

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Воронежский государственный технический университет»



На правах рукописи

ЭСТРАДА МЕЗА МАРИЯ ГУАДЕЛУПЕ

**АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ
БАЛОК ПРИ УДАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
МОДЕЛЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ ДРОБНЫЕ ОПЕРАТОРЫ**

Специальность 01. 02. 04 - Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Шитикова М.В.

Воронеж-2017

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Критический обзор литературы, посвященной анализу ударного взаимодействия вязкоупругих балок	12
1.1. Модели контактного взаимодействия упругих тел.....	13
1.2. Подходы к решению задач ударного взаимодействия вязкоупругих тел.....	22
Глава 2. Анализ балок Бернулли-Эйлера на ударные воздействия	33
2.1. Внешнее и внутреннее трение и гипотеза Рэлея.....	33
2.2. Функция Грина для модели Кельвина-Фойгта, содержащей дробную производную	38
2.3. Ударное воздействие вязкоупругого шара по упругой балке Бернулли-Эйлера, находящейся в вязкой среде.....	43
2.3.1. Определение контактной силы.....	43
2.3.2. Определение местного смятия.....	46
2.3.3. Приближенное решение.....	49
2.4. Частный случай. Удар жесткого шара по упругой балке Бернулли-Эйлера, находящейся в вязкой среде.....	52
2.5. Численные исследования.....	53

Глава 3. Анализ вязкоупругих балок типа Тимошенко на ударные воздействия	63
3.1. Удар упругого шара по вязкоупругой балке типа Тимошенко с учетом растяжения ее срединной поверхности.....	64
3.1.1. Постановка задачи.....	64
3.1.2. Метод решения.....	69
3.2. Анализ динамического поведения вязкоупругой балки типа Тимошенко при ударных воздействиях без учета растяжения её срединной поверхности.....	78
3.2.1. Удар упругого шара по вязкоупругой балке.....	78
3.2.2. Удар вязкоупругого шара по вязкоупругой балке.....	82
3.2.3. Удар жесткого шара по вязкоупругой балке.....	85
3.3. Анализ полученных решений и численные исследования.....	87
3.3.1. Упругая мишень.....	87
3.3.2. Вязкоупругая мишень.....	90
3.3.3. Численный пример.....	92
Заключение.....	99
Список использованных источников.....	102

Введение

Данная диссертационная работа посвящена анализу динамического поведения вязкоупругих балок при ударных воздействиях с использованием моделей, содержащих дробные операторы.

Актуальность темы. Элементы строительных конструкций часто подвергаются ударным воздействиям при погрузке и разгрузке, транспортировке, монтаже, а также в процессе эксплуатации. При этом ударные воздействия могут вызывать появление трещин и даже разрушение этих элементов, что в конечном счёте может привести к повреждению конструкции в целом.

Поскольку балки используются в качестве конструктивных элементов во многих отраслях промышленности и техники, то изучение их динамического поведения при ударных воздействиях является весьма актуальным, особенно в тех случаях, когда свойства соударяющихся тел изменяются в области контакта в процессе ударного взаимодействия.

Основной целью диссертационной работы является разработка метода, позволяющего получать определяющие интегро-дифференциальные уравнения, учитывающие вязкоупругие свойства соударяющихся тел, которые задаются соотношениями Больцмана-Вольтерра с наследственным ядром Ю.Н. Работнова, а также получение их приближенных аналитических решений.

Научная новизна. Решена задача об ударе вязкоупругого шара по упругой шарнирно опертой балке Бернулли-Эйлера, находящейся в вязкой среде. Вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного тела с дробной производной, а демпфирующие свойства среды – моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, при этом параметры дробности ударника и среды имеют разные значения. Решение задачи вне

области контакта строится при помощи функции Грина, а в зоне контакта – с использованием обобщенной теории Герца.

Волновая теория удара, разработанная ранее Ю.А. Россихиным и М.В. Шитиковой для анализа ударного взаимодействия упругих тел, была обобщена на случай растяжения срединной поверхности вязкоупругой мишени в виде балки.

Решена задача об ударе упругого шара по вязкоупругой балке типа Тимошенко, вязкоупругие свойства которой вне области контакта описываются классической моделью стандартного линейного тела, а в зоне контакта – моделью стандартного линейного тела с дробными производными. Введение параметра дробности позволяет управлять вязкостью в зоне контакта, поскольку в процессе удара могут рваться поперечные связи между длинными молекулами, что может привести к изменению вязкости в системе «мишень-ударник». В процессе удара учитывается также растяжение срединной поверхности балки. Поскольку в момент удара в зоне контакта происходит зарождение продольной и поперечной ударных волн (поверхностей сильного разрыва), которые затем распространяются вдоль вязкоупругой балки с упругими скоростями, то решение за фронтами ударных волн, т.е. вне области контакта, строится при помощи лучевых рядов, коэффициенты которых находятся из определяющей системы уравнений при помощи кинематических и геометрических условий совместности. В зоне контакта решение строится при помощи обобщенной теории Герца, при этом приходится расшифровывать сложные операторные выражения, которые приводят к линейным комбинациям из дробных операторов Ю.Н. Работнова.

Полученные системы уравнений решены приближенно с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного

процесса. Проведены численные исследования, которые показывают, что при изменении параметра дробности от нуля до единицы, что соответствует увеличению вязкости ударника, максимум контактной силы уменьшается, а время контакта ударника и мишени увеличивается.

Проведен сравнительный анализ результатов ударного взаимодействия шара с вязкоупругой балкой Тимошенко с учетом и без учета растяжения ее срединной поверхности. Показано, что учет растяжения делает механическую систему «мишень-ударник» более гибкой, что приводит к увеличению максимальных значений локального смятия материалов балки и шара в зоне контакта и к увеличению продолжительности контактного взаимодействия при одних и тех же значениях параметра дробности.

Достоверность базируется на корректной математической постановке задач. Полученные в работе результаты согласуются с общими физическими представлениями. Правильность полученных результатов определяется корректностью математических выкладок и сопоставлением с известными результатами других авторов. При стремлении параметра дробности к единице полученные решения переходят в известные решения для производных целого порядка.

Практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы проектными и научно-исследовательскими организациями в процессе проектирования конструкций, которые в процессе эксплуатации могут подвергаться различным ударным воздействиям, приводящим к изменению свойств соударяющихся тел в зоне контакта.

Данные научные исследования выполнялись в соответствии с планом научно-исследовательских работ международного научного центра по

фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук ФГБОУ ВО «ВГТУ» в рамках международного проекта РФФИ и Национального научного фонда Тайваня «Использование дробных операторов Ю.Н. Работнова для описания динамического поведения бетонных конструкций в процессе удара» (проект № 14-08-92008).

На защиту выносятся следующие основные результаты работы:

- обобщение волновой теории удара, разработанной ранее Ю.А. Россихиным и М.В. Шитиковой для анализа ударного взаимодействия упругих тел, на случай ударного взаимодействия шара с вязкоупругой мишенью в виде балки Тимошенко с учетом растяжения ее срединной поверхности;
- анализ динамического поведения упругой балки Бернулли-Эйлера под действием контактной силы в вязкой среде при помощи введения в рассмотрение нового структурного параметра для описания демпфирующих свойств среды за счет использования производной дробного порядка;
- приближенное аналитическое решение задач ударного взаимодействия вязкоупругих, упругих или жестких ударников с вязкоупругими балками с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались: 1) на научных конференциях профессорско-преподавательского состава Воронежского государственного архитектурно-строительного университета в 2014-2016 годах; 2) на семинарах международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук ВГТУ; 3) на 9й международной конференции по механике сплошных сред (9th International Conference on Continuum Mechanics CM '15), в Риме, Италия, 7-9 ноября 2015 года; 4) на 44й

международной летней школе-конференции по современным проблемам механики (Advanced Problems in Mechanics APM-2016), в Санкт-Петербурге 27 июня – 2 июля 2016 года; 5) на 23м международном конгрессе по звуку и колебаниям (23rd International Congress on Sound & Vibration, ICSV23), в Афинах, Греция, 10 – 14 июля 2016 года.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 научных работах, 3 из которых в международных научных изданиях, проиндексированных в базах данных Web of Science и Scopus.

Личное участие автора. Основные результаты исследований, изложенные в диссертационной работе, были получены лично соискателем и опубликованы совместно с научным руководителем, который определил основные направления исследования в процессе выполнения международного научного проекта РФФИ. В совместных публикациях диссертант участвовала в решении задач, поставленных перед нею руководителем, лично проводила все численные исследования.

В диссертации отсутствует заимствованный материал без ссылок на авторов и источник заимствования.

Структура и объём работы Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 120 страницах машинописного текста, содержит 18 рисунков, 1 таблицу и список использованных источников из 172 наименований.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ДИССЕТАЦИИ

В первой главе приводится критический анализ научной литературы, посвященной исследованию задач ударного взаимодействия и методов их решения.

Вторая глава посвящена анализу балок Бернулли-Эйлера на ударные воздействия. Показано, что вопреки укоренившимся взглядам на различие в колебаниях балки Бернулли-Эйлера при наличии внешнего и внутреннего трения если перейти к обобщенным перемещениям и использовать гипотезу Рэлея о пропорциональности матриц упругости и демпфирования, то никакого различия между этими трениями не существует, поскольку в обоих случаях получаются одни и те же уравнения. Иначе говоря, и в том и в другом случаях балку можно считать упругой, а среду, в которой она колеблется, вязкой.

В свете описанных выше представлений решена задача об ударе вязкоупругого шара по упругой шарнирно опертой балке Бернулли-Эйлера, находящейся в вязкой среде. Вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного тела с дробной производной, а демпфирующие свойства среды – моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, при этом параметры дробности ударника и среды имеют разные значения. Решение задачи вне области контакта строится при помощи функции Грина, а в зоне контакта – с использованием обобщенной теории Герца.

Благодаря алгебре безразмерных дробных операторов Ю.Н. Работнова, разработанной профессором Ю.А. Россихиным, удается расшифровать сложные операторные выражения, которые возникают при решении данной задачи, и получить определяющие интегральные уравнения как для контактной силы, так и для величины, характеризующей местное смятие материалов балки и шара.

Полученные уравнения затем решены приближенно с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса.

Проведены численные исследования, которые показывают, что при изменении параметра дробности шара от нуля до единицы, что соответствует увеличению вязкости ударника, максимум контактной силы уменьшается, а время контакта ударника и мишени увеличивается. Кроме зависимости контактной силы от времени построены временные зависимости смятия материала ударника и мишени, а также исследовано влияние массы ударника, его начальной скорости и размеров поперечного сечения мишени на основные характеристики ударного взаимодействия шара и балки.

Третья глава посвящена анализу вязкоупругих балок Тимошенко, демпфирующие свойства которых описываются моделью стандартного линейного тела, на ударные воздействия. С этой целью волновая теория удара, разработанная ранее профессорами Ю.А. Россихиным и М.В. Шитиковой для анализа ударного взаимодействия упругих тел, была обобщена на случай ударного взаимодействия шара с вязкоупругой мишенью в виде балки с учетом растяжения ее срединной поверхности.

Решена задача об ударе упругого шара по вязкоупругой балке типа Тимошенко, уравнения динамического поведения которой учитывают инерцию вращения и деформации поперечного сдвига. Вязкоупругие свойства балки вне области контакта описываются классической моделью стандартного линейного тела, а в зоне контакта используется модель стандартного линейного тела с дробными производными. Введение параметра дробности позволяет управлять вязкостью в зоне контакта, поскольку в процессе удара могут рваться поперечные связи между длинными молекулами, что может привести к изменению вязкости в системе «мишень-ударник». В процессе удара

учитывается также растяжение срединной поверхности балки. Поскольку в момент удара в зоне контакта происходит зарождение продольной и поперечной ударных волн (поверхностей сильного разрыва), которые затем распространяются вдоль вязкоупругой балки с упругими скоростями, то решение за фронтами ударных волн, т.е. вне области контакта, строится при помощи лучевых рядов, коэффициенты которых находятся из определяющей системы уравнений при помощи кинематических и геометрических условий совместности. В зоне контакта решение строится при помощи обобщенной теории Герца, при этом приходится расшифровывать сложные операторные выражения, которые приводят к линейным комбинациям из дробных операторов Ю.Н. Работнова. Такой комбинированный подход позволяет получить определяющую систему интегро-дифференциальных уравнений относительно перемещения балки в зоне контакта и местного смятия материалов балки и шара.

Полученная система решена приближенно с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса.

Проведен сравнительный анализ результатов ударного взаимодействия шара с вязкоупругой балкой Тимошенко с учетом и без учета растяжения ее срединной поверхности. Показано, что учет растяжения делает механическую систему «мишень-ударник» более гибкой, что приводит к увеличению максимальных значений локального смятия материалов балки и шара в зоне контакта и к увеличению продолжительности контактного взаимодействия при одних и тех же значениях параметра дробности.

В заключении приведены основные результаты диссертационного исследования.

Глава 1. Критический обзор литературы, посвященной анализу ударных воздействий на вязкоупругие балки

Анализ динамического поведения конструкций при нестационарных воздействиях, с точки зрения фундаментальных исследований и инженерных приложений, имеет важное значение, потому что им подвергаются практически все конструкции на различных этапах жизненного цикла: при изготовлении и монтаже, при эксплуатации в нормальных и экстремальных условиях. Одним из наиболее сложных динамических эффектов, который представляет особый интерес для специалистов в области расчета и проектирования различных элементов конструкций и которому посвящена настоящая работа - это ударное взаимодействие тел, исследование которого становится все более важным для современных инженеров из-за необходимости использования современных легких материалов для изготовления тонкостенных элементов конструкций.

Явление ударного воздействия представляет собой динамические нагрузки непродолжительной и высокой интенсивности; при этом, несмотря на кратковременное действие, они могут носить потенциально катастрофический характер, и даже в случаях низкой скорости удара часто приводят к незначительным внутренним повреждениям сооружений, не обнаруживаемым при визуальном осмотре [5,8]. Это, в свою очередь, может служить предпосылкой серьезных повреждений конструкций и, в конечном счете, к значительным нарушениям в их функционировании [55,87].

В течение десятилетий ученые и инженеры уделяли большое внимание решению проблем, касающихся ударного взаимодействия тел. Обзоры исследований в этой области приведены в работах [2,5,39,40,55,60,137], в

которых отмечается, что большинство работ посвящено анализу ударного взаимодействия упругих тел.

Так, в обзорной статье Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В. [137] была дана классификация подходов, используемых при решении задач ударного взаимодействия, поскольку требуется находить ответы на различные вопросы:

- что происходит внутри и вне зоны контактного взаимодействия;
- как осуществляется диссипация энергии;
- как происходит рассеивание ударных волн;
- как изменяется с течением времени сила удара при динамическом контакте между телами и т.д.

Поскольку цель данной работы заключается в том, чтобы предложить новый подход к изучению реакции на удар элементов конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами, то для достижения наших целей нам необходимо сначала провести анализ работ ученых, которые внесли фундаментальный вклад в решение этой задачи.

1.1. Модели контактного взаимодействия упругих тел

Самой распространенной моделью, которая используется для описания процессов внутри зоны контакта, является контактная теория Герца и ее модификации. Модель, предложенная Герцем, описывает процесс контактного взаимодействия непрерывных тел (весь объем тела является однородным материалом), в котором тела не приобретают значительную пластическую деформацию. С помощью теории Герца в области контакта можно оценить местное смятие материалов соударяющихся тел, а также их перемещения. Экспериментальные исследования показали, что теория Герца хорошо работает

при ударных воздействиях стальных и латунных шаров по упругим балкам, но не в отношении свинца. По этой причине модель Герца не рекомендуется для материалов с высокой степенью пластической деформации [5]. Поведение соударяющихся тел, когда закон Герца не работает, может быть эффективно смоделировано в зоне контакта в виде системы линейной или нелинейной упругой пружины и вязкого демпфера [59,137].

Поведение мишени вне области контакта чаще всего формулируется с помощью уравнений ее колебаний под действием контактной силы.

Контактная сила P в соответствии с законом Герца на этапе нагружения связана с местным смятием материалов соударяющихся тел α соотношением

$$P = k\alpha^n, \quad (1.1)$$

где k – коэффициент ударного взаимодействия.

Согласно контактной теории Герца (Hertz H.R. 1882), показатель $n = 3/2$ считается для контакта между двумя однородными изотропными твердыми телами, так что уравнение (1.1) принимает вид

$$P = k\alpha^{3/2}, \quad (1.2)$$

а k – коэффициент жёсткости, зависящий от геометрии соударяющихся тел и упругих характеристик их материалов:

$$k = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R}, \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{im}} + \frac{1}{R_t}, \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \sigma_{im}^2}{E_{im}} + \frac{1 - \sigma_t^2}{E_t}, \quad (1.5)$$

где R_t , E_t , σ_t и R_{im} , E_{im} , σ_{im} - радиус кривизны в точке контакта, модуль упругости, коэффициент Пуассона мишени и ударника соответственно.

Позже экспериментальные результаты исследований Barnhart и Goldsmith [51] показали, что даже при относительно низких скоростях удара кривая разгрузки отличается от кривой нагрузки. Для учёта остаточной деформации было предложено уравнение [5]

$$P = P_{max} \left(\frac{\alpha - \alpha_{cr}}{\alpha_{max} - \alpha_{cr}} \right)^q, \quad \alpha_{max} \geq \alpha \geq \alpha_{cr}, \quad (1.6)$$

где P_{max} и α_{max} - максимальные значения контактной силы и локального смятия.

Уравнение (1.6) известно как модифицированный контактный закон Герца, который был использован многими другими исследователями для моделирования фазы разгрузки.

В 2013 году Тимошенко С.П. одним из первых рассмотрел задачу поперечного удара упругого шара на упругой балке Бернулли-Эйлера. В этой задаче уравнения движения ударника и мишени имеют вид [32]

$$m\ddot{y} = -P(t), \quad (1.7)$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \ddot{w} = P(t) \delta(x - \xi) \quad (1.8)$$

где m - масса шара, y - перемещение шара, $w(x, t)$ - перемещение балки в точке контакта (прогиб балки), I - момент инерции поперечного сечения балки, E - модуль Юнга, F - площадь поперечного сечения балки, ρ - ее плотность, $\delta(x - \xi)$

- функция Дирака, x - продольная координата, точка обозначают частную производную по времени.

Уравнения (1.7) и (1.8) интегрируются с учётом начальных условий

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = V_0, \quad w(x,0) = 0, \quad \dot{w}(x,0) = 0 \quad (1.9)$$

Аналогичная постановка задачи использовалась многими учеными, которые использовали в качестве мишени балки Бернулли – Эйлера или пластинки Кирхгофа - Лява [5,40,73, 78,92, 100, 102, 113, 116, см. также ссылки в 137].

В 1934 году С.П.Тимошенко [32] предложил динамические уравнения балки, которые учитывают эффекты сдвиговых деформаций и инерции вращения, которые позднее были использованы для описания поведения мишени в задачах поперечного удара по балкам в [36]. Эти уравнения сейчас называются балкой Тимошенко. Подход С.П. Тимошенко был обобщен Я.С. Уфляндом [34] для пластин, и уравнения пластин, учитывающие деформации сдвига и инерцию вращения, называются пластинкой Уфлянда - Миндлина.

Поскольку уравнения балки Тимошенко и пластинки Уфлянда-Миндлина являются гиперболическими, то они позволили развить волновую теорию удара [38,130,137], согласно которой динамическая деформация материала мишени вне области контакта вызвана распространением поперечной нестационарной волны (поверхности сильного разрыва), возникающей в момент удара. Решение за фронтом поверхности сильного разрыва аналитически можно построить при помощи лучевого ряда [38,130,137] или метода характеристик [119].

Лучевой метод широко используется при решении частных дифференциальных уравнений в задачах волновой динамики механики

деформируемого твердого тела [38,130-133,139,144]. Он обеспечивает связь между математическими и физическими знаниями о распространении волн. В математике лучевой метод может быть использован для того, чтобы превратить дифференциальные уравнения в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. В физике он объединяет основы геометрической оптики для изучения волновых явлений. В инженерном деле при помощи лучевого метода изучается поведение нестационарных продольных и поперечных волн в балках, пластинках и оболочках [130-133,139], в соответствии с которым решение за фронтом волны строится при помощи лучевого ряда следующим образом:

$$Z(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [Z_{,(k)}]_{t=s/G} \left(t - \frac{s}{G}\right)^k H\left(t - \frac{s}{G}\right), \quad (1.10)$$

где Z - искомая функция, $Z_{,(k)} = \partial^k Z / \partial t^k$, $[Z_{,(k)}] = Z_{,(k)}^+ - Z_{,(k)}^-$, знаки “+” и “-” относятся к величинам перед и за фронтом волновой поверхности Σ соответственно, G - нормальная скорость волны Σ , s - длина дуги, отсчитываемая вдоль луча, t - время и $H(t-s/G)$ - функция Хевисайда.

Так как время процесса ударного взаимодействия мало, то можно ограничиваться первым членом лучевого ряда (1.10). В этом случае в сочетании с контактной теорией Герца задача сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения либо относительно величины местного смятия материалов соударяющихся тел, либо относительно величины контактной силы. Решение уравнение такого типа строится либо при помощи степенного ряда с дробными показателями [137], либо с помощью численных методов.

Чтобы уточнить полученное одночленное решение, можно построить многочленное лучевое разложение. С этой целью определяющие уравнения контактирующих тел дифференцируют k раз по времени и записывают на

различных сторонах волновой поверхности, а потом берут их разность. Затем используют условия совместности, которые во многих практически важных случаях для физических компонент искомым величин принимают вид [132]

$$G \left[\frac{\partial Z_{,(k)}}{\partial s} \right] = - [Z_{,(k+1)}] + \frac{\delta [Z_{,(k)}]}{\delta t}, \quad (1.11)$$

где s - пространственная координата вдоль луча, а остальные две пространственные координаты являются одновременно и поверхностными координатами на волновой поверхности, при этом все три координатные линии являются взаимно ортогональными, а $\delta/\delta t$ - δ - производная по времени [33].

Рекуррентные соотношения, полученные в результате применения такой процедуры, позволяют определить скачки производной по времени от искомой функции любого порядка, входящие в лучевой ряд (1.10). Однако возникающие трудности при подсчете скачков высших порядков не позволяют удерживать большое количество членов в лучевых рядах.

В задачах соударения предварительно напряженных тонких тел часто необходимо учитывать напряжение в срединной поверхности, которое также называется многими авторами как «мембранный эффект» или «мембранное усилие». Обобщение волновой теории удара на случай учета растяжения срединной поверхности в задачах поперечного удара упругого шара по упругой балке Тимошенко, пластинке Уфлянда-Миндлина и тонкостенной балке открытого профиля было развито в работах Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой [29,38,133,137,135],

Так, для решения задачи ударного взаимодействия упругой пластинки Уфлянда-Миндлина с учетом растяжения срединной поверхности сводится к решению уравнения движения зоны контакта [137]:

$$2\pi a N_r \frac{\partial w}{\partial r} + 2\pi a Q_r + P(t) = \rho h a^2 \ddot{w} \quad (1.12)$$

где N_r и Q_r - продольная и поперечная силы, w - перемещение, a - радиус контактной области, ρ - плотность, h - толщина пластинки.

Затем все величины в уравнении (1.12) были выражены через местное смятие α , что позволило получить следующее дифференциальное уравнение относительно $A = \dot{\alpha}$:

$$A \frac{dA}{d\alpha} + \frac{gb}{(e\alpha + g)^2} A = -\frac{k}{m} \alpha^{3/2} \quad (1.13)$$

где

$$b = \frac{k}{2\pi\rho R^{1/2}}, \quad e = \frac{G^{(1)2} (1-\sigma)}{G^{(2)2} \sigma}, \quad g = G^{(2)} h \quad (1.14)$$

$G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ - скорости распространения продольной и поперечной волн.

Таким образом, насколько известно автору, впервые растяжение срединной поверхности в задачах ударного взаимодействия было учтено в работах Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой при решении задачи об ударе упругого шара по упругой балке типа Тимошенко и пластинке Уфлянда-Миндлина [29,38,133], а также по упругой тонкостенной балке открытого профиля типа Тимошенко [135]. Эти задачи были позднее включены в их обзорную статью [137], посвященную волновой теории удара и опубликованную в 2007 году в журнале «The Shock and Vibration Digest».

Однако в 2014 году Вершинин В.В. опубликовал статью [164], в которой рассматривал удар упругого шара по упругой балке Тимошенко с учетом растяжения срединной поверхности мишени, но решение было построено на абсолютно неверных формулах и уравнениях. Так, на стр. 345 в [164] можно найти неверную формулу (6)

$$[V] = -\frac{1-\nu}{\nu} G_1 \frac{\alpha}{h_b},$$

где $[V]$ - скачок скорости продольного перемещения на плоской нестационарной волне, распространяющейся вдоль балки в течение ударного процесса со скоростью $G_1 = \sqrt{E/\rho}$, где E - модуль Юнга, ρ - плотность, ν - коэффициент Пуассона, h_b - толщина балки, α - величина местного смятия материалов мишени и ударника. Но вышеприведенная формула справедлива для упругой тонкой пластинки, но не для балки.

Правильная формула для балки (которая будет использоваться далее в главе 3) была получена 50 лет назад в классической работе Ландау Л.Д. и Лифшица Е.М. [12]

$$[V] = -\frac{1}{\nu} G_1 \frac{\alpha}{h_b}. \quad (1.15)$$

На той же странице (стр. 345 в статье [164]), уравнение движения контактной области было представлено в следующем виде:

$$2N \frac{\partial w}{\partial x} + 2Q + P(t) = \rho h \pi a^2 \ddot{w},$$

где N - продольная сила, w - прогиб балки, Q - поперечная сила, $P(t)$ - контактная сила, x - координата вдоль оси балки, точки над величинами

обозначают производные по времени, a - радиус контактной области. Таким образом автор рассматривал в [164] плоские нестационарные волны (поверхности разрыва), которые распространяются от границы контактной области в течение процесса ударного взаимодействия. Однако если контактная область имеет форму круглого диска с объемом $h\pi a^2$, тогда волны, распространяющиеся от ее границы, представляют собой расходящиеся окружности.

Для того чтобы волны, распространяющиеся от границы контактного пятна, были плоскими, контактная область должна иметь форму прямоугольного параллелепипеда с объемом $2aF$, где F - площадь поперечного сечения балки. Тогда уравнение принимает вид

$$2N \frac{\partial w}{\partial x} + 2Q + P(t) = 2aF \rho \ddot{w}.$$

На той же странице (стр. 345 в [164]), представлено разрешающее уравнение

$$\ddot{\alpha} + \frac{1}{m} P(\alpha) + c_b \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{P(\alpha)}{1 + e_b \alpha} \right) = 0,$$

где $c_b = (2\rho F G_2)^{-1}$, $G_2 = \sqrt{K\mu/\rho}$, $e_b = \frac{(1-\nu)}{\nu} \frac{G_1^2}{G_2^2} h_b$, K - коэффициент сдвига, μ - модуль сдвига. Это уравнение также является неверным для балки, а из сравнения коэффициента e_b из работы Вершинина [164] с коэффициентом e в формулах (1.14) видно, что автор в [164], рассматривая задачу о балке, ошибочно воспользовался формулой для пластинки.

Корректное уравнение, в котором пренебрегают инерцией зоны контакта (это важное допущение не указано в статье Вершинина [164]), имеет вид

$$\ddot{\alpha} + \frac{1}{m}P(\alpha) + c_b \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{P(\alpha)}{1+e\alpha} \right) \dot{\alpha} = 0 \quad (1.16)$$

с правильным коэффициентом $e = \frac{G_1^2}{G_2^2} \frac{1}{\nu h_b}$.

Следовательно, из вышеприведенных рассуждений очевидно, что все численные выкладки, приведенные в статье [164], можно считать неверными.

Далее в главе 3 будет представлено не только корректное уравнение, описывающее ударное взаимодействие упругой балки Тимошенко, но также приведен анализ уравнений, описывающих поведение вязкоупругой балки типа Тимошенко при соударении с жестким, упругим или вязкоупругим шаром с учетом изменения вязкоупругих свойств материала мишени в области контакта.

