

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Самарский государственный технический университет»

На правах рукописи

Москалик Анна Давидовна

**Аналитический метод приближённого решения
краевых задач установившейся ползучести
с возмущёнными границами**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

профессор

Радченко Владимир Павлович

Самара – 2017

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Аналитический обзор	11
Глава 2. Постановка и линеаризация задачи о толстостенной тру- бе с возмущёнными границами	29
2.1. Постановка задачи	29
2.2. Граничные условия	37
2.3. Метод построения приближений	41
2.4. Выводы по главе 2	48
Глава 3. Решение задачи об установившейся ползучести несоос- ной трубы	49
3.1. Постановка задачи	49
3.2. Построение первого приближения	51
3.3. Постановка задачи для второго приближения	56
3.4. Построение решения для второго приближения	59
3.5. Построение решения для третьего приближения	67
3.6. Анализ результатов аналитического решения	77
3.7. Конечно-элементная дискретная модель для анализа напряжён-	
но-деформированного состояния несоосной трубы	79
3.8. Сравнение результатов приближённого аналитического и конечно-	
элементного решений	81
3.9. Сравнение результатов приближённого аналитического решения	
и решения с помощью метода, применяемого в инженерных рас-	
чётах	96
3.10. Выводы по главе 3	98

Глава 4. Решение задачи установившейся ползучести толстостенной трубы с эллиптически возмущённой внешней границей	100
4.1. Постановка задачи	101
4.2. Построение первого приближения методом малого параметра	106
4.3. Построение решения для второго приближения метода малого параметра	110
4.4. Анализ приближённого аналитического решения	119
4.5. Конечно-элементная дискретная модель	121
4.6. Сравнение результатов приближённого аналитического и конечно-элементного решений	122
4.7. Выводы по главе 4	128
Глава 5. Оценка надёжности несоосной трубы по деформационному критерию отказа в условиях ползучести при стохастически возмущённой внешней границе	129
5.1. Оценка надёжности несоосной трубы на основе приближённого аналитического решения	129
5.2. Статистический анализ времени отказа	136
5.3. Расчёт работоспособности толстостенной трубы с возмущёнными границами на основе функции надёжности	140
5.4. Выводы по главе 5	145
Заключение	146
Список литературы	148
Приложение А. Константы интегрирования	166

Введение

Актуальность темы исследования. Усовершенствование существующих и создание принципиально новых технологий изготовления элементов конструкций, в частности – тонкостенных и толстостенных труб, не может решить проблему допусков на геометрические параметры изделий. И в настоящее время существуют отраслевые стандарты, например, на разностенность труб, что приводит к возмущению внутренней границы по отношению к внешней. Такого рода флуктуации в условиях существующей нелинейности определяющих уравнений ползучести приводят к искажению полей напряжений и деформаций по сравнению с осесимметричной постановкой задачи.

Методы аналитического решения краевых задач с возмущёнными границами разработаны в основном на основе метода малого параметра лишь для различных видов упругопластического деформирования. В теории ползучести соответствующие аналитические решения на основе метода малого параметра практически отсутствуют, хотя следует отметить, что в достаточной мере разработаны аналитические методы приближённого решения стохастических краевых задач ползучести для случая возмущённых реологических характеристик материала.

В условиях ползучести необходимо считаться не только с вопросами разрушения деталей при заданном уровне нагрузок – длительной прочностью, но и с максимально возможной деформацией (перемещением, величиной прогиба и т.д.), которые задаются на стадии проектирования, исходя из особенностей эксплуатации конструкции. Деформация ползучести, развивающаяся во времени, может привести к уменьшению зазора сопрягаемых деталей, уменьшению толщины стенки изделия (в частности – трубы) и другим изменениям геометрических размеров. Отсюда естественным образом возникает задача оценки показателей надёжности по деформационным критериям отказа.

Вопросы проверки адекватности построенных приближенных аналитиче-

ских решений и проблема их сходимости также остаются открытыми не только в упругопластической области, но и в условиях ползучести.

Вышеизложенное определяет актуальность диссертационного исследования и позволяет сформулировать цели настоящей работы.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью работы является разработка метода построения приближённых аналитических решений двумерных краевых задач установившейся ползучести с возмущёнными границами на основе метода малого параметра, их применение к исследованию напряженно-деформированного состояния несоосной толстостенной трубы и трубы с эллиптически возмущённой внешней границей и оценке показателей надёжности рассмотренных элементов конструкций по деформационному критерию отказа.

Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

- 1) разработка метода построения приближённого аналитического решения задачи о толстостенной трубе, находящейся под внутренним давлением на стадии установившейся ползучести, с произвольно возмущённой внешней границей;
- 2) построение приближённого аналитического решения нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной несоосной трубы, находящейся под внутренним давлением, методом малого параметра до третьего порядка приближения включительно;
- 3) построение приближённого аналитического решения нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы с эллиптически возмущённой внешней границей, находящейся под внутренним давлением, методом малого параметра до второго порядка приближения включительно;
- 4) анализ приближённых аналитических решений для толстостенной несоосной трубы и трубы с эллиптически возмущённой границей и численных решений указанных задач методом конечных элементов, исследование по-

грешности аналитических решений по отношению к численным решениям;

- 5) разработка вероятностных методов определения показателей надёжности толстостенной трубы со стохастически возмущёнными внешними границами по деформационному критерию отказа.

Методология и методы исследования. Методологическую основу исследования составило совместное использование теории установившейся ползучести и метода возмущений для построения приближённых аналитических решений соответствующих краевых задач. Численные результаты получены методом конечных элементов с использованием программного комплекса **ANSYS**. В качестве инструментария при решении конкретных прикладных стохастических задач использовались методы математической статистики и теории случайных процессов.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- 1) разработан аналитический метод приближённого решения задачи о толстостенной трубе, находящейся под внутренним давлением на стадии установившейся ползучести, с произвольно возмущённой внешней границей в условиях плоского деформированного состояния;
- 2) построено приближённое аналитическое решение нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной несоосной трубы, находящейся под внутренним давлением, методом малого параметра до третьего порядка приближения включительно;
- 3) построено приближённое аналитическое решение нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы с эллиптически возмущённой внешней границей, находящейся под внутренним давлением, методом малого параметра до второго порядка приближения включительно;

- 4) проведён сравнительный анализ приближённых аналитических решений задач для несоосной толстостенной трубы и трубы с эллиптически возмущённой границей с соответствующими численными решениями методом конечных элементов в частных случаях, выполнено исследование погрешности приближённых аналитических решений по отношению к численным решениям;
- 5) разработаны вероятностные методы определения показателей надёжности толстостенной трубы со стохастически возмущёнными внешними границами по деформационному критерию отказа.

Практическая значимость работы заключается в разработке аналитических методов приближённого решения краевых задач установившейся ползучести с возмущёнными границами для толстостенной трубы на основе метода малого параметра, построении приближённых аналитических решений до второго и третьего порядков приближений, апостериорному исследованию их сходимости и погрешности, что является, с одной стороны, важным вкладом в дальнейшее развитие соответствующего теоретического раздела механики деформируемого твердого тела. С другой стороны, разработанная методика определения показателей надёжности толстостенных труб со стохастически возмущёнными внешними границами на основе аналитических методов решения стохастических краевых задач позволяет научно-обоснованно подходить к проблеме назначения ресурса этих элементов конструкций в условиях установившейся ползучести материала по деформационному критерию отказа.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- 1) аналитический метод приближённого решения нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы с произвольно возмущёнными внешними границами на основе метода малого параметра с учетом членов до третьего порядка включительно в условиях плоского деформированного состояния;

- 2) приближённые аналитические решения краевых задач установившейся ползучести для несоосной толстостенной трубы и для толстостенной трубы с эллиптически возмущённой внешней границей;
- 3) результаты исследования влияния возмущения границ на напряженно-деформированное состояние толстостенной трубы в широком диапазоне изменения величины параметра возмущения в условиях установившейся ползучести;
- 4) методики оценки показателей надёжности толстостенных труб со стохастически возмущённой границей на основе полученных приближённых аналитических методов решения краевых задач установившейся ползучести по деформационному критерию отказа;
- 5) качественные и количественные результаты, полученные при решении краевых задач для трубы с возмущёнными границами и оценке надёжности в условиях установившейся ползучести.

Связь диссертационной работы с планами научных исследований.

Работа выполнялась в рамках программы развития научной деятельности ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» по теме: «Математическое моделирование кинетики напряжённо-деформированного состояния в реологических средах, элементах конструкций и механических системах» (ведущий научный коллектив СамГТУ НК-11).

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов исследований подтверждается: адекватностью имеющихся модельных представлений физической картине исследуемых процессов в условиях ползучести материала; корректностью использования законов механики деформируемого твердого тела, положений теорий обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, теорий случайных функций и надёжности, апробированных численных методов и информационных технологий при решении задач методом конечных элементов; апо-

стериорным исследованием сходимости построенных аналитических решений и сопоставлением результатов расчёта разработанных решений методом малого параметра с численным решением методом конечных элементов в частных случаях.

Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях: на Девятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2013 г.), на Восьмой Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Чебоксары, 2014 г.), на Четвертой международной конференции «Математическая физика и ее приложения» (г. Самара, 2014 г.), на Десятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2016 г.), на Девятой Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Воронеж, 11–16 сентября 2016 г.), на XXV Всероссийской школе-конференции молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь, 2016 г.), на XXIX Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (г. Самара, 2016 г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 4 статьи в рецензируемых журналах из перечня ВАК.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. В работах в соавторстве диссертанту принадлежит совместная постановка задач, лично им получены все основные результаты и выполнен их анализ. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с профессором, д.ф.–м.н. В. П. Радченко, причем вклад диссертанта был определяющим.

Внедрение. Результаты диссертационной работы использованы в учебном процессе кафедры «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «СамГТУ» и включены в лекционный материал дисциплин: «Численные ме-

тоды решения краевых задач», «Современные приближённые аналитические методы решения краевых задач», «Стохастические краевые задачи реологии и надёжность элементов конструкций».

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации 166 страниц, из них 165 страниц основного текста, включая 41 рисунок, и приложение. Список литературы включает 159 наименований на 18 страницах.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю профессору, доктору физико–математических наук Радченко В. П. за постановки задач и постоянное внимание к работе, а также доценту, кандидату физико–математических наук Саушкину М. Н. за консультации и поддержку работы.

Глава 1

Аналитический обзор

Учет явления ползучести в расчетах на прочность и надёжность элементов конструкций уже более полувека имеет большое значение. Особенно это касается ответственных уникальных конструкций в авиадвигателестроении, энергетическом машиностроении, атомной промышленности, нефтехимии, эксплуатирующихся в условиях высокотемпературной ползучести. Оценка прочности и надёжности таких элементов конструкций важна как на стадии проектирования, так и при прогнозировании этих характеристик на стадии эксплуатации по техническому состоянию. Несмотря на усовершенствование существующих технологий и создание новых технологий изготовления тех или иных элементов, проблема допусков на геометрические размеры, рабочие температуры и нагрузки, физико-химические состояния материала в полном объеме решена быть не может. В частности, для толстостенных и тонкостенных труб даже в существующих нормативных документах регламентируются отклонения от соосности внешнего и внутреннего диаметров. Поэтому уже на стадии проектирования должны учитываться флуктуации геометрических размеров на разностенность, поскольку они приводят к существенному искажению полей деформаций и напряжений по отношению к идеальной соосной трубе. В процессе эксплуатации за счет разного внешнего давления и поля температур по периметру внешнего контура может реализоваться другой тип возмущений – появление эллиптического контура.

