ . При этом кривая 1 соответствует  $q_b = 0.03$ , кривая 2 -  $q_b = 0.02$ , кривая 3 -  $q_b = 0.01$ . На рисунках 3.1, 3.2 принималось  $c = 0.1$ .

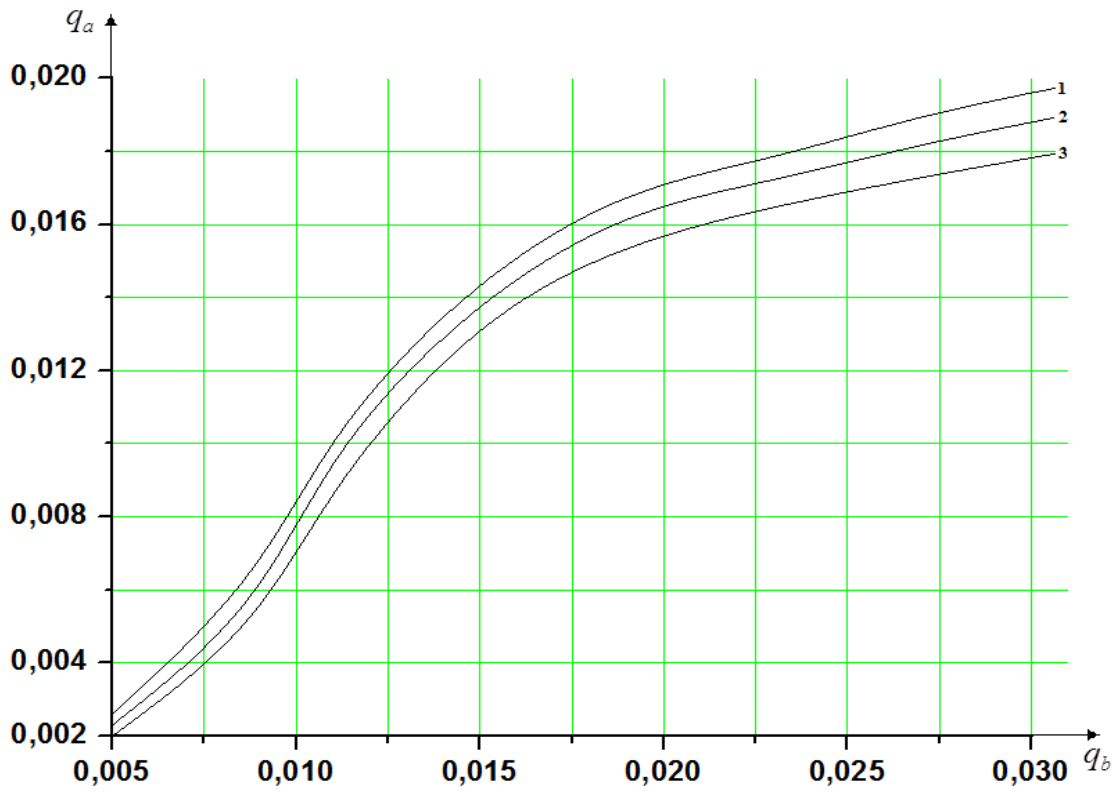


Рис. 3.1

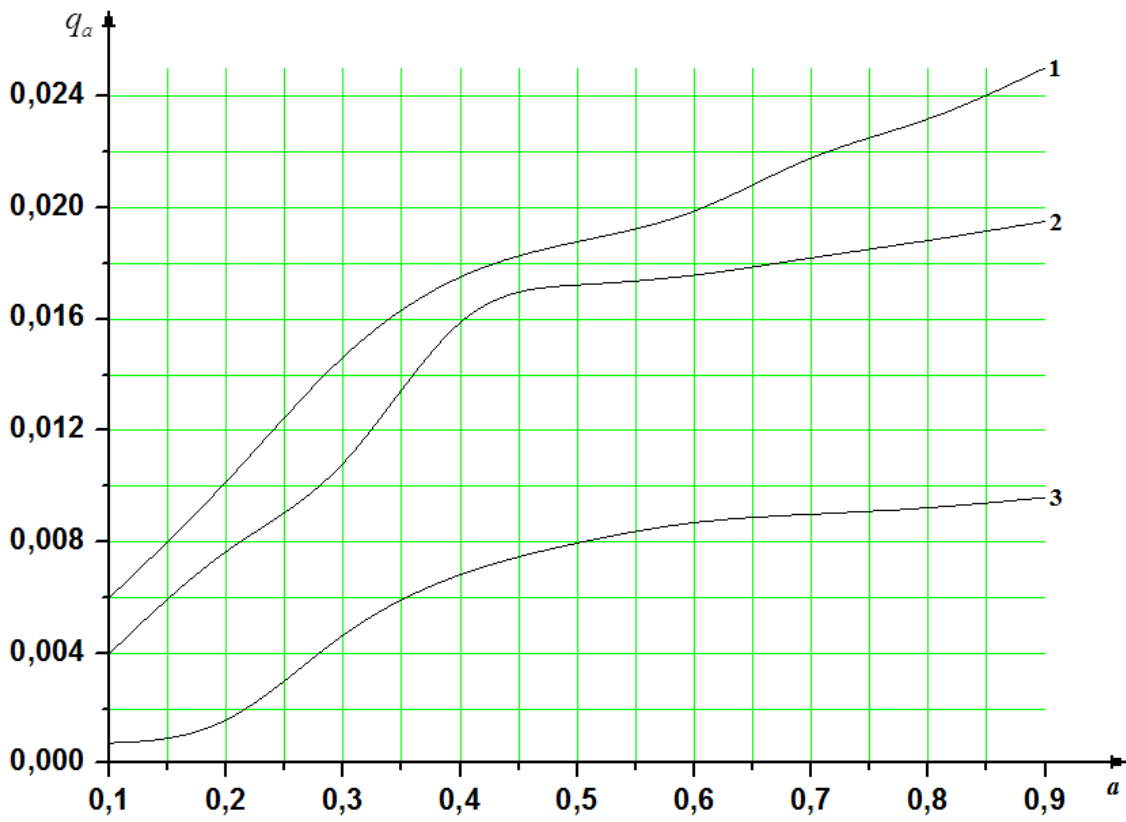


Рис. 3.2

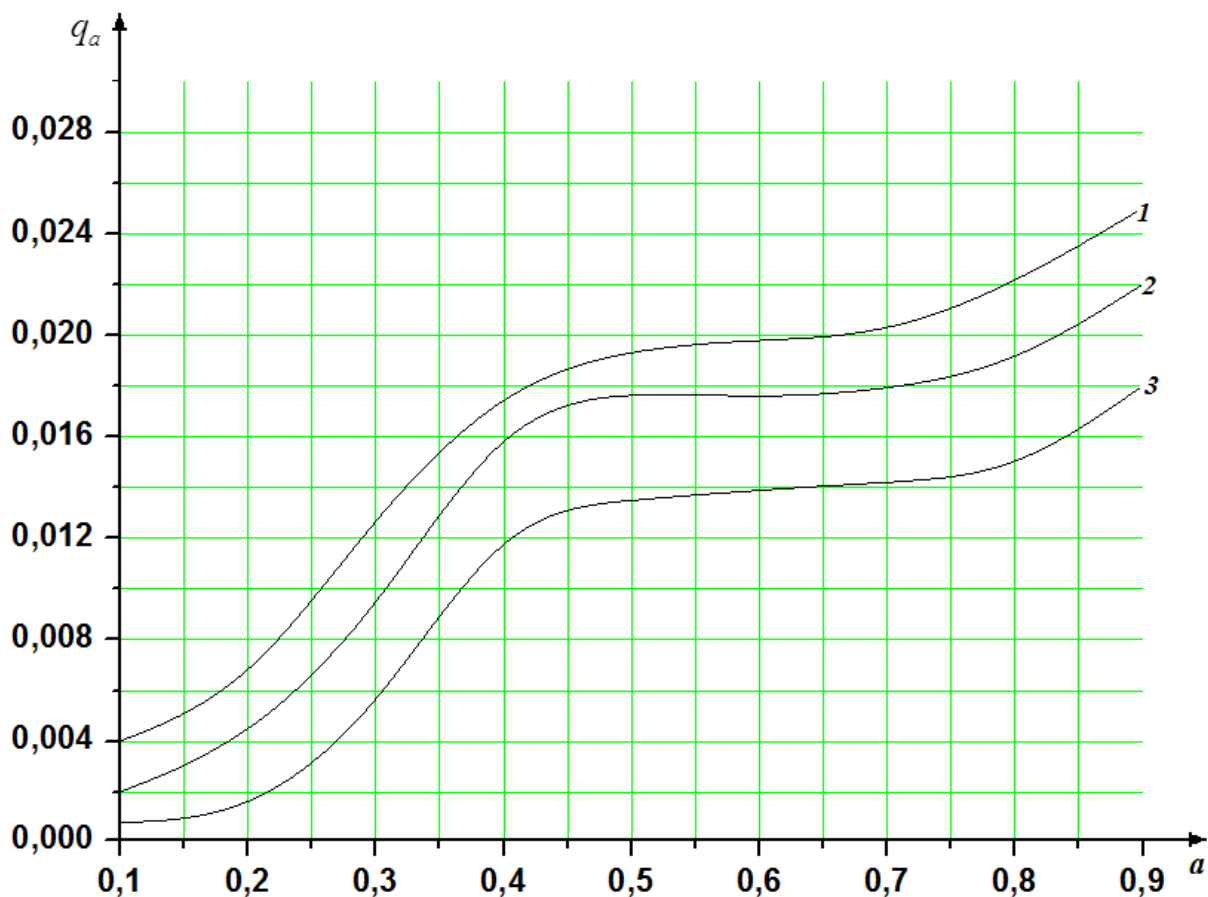


Рис. 3.3

На рисунке 3.3 представлена зависимость критического давления интенсивностью  $q_a$  от относительного внутреннего радиуса  $a$  монолитной крепи при различных значениях коэффициента упрочнения  $c$  материала крепи с полностью сжатой матрицей. При этом кривая 1 соответствует  $c = 0.01$ , кривая 2 -  $c = 0.04$ , кривая 3 -  $c = 0.08$ . Здесь принималось  $q_b = 0.03$ .

Всем расчетам, результаты которых отражены на рисунках 3.1 – 3.3 соответствуют значения параметров волнообразования  $m=n=3$ . Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, если не оговорено особо, брались следующими:  $k = 0.007$ ,  $\eta = 3.2 \cdot 10^{-4}$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 8 \cdot 10^{-4}$ .

Анализ численного расчета показал:

- потеря устойчивости монолитной крепи вертикальной горной выработки происходит по осесимметричной форме, которой соответствуют значения параметров волнообразования  $m=n=3$ ;
- область устойчивости монолитной крепи вертикальной горной выработки, существенно зависит как от физико-механических, так и геометрических параметров конструкции, при этом как при увеличении относительной толщины крепи, так и с ростом относительного коэффициента упрочнения  $c$  материала крепи с полностью сжатой матрицей область устойчивости расширяется (рис. 3.1, 3.3);
- с ростом давления горного массива интенсивностью  $q_b$  на внешнюю поверхность крепи значения внутреннего критического давления соответствующие потери устойчивости, увеличиваются (рис. 3.1, 3.2).

### 3.2. Моделирование отказа крепи вертикальной горной выработки со сжатой матрицей при неупругой работе конструкции

(случай осесимметричной формы потери устойчивости)

Различают следующие виды вертикальных горных выработок: шахтные стволы, восстающие и шурфы. Вертикальные стволы имеют продолжительный срок службы, зачастую одинаковый со сроком службы шахты. В связи с этим их крепь должна обладать высокой надежностью и быть экономичной. Капитальные шахтные стволы, имеющие длительный срок (более 20 лет) крепят монолитной бетонной, сборной железобетонной, набрызгбетонной или комбинированной крепью. Наибольшее распространение получила монолитная бетонная крепь.

Устойчивость вертикальных выработок с монолитными крепями в случаях, когда материал массива и крепи моделировался упругой или упруго-пластической средой, как отмечено во введении, изучалась многими авторами. При этом в частности, показано, что потеря устойчивости подкрепленной вертикальной выработки кругового поперечного сечения может происходить по осесимметричной форме.

В этом параграфе рассмотрим задачу об осесимметричной форме потери устойчивости монолитной крепи вертикального шахтного ствола. Постановка задачи аналогична постановке, данной в предыдущем параграфе. А именно: монолитная крепь вертикального шахтного ствола моделируется цилиндрическим телом с кольцевой формой поперечного сечения (рис. 2.1) внутренний радиус которого -  $a$ , внешний -  $b$ , находящимся под действием сжимающих нагрузок интенсивностями  $q_a$  и  $q_b$ . При этом нагрузка интенсивностью  $q_a$  равномерно распределенная по внутренней поверхности моделирует давление жидкости (газа или других технологических сооружений) на крепь, а нагрузка интенсивностью  $q_b$  равномерно распределенная по внешней поверхности тела, заменяет давление на крепь массива горных пород.

Величины  $q_b$  и  $q_a$  таковы, что материала крепи имеет полностью сжатую неупругую матрицу и образовавшаяся пластическая область полностью охватывает внутренний контур крепи. Ограничимся случаем, когда материал крепи с полностью сжатой матрицей моделируется упрочняющимся упругопластическим телом с функцией нагружения вида (1.13).

Неоднородное докритическое НДС монолитной крепи вертикального шахтного ствола описывается в зоне неупругих деформаций соотношениями (2.50), (2.55), (2.56), (2.23), (2.24), (2.53) а в области упругого деформирования – (2.50), (2.23), (2.24), (2.53), (2.54). Граница раздела упругой и пластической областей находится из уравнения (2.57).

Как отмечалось выше, в этом параграфе будем рассматривать осесимметричную форму потери устойчивости монолитной крепи вертикального шахтного ствола. Тогда компоненты перемещений есть функции лишь двух переменных, то есть  $u = u(r, z), v = 0, w = w(r, z)$  и, как следствие из (1.53) ненулевые компоненты напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= p + (2 - \nu^*) u_{,r} + \nu^* \cdot \frac{u}{r}, \quad \sigma_\theta = p + (2 - \nu^*) \frac{u}{r} + \nu^* \cdot u_{,r}, \\ \sigma_z &= p + 2w_{,z}, \quad \sigma_{rz} = u_{,z} + w_{,r}, \quad \nu^* = \frac{2\mu^2}{k^2(2\mu + c)}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где  $p$  – неопределенный множитель Лагранжа. При  $\nu^* = 0$  в (3.31) приходим к решению в упругой области.

Решение линеаризированной системы уравнений устойчивости (1.65), (1.67), (1.68), (1.57) при условии (3.31) для цилиндрических задач в случае осесимметричной формы потери устойчивости ( $\nu = 0$ ) выберем в виде [60]:

$$u = \sum_n A_n(r) \cos(nz), \quad w = \sum_n C_n(r) \sin(nz), \quad p = \sum_n D_n(r) \cos(nz). \quad (3.32)$$

Учитывая (3.31), (3.32) и (1.67) после исключения неизвестных  $C(r)$  и  $D(r)$  из уравнений равновесия (1.65) получим

$$\xi_1^0(r) A^{(IV)}(r) + \xi_2^0(r) A'''(r) + \xi_3^0(r) A''(r) + \xi_4^0(r) A'(r) + \xi_5^0(r) A(r) = 0, \quad (3.33)$$

где

$$\begin{aligned}\xi_1^0(r) &= 1 + \sigma_r^0, \quad \xi_2^0(r) = \frac{1}{r} \left( 2 + \sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 + r \sigma_{r,r}^0 \right), \quad \xi_3^0(r) = \frac{1}{r} \left( \sigma_{r,r}^0 + \sigma_{\theta,r}^0 \right) - \nu^* n^2 - \frac{3}{r^2} \left( 1 + 2\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 \right), \\ \xi_4^0(r) &= \frac{n^2}{r} \left( \sigma_\theta^0 - \nu^* \right) - \frac{1}{r^2} \left( 2\sigma_{r,r}^0 - \sigma_{\theta,r}^0 \right) + \frac{3}{r^3} \left( 1 + 2\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 \right), \\ \xi_5^0(r) &= -\frac{3}{r^4} \left( 1 + 2\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 \right) + \frac{1}{r^3} \left( 2\sigma_{r,r}^0 - \sigma_{\theta,r}^0 \right) + \frac{n^2}{r^2} \left( \nu^* - \sigma_\theta^0 \right) - n^4.\end{aligned}$$

Уравнение равновесия (3.33) будет справедливо для пластической области ( $a < r < \gamma$ ) деформирования крепи, если в нем всем переменным величинам приписать сверху индекс « $p$ » и для упругой ( $\gamma < r < 1$ ), если в этих соотношениях положить  $\nu^* = 0$  и всем переменным величинам приписать сверху индекс « $e$ ».