1.2. Подходы к решению задач ударного взаимодействия вязкоупругих тел

Одной из первых попыток обобщить решение Герца для упругого случая на вязкоупругий случай является статья Рао [123]. Он предположил, что разницей в контактных площадях между упругим и вязкоупругим случаями можно пренебречь (это предположение будет рассмотрено позже). Он также предположил, что вязкоупругий материал был упругим при объемном сжатии. При этих предположениях он смог получить одно интегро-дифференциальное уравнение, которое он решил численно, предполагая, что материал имел конечное число времен релаксации и ретардации.

Lee и Radok [101], используя принцип соответствия Вольтерра, представили решение задачи ударного взаимодействия вязкоупругих тел, заменяя упругие константы в решении соответствующей упругой задачи вязкоупругими функциями. Затем было показано, что решение удовлетворяет

необходимым граничным условиям. Однако было обнаружено, что решение для глубины локального смятия $\alpha(t)$ было действительно только для неубывающего $\alpha(t)$.

Graham [86] позднее привел более «общую» постановку задачи путем обобщения решения Буссинеска и решения пары двойных интегральных уравнений, которые часто возникают в задачах данного типа со смешанными граничными условиями. В [86] было предположено, что поведение материала было идентичным и при сдвиге, и при растяжении, таким образом, делая коэффициент Пуассона независимым от времени, что позволило использовать обобщенную функцию напряжения Папковича-Нейбера в качестве базиса для анализа.

Nairn [121] в своей работе экспериментально исследовал полимерный материал на удар. Была предпринята попытка полного анализа ударного взаимодействия, включая эффекты инерционной нагрузки, внешнего демпфирования (трение), внутреннего демпфирования (вязкоупругая релаксации), а также учет высокочастотных колебаний. Наиболее содержательным оказался анализ экспериментальных данных полимерного материала Делрин полиацетал, в котором затухание высокочастотных колебаний приписывалось эффекту вязкоупругой релаксации в полимере. Автор экспериментальным путем получил информацию о релаксационных процессах в материале. В результате было выявлено, что прямые наблюдения за релаксационными процессами позволяют дать количественную характеристику влияния последних на твердость полимерного материала.

В работе [154] исследовалось акустическое излучение вязкоупругой балки при ударе стальным шаром теоретически и экспериментально. Поперечные колебания свободно оперной балки были проанализированы с помощью метода разложения по собственным формам и приближенного метода с теорией Герца, с целью оценки силы ударного воздействия. Волновое уравнение было решено

относительно акустического давления, излучаемого балками круглого и эллиптического поперечных сечений. Авторы получили неплохое согласование теоретических результатов с результатами экспериментов.

Анализ опубликованных работ по изучаемой теме показал, что в большинстве работ, посвященным динамическим контактными задачам, исследовались воздействия ударников на вязкоупругие полупространства [7,42,54,61,66,82,93,95,99,101,123,153,168], а количество статей, в которых рассматривались ударные воздействия на вязкоупругие балки или пластинки весьма ограничено [28,91,92,94,98,117,121,154].

Это объясняется прежде всего тем, что в задачах ударного взаимодействия вязкоупругих тел есть много трудностей, связанных с тем, что константы материала E (модуль Юнга), ν (коэффициент Пуассона), μ (модуль сдвига) и K (модуль объемного растяжения-сжатия) становятся операторами, зависящими от времени. В случае удара вязкоупругого сферического ударника по прямолинейной вязкоупругой балке коэффициент жесткости в законе Герца становится зависящим от времени сложным оператором $\tilde{k}(t)$:

$$\tilde{k}(t) = \frac{4}{3} \tilde{E} \sqrt{R}, \quad (1.17)$$

$$\frac{1}{\tilde{E}} = \frac{1 - \tilde{\nu}_{im}^2}{\tilde{E}_{im}} + \frac{1 - \tilde{\nu}_{beam}}{\tilde{E}_{beam}}, \quad (1.18)$$

где \tilde{E}_{im} , $\tilde{\nu}_{im}$ и \tilde{E}_{beam} , $\tilde{\nu}_{beam}$ - вязкоупругие операторы Юнга и операторы Пуассона ударника и балки. Эти операторы соответствуют материальным константам упругого тела.

Из соотношений (1.17) и (1.18) следует, что для определения оператора $\tilde{k}(t)$ необходимо прежде всего задаться априори или найти экспериментальные зависимости операторов Юнга и Пуассона. В инженерной практике задачу зачастую упрощают, считая коэффициент Пуассона, не зависящим от времени.

Однако экспериментальные данные показывают, что для большинства вязкоупругих материалов коэффициент Пуассона не является константой. Так, академик Ю.Н. Работнов писал по этому поводу следующее [27]:

«Некоторые авторы делают предположение о том, что коэффициент Пуассона представляет собой не оператор, а постоянную. Выгода такого предположения заключается в следующем. Если упругое тело подвержено действию заданной системы сил, постоянных или переменных во времени, распределение напряжений в теле зависит только от коэффициента Пуассона. Согласно принципу Вольтерра, если $\tilde{\nu} = \nu = \text{const}$, то никакого перераспределения напряжений в теле не происходит, перемещения же его точек, которые в упругом случае пропорциональны модулю E , находятся теперь простым умножением оператора \tilde{E} на известную функцию времени. Однако предположение о постоянстве коэффициента Пуассона не подтверждается экспериментом и может быть оправдано только простотой получающихся результатов

Более логичное предположение, вытекающее из опытных данных, состоит в том, что объемная деформация чисто упруга, следовательно, объемный модуль есть константа или

$$\frac{\tilde{E}}{1-2\tilde{\nu}} = \frac{E}{1-2\nu} \gg.$$

Таким образом, для решения задач ударного взаимодействия вязкоупругих тел необходимо умение работать с операторными выражениями.

Академиком Ю.Н. Работновым была введена дробно-экспоненциальная функция в 1948 [25], а позже были предложены вязкоупругие модели, содержащие операторы дробного порядка [26,27], которые хорошо описывали экспериментальные данные по вязкоупругим материалам. Была разработана алгебра дробных операторов, имеющих размерность, что осложняло их использование для решения сложных краевых задач.

Если в 50-70е годы использование аппарата дробного исчисления было весьма экзотическим явлением, то в настоящее время наблюдается обширный интерес исследователей во всем мире к использованию моделей, содержащих дробные производные, дробные интегралы и другие операторы дробного порядка. Количество публикаций с использованием таких моделей растет в геометрической прогрессии с каждым годом, поскольку дробное исчисление стало играть важную роль в математическом моделировании различных процессов в науке, технике и медицине, о чем свидетельствуют современные исторические исследования [67,69,110,111,114,128,129,163] и многочисленные монографии в данном направлении [9,15,18,30,35,44,47,50,56,57,68,72,85,90,97,115,126,145,160,170], а также обзорные статьи [46,71,74,79,96,112,118,120,122,134,137,138,141,143,155,156,169,172], опубликованные за последние два десятилетия.

Однако акцент на решение динамических задач вязкоупругости и механики деформируемого твердого тела и конструкций был сделан именно российской школой [129,134,137,141,143]. Таблица, представленная в ретроспективе профессора Ю.А. Россихина [129], дает исторический обзор использования вязкоупругих моделей на основе дробного исчисления, предложенных российскими и западными учеными, а также их приложений при решении задач механики вплоть до восьмидесятых годов прошлого столетия в динамических задачах вязкоупругости. Более того, две основополагающие работы [134] и [131], появившиеся в *Applied Mechanics Reviews* в 1997 и 2010 годах соответственно, представляют собой обзоры более пятисот источников в области механики твердого тела и строительной механики, основанных на применении моделей с дробными операторами.

В обзорах отмечено, что в основном модели с дробными операторами использовались для решения различных задач механики: исследовались свободные и вынужденные колебания вязкоупругих осцилляторов [19-

24,58,76,77,109,129,134,141,158,], вязкоупругих стрежней [1,7,107,136,141,], балок [41,43,45,49,52,63,64,70,79,80,81,83,84,88,89,91,103-104,108,124,125,127,137,141,143,146-151,159,161,162,165-167,171], пластинок [92,94,140-142,152,], оболочек [141], висячих мостов [141] и механических систем с несколькими степенями свободы [141].

В обзорах [134,141] было показано, что динамические задачи о колебаниях балок и других механических систем с конечных и бесконечно большим числом степеней свободы могут быть сведены к изучению колебаний набора осцилляторов.

В нашем обзоре мы не будем повторять те работы, которые приведены в [134,141], а остановимся на статьях, опубликованных после 2010 года.

Но сначала отметим, что в динамических задачах механики из всего разнообразия определений производных дробного порядка [30] наиболее используемой является производная Римана-Лиувилля дробного порядка [141]

$$D^\gamma \sigma = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sigma(t')}{\Gamma(1-\gamma)(t-t')^\gamma} dt', \quad (1.19)$$

где γ ($0 < \gamma \leq 1$) – дробный параметр и $\Gamma(1-\gamma)$ гамма-функция.

Дробные производные, с математической точки зрения, являются непосредственным продолжением обычных производных, однако они имеют свои математические свойства и определения, с которыми можно познакомиться в классической монографии Самко С.Г., Килбаса А.А. и Маричева О.И. «Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения» [30], также в недавно опубликованных монографиях [35, 72,85,160,170].

Первым поколением ученых, использовавших дробное исчисление в вязкоупругости были [129]: Gemant (1938), Scott-Blair (1944), а в России - Герасимов А.Н. (1948) [4] и Работнов Ю.Н (1948) [25], чьи исследования были

опубликованы на русском языке, поэтому их содержание оставалось неизвестным для большинства западных ученых до того момента, как они были переведены на английский язык [129].

Вторым поколением российских ученых, занимавшихся этой проблемой, были Шермергор Т.Д., Мешков С.И. и Россихин Ю.А. [6,7,10,13-17,37]. Результаты их исследований впервые были опубликованы на русском языке, затем переведены на английский язык. Обзор ранних исследований подробно приведен в обзоре [135] и ретроспективе [129]. В обзорной статье [135], в частности, была показана связь между дробными производными и соотношениями Больцмана-Вольтера с сингулярным ядром Работнова, о чем еще писал сам Ю.Н. Работнов в своей классической статье, опубликованной в 1948 году [25].

Россихин Ю.А. и Шитикова М.В. [138,141,145] неоднократно демонстрировали в своих многочисленных исследованиях взаимосвязь дробных операторов, описывающих свойства вязкоупругих сред, с дробными экспоненциальными операторами Ю.Н. Работнова, предложенными для изучения наследственных сред, чтобы объяснить физический смысл дробного параметра в задачах удара и соединить его с изменениями в микроструктуре материала. Отмечалось, что простейшими моделями с дробными производными, которые используются в механике, являются следующие модели:

модель Кельвина-Фойгта

$$J_0 \sigma = \epsilon + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma \epsilon, \quad (1.20)$$

модель Максвелла

$$J_\infty (\sigma + \tau_\epsilon^\gamma D^\gamma \sigma) = \tau_\epsilon^\gamma D^\gamma \epsilon, \quad (1.21)$$

модель стандартного линейного тела

$$J_0(\sigma + \tau_\epsilon^\gamma D^\gamma \sigma) = \epsilon + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma \epsilon, \quad (1.22)$$

где

$$\left(\frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma} \right)^\gamma = \frac{J_\infty}{J_0} = \frac{E_0}{E_\infty}, \quad (1.23)$$

σ - напряжение, ϵ - деформация, τ_ϵ - время релаксации, τ_σ - время ретардации (время ползучести), E_∞ , J_∞ и E_0 , J_0 - нерелаксированные и релаксированные значения модуля упругости и податливости соответственно.

Соотношения (1.20)-(1.23), насколько известно соискателю, были впервые записаны в работах русских ученых Шермергора Т.Д. [37] и Мешкова С.И. [13] в 1966 и 1967 годах соответственно, которые в 60-е годы работали в Воронежском политехническом институте, который в настоящее время реорганизован в Воронежский государственный технический университет. Но в западной литературе очень часто эти модели незаслуженно приписывают итальянским ученым Caputo и Mainardi [65,115] даже русскоязычные исследователи [9,19,172].

В работах Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В. [138,141,145] показана связь простейшей модели (1.22) с дробными производными с безразмерным дробным оператором Ю.Н. Работнова $(1 + \tau_i D^\gamma)^{-1}$, которая будет использоваться в дальнейших исследованиях в данной диссертационной работе:

$$\epsilon = J_\infty \left[\sigma + v_\sigma (1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma)^{-1} \sigma \right], \quad (1.24)$$

$$\sigma = E_\infty \left[\epsilon - v_\epsilon (1 + \tau_\epsilon^\gamma D^\gamma)^{-1} \epsilon \right], \quad (1.25)$$

где ν_ϵ и ν_σ - дефекты модулей и податливости, которые подробно будут рассмотрены в последующих главах.

Одной из первых работ, в которой дробно-экспоненциальные операторы Работнова были использованы для решения задач контактного взаимодействия, была статья М.И. Розовского [28], который в 1973 году поставил задачу об ударе жесткого шара по балке, наследственные свойства которой описываются размерным оператором Работнова.

Однако в западной литературе преимущественно используются непосредственно дробные производные для моделирования вязкоупругих свойств при колебаниях механических систем.

Так, зависимость характеристик вязкоупругого демпфирующего материала в возмущенном слое, моделирующем демпферы в сооружениях, исследовано в [95]. Авторы использовали процедуру статистического моделирования на основе метода статистической калибровки для проектирования структурно-акустической системы. В работе [41] исследовалось динамическое поведение свободно опертой балки. Было показано, что дробные производные лучше описывают демпфирующие свойства балки.

Устойчивость продольно движущейся балки на основе модели Кельвина-Фойгта, содержащей дробные производные, при наличии параметрических резонансов было рассмотрено в [166]. При этом предполагалось, что осевая скорость изменялась гармонически около постоянной средней скорости, и был использован метод многих масштабов для решения разрешающего нелинейного уравнения в частных производных. Было показано, что балка, материал которой смоделирован с помощью дробных производных, имеет меньшую устойчивость по сравнению с обыкновенной продольно движущейся балкой.

Дифференциальное уравнение шестого порядка с дробным вязкоупругим ядром было получено в [43], где показано, что поперечные инерции сдвига и

поворота оказывают существенное влияние на реакцию сэндвич-балки даже при отношении длины к толщине более 30 для слоев покрытия. С использованием теории конечных элементов в [49] изучены большие прогибы вязкоупругих балок на основе модели стандартного линейного тела с дробными производными. В [52] динамическое поведение вязкоупругой балки изучалось, используя метод гомотопического возмущения. Реакция вязкоупругой балки Эйлера-Бернулли под квази-статической и динамической нагрузками изучалась в [70]. Используя метод вычетов, в [108] исследовали стохастическую реакцию движущейся в продольном направлении вязкоупругой балки на основе уравнения Кельвина-Фойгта дробного порядка.

В [124] исследовались вынужденные колебания вязкоупругой балки при помощи модели Кельвина-Фойгта с дробной производной. Предложенный метод аппроксимации перемещений наряду с методом Галеркина использованы для дискретизации дифференциальных уравнений в частных производных в систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, для решения которых использовались радиально-базисные функции и квадратурные формулы Синка. На численных примерах было изучено влияние параметров модели на реакцию вязкоупругой балки.

Обзор немногочисленных работ, в которых дробные операторы применяются в задачах ударного взаимодействия в случае, когда мишень обладает вязкоупругими свойствами, приведен в [141].

При изучении задач взаимодействия вязкоупругих тел возникают следующие вопросы: действительно ли полезны эти модели с дробными производными? Какая новая информация может быть получена нами при помощи этих моделей по сравнению с обычными моделями? Ответом на эти вопросы является тот факт, что дробные операторы способны моделировать эффект наследственной памяти, поскольку его эволюция во времени лучше описывается дробными дифференциальными уравнениями, в то время как

стандартные математические модели с производной целого порядка, в том числе нелинейные модели, не работают должным образом во многих случаях. Эволюция во времени описывается дробным параметром, который может изменяться от нуля до единицы, позволяя варьировать вязкостью. Это явление возможно, потому что структура материала в пределах контактной зоны соударяющихся тел может быть повреждена при ударе, в результате чего происходит уменьшение вязкости.

В последнее время научный коллектив под руководством профессоров Росихина Ю.А. и Шитиковой М.В. продвинулся значительно вперед других исследователей и является пионером в решении задач ударного взаимодействия вязкоупругих тел с использованием различных моделей, содержащих операторы дробного порядка, поскольку владеет алгеброй безразмерных дробных операторов, которая позволяет с успехом расшифровывать сложнейшие операторы, которые встречаются в задачах ударного взаимодействия вязкоупругих ударников и мишеней.

Часть этих исследований, касающихся задач низкоскоростного удара жесткого, упругого или вязкоупругого шара по упругой балке Бернулли-Эйлера, находящейся в вязкой среде, или вязкоупругой балке типа Тимошенко, была выполнена диссертантом и подробно изложена в последующих главах.

Глава 2. Анализ балок Бернулли-Эйлера на ударные воздействия

Затухающие колебания балок и других инженерных конструкций на основе моделей с дробными производными и другими операторами дробного порядка изучались в работах [41,45,49,52,63,64,70,79-81,83,84,89,103-109,124,125,136,141,159,161,162,165-167,171], однако статьи, касающиеся анализа вязкоупругих инженерных конструкций на ударные воздействия, демпфирующие свойства которых описываются с помощью моделей на основе операторов дробного порядка, встречаются в литературе достаточно редко [94,127,137,141-143,151,152].

Главная цель данной главы - сформулировать задачу о поперечном ударе вязкоупругого шара по упругой балке Бернулли-Эйлера, находящейся в вязкоупругой среде, для случая, когда вязкоупругие параметры ударника описываются с помощью модели стандартного линейного твердого тела с дробной производной, в то время как демпфирующие свойства окружающей среды задаются при помощи модели Кельвина-Фойгта с дробной производной с другим параметром дробности.

Изложенные в данной главе исследования опубликованы в работах [148,149].

2. 1. Внешнее и внутреннее трение и гипотеза Рэлея

В справочной литературе о колебаниях инженерных систем, в частности в справочнике "Прочность. Устойчивость. Колебания" под редакцией Болотина В.В. и Москаленко В.Н. [3], изданном в 1968 г., в главе 7 на стр. 373 приводится

следующее рассуждение об учете внешнего и внутреннего трения при колебаниях пластин:

"Простейшая модель, учитывающая влияние внешнего трения, основана на гипотезе, что интенсивность силы внешнего трения q_* пропорциональна скорости прогиба в данной точке $\left(q_* = -2k \frac{\partial w}{\partial t} \right)$. Соответствующее дифференциальное уравнение колебаний пластинки постоянной толщины имеет вид

$$D\Delta\Delta w + 2k \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q. \quad (14)$$

Из большого количества моделей, отражающих влияние внутреннего трения, простейшей и, по-видимому, наиболее распространенной является модель, основанная на гипотезе Кельвина, что силы внутреннего трения имеют вязкий характер.

Дифференциальное уравнение колебаний пластинки из такого материала имеет вид

$$D\Delta\Delta \left(w + \chi \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q. \quad (15)$$

Коэффициент вязкости χ войдет также в выражения для моментов и перерезывающих сил."

Однако в работе [152] показано, что нет никакой разницы между уравнениями (14) и (15), если перейти к обобщенным перемещениям и использовать гипотезу Рэля [11,31]. Справедливость этого утверждения тем более можно показать на примере балки Бернулли-Эйлера.

Для этого рассмотрим задачу поперечного удара вязкоупругого шара по вязкоупругой балке Бернулли-Эйлера (Рис.2.1), когда вязкоупругие свойства мишени описываются с помощью модели Кельвина-Фойгта с дробной производной.

В этом случае уравнения движения шара радиуса R и вязкоупругой балки длины L имеют следующий вид [148]:

$$m\ddot{y} = -P(t), \quad (2.1)$$

$$\tilde{E}I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \ddot{w} = P(t) \delta\left(x - \frac{L}{2}\right), \quad (2.2)$$

где m - масса шара, y - перемещение шара, $P(t)$ - контактная сила, приложенная в середине пролета балки, $w(x,t)$ - прогиб балки, I - момент инерции поперечного сечения балки относительно главной оси, A - площадь поперечного сечения балки, ρ - плотность, $\delta(x - \frac{L}{2})$ - дельта-функция Дирака, x - координата вдоль оси балки, точки над величинами обозначают частные производные по времени, \tilde{E} - некоторый вязкоупругий оператор, который в рассматриваемом случае будем записывать при помощи модели Кельвина-Фойгта с дробной производной [37,134]

$$\tilde{E} = E_1(1 + \tau_{\sigma_1}^{\gamma_1} D^{\gamma_1}), \quad (2.3)$$

E_1 - релаксированный модуль упругости, τ_{σ_1} - время ретардации, γ_1 ($0 < \gamma_1 \leq 1$) - параметр дробности, т.е. порядок дробной производной Римана-Лиувилля

$$D^{\gamma_1} x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-t')^{-\gamma_1}}{\Gamma(1-\gamma_1)} x(t') dt', \quad (2.4)$$

и $\Gamma(1-\gamma_1)$ - гамма-функция.

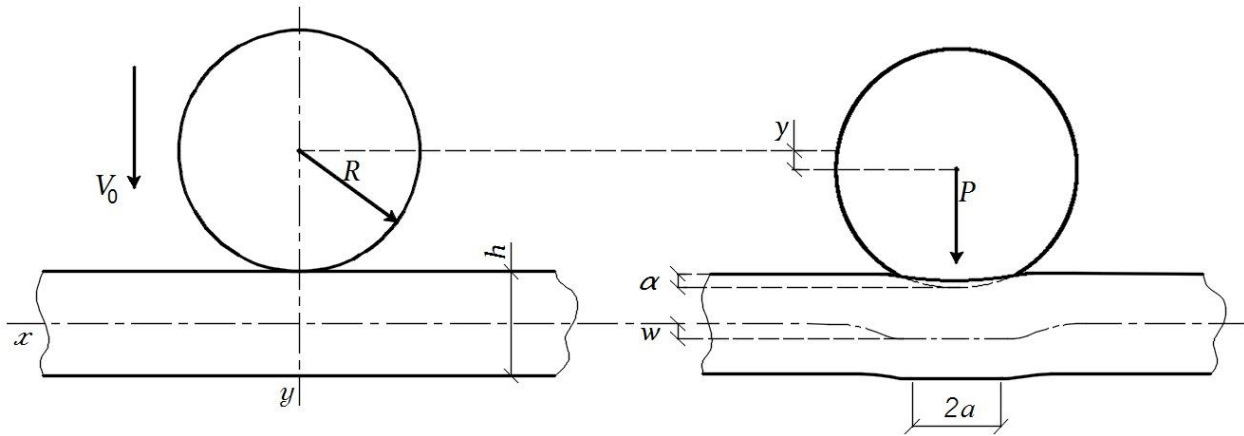


Рис. 2.1 Схема ударного взаимодействия вязкоупругого шара с балкой Бернулли-Эйлера

К уравнениям (2.1) и (2.2) следует присоединить следующие начальные условия:

$$w(x, 0) = 0, \quad \dot{w}(x, 0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = V_0, \quad (2.5)$$

где V_0 - начальная скорость шара в момент удара.

Дважды интегрируя уравнение (2.1), получим

$$y(t) = -\frac{1}{m} \int_0^t P(t')(t-t') dt' + V_0 t. \quad (2.6)$$

Раскладывая перемещение $w(t)$ для шарнирно опертой балки Бернулли-Эйлера по собственным функциям $W_n(x)$, имеем

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) T_n(t), \quad (2.7)$$

где $T_n(t)$ - обобщенные перемещения и

$$W_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (2.8)$$

Подставляя соотношения (2.7) в уравнение (2.2) с учетом (2.3) и учитывая ортогональность собственных функций (2.8) на отрезке от 0 до L , получим бесконечную систему несвязанных уравнений

$$\ddot{T}_n(t) + \Omega_n^2(1 + \tau_{\sigma_1}^{\gamma_1} D^{\gamma_1})T_n(t) = F_n P(t) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.9)$$

каждое из которых описывает вынужденные колебания вязкоупругого осциллятора под действием силы [134], где Ω_n - собственные частоты колебаний балки

$$\Omega_n^2 = \frac{E_1 I}{\rho A} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4, \quad (2.10)$$

$$\text{и } F_n = \frac{2}{\rho A L} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Теперь покажем, что такое же уравнение (2.9) можно получить, если рассмотреть задачу о колебаниях упругой балки в вязкой среде.

Действительно, уравнение (2.1), описывающее колебания упругой балки в вязкой среде, демпфирующие свойства которой моделируется дробной производной, имеет вид

$$\frac{E_1 I}{\rho A} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\mu}{\rho A} D^{\gamma_1} w + \ddot{w} = \frac{1}{\rho A} P(t) \delta\left(x - \frac{L}{2}\right), \quad (2.11)$$

где μ - коэффициент вязкости.

Подставляя разложение (2.7) в уравнение (2.11) и учитывая ортогональность собственных функций (2.8) на отрезке от 0 до L , получим бесконечную систему несвязанных уравнений

$$\ddot{T}_n(t) + \frac{\mu_n}{\rho A} D^{\gamma_1} T_n(t) + \Omega_n^2 T_n(t) = F_n P(t), \quad (n=1, 2, \dots), \quad (2.12)$$

где μ_n - коэффициент вязкости n -ой гармоники.

Учитывая гипотезу Рэлея о пропорциональности матриц упругости и вязкости [11,31], т.е.

$$\frac{\mu_n}{\rho A} = \Omega_n^2 \tau_{\sigma_1}^{\gamma_1}, \quad (2.13)$$

где $\tau_{\sigma_1}^{\gamma_1}$ - коэффициент пропорциональности, уравнение (2.12) сводится к уравнению (2.9).

Таким образом, наше утверждение доказано.

2.2. Функция Грина для модели Кельвина-Фойгта, содержащей дробную производную

Для того чтобы найти решение уравнения (2.11), необходимо найти функцию Грина $G_n(t)$ для каждого осциллятора (2.9)

$$G_n(t) = A_{0n}(t) + A_n e^{-\alpha_n t} \sin(\omega_n t - \varphi_n), \quad (2.14)$$

где индекс n указывает порядковый номер осциллятора, а все величины, входящие в (2.14), имеют ту же структуру и тот же физический смысл, что и соответствующие величины в [141,143], т.е. A_n – амплитуда, α_n – коэффициент затухания, а ω_n и φ_n - частота и фаза соответственно.

Из уравнения (2.14) видно, что функция Грина содержит два члена, один из которых, $A_{0n}(t)$, описывает дрейф положения равновесия и, как

показано в [134,141], представляет собой интеграл, включающий функцию распределения динамических и реологических параметров, в то время как другой член представляет собой произведение двух зависящих от времени функций, экспоненты и синусоиды, и описывает затухающие колебания вокруг дрейфующего положения равновесия.

Теперь запишем уравнение (2.9) через функцию Грина $G_n(t)$

$$\ddot{G}_n(t) + \Omega_n^2 \tau_{\sigma_1}^{\gamma_1} D^{\gamma_1} G_n(t) + \Omega_n^2 G_n(t) = F_n \delta(t) \quad (n=1,2,\dots). \quad (2.15)$$

Используя преобразования Лапласа к уравнению (2.15), получим

$$\bar{G}_n = \frac{F_n}{p^2 + \kappa_n p^{\gamma_1} + \Omega_n^2}, \quad (2.16)$$

где черта над функцией обозначает трансформанту Лапласа, p - параметр преобразования и $\kappa_n = \Omega_n^2 \tau_{\sigma_1}^{\gamma_1}$.