В условиях ползучести необходимо считаться не только с вопросами разрушения деталей при заданном уровне нагрузок – длительной прочностью, но и с максимально возможной деформацией (перемещений, прогибов и т.д.), которые задаются исходя из особенностей эксплуатации конструкции.

Одна из причин отказа в работе изделия заключается в чрезмерной дефор-

мации, вызванной ползучестью, вследствие чего происходит уменьшение зазора между сопрягаемыми деталями элементов конструкций, уменьшение толщины стенки изделия (например, в трубе) и других изменений геометрических размеров. В этой связи вопрос решения краевых задач ползучести, рассматривающих нарушение заданных размеров в пределах допустимых отклонений, а также геометрические отклонения сверх допустимых значений, представляет большой научный и прикладной интерес.

Одним из часто используемых способов решения нелинейных задач реологического деформирования является метод малого параметра (метод возмущений). Теория возмущений ведет свое начало от работ Рэля [152] и Э. Шредингера [154]. Впервые вопрос сходимости метода возмущений исследовал Ф. Реллих [153] применительно к вопросам акустики. В настоящее время библиография теории возмущений насчитывает тысячи единиц для самых разнообразных научных направлений. Поэтому ограничимся лишь анализом работ в области механики и в частности – в механике деформируемого твердого тела. Так, метод возмущений представлен в работах А. Найфэ [74, 75], Дж. Коула [45] в применении к широкому кругу задач механики. Метод малого параметра использовался в работах В.И. Астафьева, Ю.Н. Радаева и Л.В. Степановой для решения различных задач нелинейной механики разрушения [3], Л.В. Степановой с соавторами [116, 157] в разнообразных задачах о ползучести в вершине трещины в постановке механики разрушения, В.Д. Кубенко, Ю.Н. Немиша, К.И. Шнуренко, Н.А. Шульги [67] в задачах теории пластин и оболочек, Г.И. Быковцева и Д.Д. Ивлева [12], Б.А. Друянова [25], А.А. Ильюшина [32] в задачах пластичности и многих других.

В монографии Н.В. Минаевой [68] сделан вывод о том, что при применении метода возмущений граничные условия в напряжениях следует формулировать на границе реального тела в деформированном состоянии. В пособии А.Н. Гузя и Ю.Н. Немиша [21] изложены математические основы метода возмущения формы границы применительно к решению краевых задач упругости.

В работе Y. Haitian и G. Xinglin [143] получены рекуррентные соотношения метода возмущений для диска в бесконечной вязкоупругой среде путем комбинации метода граничных элементов и метода конечных элементов.

Для случая упругопластического деформирования метод возмущений подробно изложен в монографии Д.Д. Ивлева и Л.В. Ершова [31]. В научной школе Д.Д. Ивлева рассматриваются разнообразные классы задач при различных видах анизотропии материала, жестко- и идеально пластических тел, для одно-, двух- и трехмерных объектов: стержней, труб, пластин, полупространств, для разнообразных форм отверстий и включений.

Одним из классических объектов исследования в условиях упругопластического деформирования является толстостенная труба. Так, идеальное упругопластическое состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при взаимодействии различных видов пластической анизотропии рассмотрено в работах С.О. Фоминых [124, 125]. Условие предельного состояния включает в себя как частный случай анизотропию по Хиллу и трансляционную анизотропию, в качестве малого параметра принимается возмущение коэффициентов анизотропии.

В работах А.П. Кержаева [39, 40] рассмотрена двухслойная толстостенная труба, где предполагается, что каждый слой обладает своими свойствами трансляционной анизотропии. Малый параметр определяет возмущение свойств среды. В данной задаче определено напряженное состояние трубы с учетом первого порядка приближения метода малого параметра, найдена граница между упругой и пластической зонами.

В статье Б.Г. Миронова и С.В. Никитина [78] приведено решение задачи о многослойной трубе, где малый параметр определяет возмущение предела текучести материала. Упругопластическое состояние неоднородной трубы рассмотрено в работе С.В. Никитина и А.В. Тихонова [79]. Предельное состояние слоистой трубы при наличии трансляционной анизотропии исследовалось в [80].

Б. А. Друянов [25] при помощи метода возмущений учел неоднородность

пластического материала, здесь малый параметр характеризует возмущение условия пластичности. В монографии [69] построено первое приближение методом малого параметра для эллиптической упругопластической трубы.

Учет геометрии тел методом возмущений изложен в статье [36] и монографии Л. М. Качанова [38], где он рассмотрел кручение круглых стержней переменного диаметра и ползучесть овальных и разностенных труб. Линеаризация по параметру, характеризующему геометрию тела, использовалась при изучении явления образования шейки в образцах. Такая линеаризация использована А.А. Ильюшиным [32], Д.Д. Ивлевым и Л.В. Ершовым [26, 31], Е.Онатом и В.Прагером [83], А.М. Жуковым [28], Н.А. Ярдковой [132] и др.

Применение метода возмущений как одного из способов решения упругопластических задач, в которых присутствует несоосность толстостенной трубы, рассматривается в работах Т.А. Кульпиной [49–51]. Здесь методом малого параметра с учетом первого приближения решена задача определения напряжений в анизотропной эксцентричной трубе принимая во внимание сжимаемость материала в условиях упругопластического поведения материала. Уравнение внешнего контура в данном исследовании представлено в виде:

$$(x - c)^2 + y^2 = b^2,$$

где b — радиус внешнего невозмущенного контура трубы. В качестве малого параметра c принимается величина эксцентриситета трубы, с которым соотносится возмущение условия пластичности Мизеса. Предполагается отсутствие касательных усилий в трубе, что противоречит постановке задачи, поскольку при нарушении симметрии задачи они обязательно возникают.

В статье А.В. Ковалева и А.Н. Спорыхина [42] методом малого параметра с учетом первого приближения решена упругопластическая задача об эксцентричной трубе под внутренним давлением при принятии гипотезы об упрочняющемся материале Ишлинского-Прагера с произвольным коэффициентом

упрочнения. В статье С.В. Тихонова и Т.И. Рыбаковой [122] рассматривается анизотропная плоскость, находящаяся в условиях двусосного растяжения и содержащая анизотропное включение, ограниченное несоосной эксцентрической окружностью, причем несоосность внешней окружности присутствует по двум осям.

Одним из видов геометрических несовершенств, рассматриваемых в научной школе Д.Д. Ивлева с помощью метода малого параметра для различных видов упругопластического поведения материала, различных видов анизотропии, концентраторов, идеально и жесткопластических тел, является эллиптическая форма контура границы. Так, в исследовании Т.Н. Павловой [84] представлено решение для тонкой анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием с учетом первого приближения метода возмущений при двустороннем растяжении. В работе Т.А. Кульпиной [52] также учтен продольный сдвиг, где малым параметром в уравнении эллипса, определяющим границу пластической зоны, является полуразность усилий на бесконечности, приложенных к пластине.

Плоскость в условиях упругопластичности с включением эллиптической формы и эллиптическим отверстием рассмотрена в работе А.П. Максимовой [63]. Напряженное состояние анизотропной пластины с эллиптическим отверстием при двусосном растяжении, где главные оси анизотропии не совпадают по направлению с осями эллипса, рассмотрена в работе В.Г. Ефремова, Т.В. Митрофановой и Т.Н. Павловой [27], здесь в качестве малого параметра принимается возмущение коэффициентов анизотропии.

В исследовании Н.А. Ярдыковой [132] методом малого параметра исследовано упругопластическое состояние эллиптической трубы с круговым отверстием при наличии внутреннего давления, а также продольных и крутящих усилий для несжимаемого материала, определено влияние пластической сжимаемости материала на упругопластическое напряженное состояние толстостенной трубы с учетом приближений до второго включительно. Определены радиусы упру-

гопластической зоны в вышеперечисленных задачах. Уравнение возмущенной внешней границы в данном исследовании имеет вид:

$$\frac{x^2}{[b(1+c)]^2} + \frac{y^2}{[b(1-c)]^2} = 1,$$

где b — радиус внешнего невозмущенного контура трубы, c — малый параметр, определяющий изменение внешней границы.

Ряд работ посвящен вопросам устойчивости толстостенной трубы в упругопластической постановке. Так, в работе Т.Н. Рыбаковой [110] исследована задача об устойчивости вязкопластического течения толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. В работе Т.Т. Пономаревой и Т.Н. Рыбаковой [88] исследована устойчивость вязкопластического течения толстостенной трубы, ослабленной выточками, находящейся под действием внутреннего давления.

Однако стоит отметить, что в приведенных выше работах отсутствует сравнение полученных аналитических решений, например, с численным решением, а также не рассматриваются вопросы сходимости полученных приближенных аналитических решений. В то же время в задачах теории упругости для случая плоской задачи сходимость метода возмущений к точному решению доказана В.В. Подалковым и В.А. Романовым в работе [85], а для пространственного случая этот вопрос для микронеоднородной упругой среды рассмотрен П.А. Кунташевым и Ю.В. Немировским [53].

Несмотря на развитие компьютерных (численных) методов исследования, метод малого параметра сохраняет свою актуальность, поскольку служит для получения асимптотически искомого решения, для выяснения качественных особенностей рассматриваемых задач.

Впервые методы теории малых упругопластических деформаций к решению задач установившейся ползучести в работе [7] применил Н.М. Беляев в 1943 году. В настоящее время выбор феноменологических детерминированных

теорий неупругого реологического деформирования и длительной прочности достаточно широк. Здесь можно отметить работы В.И. Астафьева [2], В.В. Болотина [10], Ю.И. Кадашевича и В.В. Новожилова [81], Л.М. Качанова [38], А.Ф. Никитенко [77], А.М. Локощенко и С.А. Шестерикова [56], Н.Н. Малинина [64], Ю.Н. Работнова [95], В.П. Радченко [97, 98, 101], Ю.П. Самарина и Я.М. Клебанова [112], О.В. Соснина с соавторами [114], С.А. Шестерикова и А. М. Локощенко [129], И.Ю. Цвелодуба [126], J.A. Betten [133], J.T. Boyle и J. Spence [8, 134], F.A. Leckie [148] и многих других авторов.

Следует выделить работы, в которых строятся модели, отражающие критическое неупругое деформирование и разрушение материала, и разрабатываются методы решения соответствующих краевых задач. Здесь можно отметить работы В.И. Астафьева, Ю.Н. Радаева, Л.В. Степановой [3], В.Э. Вильдемана, Ю.В. Соколкина, А.А. Ташкинова [16], Р.Г. Шин, В.Л. Каткова [130], В.П. Радченко, Е.В. Небогиной [105], В.П. Радченко, Ю.А. Еремина [101], В.П. Радченко, С.В. Горбунова [100], В.В. Стружанова [117–119], В.В. Стружанова, В.И. Миროнова [120], Г.П. Черепанова [127, 128], В.Э. Вильдемана, Е.В. Ломакина, М.П. Третьякова [14], В.Э. Вильдемана, Т.В. Санниковой, М.П. Третьякова [15], L.L. Mishnaevsky [150], R. Penny и D. Marriot [151] и других.