Граничные условия (1.68) с учетом (3.31), (3.32) и (1.67) после исключения неизвестных  $C(r)$  и  $D(r)$  примут вид

на внутренней поверхности крепи при  $r = a$

$$\begin{aligned}\varphi_1^0 A^{mp}(a) + \varphi_2^0 A^{np}(a) + \varphi_3^0 A^{p'}(r) + \varphi_4^0 A^p(a) &= 0, \\ A^{np}(a) + \varphi_5^0 A^{p'}(a) + \varphi_6^0 A^p(a) &= 0,\end{aligned}\tag{3.34}$$

на внешней поверхности крепи при  $r = 1$

$$\begin{aligned}\varphi_7^0 A^{me}(1) + \varphi_8^0 A^{ne}(1) + \varphi_9^0 A^{e'}(1) + \varphi_{10}^0 A^e(1) &= 0, \\ A^{ne}(1) + A^{e'}(1) + \varphi_{11}^0 A^e(r) &= 0.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Здесь в (3.34) и (3.35)

$$\begin{aligned}\varphi_1^0 &= a^3(1 - q_a), \quad \varphi_2^0 = a^2 \left( 2 - q_a + \sigma_\theta^p(a) \right), \quad \varphi_3^0 = - \left( a \left( 1 - 2q_a - \sigma_\theta^p(a) \right) + a^3 n^2 (\nu^* - 1 - q_a) \right), \\ \varphi_4^0 &= - \left( \left( \sigma_\theta^p(a) + 2q_a - 1 \right) + a^2 n^2 (1 + \nu^*) \right), \quad \varphi_5^0 = \frac{1}{a}, \quad \varphi_6^0 = \left( \frac{n^2}{1 - q_a} - \frac{1}{a^2} \right), \quad \varphi_7^0 = (1 - q_b), \\ \varphi_8^0 &= \left( 2 - q_b + \sigma_\theta^e(1) \right), \quad \varphi_9^0 = - \left( 1 - 2q_b - \sigma_\theta^e(1) - n^2 (1 + q_b) \right), \\ \varphi_{10}^0 &= - \left( \sigma_\theta^e(1) + 2q_b - 1 + n^2 \right), \quad \varphi_{11}^0 = \left( \frac{n^2}{1 - q_b} - 1 \right).\end{aligned}$$

Из условий сопряжения (1.57) на упругопластической границе  $\gamma$  с учетом (3.31), (3.32) и (1.67) получим

$$[A]=0, [A']=0, [A'']=0, A'^p - \frac{1}{\gamma} A^p = 0. \quad (3.36)$$

Таким образом, получена замкнутая краевая задача (3.33) – (3.36), для исследования осесимметричной формы потери устойчивости монолитной крепи вертикального шахтного ствола, когда имеется зона раздела упругого и пластического деформирования материала крепи с полностью сжатой матрицей. Коэффициенты уравнений полученной системы зависят от безразмерных характеристик материала  $\varepsilon_0, c, k, \mu$ , безразмерных геометрических параметров  $a, \gamma$ , интенсивности нагрузок  $q_a$  и  $q_b$ , равномерно распределенных по внутреннему и внешнему контурам крепи и параметра волнообразования  $n$ .

Для решения задачи, как и ранее, будем использовать конечно-разностный метод. Обозначим через  $M^p$  и  $M^e$  - количество точек разбиения в областях пластического и упругого деформирования материала крепи соответственно. Шаг разностной сетки в каждой из зон  $V^p$  и  $V^e$  будем определять по формулам (3.19).

Заменяя производные функции  $A(r)$  в (3.33) для пластической области -  $V^p$  в точках  $j=2, 3, 4, \dots, M^p-1$  и для упругой области -  $V^e$  в точках  $j=M^p+3, M^p+4, \dots, M^p+M^e$  через конечные разности (1.99), получим

$$\begin{aligned} & \left( 2\xi_1^0 - \tau \xi_2^0 \right) A_{j-2} + \left( 2\tau \xi_2^0 - 8\xi_1^0 + 2\tau^2 \xi_3^0 - \tau^3 \xi_4^0 \right) A_{j-1} + 2 \left( 6\xi_1^0 - 2\tau^2 \xi_3^0 + \tau^4 \xi_5^0 \right) A_j + \\ & + \left( 2\tau^2 \xi_3^0 - 8\xi_1^0 - 2\tau \xi_2^0 + \tau^3 \xi_4^0 \right) A_{j+1} + \left( 2\xi_1^0 + \tau \xi_2^0 \right) A_{j+2} = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Здесь и далее в этом параграфе  $\xi_i^0 = \xi_i^0(r)$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ ) - коэффициенты в уравнениях равновесия (3.33).

Граничные условия (3.34) на внутренней поверхности с учетом конечных разностей (1.101) (верхние знаки) принимают вид

$$\begin{aligned} & \left( -5\varphi_1^0 + 4\tau^p \varphi_2^0 - 3(\tau^p)^2 \varphi_3^0 + 2(\tau^p)^3 \varphi_4^0 \right) A_0^p + 2 \left( 9\varphi_1^0 - 5\tau^p \varphi_2^0 + 2(\tau^p)^2 \varphi_3^0 \right) A_1^p + \\ & + \left( 8\tau^p \varphi_2^0 - 24\varphi_1^0 - (\tau^p)^2 \varphi_3^0 \right) A_2^p + 2 \left( 7\varphi_1^0 - \tau^p \varphi_2^0 \right) A_3^p - 3\varphi_1^0 A_4^p = 0, \end{aligned}$$



$$\left(4 - 3\tau^p \varphi_5^0 + 2(\tau^p)^2 \varphi_6^0\right) A_0^p + \left(4\tau^p \varphi_5^0 - 10\right) A_1^p + \left(8 - \tau^p \varphi_5^0\right) A_2^p - 2A_3^p = 0. \quad (3.38)$$

На внешней поверхности условия (3.35) согласно тому, что производные в них будем аппроксимировать схемами (1.101) (нижние знаки), переписутся в форме

$$\begin{aligned} & 3\varphi_7^0 A_{M-4}^e - 2\left(7\varphi_7^0 + \tau^e \varphi_8^0\right) A_{M-3}^e + \left(24\varphi_7^0 + 8\tau^e \varphi_8^0 + (\tau^e)^2 \varphi_9^0\right) A_{M-2}^e - \\ & - 2\left(9\varphi_7^0 + 5\tau^e \varphi_8^0 + 2(\tau^e)^2 \varphi_9^0\right) A_{M-1}^e + \left(5\varphi_7^0 + 4\tau^e \varphi_8^0 + 3(\tau^e)^2 \varphi_9^0 + 2(\tau^e)^3 \varphi_{10}^0\right) A_M^e = 0, \\ & - 2A_{M-3}^e + (8 + \tau^e) A_{M-2}^e - 2(5 + 2\tau^e) A_{M-1}^e + \left(4 + 3\tau^e + 2(\tau^e)^2 \varphi_{11}^0\right) A_M^e = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Условия сопряжения (3.36) при  $r = \gamma$  переписутся в форме

$$\begin{aligned} & \tau^e A_{j-2}^p - 4\tau^e A_{j-1}^p + 3(\tau^p + \tau^e) A_j^p - 4\tau^p A_{j+1}^e + \tau^p A_{j+2}^e = 0, \\ & (\tau^e)^2 \left(A_{j-3}^p - 4A_{j-2}^p + 5A_{j-1}^p\right) + 2\left((\tau^p)^2 - (\tau^e)^2\right) A_j^p + (\tau^p)^2 \left(-5A_{j+1}^e + 4A_{j+2}^e - A_{j+3}^e\right) = 0, \\ & \gamma A_{j-2}^p - 4\gamma A_{j-1}^p + (3\gamma - 2\tau^p) A_j^p = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Здесь в (3.40)  $j = M^p + 1$ .

Система уравнений (3.37) – (3.40) представляет собой бесконечную систему однородных алгебраических уравнений линейных относительно величин  $A_0^p, A_1^p, A_2^p, \dots, A_{M^p}^p, A_{M^p+1}^p, A_{M^p+2}^e, \dots, A_{M^p+M^e}^e, A_{M^p+M^e+1}^e, A_{M^p+M^e+2}^e$ . Следовательно, как и в предыдущем параграфе, исследование вопроса об осесимметричной форме потери устойчивости монолитной крепи вертикального шахтного ствола сведено к определению величины критического давления  $q_a$  при условии обращения в ноль определителя конечно-разностной системы уравнений (3.37) – (3.40).

Ненулевые элементы определителя  $\|x_{ij}\|$  следующие:

$$\begin{aligned} x_{11} &= -5\varphi_1^0 + 4\tau \varphi_2^0 - 3\tau^2 \varphi_3^0 + 2\tau^3 \varphi_4^0, \quad x_{12} = 2\left(9\varphi_1^0 - 5\tau \varphi_2^0 + 2\tau^2 \varphi_3^0\right), \\ x_{13} &= 8\tau \varphi_2^0 - 24\varphi_1^0 - \tau^2 \varphi_3^0, \quad x_{14} = 2\left(7\varphi_1^0 - \tau \varphi_2^0\right), \quad x_{15} = -3\varphi_1^0; \\ x_{21} &= 4 - 3\tau \varphi_5^0 + 2\tau^2 \varphi_6^0, \quad x_{22} = 4\tau \varphi_5^0 - 10, \quad x_{23} = 8 - \tau \varphi_5^0, \quad x_{24} = -2, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где  $\tau = \tau^p$ . Вышеприведенные элементы записаны в точке  $r = a$  и соответствуют условиям (3.38).

$$\begin{aligned} x_{i,j-2} &= 2\xi_1^0 - \tau \xi_2^0, \quad x_{i,j-1} = 2\tau \xi_2^0 - 8\xi_1^0 + 2\tau^2 \xi_3^0 - \tau^3 \xi_4^0, \\ x_{ij} &= 2\left(6\xi_1^0 - 2\tau^2 \xi_3^0 + \tau^4 \xi_5^0\right), \quad x_{i,j+1} = 2\tau^2 \xi_3^0 - 8\xi_1^0 - 2\tau \xi_2^0 + \tau^3 \xi_4^0, \quad x_{i,j+2} = 2\xi_1^0 + \tau \xi_2^0; \end{aligned} \quad (3.42)$$

Здесь в (3.42)  $j = 3, 4, 5, \dots, M^p, M^p + 4, M^p + 5, \dots, M^p + M^e + 1, i = j$ . При этом, если  $j = 3, 4, 5, \dots, M^p$ , то в (3.42) следует принять  $\xi_n^0 = \xi_n^p(r)$ ,  $r = a + (j-1) \cdot \tau^p$ ,  $\tau = \tau^p$ , если же  $j = M^p + 4, M^p + 5, \dots, M^p + M^e + 1$ , то в (3.42) следует принять  $\xi_n^0 = \xi_n^e(r)$ ,  $r = \gamma + (j-1) \cdot \tau^e$ ,  $\tau = \tau^e$ . Элементы (3.42) выписывались согласно уравнениям (3.37).

$$\begin{aligned} x_{i,j-2} &= \tau^e, \quad x_{i,j-1} = -4\tau^e, \quad x_{ij} = 3(\tau^p + \tau^e), \quad x_{i,j+1} = -4\tau^p, \quad x_{i,j+2} = \tau^p; \\ x_{i+1,j-3} &= (\tau^e)^2, \quad x_{i+1,j-2} = -4(\tau^e)^2, \quad x_{i+1,j-1} = 5(\tau^e)^2, \quad x_{i+1,j} = 2\left((\tau^p)^2 - (\tau^e)^2\right), \\ x_{i+1,j+1} &= -5(\tau^p)^2, \quad x_{i+1,j+2} = 4(\tau^p)^2, \quad x_{i+1,j+3} = -(\tau^p)^2; \\ x_{i+2,j-2} &= \gamma, \quad x_{i+2,j-1} = -4\gamma, \quad x_{i+2,j} = 3\gamma - 2\tau^p. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Здесь в (3.43)  $j = M^p + 1, i = j + 1$ . Элементы (3.43) выписывались согласно уравнениям (3.40) и соответствуют точке  $r = \gamma$ .

Оставшиеся элементы соответствуют значению  $r = 1, \tau = \tau^e$  и выписываются согласно условиям (3.39) в виде

$$\begin{aligned} x_{M-1,M-4} &= 3\varphi_7^0, \quad x_{M-1,M-3} = -2\left(7\varphi_7^0 + \tau \varphi_8^0\right), \quad x_{M-1,M-2} = 24\varphi_7^0 + 8\tau \varphi_8^0 + \tau^2 \varphi_9^0, \\ x_{M-1,M-1} &= -2\left(9\varphi_7^0 + 5\tau \varphi_8^0 + 2\tau^2 \varphi_9^0\right), \quad x_{M-1,M} = 5\varphi_7^0 + 4\tau \varphi_8^0 + 3\tau^2 \varphi_9^0 + 2\tau^3 \varphi_{10}^0, \\ x_{M,M-3} &= -2, \quad x_{M,M-2} = 8 + \tau, \quad x_{M,M-1} = -2(5 + 2\tau), \quad x_{M,M} = 4 + 3\tau + 2\tau^2 \varphi_{11}^0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Таким образом, в рамках конечно-разностной схемы, задача об осесимметричной форме потери устойчивости монолитной крепи вертикального шахтного ствола сведена к разрешимости матричного уравнения  $\|x_{ij}\| = 0$  с элементами отличными от нуля, приведенными выше. При этом при вычислении определителя  $\|x_{ij}\|$ , наряду с основным НДС для каждой из областей  $V^p$  и  $V^e$

(2.50), (2.55), (2.56), (2.23), (2.24), (2.53), (2.54) необходимо также учитывать уравнение (2.57), определяющее положение границы  $\gamma$  раздела зон упругого и пластического. Минимизация должна проводиться по параметру волнообразования  $n$ , параметрам материала и конструкции  $\lambda_j$ .

Следовательно, получаем задачу многомерной оптимизации величины  $q_a$  в зависимости от  $n$  при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы:  $\det(q_i, n, \lambda_j) = 0$ .

Результаты численного эксперимента представлены на рисунках 3.4 – 3.6. На рисунке 3.4 показана зависимость критической величины внутреннего давления интенсивностью  $q_a$  от внешней нагрузки интенсивности  $q_b$ , моделирующей собой давление горного массива на крепь при различных значениях относительного внутреннего радиуса  $a$  монолитной крепи. При этом кривая 1 соответствует  $a = 0.6$ , кривая 2 -  $a = 0.5$ , кривая 3 -  $a = 0.4$ . На рисунках 3.5, 3.6 представлены зависимости критического давления интенсивностью  $q_a$  от толщины крепи  $b - a$  монолитной крепи при различных значениях давление горного массива и предела текучести материала крепи. При этом на рисунке 3.5 кривая 1 соответствует  $q_b = 0.03$ , кривая 2 -  $q_b = 0.02$ , кривая 3 -  $q_b = 0.01$ . На рисунке 3.6 кривая 1 соответствует  $k = 0.003$ , кривая 2 -  $k = 0.007$ , кривая 3 -  $k = 0.009$ . На рисунках 3.4, 3.5 принималось  $k = 0.002$ .