Решение в пространстве оригиналов определяется по формуле обращения Меллина-Фурье

$$G_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{G}_n(p) e^{pt} dp. \quad (2.17)$$

Для вычисления интеграла (2.17) необходимо определить все особые точки функции \bar{G}_n . Функция (2.16) имеет точки ветвления $p=0$ и $p=-\infty$ и простые полюсы при тех значениях p , которые обращают в нуль знаменатель формулы (2.16), т.е. являются корнями уравнения

$$p^2 + \kappa_n p^{\gamma_1} + \Omega_n^2 = 0. \quad (2.18)$$

Поскольку к многозначным функциям, имеющим точки разветвления $p=0$ и $p=-\infty$, теорема обращения применима лишь для первого листа римановой поверхности $-\pi < \arg p < \pi$, $0 < |p| < \infty$, то замкнутый контур следует

составить из отрезка вертикальной прямой $[c - i\sqrt{R^2 - c^2}, c + i\sqrt{R^2 - c^2}]$, $c > 0$, отрезков $-R < s < -\rho$ по берегам разреза вдоль отрицательной действительной полуоси и дуг окружностей, одна из которых c_ρ , $|p| = \rho$ замыкает берега разреза, а две другие, c_R , $|p| = R$, соединяют берега разреза с вертикальным отрезком (Рис. 2.2). В силу леммы Жордана интегралы по кривым c_R при $R \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, и интеграл по c_ρ при $\rho \rightarrow 0$ стремится к нулю.

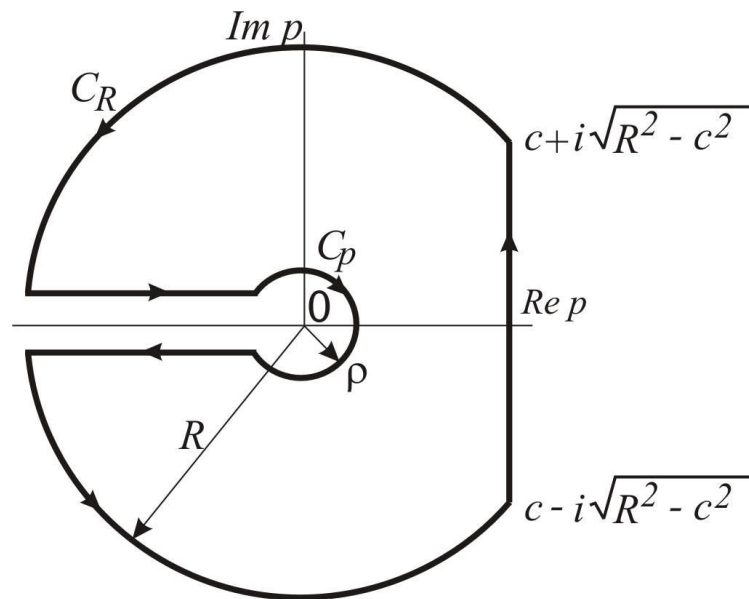


Рис. 2.2 Контур интегрирования

Используя основную теорему теории вычетов, можно записать решение (2.17) в виде

$$G_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty [\bar{G}_n(se^{-i\pi}) - \bar{G}_n(se^{i\pi})] e^{-st} ds + \sum_k \text{res} [\bar{G}_n(p_n^k) e^{p_n^k t}], \quad (2.19)$$

где сумма берется по всем особым точкам (полюсам).

Первое слагаемое в выражении (2.19) вычисляется непосредственно и имеет вид функции $A_{0n}(t)$, которая описывает дрейф положения равновесия

$$A_{0n}(t) = \int_0^{\infty} \tau^{-1} B_n(\tau, \kappa_n) e^{-t/\tau} d\tau, \quad (2.20)$$

где функция $B_n(\tau, \kappa_n)$

$$B_n(\tau, \kappa_n) = \frac{\sin \pi \gamma_1}{\pi} \frac{F_n \tau [\theta_n(\tau)]^{-1}}{[\theta_n(\tau)]^{-1} \kappa_n^{-1} \tau^{\gamma_1-2} + \theta_n(\tau) \kappa_n \tau^{2-\gamma_1} + 2 \cos \pi \gamma_1} \quad (2.21)$$

дает распределение параметров ползучести (ретардации) динамической системы, и

$$\theta_n(\tau) = \tau^2 \Omega_n^2 + 1. \quad (2.22)$$

Вид второго слагаемого в выражении (2.19) зависит от числа корней характеристического уравнения (2.18) при каждом фиксированном значении n . Если опустить n в уравнении (2.18), то оно будет совпадать с уравнением (2.2.1) в разделе. 2.2 из [134], описывающим колебания осциллятора Кельвина-Фойгта с дробной производной. В [134,141] показано, что это характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $(p_n)_{1,2} = r_n e^{\pm i \psi_n} = \alpha_n \pm i \omega_n$. На Рис. 2.3 приведены корни при $n=1$, которые совпадают с Рис.19 в [134], а все дальнейшие формулы этого раздела, (2.2.2) - (2.2.6), относятся к анализу уравнения (2.18).

Так, амплитуда A_n и фаза колебаний φ_n определяются соответственно из следующих соотношений:

$$A_n = 2F_n \left[4r_n^2 + \gamma_1^2 \kappa_n^2 r_n^{2(\gamma_1-1)} + 4\gamma_1 \kappa_n r_n^{\gamma_1} \cos(2-\gamma_1)\psi_n \right]^{-1/2}, \quad (2.23)$$

$$\tan \varphi_n = -\frac{2r_n \cos \psi_n + \gamma_1 \kappa_n r_n^{\gamma_1-1} \cos(1-\gamma_1)\psi_n}{2r_n \sin \psi_n - \gamma_1 \kappa_n r_n^{\gamma_1-1} \sin(1-\gamma_1)\psi_n}. \quad (2.24)$$

Таким образом выражения (2.20)-(2.24) полностью определяют искомую функцию Грина (2.14).

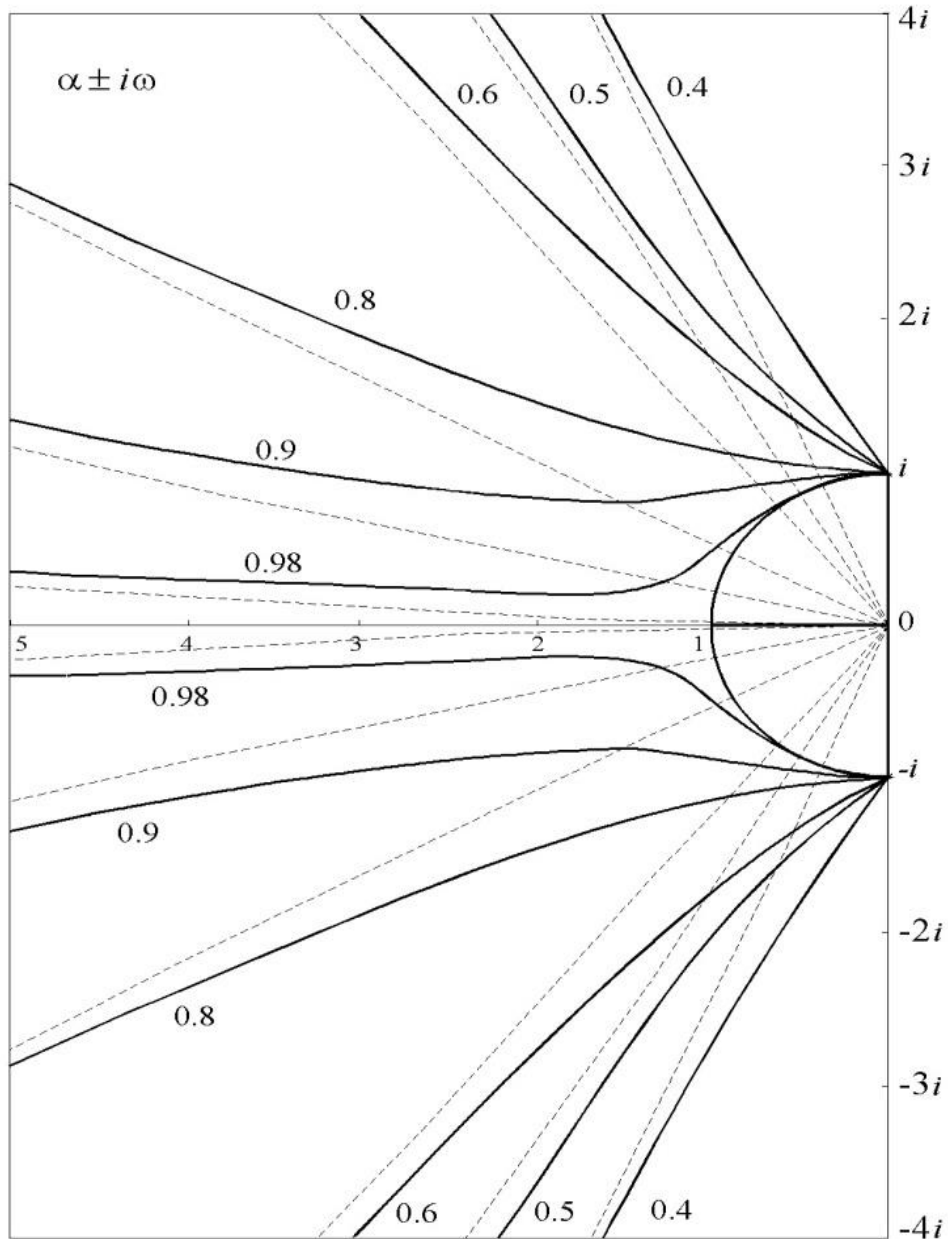


Рис. 2.3 Корни характеристического уравнения (2.18) при $n=1$

2.3. Ударное воздействие вязкоупругого шара по упругой балке Бернулли-Эйлера, находящейся в вязкой среде

2.3.1. Определение контактной силы

Зная функцию Грина, решение уравнения (2.2) запишем в виде

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \int_0^t G_n(t-t') P(t') dt'. \quad (2.25)$$

Введем величину, характеризующую относительное сближение шара и балки, т.е. локальное смятие материалов упругой балки вязкоупругого шара

$$\alpha(t) = y(t) - w\left(\frac{L}{2}, t\right), \quad (2.26)$$

которая связана с контактной силой при помощи обобщенного закона Герца

$$P(t) = \tilde{k} \alpha^{3/2}, \quad (2.27)$$

где

$$\tilde{k} = \frac{4}{3} \sqrt{RE^*} \quad (2.28)$$

- оператор, учитывающий геометрию и вязкоупругие свойства шара и упругие константы материала балки, которые согласно принципу Вольтерра описываются оператором E^*

$$\frac{1}{E^*} = J^* = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\tilde{\nu}_2^2}{\tilde{E}_2}, \quad (2.29)$$

где ν_1 и E_1 - коэффициент Пуассона и модуль Юнга для упругой балки (мишени), а ν_2 и \tilde{E}_2 - вязкоупругие операторы шара (ударника),

соответствующие коэффициенту Пуассона и модулю упругости упругого материала.

В дальнейшем для того чтобы получить интегро-дифференциальное уравнение для величин $\alpha(t)$ и $P(t)$, необходимо задать вид оператора \tilde{E}_2 .

Предположим, что вязкоупругие свойства материала ударника описываются моделью стандартного линейного твердого тела с дробной производной

$$\sigma + \tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} D^{\gamma_2} \sigma = E_0 \left(\varepsilon + \tau_{\sigma_2}^{\gamma_2} D^{\gamma_2} \varepsilon \right), \quad (2.30)$$

где γ_2 - параметр дробности ударника, τ_{ε_2} и τ_{σ_2} - времена релаксации и ретардации, E_0 - релаксированный модуль упругости шара.

Тогда, как это следует из [143,145], оператор \tilde{E}_2 имеет вид

$$\tilde{E}_2 = E_\infty \left[1 - \nu_\varepsilon \varepsilon_\gamma^* \left(\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right) \right], \quad (2.31)$$

где

$$\nu_\sigma = \frac{J_0 - J_\infty}{J_\infty} = \frac{E_\infty - E_0}{E_0}, \quad \nu_\varepsilon = \frac{J_0 - J_\infty}{J_0} = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty}, \quad \frac{\nu_\varepsilon}{\nu_\sigma} = \frac{J_\infty}{J_0} = \frac{E_0}{E_\infty} = \frac{\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2}}{\tau_{\sigma_2}^{\gamma_2}}, \quad (2.32)$$

E_∞ и ν_∞ - нерелаксированные значения модуля упругости и коэффициента Пуассона материала шара, J_0 и J_∞ - релаксированная и нерелаксированная податливости материала ударника, а $\varepsilon_\gamma^* \left(\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right)$ - безразмерный дробный оператор Ю.Н. Работнова [143,145]

$$\varepsilon_\gamma^* \left(\tau_{i2}^{\gamma_2} \right) = \frac{1}{1 + \tau_{i2}^{\gamma_2} D^{\gamma_2}} \quad (i = \varepsilon, \sigma). \quad (2.33)$$

Следуя Ю.Н. Работнову [26,27], предположим, что объемный модуль упругости материала ударника является постоянной величиной, т.е.

$$\frac{\tilde{E}_2}{1-2\tilde{\nu}_2} = \frac{E_\infty}{1-2\nu_\infty}. \quad (2.34)$$

Из уравнения (2.35) с учетом (2.31) видно, что оператор Пуассона можно записать в виде [143]

$$\nu_2 = \nu_\infty + \frac{1}{2}(1-2\nu_\infty)\nu_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right). \quad (2.36)$$

Используя алгебру безразмерных дробных операторов Ю.Н. Работнова, развитую в работах Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой [143,145], можно расшифровать оператор $(1-\tilde{\nu}_2^2)\tilde{E}_2^{-1}$. Так, в [143] было показано, что

$$\frac{1-\tilde{\nu}_2^2}{\tilde{E}_2} = \frac{1-\nu_\infty^2}{E_\infty} \left[1 + \frac{(1-2\nu_\infty)^2 \nu_\varepsilon}{4(1-\nu_\infty^2)} \mathfrak{E}_{\gamma_2}^* \left(\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right) + \frac{3\nu_\sigma}{4(1-\nu_\infty^2)} \mathfrak{E}_{\gamma_2}^* \left(\tau_{\sigma_2}^{\gamma_2} \right) \right]. \quad (2.37)$$

Подставляя оператор (2.37) в (2.29), получим

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^1}{E_1} + \frac{1-\nu_\infty^2}{E_\infty} + \frac{(1-2\nu_\infty)^2 \nu_\varepsilon}{4E_\infty} \mathfrak{E}_{\gamma_2}^* \left(\tau_{\varepsilon_2}^{\gamma_2} \right) + \frac{3\nu_\sigma}{4E_\infty} \mathfrak{E}_{\gamma_2}^* \left(\tau_{\sigma_2}^{\gamma_2} \right). \quad (2.38)$$

Подставляя теперь (2.38) в обобщенный закон Герца (2.27) с учетом уравнений (2.12) и (2.26), получим интегральное уравнение для определения контактной силы

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{4\sqrt{R}} \right)^{2/3} \left[\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_\infty^2}{E_\infty} \right) P(t) + \frac{(1-2\nu_\infty)^2}{4E_\infty} \int_0^t \mathfrak{E}_{\gamma_2} \left(-\frac{t-t'}{\tau_{\varepsilon_2}} \right) P(t') dt' + \right. \\ & \left. + \frac{3\nu_\sigma}{4E_\infty} \int_0^t \mathfrak{E}_{\gamma_2} \left(-\frac{t-t'}{\tau_{\sigma_2}} \right) P(t') dt' \right]^{2/3} = -\frac{1}{m} \int_0^t P(t')(t-t') dt' + V_0 t - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \int_0^t G_n(t-t') P(t') dt', \end{aligned} \quad (2.39)$$

где

$$\mathfrak{E}_{\gamma_2} \left(-\frac{t}{\tau_{i2}} \right) = \frac{t^{\gamma_2-1}}{\tau_{i2}^{\gamma_2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau_{i2})^{\gamma_2 n}}{\Gamma[\gamma_2(n+1)]} \quad (i = \varepsilon, \sigma). \quad (2.40)$$

- дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова [25], которая при $\gamma=1$ переходит в обычную экспоненту, а оператор $\mathfrak{E}_{\gamma}^* (\tau_i^{\gamma})$ переходит в оператор $\mathfrak{E}_1^* (\tau_i)$. Когда $\gamma \rightarrow 0$, функция $\mathfrak{E}_{\gamma} (-t/\tau_i)$ стремится к $\frac{1}{2} \delta(t)$, т.е. к $\frac{1}{2}$ от дельта-функции Дирака.

2.3.2. Определение местного смятия

Для того чтобы найти уравнения относительно $\alpha(t)$, необходимо использовать соотношение (2.26) с учетом выражений (2.6), (2.25), (2.27) и (2.28). Так как формула (2.28) включает в себя оператор \tilde{k} , то необходимо обратить оператор $\tilde{k}^{-1} = \frac{3}{4\sqrt{R}} E^{*-1}$, где оператор E^{*-1} определяется соотношением (2.38). Оператор \tilde{k} может быть представлен в следующем виде [143]:

$$\tilde{k} = l^{-1} \left[1 - e_1 \mathfrak{E}_{\gamma_2}^* (t_1^{\gamma_2}) - e_2 \mathfrak{E}_{\gamma_2}^* (t_2^{\gamma_2}) \right], \quad (2.41)$$

где

$$\begin{aligned}
l &= \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_\infty^2}{E_\infty}, & e_1 &= \frac{b_2 - a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} > 0, & e_2 &= \frac{a_1 - b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} > 0, \\
a_1 &= \frac{t_1^{-\gamma_2}}{t_1^{-\gamma_2} - \tau_{\varepsilon_2}^{-\gamma_2}} > 0, & a_2 &= \frac{t_2^{-\gamma_2}}{t_2^{-\gamma_2} - \tau_{\varepsilon_2}^{-\gamma_2}} > 0, \\
b_1 &= \frac{t_1^{-\gamma_2}}{t_1^{-\gamma_2} - \tau_{\sigma_2}^{-\gamma_2}} > 0, & b_2 &= \frac{t_2^{-\gamma_2}}{t_2^{-\gamma_2} - \tau_{\sigma_2}^{-\gamma_2}} > 0, \\
t_{1,2}^{-\gamma_2} &= \frac{1}{2} \left[\tau_{\varepsilon_2}^{-\gamma_2} (1 + g_1) + \tau_{\sigma_2}^{-\gamma_2} (1 + g_2) \right] \pm \\
&\quad \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\tau_{\varepsilon_2}^{-\gamma_2} (1 + g_1) + \tau_{\sigma_2}^{-\gamma_2} (1 + g_2) \right]^2 + 4g_1 g_2 \tau_{\varepsilon_2}^{-\gamma_2} \tau_{\sigma_2}^{-\gamma_2}}, \\
g_1 &= \frac{(1 - 2\nu_\infty)^2 \nu_{\varepsilon_2}}{4E_\infty}, & g_2 &= \frac{3\nu_{\sigma_2}}{4E_\infty l}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Теперь с учетом (2.41) нелинейное интегральное уравнение для определения величины $\alpha(t)$ принимает вид

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= V_0 t - \frac{k}{m} \int_0^t \left[\alpha^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^2 e_j \int_0^{t'} \mathfrak{E}_{\gamma_2} \left(-\frac{t' - t''}{t_j} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right] (t - t') dt' - \\
&\quad - k \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \int_0^t G_n(t - t') \left[\alpha^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^2 e_j \int_0^{t'} \mathfrak{E}_{\gamma_2} \left(-\frac{t' - t''}{t_j} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right] dt',
\end{aligned} \tag{2.43}$$

где $k = \frac{4\sqrt{R}}{3l}$.

Зная функцию $\alpha(t)$, можно подсчитать контактную силу $P(t)$ с учетом (2.27), (2.28) и (2.41)

$$P(t) = k \left[\alpha^{3/2}(t) - \sum_{j=1}^2 e_j \int_0^t \mathfrak{E}_{\gamma_2} \left(-\frac{t - t''}{t_j} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right]. \tag{2.44}$$

Так как процесс ударного воздействия является кратковременным, то дробно-экспоненциальную функцию Ю.Н. Работнова можно заменить более простым выражением [142]

$$\mathfrak{E}_{\gamma_2} \left(-\frac{t}{t_j} \right) \approx \frac{t^{\gamma_2-1}}{t_j^{\gamma_2} \Gamma(\gamma_2)}. \quad (2.45)$$

Кроме того заметим, что используя предельную теорему для трансформанты Лапласа функции Грина, получим

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \bar{G}_n(p) p = G(0) = 0. \quad (2.46)$$

Иначе говоря, для малых значений времени t функция Грина $G_n(t)$ пропорциональна t и принимает вид

$$G_n(t) \approx t A_n \omega_n \cos \varphi_n. \quad (2.47)$$

Тогда с учетом соотношений (2.45) - (2.47) уравнения (2.43) и (2.44) приводятся к виду

$$\alpha(t) = V_0 t - k \left(\frac{1}{m} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \cos \varphi_n \sin \frac{n\pi}{2} \right) \int_0^t \left[\alpha^{3/2}(t') - \sum_{j=1}^2 \frac{e_j}{t_j^{\gamma_2} \Gamma(\gamma_2)} \int_0^{t'} (t' - t'')^{\gamma_2-1} \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right] (t - t') dt', \quad (2.48)$$

$$P(t) = k \left[\alpha^{3/2}(t) - \sum_{j=1}^2 \frac{e_j}{t_j^{\gamma_2} \Gamma(\gamma_2)} \int_0^t (t - t'')^{\gamma_2-1} \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right]. \quad (2.49)$$

Из уравнения (2.48) видно, что контактная сила в случае ударного взаимодействия балки с вязкоупругим ударником меньше, чем в случае упругого ударника.

2.3.3. Приближенное решение

В качестве первого приближения для функции $\alpha(t)$ можно использовать выражение

$$\alpha = V_0 t. \quad (2.50)$$

Учитывая уравнение (2.50) и соотношение

$$\left(1 - \frac{t''}{t'}\right)^{\gamma_2} \approx 1 - \gamma_2 \frac{t''}{t'}, \quad (2.51)$$

можно вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{t'} (t' - t'')^{\gamma_2 - 1} \alpha^{3/2}(t'') dt'' &= -\frac{V_0^{3/2}}{\gamma_2} \int_0^{t'} (t'')^{3/2} d(t' - t'')^{\gamma_2} = \\ &= -\frac{V_0^{3/2}}{\gamma_2} \left[(t'')^{3/2} (t' - t'')^{\gamma_2} \Big|_0^{t'} - \frac{3}{2} \int_0^{t'} (t' - t'')^{\gamma_2} (t'')^{1/2} dt'' \right] = \\ &= \frac{3V_0^{3/2}}{2\gamma_2} \int_0^{t'} (t')^{\gamma_2} \left(1 - \frac{t''}{t'}\right)^{\gamma_2} (t'')^{1/2} dt'' = \frac{3V_0^{3/2}}{2\gamma_2} \int_0^{t'} (t')^{\gamma_2} \left(1 - \gamma_2 \frac{t''}{t'}\right) (t'')^{1/2} dt'' = \\ &= \frac{3V_0^{3/2}}{\gamma_2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma_2\right) (t')^{3/2 + \gamma_2}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Теперь подставляя (2.50) и (2.52) в правую часть уравнений (2.48) и (2.49), получим

$$\alpha(t) = V_0 t - \frac{4}{35} \delta_{\gamma_1} k V_0^{3/2} t^{7/2} + 3 \delta_{\gamma_1} \Delta_{\gamma_2} k V_0^{3/2} \frac{1/3 - 1/5\gamma_2}{(5/2 + \gamma_2)(7/2 + \gamma_2)} t^{7/2 + \gamma_2}, \quad (2.53)$$

$$P(t) = k V_0^{3/2} \left[\left(1 - \frac{4}{35} \delta_{\gamma_1} k V_0^{1/2} t^{5/2}\right)^{3/2} - 3 \Delta_{\gamma_2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\gamma_2\right) t^{\gamma_2} \right] t^{3/2}, \quad (2.54)$$

где

$$\delta_{\gamma_1} = \frac{1}{m} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \cos \varphi_n \sin \frac{n\pi}{2}, \quad \Delta_{\gamma_2} = \frac{1}{\gamma_2 \Gamma(\gamma_2)} \sum_{j=1}^2 \frac{e_j}{t_j^{\gamma_2}}. \quad (2.55)$$

Так как при $\gamma_2 \rightarrow 0$ величина $\sum_{j=1}^2 e_j = 0$ [143] и $\gamma_2 \Gamma(\gamma_2)|_{\gamma_2 \rightarrow 0} = \Gamma(1 + \gamma_2)|_{\gamma_2 \rightarrow 0} = 1$, то $\Delta_{\gamma_2}|_{\gamma_2 \rightarrow 0} = 0$, и соотношения (2.53) и (2.54) преобразуются к виду

$$\alpha(t) = V_0 t - \frac{4}{35} \delta_{\gamma_1} k V_0^{3/2} t^{7/2}, \quad (2.56)$$

$$P(t) = k V_0^{3/2} t^{3/2} \left[1 - \frac{4}{35} \delta_{\gamma_1} k V_0^{1/2} t^{5/2} \right]^{3/2}. \quad (2.57)$$

Формулы (2.56) и (2.57) справедливы для случая ударного воздействия упругого шара по упругой балке, колеблющейся в вязкой среде, демпфирующие свойства которой описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной γ_1 (2.58).

Из уравнений (2.56) или (2.57) можно найти время контакта, приравняв соответственно $\alpha(t)$ или $P(t)$ к нулю. В результате получим

$$t_{cont}^{(0)} = \left(\frac{35}{4} \frac{1}{\delta_{\gamma_1} k \sqrt{V_0}} \right)^{2/5}. \quad (2.59)$$

Приравнивая $d\alpha/dt$ или dP/dt к нулю, получим значение времени $t = t_{max}^{(0)}$

$$t_{max}^{(0)} = \left(\frac{5}{2} \frac{1}{\delta_{\gamma_1} k \sqrt{V_0}} \right)^{2/5}, \quad (2.60)$$

при котором $\alpha(t)$ и $P(t)$ достигают своих максимальных значений $y_{max}^{(0)}$ и $P_{max}^{(0)}$

$$\alpha_{max}^{(0)} = \frac{5}{7} V_0 t_{max}^{(0)}, \quad (2.61)$$

$$P_{\max}^{(0)} = kV_0^{3/2} \left(\frac{5}{7} t_{\max}^{(0)} \right)^{3/2}. \quad (2.62)$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\gamma_2 \neq 0$. Предполагая, что в этом случае все характеристические значения мало отличаются от соответствующих значений при $\gamma_2 = 0$, получим

$$t_{\text{cont}}^{(\gamma_2)} = t_{\text{cont}}^{(0)} \left[1 + \frac{15}{2} \Delta_{\gamma_2} \left(t_{\text{cont}}^{(0)} \right)^{\gamma_2} \frac{1/3 - 1/5\gamma_2}{(5/2 + \gamma_2)(7/2 + \gamma_2)} \right], \quad (2.63)$$

$$t_{\max}^{(\gamma_2)} = t_{\max}^{(0)} \left[1 + 3\Delta_{\gamma_2} \left(t_{\max}^{(0)} \right)^{\gamma_2} \frac{1/3 - 1/5\gamma_2}{5/2 + \gamma_2} \right], \quad (2.64)$$

$$\alpha_{\max}^{(\gamma_2)} = \alpha_{\max}^{(0)} + \frac{15}{2} \Delta_{\gamma_2} V_0 \frac{1/3 - 1/5\gamma_2}{(5/2 + \gamma_2)(7/2 + \gamma_2)} \left(t_{\max}^{(0)} \right)^{1+\gamma_2}. \quad (2.65)$$

$$P_{\max}^{(\gamma_2)} = kV_0^{3/2} \left(\frac{\gamma_2}{3/2 + \gamma_2} \right) \left(t_{\max}^{(\gamma_2)} \right)^{3/2}. \quad (2.66)$$

В предельном случае $\gamma_2 = 1$, т.е. в случае обычной вязкости, формулы (2.63)-(2.66) принимают вид

$$t_{\text{cont}}^{(1)} = t_{\text{cont}}^{(0)} \left(1 + \frac{4}{63} \Delta_1 t_{\text{cont}}^{(0)} \right), \quad (2.67)$$

$$t_{\max}^{(1)} = t_{\max}^{(0)} \left(1 + \frac{4}{35} \Delta_1 t_{\max}^{(0)} \right), \quad (2.68)$$

$$\alpha_{\max}^{(1)} = \alpha_{\max}^{(0)} + \frac{4}{63} \Delta_1 V_0 \left(t_{\max}^{(0)} \right)^2, \quad (2.69)$$

$$P_{\max}^{(1)} = \frac{2}{5} kV_0^{3/2} \left(t_{\max}^{(1)} \right)^{3/2}, \quad (2.70)$$

где $\Delta_1 = \Delta_{\gamma_2} |_{\gamma_2=1}$.