Одним из часто исследуемых объектов является толстостенная труба. Вопрос определения напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы при различных видах нагружения, свойствах материала, степени поврежденности, учета эффекта упрочнения и т.д. рассматривается в монографиях и статьях Л.М. Качанова [38], Н.Н. Малинина [64], Ю.Н. Работнова [95, 96], В.П. Радченко и Н.Н. Попова с соавторами [23, 91, 106, 109], И.В. Стасенко [115], R.J. Gu и F.A. Cozzarelli [142], J. Jelwan, M. Chowdhury, G. Pearce [145], R.K. Penny, D.L. Marriot [151], L.H. You [158] и многих других. Ползучесть однородной толстостенной трубы из неупрочняющегося материала описана в [8, 64]. В работе L.H. You, H. Ou, Z.Y. Zheng [158] рассмотрен метод решения задачи установившейся ползучести толстостенного цилиндра под действием внутренне-

го давления при возрастающем (градиентном) изменении констант материала $A = A(r) = A_0 r^{a_1}$ и $n = n(r) = n_0 r^{n_1}$, A и n – параметры степенной аппроксимации закона установившейся ползучести. Показано, что введение подобных зависимостей существенно влияет на напряженно-деформированное состояние трубы.

Несмотря на тщательный отбор образцов, их геометрическую калибровку и калибровку нагрузки при экспериментах на ползучесть наблюдается разброс данных по деформации ползучести и времени до разрушения до 20–50% , который обусловлен в том числе и технологическими факторами, такими как несовершенство испытываемых образцов, несмотря на соответствие допусков для геометрических размеров ГОСТам, неравномерность процесса кристаллизации материала при изготовлении детали, наличие примесей в расплаве, наличие неоднородного температурного поля и т.д. Стоит отметить экспериментальные данные в работах многочисленных исследователей [4, 9, 22, 58, 76, 82, 93–95, 111, 121], в которых имеется обширная статистическая информация по деформации ползучести и длительной прочности. Влияние разброса экспериментальных данных при ползучести на уровни напряжений, скоростей деформаций и времени до разрушения можно оценить при стохастической постановке рассматриваемых задач ползучести, в которых величину отклонения геометрических размеров модели от первоначально заданных, величину неупругой деформации, долговечность изделия и другие реологические характеристики можно рассматривать как заданную стохастическую закономерность. Следовательно, аналитические и численные методы расчетов, основанные на детерминированных уравнениях ползучести, не дают полную картину происходящих процессов реологии и являются первой (зачастую недостаточной) задачей определения напряженно-деформированного состояния некоторой усредненной конструкции. В связи с этим необходимо привлечение вероятностно-статистических методов как для постановки, так и для решения соответствующих краевых задач.

Стохастические краевые задачи нелинейной механики условно можно раз-

делить на два вида, один из которых содержит задачи для возмущенных по пространственному полю реологических характеристик материала — так называемые внутренние краевые задачи. К другому виду можно отнести задачи, в которых свойства материала остаются детерминированными, но возмущению подвержены внешние объемные и поверхностные силы, а также границы твердого тела — внешние краевые задачи.

К вопросу решения внутренних краевых задач можно отнести новые теории, которые учитывают структурную неоднородность материала, зачастую статистическими методами. Общей чертой этих теорий является наличие дополнительных параметров, определяющих состояние среды, и поэтому в ряде случаев возможен учет определенных эффектов, обусловленных структурной неоднородностью материала. За основу исследования деформируемых тел со структурной неоднородностью принимается классическая модель сплошной среды, при этом стохастичность вводится в обычные детерминированные определяющие уравнения посредством случайных функций, соответствующих механическим характеристикам среды. В силу стохастической неоднородности материала трехмерного упругого тела распределение напряжений, деформаций и перемещений образует трехмерное случайное поле.

Например, метод возмущений для случая стохастически неоднородной линейно-упругой среды развивался в работах В.А. Ломакина [57, 59]. Построению стохастических уравнений для стадии установившейся ползучести материала с локально неоднородными свойствами для жесткого вязкопластического материала посвящена работа А. Sluzalec [156]. В работе В.Н. Гончаренко [17] дана постановка стохастической краевой задачи для неоднородной линейно-упругой среды, где случайными функциями являются свойства среды, а также нагрузки и перемещения на границе. В данной работе вводится понятие обобщенного решения, доказывается его существование и единственность. В работах Н. Broberg, R. Westlund [135, 137], учитывая экспериментальные данные, принимается нормальное распределение стохастических параметров материала, в

том числе и для толстостенной трубы, находящейся под внутренним давлением, на основе степенной зависимости определяющих соотношений установившейся ползучести. В работе Н. Broberg, R. Westlund [138] случайной величиной принимается коэффициент материала A при степенной аппроксимации закона установившейся ползучести. Разрушение при ползучести стержневых элементов конструкций со случайными свойствами материала рассмотрено в работе Н. Broberg и R. Westlund [136]. Время вязкого разрушения стержня определяется на основе модифицированной теории Хоффа, согласно которой разрушение возникает в сечении с наибольшей податливостью, и деформация в этом сечении при разрушении бесконечна. Проведен анализ функции распределения свойств материала. Предсказана теоретически и подтверждена экспериментально полоса разброса для зависимости времени до разрушения от приложенного постоянного напряжения.

Структурная неоднородность материалов принималась во внимание в работах В.В. Болотина [11], А.А. Ильюшина [33], В.А. Ломакина [58], Ю.К. Захарова, Ю.В. Прокофьева, А.А. Черникова [30], Ю.П. Самарина [111], В.П. Радченко и Н.Н. Попова с соавторами [89, 102, 106, 108].

Учитывая стохастические определяющие уравнения ползучести, в работах [23, 24, 91, 106] методом малого параметра построены аналитические решения для полей напряжений и скоростей деформаций вплоть до третьего приближения в стохастической краевой задаче установившейся ползучести толстостенной трубы под действием внутреннего давления, а в [43, 92] приведены решения аналогичной задачи ползучести для растягиваемой плоскости.

Хорошо разработаны методы решения стохастических краевых задач для осесимметричной трубы, но с возмущенным по пространственным переменным полем реологических характеристик, и построены решения до третьего порядка приближения в работах В.П. Радченко и Н.Н. Попова с соавторами [90, 106, 108, 109].

В исследовании [35] разработан аналитический метод решения одномерной

статистически нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы из микронеоднородного реономного материала с учетом членов четвертого и более высокого порядков разложения по малому параметру, а также – для аналогичной двумерной задачи в первом приближении. На основе апостериорного анализа исследована сходимость аналитических решений и разработаны методы оценки показателей надежности элементов конструкций на основе предложенных аналитических методов решения.

Следует отметить, что в ряде работ по теории ползучести и длительной прочности успешно применён метод статистических испытаний – метод Монте-Карло [5, 44, 111], который заключается в решении большого числа детерминированных краевых задач при заданных конкретных реализациях случайных величин. Здесь были предложены стохастические уравнения для описания деформации в пределах первых двух стадий ползучести [58]; установлены законы распределения случайных параметров соответствующих моделей, описывающих все три стадии ползучести [55]; описан метод прогнозирования деформации ползучести в вероятностном аспекте [66, 70]. Определённое обобщение работ [55, 58, 66, 70] было выполнено в [72, 73], где кроме деформации ползучести учитывалась и пластическая деформация, а также был введён стохастический критерий разрушения. Данный метод используется и в работе [102].

Рассмотрим еще один метод решения стохастических краевых задач ползучести и длительной прочности элементов конструкций, изложенный в работах [109, 114], где решена задача для толстостенной трубы под действием внутреннего давления. Здесь для решения стохастической краевой задачи была введена следующая гипотеза. Поскольку толщина стенки толстостенной трубы мала по сравнению с радиусом, предполагалось, что стохастическая составляющая материала в трубе не зависит от радиуса и угла, а зависит лишь от длины трубы, причём в пределах одного «образца» толстостенной трубы свойства материала постоянны, т.е. они определяются конкретной выборкой случайных величин. Геометрические и силовые характеристики предполагались детерминированными.

ми. Решение стохастической краевой задачи было осуществлено с использованием метода Монте-Карло. Здесь для каждого набора случайных величин решалась детерминированная краевая задача для трубы, затем строились стохастические оценки для неупругой деформации и времени разрушения. Эта информация позволяет установить ресурс данного конструктивного элемента как по деформационным, так и по катастрофическим критериям отказа в вероятностной постановке.

Большая группа теорий базируется на кинетической теории ползучести Ю.Н. Работнова [95], основанной на методах механики непрерывного накопления поврежденности (работы В.В. Болотина [11], Л.М. Качанова [37], Дж. Леметра и А. Плантри [54], Г.Ф. Лепина [55], А.М. Локощенко и С.А Шестерикова [56], О.В. Соснина [114], В.П. Радченко и Ю.А. Еремина [101] и других), согласно которой процесс накопления поврежденности материала непосредственно связывается с накопленной неупругой деформацией и текущим напряжением. Одной из характеристик состояния материала принимается параметр (или несколько параметров) поврежденности, с которым либо явно, либо косвенно связывается относительное уменьшение эффективной площади поперечного сечения образца, вызываемое микроразрушением материала в процессе деформирования, и, как следствие этого, увеличение истинного напряжения.

Стохастическая модель поврежденности рассмотрена в работе D.G. Harlow и T.J. Delph [144]. Использование нового вероятностного метода для анализа консольной балки при постоянной равномерной нагрузке в работе T.J. Delph, J.E. Yukich [139] показало, что результирующая скорость прогиба конца балки может варьироваться в пять раз с весьма асимметричной функцией распределения вероятностей. В то же время аналитическое решение в стохастической постановке показало невысокую согласованность с численными расчётами, что авторы исследования связывают с недостаточным количеством экспериментальных данных. В исследовании C. Zhou, S. Tu [159] рассмотрен сравнительный анализ двух стохастических моделей расчета высокотемпературной ползучести

печной трубы: методом Монте-Карло и с помощью стохастической модели повреждённости вследствие ползучести, где случайные величины – давление и температура.

В монографии И.В. Стасенко [115] рассматриваются расчётно-аналитические методы исследования при нестационарных режимах нагружения с использованием приближённых выражений для функции ползучести, построенной в пространстве обобщенных сил, а также рассмотрено влияние начальных отклонений формы сечения на неустановившуюся ползучесть тонкостенных труб. Также следует отметить ряд решений задач установившейся ползучести с применением обобщённых сил и обобщённых перемещений [8, 112, 134].

Совершенствуются техники применения метода конечных элементов и его модификаций к решению задач ползучести. Так, в последнее десятилетие появилось целое направление, связанное с разработкой комбинированного подхода к численному решению стохастических краевых задач на основе специально разработанного стохастического метода конечных элементов и метода Монте-Карло в работах А.И. Марасанова [65], А. Maciej, Н. Muneo [149], R. Ghanem [140], М. Kaminski [146]–[147], G.I. Schueller [155]. Например, представленная в работе А. Gomez-Fariasa с соавторами [141] разновидность МКЭ более чувствительна к изменению формы материала и отклику на нагружение в процессе ползучести по отношению к базовой версии МКЭ. Заслуживает внимания работа G.I. Schueller [155], в которой приведен краткий обзор существующих новых подходов в этом направлении.