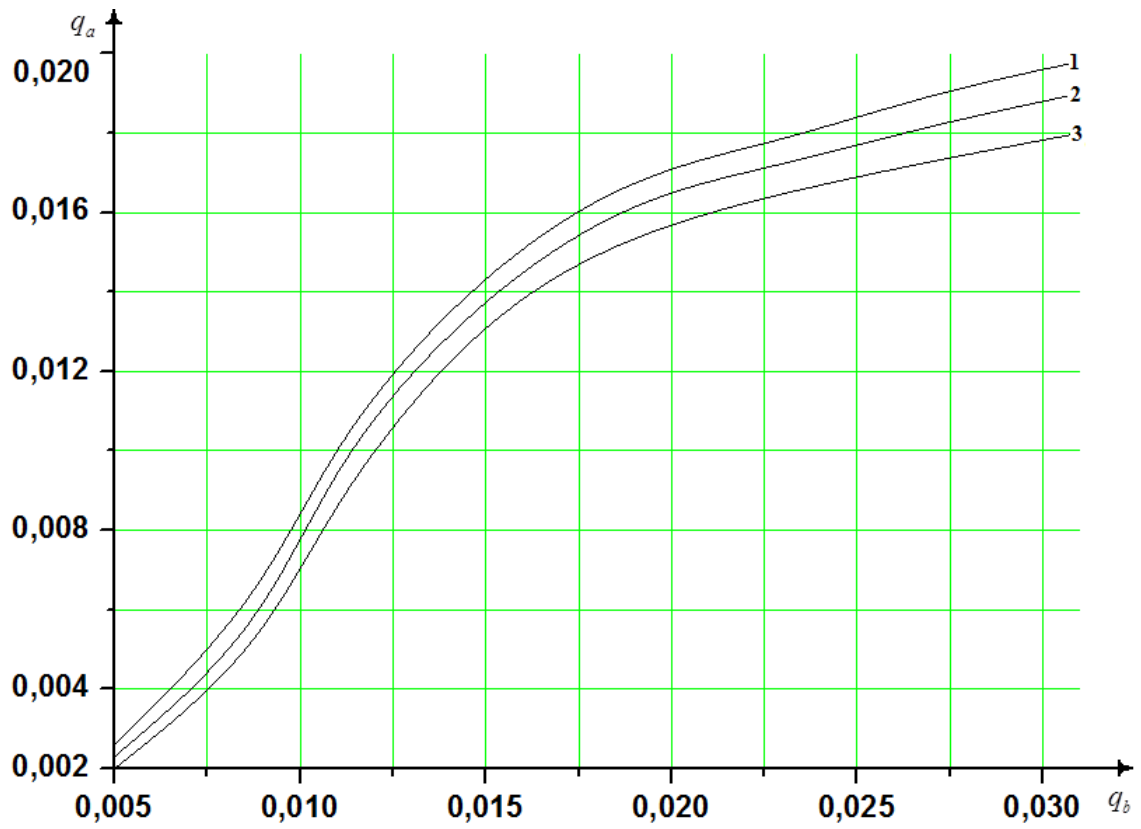


Рис. 3.4

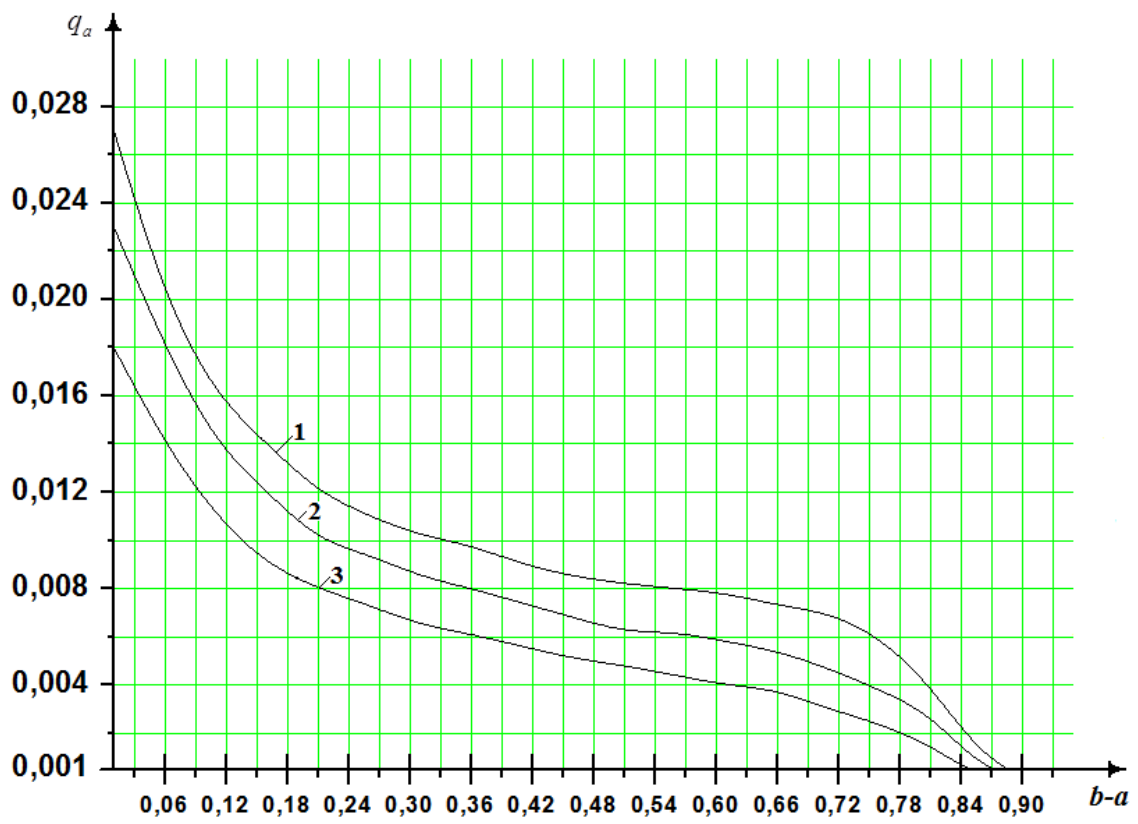


Рис. 3.5

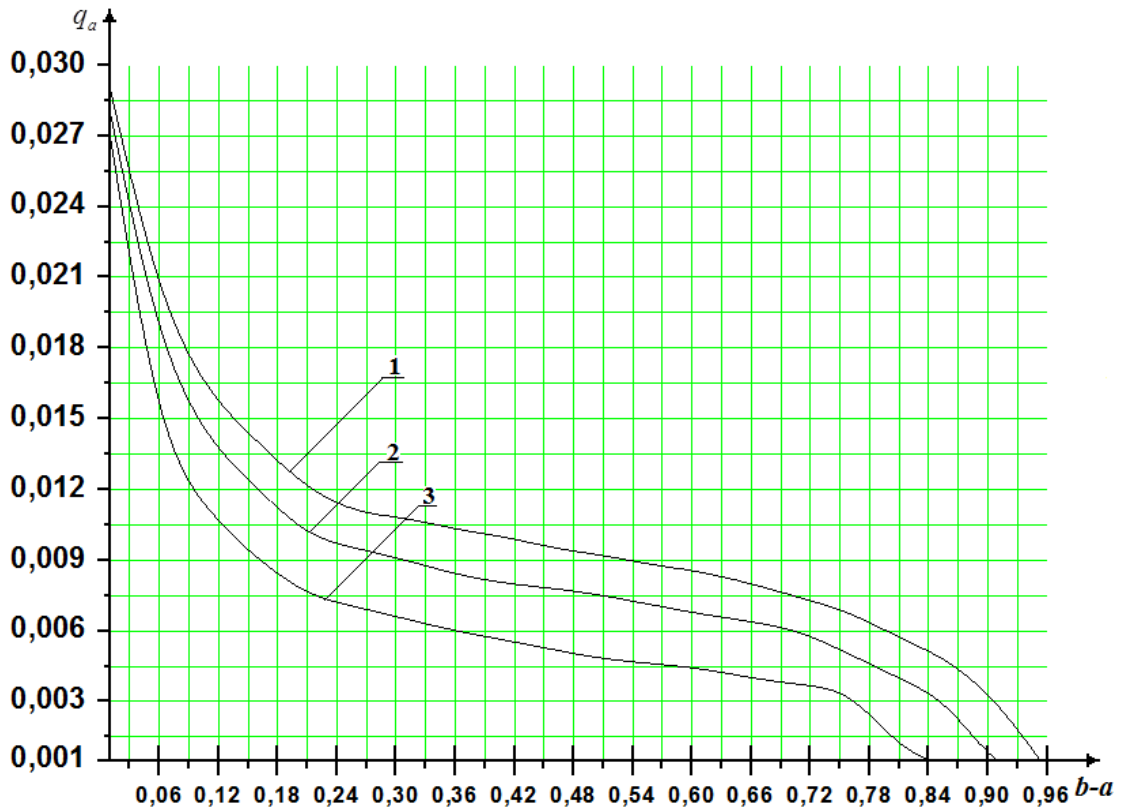


Рис. 3.6

Всем расчетам, результаты которых отражены на рисунках 3.4 – 3.6 соответствует значение параметра волнообразования  $n=3$ . Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, если не оговорено особо, брались следующими:  $c = 0.09$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 8 \cdot 10^{-4}$ .

Анализ численного расчета показал:

- осесимметричная форма потери устойчивости монолитной крепи вертикальной горной выработки для материала с полностью сжатой матрицей происходит при значении параметра волнообразования  $n=3$ ;
- с ростом давления горного массива на крепь критическое значение внутреннего давления возрастает (рис. 3.4, рис. 3.5);
- при увеличении величины относительного внутреннего радиуса  $a$  крепи область устойчивости уменьшается (рис. 3.4)
- величина критического значения давления, равномерно распределенного по внутренней поверхности крепи существенно зависит как от глубины заложения выработки (рис. 3.4, 3.5) так и от предела текучести материала крепи (рис. 3.6),

при этом с ростом внешнего давления критическое значение внутреннего давления также увеличивается, а при увеличении относительной  $b-a$  толщины крепи критическая величина внутреннего давления, соответствующая отказу крепи, падает.

### **3.3. Моделирование отказа монолитной крепи подземной сферической полости с учетом начальной пористости материала и упругопластических свойств полностью сжатого скелета**

При создании подземных гидротехнических и специальных сооружений, нефте- и газохранилищ на практике часто используются подземные полости сферической формы. Возведение крепей указанных конструкций является одним из основных производственных процессов, без которого невозможна их эксплуатация. В связи с этим решение вопроса о пространственной форме потери устойчивости (отказе) крепей подземные сферических полостей является в настоящее время актуальной задачей механики горных пород.

В данном параграфе рассматривается вопрос об отказе монолитной крепи подземной сферической полости, которая моделируется толстостенным сферическим телом с внешним радиусом  $b$  и внутренним -  $a$ , находящимся под действием сжимающих нагрузок интенсивностями  $q_b$  и  $q_a$  (рис. 2.15). При этом равномерно распределенная по внутренней поверхности нагрузка интенсивностью  $q_a$  заменяет собой давление жидкости (газа или других технологических сооружений) на крепь, а нагрузка интенсивностью  $q_b$  равномерно распределенная по внешней поверхности крепи моделирует давление горного массива.

Величины  $q_b$  и  $q_a$  таковы, что материала крепи имеет полностью сжатую неупругую матрицу и образовавшаяся пластическая область полностью охватывает внутренний контур крепи. Так же, как и в предыдущем параграфе ограничимся случаем, когда материал крепи с полностью сжатой матрицей моделируется упрочняющимся упругопластическим телом с функцией нагружения вида (1.13).

В этом случае основное неоднородное НДС сферической крепи с полностью сжатой матрицей описывается в зоне пластического деформирования соотношениями (2.134), (2.108), (2.109), (2.137), (2.139), (2.140) а в области упругого деформирования – (2.134), (2.108), (2.109), (2.137), (2.138). Граница раздела упругой и пластической областей находится из уравнения (2.141).

Исследование устойчивости монолитной крепи подземной сферической полости сводится к решению задачи (1.96) – (1.98), которая состоит из уравнений равновесия, граничных условий на внутренней и внешней поверхностях крепи и условий непрерывности компонент векторов поверхностных сил и перемещений. Для удобства дальнейших выкладок перепишем краевую задачу (1.96) – (1.98) в следующей форме:

уравнение равновесия

$$\xi_1^0(r)A^{(IV)}(r) + \xi_2^0(r)A'''(r) + \xi_3^0(r)A''(r) + \xi_4^0(r)A'(r) + \xi_5^0(r)A(r) = 0, \quad (3.45)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1^0(r) &= r^2 \left( \mu + \sigma_r^0 \right), \quad \xi_2^0(r) = r \left( 2 \left( 4\mu + 3\sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 \right) + r \sigma_{r,r}^0 \right), \\ \xi_3^0(r) &= 4 \left( 3\mu + \sigma_r^0 + 2\sigma_\theta^0 \right) + 2r \left( 2\sigma_{r,r}^0 + \sigma_{\theta,r}^0 \right) - (j^2 + j) \left( 4\mu - 3\nu^* k^2 + \sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 - 2\mu \right), \\ \xi_4^0(r) &= \frac{1}{r} \left( 6r \sigma_{\theta,r}^0 - (j^2 + j) \left( 2 \left( 2\mu - 3\nu^* k^2 + 2\sigma_\theta^0 \right) + r \sigma_{\theta,r}^0 \right) \right), \quad \xi_5^0(r) = \frac{1}{r^2} (j^2 + j) (j^2 + j - 2) \left( \mu + \sigma_\theta^0 \right), \end{aligned}$$

при этом уравнение (3.45) будет справедливо для пластической области ( $a < r < \gamma$ )

деформирования крепи, если в нем положить  $\nu^* = \frac{2\mu^2}{k^2(2\mu+c)}$  и всем переменным

величинам приписать сверху индекс « $p$ » и для упругой ( $\gamma < r < 1$ ), если в (3.45)

положить  $\nu^* = 0$  и всем переменным величинам приписать сверху индекс « $e$ »;

граничные условия на внутренней поверхности крепи при  $r = a$

$$\varphi_1^0 A'''^p(a) + \varphi_2^0 A''^p(a) + \varphi_3^0 A'^p(a) = 0, \quad \varphi_4^0 A'''^p(a) + \varphi_5^0 A''^p(a) + \varphi_6^0 A'^p(a) = 0, \quad (3.46)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_1^0 &= \varphi_4^0 = a^2(\mu - q_a), \quad \varphi_2^0 = 2a \left( 3\mu - 2q_a + \sigma_\theta^p(a) \right), \\ \varphi_3^0 &= 6 \left( \mu + \sigma_\theta^p(a) \right) + (j^2 + j) \left( -3\mu + 3\nu^* k^2 + q_a - \sigma_\theta^p(a) \right), \\ \varphi_5^0 &= a(2\mu - 3q_a), \quad \varphi_6^0 = \mu(j^2 + j - 2), \quad \nu^* = \frac{2\mu^2}{k^2(2\mu + c)};\end{aligned}$$

граничные условия на внутренней поверхности крепи при  $r = 1$

$$\varphi_7^0 A'''^e(1) + \varphi_8^0 A''^e(1) + \varphi_9^0 A'^e(1) = 0, \quad \varphi_{10}^0 A''^e(1) + \varphi_{11}^0 A'^e(1) + \varphi_{12}^0 A^e(1) = 0, \quad (3.47)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_7^0 &= \varphi_{10}^0 = \mu - q_b, \quad \varphi_8^0 = 2 \left( 3\mu - 2q_b + \sigma_\theta^e(1) \right), \\ \varphi_9^0 &= 6 \left( \mu + \sigma_\theta^e(1) \right) + (j^2 + j) \left( q_b - 3\mu - \sigma_\theta^e(1) \right), \\ \varphi_{11}^0 &= 2\mu - 3q_b, \quad \varphi_{12}^0 = \varphi_6^0;\end{aligned}$$

условия непрерывности на границе  $r = \gamma$  раздела зон упругого и пластического деформирования

$$\phi_1^0 [A'''] + \left[ \phi_2^0 \cdot A'' \right] + \left[ \phi_3^0 \cdot A' \right] = 0, \quad [A''] = 0, \quad [A'] = 0, \quad [A] = 0, \quad (3.48)$$

здесь

$$\begin{aligned}\phi_1^0 &= \gamma^2 \left( \mu + \sigma_r^p(\gamma) \right), \quad \phi_2^0 = 2\gamma \left( 3\mu + 2\sigma_r^p(\gamma) + \sigma_\theta^p(\gamma) \right), \\ \phi_3^0 &= 6 \left( \mu + \sigma_\theta^p(\gamma) \right) + (j^2 + j) \left( -3\mu + 3\nu^* k^2 - \sigma_r^p(\gamma) - \sigma_\theta^p(\gamma) \right),\end{aligned}$$

при этом в формулах для  $\phi_2^0$  и  $\phi_3^0$  в пластической области величинам  $\sigma_r^p(\gamma)$  и  $\sigma_\theta^p(\gamma)$  нужно сверху дописать индекс « $p$ », а в упругой области нужно положить  $\nu^* = 0$  и величинам  $\sigma_r^e(\gamma)$  и  $\sigma_\theta^e(\gamma)$  сверху дописать индекс « $e$ ».



Как и в предыдущих задачах этой главы, в случае сферической задачи также будем пользоваться конечно-разностной схемой. Оставим обозначения принятые в предыдущем параграфе. А именно, обозначим через  $M^p$  и  $M^e$  - количество точек разбиения в областях пластического и упругого деформирования материала крепи соответственно. Шаг разностной сетки в каждой из зон  $V^p$  и  $V^e$  будем определять по формулам (3.19).

Заменяя производные функции  $A(r)$  в (3.45) для пластической области -  $V^p$  в точках  $j=2, 3, 4, \dots, M^p-1$  и для упругой области -  $V^e$  в точках  $j=M^p+3, M^p+4, \dots, M^p+M^e$  через конечные разности (1.99), получим

$$\begin{aligned} & \left(2\xi_1^0 - \tau\xi_2^0\right)A_{j-2} + \left(2\tau\xi_2^0 - 8\xi_1^0 + 2\tau^2\xi_3^0 - \tau^3\xi_4^0\right)A_{j-1} + 2\left(6\xi_1^0 - 2\tau^2\xi_3^0 + \tau^4\xi_5^0\right)A_j + \\ & + \left(2\tau^2\xi_3^0 - 8\xi_1^0 - 2\tau\xi_2^0 + \tau^3\xi_4^0\right)A_{j+1} + \left(2\xi_1^0 + \tau\xi_2^0\right)A_{j+2} = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Здесь и далее в этом параграфе  $\xi_i^0 = \xi_i^0(r)$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ ) - коэффициенты в уравнениях равновесия (3.45).