Из приведенных выше формул видно, что с увеличением параметра дробности γ_2 от 0 до 1 вязкость ударника увеличивается от 0 до ее

максимального значения, что приводит к увеличению таких характеристических значений, как время контакта, время, необходимое для того чтобы проникновение ударника достигло своей максимальной величины, и максимальное значение местного смятия материалов мишени и ударника. Перечисленные величины увеличиваются от значений $t_{cont}^{(0)}$, $t_{max}^{(0)}$, $\alpha_{max}^{(0)}$ до $t_{cont}^{(1)}$, $t_{max}^{(1)}$, $\alpha_{max}^{(1)}$.

2.4. Частный случай. Удар жесткого шара по упругой балке Бернулли-Эйлера, находящейся в вязкой среде

Если нерелаксированный модуль упругости шара намного больше модуля упругости материала мишени, тогда ударник можно считать жестким (рис. 2.4).

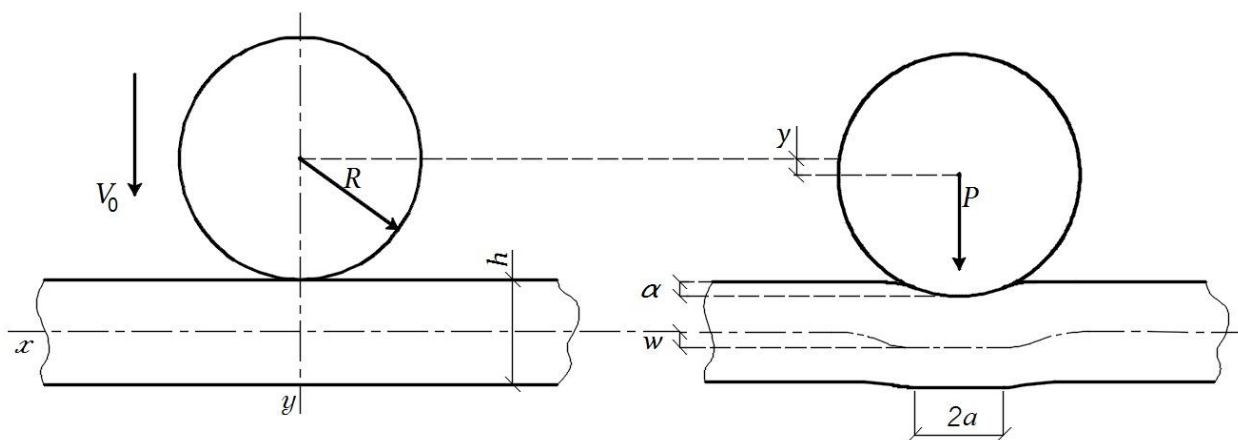


Рис. 2.4 Схема ударного взаимодействия жесткого шара с балкой Бернулли-Эйлера

В этом случае уравнения (2.48) и (2.49) принимают вид

$$\alpha(t) = V_0 t - k' \left(\frac{1}{m} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \cos \varphi_n \sin \frac{n\pi}{2} \right) \int_0^t \alpha^{3/2}(t')(t-t') dt', \quad (2.71)$$

$$P(t) = k' \alpha^{3/2}(t), \quad (2.72)$$

где $k' = \frac{4E_1 \sqrt{R}}{3(1-\nu_1^2)}$.

Приближенное решение уравнений (2.71) и (2.72), как это следует из соотношений (2.53) и (2.54), можно записать в виде

$$\alpha(t) = V_0 t - \frac{4}{35} \delta_{\gamma_1} k' V_0^{3/2} t^{7/2}, \quad (2.73)$$

$$P(t) = k' V_0^{3/2} \left(1 - \frac{4}{35} \delta_{\gamma_1} k' V_0^{1/2} t^{5/2} \right)^{3/2} t^{3/2} \quad (2.74)$$

что совпадает с формулами (2.56) и (2.57) при замене в них коэффициента k на k' . Следовательно, можно использовать и формулы (2.61) - (2.64), заменив в них k на k' , для определения характеристических величин ударного взаимодействия в случае жесткого ударника.

2.5. Численные исследования

В качестве примера рассмотрим ударное взаимодействие железобетонной балки с медным шаром, материальные константы которых приведены в Таблице 2.1.

Таблица 2.1

Свойства балки (железобетон)		Свойства шара (медь)	
$E_1 = 120.7$ ГПа		$E_\infty = 120.7$ ГПа	$E_0 = 110$ ГПа
$\tau_{\sigma 1} = 1 \cdot 10^{-6}$ с	$\tau_{\varepsilon 1} = 2 \cdot 10^{-7}$ с	$\tau_{\sigma 2} = 1 \cdot 10^{-3}$ с	$\tau_{\varepsilon 2} = 2 \cdot 10^{-4}$ с
$\rho = 2400$ кг/м ³	$\nu_1 = 0.35$	$\rho = 8960$ кг/м ³	$\nu_\infty = 0.20$

На рис. 2.5 - 2.7 приведены временные зависимости контактной силы для различных значений параметра дробности γ_2 , которые обозначены цифрами около соответствующих кривых, и различных сочетаний начальной скорости удара, радиуса ударника и размера поперечного сечения балки.

Из рис. 2.5 - 2.7 видно, что при увеличении параметра γ_2 от 0, что соответствует упругому материалу ударника, до 1, что отвечает вязкоупругому материалу, свойства которого описываются моделью стандартного линейного тела с обычной производной, максимальное значение контактной силы уменьшается, а время контакта растет. Увеличение размеров поперечного сечения балки приводит к увеличению как максимального значений контактной силы, так и продолжительности контакта (рис. 2.5). Из рис. 2.6 следует, что чем больше начальная скорость удара, тем больше контактная сила и меньше время контакта. Увеличение радиуса ударника, т. е. его массы, приводит к уменьшению и контактной силы, и продолжительности контакта (рис. 2.7).

На рис. 2.8 приведены зависимости контактной силы от времени в случае ударного взаимодействия балки Бернулли-Эйлера с жестким ударником (пунктирные линии) и упругим ударником (сплошные линии) при $\gamma_2=0$, а также с вязкоупругим ударником (сплошные линии при $0 < \gamma_2 \leq 1$). Из рис. 2.8 видно, что чем жестче ударник, тем больше максимум контактной силы и короче продолжительность контакта.

Временные зависимости локального смятия материалов ударника и мишени в процессе ударного взаимодействия показаны на рис. 2.9 - 2.11 для различных сочетаний значений начальной скорости удара, радиуса ударника и размеров поперечного сечения балки. Значения параметра дробности вязкоупругого ударника указаны цифрами около соответствующих кривых.

Из рис. 2.9 – 2.11 следует, что при увеличении параметра дробности от 0 до 1 время контакта, время, при котором локальное смятие достигает максимального значения, и уровень этого максимума возрастают.

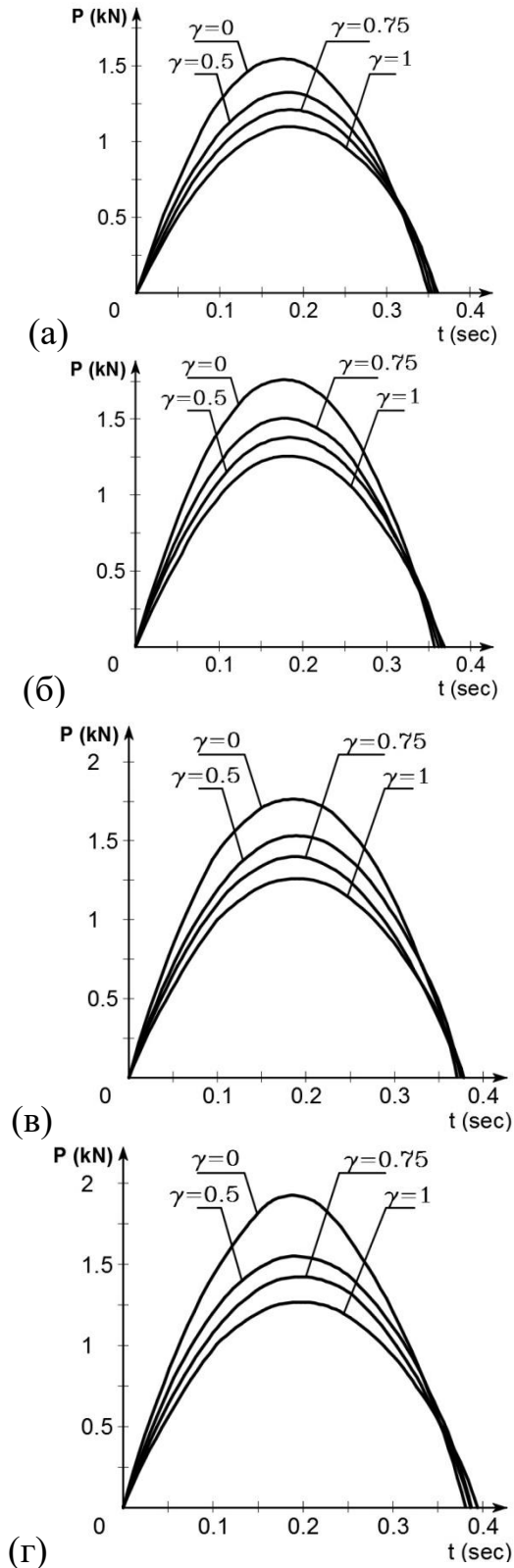


Рис. 2.5 Зависимость контактной силы от времени в случае начальной скорости удара $V_0 = 10\text{ м/с}$, радиуса ударника $R = 2\text{ см}$ и размеров поперечного сечения балки а) $10 \times 15\text{ см}$, б) $10 \times 20\text{ см}$, в) $15 \times 20\text{ см}$, г) $15 \times 25\text{ см}$.

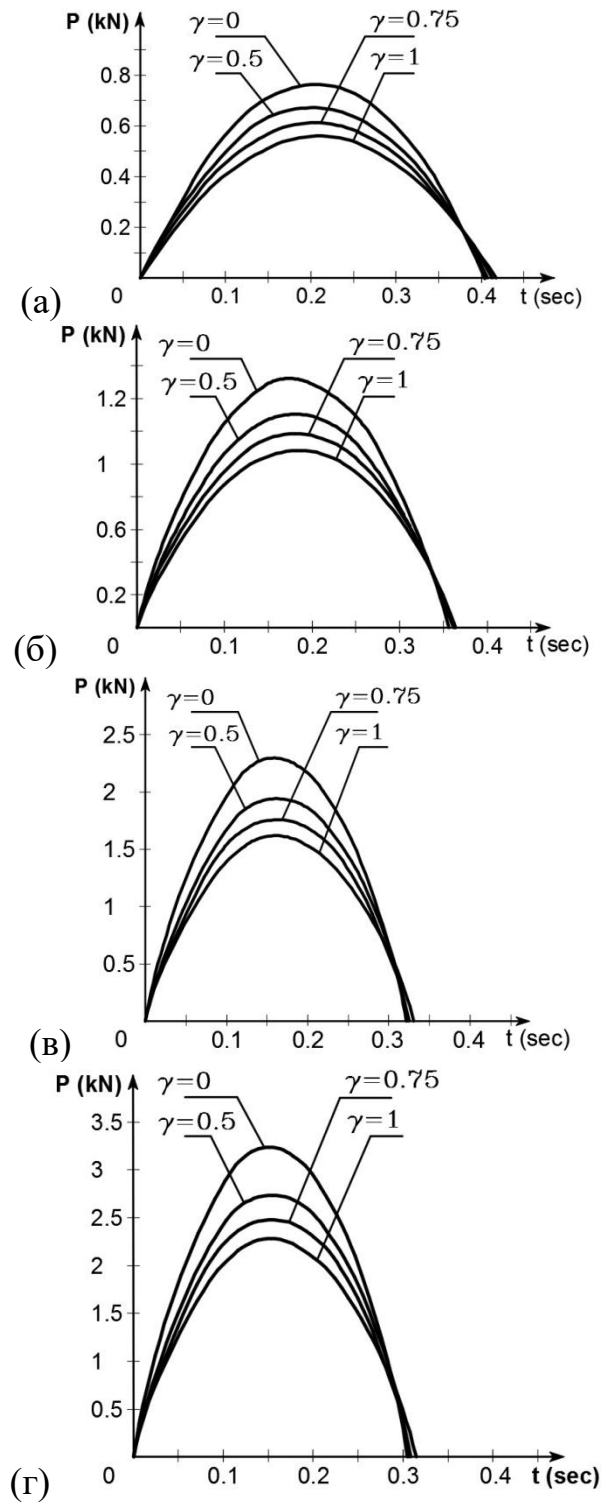


Рис. 2.6 Зависимость контактной силы от времени в случае радиуса шара $R=2$ см, балки с поперечным сечением 10×15 см и начальной скорости удара V_0 а) 5 м/с, б) 10 м/с, в) 15 м/с, г) 20 м/с.

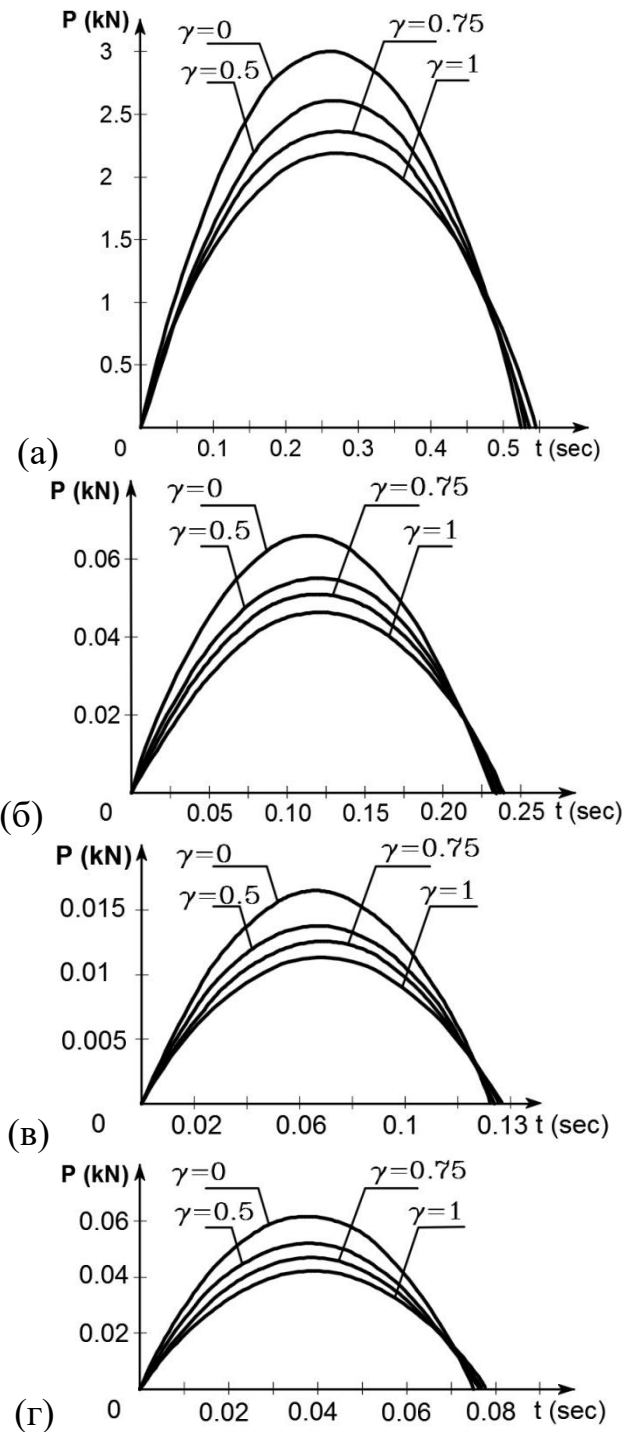
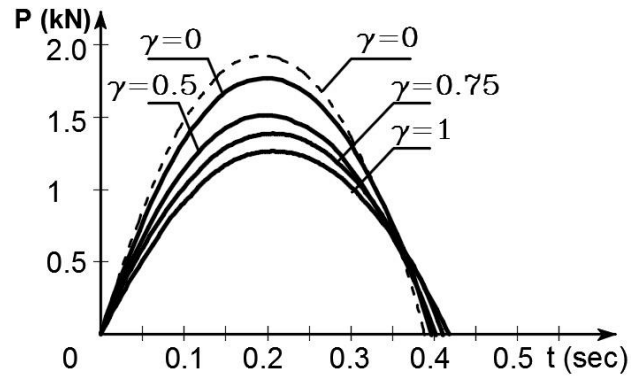


Рис. 2.7 Зависимость контактной силы от времени в случае начальной скорости удара $V_0 = 10$ м/с, поперечного сечения балки 10×15 см и радиуса ударника R а) 1 см, б) 3 см, в) 5 см, г) 7 см.

a)



б)

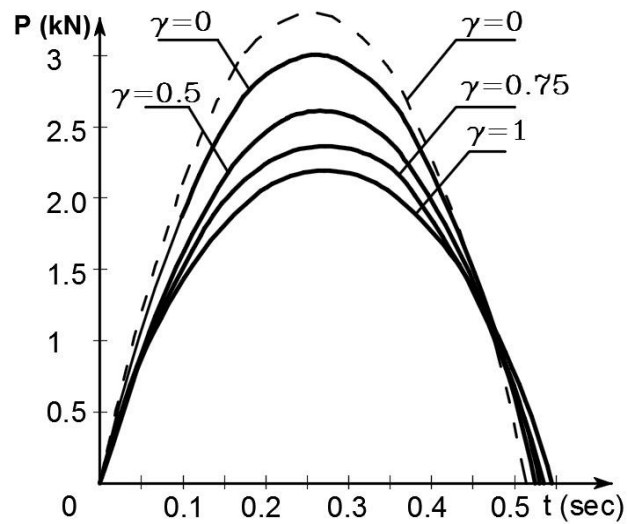


Рис. 2.8 Зависимость контактной силы от времени в случае вязкоупругого (сплошные линии) и жесткого (пунктирные линии) ударника
а) $V_0 = 10$ м/с, $R = 2$ см и балка 10×20 см, б) $V_0 = 10$ м/с, $R = 1$ см и балка 10×15 см

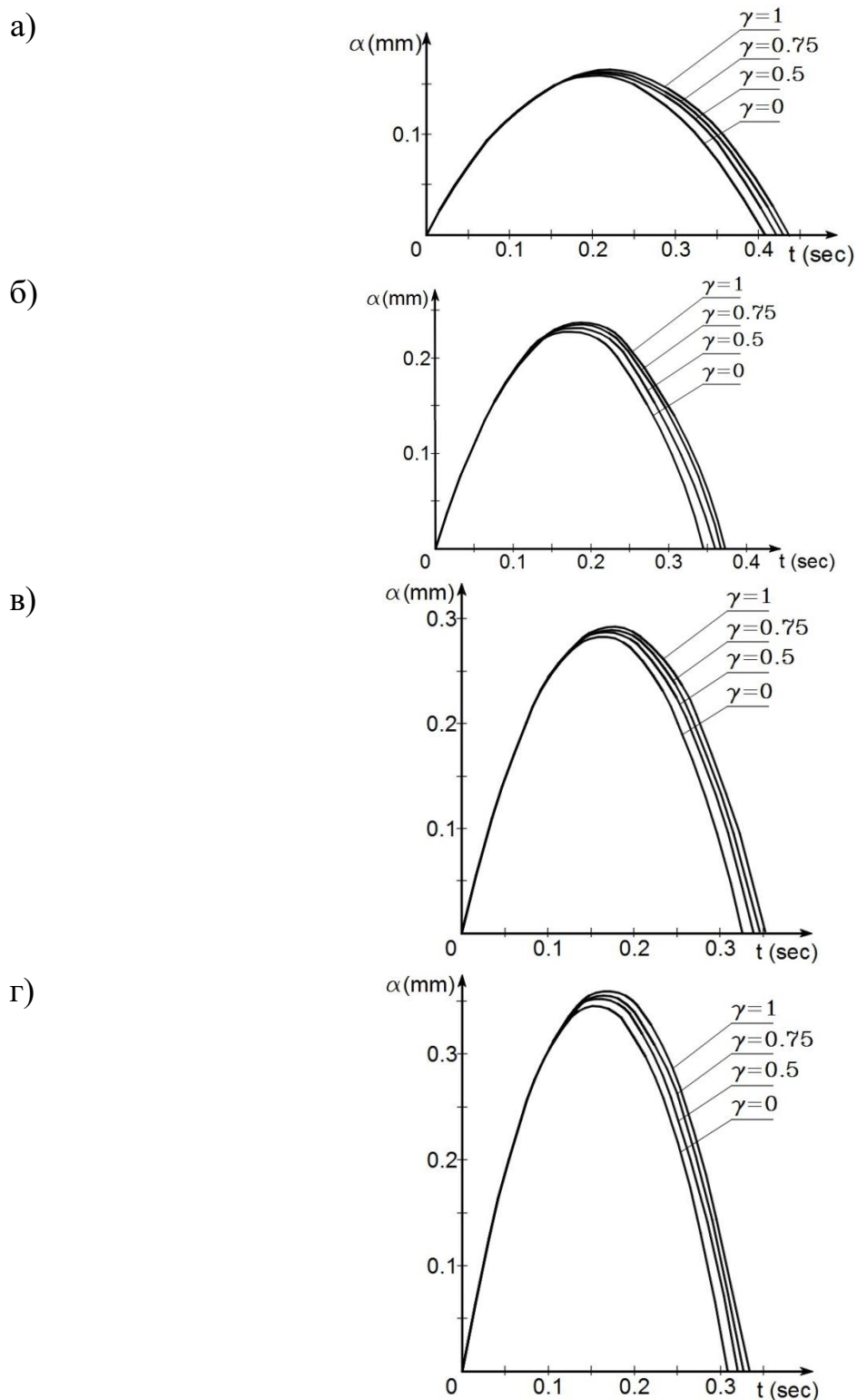


Рис. 2.9 Временная зависимость локального смятия материалов ударника радиуса $R=2\text{ см}$ и мишени с поперечным сечением $10\times 15\text{ см}$ при начальной скорости удара V_0 а) 5 м/с , б) 10 м/с , в) 15 м/с , г) 20 м/с .

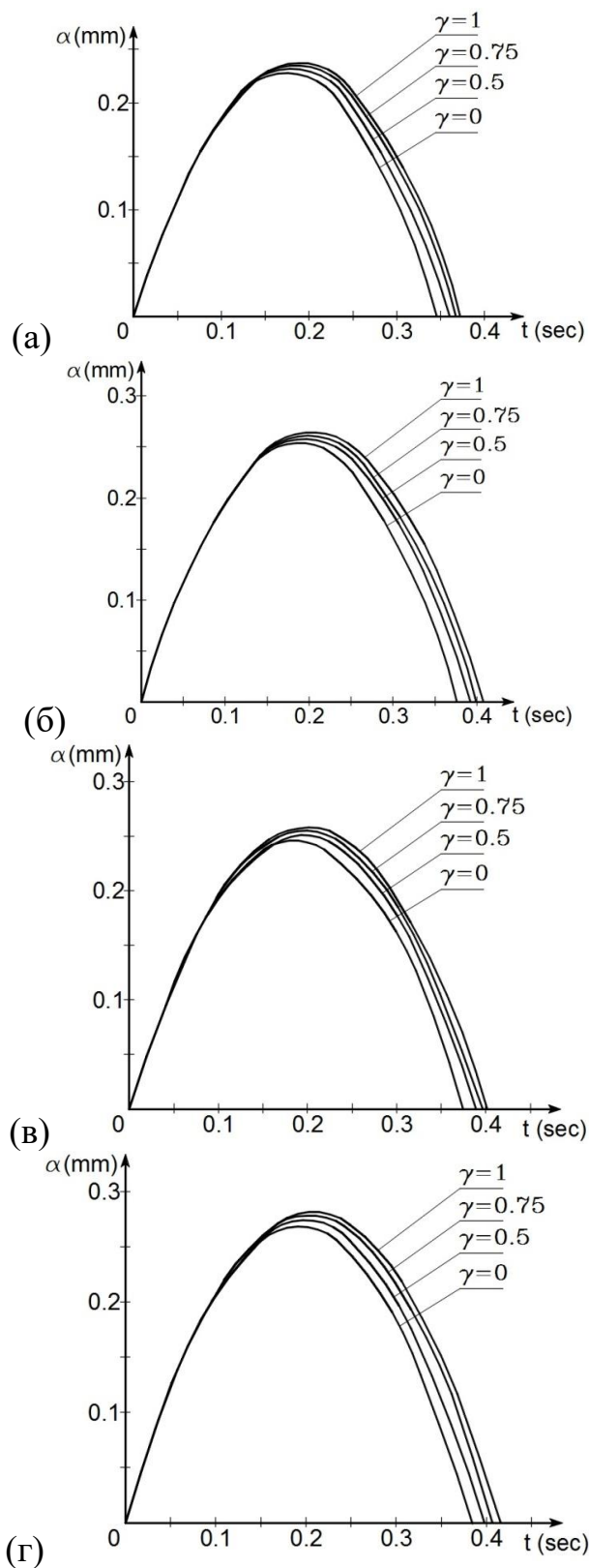
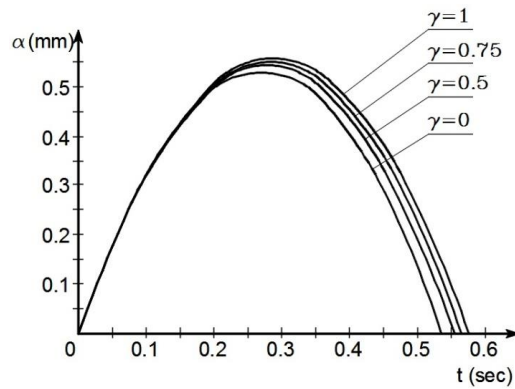
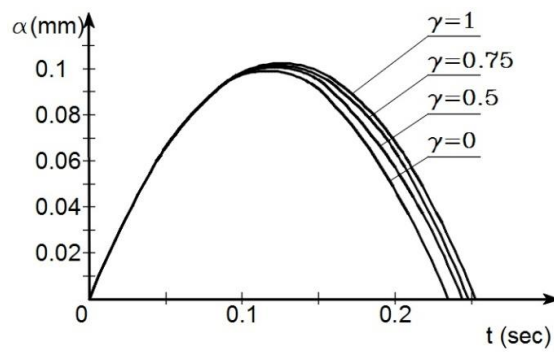


Рис. 2.10 Временная зависимость локального смятия материалов ударника радиуса $R=2\text{см}$ и мишени с поперечным сечением а) $10\times 15\text{см}$, б) $10\times 20\text{см}$, в) $15\times 20\text{см}$, г) $15\times 25\text{см}$ в случае начальной скорости удара $V_0=10\text{м/с}$

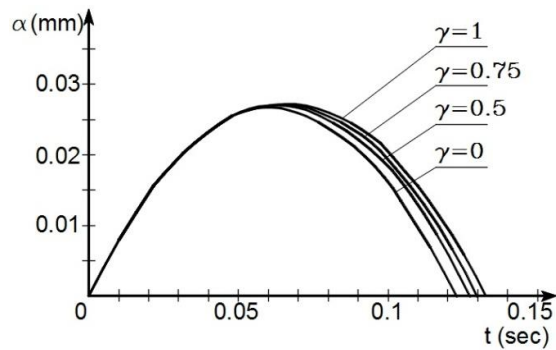
а)



б)



в)



г)

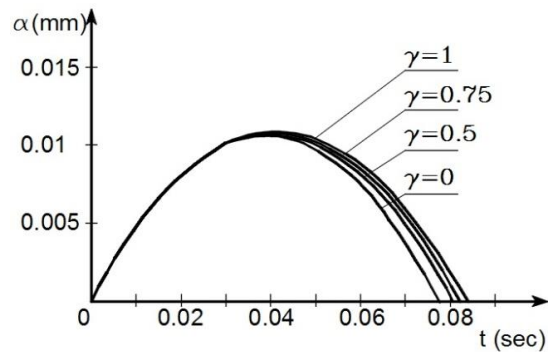


Рис. 2.11 Временная зависимость локального смятия материалов ударника с радиусом а) 1 см, б) 3 см, в) 5 см, г) 7 см и мишени с поперечным сечением 10x15 см в случае начальной скорости удара $V_0 = 10$ м/с

Глава 3. Анализ вязкоупругих балок типа Тимошенко на ударные воздействия

В данной главе изучается задача о низкоскоростном ударе шара по вязкоупругой балке типа Тимошенко. Вязкоупругие свойства балки вне области контакта задаются моделью стандартного линейного твердого тела с производными целого порядка, в то время как внутри области контакта используется модель стандартного линейного твердого тела с дробными производными, при этом реологические константы материалов в обеих моделях одинаковы. Однако введение дополнительного параметра, т.е. параметра дробности, который может изменяться от нуля до единицы, позволяет управлять вязкоупругими свойствами балки, так как структура материала балки внутри этой зоны может быть повреждена, в результате чего происходит уменьшение вязкости материала балки в зоне контакта.