Заключительным этапом расчета стохастически неоднородных элементов конструкций в условиях ползучести является определение их показателей надежности. Критерии отказа хорошо известны и изложены в пособии [123].

Чаще всего основным критерием отказа является время. Для оценки этого параметра используются так называемые параметрические теории надежности. Это либо «деформационный» критерий отказа (предельно допустимая величина деформации, перемещения, угла закручивания, прогиба и т.д.), ли-

бо «силовой» критерий (предельно допустимые значения напряжения, усилий, моментов и т.д.). В этом случае важную роль играют аналитические или приближенно–аналитические решения соответствующих стохастических краевых задач, позволяющие построить случайные процессы для деформаций, перемещений, напряжений и других характеристик напряженно–деформированного состояния.

Задача о надежности единичного стержня при постоянном напряжении, когда критерием отказа является достижение деформацией некоторой заданной максимально–допустимой величины, рассматривалась В.А. Кузнецовым [47], Ю.П. Самариним [111]. В работе В.А. Кузнецова и Ю.П. Самарина [48] использовался уже «силовой» критерий отказа и предполагалось, что потеря работоспособности стержня происходит тогда, когда релаксирующее напряжение достигает определенного допустимого значения. Проведена оценка надежности толстостенной трубы с возмущенными свойствами материала в работе [24] с применением функции надёжности. В указанных работах найдено аналитическое выражение для случайного времени безотказной работы и методами теории вероятностей получено явное выражение для функции надежности.

В работе Ю.П. Самарина, Г.А. Павловой и Н.Н. Попова [113] исследована надежность стержневых конструкций, работающих при одноосном нагружении в условиях ползучести, когда ограничение накладывается на накопленную деформацию. Предложен метод расчёта остаточного ресурса конкретного изделия по измеренному значению деформации ползучести в момент выработки первоначального расчетного ресурса с учетом стохастических неоднородностей материала.

При решении конкретных задач со стохастически возмущенными свойствами среды в большинстве случаев ограничиваются первым приближением, как, например, в работах Н.В. Архипова [1], В.А. Ломакина и В.И. Шейнина [61], В.А. Ломакина [58], Б.П. Макарова, В.В. Петрова, А.А. Газганова [62], В.В. Подалкова и В.А. Романова [85, 86] и других работах, которое дает хорошее при-

ближение для слабо неоднородных сред. При этом нулевое приближение является решением детерминированной задачи, а первое приближение для линейно-упругих сред является стохастически линейной задачей. В работе В.А. Ломакина и В.И. Шейнина [60] с целью получения достоверных сведений о допусаемой погрешности сравнивается точное решение для одного частного случая плоской задачи с решением по первому приближению и отмечается их совпадение. Оценки погрешностей, возникающие при решении стохастически нелинейной пространственной задачи о деформировании тела, упругие свойства которого являются случайными функциями одной координаты, рассматривались в работе В.В. Подалкова и В.А. Романова [87].

Только небольшая часть исследований методом малого параметра подкреплена сравнительным анализом приближенного аналитического решения с численным решением. Так, в работе М.А. Журавкова с соавторами [29] проведено сравнение численного решения и решения методом малого параметра в упругой области для кубически анизотропного материала.

Разработка аналитических методов решения нелинейных краевых задач для элементов конструкций с возмущенными границами представляет довольно сложную задачу вследствие физической нелинейности определяющих реологических соотношений. Один из подходов состоит в линеаризации граничных условий и реологических соотношений на основе метода малого параметра. Впервые постановка задачи установившейся ползучести с возмущенными границами методом малого параметра приведена в монографии Л.М. Качанова [38], где, в частности, построено решение в первом приближении для разностенной трубы и овальной трубы с применением функции напряжений.

Следует отметить, что существуют единичные попытки решения задач с возмущенной внешней границей при установившейся ползучести материала, например, в исследовании В.П. Радченко и Е.В. Башкиновой [6, 99], но решение в данных работах построено только для первого приближения с помощью отличной от настоящего исследования вспомогательной функции от полярной ко-

ординаты без обсуждения вопроса о сходимости построенного приближенного аналитического решения. Анализ научной литературы по проблеме исследования краевых задач с возмущенными границами в условиях ползучести показал, что оценке погрешности полученных решений вообще не уделяется внимания. В этой связи можно отметить лишь работы автора настоящего исследования [103, 104].

Приведенный выше обзор существующих источников свидетельствует, что в большей части работ по нелинейной механике помимо детерминированных постановок рассматриваются краевые задачи для сред или элементов конструкций с неоднородным (стохастически неоднородным) полем деформационных характеристик, что по предложенной терминологии соответствует внутренним краевым задачам. В этом направлении решены многие задачи в упругой и упруго-пластической областях, в области ползучести и механики разрушения. Однако в большинстве задач авторы ограничились первым или вторым приближением, приближения более высокого порядка получены в очень ограниченном числе работ. Меньшая часть работ посвящена краевым задачам с регулярно (стохастически) возмущенными границами. Здесь также подавляющее число работ выполнено в упругой и упругопластической областях, а построенные на основе метода малого параметра решения ограничены в основном первым или двумя приближениями. Исследования поведения тел в условиях ползучести единичны. Общим недостатком практически всех работ для внешних и внутренних краевых задач является отсутствие исследований сходимости построенных решений и их погрешности в каждом приближении.

Таким образом, проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:

1. Существующие на сегодняшний день аналитические методы решения краевых задач с возмущенными границами на основе метода малого параметра разработаны в основном лишь в упругопластической области деформирования. Подавляющее большинство задач рассмотрено в одномерной постановке и реше-

ния построены лишь в рамках первого приближения метода малого параметра.

2. В научной литературе практически отсутствуют аналитические решения краевых задач ползучести с возмущенными границами, в которых принимаются во внимание приближения второго и более высоких порядков, не исследовано влияние старших членов разложения на поля напряжений и деформаций.

3. Не разработаны вопросы сходимости и оценки погрешности приближенных аналитических решений задач ползучести с возмущенными границами.

4. В приведенных в обзоре работах отсутствует сравнение приближенного аналитического решения с численным с целью определения достоверности полученного аналитического решения.

Вышеизложенное и послужило формированию цели настоящего диссертационного исследования – разработке аналитических методов решения краевых задач установившейся ползучести с возмущенными внешними границами и их применения к оценке надежности элементов конструкций.

Вышеизложенное позволяет сформулировать основные задачи настоящей диссертационной работы:

- 1) Разработать аналитический метод решения краевых задач установившейся ползучести с возмущенными границами для плоского деформированного состояния на основе метода малого параметра с учетом членов до третьего порядка разложения по малому параметру на примере задачи о ползучести толстостенной трубы при различных видах возмущения.
- 2) Выполнить детальный анализ влияния величины малого параметра и характеристик нелинейного поведения материала в приближенном аналитическом решении на поля напряжений и скоростей деформаций.
- 3) Построить конечно-элементную модель поставленной задачи и оценить погрешность приближенного аналитического решения по отношению к численному для различных видов возмущения границы.

- 4) Разработать методику расчета на надежность толстостенной трубы с возмущенным внешним контуром, находящейся под внутренним давлением, в условиях установившейся ползучести по деформационному критерию отказа на основе построенного приближённого аналитического решения.

Глава 2

Постановка и линеаризация задачи о толстостенной трубе с возмущёнными границами

2.1. Постановка задачи

Математическое моделирование цилиндрических тел в условиях ползучести представляет определенную сложность в связи с существенной нелинейностью свойств материала при ползучести, наличием фактора времени, а также невозможностью обеспечения идеальной симметрии сечения в процессе изготовления и всего срока эксплуатации конструкции.

Можно выделить класс краевых задач установившейся ползучести для толстостенных труб, в которых нарушена осесимметричность сечения вследствие воздействия внешних агрессивных сред, наличия дефектов симметрии при изготовлении и т.д., что влечет за собой искажение геометрии контура трубы.

Аналитическое решение краевой задачи для толстостенной трубы, находящейся на стадии установившейся ползучести, построено лишь для случая осевой симметрии. Учет возмущения внешнего контура трубы в аналитическом решении представляет собой достаточно сложную задачу.

Цель данной главы заключается в построении приближенного аналитического решения задачи о толстостенной трубе, находящейся под действием внутреннего давления, с произвольно возмущённой внешней границей. Задача решается с использованием метода малого параметра. Данный метод хорошо зарекомендовал себя при решении нелинейных задач теории пластичности [49–52, 78–80, 122, 132], детально разработанных в научной школе Д.Д. Ивлева и Л.В. Ершова [31]. Определенная аналогия задач установившейся ползучести

задачам упругопластического течения является аргументом к использованию метода малого параметра. Данная задача решается в полярной системе координат.

Рассматривается толстостенная труба с внутренним контуром радиуса $r = a$ и внешним контуром радиуса $r = b$, возмущенным по пространственным переменным (см. рисунок 2.1). Уравнение внешнего геометрически возмущенного контура трубы содержит малую величину δ . Конкретный вид уравнения внешнего контура будет определен в главах 2, 3. Данная задача решается с помощью метода малого параметра, в качестве которого и принимается величина δ , конкретизация которого выполнена ниже. Величины a, b являются безразмерными.

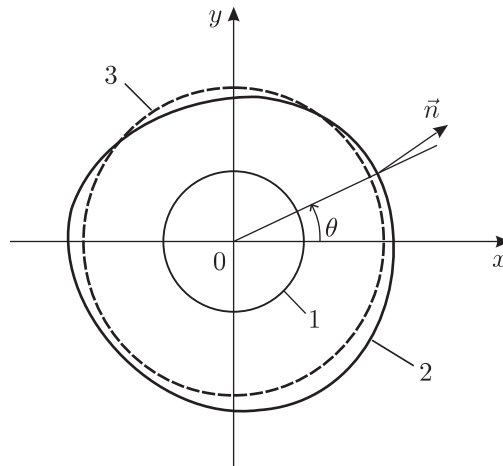


Рисунок 2.1 — Схема несоосной трубы: 1 – внутренний контур трубы $r = a$; 2 – внешний возмущенный контур трубы; 3 – внешний контур трубы $r = b$ для осесимметричного случая.

Предполагается, что упругие деформации малы по сравнению с деформациями ползучести и ими можно пренебречь. С физической точки зрения это означает, что рассматриваются установившиеся поля скоростей деформаций ползучести и напряжений, т.е. деформацией ползучести, накопленной на первой стадии и вызванной перераспределением напряжений от упругого состояния до состояния установившейся ползучести, пренебрегаем. Разложение тензора напряжений σ_{ij} , тензора скоростей деформаций ползучести $\dot{\epsilon}_{ij}$ и вектора скоростей перемещений \dot{u}_i по малому параметру до членов третьего порядка включительно имеет вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)} + \delta^2\sigma_{ij}^{(2)} + \delta^3\sigma_{ij}^{(3)} + O(\delta^4), \\
\dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^{(0)} + \delta\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)} + \delta^2\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)} + \delta^3\dot{\varepsilon}_{ij}^{(3)} + O(\delta^4), \\
\dot{u}_i &= \dot{u}_i^{(0)} + \delta\dot{u}_i^{(1)} + \delta^2\dot{u}_i^{(2)} + \delta^3\dot{u}_i^{(3)} + O(\delta^4).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Задача решается в условиях плоского деформированного состояния, т.е.