Граничные условия (3.46) на внутренней поверхности с учетом конечных разностей (1.101) (верхние знаки) принимают вид

$$\begin{aligned} & \left(-5\varphi_1^0 + 4\tau^p\varphi_2^0 - 3(\tau^p)^2\varphi_3^0\right)A_0^p + 2\left(9\varphi_1^0 - 5\tau^p\varphi_2^0 + 2(\tau^p)^2\varphi_3^0\right)A_1^p + \\ & + \left(8\tau^p\varphi_2^0 - 24\varphi_1^0 - (\tau^p)^2\varphi_3^0\right)A_2^p + 2\left(7\varphi_1^0 - \tau^p\varphi_2^0\right)A_3^p - 3\varphi_1^0A_4^p = 0, \quad (3.50) \\ & \left(4\varphi_4^0 - 3\tau^p\varphi_5^0 + 2(\tau^p)^2\varphi_6^0\right)A_0^p + 2\left(2\tau^p\varphi_5^0 - 5\varphi_4^0\right)A_1^p + \left(8\varphi_4^0 - \tau^p\varphi_5^0\right)A_2^p - 2\varphi_4^0A_3^p = 0. \end{aligned}$$

На внешней поверхности условия (3.47) согласно тому, что производные в них будем аппроксимировать схемами (1.101) (нижние знаки), перепишутся в форме

$$\begin{aligned} & 3\varphi_7^0A_{M-4}^e - 2\left(7\varphi_7^0 + \tau^e\varphi_8^0\right)A_{M-3}^e + \left(24\varphi_7^0 + 8\tau^e\varphi_8^0 + (\tau^e)^2\varphi_9^0\right)A_{M-2}^e - \\ & - 2\left(9\varphi_7^0 + 5\tau^e\varphi_8^0 + 2(\tau^e)^2\varphi_9^0\right)A_{M-1}^e + \left(5\varphi_7^0 + 4\tau^e\varphi_8^0 + 3(\tau^e)^2\varphi_9^0\right)A_M^e = 0, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$-2\varphi_{10}^0 A_{M-3}^e + \left(8\varphi_{10}^0 + \tau^e \varphi_{11}^0\right) A_{M-2}^e - 2\left(5\varphi_{10}^0 + 2\tau^e \varphi_{11}^0\right) A_{M-1}^e + \left(4\varphi_{10}^0 + 3\tau^e \varphi_{11}^0 + 2(\tau^e)^2 \varphi_{12}^0\right) A_M^e = 0.$$

Условия сопряжения (3.48) при  $r = \gamma$  переписутся в форме

$$\begin{aligned} & -3\varphi_1^0 (\tau^e)^3 A_{j-4}^p + 2(\tau^e)^3 \left(7\varphi_1^0 + \tau^p \varphi_2^0\right) A_{j-3}^p - (\tau^e)^3 \left(24\varphi_1^0 + 8\tau^p \varphi_2^0 + (\tau^p)^2 \varphi_3^0\right) A_{j-2}^p + \\ & \quad + 2(\tau^e)^3 \left(9\varphi_1^0 + 5\tau^p \varphi_2^0 + 2(\tau^p)^2 \varphi_3^0\right) A_{j-1}^p + \\ & \quad + \left(-5\varphi_1^0 \left((\tau^p)^3 + (\tau^e)^3\right) + 4\tau^e \tau^p \left((\tau^p)^2 \varphi_2^e - (\tau^e)^2 \varphi_2^p\right) - 3(\tau^e \tau^p)^2 \left(\tau^p \varphi_3^e + \tau^e \varphi_3^p\right)\right) A_j^p + \\ & \quad + 2(\tau^p)^3 \left(9\varphi_1^0 - 5\tau^e \varphi_2^e + 2(\tau^e)^2 \varphi_3^e\right) A_{j+1}^e + (\tau^p)^3 \left(8\tau^e \varphi_2^e - 24\varphi_1^0 - (\tau^e)^2 \varphi_3^e\right) A_{j+2}^e + \\ & \quad + 2(\tau^p)^3 \left(7\varphi_1^0 - \tau^e \varphi_2^e\right) A_{j+3}^e - 3\varphi_1^0 (\tau^p)^3 A_{j+4}^e = 0, \\ (\tau^e)^2 A_{j-3}^p - 4(\tau^e)^2 A_{j-2}^p + 5(\tau^e)^2 A_{j-1}^p + 2\left((\tau^p)^2 - (\tau^e)^2\right) A_j^p - 5(\tau^p)^2 A_{j+1}^e + 4(\tau^p)^2 A_{j+2}^e - (\tau^p)^2 A_{j+3}^e = 0 \\ \tau^e A_{j-2}^p - 4\tau^e A_{j-1}^p + 3(\tau^p + \tau^e) A_j^p - 4\tau^p A_{j+1}^e + \tau^p A_{j+2}^e = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Здесь в (3.52)  $j = M^p + 1$ .

Система уравнений (3.49) – (3.52) представляет собой бесконечную систему однородных алгебраических уравнений линейных относительно величин  $A_0^p, A_1^p, A_2^p, \dots, A_{M^p}^p, A_{M^p+1}^p, A_{M^p+2}^e, \dots, A_{M^p+M^e}^e, A_{M^p+M^e+1}^e, A_{M^p+M^e+2}^e$ . Следовательно, как и в предыдущих параграфах исследование вопроса о пространственной форме потери устойчивости монолитной крепи подземной сферической полости сведено к определению критической величины внутренней нагрузки интенсивностью  $q_a$  при условии обращения в ноль определителя конечно-разностной системы уравнений (3.49) – (3.52).

Ненулевые элементы определителя  $\|x_{ij}\|$  следующие:

$$\begin{aligned} x_{11} &= -5\varphi_1^0 + 4\tau \varphi_2^0 - 3\tau^2 \varphi_3^0, \quad x_{12} = 2\left(9\varphi_1^0 - 5\tau \varphi_2^0 + 2\tau^2 \varphi_3^0\right), \\ x_{13} &= 8\tau \varphi_2^0 - 24\varphi_1^0 - \tau^2 \varphi_3^0, \quad x_{14} = 2\left(7\varphi_1^0 - \tau \varphi_2^0\right), \quad x_{15} = -3\varphi_1^0; \\ x_{21} &= 4\varphi_4^0 - 3\tau \varphi_5^0 + 2\tau^2 \varphi_6^0, \quad x_{22} = 2\left(2\tau \varphi_5^0 - 5\varphi_4^0\right), \quad x_{23} = 8\varphi_4^0 - \tau \varphi_5^0, \quad x_{24} = -2\varphi_4^0, \end{aligned} \quad (3.53)$$

где  $\tau = \tau^p$ . Вышеприведенные элементы записаны в точке  $r = a$  и соответствуют условиям (3.50).

$$\begin{aligned} x_{i,j-2} &= 2\xi_1^0 - \tau\xi_2^0, \quad x_{i,j-1} = 2\tau\xi_2^0 - 8\xi_1^0 + 2\tau^2\xi_3^0 - \tau^3\xi_4^0, \\ x_{ij} &= 2\left(6\xi_1^0 - 2\tau^2\xi_3^0 + \tau^4\xi_5^0\right), \quad x_{i,j+1} = 2\tau^2\xi_3^0 - 8\xi_1^0 - 2\tau\xi_2^0 + \tau^3\xi_4^0, \quad x_{i,j+2} = 2\xi_1^0 + \tau\xi_2^0; \end{aligned} \quad (3.54)$$

Здесь в (3.54)  $j = 3, 4, 5, \dots, M^p, M^p + 4, M^p + 5, \dots, M^p + M^e + 1, i = j$ . При этом, если  $j = 3, 4, 5, \dots, M^p$ , то в (3.54) следует принять  $\xi_n^0 = \xi_n^p(r)$ ,  $r = a + (j-1) \cdot \tau^p$ ,  $\tau = \tau^p$ , если же  $j = M^p + 4, M^p + 5, \dots, M^p + M^e + 1$ , то в (3.54) следует принять  $\xi_n^0 = \xi_n^e(r)$ ,  $r = \gamma + (j-1) \cdot \tau^e$ ,  $\tau = \tau^e$ . Элементы (3.42) выписывались согласно уравнениям (3.49).

$$\begin{aligned} x_{i,j-4} &= -3\phi_1^0(\tau^e)^3, \quad x_{i,j-3} = 2(\tau^e)^3\left(7\phi_1^0 + \tau^p\phi_2^0\right), \quad x_{i,j-2} = -(\tau^e)^3\left(24\phi_1^0 + 8\tau^p\phi_2^0 + (\tau^p)^2\phi_3^0\right), \\ x_{i,j-1} &= 2(\tau^e)^3\left(9\phi_1^0 + 5\tau^p\phi_2^0 + 2(\tau^p)^2\phi_3^0\right), \\ x_{ij} &= -5\phi_1^0\left((\tau^p)^3 + (\tau^e)^3\right) + 4\tau^e\tau^p\left((\tau^p)^2\phi_2^e - (\tau^e)^2\phi_2^p\right) - 3(\tau^e\tau^p)^2\left(\tau^p\phi_3^e + \tau^e\phi_3^p\right), \\ x_{i,j+1} &= 2(\tau^p)^3\left(9\phi_1^0 - 5\tau^e\phi_2^e + 2(\tau^e)^2\phi_3^e\right), \quad x_{i,j+2} = (\tau^p)^3\left(8\tau^e\phi_2^e - 24\phi_1^0 - (\tau^e)^2\phi_3^e\right), \\ x_{i,j+3} &= 2(\tau^p)^3\left(7\phi_1^0 - \tau^e\phi_2^e\right), \quad x_{i,j+4} = -3\phi_1^0(\tau^p)^3; \\ x_{i+1,j-3} &= (\tau^e)^2, \quad x_{i+1,j-2} = -4(\tau^e)^2, \quad x_{i+1,j-1} = 5(\tau^e)^2, \quad x_{i+1,j} = 2\left((\tau^p)^2 - (\tau^e)^2\right); \\ x_{i+1,j+1} &= -5(\tau^p)^2, \quad x_{i+1,j+2} = 4(\tau^p)^2, \quad x_{i+1,j+3} = -(\tau^p)^2; \\ x_{i+2,j-2} &= \tau^e, \quad x_{i+2,j-1} = -4\tau^e, \quad x_{i+2,j} = 3(\tau^p + \tau^e), \quad x_{i+2,j+1} = -4\tau^p, \quad x_{i+2,j+2} = \tau^p. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Здесь в (3.55)  $j = M^p + 1, i = j + 1$ . Элементы (3.55) выписывались согласно уравнениям (3.52) и соответствуют точке  $r = \gamma$ .

Оставшиеся элементы соответствуют значению  $r = 1$ ,  $\tau = \tau^e$  и выписываются согласно условиям (3.51) в виде

$$x_{M-1,M-4} = 3\phi_7^0, \quad x_{M-1,M-3} = -2\left(7\phi_7^0 + \tau\phi_8^0\right), \quad x_{M-1,M-2} = 24\phi_7^0 + 8\tau^e\phi_8^0 + \tau^2\phi_9^0,$$

$$x_{M-1,M-1} = -2 \left( 9\varphi_7^0 + 5\tau\varphi_8^0 + 2\tau^2\varphi_9^0 \right), \quad x_{M-1,M} = 5\varphi_7^0 + 4\tau\varphi_8^0 + 3\tau^2\varphi_9^0, \quad (3.56)$$

$$x_{M,M-3} = -2\varphi_{10}^0, \quad x_{M,M-2} = 8\varphi_{10}^0 + \tau\varphi_{11}^0, \quad x_{M,M-1} = -2 \left( 5\varphi_{10}^0 + 2\tau\varphi_{11}^0 \right), \quad x_{M,M} = 4\varphi_{10}^0 + 3\tau\varphi_{11}^0 + 2\tau^2\varphi_{12}^0.$$

Таким образом, в рамках конечно-разностной схемы, задача об отказе монолитной сферической крепи подземной полости сведена к разрешимости матричного уравнения  $\|x_{ij}\|=0$  с элементами отличными от нуля, приведенными выше. При этом при вычислении определителя  $\|x_{ij}\|$ , наряду с основным НДС для областей  $V^p$  и  $V^e$  (2.134), (2.108), (2.109), (2.137) - (2.140) необходимо также учитывать уравнение (2.141), определяющее положение границы  $\gamma$  раздела зон упругого и пластического. Минимизация должна проводиться по параметру волнообразования  $j$ , параметрам материала и конструкции  $\lambda_i$ .

Следовательно, как и в предыдущем параграфе, получаем задачу многомерной оптимизации величины  $q_a$  в зависимости от  $m$  и  $n$  при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы:  $\det(q_i, j, \lambda_j)=0$ .

Результаты численного эксперимента представлены на рисунках 3.7, 3.8. На рисунке 3.7 представлены зависимости критической величины внутреннего давления интенсивностью  $q_a$  от толщины крепи монолитной крепи при различных значениях давление горного массива. При этом кривая 1 соответствует  $q_b = 0.04$ , кривая 2 -  $q_b = 0.03$ , кривая 3 -  $q_b = 0.02$ . На рисунке 3.8 показана зависимость оптимальной толщины монолитной сферической крепи от давления горного массива при различных значениях внутреннего давления. При этом кривая 1 соответствует  $q_a = 0.004$ , кривая 2 -  $q_a = 0.008$ , кривая 3 -  $q_a = 0.013$ , кривая 4 -  $q_a = 0.015$ . Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, брались следующими:  $c = 0.23$ ,  $k = 0.005$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 8 \cdot 10^{-4}$ . Расчетам, результаты которых отражены на рисунках 3.7, 3.8 соответствует значение параметра волнообразования  $j=2$ .

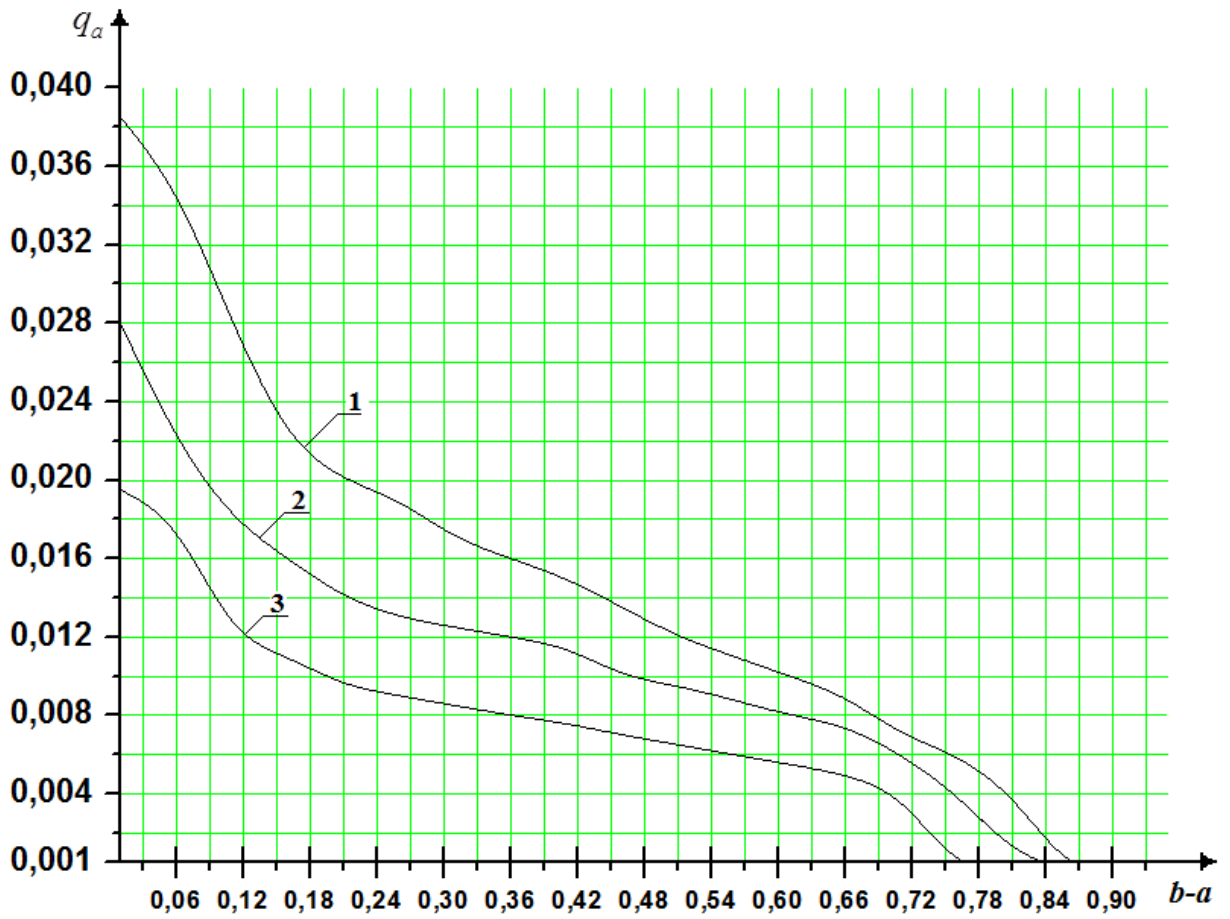


Рис. 3.7

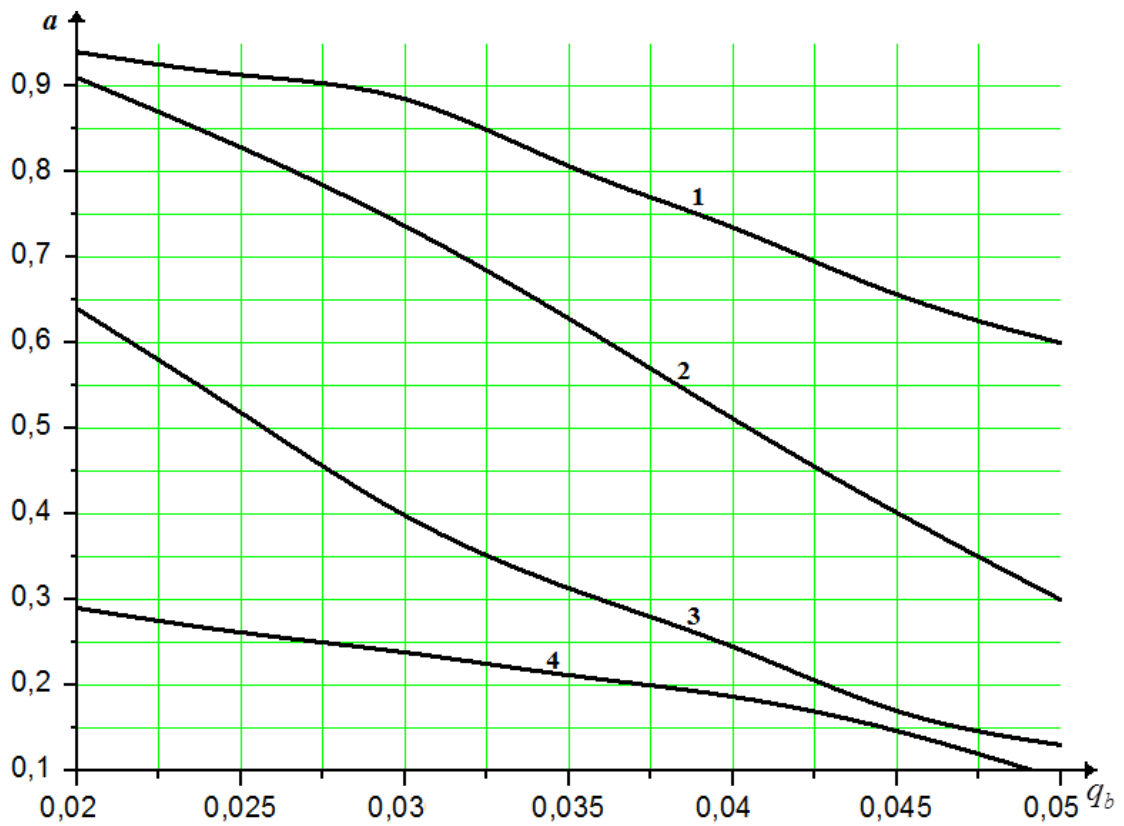


Рис.3.8

Из анализа результатов численного счета следует:

- потеря устойчивости монолитной крепи подземной сферической полости происходит при  $j=2$ ;
- при увеличении толщины монолитной крепи, критическая величина внутреннего давления, соответствующего отказу крепи уменьшается ( область устойчивости расширяется) (рис 3.7);
- с ростом давления  $q_b$  массива горных пород на внешнюю поверхность крепи, критическая величина внутреннего давления возрастает  $q_a$  (рис 3.7);
- оптимальная толщина монолитной сферической крепи существенно зависит от давления горного массива и как следствие от глубины заложения полости, а также от давления равномерно распределенного по внутренней поверхности крепи (рис. 3.8)
- при  $a \rightarrow 0$  (сплошной шар) потеря устойчивости не наблюдается.

### 3.4. Анализ результатов главы 3

Основные результаты этой главы сводятся к следующему:

- в рамках ТЛТУДТ построены математические модели для исследования отказов монолитных крепей вертикальных горных выработок и подземных сферических полостей, с учетом начальной пористости материалов и упруговязкопластических (упругопластических) свойств сжатого скелета;
- определение отказов монолитных крепей вертикальных выработок и подземных сферических полостей на основе разработанных математических моделей сведено к решению соответственно, цилиндрических и сферических задач;
- разработан алгоритм решения задач устойчивости монолитных крепей горных выработок, основанный на методе конечных разностей, в рамках которого задачи сведены к системам линейных уравнений;
- получены ненулевые элементы характеристических определителей, с помощью которых находятся критические нагрузки для каждой из рассматриваемых задач;
- проведены численные эксперименты, на основании которых сделаны следующие выводы:

1) установлено, что отказы монолитных крепей вертикальной горной выработки и подземной сферической полости, происходят по осесимметричной форме при параметрах волнообразования для цилиндрической крепи  $n=m=3$ , для сферической  $j=2$ ;

2) критическая величина внутреннего давления, соответствующего потери устойчивости монолитной крепи как вертикальной выработки, так и подземной сферической полости существенно зависит как от физико-механических, так и геометрических параметров конструкции. При этом, как при увеличении коэффициента упрочнения  $c$ , так и с ростом предела текучести  $k$  материала крепи критическая величина внутреннего давления уменьшается, то есть область устойчивости расширяется;

- 3) с ростом давления горного массива на крепь, который может наблюдаться, например, при увеличении глубины заложения выработки величина критического давления на внутренней поверхности крепи увеличивается;
- 4) оптимальная толщина крепи как для цилиндрических, так и сферических подземных конструкций существенно зависит как от давления горного массива на крепь, так и от величины давления равномерно распределенного по внутренней поверхности крепи; при этом с ростом давления со стороны горного массива на крепь ее оптимальная толщина увеличивается, а при увеличении нагрузки на внутреннюю поверхность крепи оптимальная толщина последней может быть уменьшена;
- 5) применяемые схемы конечных разностей для краевых задач имеют достаточно хорошую сходимость; вычисления действительных корней характеристических уравнений проводились методом последовательного удвоения числа шагов и заканчивались при совпадении двух последних результатов в четвертом знаке после запятой.



## Заключение

В диссертационной работе на основе трехмерной линейризированной теории устойчивости деформируемых тел проведено математическое моделирование практически важного класса задач механики горного давления – отказов монолитных крепей горных выработок. Рассмотрены случаи монолитных крепей вертикальной горной выработки и подземной сферической полости. Расчеты представлены для материалов с пористой структурой и сложной реологией полностью сжатой матрицы, в качестве моделей которой использовались упругопластическая и упруговязкопластическая модели сред.

Результаты изложенные в работе сводятся к следующему.

1. В рамках принятой модели материала на этапе упругого деформирования сжимаемой пористой среды и на этапе неупругого деформирования тела с полностью сжатой матрицей разработаны и проанализированы математические модели, описывающие напряженно-деформированные состояния монолитных крепей подземной сферической полости и вертикальной горной выработки в случаях, когда поведение материала с полностью сжатой матрицей моделировалось:
  - a) упрочняющимся упругопластическим телом;
  - b) упрочняющимся упруговязкопластическим телом.
2. На базе построенных моделей при статических нагрузках впервые произведён аналитический расчёт соответствующих докритических напряженно-деформированных состояний монолитных крепей горных выработок.
3. Выявлено влияние геометрических параметров крепи, величин внешних сжимающих нагрузок, физико-механических параметров материала крепи (пористости, предела текучести, коэффициента упрочнения и др.), и на напряженно-деформированные состояния, а также на поведение радиусов упругопластических границ в монолитных цилиндрических и сферических

подкрепляющих сооружениях. В частности, как для цилиндрических, так и для сферических крепей установлено, что

- в случае, когда материал крепи с полностью сжатой матрицей моделируется упрочняющимся упруговязкопластическим телом, при увеличении времени до определенного значения  $t^*$  пластическая зона расширяется, при этом дальнейший рост времени практически не приводит к изменению радиуса упругопластической границы, который соответствует упрочняющейся упругопластической модели;
  - с ростом коэффициента Ламе  $\mu_0$  пористого сжимаемого материала, величина радиуса раздела зон упругого и пластического деформирования уменьшается;
  - увеличение величины начального раствора  $\varepsilon_0$  пор приводит к расширению области неупругих деформаций сжатой матрицы;
  - при увеличении предела текучести  $k$ , а так же с ростом коэффициента упрочнения  $s$  сжатой матрицы величина радиуса раздела зон упругого и пластического деформирования сжатого скелета уменьшается.
4. В рамках трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел разработаны математические модели для исследования отказов монолитных крепей подземных сооружений при неупругой работе материалов с полностью сжатой матрицей.
5. На основе построенных моделей впервые решены следующие задачи:
- исследован вопрос о пространственной форме потери устойчивости основного состояния монолитной цилиндрической крепи вертикальной горной выработки для материалов обладающих одновременно упругими, вязкими и пластическими свойствами;
  - решена задача об осесимметричной форме потери устойчивости монолитной крепи вертикального шахтного ствола, в случае когда материал крепи ведет себя как упрочняющаяся упругопластическая среда;

- исследована пространственная форма потери устойчивости основного состояния монолитной сферической крепи подземной полости, когда имеется граница раздела областей упругого и пластического деформирования.
6. Для неоднородных докритических состояний разработан алгоритм решения задач устойчивости монолитных крепей горных выработок, основанный на конечно-разностном методе, в рамках которого задачи сведены к системам линейных уравнений.
  7. Построены характеристические определители, с помощью которых находились критические нагрузки для каждой из рассматриваемых задач.
  8. Проведены численные эксперименты в рамках разработанных математических моделей отказов монолитных крепей рассмотренных подземных сооружений, на основании которых сделаны следующие выводы:
    - наличие в монолитных крепях вертикальных и сферических выработок поверхности раздела зон упругого и пластического деформирования может существенно влиять на их устойчивость;
    - знание докритического напряженно-деформированного состояния подкрепляющей конструкции не достаточно для предсказания надежности ее эксплуатации, т. к. исчерпанию несущей способности предшествует потеря устойчивости основного состояния крепи;
    - критическая величина внутреннего давления, соответствующего потери устойчивости монолитной крепи как вертикальной выработки, так и подземной сферической полости существенно зависит как от физико-механических, так и геометрических параметров конструкции. При этом, как при увеличении коэффициента упрочнения  $c$ , так и с ростом предела текучести  $k$  материала крепи критическая величина внутреннего давления уменьшается, то есть область устойчивости расширяется;
    - с ростом давления горного массива на крепь, который может наблюдаться, например, при увеличении глубины заложения выработки

величина критического давления на внутренней поверхности крепи увеличивается;

- оптимальная толщина крепи как для цилиндрических, так и сферических подземных конструкций существенно зависит как от давления горного массива на крепь, так и от величины давления равномерно распределенного по внутренней поверхности крепи; при этом с ростом давления со стороны горного массива на крепь ее оптимальная толщина увеличивается, а при увеличении нагрузки на внутреннюю поверхность крепи оптимальная толщина последней может быть уменьшена.

**Список литературы.**

1. Акопян, Ж. С. О потери устойчивости вертикальной выработки по неосесимметричной форме/ Ж. С. Акопян // Прикл. механика. – 1976. – Т. 12. - №5. – С. 116 – 119.
2. Акопян, Ж. С. Числовые результаты для неосесимметричной задачи об устойчивости вертикальной горной выработки/ Ж. С. Акопян // Прикл. механика. – 1976. – Т. 12. - №9. – С. 130 – 131.
3. Акопян, Ж. С. О вариационных принципах теории устойчивости горных выработок для сжимаемых моделей / Ж. С. Акопян, А. Н. Гузь // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. - №1. – С. 33 – 35.
4. Акопян, Ж. С. О вариационных принципах теории устойчивости горных выработок для несжимаемых моделей / Ж. С. Акопян, А. Н. Гузь // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. - №10. – С. 27 – 30.
5. Акопян, Ж. С. О задачах устойчивости вертикальных горных выработок / Ж. С.Акопян, А. Н. Гузь, А. В. Навоян // Прикл. механика. – 1974. – Т. 10. - №5. – С. 54 – 62.
6. Акопян, Ж. С. О построении теории устойчивости горных выработок/ Ж. С. Акопян, А. Н.Гузь, А. В. Навоян // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18. - №5. – С. 3 – 22.
7. Акопян, Ж. С. Об устойчивости упруго-пластических тел при всестороннем сжатию / Ж. С.Акопян, А. Н. Гузь, А. В. Навоян // Прикл. Механика. – 1979. Т. 15, №12. –С. 107 – 110.
8. Алимжанов, М. Т. Об устойчивости горизонтальной подземной выработки круглого поперечного сечения./ М. Т. Алимжанов // – Изв. АН КазССР, 1967, сер. физ.-мат., 5. – С. 80 – 86.
9. Алимжанов, М. Т. Об упругопластическом состоянии неоднородных толстостенных цилиндрических и сферических оболочек / М. Т. Алимжанов, Б. Ж. Габдулин // Вест. АН КазССР. – 1967. - № 10 – С. 52 – 67.

10. Алимжанов, М. Т. Исследование устойчивости подземных выработок./ М. Т. Алимжанов // – В кн.: Материалы первой научной конференции молодых ученых. АН КазССР, «Наука», Алма-Ата, 1968. – С. 7 – 8.
11. Алимжанов, М. Т. К вопросу об определении оптимальных параметров податливых крепей горизонтальных выработок/ М. Т. Алимжанов // Вопросы механики горных пород. – Алма-Ата, 1967. – С. 55 – 60.
12. Алимжанов, М. Т. К определению давления на крепь подземных выработок сферической формы. / М. Т. Алимжанов //– Изв. АН КазССР. Сер. физ. – мат., 1970, № 5, С. 9 – 13.
13. Алимжанов, М. Т. Исследование устойчивости горизонтальных подземных выработок. / М. Т. Алимжанов //– В кн.: Проблемы механики горных пород. «Наука», Новосибирск, 1971. - С. 39 – 41.
14. Алимжанов, М. Т. О характере проявления горного давления вблизи одиночной горизонтальной капитальной выработки глубокого заложения/ М. Т. Алимжанов // Проблемные вопросы механики горных пород. – Алма-Ата, 1972. – С. 67 – 76.
15. Алимжанов, М. Т. Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород./ М. Т. Алимжанов // Алма-Ата: Наука. – 1982. – 270 с.
16. Алимжанов, М.Т. Упругопластическое состояние плоскости, ослабленной круговым отверстием/ М. Т. Алимжанов, Е. К. Естаев // Механика деформ. тверд. тела. – 1982. – С. 105 – 115.
17. Алимжанов, М. Т. Об устойчивости толстостенной сферической оболочки/ М. Т. Алимжанов, В. И. Гордон // Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-матем. – 1980. - №5. – С. 57 – 59.
18. Алимжанов, М. Т. Расчет устойчивости подземных полостей, созданными внутренними взрывами / М. Т. Алимжанов, Н. А. Евсторов // Науч. труды МГИ. – М., 1973. – С. 345 – 347.
19. Алимжанов, М. Т. К определению давления на крепь и смещения контура вертикального шахтного ствола / М. Т. Алимжанов, Л. В. Ершов // Некоторые вопросы механики горных пород. – М., 1971. – С. 10 – 17.

20. Алимжанов, М. Т. Устойчивость равновесия тел и некоторые задачи горного давления. / М. Т. Алимжанов, Л. В. Ершов // – В кн.: Проблемы механики твердого тела. «Судостроение», Л., 1970. – С. 47 – 54.
21. Алимжанов, М. Т. Об устойчивости равновесия в некоторых осесимметричных задачах горных пород. / М. Т. Алимжанов, М. Д. Исхаков //– В кн.: Проблемные вопросы механики горных пород. «Наука», Алма-Ата, 1972. – С. 43 – 255.
22. Алимжанов, М. Т. Об устойчивости стенок бурящихся скважин. / М. Т. Алимжанов //– В кн.: Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела, Алма-Ата: Наука КазССР, 1989, С. 3 – 14.
23. Алимжанов, М. Т. Проблемы устойчивости равновесия в задачах геомеханики. / М. Т. Алимжанов // – Успехи механики, 1990, 13, №3, С. 21 – 57.
24. Алимжанов, М. Т., Об упругопластическом кручении круглого стержня переменного диаметра / М. Т. Алимжанов, Н. С. Мукашев // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1990. - №3. С. 72 – 75.
25. Алимжанов, М. Т. Устойчивость равновесия тел и проблема управления горным давлением при бурении скважин / М. Т. Алимжанов // Новожил. сб.: Сб. тр., посвящ. 80-летию со дня рождения академика В. В. Новожилова. – СПб, 1992.- С. 148 – 158.
26. Асамидинов, Ф. М. Устойчивость массива возле горизонтальной горной выработки эллиптической формы при одноосном растяжении-сжатии / Ф. М. Асамидинов // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13. - №11. – С. 124 – 126.
27. Асамидинов, Ф. М. Об устойчивости горизонтальных выработок некруговой формы / Ф. М. Асамидинов, А. Н. Гузь, Г. Г. Кулиев // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13. - №6. – С. 112 – 115.
28. Анин, Б. Д. Упруго-пластическая задача./ Б. Д. Анин, Г. П. Черепанов // – Новосибирск: наука, 1983. – 283 с.