Рассмотрение нестационарных волн (поверхностей сильного разрыва), распространяющихся в мишени от границы области контакта, при помощи теории разрывов и определение искомым величин за поверхностями разрывов до области контакта с помощью лучевого метода, а так же использование теории Герца в зоне контакта позволяют получить систему двух интегро-дифференциальных уравнений для определения местного смятия материалов ударника и мишени и прогиба балки в области контакта.

Изложенные в данной главе исследования опубликованы в работах [146,147,150].

3.1. Удар упругого шара по вязкоупругой балке типа Тимошенко с учетом растяжения ее срединной поверхности

3.1.1. Постановка задачи

Предположим, что упругий шар радиуса R и массой m движется вдоль оси y с постоянной скоростью V_0 в направлении вязкоупругой однородной изотропной балки типа Тимошенко шириной h (Рис. 3.1). Вязкоупругие свойства балки задаются с помощью модели стандартного линейного твердого тела с обычными производными. Динамическое поведение такой балки с учетом растяжения ее срединной поверхности описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho F \dot{V}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \rho F \dot{W}, \quad (3.2)$$

$$-\frac{\partial M}{\partial x} + Q = \rho I \dot{\Psi}, \quad (3.3)$$

$$N = FE_{\infty} \left[1 - \nu_{\varepsilon} \varepsilon_1^* (\tau_{\varepsilon}) \right] \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.4)$$

$$Q = KF \mu_{\infty} \left[1 - n \varepsilon_1^* (t_{\varepsilon}) \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right), \quad (3.5)$$

$$M = -IE_{\infty} \left[1 - \nu_{\varepsilon} \varepsilon_1^* (\tau_{\varepsilon}) \right] \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.6)$$

где M , Q и N - изгибающий момент, поперечная сила и продольная сила соответственно, u и w - продольное и поперечное перемещения, ψ - угол поворота поперечного сечения вокруг оси x , $V = \dot{u}$, $W = \dot{w}$, $\Psi = \dot{\psi}$, F и I -

площадь поперечного сечения и момент инерции относительно оси z соответственно, ρ - плотность, K - коэффициент сдвига, который зависит от геометрических размеров балки и формы ее поперечного сечения, и точки над величинами обозначают производную по времени.

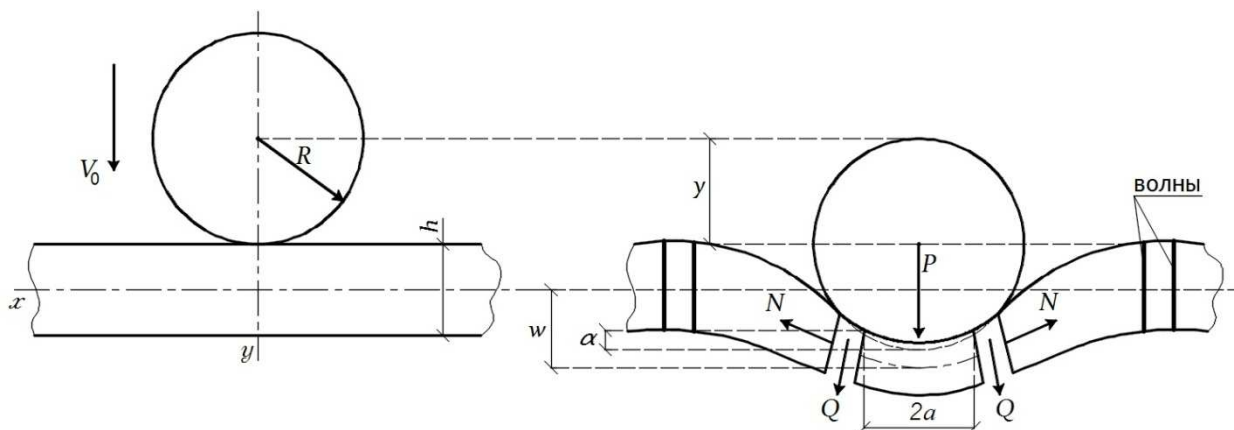


Рис. 3.1 Схема ударного взаимодействия упругого сферического ударника вязкоупругой балки типа Тимошенко

В процессе удара предполагается, что балка состоит из тонких слоев, прикрепленных друг к другу по краям, и после удара волны распространяются от границы области контакта, а волновые фронты являются параллельными плоскостями.

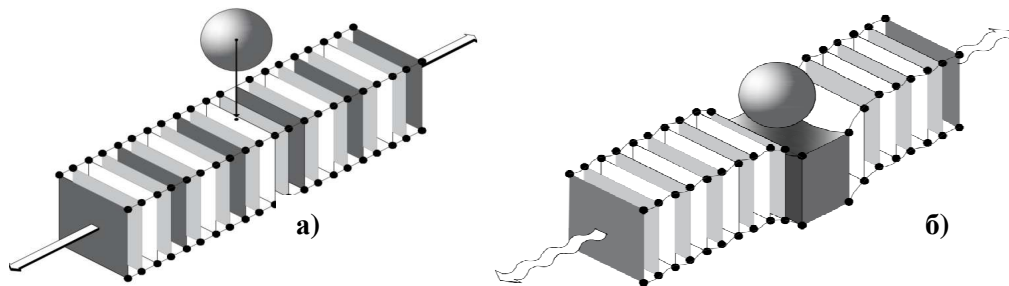


Рис. 3.2 Схема взаимодействия тел: а) до и б) во время удара

В уравнениях (3.4) и (3.6) оператор, соответствующий модулю Юнга для случая, когда вязкоупругие свойства балки описываются моделью стандартного линейного тела, имеет вид:

$$\tilde{E} = E_{\infty} [1 - \nu_{\varepsilon} \mathfrak{E}_1^* (\tau_{\varepsilon})], \quad (3.7)$$

$$\tilde{E}^{-1} = E_{\infty}^{-1} [1 + \nu_{\sigma} \mathfrak{E}_1^* (\tau_{\sigma})], \quad (3.8)$$

$$\nu_{\varepsilon} = \frac{E_{\infty} - E_0}{E_{\infty}} = \frac{\Delta E}{E_{\infty}}, \quad (3.9)$$

$$\mathfrak{E}_1^* (\tau_i) Z(t) = \frac{1}{\tau_i} \int_0^t e^{-(t-t')/\tau_i} Z(t') dt' \quad (i = \varepsilon, \sigma), \quad (3.10)$$

$$\mathfrak{E}_1^* (t_i) Z(t) = \frac{1}{t_i} \int_0^t e^{-(t-t')/t_i} Z(t') dt' \quad (i = \varepsilon, \sigma), \quad (3.11)$$

где $Z(t)$ - искомая функция, E_{∞} и E_0 - нерелаксированный (мгновенный модуль упругости, или "стекловидный" модуль) и релаксированный модуль упругости (длительный модуль упругости, или "каучуковый" модуль), которые связаны с временем релаксации τ_{ε} и временем ретардации τ_{σ} следующим соотношением:

$$\frac{\tau_{\varepsilon}}{\tau_{\sigma}} = \frac{E_0}{E_{\infty}}. \quad (3.12)$$

В уравнении (3.5) оператор, соответствующий модулю сдвига, имеет вид

$$\tilde{\mu} = \mu_{\infty} [1 - n \mathfrak{E}_1^* (t_{\varepsilon})], \quad (3.13)$$

где μ_{∞} - нерелаксированное значение модуля сдвига, n и t_{ε} - пока неизвестные константы.

В работах [143,145] показано, что если задаться оператором \tilde{E} , а оператор трехосного растяжения - сжатия \tilde{K} согласно экспериментальным

данным [26,27] считать независимым от времени, т.е. $\tilde{K} = K_\infty$, где K_∞ - нерелаксированный модуль, тогда коэффициент Пуассона становится зависящим от времени оператором

$$\tilde{\nu} = \nu_\infty + \frac{1}{2}(1-2\nu_\infty)\nu_\varepsilon \mathfrak{E}_1^*(\tau_\varepsilon). \quad (3.14)$$

При этом постоянные Ламе λ и μ также принимают вид зависящих от времени операторов

$$\tilde{\lambda} = \lambda_\infty [1 + n_1 \mathfrak{E}_1^*(t_\varepsilon)] \quad (3.15)$$

и $\tilde{\mu}$ (3.13) соответственно, где ν_∞ и λ_∞ - нерелаксированные значения соответствующих операторов, и

$$n_1 = \frac{(1-2\nu_\infty)\nu_\varepsilon}{2(1+\nu_\infty)A}, \quad n = \frac{3\nu_\varepsilon}{2(1+\nu_\infty)A},$$

$$A = \frac{2(1+\nu_\infty) + (1-2\nu_\infty)\nu_\varepsilon}{2(1+\nu_\infty)A} > 1, \quad t_\varepsilon = \tau_\varepsilon A^{-1}.$$

Удар происходит в момент времени $t = 0$ (рис. 3.1). Когда $t > 0$, перемещение центра шара y может быть представлено в следующем виде:

$$y = w + \alpha, \quad (3.16)$$

где α – квазистатическое смятие материалов ударника и мишени, которое связано с контактной силой по формулам (2.27) и (2.28) согласно обобщенному закону Герца, где оператор жесткости для вязкоупругой мишени и упругого ударника имеет вид

$$\frac{1}{E^*} = J^* = \frac{1-\tilde{\nu}_1^2}{\tilde{E}_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}. \quad (3.17)$$

В формуле (3.17) и далее индексы 1 и 2 относятся к вязкоупругой балке и упругому шару соответственно, при этом операторы \tilde{E}_1 и $\tilde{\nu}_1$, которые действуют в зоне контакта, отличаются от операторов (3.7), (3.8) и (3.14), справедливых вне контактной области, а именно:

$$\tilde{E}_1 = E_\infty \left[1 - \nu_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_\varepsilon^\gamma \right) \right] \quad (0 \leq \gamma \leq 1), \quad (3.18)$$

$$\tilde{E}_1^{-1} = E_\infty^{-1} \left[1 + \nu_\sigma \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_\sigma^\gamma \right) \right], \quad (3.19)$$

$$\tilde{\nu} = \nu_\infty + \frac{1}{2} (1 - 2\nu_\infty) \nu_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_\varepsilon^\gamma \right), \quad (3.20)$$

где все реологические константы для модели с дробным параметром γ остаются такими же, как для случая с $\gamma = 1$,

$$\left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \right)^\gamma = \frac{E_0}{E_\infty}, \quad (3.21)$$

$$\mathfrak{E}_\gamma^* \left(\tau_i^\gamma \right) Z(t) = \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma \left(\frac{t-t'}{\tau_i} \right) Z(t') dt' \quad (i = \varepsilon, \sigma), \quad (3.22)$$

и $\mathfrak{E}_\gamma(t/\tau_i)$ - дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова (2.39).

Это различие связано с тем фактом, что в процессе удара происходит разрушение молекулярных связей в области контакта балки с ударником, в результате чего молекулы начинают свободнее перемещаться по отношению друг к другу. В итоге происходит уменьшение вязкости материала балки в зоне контакта [127]. Это обстоятельство позволяет описать поведение материала балки в области контакта с помощью модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными, поскольку изменение параметра дробности (порядка дробной производной) позволяет регулировать вязкость материала балки от ее первоначального значения при $\gamma = 1$ до её полного отсутствия при $\gamma = 0$. Таким образом, замещение

операторов (3.7), (3.8) и (3.14) операторами (3.18)-(3.20) вполне обосновано.

Теперь уравнение движения шара можно записать в виде

$$m\ddot{y} = -P(t), \quad (3.23)$$

где $P(t)$ определяется по формулам (2.27) и (2.28), в то время как уравнение движения контактной области, которая ограничена плоскостями $x = \pm a$ (рис. 3.1),

$$a(t) = \sqrt{\alpha R}, \quad (3.24)$$

записывается в виде

$$2N \frac{\partial w}{\partial x} + 2Q + P(t) = 2aF \rho \ddot{w}. \quad (3.25)$$

Решение уравнений (3.23) и (3.25) возможно при следующих начальных условиях:

$$y|_{t=0} = 0, \quad \dot{y}|_{t=0} = V_0, \quad w|_{t=0} = \dot{w}|_{t=0} = 0. \quad (3.26)$$

3.1.2. Метод решения

При сделанных выше предположениях относительно области контакта в процессе ударного взаимодействия распространяются нестационарные продольные и поперечные волны (поверхности сильного разрыва) от границы зоны контакта. Искомая функция $Z(x, t)$ за фронтом волновой поверхности представляется в виде лучевого ряда [130,131]:

$$Z(x, t) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [Z_{,(k)}]_{t=z/G^{(\alpha)}} \left(t - \frac{x}{G^{(\alpha)}} \right)^k H \left(t - \frac{x}{G^{(\alpha)}} \right), \quad (3.27)$$

где $[Z_{,(k)}] = Z_{,(k)}^+ - Z_{,(k)}^- = [\partial^k Z / \partial t^k]$ - скачки производных k -ого порядка по времени t искомой функции $Z(z, t)$ на волновой поверхности, верхние индексы $+$ и $-$ означают, что данная величина вычисляется непосредственно перед и за волновым фронтом, индекс α указывает на порядковый номер волны, а именно: $\alpha = 1$ для продольной волны и $\alpha = 2$ для поперечной волны, $H(t)$ - функция Хевисайда и $G^{(\alpha)}$ - нормальная скорость распространения поверхности разрыва.

Для определения коэффициентов лучевого ряда (3.27) необходимо продифференцировать определяющие уравнения (3.1)-(3.6) k раз по времени, вычислить их разность на разных сторонах волновой поверхности Σ и применить условие совместности для разрывов $k + 1$ -ого порядка функции Z , которое имеет следующий вид [132]:

$$G \left[\frac{\partial Z_{,(k)}}{\partial x} \right] = - [Z_{,(k+1)}] + \frac{d [Z_{,(k)}]}{dt}, \quad (3.28)$$

где d/dt - полная производная по времени функции $Z_{,(k)}(z, t)$ на движущейся поверхности разрыва.

Так как процесс удара является кратковременным процессом, то можно, во-первых, ограничиться нулевыми членами лучевых рядов (3.28), а во-вторых, пренебречь волнами, отраженными от торца балки, считая, что они достигают зоны контакта после отскока ударника от балки.

В дальнейшем мы будем представлять ударную волну (поверхность сильного разрыва) в балке в виде слоя малой толщины δ , передний фронт которого прибывает в определенную точку M с координатой x в момент времени t , в то время как задний фронт ударного слоя достигает этой точки в

момент $t + \Delta t$.

Искомые величины $Z(x, t)$ в точке M , такие как скорость, обобщенные силы и деформации, в течение промежутка времени Δt изменяются монотонно и непрерывно от величины Z^- до величины Z^+ , при этом внутри слоя в соответствии с условием совместности (3.28) выполняется соотношение

$$\frac{\partial Z}{\partial x} \approx -G^{-1}\dot{Z}, \quad (3.29)$$

которое является тем более точным, чем меньше значение Δt .

Заменяя производные $\partial N/\partial x$, $\partial Q/\partial x$ и $\partial M/\partial x$ в уравнениях (3.1)-(3.3) соотношениями $-G^{-1}\dot{N}$, $-G^{-1}\dot{Q}$, $-G^{-1}\dot{M}$ соответственно, интегрируя затем полученные уравнения от t до $t + \Delta t$ и устремляя $\Delta t \rightarrow 0$, находим

$$[N] = -\rho FG[V], \quad (3.30)$$

$$[Q] = -\rho FG[W], \quad (3.31)$$

$$[M] = \rho IG[\Psi]. \quad (3.32)$$

Подставляя теперь в уравнения (3.4)-(3.6) вместо производных $\partial u/\partial x$, $\partial w/\partial x$ и $\partial \psi/\partial x$ выражения $-G^{-1}V$, $-G^{-1}W$, $-G^{-1}\Psi$ и записывая их в моменты времени t и $t + \Delta t$, получим

$$N^- = -FE_\infty \left[G^{-1}V^- - v_\varepsilon \frac{1}{\tau_\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{\tau_\varepsilon}} G^{-1}V(t') dt' \right], \quad (3.33)$$

$$N^+ = -FE_\infty \left[G^{-1}V^+ - v_\varepsilon \frac{1}{\tau_\varepsilon} \int_0^{t+\Delta t} e^{-\frac{t+\Delta t-t'}{\tau_\varepsilon}} G^{-1}V(t') dt' \right], \quad (3.34)$$

$$Q^- = -KF\mu_\infty \left[G^{-1}W^- + \psi^- - n_\varepsilon \frac{1}{t_\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{t_\varepsilon}} (G^{-1}W(t') + \psi(t')) dt' \right] \quad (3.35)$$

$$Q^+ = -KF\mu_\infty \left[G^{-1}W^+ + \psi^+ - n_\varepsilon \frac{1}{t_\varepsilon} \int_0^{t+\Delta t} e^{-\frac{t+\Delta t-t'}{t_\varepsilon}} (G^{(-1)}W(t') + \psi(t')) dt' \right] \quad (3.36)$$

$$M^- = IE_\infty \left[G^{-1}\Psi^- - v_\varepsilon \frac{1}{\tau_\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{\tau_\varepsilon}} G^{-1}\Psi(t') dt' \right], \quad (3.37)$$

$$M^+ = IE_\infty \left[G^{-1}\Psi^+ - v_\varepsilon \frac{1}{\tau_\varepsilon} \int_0^{t+\Delta t} e^{-\frac{t+\Delta t-t'}{\tau_\varepsilon}} G^{-1}\Psi(t') dt' \right], \quad (3.38)$$

Раскладывая интегралы, входящие в (3.34), (3.36) и (3.38), в ряд Тейлора по малому параметру Δt и ограничиваясь приближениями нулевого и первого порядков, получим

$$\int_0^{t+\Delta t} e^{-\frac{t+\Delta t-t'}{\tau_\varepsilon}} V(t') dt' = \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{\tau_\varepsilon}} V(t') dt' + V(t)\Delta t - \Delta t \frac{1}{\tau_\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{\tau_\varepsilon}} V(t') dt', \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{t+\Delta t} e^{-\frac{t+\Delta t-t'}{t_\varepsilon}} [G^{-1}W(t') + \psi(t')] dt' &= \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{t_\varepsilon}} [G^{-1}W(t') + \psi(t')] dt' + \\ &+ [G^{-1}W(t') + \psi(t')] \Delta t - \Delta t \frac{1}{t_\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{t_\varepsilon}} [G^{-1}W(t') + \psi(t')] dt' \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\int_0^{t+\Delta t} e^{-\frac{t+\Delta t-t'}{\tau_\varepsilon}} \psi(t') dt' = \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{\tau_\varepsilon}} \psi(t') dt' + \psi(t)\Delta t - \Delta t \frac{1}{\tau_\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{\tau_\varepsilon}} \psi(t') dt'. \quad (3.41)$$

Вычитая соотношения (3.33), (3.35) и (3.37) соответственно из выражений (3.34), (3.36) и (3.38) с учетом (3.39)-(3.41), а также устремляя $\Delta t \rightarrow 0$, находим

$$[N] = -FE_{\infty}G^{-1}[V], \quad (3.42)$$

$$[Q] = -KF\mu_{\infty}G^{-1}[W], \quad (3.43)$$

$$[M] = IE_{\infty}G^{-1}[\Psi]. \quad (3.44)$$

Из соотношений (3.30)-(3.32) и (3.42)-(3.44) можно найти скорости двух типов нестационарных волн:

продольно-изгибная волна

$$G_{\infty}^{(1)} = \left(\frac{E_{\infty}}{\rho} \right)^{1/2}, \quad (3.45)$$

поперечная волна

$$G_{\infty}^{(2)} = \left(\frac{K\mu_{\infty}}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (3.46)$$

Подставляя найденные скорости (3.45) и (3.46) в формулы (3.30)-(3.32) и ограничиваясь, как это уже было сказано выше, нулевыми членами лучевого ряда, имеем

$$N = -\rho FG_{\infty}^{(1)}V, \quad (3.47)$$

$$Q = -\rho FG_{\infty}^{(2)}W, \quad (3.48)$$

$$M = \rho IG_{\infty}^{(1)}\Psi. \quad (3.49)$$

Следует отметить, что соотношения (3.47)-(3.49) ничем не отличаются от соответствующих выражений для упругой балки, так как в момент удара вязкоупругая среда ведет себя как упругая среда с нерелаксированным модулем упругости.

Теперь необходимо подставить значения N и Q , определяемые формулами (3.47) и (3.48), в уравнение (3.25). Однако система из двух определяющих уравнений, (3.23) и (3.25), должна включать только две неизвестных величины α и w , в то время как сила N , входящая в (3.25), зависит от скорости V , как следует из (3.47) и, следовательно, V должна выражаться через α и w .

Для этого запишем соотношение для тензора напряжений в вязкоупругой среде

$$\sigma_{ij} = \lambda_{\infty} \left[1 + n_1 \varepsilon_1^* (t_{\varepsilon}) \right] u_{i,l} \delta_{ij} + \mu_{\infty} \left[1 - n \varepsilon_1^* (t_{\varepsilon}) \right] (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (3.50)$$

где суммирование ведется по двум повторяющимся индексам, индекс после запятой обозначает производную по соответствующей координате, σ_{ij} и u_i - компоненты тензора напряжений и вектора перемещения, соответственно, $x = x_1, y = x_2, z = x_3$, и δ_{ij} - символ Кронекера ($i, j = 1, 2, 3$).

С помощью процедуры, примененной выше для вывода формул (3.42)-(3.44), из соотношения (3.50) получим

$$[\sigma_{ij}] = \lambda_{\infty} [u_{i,l}] \delta_{ij} + \mu_{\infty} ([u_{i,j}] + [u_{j,i}]). \quad (3.51)$$

Умножая (3.51) последовательно на $k_i k_j$ и $s_i s_j$ и пренебрегая надавливанием слоев внутри фронта поверхности сильного разрыва в направлении векторов \vec{k} и \vec{s} , т.е., с учетом

$$[\sigma_{ij}] k_i k_j = [\sigma_{ij}] s_i s_j = 0, \quad (3.52)$$

имеем

$$\lambda_{\infty} [u_{i,l}] + 2\mu_{\infty} [u_{x,x}] = 0, \quad (3.53)$$

$$\lambda_{\infty} [u_{l,l}] + 2\mu_{\infty} [u_{y,y}] = 0, \quad (3.54)$$

откуда следует равенство

$$[u_{x,x}] = [u_{y,y}]. \quad (3.55)$$

Учитывая обобщенные геометрические условия совместности [139]

$$[u_{i,j}] = -G^{-1} [v_i] v_j + [u_{i,x}] k_j + [u_{i,y}] s_j, \quad (3.56)$$

$$[u_{l,l}] = -G^{-1} [v_l] v_l + [u_{x,x}] + [u_{y,y}], \quad (3.57)$$

соотношения (3.53) и (3.54) можно переписать в виде

$$[v] = [v_l] v_l = 2(\lambda_{\infty} + \mu_{\infty}) \lambda_{\infty}^{-1} [u_{x,x}] G_{\infty}^{(1)}, \quad (3.58)$$

$$[v] = [v_l] v_l = 2(\lambda_{\infty} + \mu_{\infty}) \lambda_{\infty}^{-1} [u_{y,y}] G_{\infty}^{(1)}, \quad (3.59)$$

Так как в дальнейших выкладках будут использоваться одночленные лучевые разложения, то (3.58) и (3.59) принимают вид

$$u_{y,y} = u_{x,x} = G_{\infty}^{(1)-1} v_{\infty} v = -v_{\infty} u_{z,z}, \quad (3.60)$$

или

$$v = v_{\infty}^{-1} G_{\infty}^{(1)} u_{y,y} = -v_{\infty}^{-1} G_{\infty}^{(1)} \frac{\alpha}{h}. \quad (3.61)$$

Заметим, что формула (3.60) была получена в [12] для упругих балок.

Таким образом, учитывая формулы (3.47) и (3.61), продольная сила N может быть записана в виде:

$$N = \rho F G_{\infty}^{(1)2} v_{\infty}^{-1} \alpha h^{-1}. \quad (3.62)$$

Учитывая (3.62) и (3.24) а также отношения

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -G_{\infty}^{(2)-1} W, \quad (3.63)$$

уравнение (3.25) можно записать в виде

$$(e\alpha + g)W + l\alpha^{1/2}\dot{W} = P(t), \quad (3.64)$$

где $e = 2\rho FG_{\infty}^{(1)2} (G_{\infty}^{(2)} v_{\infty} h)^{-1}$, $g = 2\rho FG_{\infty}^{(2)}$, $l = 2\rho F\sqrt{R}$.

Подставляя (3.16) в (3.23), получаем

$$m\dot{W} + m\ddot{\alpha} = -P(t). \quad (3.65)$$

Складывая уравнения (3.64) и (3.65), находим

$$m\dot{W} + m\ddot{\alpha} + l\alpha^{1/2}\dot{W} + (e\alpha + g)W = 0. \quad (3.66)$$

Как было показано в [143], оператор E^* , входящий в (2.28) имеет вид

$$E^* = \left(\frac{1 - \tilde{v}_1^2}{\tilde{E}_1} + \frac{1 - v_2^2}{E_2} \right)^{-1} = d^{-1} \left[1 - e_1 \mathfrak{E}_{\gamma}^* (t_1^{\gamma}) - e_2 \mathfrak{E}_{\gamma}^* (t_2^{\gamma}) \right], \quad (3.67)$$

где

$$t_{1,2}^{-\gamma} = \frac{1}{2} \left[\tau_{\varepsilon}^{-\gamma} (1 + g_1) + \tau_{\sigma}^{-\gamma} (1 + g_2) \right] \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\tau_{\varepsilon}^{-\gamma} (1 + g_1) - \tau_{\sigma}^{-\gamma} (1 + g_2) \right]^2 + 4\tau_{\varepsilon}^{-\gamma} \tau_{\sigma}^{-\gamma} g_1 g_2},$$

$$d = \frac{1 - v_{\infty}^2}{E_{\infty}} + \frac{1 - v_2^2}{E_2}, \quad g_1 = \frac{(1 - 2v_{\infty})^2 v_{\varepsilon}}{4E_{\infty}}, \quad g_2 = \frac{3v_{\sigma}}{4E_{\infty}d},$$

$$e_1 = \frac{b_2 - a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} > 0, \quad e_2 = \frac{a_1 - b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} > 0,$$

$$a_1 = \frac{t_1^{-\gamma}}{t_1^{-\gamma} - \tau_\varepsilon^{-\gamma}} > 0, \quad a_2 = \frac{t_2^{-\gamma}}{t_2^{-\gamma} - \tau_\varepsilon^{-\gamma}} > 0,$$

$$b_1 = \frac{t_1^{-\gamma}}{t_1^{-\gamma} - \tau_\sigma^{-\gamma}} > 0, \quad b_2 = \frac{t_2^{-\gamma}}{t_2^{-\gamma} - \tau_\sigma^{-\gamma}} > 0.$$

Таким образом, уравнение (3.64) принимает вид

$$m\dot{W} + m\ddot{\alpha} = -k_1 \left[\alpha^{3/2}(t) - e_1 \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t-t'}{t_1} \right) \alpha^{3/2}(t') dt' - e_2 \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t-t'}{t_2} \right) \alpha^{3/2}(t') dt' \right] \quad (3.68)$$

где $k_1 = \frac{4}{3} \sqrt{R} d^{-1}$.