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = 0. \tag{2.2}$$

Предполагается несжимаемость материала для скоростей деформаций ползучести на установившейся стадии

$$\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = 0, \tag{2.3}$$

что находит экспериментальное подтверждение в работах [77, 95].

Постановка задачи включает в себя уравнения равновесия:

$$r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + r \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2\sigma_{r\theta} = 0, \tag{2.5}$$

которые линейны относительно компонент напряжений и, следовательно, выполняются для каждого приближения.

Аналогично, для каждого приближения выполняются соотношения типа Коши-Эйлера:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}, \\
\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\dot{u}_r}{r}, \\
\dot{\varepsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\dot{u}_\theta}{r} \right).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

В качестве определяющих используются соотношения теории установив-

шейся ползучести со степенным законом:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} A \sigma_e^{n-1} S_{ij}, \quad (2.7)$$

где n , A — постоянные характеристики материала, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ — девиатор напряжений, δ_{ij} — символ Кронекера, σ_e — интенсивность напряжений:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + 6\sigma_{r\theta}^2 \right]^{1/2}.$$

При плоском деформированном состоянии выполняется:

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}), \quad (2.8)$$

что является следствием условия (2.2). Следовательно,

$$S_{rr} = -S_{\theta\theta} = \frac{1}{2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \quad S_{r\theta} = \sigma_{r\theta}. \quad (2.9)$$

Скорости деформаций ползучести (2.7) с учетом (2.9) представимы в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{3}{4} A \sigma_e^{n-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} &= \frac{3}{4} A \sigma_e^{n-1} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}), \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta} &= 3 A \sigma_e^{n-1} \sigma_{r\theta}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Интенсивность напряжений σ_e определяется в случае плоской деформации выражением:

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (4\sigma_{r\theta})^2 \right]^{1/2}. \quad (2.11)$$

Проведем разложение σ_e по малому параметру δ с учетом (2.1):

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[(\Delta\sigma^{(0)} + \delta\Delta\sigma^{(1)} + \delta^2\Delta\sigma^{(2)} + \delta^3\Delta\sigma^{(3)} + O(\delta^4))^2 + \right.$$

$$+ 4(\delta\sigma_{r\theta}^{(1)} + \delta^2\sigma_{r\theta}^{(2)} + \delta^3\sigma_{r\theta}^{(3)} + O(\delta^4))^2]^{1/2}, \quad (2.12)$$

где для удобства записи введены обозначения:

$$\Delta\sigma^{(k)} = \sigma_{rr}^{(k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(k)}, \quad (2.13)$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$ — номера приближений.

Поскольку нулевым приближением задачи является решение для осесимметричной трубы, то в решении нулевого приближения данной задачи отсутствуют сдвиговые напряжения, т.е.

$$\sigma_{r\theta}^{(0)} = 0.$$

Ограничиваясь членами 3-го порядка малости, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_e^{n-1} &\approx \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \left[[\Delta\sigma^{(0)}]^2 + \delta 2\Delta\sigma^{(0)}\Delta\sigma^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + \delta^2 \left([\Delta\sigma^{(1)}]^2 + 2\Delta\sigma^{(0)}\Delta\sigma^{(2)} + 4[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \delta^3 \left(2\Delta\sigma^{(0)}\Delta\sigma^{(3)} + 2\Delta\sigma^{(1)}\Delta\sigma^{(2)} + 8\sigma_{r\theta}^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(2)} \right) \right]^{\frac{n-1}{2}} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|\Delta\sigma^{(0)}|\right)^{n-1} \left[1 + \delta N + \delta^2 F + \delta^3 C \right]^{\frac{n-1}{2}}. \quad (2.14) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} N &= \frac{2\Delta\sigma^{(1)}}{\Delta\sigma^{(0)}}; \quad F = \frac{[\Delta\sigma^{(1)}]^2 + 2\Delta\sigma^{(0)}\Delta\sigma^{(2)} + 4[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2}; \\ C &= \frac{2\Delta\sigma^{(0)}\Delta\sigma^{(3)} + 2\Delta\sigma^{(1)}\Delta\sigma^{(2)} + 8\sigma_{r\theta}^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(2)}}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2}. \quad (2.15) \end{aligned}$$

Произведем разложение интенсивности напряжений в степенной ряд, что

позволяет представить σ_e^{n-1} в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_e^{n-1} \approx & \left(\frac{\sqrt{3}|\Delta\sigma^{(0)}|}{2} \right)^{n-1} \left[1 + \delta \frac{n-1}{2} N + \delta^2 \left(\frac{n-1}{2} F + \frac{(n-1)(n-3)}{8} N^2 \right) + \right. \\ & \left. + \delta^3 \left(\frac{n-1}{2} C + \frac{(n-1)(n-3)}{4} NF + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{48} N^3 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Используем формулу (2.16) в соотношениях для скоростей деформаций ползучести (2.10), отбрасывая члены выражения, содержащие четвертый порядок:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{\varepsilon}_{rr}^{(0)} + \delta \dot{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \delta^2 \dot{\varepsilon}_{rr}^{(2)} + \delta^3 \dot{\varepsilon}_{rr}^{(3)} = & \frac{3}{4} A \left(\frac{\sqrt{3}|\Delta\sigma^{(0)}|}{2} \right)^{n-1} \times \\ & \times \left[1 + \delta \frac{n-1}{2} N + \delta^2 \left(\frac{n-1}{2} F + \frac{(n-1)(n-3)}{8} N^2 \right) + \right. \\ & \left. + \delta^3 \left(\frac{n-1}{2} C + \frac{(n-1)(n-3)}{4} NF + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{48} N^3 \right) \right] \times \\ & \times (\Delta\sigma^{(0)} + \delta \Delta\sigma^{(1)} + \delta^2 \Delta\sigma^{(2)} + \delta^3 \Delta\sigma^{(3)}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(0)} + \delta \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)} + \delta^2 \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} + \delta^3 \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(3)} = & 3A \left(\frac{\sqrt{3}|\Delta\sigma^{(0)}|}{2} \right)^{n-1} \times \\ & \times \left[1 + \delta \frac{n-1}{2} N + \delta^2 \left(\frac{n-1}{2} F + \frac{(n-1)(n-3)}{8} N^2 \right) + \right. \\ & \left. + \delta^3 \left(\frac{n-1}{2} C + \frac{(n-1)(n-3)}{4} NF + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{48} N^3 \right) \right] \times \\ & \times (\delta\sigma_{r\theta}^{(1)} + \delta^2\sigma_{r\theta}^{(2)} + \delta^3\sigma_{r\theta}^{(3)}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Поскольку в выражениях (2.17), (2.18) используется в том числе и нулевое приближение, обратимся к рассмотрению нулевого приближения, решение которого

хорошо известно [96]:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(0)} &= Q \left[1 - \left(\frac{b}{r} \right)^p \right], & \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= Q \left[1 - (1-p) \left(\frac{b}{r} \right)^p \right], \\ \sigma_{zz}^{(0)} &= Q \left[1 - (1+p) \left(\frac{b}{r} \right)^p \right].\end{aligned}\quad (2.19)$$

При этом введены обозначения:

$$Q = \frac{q}{(b/a)^p - 1}, \quad p = 2/n. \quad (2.20)$$

При нагружении трубы внутренним давлением $\sigma_{rr}^{(0)} < 0$, $\sigma_{\theta\theta}^{(0)} > 0$, следовательно

$$|\Delta\sigma^{(0)}| = -\Delta\sigma^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} - \sigma_{rr}^{(0)} = Qp \left(\frac{b}{r} \right)^p. \quad (2.21)$$

Преобразуем первый сомножитель в уравнениях (2.17), (2.18), учитывая, что $p = 2/n$:

$$3A \left(\frac{\sqrt{3}|\Delta\sigma^{(0)}|}{2} \right)^{n-1} = 3A \left[\frac{\sqrt{3}}{2} Qp \left(\frac{b}{r} \right)^p \right]^{n-1} = 3A \left(\frac{\sqrt{3}}{n} b^p Q \right)^{n-1} r^{p-2} = Lr^s. \quad (2.22)$$

Здесь $L = 3A \left(\frac{\sqrt{3}}{n} b^p Q \right)^{n-1}$, $s = p - 2$.

Подставим в выражения (2.17), (2.18) величины из (2.15), (2.22) и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr} &= \dot{\varepsilon}_{rr}^{(0)} + \delta \dot{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \delta^2 \dot{\varepsilon}_{rr}^{(2)} + \delta^3 \dot{\varepsilon}_{rr}^{(3)} = \frac{1}{4} Lr^s \times \\ &\times \left[1 + \delta \frac{(n-1)\Delta\sigma^{(1)}}{\Delta\sigma^{(0)}} + \delta^2 \frac{n-1}{2} \left(\frac{(n-2)[\Delta\sigma^{(1)}]^2 + 2\Delta\sigma^{(0)}\Delta\sigma^{(2)} + 4[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} \right) + \right. \\ &+ \delta^3 \left(\frac{\Delta\sigma^{(3)}}{\Delta\sigma^{(0)}} + \frac{(n-2)\Delta\sigma^{(1)}\Delta\sigma^{(2)} + 4\sigma_{r\theta}^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(2)}}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} + \frac{(n-2)(n-3)[\Delta\sigma^{(1)}]^3}{6[\Delta\sigma^{(0)}]^3} + \right. \\ &\left. \left. + 2(n-3) \frac{\Delta\sigma^{(1)}[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{[\Delta\sigma^{(0)}]^3} \right) \right] (\Delta\sigma^{(0)} + \delta\Delta\sigma^{(1)} + \delta^2\Delta\sigma^{(2)} + \delta^3\Delta\sigma^{(3)}) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} Lr^s \left[\Delta\sigma^{(0)} + \delta \cdot n\Delta\sigma^{(1)} + \delta^2 \cdot \left(n\Delta\sigma^{(2)} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n[\Delta\sigma^{(1)}]^2 + 4[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{\Delta\sigma^{(0)}} \right) + \right. \\
&\quad + \delta^3 \cdot \left(n\Delta\sigma^{(3)} + n(n-1) \frac{\Delta\sigma^{(1)}\Delta\sigma^{(2)}}{\Delta\sigma^{(0)}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot \frac{[\Delta\sigma^{(1)}]^3}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} + \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(n-1)(n-2) \frac{\Delta\sigma^{(1)}[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} + 4(n-1) \frac{\sigma_{r\theta}^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(2)}}{\Delta\sigma^{(0)}} \right) \right], \quad (2.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{r\theta} &= \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(0)} + \delta\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)} + \delta^2\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} + \delta^3\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(3)} + O(\delta^4) = Lr^s \times \\
&\times \left[1 + \delta \frac{(n-1)\Delta\sigma^{(1)}}{\Delta\sigma^{(0)}} + \delta^2 \frac{n-1}{2} \left(\frac{(n-2)[\Delta\sigma^{(1)}]^2 + 2\Delta\sigma^{(0)}\Delta\sigma^{(2)} + 4[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} \right) + \right. \\
&\quad + \delta^3 \left(\frac{\Delta\sigma^{(3)}}{\Delta\sigma^{(0)}} + \frac{(n-2)\Delta\sigma^{(1)}\Delta\sigma^{(2)} + 4\sigma_{r\theta}^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(2)}}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} + \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(n-2)(n-3)[\Delta\sigma^{(1)}]^3}{6[\Delta\sigma^{(0)}]^3} + 2(n-3) \frac{\Delta\sigma^{(1)}[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{[\Delta\sigma^{(0)}]^3} \right) \right] (\delta\sigma_{r\theta}^{(1)} + \delta^2\sigma_{r\theta}^{(2)} + \delta^3\sigma_{r\theta}^{(3)}) = \\
&= Lr^s \left[\delta \cdot \sigma_{r\theta}^{(1)} + \delta^2 \cdot \left(\sigma_{r\theta}^{(2)} + \frac{(n-1)\Delta\sigma^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(1)}}{\Delta\sigma^{(0)}} \right) + \delta^3 \cdot \left(\sigma_{r\theta}^{(3)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(n-1)}{\Delta\sigma^{(0)}} \left[\Delta\sigma^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(2)} + \Delta\sigma^{(2)}\sigma_{r\theta}^{(1)} \right] + \frac{(n-1)\sigma_{r\theta}^{(1)}}{2[\Delta\sigma^{(0)}]^2} \left[(n-2)[\Delta\sigma^{(1)}]^2 + 4[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2 \right] \right) \right]. \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Учитывая разложение (2.23) и (2.24), приравниваем слагаемые при одинаковых степенях параметра δ .