29. Бабич, И. Ю. Плоская упруго-пластическая задача устойчивости горизонтальных горных выработок/ И. Ю. Бабич, Г. Н. Бакланова, А. Н. Гузь // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14. - №3. – С. 68 – 73.
30. Бабич, И. Ю. Потеря устойчивости как возможный механизм образования выбросов / И. Ю. Бабич, А. Н. Гузь // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13. - №5. – С. 23 – 26.
31. Бабич, И.Ю. Устойчивость стержней, пластин и оболочек из композитных материалов (трехмерная постановка) / И. Ю. Бабич, А. Н. Гузь // Прик. механика. – 1983. – Т. 19, № 11. – С. 3 – 20.
32. Бабич, И. Ю. Об устойчивости упруго-пластического полупространства вокруг сферической полости/ И. Ю. Бабич, А. Н. Гузь // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14. - №10. – С. 22 – 27.
33. Бабич, И.Ю. Исследование динамики и устойчивости композитных материалов в трехмерной постановке / И. Ю. Бабич, А. Н. Гузь, Н. А. Шульга // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18. - №1. – С. 3 – 32.
34. Бабич, И. Ю. К вопросу об устойчивости горизонтальной выработки кругового поперечного сечения / И. Ю. Бабич, А. В. Навоян // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13. - №11. – С. 110 – 113.
35. Бай Тиньцюань, Теоретический анализ напряженно-деформированного состояния глинистых массивов вокруг горной выработки / Бай Тиньцюань // Стр-во горн. выруб. Моск. гос. горн. ин-т.- М, 1994 – С. 4 - 9.
36. Бакланова, Г. Н. Пространственная задача об устойчивости горизонтальных выработок при упруго-пластических деформациях / Г. Н. Бакланова // Прикл. механика. – 1980. – Т. 16. - №7. – С. 35 – 40.
37. Баклашов, И. В. Механика горных пород./ И. В. Баклашов, Б. А. Картозия // — М.: Недра, 1975. – 271 с.
38. Березин, Ю. А. Продольные волны в сыпучих средах / Ю. А. Березин, Л. А. Сподарева // Журн. прикл. мех. и техн. физики. - 2001. - Т. 42, №2. - С. 148-152.



39. Бережной, И. А. О построении модели сыпучих сред, исходя из определения диссипативной функции / И. А. Бережной, Д. Д. Ивлев, В. Б. Чадов // ДАН СССР. — 1973. Т. 213, № 6. - С. 1270-1273.
40. Бицено, К. Б. Техническая динамика./ К. Б. Бицено, Р. Граммель // – М.: Гостеоретиздат, 1950. – Т.1.
41. Болотин, В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости./ В. В. Болотин// – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с.
42. Булычев, Н. С. Механика подземных сооружений. / Н. С. Булычев / Учебник для вузов.-М., Недра, 1982. 270 с.
43. Буренин, А. А. О распространении обратимых деформаций по среде с накопленными необратимыми деформациями / А. А. Буренин, О. В. Дудко, А. А. Манцыбора // ПМТФ, 2002. Т. 423. № 5. С. 162-170.
44. Быковцев, Г. И. Концентрация напряжений в упругопластической плоскости, ослабленной отверстием / Г. И. Быковцев, Ю.Д. Цветков // Прикл. матем. И мех.. – 1987. – Т 51,№2. С. 932- 939.
45. Быковцев, Г. И. Теория пластичности. / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев //– Владивосток: Дальнаука, 1998. – 527 с.
46. Быкова, О. Г. Расчет трехслойной крепи стволов / О. Г. Быкова // Горн. давление и горн. удары. НИИ горн. геомех. и маркшейд дела (ВНИМИ) – СПб, 1993. – С. 29– 32.
47. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем./ А. С. Вольмир / – М.: Наука, 1967. – 984 с.
48. Вялов, С. С. Реологические основы механики грунтов./ С. С. Вялов / – М.:Высш. Школа, 1978 . – 447 с.
49. Галин, Л. А. Плоская упруго-пластическая задача / Л. А. Галин // Прикл. матем. мех. 1946. Т 3, №3. – С. 367 – 386.
50. Голованов, Ю. В. Обзор современного состояния механики быстрых движений гранулированных материалов / Ю. В. Голованов, И. В. Ширко // Механика гранулированных сред: Теория быстрых движений. Сер. «Новое в зарубежной науке». Вып. 36. - М.: Мир, 1985. - С. 271-279.

51. Горбачева, Н.Б. Устойчивость горизонтальных горных выработок в упрочняющемся упруговязкопластическом массиве / Н. Б. Горбачева, А. И. Шашкин // В кн.: Математическое моделирование систем. Методы, приложения и средства. Тр. конф. - Воронеж. – 1998. – С. 77 – 81.
52. Гениев, Г. А. Динамика пластической и сыпучей среды./ Г. А. Гениев, М. И. Эстрин / — М.: Стройиздат, 1972. — 216 с.
53. Гено, А. Проблема неустойчивости ствола скважины на больших глубинах / А. Гено // Мех. горн. пород применительно к пробл. разведки и добычи нефти: Пер. с фр. и англ. – М. 1994 – С. 97 –107.
54. Гоцев, Д. В. Локальная неустойчивость пластин с запрессованными кольцевыми включениями при упругопластическом поведении материалов / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. Н. Спорыхин // Ж. Прикл. механика и техн. физика, СО РАН.- 2001. Т. 42, № 3. С. 146 - 151.
55. Гоцев, Д. В. О локальной неустойчивости в задаче о двухосном растяжении пластины ослабленной двумя отверстиями / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. Н. Спорыхин // Нелинейные колебания механических систем: Материалы 5 международной конференции. – Нижний Новгород, 1999 г. – С. 242 – 243.
56. Гоцев, Д. В. Неустойчивость многослойной крепи вертикальной горной выработки в массивах обладающих упругопластическими свойствами / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. Н. Спорыхин // Труды II - ой всероссийской научно-технической конференции «Прикладные задачи механики и теплообмена в авиационной технике». Часть I. - Воронеж, 2001 г. – С.12 – 18.
57. Гоцев, Д. В. Исследование устойчивости состояния равновесия горного массива возле многослойной сферической крепи при упругопластическом поведении материалов / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. Н. Спорыхин // Вісник Дніпропетровського університету, сер. мех. – 2001. В. 4. Т. 1. - С. 49 – 55.
58. Гоцев, Д. В. Исследование устойчивости шахтных стволов с многослойными крепями при неупругой работе горного массива и крепи / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов // Деп. ВИНТИ № 334-В2013.

59. Гоцев, Д. В. Напряженно-деформированное состояние пористой сферической оболочки с учетом сложной реологии материала / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов, А.Ю. Яковлев. // Сб. трудов Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015 г. С. 93 – 97.
60. Гоцев, Д. В. Исследование устойчивости состояния равновесия многослойной крепи вертикальной горной выработки в массивах с упругопластическими свойствами / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. Н. Спорыхин // Международный научный журнал Прикладная Механика. Киев. Е39 № 3, 2003г. С. 45 – 51.
61. Гоцев, Д. В. Локальная неустойчивость подкрепленных горных выработок / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин // Проблемы механики: Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского./ Под ред. Д.М. Климова – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – С. 300 – 313.
62. Гоцев, Д. В. Локальная неустойчивость горизонтальных выработок с многослойной крепью в упруго-пластических массивах / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин // Ж. Мех. твердого тела, СО РАН. -2004. №1 С. 158 – 166.
63. Гоцев, Д. В. Локальная неустойчивость горизонтальных выработок многоугольной формы в упруговязкопластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // Ж. Прикладная механика и техническая физика, СО РАН.-2005.-Т46., N2.-С. 141-150.
64. Гоцев, Д. В. Локальная неустойчивость вертикальных выработок некруговой формы с многослойными крепями в массивах, обладающих сложными реологическими свойствами / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // Сборник трудов международной школы-семинара «Современные проблемы механики и прикладной математики» 2005г. Часть 1. С 100 – 102.
65. Гоцев, Д. В. Устойчивость пористой сферической оболочки при неупругой работе сжатого скелета / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела «Чебоксары 16-21 июня 2014 г.»: В двух частях. Часть 1. Чебоксары: Чувашский гос. педагог. ун-т, 2014. С. 64-68.

66. Гоцев, Д. В. Устойчивость монолитной крепи подземного нефтехранилища сферической формы с учетом начальной пористости материала / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния 2014 № 4 (22). С.114-123.
67. Гоцев, Д. В. Локальная неустойчивость горизонтальных выработок некруговой формы в упруговязкопластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сб. статей к 75-летию Е.И. Шемякина / Под ред. Д.Д. Ивлева и Н.Ф. Морозова. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – С. 766 – 778.
68. Гоцев, Д. В. Локальная неустойчивость горизонтальных выработок эллиптической формы в упруговязкопластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // Ж. Мех. твердого тела, СО РАН. - 2007. №2 С. 183 – 192.
69. Гоцев, Д. В. Моделирование процесса деформирования горных выработок с некруговыми многослойными крепями в массивах со сложными реологическими свойствами / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин, А. Н. Стасюк // Вестник Чувашского педагогического университета им. И. Я. Яковлева 2007. № 2 С.78- 89.
70. Гоцев, Д. В. Исследование потери устойчивости состояния равновесия цилиндрической оболочки с упругвязкопластическим наполнителем при осевом нагружении / Д. В. Гоцев, И. Ю. Андреева // Сборник трудов международной школы-семинара «Современные проблемы механики и прикладной математики» Воронеж. Часть 2. С. 25 – 28.
71. Гоцев, Д. В. Моделирование отказов горных выработок с многослойными крепями некруговой формы в массивах со сложными реологическими свойствами / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин, А. Н. Стасюк // Сборник трудов международной школы-семинара «Современные проблемы механики и прикладной математики» Воронеж. 2007г. Часть2. С 90 – 93.
72. Гоцев, Д. В. Устойчивость подкрепленных выработок некруговой формы при совместном расчете крепи и массива горных

- пород / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин, А. Н. Стасюк // Вестник Чувашского педагогического университета им. И. Я. Яковлева 2008 № 2 С.139-160.
73. Гоцев, Д. В. Математическое моделирование напряженно-деформированных состояний пористых цилиндрических и сферических тел при сжатии с учетом неупругого поведения сжатого скелета/ Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов, Н. С. Перунов // Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы», посвященной 85-летию профессора Д.Д. Ивлева (Чебоксары 15-18 сентября 2015 г.): в 2 ч. Ч.1. -Чебоксары : Чувашский гос. педагог. ун-т, 2015. С. 91-99.
74. Гоцев, Д. В. Устойчивость подкрепленной вертикальной горной выработки эллиптической формы в массивах со сложными реологическими свойствами / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин, А. Н. Стасюк // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия 2008 №8/2 (67). С.41-57.
75. Гоцев, Д. В. Математическая модель напряженно-деформированного состояния крепи вертикального шахтного ствола с учетом начальной пористости материала и упругопластических свойств сжатого скелета / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов, Н. С. Перунов // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния 2015 № 2 (24). С.88-96.
76. Гоцев, Д. В. Метод возмущений в задачах устойчивости подкрепленных горных выработок./ Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин / Воронеж: Воронежский государственный университет, 2010. – 299 с.
77. Гоцев, Д. В. Математическая модель отказа подкрепленного горизонтального шахтного ствола глубокого заложения / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов // Актуальные проблемы математических и естественнонаучных дисциплин при подготовке военных специалистов. Часть 1. Сборник статей по материалам Всероссийской научно-практической конференции «Академические Жуковские чтения». – Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» , 2013. С. 47-53.
78. Гоцев, Д. В. Математическая модель напряженно-деформированного состояния монолитной крепи подземной сферической полости с учетом

- начальной пористости материала / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов, Е. В. Корчагина // Современные инструментальные системы, информационные технологии и инновации: сб. научных трудов XI-ой Международной научно-практической конференции в 4-х томах, Том 1, Юго-Зап. гос. ун-т., Курск, 2014. С. 371 – 376
79. Гоцев, Д. В. Устойчивость глубоких подземных нефтехранилищ сферической формы с учетом сложной реологии материалов / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов, Е. В. Корчагина, А. С. Косолапенко // Современные проблемы естествознания. Инженерный анализ объектов обеспечения авиации [текст]: сб. ст. по материалам Межвузовской НПК курсантов и слушателей «Молодежные чтения памяти Ю.А. Гагарина 20 мая 2014 г.»: в 2-х ч. – Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2014. Ч. 1. С. 53-59
80. Гоцев, Д. В. Численно-аналитическое исследование устойчивости горного массива в окрестности подземной сферической полости / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов, Н. С. Перунов, В. А. Духанин // Современные проблемы естествознания. Инженерный анализ объектов обеспечения авиации [текст]: сб. ст. по материалам II Межвузовской НПК курсантов и слушателей «Молодежные чтения, посвященные памяти Ю.А. Гагарина» (20 мая 2015 г.): в 3-х ч. – Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2015. Ч.1. – С. 74-80.
81. Гоцев, Д. В. Нахождение и анализ полей напряжений и перемещений вблизи некруговых горных выработок в реологически сложных массивах / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов, Н. С. Перунов, С. Н. Польских // Современные проблемы естествознания. Инженерный анализ объектов обеспечения авиации [текст]: сб. ст. по материалам II Межвузовской НПК курсантов и слушателей «Молодежные чтения, посвященные памяти Ю.А. Гагарина» (20 мая 2015 г.): в 3-х ч. – Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2015. Ч.1. – С. 80-84.
82. Гоцев, Д. В. Математическая модель напряженно-деформированного состояния сферического тела при всестороннем сжатии с учетом начальной пористости материала и сложной реологии сжатой матрицы / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов, Н. С. Перунов, С. Н., К. Ю. Сокольников // Современные

- проблемы естествознания. Инженерный анализ объектов обеспечения авиации [текст]: сб. ст. по материалам II Межвузовской НПК курсантов и слушателей «Молодежные чтения, посвященные памяти Ю.А. Гагарина» (20 мая 2015 г.): в 3-х ч. – Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2015. Ч.1. – С. 84-90.
83. Гоцев, Д. В. Математическая модель процесса деформирования крепи вертикальной горной выработки с учетом начальной пористости материала и упруговязкопластических свойств сжатого скелета / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов, Н. С. Перунов // Н. Новгород «Проблемы прочности и пластичности» т.78 №3 2016г. С.241-251.
84. Гоцев, Д. В. Устойчивость монолитной крепи вертикальной горной выработки с учетом начальной пористости материала и неупругой работы сжатого скелета / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов // Вестник СамГУ. Серия: Физико-математические науки 2016. Т 20 № 3. С. 1-18.
85. Григорян, С. С. Об основных представлениях динамики грунтов / С. С. Григорян // Прикл. матем. и мех. - 1960. - Т. 24, вып. 6. - С. 1057-1072.
86. Гузь, А. Н. Исследование локальной потери устойчивости несжимаемых композитных структур / А. Н. Гузь // Механика композит. материалов. – 1991. - №1. – С. 31 – 39.
87. Гузь, А. Н. Локальная неустойчивость слоистых сжимаемых композитов / А. Н. Гузь // Мех. тв. Тела. – 1991. - №2. – С. 49 – 55.
88. Гузь, А. Н. О континуальном приближении в пространственных неосесимметричных задачах теории устойчивости слоистых сжимаемых композитных материалах / А. Н. Гузь // Прик. механика. – 1990. – Т 26, № 3 . – С. 23 – 27.
89. Гузь, А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел./ А. Н. Гузь / – Киев: Наукова думка, 1971. – 276 с.
90. Гузь, А. Н. Трехмерная теория упругой устойчивости при конечных докритических деформациях / А. Н. Гузь // Прикл. механика. 1972. – Т. 8. - №12. – С. 25 – 44.

91. Гузь, А. Н. О задачах устойчивости в механике горных пород / А. Н. Гузь // Проблемные вопросы механики горных пород. – Алма-Ата, 1972. – С. 27 – 35.
92. Гузь, А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. / А. Н. Гузь /– Киев: Наукова думка, 1973. – 272 с.
93. Гузь, А. Н. Об устойчивости упруговязкопластических тел при неоднородном докритическом состоянии / А. Н. Гузь // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1976. - №5. – С. 410 – 416.
94. Гузь, А. Н. Основы теории устойчивости горных выработок. / А. Н. Гузь /– Киев: Наукова думка, 1977. – 204 с.
95. Гузь, А. Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии./ А. Н. Гузь / – Киев: Наукова думка, 1979. – 144 с.
96. Гузь, А.Н. О вариационных принципах трехмерной теории устойчивости деформируемых тел при действии «следающих» нагрузок. /А. Н. Гузь // ДАН СССР, т. 246, № 6, 1979, С. 1314-1316.
97. Гузь, А. Н. О задачах устойчивости горных выработок / А. Н. Гузь // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 253. - №3. – С. 553 – 555.
98. Гузь, А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел./ А. Н. Гузь / – Киев. Вища школа, 1980. – 512 с.
99. Гузь, А. Н. О трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Поверхностная неустойчивость / А. Н. Гузь // Прикл. механика. – 1986. – Т. 22. - №1. – С. 24 – 35.
100. Гузь, А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. / А. Н. Гузь /– Киев: Вища школа, 1986. – 504 с.
101. Гузь, А.Н. О численных методах в трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / А. Н. Гузь // Прикл. механика. 1988. – Т. 21, № 1 . С. 3-10.
102. Гузь, А.Н. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – Киев: Наукова думка, 1985. – 280 с.