Решение системы двух уравнений, состоящей из дифференциального уравнения (3.66) и интегро-дифференциального уравнения (3.68), позволяет найти зависимость от времени значений W и α .

Заметим, что поскольку процесс удара является кратковременным, то в интегралах, входящих в (3.68),

$$\mathfrak{E}_\gamma \left(-\frac{t}{t_j} \right) \approx \frac{t^{\gamma-1}}{t_j^\gamma \Gamma(\gamma)} \quad (j=1,2). \quad (3.69)$$

К уравнениям (3.66) и (3.68) следует присоединить начальные условия (3.26).

3.2 Анализ динамического поведения вязкоупругой балки типа Тимошенко при ударных воздействиях без учета растяжения её срединной поверхности

3.2.1. Удар упругого шара по вязкоупругой балке

При ударе упругого шара по вязкоупругой балке типа Тимошенко без учета растяжения ее срединной поверхности система уравнений (3.1)-(3.6) сводится к системе уравнений (3.2), (3.3), (3.5), (3.6).

Тогда уравнение движения контактной зоны примет следующий вид:

$$2Q + P(t) = 2aF \rho \ddot{w}. \quad (3.70)$$

Подставляя уравнение (3.48) в (3.70), получим

$$gW + l\alpha^{1/2}\dot{W} = P(t), \quad (3.71)$$

Складывая уравнения (3.65) и (3.71), имеем

$$m\dot{W} + m\ddot{\alpha} + l\alpha^{1/2}\dot{W} + gW = 0 \quad (3.72)$$

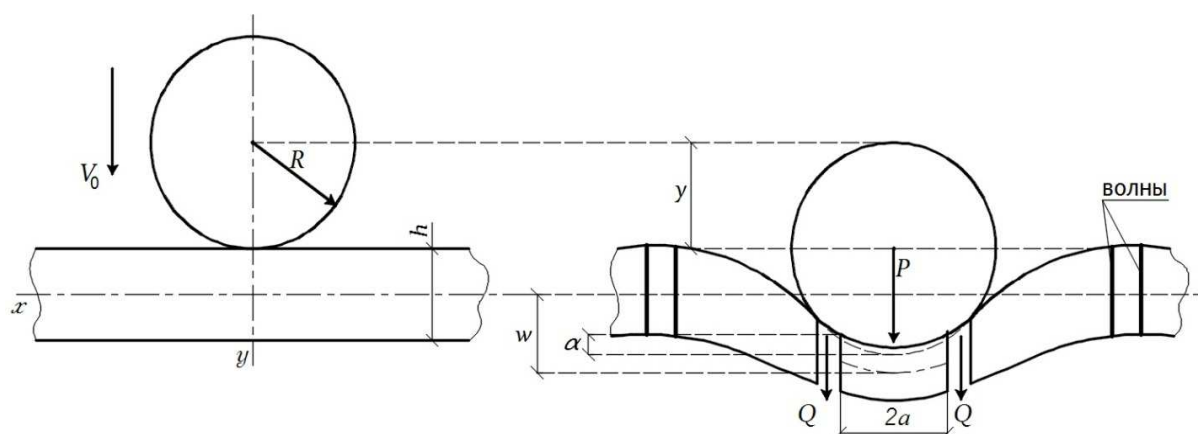


Рис. 3.3 Схема ударного взаимодействия упругого шара с вязкоупругой балкой Тимошенко без учета растяжения срединной поверхности

Если растяжение срединной поверхности не учитывается (Рис.3.3), то система определяющих уравнений (3.66) и (3.68) с учетом (3.69) сводится к следующей системе уравнений:

$$m\dot{W} + m\ddot{\alpha} = -k_1 \left[\alpha^{3/2} - \Delta_\gamma \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right], \quad (3.73)$$

$$\dot{W} + \frac{g}{m}W = -\ddot{\alpha}, \quad (3.74)$$

где

$$\Delta_\gamma = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{e_1}{t_1^\gamma} + \frac{e_2}{t_2^\gamma} \right). \quad (3.75)$$

Решение уравнения (3.74) может быть построено в виде

$$W = C(t) e^{-\frac{g}{m}t}, \quad (3.76)$$

где функцию $C(t)$ можно найти, используя метод вариации произвольных постоянных, в результате чего получим

$$m\dot{W} + m\ddot{\alpha} = g\dot{\alpha} - \frac{g^2}{m}\alpha - gV_0. \quad (3.77)$$

Подставляя (3.77) в (3.68), приходим к определяющему интегро-дифференциальному уравнению

$$\dot{\alpha} - \frac{g}{m}\alpha = -f_1 \left[\alpha^{3/2} - \Delta_\gamma \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right] + V_0, \quad (3.78)$$

к которому необходимо присоединить начальные условия

$$\dot{\alpha}|_{t=0} = V_0, \quad \alpha|_{t=0} = 0, \quad (3.79)$$

где $f_1 = \frac{k_1}{g} = \frac{k_1}{2\rho FG_\infty^{(2)}}$.

Решение (3.78) может быть найдено с помощью метода итераций (метода последовательных приближений). Таким образом, частное решение (3.78), если пренебречь членами в квадратных скобках, имеет вид

$$\alpha(t) = \frac{m}{g} V_0 \left(e^{\frac{g}{m}t} - 1 \right). \quad (3.80)$$

Раскладывая экспоненту

$$e^{\frac{g}{m}t} \approx 1 + \frac{g}{m}t, \quad (3.81)$$

и подставляя соотношение (3.81) в уравнение (3.80), получим

$$\alpha \approx V_0 t. \quad (3.82)$$

Теперь подставляя (3.82) в правую часть уравнения (3.78), найдем общее решение полученного неоднородного уравнения в виде

$$\alpha = C_1(t) e^{\frac{g}{m}t} - V_0 \frac{m}{g}, \quad (3.83)$$

где функция $(C_1 t)$ может быть найдена при помощи метода вариации произвольных постоянных

$$C_1(t) = -f_1 V_0^{3/2} \left(\frac{2}{5} t^{5/2} - \Delta_\gamma \int_0^t dt'' \left[\int_0^{t''} (t'' - t')^{\gamma-1} t'^{3/2} (t') dt' \right] \right) + C_0, \quad (3.84)$$

где C_0 - постоянная интегрирования.

С учетом (3.84) получим следующее окончательное выражение для $\alpha(t)$:

$$\alpha(t) = \frac{m}{g} V_0 \left(e^{\frac{g}{m}t} - 1 \right) - f_1 V_0^{3/2} \left(\frac{2}{5} t^{5/2} - \Delta_\gamma \int_0^t dt'' \left[\int_0^{t''} (t'' - t')^{\gamma-1} t'^{3/2} (t') dt' \right] \right) e^{\frac{g}{m}t}. \quad (3.85)$$

С учетом (3.81) решение (3.85) для двух предельных случаев сводится к следующему:

при $\gamma = 0$

$$\alpha = V_0 t - \frac{2}{5} f_1 V_0^{3/2} t^{5/2} e^{\frac{g}{m}t}, \quad (3.86)$$

при $\gamma = 1$

$$\alpha = V_0 t - \frac{2}{5} f_1 V_0^{3/2} t^{5/2} e^{\frac{g}{m}t} + \frac{4}{35} \Delta_1 f_1 V_0^{3/2} t^{7/2} e^{\frac{g}{m}t}, \quad (3.87)$$

где $\Delta_1 = \Delta_\gamma |_{\gamma=1}$.

Соотношения (3.86) и (3.87) позволяют оценить для предельных случаев время отскока ударника от мишени t_{reb} и время t_{max} , при котором смятие достигает максимального значения α_{max} , т.е.

при $\gamma = 0$

$$t_{reb}^0 = \left(\frac{5}{2f_1} V_0^{-1/2} \right)^{2/3}, \quad (3.88)$$

$$t_{max}^0 = \left(\frac{1}{f_1} V_0^{-1/2} \right)^{2/3}, \quad (3.89)$$

$$\alpha_{max}^0 = V_0 t_{max}^0 - \frac{2}{5} f_1 V_0^{3/2} (t_{max}^0)^{5/2} = \frac{3}{5} V_0^{2/3} f_1^{-2/3}, \quad (3.90)$$

при $\gamma = 1$

$$t_{reb}^1 = t_{reb}^0 + \frac{4}{21} \Delta_1 (t_{reb}^0)^2, \quad (3.91)$$

$$t_{max}^1 = t_{max}^0 + \frac{4}{15} \Delta_1 (t_{max}^0)^2, \quad (3.92)$$

$$\alpha_{max}^1 = \alpha_{max}^0 + \frac{4}{35} \Delta_1 f_1 V_0^{3/2} (t_{max}^0)^{7/2}. \quad (3.93)$$

Из формул (3.88)-(3.93) видно, что увеличение параметра γ от 0 до 1 приводит к увеличению продолжительности контакта между ударником и вязкоупругой мишенью, и это увеличение возрастает с увеличением дефектов модулей e_1 и e_2 и с уменьшением времени релаксации t_1 и t_2 . Кроме того, с изменением параметра γ от 0 до 1 максимальное значение величины α , а также время, при котором смятие достигает своего максимума, увеличиваются. Все перечисленные особенности сопровождаются увеличением вязкости материала, из которого изготовлена вязкоупругая балка, что происходит с увеличением параметра дробности γ .

3.2.2. Удар вязкоупругого шара по вязкоупругой балке

Система уравнений, описывающих динамическое поведение вязкоупругой балки без растяжения срединной поверхности балки имеет вид уравнений (3.1)-(3.6). После анализа, проведенного в предыдущей главе, можем переписать уравнение движения балки и шара в виде (3.64) и (3.65), соответственно, с учетом начальных условий (3.26).

Удар происходит в момент времени $t = 0$. Когда $t > 0$, перемещение центра шара u можно представить в виде (3.16), которое связано с

контактной силой по формулам (2.27) и (2.28), согласно обобщенному закону Герца, где оператор жесткости E^* определяется в соответствии с принципом Вольтерра

$$\frac{1}{E^*} = J^* = \frac{1 - \tilde{\nu}_1^2}{\tilde{E}_1} + \frac{1 - \tilde{\nu}_2^2}{\tilde{E}_2}, \quad (3.94)$$

где $\tilde{E}_1, \tilde{\nu}_1$ и $\tilde{E}_2, \tilde{\nu}_2$ - зависящие от времени операторы, соответствующие коэффициентам Пуассона и модулям Юнга для вязкоупругой балки (мишени) и вязкоупругого шара (ударника).

Кроме того, как было показано в работе [151], оператор E^* , входящий в соотношение (3.94), имеет вид

$$E^* = \left(\frac{1 - \tilde{\nu}_1^2}{\tilde{E}_1} + \frac{1 - \tilde{\nu}_2^2}{\tilde{E}_2} \right)^{-1} = \kappa_\infty^{-1} \left[1 - \sum_{j=1}^4 m_j \mathfrak{E}_\gamma^* (t_j^\gamma) \right], \quad (3.95)$$

где

$$\kappa_\infty = \frac{1 - \nu_{1\infty}^2}{E_{1\infty}} + \frac{1 - \nu_{2\infty}^2}{E_{2\infty}}, \quad (3.96)$$

а значения m_j ($j = 1, 2, 3, 4$) определяются из системы четырех линейных уравнений

$$1 + \sum_{j=1}^4 \frac{m_j t_j^{-\gamma}}{\tau_k^{-\gamma} - t_j^{-\gamma}} = 0. \quad (3.97)$$

при условии, что значения $t_j^{-\gamma}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) уже известны [151]

$$t_1^{\gamma_1} = \frac{2\tau_{1\varepsilon}^{\gamma_1}(1+v_{1\infty})}{2(1+v_{1\infty})+v_{1\varepsilon}(1-2v_{1\infty})}, \quad t_2^{\gamma_1} = \frac{2\tau_{1\varepsilon}^{\gamma_1}(1-v_{1\infty})}{2(1-v_{1\infty})-v_{1\varepsilon}(1-2v_{1\infty})},$$

$$t_3^{\gamma_2} = \frac{2\tau_{2\varepsilon}^{\gamma_2}(1+v_{2\infty})}{2(1+v_{2\infty})+v_{2\varepsilon}(1-2v_{2\infty})}, \quad t_4^{\gamma_2} = \frac{2\tau_{2\varepsilon}^{\gamma_2}(1-v_{2\infty})}{2(1-v_{2\infty})-v_{2\varepsilon}(1-2v_{2\infty})}.$$

Тогда коэффициенты m_j принимают вид

$$m_1 = \frac{3}{2} \frac{(1-v_{1\infty})v_{1\varepsilon}}{2(1+v_{1\infty})+v_{1\varepsilon}(1-2v_{1\infty})}, \quad m_2 = \frac{1}{2} \frac{(1+v_{1\infty})v_{1\varepsilon}}{2(1-v_{1\infty})-v_{1\varepsilon}(1-2v_{1\infty})},$$

$$m_3 = \frac{3}{2} \frac{(1-v_{2\infty})v_{2\varepsilon}}{2(1+v_{2\infty})+v_{2\varepsilon}(1-2v_{2\infty})}, \quad m_4 = \frac{1}{2} \frac{(1+v_{2\infty})v_{2\varepsilon}}{2(1-v_{2\infty})-v_{2\varepsilon}(1-2v_{2\infty})}.$$

Для того чтобы получить определяющее уравнение для контактной силы $P(t)$, подставим (2.27) и (3.95) в (3.65) и с учетом (3.22) получим

$$m\dot{W} + m\ddot{\alpha} = -k \left[\alpha^{3/2}(t) - \sum_{j=1}^4 m_j \int_0^t \varepsilon_\gamma \left(-\frac{t-t'}{t_j} \right) \alpha^{3/2}(t') dt' \right], \quad (3.98)$$

где $k = \frac{4}{3} \sqrt{R} \kappa_\infty^{-1}$.

Теперь уравнение (3.66), полученное в предыдущем разделе, и уравнение (3.98) позволяют найти значения W и α . Учитывая, что процесс соударения непродолжителен, и интеграл, входящий в уравнение (3.98), можно выразить в виде (3.69), тогда определяющую систему уравнений можно переписать и виде

$$m\dot{W} + m\ddot{\alpha} = -k \left[\alpha^{3/2} - \Delta'_\gamma \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right], \quad (3.99)$$

$$\dot{W} + \frac{g}{m} W = -\ddot{\alpha}, \quad (3.100)$$

где

$$\Delta'_\gamma = \sum_{j=1}^4 \frac{m_j}{t_j^\gamma \Gamma(\gamma)} \quad (3.101)$$

Далее для получения системы двух интегро-дифференциальных уравнений, определяющих местное смятие материалов ударника и мишени и прогиб балки в области контакта, используется аналогичная методика, что и для случая удара упругого шара по вязкоупругой балке, при этом вместо коэффициента, определяемого выражением (3.75), следует использовать коэффициент Δ'_γ (3.101).

3.2.3. Удар жесткого шара по вязкоупругой балке

Для случая, когда сферический ударник является жестким, модуль упругости его материала $E_2 \rightarrow \infty$, и в результате оператор E^* , входящий в уравнение (2.28), имеет вид

$$E^* = \frac{\tilde{E}_1}{1 - \tilde{\nu}_1^2}. \quad (3.102)$$

Тогда

$$\tilde{k} = \frac{4 \sqrt{R} \tilde{E}_1}{3 (1 - \tilde{\nu}_1^2)}. \quad (3.103)$$

Оператор, входящий в выражение (3.102), запишем в виде

$$\frac{\tilde{E}_1}{1 - \tilde{\nu}_1^2} = \frac{E_\infty}{1 - \nu_\infty^2} \left[1 - m_1 \mathfrak{E}_{\gamma_1}^* (t_1^{\gamma_1}) - m_2 \mathfrak{E}_{\gamma_1}^* (t_2^{\gamma_1}) \right], \quad (3.104)$$

где

$$t_1^{\gamma_1} = \frac{2(1+v_\infty)\tau_\varepsilon^{\gamma_1}}{2(1+v_\infty)+v_\varepsilon(1-2v_\infty)}, \quad t_2^{\gamma_1} = \frac{2(1-v_\infty)\tau_\varepsilon^{\gamma_1}}{2(1-v_\infty)-v_\varepsilon(1-2v_\infty)},$$

$$m_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{(1-v_\infty)v_\varepsilon}{2(1+v_\infty)+(1-2v_\infty)v_\varepsilon}, \quad m_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+v_\infty)v_\varepsilon}{2(1-v_\infty)-(1-2v_\infty)v_\varepsilon},$$

v_ε - дефект модуля, который описывается выражением

$$v_\varepsilon = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty}. \quad (3.105)$$

Как и в предыдущем частном случае, применяется разработанная выше методика решения системы двух интегро-дифференциальных уравнений относительно контактной силы и локального смятия, изменяется лишь коэффициент Δ_γ , который для этого случая имеет следующий вид:

$$\Delta_{\gamma_1} = \frac{1}{\Gamma(\gamma_1)} \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{t_j^{\gamma_1}}. \quad (3.106)$$

3.3. Анализ полученных решений и численные исследования

3.3.1. Упругая мишень

Если выражение $\alpha^{1/2}\dot{W}$ в (3.64) опустить в силу его малости, т.е. пренебречь таким образом инерцией области контакта, тогда уравнение для упругой балки сводится к виду

$$W = \frac{P(\alpha)}{e\alpha + g}. \quad (3.107)$$

Подставляя (3.107) в (3.65), получим уравнение для определения $\alpha(t)$

$$\ddot{\alpha} + \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{P(\alpha)}{e\alpha + g} \right) \dot{\alpha} = -\frac{1}{m} P(\alpha) \quad (3.108)$$

или после подстановки $A = \dot{\alpha}$

$$A \frac{dA}{d\alpha} + \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{P(\alpha)}{e\alpha + g} \right) A = -\frac{1}{m} P(\alpha). \quad (3.109)$$

Чтобы найти решение (3.109), необходимо использовать начальное условие

$$A|_{\alpha=0} = V_0. \quad (3.110)$$

Определяющее уравнение (3.108) отличается от соответствующего уравнения, приведенного в [164], не только своими коэффициентами (из-за того, что для поперечной деформации в [164] была использована неправильная формула), но и по своей структуре, а именно: множитель $\dot{\alpha}$ был пропущен во втором слагаемом, хотя значение инерции зоны контакта учитывалось в цитируемой работе [164].

Уравнение (3.109) можно переписать в виде

$$A \frac{dA}{d\alpha} + k_1 \frac{e\alpha^{3/2} + 3/2g\alpha^{1/2}}{(e\alpha + g)^2} A = -\frac{k_1}{m} \alpha^{3/2}. \quad (3.111)$$

Если пренебречь членом $e\alpha$ в сравнении с g (α мало) в (3.111), то уравнение сводится к

$$A \frac{dA}{d\alpha} + \frac{3}{2} f_1 \alpha^{1/2} A + f_2 \alpha^{3/2} A = -\frac{k_1}{m} \alpha^{3/2}, \quad (3.112)$$

где $f_2 = \frac{k_1 e}{g^2} = f_1 \frac{G_\infty^{(1)2}}{G_\infty^{(2)2}} \frac{1}{v_\infty h}$.

Решение (3.112) может быть построено аналитически в виде ряда [137]

$$A = V_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha^{(2i+1)/2} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \alpha^i, \quad (3.113)$$

где

$$a_1 = -f_1, \quad a_2 = -\frac{2}{5} \frac{k_1}{V_0 m} - \frac{2}{5} f_2, \quad a_3 = a_4 = 0,$$

$$a_5 = \frac{5}{11} \frac{a_1^2 (a_2 + f_2)}{V_0^2},$$

$$a_6 = \frac{5}{104} \frac{a_1 \left(a_2 + \frac{2}{5} f_2 \right) (21a_2 + 2f_2)}{V_0^2},$$

$$a_7 = \frac{1}{6} \frac{a_2 \left(a_2 + \frac{2}{5} f_2 \right) \left(3a_2 + \frac{2}{5} f_2 \right)}{V_0^2},$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_6 = 0, \quad b_4 = -\frac{5}{8} \frac{a_1 \left(a_2 + \frac{2}{5} f_2 \right)}{V_0}, \quad b_5 = -\frac{1}{2} \frac{a_2 \left(a_2 + \frac{2}{5} f_2 \right)}{V_0}$$

$$b_7 = -\frac{5}{14} \frac{a_1^3 \left(a_2 + \frac{2}{5} f_2 \right)}{V_0^3}.$$

Из выражения (3.113) видно, что все коэффициенты $a_i (i \geq 4)$ и $b_i (i \geq 4)$ выражены через коэффициенты a_1 и a_2 , которые соответствуют трем различным процессам, вызванным ударным взаимодействием. Коэффициент a_1 отвечает за динамический процесс, возникающий в балке при распространении волны сдвига, а коэффициент a_2 отвечает за квазистатический процесс, происходящий при местном смятии материала в соответствии с теорией Герца, и за динамический процесс, возникающий в балке при распространении продольной волны.

Когда $g = 0$, что достигается при бесконечно большой скорости распространения волны сдвига, решение (3.113) для малых α переходит в квазистатическое решение, полученное С.П. Тимошенко [32] для балки Бернулли-Эйлера.

Если принять $f_2 = 0$ в (3.113), чтобы исключить мембранные эффекты при $e = 0$, то ряд (3.113) является решением уравнения

$$A \frac{dA}{d\alpha} + \frac{3}{2} f_1 \alpha^{1/2} A = -\frac{k_1}{m} \alpha^{3/2}, \quad (3.114)$$

которое было получено в [137].

3.3.2 Вязкоупругая мишень

Если пренебречь инерцией области контакта в уравнении (3.66), выразить $\dot{W} + \ddot{\alpha}$ из соотношения (3.68) с учетом выражения (3.69) и подставить полученное выражение в уравнение (3.66), тогда получим

$$W = \frac{f_3}{1 + \frac{e}{g}\alpha} \left[\alpha^{3/2} - \Delta_\gamma \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right], \quad (3.115)$$

где $f_3 = f_1 \frac{m}{g}$.

Учитывая малость величины α , раскладывая $\left(1 + \frac{e}{g}\alpha\right)^{-1}$ в ряд Тейлора и ограничиваясь двумя членами, уравнение (3.115) приводится к виду

$$W = f_3 \left[\alpha^{3/2} - \Delta_\gamma \int_0^t (t-t')^{\gamma-1} \alpha^{3/2}(t') dt' \right] \left(1 - \frac{e}{g}\alpha\right). \quad (3.116)$$

Подставляя теперь (3.82) в правую часть уравнения (3.116) и полагая $\gamma = 1$, находим

$$W = f_1 V_0^{3/2} t^{3/2} \left(1 - \frac{2}{5} \Delta_1 t - \frac{e}{g} V_0 t\right). \quad (3.117)$$

Подставляя (3.117) в уравнение (3.74) и затем дважды интегрируя, получим

$$\alpha = V_0 t - \frac{2}{5} f_1 V_0^{3/2} t^{5/2} + \frac{2}{7} f_1 V_0^{3/2} \left(\frac{2}{5} \Delta_1 + \frac{e}{g} V_0\right) t^{7/2}. \quad (3.118)$$

Полагая $\gamma = 0$ в (3.119), можно найти решение и для этого предельного случая

$$W = f_1 V_0^{3/2} t^{3/2} \left(1 - \frac{e}{g} V_0 t \right), \quad (3.120)$$

$$\alpha = V_0 t - \frac{2}{5} f_1 V_0^{3/2} t^{5/2} + \frac{2}{7} f_1 \frac{e}{g} V_0^{5/2} t^{7/2}. \quad (3.121)$$

Соотношения (3.118) и (3.121) позволяют оценить для предельных случаев время отскока ударника от мишени t_{reb}^{ex} и время t_{max}^{ex} , при котором смятие достигает максимальной величины α_{max}^{ex} с учетом растяжения срединной поверхности балки, т.е.

при $\gamma = 0$

$$t_{reb}^{(0)ex} = t_{reb}^{(0)} + \frac{10}{21} V_0 \frac{e}{g} \left(t_{reb}^{(0)} \right)^2, \quad (3.122)$$

$$t_{max}^{(0)ex} = t_{max}^{(0)} + \frac{2}{3} V_0 \frac{e}{g} \left(t_{max}^{(0)} \right)^2, \quad (3.123)$$

$$\alpha_{max}^{(0)ex} = \alpha_{max}^{(0)} + \frac{2}{7} f_1 \frac{e}{g} V_0^{5/2} \left(t_{max}^{(0)} \right)^{7/2}, \quad (3.124)$$

$$P_{max}^{(0)ex} = k \left(\alpha_{max}^{(0)ex} \right)^{3/2}, \quad (3.125)$$

при $\gamma = 1$

$$t_{reb}^{(1)ex} = t_{reb}^{(1)} + \frac{10}{21} V_0 \frac{e}{g} \left(t_{reb}^{(0)} \right)^2, \quad (3.126)$$

$$t_{max}^{(1)ex} = t_{max}^{(1)} + \frac{2}{3} V_0 \frac{e}{g} \left(t_{max}^{(0)} \right)^2, \quad (3.127)$$

$$\alpha_{max}^{(1)ex} = \alpha_{max}^{(1)} + \frac{2}{7} f_1 \frac{e}{g} V_0^{5/2} \left(t_{max}^{(0)} \right)^{7/2}, \quad (3.128)$$

$$P_{max}^{(1)ex} = k \left(\alpha_{max}^{(1)ex} \right)^{3/2}, \quad (3.129)$$

Сравнение формул (3.122)-(3.130) и (3.131)-(3.132) с соответствующими формулами (3.88)-(3.93) показывает, что за счет растяжения срединной поверхности мишени происходит увеличение продолжительности контакта между ударником и мишенью, максимального значения величины α , а также времени, при котором смятие достигает своего максимума, и это увеличение возрастает с увеличением коэффициента e/g , который контролирует растяжение срединной поверхности балки.

3.3.3 Численный пример

Для численного анализа удобно переписать формулы (3.88)-(3.93) и (3.122)-(3.133) в безразмерном виде:

случай без учета растяжения срединной поверхности при $\gamma = 0$

$$t_{reb}^{(0)*} = \frac{t_{reb}^{(0)}}{t_{max}^{(0)}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2/3}, \quad (3.134)$$

$$t_{max}^{(0)*} = \frac{t_{max}^{(0)}}{t_{max}^{(0)}} = 1, \quad (3.135)$$

$$\alpha_{max}^{(0)*} = \frac{\alpha_{max}^{(0)}}{V_0 t_{max}^{(0)}} = \frac{3}{5}, \quad (3.136)$$

при $\gamma = 1$

$$t_{reb}^{(1)*} = \frac{t_{reb}^{(1)}}{t_{max}^{(0)}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2/3} \left[1 + \frac{4}{21} \chi_1 \left(\frac{5}{2}\right)^{2/3} \right], \quad (3.137)$$

$$t_{max}^{(1)*} = \frac{t_{max}^{(1)}}{t_{max}^{(0)}} = 1 + \frac{4}{15} \chi_1, \quad (3.138)$$

$$\alpha_{max}^{(1)*} = \frac{\alpha_{max}^{(1)}}{V_0 t_{max}^{(0)}} = \frac{3}{5} + \frac{4}{35} \chi_1; \quad (3.139)$$

случай с учетом растяжения срединной поверхности

при $\gamma = 0$

$$t_{reb}^{(0)ex*} = \frac{t_{reb}^{(0)ex}}{t_{max}^{(0)}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2/3} \left[1 + \frac{10}{21} \chi_2 \left(\frac{5}{2}\right)^{2/3} \right], \quad (3.140)$$

$$t_{max}^{(0)ex*} = \frac{t_{max}^{(0)ex}}{t_{max}^{(0)}} = 1 + \frac{2}{3} \chi_2, \quad (3.141)$$

$$\alpha_{max}^{(0)ex*} = \frac{\alpha_{max}^{(0)ex}}{V_0 t_{max}^{(0)}} = \frac{3}{5} + \frac{2}{7} \chi_2, \quad (3.142)$$

при $\gamma = 1$

$$t_{reb}^{(1)ex*} = \frac{t_{reb}^{(1)ex}}{t_{max}^{(0)}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2/3} \left[1 + \frac{4}{21} \chi_1 \left(\frac{5}{2}\right)^{2/3} \right] + \frac{10}{21} \chi_2 \left(\frac{5}{2}\right)^{4/3}, \quad (3.143)$$

$$t_{max}^{(1)ex*} = \frac{t_{max}^{(1)ex}}{t_{max}^{(0)}} = 1 + \frac{4}{15} \chi_1 + \frac{2}{3} \chi_2, \quad (3.139)$$

$$\alpha_{max}^{(1)ex*} = \frac{\alpha_{max}^{(1)ex}}{V_0 t_{max}^{(0)}} = \frac{3}{5} + \frac{4}{35} \chi_1 + \frac{2}{7} \chi_2, \quad (3.140)$$

где $\chi_1 = \Delta_1 t_{max}^{(0)}$ и $\chi_2 = V_0 e g^{-1} t_{max}^{(0)}$ - безразмерные параметры, а все безразмерные значения отмечены знаком *.