Соотношения для нулевого приближения:

$$\dot{\varepsilon}_{rr}^{(0)} = \frac{1}{4} Lr^s \Delta\sigma^{(0)}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(0)} = 0. \quad (2.25)$$

Соотношения для первого приближения:

$$\dot{\varepsilon}_{rr}^{(1)} = -\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{4} Lr^s n\Delta\sigma^{(1)}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)} = Lr^s \sigma_{r\theta}^{(1)}. \quad (2.26)$$

Соотношения для второго приближения:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr}^{(2)} = -\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(2)} &= \frac{1}{4}Lr^s \left[n\Delta\sigma^{(2)} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n[\Delta\sigma^{(1)}]^2 + 4[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{\Delta\sigma^{(0)}} \right], \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} &= Lr^s \left[\sigma_{r\theta}^{(2)} + \frac{(n-1)\Delta\sigma^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(1)}}{\Delta\sigma^{(0)}} \right].\end{aligned}\quad (2.27)$$

Соотношения для третьего приближения:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr}^{(3)} = -\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(3)} &= \frac{1}{4}Lr^s \left[n\Delta\sigma^{(3)} + n(n-1) \frac{\Delta\sigma^{(1)}\Delta\sigma^{(2)}}{\Delta\sigma^{(0)}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot \frac{[\Delta\sigma^{(1)}]^3}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2(n-1)(n-2) \frac{\Delta\sigma^{(1)}[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} + 4(n-1) \frac{\sigma_{r\theta}^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(2)}}{\Delta\sigma^{(0)}} \right],\end{aligned}\quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(3)} &= Lr^s \left[\sigma_{r\theta}^{(3)} + \frac{(n-1)}{\Delta\sigma^{(0)}} \left[\Delta\sigma^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(2)} + \Delta\sigma^{(2)}\sigma_{r\theta}^{(1)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-1)\sigma_{r\theta}^{(1)}}{2[\Delta\sigma^{(0)}]^2} \left[(n-2)[\Delta\sigma^{(1)}]^2 + 4[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2 \right] \right].\end{aligned}\quad (2.29)$$

Уравнения равновесия (2.4), (2.5) представим с использованием обозначения (2.12):

$$\frac{\partial\sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial\theta} - \frac{\Delta\sigma^{(k)}}{r},\quad (2.30)$$

$$\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial\theta} = -r \frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} - 2\sigma_{r\theta}^{(k)},\quad (2.31)$$

где $k = 0, 1, 2, 3$ – номер приближения.

2.2. Граничные условия

Обратимся к рассмотрению граничных условий в напряжениях.

Уравнение внешней возмущенной границы представим в виде ряда, коэф-

фициенты которого не зависят от r :

$$r = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k r_k(\theta) = r_0 + \delta \tilde{r}, \quad \tilde{r} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k r_{k+1}(\theta). \quad (2.32)$$

Здесь r_0 – обозначает радиус внешнего контура для осесимметричной трубы. В общем случае принимаем, что на внешнем возмущенном контуре трубы заданы нормальное и касательное усилия

$$\sigma_\nu \Big|_{r=r_0} = P_\nu, \quad \sigma_\tau \Big|_{r=r_0} = P_\tau. \quad (2.33)$$

Здесь ν, τ – нормаль и касательная к внешнему возмущенному контуру. Применим способ линеаризации граничных условий, изложенный в монографии Д.Д. Ивлева, Л.В. Ершова [31]. Для пояснения предлагаемой линеаризации приведем математические преобразования, описанные в [31]. Напряжения σ_ν, σ_τ представлены в виде степенного ряда в окрестности $r = r_0$ и используется разложение радиус-вектора (2.32):

$$\begin{aligned} \sigma_\nu \Big|_{r=b} &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \sigma_\nu^{(k)} \Big|_{r=b} = \sum_{k,m=0}^{\infty} \delta^{k+m} \frac{d^m \sigma_\nu^{(k)}}{dr^m} \frac{\tilde{r}^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \delta^m \frac{d^m P_\nu}{dr^m} \frac{\tilde{r}^m}{m!}, \\ \sigma_\tau \Big|_{r=b} &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \sigma_\tau^{(k)} \Big|_{r=b} = \sum_{k,m=0}^{\infty} \delta^{k+m} \frac{d^m \sigma_\tau^{(k)}}{dr^m} \frac{\tilde{r}^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \delta^m \frac{d^m P_\tau}{dr^m} \frac{\tilde{r}^m}{m!}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Тогда граничные условия для первого приближения имеют вид:

$$\sigma_\nu^{(1)} + \frac{d\sigma_\nu^{(0)}}{dr} r_1 = \frac{dP_\nu}{dr} r_1, \quad \sigma_\tau^{(1)} + \frac{d\sigma_\tau^{(0)}}{dr} r_1 = \frac{dP_\tau}{dr} r_1. \quad (2.35)$$

Граничные условия для второго и третьего приближений запишем только для компоненты σ_ν , поскольку для σ_τ линеаризованное граничное условие записыв-

вается аналогично, заменяя в уравнениях σ_ν на σ_τ (см. [31]):

$$\sigma_\nu^{(2)} + \frac{d\sigma_\nu^{(1)}}{dr}r_1 + \frac{d^2\sigma_\nu^{(0)}}{dr^2}\frac{r_1^2}{2} + \frac{d\sigma_\nu^{(0)}}{dr}r_2 = \frac{d^2P_\nu}{dr^2}\frac{r_1^2}{2} + \frac{dP_\nu}{dr}r_2; \quad (2.36)$$

граничные условия для третьего приближения:

$$\begin{aligned} \sigma_\nu^{(3)} + \frac{d\sigma_\nu^{(2)}}{dr}r_1 + \frac{d^2\sigma_\nu^{(1)}}{dr^2}\frac{r_1^2}{2} + \frac{d^3\sigma_\nu^{(0)}}{dr^3} + \frac{d\sigma_\nu^{(1)}}{dr}r_2 + \\ + \frac{d^2\sigma_\nu^{(0)}}{dr^2}r_1r_2 + \frac{d\sigma_\nu^{(0)}}{dr}r_3 = \frac{d^3P_\nu}{dr^3}\frac{r_1^3}{3!} + \frac{d^2P_\nu}{dr^2}r_1r_2 + \frac{dP_\nu}{dr}r_3. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Запишем граничные условия (2.35)-(2.37) через компоненты основной системы координат, учитывая угол поворота напряжений при их переносе на невозмущенную окружность $r = r_0$ (см. [31]).

Граничные условия для первого приближения имеют вид:

$$\sigma_{rr}^{(1)} + \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr}r_1 = \frac{dP_\nu}{dr}r_1, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} + \Delta\sigma^{(0)}\dot{S}_1 = \frac{dP_\tau}{dr}r_1. \quad (2.38)$$

Граничные условия для второго приближения:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(2)} + \frac{d\sigma_{rr}^{(1)}}{dr}r_1 + \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2}\frac{r_1^2}{2} + \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr}r_2 - \Delta\sigma^{(0)}\dot{S}_1^2 - 2\sigma_{r\theta}^{(1)}\dot{S}_1 = \frac{d^2P_\nu}{dr^2}\frac{r_1^2}{2} + \frac{dP_\nu}{dr}r_2, \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} + \Delta\sigma^{(0)}(\dot{S}_2 - S_1\dot{S}_1) + \Delta\sigma^{(1)}\dot{S}_1 + \frac{d\sigma_{r\theta}^{(1)}}{dr}r_1 + \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr}\dot{S}_1r_1 = \\ = \frac{d^2P_\tau}{dr^2}\frac{r_1^2}{2} + \frac{dP_\tau}{dr}r_2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Граничные условия для третьего приближения:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(3)} + \frac{d\sigma_{rr}^{(2)}}{dr}r_1 + \frac{d^2\sigma_{rr}^{(1)}}{dr^2}\frac{r_1^2}{2} + \frac{d^3\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^3}\frac{r_1^3}{3!} - 2\Delta\sigma^{(0)}(\dot{S}_1\dot{S}_2 - S_1\dot{S}_1^2) - \\ - \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr}\dot{S}_1^2r_1 - \Delta\sigma^{(1)}\dot{S}_1^2 - 2\sigma_{r\theta}^{(1)}(\dot{S}_2 - S_1\dot{S}_1)2\frac{d\sigma_{r\theta}^{(1)}}{dr}\dot{S}_1r_1 - 2\sigma_{r\theta}^{(2)}\dot{S}_1 + \\ + \frac{d\sigma_{rr}^{(1)}}{dr}r_2 + \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2}r_1r_2 + \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr}r_3 = \frac{d^3P_\nu}{dr^3}\frac{r_1^3}{3!} + \frac{d^2P_\nu}{dr^2}r_1r_2 + \frac{dP_\nu}{dr}r_3, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{r\theta}^{(3)} + \Delta\sigma^{(0)}(\dot{S}_3 - \dot{S}_2 S_1 + S_1^2 \dot{S}_1 - \dot{S}_1 S_2 - \dot{S}_1^3) + \Delta\sigma^{(1)}(\dot{S}_2 - S_1 \dot{S}_1) + \Delta\sigma^{(2)} \dot{S}_1 - \\
& - 2\sigma_{r\theta}^{(1)} \dot{S}_1^2 + \frac{d\sigma_{r\theta}^{(2)}}{dr} r_1 + \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr} (\dot{S}_2 - S_1 \dot{S}_1) r_1 + \frac{d\Delta\sigma^{(1)}}{dr} \dot{S}_1 r_1 + \frac{d\sigma_{r\theta}^{(1)}}{dr} r_2 + \\
& + \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr} \dot{S}_1 r_2 + \frac{d^2\sigma_{r\theta}^{(1)}}{dr^2} \frac{r_1^2}{2} + \frac{d^2\Delta\sigma^{(0)}}{dr^2} \dot{S}_1 \frac{r_1^2}{2} = \frac{d^3 P_\tau}{dr^3} \frac{r_1^3}{3!} + \frac{d^2 P_\tau}{dr^2} r_1 r_2 + \frac{dP_\tau}{dr} r_3. \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Здесь введено обозначение для функций S_k ($k = \overline{1, 3}$):

$$S_k = r_k/r_0, \quad \dot{S}_k = dS_k/d\theta. \quad (2.42)$$

Точка наверху означает дифференцирование по углу θ . Уравнение внешней границы не изменяется при изменении радиуса, следовательно, функции S_k не зависят от радиуса r .