103. Гузь А.Н. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек./ А. Н. Гузь, И. Ю. Бабич / – Киев: Вища школа, 1980. – 168 с.
104. Гузь, А. Н. Неустойчивость слоистых тел при сжатии с учетом действия поверхностных распределенных нагрузок / А. Н. Гузь, В. П. Корж, В. Н. Чехов // Прикл. механика. 1989. Т 25, № 5.- С. 13 – 22.
105. Гузь, А. Н. Дослідження стійкості горизонтальної гірської виробки кругового поперечного перерізу/ А. Н. Гузь, А. В. Навоян // Докл. АН УРСР. Сер. А. – 1973. - №7. – С. 630 – 633.
106. Гузь, А. Н. Трехмерная теория неупругой устойчивости. Общие вопросы / А. Н. Гузь, А. Н. Спорыхин // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18. - №7. – С. 3 – 22.
107. Гузь, А. Н. Трехмерная теория неупругой устойчивости. Конкретные результаты / А. Н. Гузь, А. Н. Спорыхин // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18. - №8. – С. 3 – 27.
108. Гузь, А. Н. Исследование поверхностной неустойчивости слоистых тел в трехмерной постановке / А. Н. Гузь, В. Н. Чехов // Прикл. механика. – 1990. Т. 26, № 2. – С. 3- 24.
109. Гузь, А. Н. Пространственные неосесимметричные задачи теории устойчивости слоистых высокоэластичных композитных материалов / А. Н. Гузь // Прикл. мех. 1989. – 25, №11, С. 26 – 31.
110. Гузь, А. Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии. / А. Н. Гузь /– Киев.: Наукова думка, 1990. – 629 с.
111. Гузь, А. Н. Исследование локальной потери устойчивости слоистых несжимаемых композитных структур / А. Н. Гузь // Механика композитных материалов. 1991, №1, С. 31 – 39.
112. Гузь, А. Н. Локальная неустойчивость слоистых сжимаемых композитов / А. Н. Гузь // Механика твердого тела, №2, 1991, С. 49 – 55.
113. Гузь, А. Н. Линеаризированная теория складкообразования в толще земной коры / А. Н. Гузь, В. Н. Чехов // Прикл. механика. – 1975. – Т. 11. - №1. – С. 3 – 14.

114. Гузь, А. Н. Об устойчивости анизотропного горного массива в окрестности двух горизонтальных параллельных выработок / А. Н. Гузь, Л. В. Дериглазов // Докл. АН (Россия). – 1992. – 325, №3 – С. 450 – 454.
115. Дериглазов, Л. В. Устойчивость горизонтальной горной выработки в ортотропном массиве / Л. В. Дериглазов // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13. - №4. – С. 45 – 49.
116. Дериглазов, Л. В. Устойчивость горных выработок в трансверсальном изотропном массиве / Л. В. Дериглазов // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13. - №5. – С. 27 – 33.
117. Дериглазов, Л. В. К устойчивости горизонтальной выработки в изотропном массиве при неравномерном сжатии / Л. В. Дериглазов // Прикл. механика. – 1979. – Т. 15. - №2. – С. 99– 102.
118. Динник, А. Н. Статьи по горному делу./ А. Н. Динник / Углтехиздат, М., 1957. 195 с.
119. Докунин, О. С. Бетоны и растворы для подземного шахтного строительства /О. Докунин, И. Косков, В. Друцко, С. Бернштейн // Справочное пособие. – М.: Недра,1989. – 216 с.
120. Друккер, Д. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование / Д. Друккер, В. Прагер / В сб.: Определяющие законы механики грунтов. – М.: Мир, 1975.
121. Евтушенко, Б. В. Исследование напряженного состояния крепи горизонтальной горной выработки с сечением некруговой формы / Б. В. Евтушенко // Изв. вузов. Горн. ж. – 1993 № 8 – С. 36 – 39.
122. Ержанов, Ж. С. Устойчивость горизонтальных выработок в наклонно слоистом массиве./ Ж. С. Ержанов, Ш. М. Айталиев, Ж. К. Масанов / «Наука», Алма-Ата, 1971. 160 с.
123. Ержанов, Ж. С. Расчет устойчивости горных выработок, подверженных большим деформациям./ Ж. С. Ержанов, А. С. Сагинов, Ю. А. Векслер / «Наука», Алма-Ата, 1973. 140с.

124. Ержанов, Ж. С. Теория складкообразования в земной коре / Ж. С. Ержанов, А. К. Егоров, И. А. Гарагаш /— М.: Наука, 1975. — 240 с.
125. Ершов, Л. В. Об осесимметричной потере устойчивости толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием равномерного давления / Л. В. Ершов // Прикл. механика и техн. физика. — 1960. - №4. — С. 81 — 82.
126. Ершов, Л. В. О постановке задачи устойчивости горных выработок / Л. В. Ершов // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 143. - №2. — С. 305 — 307.
127. Ершов, Л. В. О проявлении горного давления в горизонтальных выработках / Л. В. Ершов // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 145. - №2. — С. 298 — 300.
128. Ершов, Л. В. К вопросу о проявлении горного давления в вертикальном шахтном стволе / Л. В. Ершов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностр. — 1962. - №6. — С. 103 — 107.
129. Ершов, Л.В. Исследование вопросов проявления горного давления с позиций устойчивости упругопластических тел / Л. В. Ершов // Прикл. матем. 1963. — Т. 9, № 4. С. 387 — 397.
130. Ершов, Л. В. Искусственное усиление устойчивости целиков путем установки подкрепляющих штанг / Л. В. Ершов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностр. — 1963. - №2. — С. 180 — 182.
131. Ершов, Л. В. К математической теории горного давления / Л. В. Ершов // В кн.: Аналитические методы исследования и математическое моделирование горных процессов. — М.: Госгортехиздат, 1963, С. 19 — 43.
132. Ершов, Л. В. О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / Л. В. Ершов., Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностр. — 1958. - №8. — С. 149 — 152.
133. Ершов, Л. В. О потере устойчивости вращающихся дисков / Л. В. Ершов, Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР, ОТН, — 1958, N1, — С. 124 — 125.
134. Ершов, Л. В. Математические основы физики горных пород./ Л. В. Ершов., В. А. Максимов / — М.: Издание МГИ, 1968. 293 с.
135. Зингерман, К. М. Результаты решения задачи о распределении напряжений вблизи вертикальной круговой в промежуточном состоянии скважины в

- нелинейном вязкоупругом трансверсально-изотропном полубесконечном тяжелом массиве / К. М. Зингерман, А. М. Тиблевич // Твер. гос. ун-т. – Тверь, 1995. – 17 С.: ил. – Библиогр. 8 назв. – Рус. – Деп в ВИНТИ 9.2.95, 369 – В95.
136. Зубчанинов, В. Г. Об упругопластической устойчивости пластин / В. Г. Зубчанинов // Инж. Журн. Механика твердого тела, 1965, Т 5, №2. С. 299 – 305.
137. Зубчанинов, В. Г. К проблеме неустойчивости упругопластических систем / В. Г. Зубчанинов // Изв. АН СССР, МТТ. 1969, № 2. С. 109 – 115.
138. Ибрагимов, В. А. Аналитическое решение задачи о двuosном растяжении плоскости с круговым отверстием при определяющих соотношениях теории пластичности упрочняющихся тел / В. А. Ибрагимов, В. А. Нефагин // Теор. и прикл. мех. – Минск. 1987. - С. 29 – 32.
139. Ибрагимов, В. А. Метод разложения по параметру нагружения в упругопластических задачах для упрочняющихся тел / В. А. Ибрагимов, В. А. Нефагин // Теор. и прикл. мех. – 1986. - № 13. С. 3 – 7.
140. Ибрагимов, В. А. Сходимость метода разложения по параметру нагружения в задачах упругопластического деформирования стержней / В. А. Ибрагимов, В. А. Нефагин // Теор. и прикл. мех. – 1988. - № 15. С. 50 – 58.
141. Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности./ Д. Д. Ивлев / – М.: Наука, 1966. – 231 с.
142. Ивлев, Д. Д. Теория упрочняющегося пластического тела. / Ивлев Д. Д., Г. И. Быковцев / – М.: Наука, 1971. – 232 с.
143. Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела./ Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов/ – М.: Наука, 1978. – 208 с.
144. Ивлев, Д. Д. Механика пластических сред./ Д. Д. Ивлев / Т 1. – М.: Физматлит, 2001. – 445 с.
145. Ивлев, Д. Д. Механика пластических сред./ Д. Д. Ивлев / Т 2. – М.: Физматлит, 2002. – 448 с.

146. Ильюшин, А. А. Пластичность. / А. А. Ильюшин / – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
147. Ильюшин, А. А. Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин/ – М. : Из-во АН СССР, 1963, 271 с.
148. Ишлинский, А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения круглой пластины / А. Ю. Ишлинский // Прикл. матем. и мех. – 1943. – Т. 7, № 6. – С. 109 – 115.
149. Ишлинский, А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости / А. Ю. Ишлинский // Укр. мат. журн. – 1954. – Т. 4. - №2. – С. 140 – 146.
150. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев /М.,Физматлит. 2001. 701 с.
151. Каверин, И. М. Исследование напряженно деформированного состояния моделей крепей шахтных стволов / И. М. Каверин // Мех. подзем. сооруж. Тул. гос. техн. ун-т. – Тула, 1993. – С. 61 – 62.
152. Капылов, С.И. Расчет многослойной крепи ствола с учетом разномодульности горных пород и материала крепи / С. И. Капылов // Тул. Гос. техн. ун-т. – Тула, 1993. – С. 29 – 33.
153. Кацауров, И. Н. Механика горных пород / И. Н. Кацауров / – М.: Недра. – 1981. – 161 с.
154. Керштейн, И. М. Основы экспериментальной механики разрушения / И. М. Керштейн , В. Д. Ключников , Е. В. Ломакин , С. А. Шестериков / М,: Изд-во МГУ, 1989.
155. Кирсанов, М. И. О неустойчивости сферического тела при равномерном нагружении / М. И. Кирсанов, А. Н. Спорыхин // ПМТФ, 1979, № 1. С. 161 – 165.
156. Ключников, В. Д. Устойчивость упруго-пластических систем / В. Д. Ключников / – М.: Наука, 1980. – 240 с.
157. Ковалев, А.В. Двухосное растяжение упругопластического пространства с призматическим включением / А. В. Ковалев, А. Н. Спорыхин, А. Ю Яковлев

- // Прикладная механика, НАН Украины. – Киев. -2000. – Т. 36, № 6. – С. 114 – 120.
158. Кондауров, В. И. Теоретические основы реологии геоматериалов / В. И. Кондауров, Л. В. Никитин /— М.: Наука, 1990. — 206 с.
159. Кондауров, В. И. Основы термомеханики конденсированной среды / В. И. Кондауров, В. Е. Фортов / - М.: Изд-во МФТИ, 2002. - 336 с.
160. Кулиев, Г. Г. Разрушение и устойчивость трехмерных тел с трещинами и некоторые родственные проблемы горной и нефтяной механики / Г. Г. Кулиев / – Баку. : Элм., 1983. – 143 с.
161. Кулиев, Г. Г. Устойчивость горизонтальных горных выработок кругового поперечного сечения при двухосном сжатии массива / Г. Г. Кулиев, Ф. М. Асадминов // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13., №4. – С. 122 – 124.
162. Лейбензон, Л. С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек / Л. С. Лейбензон // Собр. труд. – М.: АН СССР, 1951. – Т. 1. – С. 50 – 85.
163. Лесников, В. С. Расчет на прочность металлической кольцевой крепи / В. С. Лесников // Днепропетр. горн. ин-т. – Днепропетровск, 1992. – 6 с.: ил. – Рус. – Деп в Укр ИНТЭИ 12.06.92, 897 – Ук 92.
164. Лобовик, С. Б. Исследование устойчивости сферической полости вариационным методом / С. Б. Лобовик // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13. - №2. – С. 35 – 39.
165. Лобовик, С. Б. Об устойчивости несжимаемого полупространства со сферической полостью / С. Б. Лобовик // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13. - №12. – С. 117 – 120.
166. Лобовик, С. Б. Устойчивость сферической полости при одноосном сжатии / С. Б. Лобовик // Физика конденсированного состояния. – Киев, 1978. – С. 16 – 20.
167. Ломакин, В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В. А. Ломакин / – М.: 1970. – 81 с.
168. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье / – М.: Наука, 1970. – 939 с.

169. Мавианов, Г. С. К расчету подземных составных оболочечных конструкций / Г. С. Мавианов // Научн.-техн. горн. ассоц.- М. – 1993. – С. 64.
170. Мешков, С.И. О потере устойчивости сферической оболочки / С. И. Мешков, А. И. Шашкин // Изв. АН СССР МТТ. 1988. - № 5. – С. 117 – 119.
171. Миренков, В. Е. О распределении напряжений около угловых точек контура выработки / В. Е. Миренков, В. А. Шутов // Мех. горн. пород горн. и строит. машиновед., технол. горн. работ. Ин-т горн. дела СОРАН. – Новосибирск. – 1993.– С. 66 – 70.
172. Миронова, М. В. Оценка устойчивости горных выработок, сооруженных в слабых породах при неупругой работе крепи и массива / М. В. Миронова // Мех. горн. пород и сооруж. Горн. выработок: Тез. докл. – СПб, 1993. – С. 50 – 55.
173. Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи. / В. М. Мирсалимов /– М.: Наука, 1987. – 225 с.
174. Михлин, С. Г. О распространении напряжений в полуплоскости с эллиптическим вырезом / С. Г. Михлин // Тр. Сейсмологического ин-та АН СССР, 1934, № 29.
175. Мор, Ф. Горное давление и крепь / Ф. Мор / Глюкауф, 1952, 3 27, 28.
176. Мруз, З. Неассоциированный закон течения в описании пластического течения гранулированных сред / З. Мруз, Ч. Шиманский // Механика гранулированных сред: Теория быстрых движений. Сер. «Новое в зарубежной науке». Вып. 36. - М.: Мир, 1985. - С. 9-43.
177. Мясников, В. П. Геофизические модели сплошных сред / В. П. Мясников // Мат. V Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике: Тез. докл. — М.: Наука, 1981. — С. 263-264.
178. Мясников, В. П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях / В. П. Мясников // Вестн. ДВО РАН. — 1996. — №4. — С. 8-13.
179. Мясников, В. П. Неевклидова модель упругопластического материала с дефектами структуры / В. П. Мясников, М. А. Гузев // Проблемы механики

- сплошных сред и элементов конструкций: К 60-летию со дня рождения Г. И. Быковцева: Сб. науч. тр. — Владивосток: Дальнаука, 1998. — С. 209-224.
180. Мясников, В. П. Неевклидова модель деформирования материалов на различных структурных уровнях / В. П. Мясников, М. А. Гузев // Физическая мезомеханика. - 2000. - Т. 3, № 1. - С. 5-16.
181. Мяснянкин, Ю. М. О внедрении тел в жесткопластическую среду / В. П. Мясников, Д. В. Давыдов // Вест. ВГУ, Сер: Физика. Математика.- 2009.- № 1.- С. 58-65.
182. Назаренко, В. М. Об устойчивости горных выработок с учетом зон раздела физико-механических свойств пород / В. М. Назаренко // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. - №12. – С. 34 – 38.
183. Назаренко, В. М. Устойчивость горизонтальной горной выработки в массивах с трансляционным упрочнением / В. М. Назаренко // Прикл. механика. – 1981. – Т. 17. - №9. – С. 124 – 127.
184. Назаренко, В. М. К вопросу об устойчивости горизонтальной горной выработки при наличии зон раздела физико-механических свойств породы / В. М. Назаренко // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18. - №6. – С. 121 – 124.
185. Назаренко, В. М. Влияния зоны трещенообразования вокруг круговой горизонтальной выработки на ее устойчивость / В. М. Назаренко // Прикл. механика. – 1984. – Т. 20. - №4. – С. 114 – 115.
186. Нестеренко, В. Ф. Импульсное нагружение гетерогенных материалов / В. Ф. Нестеренко/ Новосибирск: Наука, 1992. — 260 с.
187. Николаевский, В. Н. Определяющие уравнения пластического деформирования сыпучей среды / В. Н. Николаевский // Прикл. матем. и мех. — 1971. — Т. 35, вып. 6. — С. 1070-1082.
188. Николаевский, В. Н. Послесловие. Современные проблемы механики грунтов / В. Н. Николаевский // Определяющие законы механики грунтов. Сер. «Новое в зарубежной науке». Вып. 2. - М.: Мир, 1975. - С. 210-229.
189. Новожилов, В. В. Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов / – М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.