Зависимость безразмерной величины $\alpha^* = \alpha (V_0 t_{max}^{(0)})^{-1}$, которая характеризует местное смятие материалов ударника и мишени, от безразмерного времени $t^* = t (t_{max}^{(0)})^{-1}$ для различных значений параметра дробности γ , которые обозначены цифрами около соответствующих кривых, показаны на рис. 3.4 и 3.5. Сплошные кривые подсчитаны без учета растяжения срединной поверхности мишени, а пунктирные линии

соответствуют случаю учета растяжения срединной поверхности при различных значениях параметров χ_1 и χ_2 . Характер поведения кривых на рис. 3.4 и 3.5 подтверждает выводы, сделанные на основании приближенных расчетов.

Так, из рис. 3.4 видно, что увеличение параметра χ_1 , который отвечает за вязкие свойства системы, приводит к увеличению максимального значения местного смятия и времени контакта. Чем больше параметр χ_1 , тем сильнее влияние растяжения срединной поверхности балки на продолжительность контактного взаимодействия при одних и тех же значениях параметра дробности γ .

Как следует из рис. 3.5, увеличение параметра χ_2 , который зависит от начальной скорости удара и скоростей распространения продольной волны и волны поперечного сдвига в балке, приводит к увеличению максимального значения местного смятия и времени контакта. Чем больше параметр χ_2 , тем сильнее влияние растяжения срединной поверхности балки на продолжительность контактного взаимодействия при одних и тех же значениях параметра дробности γ .

Зависимость безразмерной контактной силы $P^* = Pk^{-1}(V_0 t_{\max}^0)^{-3/2}$ от безразмерного времени приведены на рис. 3.6 и 3.7 для различных значений параметра дробности γ . Из рис. 3.6 и 3.7 следует, что растяжение срединной поверхности приводит к увеличению значений контактной силы и продолжительности контакта.

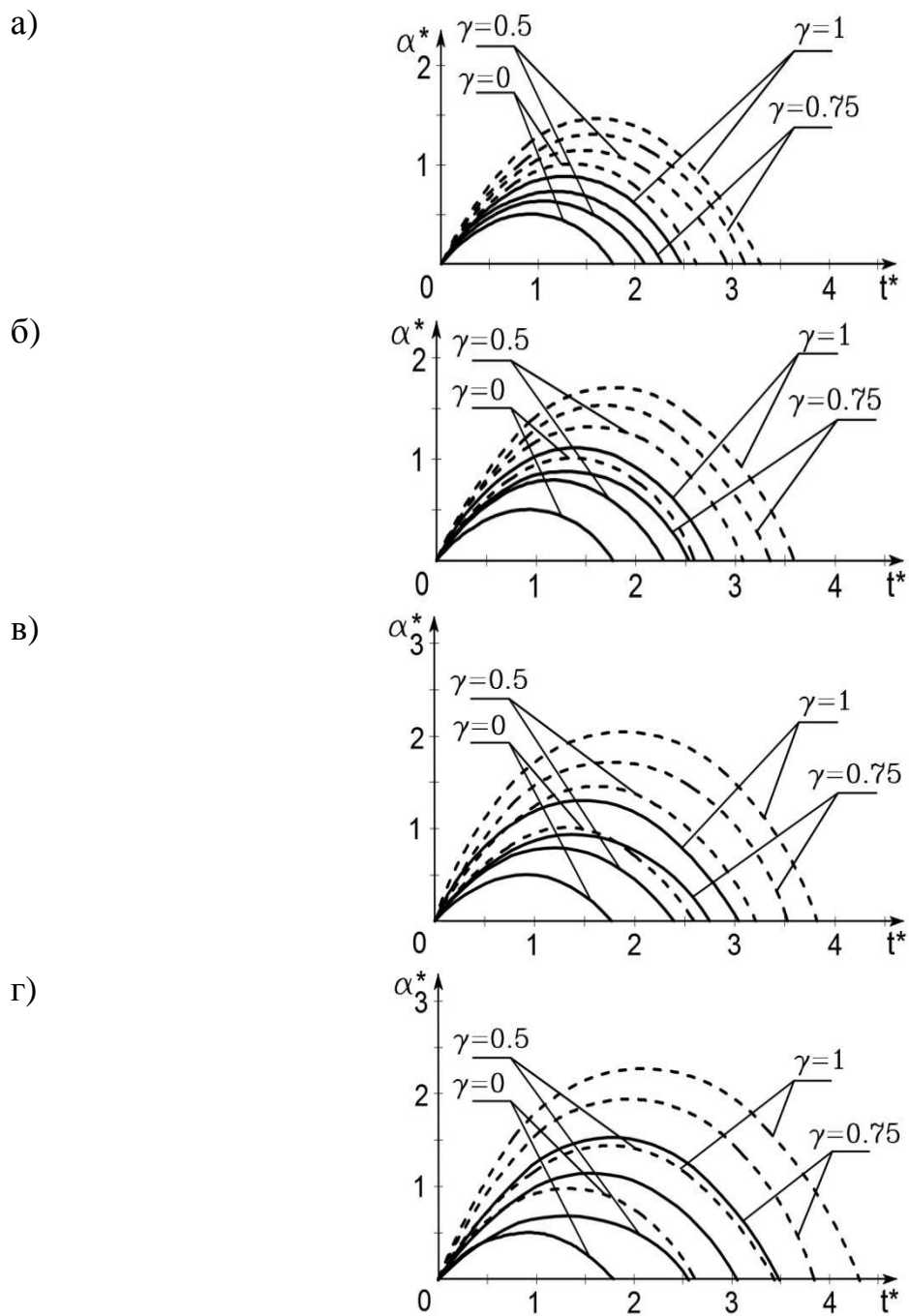


Рис. 3.4 Зависимость безразмерной величины α^* от безразмерного времени t^* при $\chi_2 = 0.5$ и а) $\chi_1 = 1$, б) $\chi_1 = 1.5$, в) $\chi_1 = 2$, г) $\chi_1 = 2.5$

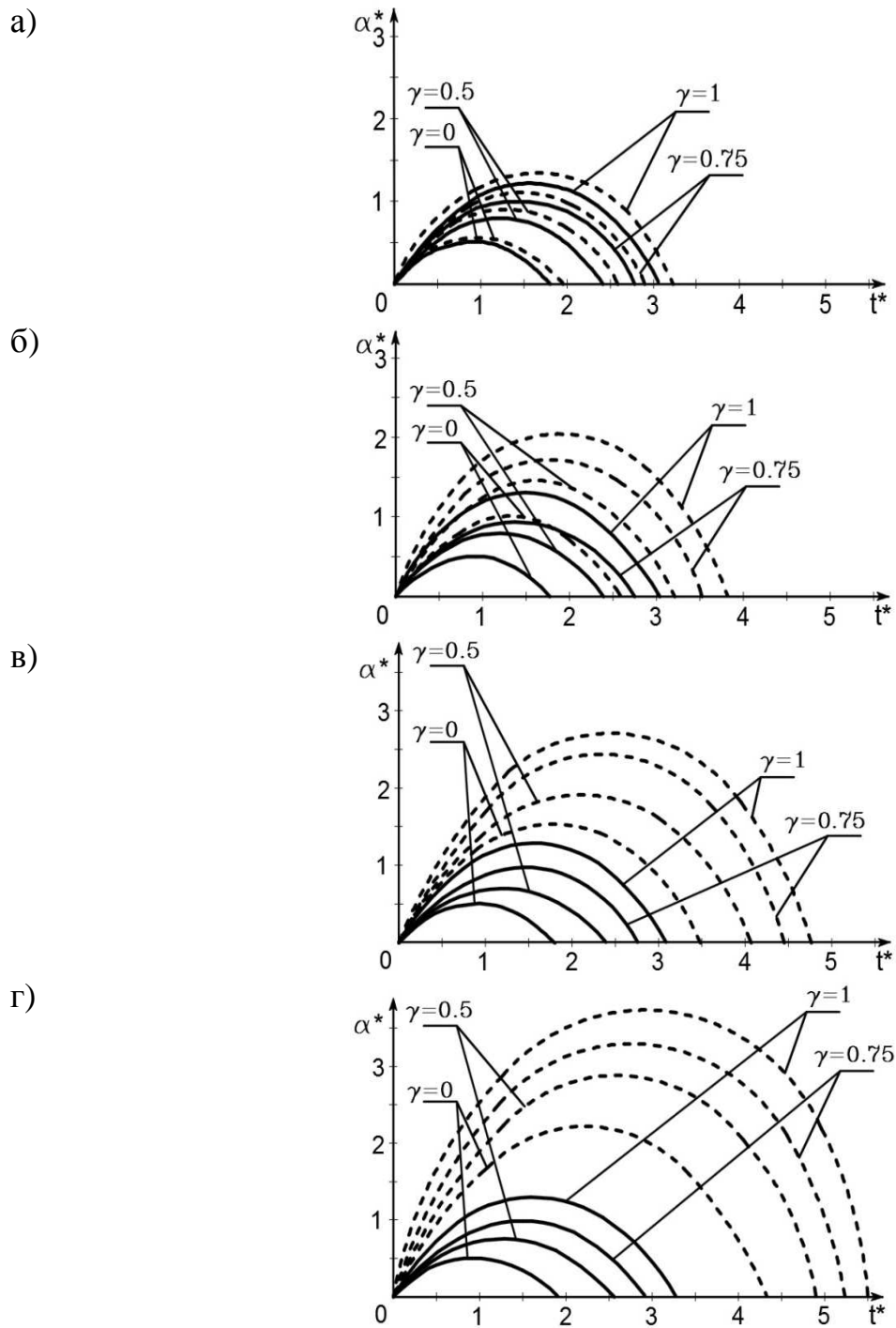


Рис. 3.5 Зависимость безразмерной величины α^* от безразмерного времени t^* при $\chi_1 = 2$ и а) $\chi_2 = 0.1$, б) $\chi_2 = 0.5$, в) $\chi_2 = 1$, г) $\chi_1 = 1.5$

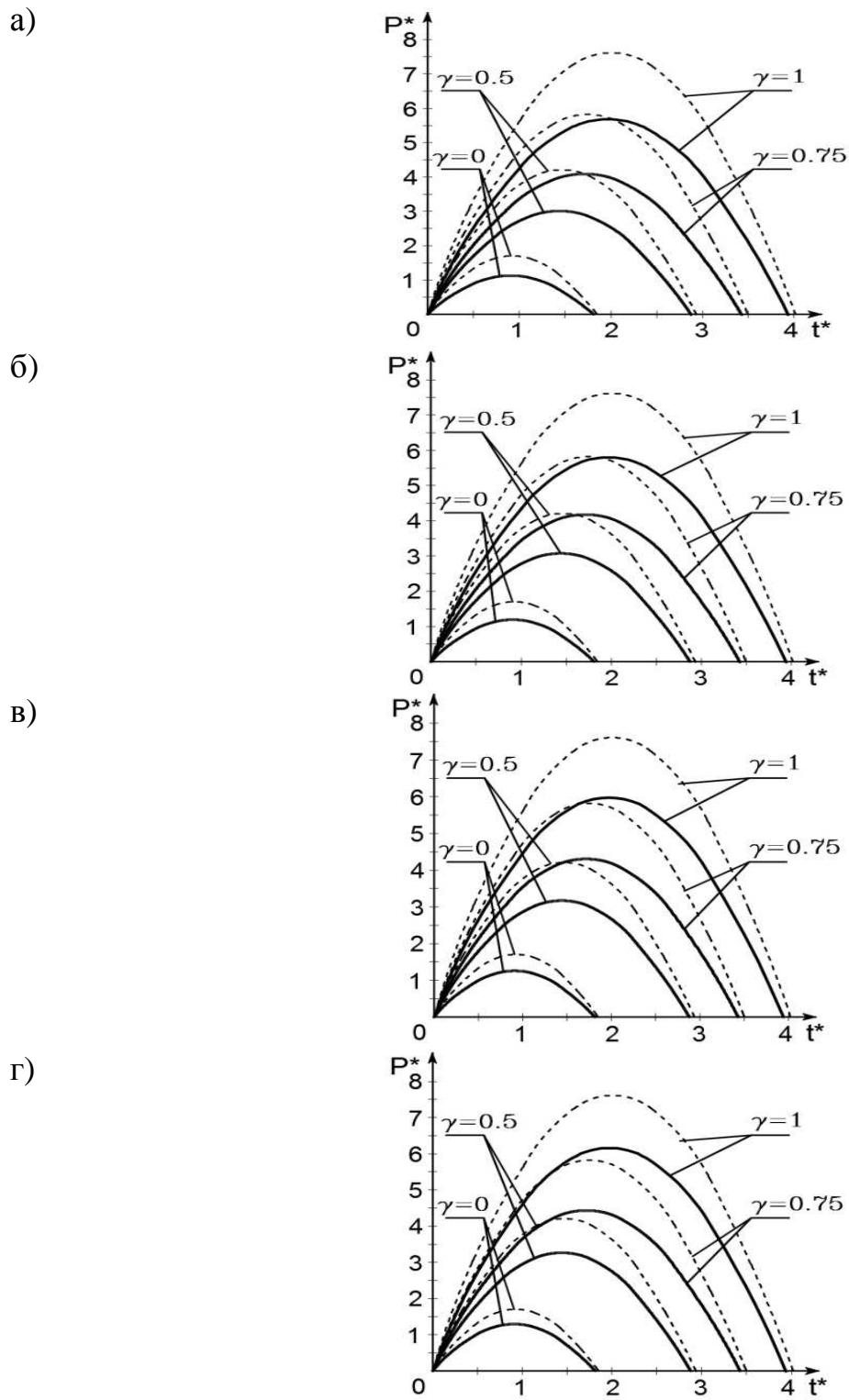


Рис. 3.6 Зависимость безразмерной контактной силы P^* от безразмерного времени t^* при $\chi_2 = 0.5$ и а) $\chi_1 = 1$, б) $\chi_1 = 1.5$, в) $\chi_1 = 2$, г) $\chi_1 = 2.5$

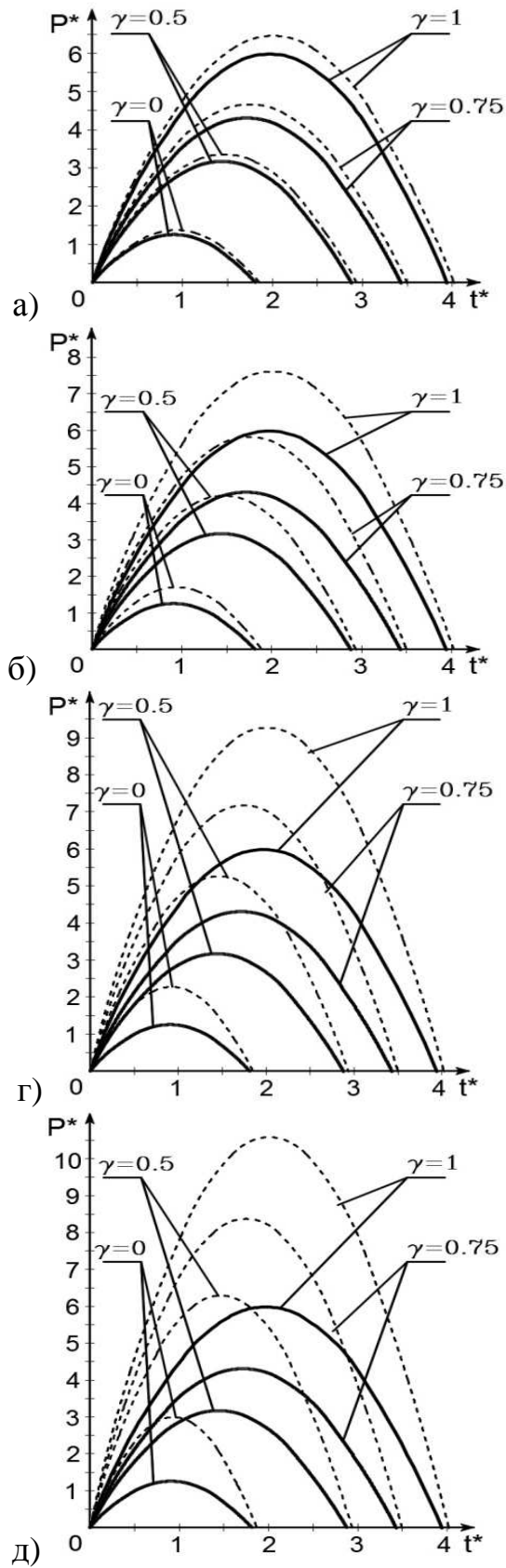


Рис. 3.7 Зависимость безразмерной контактной силы P^* от безразмерного времени t^* при $\chi_1 = 2$ и а) $\chi_2 = 0.1$, б) $\chi_2 = 0.5$, в) $\chi_2 = 1$, г) $\chi_2 = 1.5$

Заключение

Основные результаты данной диссертационной работы можно сформулировать следующим образом:

1. Вопреки укоренившимся взглядам на различие в колебаниях балки Бернулли-Эйлера при наличии внешнего и внутреннего трения показано, что если перейти к обобщенным перемещениям и использовать гипотезу Рэлея о пропорциональности матриц упругих и вязких коэффициентов, то никакого различия между этими трениями не существует, поскольку в обоих случаях получаются одни и те же уравнения. Иначе говоря, и в том и в другом случаях балку можно считать упругой, а среду, в которой она колеблется, вязкой.

2. В свете описанных выше представлений решена задача об ударе вязкоупругого шара по упругой шарнирно опертой балке Бернулли-Эйлера, находящейся в вязкой среде. Вязкоупругие свойства ударника описываются моделью стандартного линейного тела с дробной производной, а демпфирующие свойства среды – моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, при этом параметры дробности ударника γ_2 и среды γ_1 имеют разные значения. Решение задачи вне области контакта строится при помощи функции Грина, а в зоне контакта – с использованием обобщенной теории Герца. Благодаря алгебре безразмерных дробных операторов Ю.Н. Работнова удается расшифровать сложные операторные выражения, которые возникают при решении данной задачи, и получить определяющие интегральные уравнения как для контактной силы, так и для величины, характеризующей

местное смятие материалов балки и шара. Полученные уравнения затем решены приближенно с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса. Проведены численные исследования, которые показывают, что при изменении параметра дробности γ_2 от нуля до единицы, что соответствует увеличению вязкости ударника, максимум контактной силы уменьшается, а время контакта ударника и мишени увеличивается. Кроме зависимости контактной силы от времени построены временные зависимости смятия материала ударника и мишени, а также исследовано влияние массы ударника, его начальной скорости и размеров поперечного сечения мишени на основные характеристики ударного взаимодействия шара и балки.

3. Волновая теория удара, разработанная ранее Ю.А. Россихиным и М.В. Шитиковой, была обобщена на случай растяжения срединной поверхности вязкоупругой мишени в виде балки.

4. Решена задача об ударе упругого шара по вязкоупругой балке типа Тимошенко, уравнения динамического поведения которой учитывают инерцию вращения и деформации поперечного сдвига. Вязкоупругие свойства балки вне области контакта описываются классической моделью стандартного линейного тела, а в зоне контакта используется модель стандартного линейного тела с дробными производными. Введение параметра дробности позволяет управлять вязкостью в зоне контакта, поскольку в процессе удара могут рваться поперечные связи между длинными молекулами, что может привести к изменению вязкости в системе «мишень-ударник». В процессе удара учитывается также растяжение срединной поверхности балки. Поскольку в момент удара в зоне контакта происходит зарождение продольной и поперечной

ударных волн (поверхностей сильного разрыва), которые затем распространяются вдоль вязкоупругой балки с упругими скоростями, то решение за фронтами ударных волн, т.е. вне области контакта, строится при помощи лучевых рядов, коэффициенты которых находятся из определяющей системы уравнений при помощи кинематических и геометрических условий совместности. В зоне контакта решение строится при помощи обобщенной теории Герца, при этом приходится расшифровывать сложные операторные выражения, которые приводят к линейным комбинациям из дробных операторов Ю.Н. Работнова. Такой комбинированный подход позволяет получить определяющую систему интегро-дифференциальных уравнений относительно перемещения балки в зоне контакта и местного смятия материалов балки и шара. Полученная система решена приближенно с использованием малого параметра, в качестве которого выступает время протекания ударного процесса.

5. Проведен сравнительный анализ результатов ударного взаимодействия шара с вязкоупругой балкой Тимошенко с учетом и без учета растяжения ее срединной поверхности. Показано, что учет растяжения делает механическую систему «мишень-ударник» более гибкой, что приводит к увеличению максимальных значений контактной силы и локального смятия материалов балки и шара в зоне контакта, а также к увеличению продолжительности контактного взаимодействия при одних и тех же значениях параметра дробности.

Список литературы

1. Анофрикова Н. С. Асимптотические методы построения решений в окрестностях фронтов волн в вязкоупругом стержне при больших значениях времени / Н. С. Анофрикова, Л. Ю. Коссович, В. П. Черненко // Известия Саратовского университета. - 2005. - Т. 5, N 1. - С. 82-88.
2. Бойков В. Г. Ударные взаимодействия / В. Г. Бойков. - ЗАО Автомеханика, 2005. - Режим доступа : /<http://www.euler.ru/distr/euler/simulation/impacts.pdf>.
3. Болотин В. В. Прочность, устойчивость, колебания / В. В. Болотин. – Москва : Машиностроение, 1968. - Т. 3. - 567 с.
4. Герасимов А. Н. Обобщенные законы деформирования и его применения к задачам внутреннего трения / А. Н. Герасимов // Прикладная математика и механика. - 1948. – Т. 12, N 3. – С. 251-260.
5. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит. – Москва. : Изд-во литер. по стр-ву, 1965. - 448 с.
6. Гонсовский В. Л. О волнах напряжений в вязкоупругой среде с сингулярным ядром / В. Л. Гонсовский, Ю. А. Россихин // Прикладная механика и техническая физика. - 1973. – Т. 1, N 4. - С. 184-186.
7. Гонсовский В. Л. Удар вязкоупругого стержня о жесткую преграду/ В. Л. Гонсовский, С. И. Мешков, Ю. А. Россихин // Прикладная механика. - 1972. – Т. 8, N 10. - С. 71-76.
8. Грещук Л. Б. Разрушение композитных материалов при ударах с малыми скоростями / Л. Б. Грещук // Динамика удара; пер. с англ. / Зукас Дж.А. и др. – Москва : Мир, 1985. - С. 8-46.
9. Журавков М. А. О перспективах использования теории дробного исчисления в механике / М. А. Журавков, Н. С. Романова. – Электрон. текстовые дан. – Минск : БГУ, 2013. – 53 с.: ил. –Библиогр.: 36–53. – Загл. с экрана. – №000413032013. - Деп. в БГУ 13.03.2013.

10. Зеленов В. М. Затухающие колебания упруго наследственных систем со слабо-сингулярными ядрами / В. М. Зеленов, С. И. Мешков, Ю. А. Россихин // Прикладная механика и техническая физика. - 1970. – Т. 1, N 2. - С. 104-108.
11. Клаф Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен ; пер. с англ. Килимник Л.Ш. и Швецова А.В. – Москва : Стройиздат, 1979.
12. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: учебное пособие / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. - Москва : Наука, 1965. - Т. 7. - 195 с.
13. Мешков С. И. Описание внутреннего трения в наследственной теории упругости при помощи ядер, имеющих слабую сингулярность / С. И. Мешков // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1967. - Т. 1, N 4. - С. 147-151.
14. Мешков С. И. Интегральное представление дробно-экспоненциальных функций и их приложение к динамическим задачам линейной вязкоупругости / С. И. Мешков // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1970. - Т. 1. - С. 103-110.
15. Мешков С. И. Вязкоупругие свойства металлов / С. И. Мешков. – Москва : Металлургия, 1974. - 193 с.
16. Мешков С. И. К описанию внутреннего трения при помощи дробно-экспоненциальных ядер / С. И. Мешков, В. С. Постников, Т. Д. Шермегор // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1966. - Т. 1, N 3. - С. 102-106.
17. Мешков С. И. О распространении звуковых волн в наследственно-упругой среде / С. И. Мешков, Ю. А. Россихин // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1968. - Т. 1, N 5. – С. 89-93.
18. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применения / А. М. Нахушев – Москва : Физматлит, 2003. - 272 с.

19. Огородников Е. Н. Вынужденные колебания дробных осцилляторов / Е. Н. Огородников, Н. С. Яшагин // Математическое моделирование и краевые задачи. - 2008. - Часть 1. - С. 215-221.
20. Огородников Е. Н. Математические модели дробных осцилляторов, постановка и структура решения задачи Коши / Е. Н. Огородников // Математическое моделирование и краевые задачи. - 2009. - Часть 1. - С. 177-181.
21. Огородников Е. Н. Об одном классе дробных дифференциальных уравнений математических моделей динамических систем с памятью / Е. Н. Огородников // Вестник Самарского государственного технического университета. - 2013. - Т. 1, N 30. - С. 245-252.
22. Огородников Е. Н. Математическое моделирование наследственно-упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Риммана-Лиувилля / Е. Н. Огородников, В. П. Радченко, Л. Г. Унгарова // Вестник Самарского государственного технического университета. - 2016. - Т. 20, N 1. - С. 167-194.
23. Огородников Е. Н. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов / Е. Н. Огородников, В. П. Радченко, Н. С. Яшагин // Вестник Самарского государственного технического университета. - 2011. – Т. 1, N 22. - С. 255-268.
24. Порошина Н. И. Об обращении преобразования Лапласа некоторых специальных функций / Н. И. Порошина, В. М. Рябов // Вестник СПбГУ. - 2009. - Т. 1, N 3. - С. 50-60.
25. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием / Ю. Н. Работнов // Прикладная математика и механика. - 1948. - Т. 12, N 1. - С. 53-62.
26. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. - Москва : Наука, 1966. – 752 с.

27. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов. - Москва : Наука, 1977. - 384 с.
28. Розовский М. И. Об интерго-дифференциальном уравнении динамической контактной задачи вязкоупругости / М. И. Розовский // Прикладная математика и механика. - 1973. - Т. 37, N 2. - С. 359-363.
29. Россихин Ю. А. Удар упругого шара по балке Тимошенко и пластинке Уфлянда-Миндлина с учётом растяжения срединной поверхности / Ю. А. Россихин, М. В. Шитикова // Известия вузов. Строительство. - 1996. - N 6. - С. 28-34.
30. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. - Минск : Наука и техника, 1987.
31. Стретт Дж. В. (лорд Рэлей) Теория звука / Дж. В. Стретт. - Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. - 504 с.
32. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. - Москва : Изд-во Физматгиз, 1959. - 439 с.
33. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твёрдых телах / Т. Томас. - Москва : Мир, 1964. - 308 с.
34. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин / Я. С. Уфлянд // Прикладная математика и механика. - 1948. - Т. 12, N 3. - С. 287-300.
35. Учайкин В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. - Ульяновск : Артишок, 2008. - 512 с.
36. Филиппов А. П. Поперечный удар по стержню при учёте инерции вращения и сил перерезывания / А. П. Филиппов // Прикладная механика. - 1968. - Т. 4, N 7. - С. 1-7.