Поскольку для случая нагружения трубы внутренним давлением к внешнему контуру не приложены активные силы, положим $P_\nu = P_\tau = 0$. Тогда, учитывая решение для нулевого приближения (2.19), граничное условие для первого приближения принимает вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=b} &= -\frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} \Big|_{r=b} r_1 = -Qpb^p r^{-p-1} \Big|_{r=b} r_1 = -\frac{Qp}{b} r_1, \\
\sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=b} &= -\Delta\sigma^{(0)} \Big|_{r=b} \dot{S}_1 = Qpb^p r^{-p-1} \Big|_{r=b} \dot{S}_1 = \frac{Qp}{b} \dot{S}_1;
\end{aligned} \quad (2.43)$$

граничное условие для второго приближения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(2)} &= -\frac{d\sigma_{rr}^{(1)}}{dr} r_1 - \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2} \frac{r_1^2}{2} - \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} r_2 + \Delta\sigma^{(0)} \dot{S}_1^2 + 2\sigma_{r\theta}^{(1)} \dot{S}_1, \\
\sigma_{r\theta}^{(2)} &= -\Delta\sigma^{(0)} (\dot{S}_2 - S_1 \dot{S}_1) - \Delta\sigma^{(1)} \dot{S}_1 - \frac{d\sigma_{r\theta}^{(1)}}{dr} r_1 - \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr} \dot{S}_1 r_1;
\end{aligned} \quad (2.44)$$

граничное условие для третьего приближения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(3)} &= -\frac{d\sigma_{rr}^{(2)}}{dr}r_1 - \frac{d^2\sigma_{rr}^{(1)}}{dr^2}\frac{r_1^2}{2} - \frac{d^3\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^3}\frac{r_1^3}{3!} + 2\Delta\sigma^{(0)}(\dot{S}_1\dot{S}_2 - S_1\dot{S}_1^2) + \\
&+ \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr}\dot{S}_1^2r_1 + \Delta\sigma^{(1)}\dot{S}_1^2 + 2\sigma_{r\theta}^{(1)}(\dot{S}_2 - S_1\dot{S}_1) + 2\frac{d\sigma_{r\theta}^{(1)}}{dr}\dot{S}_1r_1 + 2\sigma_{r\theta}^{(2)}\dot{S}_1 - \\
&- \frac{d\sigma_{rr}^{(1)}}{dr}r_2 - \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2}r_1r_2 - \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr}r_3, \\
\sigma_{r\theta}^{(3)} &= -\Delta\sigma^{(0)}(\dot{S}_3 - \dot{S}_2S_1 + S_1^2\dot{S}_1 - \dot{S}_1S_2 - \dot{S}_1^3) - \Delta\sigma^{(1)}(\dot{S}_2 - S_1\dot{S}_1) - \\
&- \Delta\sigma^{(2)}\dot{S}_1 + 2\sigma_{r\theta}^{(1)}\dot{S}_1^2 - \frac{d\sigma_{r\theta}^{(2)}}{dr}r_1 - \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr}(\dot{S}_2 - S_1\dot{S}_1)r_1 - \frac{d\Delta\sigma^{(1)}}{dr}\dot{S}_1r_1 - \\
&- \frac{d\sigma_{r\theta}^{(1)}}{dr}r_2 - \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr}\dot{S}_1r_2 - \frac{d^2\sigma_{r\theta}^{(1)}}{dr^2}\frac{r_1^2}{2} - \frac{d^2\Delta\sigma^{(0)}}{dr^2}\dot{S}_1\frac{r_1^2}{2}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Поскольку граница при $r = a$ не возмущена и задано давление q , граничное условие на внутреннем радиусе трубы для последующих после нулевого приближений представимо в виде:

$$\sigma_{rr}^{(k)}\Big|_{r=a} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(k)}\Big|_{r=a} = 0, \tag{2.46}$$

$k = 1, 2, 3, \dots$ – номера приближений.

Уравнения (2.3), (2.10)–(2.13) с граничными условиями (2.43)–(2.46) образуют краевую задачу для определения первого и последующих приближений, которая решается в напряжениях.

2.3. Метод построения приближений

Для нахождения первого и последующих приближений согласно метода разделения переменных используется функция $\xi^{(k)}$ или комбинации функций вида

$$\xi^{(k)}(r, \theta) = R_k(r) \sin(f\theta), \tag{2.47}$$

такая, что

$$\dot{u}_r^{(k)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \xi^{(k)}}{\partial \theta}, \quad \dot{u}_\theta^{(k)} = \frac{\partial \xi^{(k)}}{\partial r}. \tag{2.48}$$

Коэффициент f в функции $\xi^{(k)}(r, \theta)$ определяется для каждого приближения, исходя из вида граничных условий и уравнения внешней границы для рассматриваемого приближения. Данное представление для скоростей перемещений (2.48) позволяет тождественно удовлетворить условию несжимаемости (2.3). Для этого необходимо подставить выражения для скоростей перемещений в скорости деформаций:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr}^{(k)} &= \frac{\partial \dot{u}_r^{(k)}}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi^{(k)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi^{(k)}}{\partial \theta \partial r}, \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(k)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_\theta^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\dot{u}_r^{(k)}}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi^{(k)}}{\partial \theta \partial r}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(k)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_r^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{u}_\theta^{(k)}}{\partial r} - \frac{\dot{u}_\theta^{(k)}}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi^{(k)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi^{(k)}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi^{(k)}}{\partial r} \right).\end{aligned}\quad (2.49)$$

Используем функцию (2.47) в выражении (2.48):

$$\dot{u}_r^{(k)} = -f R_k r^{-1} \cos(f\theta), \quad \dot{u}_\theta^{(k)} = R_k' \sin(f\theta). \quad (2.50)$$

Здесь и в дальнейшем $(')$ означает дифференцирование по r .

Применим полученные формулы (2.50) в соотношениях типа Коши-Эйлера в виде (2.49):

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr}^{(k)} &= f(-R_k' r^{-1} + R_k r^{-2}) \cos(f\theta), \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(k)} &= \frac{1}{2}(R_k'' - R_k' r^{-1} + f^2 R_k r^{-2}) \sin(f\theta).\end{aligned}\quad (2.51)$$

В каждом из определяющих соотношений (2.24) – (2.28) выразим напряжения для старшего приближения.

Соотношения для нулевого приближения:

$$\Delta \sigma^{(0)} = \frac{4}{L r^s} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(0)}. \quad (2.52)$$

Соотношения для первого приближения:

$$\Delta\sigma^{(1)} = \frac{4}{Lr^s n} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(1)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)}. \quad (2.53)$$

Соотношения для второго приближения:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^{(2)} &= \frac{4}{nLr^s} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(2)} - \left[\frac{n-1}{2} \cdot \frac{[\Delta\sigma^{(1)}]^2}{\Delta\sigma^{(0)}} + \frac{2(n-1)}{n} \cdot \frac{[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{\Delta\sigma^{(0)}} \right], \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} &= \frac{1}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} - \frac{(n-1)\Delta\sigma^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(1)}}{\Delta\sigma^{(0)}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Соотношения для третьего приближения:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^{(3)} &= \frac{4}{nLr^s} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(3)} - \left[(n-1) \frac{\Delta\sigma^{(1)}\Delta\sigma^{(2)}}{\Delta\sigma^{(0)}} + \frac{(n-1)(n-2)}{6} \cdot \frac{[\Delta\sigma^{(1)}]^3}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(n-1)(n-2)}{n} \frac{\Delta\sigma^{(1)}[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} + \frac{4(n-1)}{n} \frac{\sigma_{r\theta}^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(2)}}{\Delta\sigma^{(0)}} \right], \\ \sigma_{r\theta}^{(3)} &= \frac{1}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(3)} - \left[\frac{(n-1)}{\Delta\sigma^{(0)}} \left[\Delta\sigma^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(2)} + \Delta\sigma^{(2)}\sigma_{r\theta}^{(1)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-1)\sigma_{r\theta}^{(1)}}{2[\Delta\sigma^{(0)}]^2} \left[(n-2)[\Delta\sigma^{(1)}]^2 + 4[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2 \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Напряжения в определяющих соотношениях (2.53)–(2.55) для первого, второго и третьего приближений содержат слагаемое, зависящее от скорости деформаций соответствующего приближения, второе и третье приближения содержат также слагаемые, которые зависят от предшествующих приближений. Рассмотрим случай нахождения напряжений, который определяет любое (после нулевого) приближение, используя (2.51):

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^{(k)} &= \frac{4}{nLr^{p-2}} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(k)} - \tilde{B}_f^{(k)}(r, \theta) = \frac{2p}{L} f(-R'_k r^{-p+1} + R_k r^{-p}) \cos(f\theta) - \\ &\quad - B_f^{(k)} \cos(f\theta) = \Delta\sigma^p \cos(f\theta) - B_f^{(k)} \cos(f\theta) = \Delta\rho^{(k)} \cos(f\theta), \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(k)} &= \frac{1}{Lr^{p-2}} \tilde{\varepsilon}_{r\theta}^{(k)} - \tilde{T}_f^{(k)}(r, \theta) = \frac{1}{2L} (R_k'' r^{-p+2} - R_k' r^{-p+1} + f^2 R_k r^{-p}) \sin(f\theta) - \\ &- T_f^{(k)} \sin(f\theta) = \sigma_{r\theta}^\rho \sin(f\theta) - T_f^{(k)} \sin(f\theta) = \rho_{r\theta}^{(k)} \sin(f\theta). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Здесь $\tilde{B}_f^{(k)}(r, \theta) = B_f^{(k)}(r) \cos(f\theta)$, $\tilde{T}_f^{(k)}(r, \theta) = T_f^{(k)}(r) \sin(f\theta)$ определены как функции, зависящие от предыдущих приближений. Волна над функциями $\tilde{B}_f^{(k)}(r, \theta)$, $\tilde{T}_f^{(k)}(r, \theta)$ подчеркивает зависимость от двух переменных r и θ .