190. Новожилов, В. В. Теория упругости / В. В. Новожилов / – Л.: Судпромгиз. 1958. – 347 с.
191. Акопян, Ж. С. О задачах устойчивости вертикальных горных выработок в анизотропном массиве / Ж. С. Акопян, И. Ю. Бабич, А. Н. Гузь, Л. В. Дериглазов // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14. - №12. – С. 23 – 29.
192. Подболотов, Б. Н. Неустойчивость неоднородного плупространства / Б. Н. Подболотов, А. Н. Спорыхин // Вестн. АН Каз. ССР. – 1987. - № 3. – С. 66 – 69.
193. Покровский, Г. И. Центробежное моделирование/ Г. И. Покровский / Госстойиздат, М., 1935.
194. Прагер, В. Теория идеально пластических тел / В. Прагер, Ф. Г. Ходж /– М.: ИЛ, 1956. – 398 с.
195. Прагер, В. Введение в механику сплошных сред / В. Прагер / – М.: ИЛ, 1963. – 181 с.
196. Приходько, В. В. Применение метода граничных элементов к определению трехмерного напряженного состояния массива в окрестности сопряжения подземных выработок / В. В. Приходько // Вопросы прочности и пластичности. Днепропетр. гос. ун-т. – Днепропетровск, 1993. – С. 114 – 123.
197. Протодяконов, М. М. Давление горных пород и рудничное крепление / М. М. Протодяконов / гл. I. Давление горных пород. ГОНТИ, 1931.
198. Пшеничный, В. А. Обоснование рациональных параметров сталебетонной крепи в зависимости от вида ее нагружения / В. А. Пшеничный, В. Ю. Масаев, В. М. Удовиченко // Соверш. технол. стр-ва горн. предприятий. - Кузбас. гос. техн. ун-т. – Кемерово, 1994. – С. 79-84.
199. Радаев, Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев / Самара: Изд-во Самарского университета, 2004 г. 147 с.
200. Ревуженко, А. Ф. Некоторые модели деформирования горных пород и грунтов / А. Ф. Ревуженко, С. Б. Стоневский, Е. И. Шемякин // В кн.:

- Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. – Новосибирск, 1975. – С. 140 - 145.
201. Ревуженко, А. Ф. Механика упругопластических сред и нестандартный анализ / А. Ф. Ревуженко / – СО РАН, ИЗД-во Новосибирского университета, 2000 г., - 428 с.
202. Савин, Г. Н. Давление горных пород и крепление вертикальных шахт / Г. Н. Савин / Зап. Инст. Горной механики АН УССР, 1947, №5.
203. Садовская, О. В. Модели реологически сложных сред, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / О. В. Садовская, В. М. Садовский // Математические модели и методы механики сплошных сред: Сб. науч. трудов: к 60-летию А.А. Буренина. Владивосток. ИАПУ ДВО РАН. 2007. С. 224- 238.
204. Садовская, О. В. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О. В. Садовская, В. М. Садовский / — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 368 с.
205. Самарцев, Г. И. К оценке устойчивого состояния приконтурного массива незакрепленной горной выработки / Г. И. Самарцев, Р. П. Окатов // Изв. вузов. Горн. ж. – 1994. №1. – с. 47 – 50.
206. Седов, Л.И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов / – М.:Наука, 1973. – Т.2. – 536 с.
207. Соколовский, В. В. Статика сыпучей среды / В. В. Соколовский / — М.: Наука, 1990. — 272 с.
208. Скаченко, А. В. К вопросу устойчивости многослойных тел / А. В. Скаченко // Прикл. механика. – 1990. – Т.26, №2. С. 88 – 93.
209. Скаченко, А. В. Устойчивость многослойных композитов при неупругих деформациях / А. В. Скаченко // Прикл. механика. – 1980. – Т.15, №8. С. 104 – 106.
210. Скаченко, А. В. Устойчивость упругопластических тел при больших пластических деформациях / А. В. Скаченко, А. Н. Спорыхин // Прикл. механика. – 1976. – Т. 12. - №5. – С. 11 – 17.

211. Скаченко, А. В. Устойчивость упруго-пластического шара, нагруженного внешним давлением / А. В. Скаченко, А. Н. Спорыхин // Прикл. механика и техн. физика. – 1977. - №5. – С. 155 – 159.
212. Скаченко, А. В. К устойчивости упругих тел со случайными неоднородностями при конечных деформациях / А. В. Скаченко, А. Н. Спорыхин, А. И. Сумин // Прикл. матем. и мех. 1979, Т 43, № 6, С. 1125 – 1129.
213. Скаченко, А. В. Устойчивость многослойных композитов при неупругих деформациях / А. В. Скаченко // Прикл. механика, 1980, Т. 15, № 8, С. 104 - 106.
214. Спорыхин, А. Н. Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел / А. Н. Спорыхин // Прикл. механика и техн. физика. – 1967. - №4. – С. 52 – 58.
215. Спорыхин, А. Н. Об устойчивости плиты при сжатии / А. Н. Спорыхин // Прикл. механика. – 1969. – Т. 5, №8. – С. 120 – 122.
216. Спорыхин, А. Н. К устойчивости равновесия упруговязкопластической среды / А. Н. Спорыхин // Прикл. механика и техн. физика. – 1970. - №5. – С. 86 – 92.
217. Спорыхин, А. Н. Неупругая устойчивость толстых круглых пластин, находящихся в состоянии трехмерных напряжений / А. Н. Спорыхин // Труды НИИ мат. Воронеж. ун-та. – 1971. – вып. – 4. – С. 107 – 111.
218. Спорыхин, А. Н. К устойчивости горизонтальных выработок в массивах, обладающих упруговязкопластическими свойствами / А. Н. Спорыхин // Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.- мат. – 1975. - №1. – С. 67 – 72.
219. Спорыхин, А. Н. К теории устойчивости сжимаемого упругопластического грунта / А. Н. Спорыхин // Прикл. механика и тех. физика. – 1977. - №5. – С. 148 – 154.
220. Спорыхин, А. Н. Устойчивость цилиндрических упругопластических тел / А. Н. Спорыхин // Механика деформируемого твердого тела. – 1977. - №3. – С. 89 – 93.

221. Спорыхин, А. Н. Устойчивость стохастически неоднородных сжимаемых упругопластических грунтов / А. Н. Спорыхин // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14. - №12. – С. 30 – 37.
222. Спорыхин, А. Н. О применимости статического метода к исследованию устойчивости упруговязкопластических сред / А. Н. Спорыхин // Мех. деформируемых сред (Куйбышев). – 1978. - №3. – С. 115 – 123.
223. Спорыхин, А. Н. Задачи устойчивости упруговязкопластических тел / А. Н. Спорыхин, В. Г. Трофимов // Прикл. механика и техн. физика. – 1973. - №4. – С. 144 – 147.
224. Спорыхин, А. Н. О пластической неустойчивости в некоторых случаях простого течения / А. Н. Спорыхин, В. Г. Трофимов // Прикл. матем. и мех. – 1974, Т 38, № 4, С. 712 – 718.
225. Спорыхин, А. Н. Устойчивости тел при больших докритических деформациях // Изв. АН СССР. МТТ. 1975, № 4, С. 131 – 134.
226. Спорыхин, А. Н., Устойчивость вертикальных выработок в упрочняющихся пластических массивах / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин // Прикл. механика. – 1974. – Т. 10. - №11. – С. 76 – 80.
227. Спорыхин, А. Н. Устойчивость равновесия тел и некоторые задачи горного давления / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин / Ред. журн. «Изв. АН Каз. ССР.». – Алма-Ата, 1976. – 19 с.: I ил. – библиогр.: 19 назв. – Деп. в ВИНТИ 20.01.76, №181–76.
228. Спорыхин, А. Н. Устойчивость сферической полости в упругопластическом массиве при больших пластических деформациях / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин // Механика деформируемых сред. – Куйбышев, 1977. - №2. – С. 75 – 79.
229. Спорыхин, А. Н. К определению оптимальных размеров горных выработок в упругопластическом грунте / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин / Воронеж ун-т. – Воронеж, 1980. – 15 с. – библиогр.: 9 назв. – Деп. в ВИНТИ 14.10.80, №4388-80.

230. Спорыхин, А. Н. Числовые результаты решения некоторых неупругих задач в механике горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин / Воронеж ун-т. – Воронеж, 1982. – 20 с.: 4 ил. - библиогр.: 17 назв. – Деп. в ВИНТИ 22.09.82, №4932-82.
231. Спорыхин, А. Н. Устойчивость цилиндрических упругопластических тел / А. Н. Спорыхин // Механика деформируемого твердого тела. – 1977. - №3. – С. 89 – 93.
232. Спорыхин, А. Н. Неоднородные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей / А. Н. Спорыхин, А. Н. Ковалев, Ю. Д. Щеглова / – Воронеж: Издание Воронежского государственного ун-та, 2004. – 129 с.
233. Спорыхин, А. Н. Локальная неустойчивость составных упруго-пластических конструкций / А. Н. Спорыхин, Н. Н. Чиканова // Механика композитных материалов. 1995, Т. 31, № 2, С. 248 – 267.
234. Спорыхин, А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин / – Воронеж: Воронежский государственный университет. 1997. – 361 с.
235. Спорыхин, А. Н. Локальная неустойчивость стенок бурящихся скважин в сжимаемых упрочняющихся упруговязкопластических массивах / А. Н. Спорыхин, А. С. Чеботарев // ПМТФ. 1999. Т. 40, №6. С. 177 – 183.
236. Спорыхин, А. Н. Устойчивость кручения цилиндра при конечных возмущениях / А. Н. Спорыхин, А. И. Сумин // Прикладная механика. НАН Украины. – 2000. – Т. 36, № 3. С. 133 – 136.
237. Спорыхин, А. Н. Метод возмущений в задачах упругопластического кручения стержней / А. Н. Спорыхин, Ю. Д. Щеглова // Ж МТТ РАН. – 2000. -№ 5. – С. 54 – 64.
238. Спорыхин, А. Н. О потере устойчивости сферической полости / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин // В сб.: Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. – М.: Издание Московск. гос. унта. – 2001. – С. 313 – 323

239. Спорыхин, А. Н. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин / – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 232 с.
240. Трифонова-Генова, В. Исследование многослойной крепи вертикального ствола в пластовом массиве МКЭ / В. Трифонова-Генова // Мин.-геол. унив., София. – 1990. – 37, №2 [Б]. – с. 375 – 379.
241. Хромов, А. И. Деформация и разрушение жесткопластических тел / А. И. Хромов / - Владивосток: Дальнаука, 1996.
242. Хромов, А. И. Растяжение полосы с симметричными угловыми вырезами / А. И. Хромов, А. А. Буханько, О. В. Патлина, Е. П. Кочеров // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.- 2008. №1(16). - С. 53–58.
243. Хромов, А. И. Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформаций несжимаемого жесткопластического тела / А. И. Хромов, Е. П. Кочеров, А. Л. Григорьева // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2006. № 43. – С. 88–91.
244. Цимбаревич, П. М. О величине горного давления в вертикальной выработке / П. М. Цимбаревич / Горный журнал. 1933, №9.
245. Чехов, В. Н. Влияние «следящей» нагрузки на складкообразование в земной толще / В. Н. Чехов // Прикл. механика. – 1975. – Т. II. - №5. – С. 86 – 92.
246. Чехов, В. Н. Исследование процесса складкообразования при нелинейном докритическом состоянии / В. Н. Чехов // Прикл. механика. – 1976. – Т. 12. - №4. – С. 32 – 40.
247. Шашкин, А. И. Определение оптимальной толщины монолитной крепи / А. И. Шашкин // Труды НИИ математики Воронеж. ун-та. – Воронеж, 1973. – Вып. 8. – С. 50 – 53.
248. Шашкин, А. И. К устойчивости равновесия сферической полости / А. И. Шашкин // Устойчивость пространственных конструкций. – Киев, 1978. – С. 129 – 133.

249. Шашкин, А. И. Определение оптимальных размеров целиков из сжимаемого упруго-пластического материала / А. И. Шашкин / Воронеж ун-т. – Воронеж, 1982. – 13 с. – Библиогр.: 8 назв. – Деп. в ВИНТИ 3.05.82, №2146-82.
250. Шашкин, А. И. Определение оптимальных размеров неупругих крепей вертикальной выработки и сферической полости / А. И. Шашкин // Воронеж ун-т. – Воронеж, 1982. – 29 с.: 4 ил. - Библиогр.: 11 назв. – Деп. в ВИНТИ 2.07.82, №3450-82.
251. Швайко, Н. Ю. Влияние истории нагружения на устойчивость элементов конструкций / Н. Ю. Швайко // Днепрпетровск: Изд-во ДГУ, 1991. – 168 с.
252. Шевченко, Ю. Н. Теория упруго-пластических оболочек при неизотермических процессах нагружения / Ю. Н. Шевченко, И. В. Прохоренко / – Киев: Наукова думка, 1981. – 296 с.
253. Шевяков, Л. Д. О горном давлении на вертикальные выработки / Л. Д. Шевяков/ Уголь. 1960, №2.
254. Шемякин, Е. И. О закономерностях неупругого деформирования в окрестности подготовительной выработки / Е. И. Шемякин // Горное давление в капитальных и подготовительных выработках. – Новосибирск, 1975. – С. 3 – 17.
255. Шенли, Ф. Теория колонны за пределом упругости / Ф. Шенли // Механика. – М.: №2, 1951, С. 88 – 98.
256. Biot, M.A. Mechanics of Incremental eformation / M. A. Biot / - Y.N.: John Willey and Sons. 1965. – P. 506.
257. Biot, M. A. Sur la stabilite de l'equilibre elastique Equations de l'eleasticire d'un milieu soumis a tension initiale / M. A. Biot // Ann. Soc. Sci. Ser. B. – 1934. – Vol. 54. – Pt. 1. – P. 91- 109.
258. Biot, M. A. Non linear theory of elasticity and linearized case for a body under initial stress / M. A. Biot // Phil. Mag. Ser. 7. – 1939. – Vol. 27. – P. 89 – 115.
259. Biot, M.A. Theory of finite deformations of porous solids / M. A. Biot // Indiana Univ. Math. J. - 1972. - V.21. - P. 597-735.

260. Biot, M.A. Nonlinear and semilinear rheology of porous solids / M. A. Biot // *J. of Geophysical Research*. - 1973. - V. 78, No. 23. - P. 4924-4937.
261. de Boer, R. *Theory of Porous Media: Highlights in the historical development and current state* / R. de Boer /— Berlin; Heidelberg; New-York: Springer-Verlag, 1999.
262. Carcione, J.M. Viscoelastic effective rheologies for modelling wave propagation in porous media / J. M. Carcione // *Geophysical Prospecting*. — 1998. — V. 46. — P. 249-270.
263. Ehlers, W. *Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics of Porous Materials. Sen: Solid Mechanics and Its Applications, IUTAM Symposium* / W. Ehlers /— Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001.
264. Green, R.J. A plasticity theory for porous solids / R. J. Green // *Int. J. Mech. Sci.* — 1972. - V. 14. - P. 215-224.
265. Gudehus, G. A comprehensive constitutive equations for granular materials / G. Gudehus // *Solids Found.* - 1996. - V. 36, No. 1. - P. 1-12.
266. Hutter, K. *Dynamic Response of Granular and Porous Materials under Large and Catastrophic Deformations* / K. Hutter, N. Kirchner / — Berlin: Springer, 2003. - 426 p.
267. Kappus, R. Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen / R. Kappus // *Z. Angw. Math. And Mech.* – 1939. – Vol. 19, № 5. P. 27 – 31.
268. Naghdi, P.M. A critical review of the state of plasticity / P. M. Naghdi / *ZAMM*. 1990. Vol. 41, №3. P. 315 – 394.
269. Osinov, V. A. Plane shear waves and loss of stability in a saturated granular body / V. A. Osinov, G. Gudehus // *Mech. Cohesive-Frict. Materials*. — 1996. — V. 1. - P. 25-44.
270. Sevostianov, I. On the yield condition for anisotropic porous materials / I. Sevostianov, M. Kachanov // *Mater. Sci. Eng.* - 2001. - V. A313. - P. 1-15.
271. Southwell, R. V. On general theory of elastic stability / R. V. Southwell // *Phil. Trans. Roy. Ser. A.* – 1933. – Vol. 213. - №2. – P. 15 – 20.



272. Sporihih, A.N. Bifurcation in Process of Deformation of Elastic-Plastic Body at Finite Homogeneous Deformations / A. N. Sporihih, A. V. Skachenco / – Arch. Mech., 1977, 29, 1, P. 105 – 113.
273. Trefftz, E. Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts / E. Trefftz // Z. Angew. Math. and Mech. – 1933. – Vol 12. - №3. – S. 17 – 30.
274. Wu, W. Hypoplastic constitutive model with critical state for granular materials / W. Wu, E. Bauer , D. Kolymbas // Mech. Materials. — 1996. — V. 23. — P. 45-69.
275. Zahorski, S. Kinematic stability in the case of show steady plastic flow / S. Zahorski // Arch. Mech. Stos. – 1964. Vol. 16. – P. 514 – 529.
276. Zahorski, S. Instability of a non-linear viscoelastic column under finite compression / S. Zahorski // Arch. Mech. Stos. – 1965. Vol. 17. – P. 801 – 821.
277. Zahorski, S. Small additional deformation in non-linear viscoelasticity / S. Zahorski // Bull Acad. pol. sci. Ser. sci. Techn. – 1966. – Vol. 14. - №1. – P. 17 – 22.