37. Шермергор Т. Д. Об использовании операторов дробного дифференцирования для описания наследственных свойств материалов / Т. Д. Шермергор // Журнал прикладной механики и технической физики. - 1966. - Т. 18, N 1. - С. 118-121.
38. Шитикова М. В. Лучевой метод в задачах динамического контактного взаимодействия упругих тел : дис. д-ра физ.-мат. наук : 01.02.04 / Шитикова Марина Вячеславовна. - Москва : Институт проблем механики РАН, 1995.
39. Abrate S. Localized impact on sandwich structures with laminated facing / S. Abrate // Applied Mechanics Reviews. - 1997. - Vol. 50, № 1. - P. 69–82.
40. Abrate S. Modeling of impacts on composite structures / S. Abrate // Composite Structures. - 2001. - Vol. 51. - P. 129–138.
41. Abualshaikh I. Dynamic response of a beam with absorber exposed to a running force: Fractional calculus approach / I. Abualshaikh, A. Al-Rabadi, H. Alkhalidi // ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. - Houston, Texas, USA : ASME, 2012. -Vol. 12. - P. 367-374.
42. Aksel N. On the impact of a rigid sphere on a viscoelastic half-space / N. Aksel // Ingenieur-Archiv. - 1986. – Vol. 56, N 1. - P. 38-54.
43. Alvelid M. Sixth order differential equation for sandwich beam deflection including transverse shear / M. Alvelid // Composite structures. - 2013. - Vol. 102. - P. 29-37.
44. Arena P. Nonlinear Noninteger Order Circuits and Systems: an Introduction / P. Arena. - Singapore-New Jersey-London-Hong Kong : World Scientific, 2002. - 212 p.
45. Argawal O. P. Analytical solution for stochastic response of a fractionally damped beam / O. P. Arfawal // Journal of Vibration and Acoustics. - 2004. – Vol. 4, Issue 126. - P. 561-566.

46. Arikoglu A. A. New fractional derivative model for linearly viscoelastic materials and parameter identification via genetic algorithms / A. A. Arikoglu [etc.] // *Rheologica Acta*. - 2014. - Vol. 53. - P. 219-233.
47. Atanacković T. M. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Wave Propagation, Impact and Variational Principles* / T. M. Atanacković. - New York : Wiley, 2014. - 406 p.
48. Bagley R.L. A theoretical basis for the application of fractional calculus / R. L. Bagley, P. J. Torvik // *Journal of Rheology*. - 1983. - Vol. 27. – P. 201-210.
49. Bahraini S. M. S. Large deflection of viscoelastic beams using fractional derivative model / S. M. S. Bahraini [etc.] // *Journal of Mechanical Science and Technology*. - 2013. - Vol. 27, Issue 4. - P. 1063-1070.
50. Baleanu D. *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods* / D Baleanu [etc] . - New York : World Scientific, 2016. - 476 p.
51. Barnhart K. E. Stresses in beams during transverse impact / K. E. Barnhart, W. Goldsmith // *Journal of Applied Mechanics*. - 1957. – Vol. 24. – P. 440-446.
52. Behera D. Numerical solution of fractionally damped beam by homotopy perturbation method / D. Behera, S. Chakraverty // *Central European Journal of Physics*. - 2013 - Vol. 11, Issue 6. - P. 792-798.
53. Blatner M. S. *Internal friction in metallic materials* / M. S. Blatner [etc]. - [S. l.] : Springer Series in Material Science, 2007. - Vol. 90. – 542 p.
54. Calvit H. H. Numerical solution of the problem of impact of a rigid sphere onto a linear viscoelastic half-space and comparison with experiment / H. H. Calvit // *International Journal of Solids and Structures*. - 1967. - Vol. 3, Issue 6. - P. 951-960.
55. Cantwell W. J. The impact resistance of composite materials / W. J. Cantwell, J. Morton // *Composites*. - 1991. - Vol. 22, Issue 5. - P. 347-362.
56. Carpinteri A. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* / A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.). - Wien : Springer-Verlag, 1997. – 348 p.

57. Cattani C. Fractional Dynamics / C. Cattani, H. M. Srivastava, X.-J. Yang. - Berlin : De Gruyter Open, 2015.
58. Chen C.P. Design of viscoelastic impact absorbers: optimal material properties / C. P. Chen, R. S. Lakes // International Journal of Solid Structures. - 1990. - Vol. 26. - Issue 12. - P. 1313-1328.
59. Christoforou A. P. Analysis of simply-supported orthotropic cylindrical shells subject to lateral impact loads / A. P. Christoforou, S. R. Swanson // Journal of Applied Mechanics. - 1990. - Vol. 57, Issue 2. - P. 376-382.
60. Christopherson D. G. Effect of Shear in Transverse Impact on Beams / D. G. Christopherson // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. - 1951. - Vol. 165, Issue 1. - P. 176-188.
61. Conway H.D. Impact of an indenter on a large plate / H. D. Conway, H. C. Lee // Journal of Applied Mechanics. - 1970. - Vol. 37, Issue 1. - P. 234-235.
62. Conway H.D. The impact between a rigid sphere and thin layer / H. D. Conway, H. C. Lee // Journal of Applied Mechanics. - 1970. - Vol. 37, Issue 1. - P. 159-162.
63. Cortés F. Homogenised finite element for transient dynamic analysis of unconstrained layer damping beams involving fractional derivative models / F. Cortés, M. J. Elejabarrieta // Computational Mechanics. - 2007. - Vol. 40, Issue 2. - P. 313-324.
64. Cortés F. Structural vibration of flexural beams with thick unconstrained layer damping / F. Cortés, M. J. Elejabarrieta // International Journal of Solids and Structures. - 2008. - Vol. 45, Issue 22. - P. 5805-5813.
65. Costa M.F.P. AIP Generalized Fractional Maxwell Model: Parameter Estimation of a Viscoelastic Material / M.F.P Costa, C. Ribeiro // Conference Proceedings of the American Institute of Physics. - 2012. - Vol. 1479. - P. 790-793.
66. D'Acunto B. On the motion of a viscoelastic solid in the presence of a rigid wall - Part II. Impact laws for the hereditary case. Solution of the unilateral problem / B.

- D'Acunto, A. D'Anna, P. Penno // International Journal of Non-linear Mechanics. - 1988. - Vol. 23, Issue 1. - P. 67-85.
67. Daou R. Fractional Calculus: History, Theory and Applications / R. Daou, M. Xavier . - New York : Nova Science Publishers, 2015.
68. Debnath L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering / L. Debnath // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. - 2003. - Vol. 54. - P. 3413–3442.
69. Debnath L. A brief historical introduction to fractional calculus / L. Debnath // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. – Vol. 35, № 4. - 2013. - P. 487-501.
70. Di Paola M. Fractional visco-elastic Euler–Bernoulli beam / M. Di Paola, R. Heuer // International Journal of Solids and Structures. - 2013. - Vol. 50, Issue 22. - P. 3505-3510.
71. Diethelm K. Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods / K. Diethelm [etc.] // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. - 2005. - Vol. 194, Issue 6-8. - P. 743-773.
72. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations / K. Diethelm. - Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2010.
73. Dobyns A. L. Analysis of simply-supported orthotropic plates subject to static and dynamic loads / A. L. Dobyns // AIAA Journal. - 1981. - Vol. 19, Issue 5. - P. 642-650.
74. Drăgănescu G. E. Application of a variational iteration method to linear and nonlinear viscoelastic models with fractional derivatives / G. E. Drăgănescu // Journal of Mathematical Physics. - 2006. - Vol. 47, Issue 8. - P. 082902.
75. Dupac M. FEM modeling and dynamical behavior of a flexible cracked linkage mechanisms with clearance / M. Dupac, S. Noorozi // The 10th International Conference on Vibration Problems ICOVP. - Prague : Springer Netherlands, 2011. - Vol. 139. - P. 275-280.

76. Escalante-Martinez J. E. Experimental evaluation of viscous damping coefficient in the fractional underdamped oscillator / J. E. Escalante-Martinez [etc.] // *Advances in Mechanical Engineering*. - 2016. - Vol. 8, Issue 4. - P. 1-12.
77. Espindola J. J. A generalised fractional derivative approach to viscoelastic material properties measurement / J. J. Espindola, J. M. Silva Neto, E.M.O. Lopes // *Applied Mathematics and Computation*. - 2005. – Vol. 164. - P. 493-506.
78. Evans G. R. New numerical method for the calculation of impact forces /G. R. Evans G. R. [etc.] // *Journal of Physics D: Applied Physics*. - 1991. - Vol. 24, Issue 6. - P. 854-858.
79. Frech M. A survey of fractional calculus for structural dynamics applications / M. Frech, J. Rogers // *IMAC-IX: A Conference on Structural Dynamics*. - Kissimmee : [s. n.], 2001. - Vol. 4359. - P. 305-309.
80. Freundlich J. Vibrations of a simply supported beam with a fractional viscoelastic material model - supports movement excitation / J. Freundlich // *Shock and Vibration*. - 2012. - Vol. 20, Issue 6. - P. 1103-1112.
81. Freundlich J. Dynamic response of a simply supported viscoelastic beam of a fractional derivative type to a moving force load / J. Freundlich // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. - 2016. - Vol. 54, Issue 4. - P. 1433-1445.
82. Fujii Y. Proposal for material viscoelasticity evaluation method under impact load / Y. Fujii, T. Yamaguchi // *Journal of Materials Science*. - 2005. - Vol. 40, Issue 18. - P. 4785-4790.
83. Galucio A.C. Fractional derivative viscoelastic model for hybrid active-passive damping treatments in time domain - Application to sandwich beams / A. C. Galucio, J. F. Deu, R. A. Ohayon // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. - 2005. - Vol. 16, Issue 1. - P. 33-45.
84. Galucio A.C. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators / A. C. Galucio, J. F. Deu, R. Ohayon // *Computational Mechanics*. - 2004. - Vol. 33. - P. 282-291.

85. Gorenflo R. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications / R. Gorenflo [etc.]. – Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2014. - 443 p.
86. Graham G.A.C. The contact problem in the linear theory of viscoelasticity when the time dependent contact area has any number of maxima and minima / G.A.C. Graham // International Journal of Engineering Science. - 1966. - Vol. 5, Issue 6. - P. 495-514.
87. Greszczuk L. B. Damage in composite materials due to low velocity impact / L. B. Greszczuk // Impact Dynamics. - New York : Wiley, 1982. - P. 55-94.
88. He X. Q. Large amplitude vibration of fractionally damped viscoelastic CNTs/fiber/polymer multiscale composite beams / X. Q. He [etc.] // Composite Structures. - 2015. - Vol. 131. - P. 1111-1123.
89. Hedrih K. The transversal creeping vibrations of a fractional derivative order constitutive relation of nonhomogeneous beam / K. Hedrih // Mathematical Problems in Engineering. - 2006. - Vol. 2006. - Article ID 46236, 18 pages.
90. Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics / R. Hilfer (Editor). - Singapore : World Scientific, 2000. - 472 p.
91. Huang W. The dynamic response of a viscoelastic Winkler foundation-supported elastic beam impacted by a low velocity projectile / W. Huang, Y. Zou // Computers and Structures. – 1994. - Vol. 52, Issue 3. - P. 431-436.
92. Huang W. The dynamic response of an elastic circular plate on a viscoelastic Winkler foundation impacted by a moving rigid body /W. Huang, Y-D. Zou // JSME International Journal Series III. - 1992. - Vol. 35, Issue 2. – P. 274-278.
93. Hunter S. C. The Hertz problem for a rigid spherical indenter and a viscoelastic half-space / S. C. Hunter // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. - 1960. - Vol.8, Issue 4. - P. 219-234.
94. Ingman D. Response of viscoelastic plate to impact / D. Ingman, J. Suzdalnitsky // ASME Journal of Vibration and Acoustics. - 2008. - Vol. 130, Issue 1. - 8 pages.

95. Jung B. A statistical characterization method for damping material properties and its application to structural-acoustic system design / B. Jung [etc.] // Journal of Mechanical Science and Technology. - 2011. - Vol. 25, Issue 8. - P. 1893-1904.
96. Kaminsky A. A. Mechanics of the delayed fracture of viscoelastic bodies with cracks: Theory and experiment (Review) / A. A. Kaminsky // International Applied Mechanics. - 2014. - Vol. 50, Issue 5. - P. 485–548.
97. Kilbas A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations /A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo . - Amsterdam : Elsevier Science, 2006. - 523 p.
98. Kim H.S. Model for thickness effect with impact testing of viscoelastic materials / H. S. Kim, R. M. Shafiq // Journal of Applied Polymer Science. - 2001. - Vol. 81. – P. 1762-1767.
99. Kren A. P. Determination of the relaxation function for viscoelastic materials at low velocity impact / A. P. Kren, A. O. Naumov // International Journal of Impact Engineering. - 2010. - Vol. 37. - P. 170-176.
100. Lee E. H. The impact of a mass striking a beam / E. H. Lee // ASME Journal of Applied Mechanics. - 1940. - Vol. 7, Issue 62. - P. 129-138.
101. Lee E. H. The contact problem for viscoelastic bodies / E. H. Lee, J. R. M. Radok // Journal of Applied Mechanics. - 1960.- Vol. 27, Issue 3. - P. 438-444.
102. Lee Y. The lumped parameter method for elastic impact problem / Y. Lee, J. F. Hamilton, J. W. Sullivan // ASME Journal of Applied Mechanics. - 1983. - Vol. 50, Issue 4a. - P. 823-827.
103. Li G. G. Dynamic behaviors of Timoshenko beam with fractional derivative constitutive relation / G. G. Li // International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation. - 2002. - Vol. 3, Issue 1. -P. 67-73.
104. Li G. G. Dynamical stability of viscoelastic column with fractional derivative constitutive relation / G. G. Li, Z. Y. Zhu, C. J. Cheng // Applied Mathematics and Mechanics. - 2001. - Vol. 22, Issue 3. - P. 294-303.

105. Li G.G. Application of Galerkin method to dynamical behavior of viscoelastic Timoshenko beam with finite deformation / G. G. Li, Z. Y. Zhu, C. J. Cheng // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. - 2003. - Vol. 7, Issue 2. - P. 175-188.
106. Liang Z. F. Analytical solution of fractionally damped beam by Adomian decomposition method / Z. F. Liang, X. Y. Tang // *Applied Mathematics and Mechanics*. - 2007. - Vol. 28, Issue 2. - P. 219-228.
107. Liu L. C. Analysis of vertical vibrations of a pile in saturated soil described by fractional derivative model / L. C. Liu, X. Yang // *Rock and Soil Mechanics*. - 2011. - Vol. 32, Issue 2. - P. 526-532.
108. Liu X. Stochastic response of an axially moving viscoelastic beam with fractional order constitutive relation and random excitations / X. Liu, W. Xu, Y. Xu // *Acta Mechanica Sinica*. - 2013. - Vol. 29, Issue 3. - P. 443-451.
109. Lu Y. C. Fractional derivative viscoelastic model for frequency-dependent complex moduli of automotive elastomers / Y. C. Lu // *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. - 2006. - Vol. 3, Issue 4. - P. 329-336.
110. Machado J. A. T. On development of fractional calculus during the last fifty years / J. A. T. Machado, A. M. S. F. Galhano, J. J. Trujillo // *Scientometrics*. - 2014. - Vol. 98, Issue 1. - P. 577-582.
111. Machado J. A. T. Recent history of fractional calculus / J. A. T. Machado, V. Kiryakova, F. Mainardi // *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. - 2011. - Vol. 16, Issue 3. - P. 1140-1153.
112. Magin R. L. Fractional calculus in bioengineering / R. L. Magin // *Reviews in Biomechanics* - 2004. - Vol. 32. - 684 p.
113. Mahajan P. Adaptive computation of impact force under low velocity impact / P. Mahajan, A. Dutta // *Computers and Structures*. - 1999. - Vol. 70, Issue 2. - P. 229-241.

114. Mainardi F. An historical perspective on fractional calculus in linear viscoelasticity / F. Mainardi // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. - 2012. - Vol. 15, Issue 4. - P. 712-717.
115. Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models* / F. Mainardi - London : Imperial College Press, 2009. - 368 p.
116. Markopoulos Y. P. On the low velocity impact response of laminated composite plates utilizing the p-version Ritz method / Y. P. Markopoulos, V. Kostopoulos // *Advanced Composite Letters*. - 2003. - Vol. 12, Issue 5. - P. 177-190.
117. Matuk C. Impact of a linearly elastic rod on a thin linearly viscoelastic target/ C. Matuk // *Journal of Sound and Vibration*. - 1979. - Vol. 64, Issue 1. - P. 45-55.
118. Meral F. C. Fractional calculus in viscoelasticity: An experimental study / F. C. Meral, T. J. Royston, R. Magin // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. - 2010. - Vol. 15, Issue 4. - P. 939-945.
119. Mochihara M. Behavior of plates in the elastic range under transverse impact / M. Mochihara, Y. Tanaka // *Research Reports of Kagoshima Technological College*. - 1989. - Vol. 23. - P. 35-44.
120. Näsholm S. P. On a fractional Zener elastic wave equation / S. P. Näsholm, S. Holm // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. - 2013. - Vol. 16, Issue 1. – P. 26-50.
121. Nairn J.A. Measurement of polymer viscoelastic response during an impact experiment / J. A. Nairn // *Polymer Engineering and Science*. - 1989. - Vol. 29, Issue 10. - P. 654-661.
122. Oeser M. Visco-elastic modeling of virgin and asphalt binders / M. Oeser // *Computer Methods for Geomechanics: Frontiers and Applications*; Eds. Oeser Nasser Khalili, Markus. - Melbourne : IACMAG 2011 . - Vol. 1. - P. 313-319.
123. Pao Y.-H. Extension of the Hertz theory of impact to the viscoelastic case / Y.-H. Pao // *Journal of Applied Physics*. - 1955. - Vol. 26. - P. 1083.

124. Permoon M. R. Application of radial basis functions and sinc method for solving the forced vibration of fractional viscoelastic beam / M. R. Permoon [etc.] // Journal of Mechanical Science and Technology. - 2015. - Vol. 30, Issue 7. - P. 3001-3008.
125. Pirrotta A. Fractional visco-elastic Timoshenko beam deflection via single equation / A. Pirrotta [etc.] // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 2015. - Vol. 104, Issue 9. - P. 869-886.
126. Podlubny I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. - New York : Academic Press, 1999. - 340 p.
127. Popov I. I. Impact response of a viscoelastic beam considering the changes of its microstructure in the contact domain / I. I. Popov, Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, T. P. Chang // Mechanics of Time-Dependent Materials. - 2015. - Vol. 19, Issue 4. - P. 455-481.
128. Ragozin S. George William Scott Blair – the pioneer of fractional calculus in rheology / S. Ragozin, F. Mainardi // Communications in Applied and Industrial Mathematics. - 2014. - Vol. 6, Issue 1.
129. Rossikhin Yu. A. Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids / Yu. A. Rossikhin // Applied Mechanics Reviews. - 2010. - Vol. 63, № 1. - 12 pages.
130. Rossikhin Yu. A. A ray method of solving problems connected with a shock interaction / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Acta Mechanica. - 1994. Vol. 102, Issue 1. - P. 103-121.
131. Rossikhin Yu. A. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Applied Mechanics Reviews. - 1995. - Vol. 48, Issue 1. - P. 39.

132. Rossikhin Yu. A. The ray method for solving boundary problems of wave dynamics for bodies having curvilinear anisotropy / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Acta Mechanica*. - 1995. - Vol. 109. - P. 49-64.
133. Rossikhin Yu.A. The impact of elastic bodies upon beams and plates with consideration for the transverse deformations and extension of a middle surface / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *ZAMM*. - 1996. - Vol. 76. - P. 433-434.
134. Rossikhin Yu. A. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Applied Mechanics Reviews*. - 1997. - Vol. 50, Issue 1. - P. 15-67.
135. Rossikhin Yu. A. The impact of a sphere on a Timoshenko thin-walled beam of open section with due account for middle surface extension / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*. - 1999. - Vol. 12. - P. 375-383.
136. Rossikhin Yu. A. Analysis of dynamic behaviour of viscoelastic rods whose rheological models contain fractional derivatives of two different orders / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. - 2001. - Vol. 81, Issue 6. - P. 363-376.
137. Rossikhin Yu. A. Transient response of thin bodies subjected to impact: Wave approach / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *The Shock and Vibration Digest*. - 2007. - Vol. 39, Issue 4. - P. 273-309.
138. Rossikhin Yu. A. Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. - 2007. - Vol. 10, Issue 2. - P. 111-121.
139. Rossikhin Yu. A. The method of ray expansions for investigating transient wave processes in thin elastic plates and shells / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Acta Mechanica*. - 2007. - Vol. 189, Issue 1 - P. 87-121.

140. Rossikhin Yu. A. Fractional-derivative viscoelastic model of the shock interaction of a rigid body with a plate / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Journal of Engineering Mathematics. - 2008. -Vol. 60. - P. 101-113.
141. Rossikhin Yu. A. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Applied Mechanics Reviews. - 2010. - Vol. 63, № 1. – Paper ID 010801.
142. Rossikhin Yu. A. The analysis of the impact response of a thin plate via fractional derivative standard linear solid model / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Journal of Sound and Vibration. - 2011 - Vol. 330. - P. 1985-2003.
143. Rossikhin Yu. A. Two approaches for studying the impact response of viscoelastic engineering systems: An overview / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Computers & Mathematics with Applications. - 2013. - Vol. 66. - P. 755-773.
144. Rossikhin Yu. A. Ray expansion theory / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Encyclopedia of Thermal Stresses. - Heidelberg: Springer, 2014.
145. Rossikhin Yu. A. Features of fractional operators involving fractional derivatives and their applications to the problems of mechanics of solids / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Chapter 8 in: Fractional Calculus: Applications (Roy Abi Zeid Daou and Xavier Moreau, Eds.), New York: NOVA Publishers, USA, 2015. - P. 165-226.
146. Rossikhin Yu. A. Dynamic response of a Timoshenko-type viscoelastic beam impacted by an elastic sphere / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, M. G. Meza Estrada // Environment and Structural Engineering Series. - 2015. -Vol.42. - P.18-23.
147. Rossikhin Yu. A. Impact response of a Timoshenko-type viscoelastic beam with due account for the extension of its middle surface / Yu. A. Rossikhin, M. V.

- Shitikova, M. G. Meza Estrada // SpringerPlus. - 2016. - Vol. 5, Issue 1. – 18 pages.
148. Rossikhin Yu. A. Modeling of the impact response of a beam in a viscoelastic medium / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, M. G. Meza Estrada // Applied Mathematical Sciences. – 2016. - Vol. 10, Issues 49-52. - P. 2471-2481.
149. Rossikhin Yu. A. Impact response of an elastic beam in a viscoelastic medium / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, M. G. Meza Estrada // 23rd International Congress on Sound & Vibration. - Athens, Greece: International Institute of Acoustics and Vibrations, 2016. - P. 1-8.
150. Rossikhin Yu. A. Modeling of the dynamic response of a Timoshenko-type viscoelastic beam by a viscoelastic sphere / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, M. G. Meza Estrada // Advanced Problems in Mechanics: XLIV International Summer School-Conference. - Saint-Petersburg : Institute of Problems of Mechanics RAS, 2016. - P. 59.
151. Rossikhin Yu. A. Dynamic response of a viscoelastic beam impacted by a viscoelastic sphere / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, I. I. Popov // Computers & Mathematics with Applications. - 2016. - Article in Press.
152. Rossikhin Yu. A. Application of the fractional derivative Kelvin-Voigt model for the analysis of impact response of a Kirchhoff-Love plate / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, P. T. Trung // WSEAS Transactions on Mathematics. - 2016. - V. 15. - P. 498-501.
153. Sabin G. C. W. The impact of a rigid axisymmetric indenter on a viscoelastic half-space / G. G. W. Sabin // International Journal of Engineering Science. - 1987. - Vol. 25, Issue 2. - P. 235-251.
154. Sakata M. Acoustic radiation from a viscoelastic beam impacted by a steel sphere / M. Sakata, M. Horii, T. Kimura // Journal of Sound and Vibration. - 1984. - Vol. 92, Issue 1. - P. 67-81.

155. Sasso M. Application of fractional derivative models in linear viscoelastic problems / M. Sasso, G. Palmieri, D. Amodio // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. - 2011. - Vol. 15, Issue 4. - P. 367-387.
156. Sasso M. Application of fractional derivatives models to time-dependent materials / M. Sasso, G. Palmieri, D. Amodio // *SEM Annual Conference*. - Indianapolis, Indiana USA : Springer New York, 2010. - Vol. 3. - P. 213-221.
157. Scerrato D. A simple non-linear model for internal friction in modified concrete / D. Scerrato [etc.] // *International Journal of Engineering Science*. - 2014. - Vol. 80. - P. 136-152.
158. Shimizu N. Impulsive responses of viscoelastic oscillators / N. Shimizu, M. Iijima // *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series C*. - 1998. - Vol. 624. - P. 2903-2907.
159. Spanos P. D. Nonlinear random vibrations of beams with fractional derivative elements / P. D. Spanos, G. Malara // *Journal of Engineering Mechanics*. - 2014. – Vol. 140, Issue 9. - 10 pages.
160. Uchaikin V. V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers* / V. V. Uchaikin. - Berlin - Higher Education Press, Beijing : Springer, 2013.
161. Usuki T. Dispersion curves for a viscoelastic Timoshenko beam with fractional derivatives / T. Usuki, T. Suzuki // *Journal of Sound and Vibration*. - 2012. - Vol. 331, Issue 3. - P. 605-621.
162. Usuki T. Dispersion curves for 3D viscoelastic beams of solid circular cross section with fractional derivatives / T. Usuki // *Journal of Sound and Vibration*. - 2013. - Vol. 332, Issue 1. - P. 126-144.
163. Valério D. Some pioneers of the applications of fractional calculus / D. Valério, J. T. Machado, V. Kiryakova // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. - 2014. - Vol. 17, Issue 2. - P. 552–578.

164. Vershinin V. V. Verification of analytical solution for a problem of high-velocity transversal impact on a prismatic beam / V. V. Vershinin // Applied Mechanics and Materials. – 2014. - Vol. 467. - P. 343-248.
165. Yan Q. F. Free vibration of elastic Timoshenko beam on fractional derivative Winkler viscoelastic foundation /Q. F. Yan, Z. P. Su // Advanced Materials Research. - 2012. - Vol. 368-373. - P. 1034-1037.
166. Yang T. Z. Stability in parametric resonance of an axially moving beam constituted by fractional order material / T. Z. Yang, B. Fang // Archive of Applied Mechanics. - 2012. - Vol. 82, Issue 12. - P. 1763-1770.
167. Yao Q. Z. Quasi-static analysis of beam described by fractional derivative Kelvin viscoelastic model under lateral load / Q. Z. Yao, L. C. Liu // Advanced Materials Research. - 2011. - Vol. 189-193. - P. 3391-3394.
168. Zhang Yu. N. Validation of nonlinear viscoelastic contact force models for low speed impact / Yu N. Zhang, I. Sharf // Journal of Applied Mechanics. - 2009. - Vol. 76. - 12 pages.
169. Zhou X. Q. Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review / X. Q. Zhou [etc.] // Composite Structures. - 2016. - Vol. 136. - P. 460-480.
170. Zhou Y. Basic Theory of Fractional Differential Equations / Y. Zhou. - Singapore : World Scientific, 2014. - 304 p.
171. Zhu Z. Y. Quasi-static and dynamical analysis for viscoelastic Timoshenko beam with fractional derivative constitutive relation / Z. U. Zhu, G. G. Li, C. J. Cheng // Applied Mathematics and Mechanics. - 2002. – P. 1-12.
172. Zhuravkov M. A. Review of methods and approaches for mechanical problem solutions based on fractional calculus / M. A. Zhuravkov, N. S. Romanova // Mathematics and Mechanics of Solids. - 2014. - Vol. 21, Issue 5. - P. 595-620.