Используя (2.56), (2.57), выделяем переменную θ в уравнениях равновесия (2.4), (2.5):

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} = -\frac{1}{r} (f \rho_{r\theta}^{(k)} + \Delta \rho^{(k)}) \cos(f\theta), \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} = \left(-r \frac{\partial \rho_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} - 2 \rho_{r\theta}^{(k)} \right) \sin(f\theta). \quad (2.59)$$

При составлении уравнения для нахождения функции $R_k(r)$ необходимо предварительно найти производную по θ от обеих частей уравнения равновесия (2.58), используя обозначения, введенные в (2.56), (2.57):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r \partial \theta} &= \frac{1}{r} (f^2 \rho_{r\theta}^{(k)} + f \Delta \rho^{(k)}) \sin(f\theta) = \\ &= \frac{1}{r} (f^2 \sigma_{r\theta}^\rho + f \Delta \sigma^\rho) \sin(f\theta) - \frac{1}{r} (f^2 T_f^{(k)} + f B_f^{(k)}) \sin(f\theta) = \\ &= \frac{1}{2L} f^2 \left[R_k'' r^{-p+1} - (1 + 4p) R_k' r^{-p} + (f^2 + 4p) R_k r^{-p-1} \right] \sin(f\theta) - \\ &- \frac{1}{r} (f^2 T_f^{(k)} + f B_f^{(k)}) \sin(f\theta); \end{aligned} \quad (2.60)$$

производную по r от обеих частей уравнения равновесия (2.59):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta \partial r} &= - \left(r \frac{\partial^2 \rho_{r\theta}^{(k)}}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \rho_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} \right) \sin(f\theta) = - \left(r \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^\rho}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \sigma_{r\theta}^\rho}{\partial r} \right) \sin(f\theta) + \\ &+ \left(r \frac{\partial^2 T_f^{(k)}}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial T_f^{(k)}}{\partial r} \right) \sin(f\theta) = \frac{1}{2L} \left[-R_k^{IV} r^{-p+3} + 2(p-3) R_k''' r^{-p+2} + \right. \\ &+ \left. (-p^2 + 4p - 3 - f^2) R_k'' r^{-p+1} + (p^2 + 2p(f^2 - 2) + 3 - 3f^2) R_k' r^{-p} + \right. \end{aligned}$$

$$+ pf^2(2-p)R_k r^{-p-1}] \sin(f\theta) + \left(r \frac{\partial^2 T_f^{(k)}}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial T_f^{(k)}}{\partial r} \right) \sin(f\theta) \quad (2.61)$$

и вторую производную по θ и по r соотношения для $\Delta\sigma^{(k)}$ (2.56) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta\sigma^{(k)}}{\partial \theta \partial r} &= -f \frac{\partial \Delta\rho^{(k)}}{\partial r} \sin(f\theta) = -f \frac{\partial \Delta\sigma^\rho}{\partial r} \sin(f\theta) + f \frac{\partial B_f^{(k)}}{\partial r} \sin(f\theta) = \\ &= \frac{2pf^2}{L} \left[R_k'' r^{-p+1} - pR_k' r^{-p} + pR_k r^{-p-1} \right] \sin(f\theta) + f \frac{\partial B_k}{\partial r} \sin(f\theta). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Разность продифференцированных уравнений равновесия тождественно равна второй производной $\Delta\sigma^{(k)}$:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta \partial r} - \frac{\partial^2 \Delta\sigma^{(k)}}{\partial \theta \partial r} = 0. \quad (2.63)$$

Подставляем (2.60), (2.61), (2.62) в уравнение (2.63):

$$\left(r \frac{\partial^2 \rho_{r\theta}^{(k)}}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \rho_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + f \frac{\partial \Delta\rho^{(k)}}{\partial r} + \frac{f^2 \rho_{r\theta}^{(k)} + f \Delta\rho^{(k)}}{r} \right) \sin(f\theta) = 0. \quad (2.64)$$

Выделим функции $B_f^{(k)}(r)$, $T_f^{(k)}(r)$, зависящие от предыдущих приближений, используя обозначения, введенные в (2.56), (2.57). Решение должно выполняться для любого значения угла, следовательно, без нарушения общности искомого решения можно обе части (2.64) сократить на $\sin(f\theta)$:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^\rho}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \sigma_{r\theta}^\rho}{\partial r} + f \frac{\partial \Delta\sigma^\rho}{\partial r} + \frac{f^2 \sigma_{r\theta}^\rho + f \Delta\sigma^\rho}{r} = \\ = r \frac{\partial^2 T_f^{(k)}}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial T_f^{(k)}}{\partial r} + f \frac{\partial B_f^{(k)}}{\partial r} + \frac{f^2 T_f^{(k)} + f B_f^{(k)}}{r}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

В уравнение (2.65) вместо $\Delta\sigma^\rho$ и $\sigma_{r\theta}^\rho$ можно подставить их выражения через функцию $R_k(r)$ с использованием соотношений (2.60)–(2.62). Приводя подобные слагаемые в преобразованном соотношении, получаем уравнение для определе-

ния функции $R_k(r)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2L} \left[R_k^{IV} r^{-p+3} + 2(3-p)R_k''' r^{-p+2} + [p^2 - 4p(f^2 + 1) + 3 + 2f^2]R_k'' r^{-p+1} + \right. \\ & \left. + [p^2(4f^2 - 1) - p(6f^2 - 4) - 3 + 2f^2]R_k' r^{-p} + [-3p^2 f^2 + 2pf^2 + f^4]R_k r^{-p-1} \right] = \\ & = r \frac{\partial^2 T_f^{(k)}}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial T_f^{(k)}}{\partial r} + f \frac{\partial B_f^{(k)}}{\partial r} + \frac{f^2 T_f^{(k)} + f B_f^{(k)}}{r}. \quad (2.66) \end{aligned}$$

Приведем уравнение (2.66) к каноническому виду

$$\begin{aligned} & R_k^{IV} + 2(3-p)R_k''' r^{-1} + [p^2 - 4p(f^2 + 1) + 3 + 2f^2]R_k'' r^{-2} + \\ & + [p^2(4f^2 - 1) - p(6f^2 - 4) - 3 + 2f^2]R_k' r^{-3} + [-3p^2 f^2 + 2pf^2 + f^4]R_k r^{-4} = \\ & = 2Lr^{p-3}Y(r), \quad (2.67) \end{aligned}$$

$$\text{где } Y(r) = r \frac{\partial^2 T_f^{(k)}}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial T_f^{(k)}}{\partial r} + f \frac{\partial B_f^{(k)}}{\partial r} + \frac{f^2 T_f^{(k)} + f B_f^{(k)}}{r}. \quad (2.68)$$

Для решения уравнения (2.67) необходимо найти решение соответствующего однородного уравнения

$$\begin{aligned} & R_k^{IV} + 2(3-p)R_k''' r^{-1} + [p^2 - 4p(f^2 + 1) + 3 + 2f^2]R_k'' r^{-2} + \\ & + [p^2(4f^2 - 1) - p(6f^2 - 4) - 3 + 2f^2]R_k' r^{-3} + \\ & + [-3p^2 f^2 + 2pf^2 + f^4]R_k r^{-4} = 0, \quad (2.69) \end{aligned}$$

в котором используется степенное представление $R_k(r) = r^\mu$. Дифференцируя $R_k(r)$ необходимое количество раз:

$$\begin{aligned} & R_k' = \mu r^{\mu-1}, \quad R_k'' = (\mu^2 - \mu)r^{\mu-2}, \quad R_k''' = (\mu^3 - 3\mu^2 + 2\mu)r^{\mu-3}, \\ & R_k^{(IV)} = (\mu^4 - 6\mu^3 + 11\mu^2 - 6\mu)r^{\mu-4}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

подставляем производные (2.70) в уравнение (2.69), сокращаем на $r^{\mu-4}$ и без

нарушения общности искомого решения получаем

$$\begin{aligned} \mu^4 - 2p\mu^3 + [p^2 + p(2 - 4f^2) + 2f^2 - 4]\mu^2 + \\ + [(4f^2 - 2)p^2 + (4 - 2f^2)p]\mu + (-3f^2p^2 + 2f^2p + f^4) = 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Определяем корни уравнения (2.71) μ_i ($i = \overline{1, 4}$):

$$\begin{aligned} \mu_{1,2,3,4} = \frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4p(2f^2 - 1) - 4(f^2 - 2)} \pm \\ \pm 4\sqrt{p^2(4f^4 - f^2 + 1) - 4p(f^2 - 1)^2 - 4f^4 + 4}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

При $f = 1$ корни уравнения (2.71) согласно (2.72) являются действительными при любом значении n , а при $f = 2, 3, 4$ корни являются комплексными соответственно при $n \geq 2,42$; $n \geq 2,17$; $n \geq 2,10$. При решении приближений рассматривается случай $n \geq 2,42$, поскольку этому неравенству удовлетворяют показатели степени подавляющего большинства металлических материалов [96]. Исходя из вышеизложенного можно построить решение однородного уравнения (2.69) при $f = 1$

$$R_k(r) = C_{k1}r^{\mu_1} + C_{k2}r^{\mu_2} + C_{k3}r^{\mu_3} + C_{k4}r^{\mu_4}, \quad (2.73)$$

где $C_{k1} \div C_{k4}$ – константы интегрирования.

Для случая $f = 2, 3, 4$ корни однородного уравнения (2.71) при $n \geq 2,42$ представимы в виде:

$$\mu_{1,2,3,4} = \frac{p}{2} \pm \frac{\alpha}{2} \pm i\beta.$$

Здесь $\alpha = \alpha(p)$ и $\beta = \beta(p)$ – известные значения для конкретного материала.

Воспользуемся тригонометрическим представлением полученного решения для (2.69) согласно [131]:

$$R_k(r) = C_{k1}r^{(p+\alpha)/2} \cos(\beta \ln r) + C_{k2}r^{(p+\alpha)/2} \sin(\beta \ln r) +$$

$$+ C_{k3} r^{(p-\alpha)/2} \cos(\beta \ln r) + C_{k4} r^{(p-\alpha)/2} \sin(\beta \ln r) = \sum_{i=1}^4 C_{ki} m_i(r), \quad (2.74)$$

где C_{ki} ($i = \overline{1,4}$) – константы интегрирования,

$$\begin{aligned} m_1(r) &= r^{(p+\alpha)/2} \cos(\beta \ln r), & m_2(r) &= r^{(p+\alpha)/2} \sin(\beta \ln r), \\ m_3(r) &= r^{(p-\alpha)/2} \cos(\beta \ln r), & m_4(r) &= r^{(p-\alpha)/2} \sin(\beta \ln r). \end{aligned}$$

Решение неоднородного уравнения (2.67) определяется исходя из вида правой части этого уравнения.

Таким образом, линеаризация определяющих соотношений и граничных условий методом малого параметра позволила предложить способ решения поставленной задачи – задачи о толстостенной трубе с произвольно возмущенной внешней границей, находящейся под внутренним давлением, при принятии степенного закона установившейся ползучести для последующих после нулевого приближений. При построении решения для любого (кроме нулевого) приближения вводится в рассмотрение функция перемещений.

2.4. Выводы по главе 2

- Методом малого параметра до третьего приближения включительно предложен аналитический метод построения приближённого решения задачи о толстостенной трубе, находящейся под внутренним давлением на стадии установившейся ползучести, с возмущённой внешней границей.
- Определен принцип решения задачи для каждого приближения вне зависимости от вида внешней границы.

Решение задачи об установившейся ползучести несоосной трубы

3.1. Постановка задачи

Постановка задачи об установившейся ползучести разностенной трубы, находящейся под внутренним давлением, была рассмотрена в монографии Л.М. Качанова [38]. Однако решение поставленной задачи было приведено в достаточно сжатом виде и только для первого приближения. В настоящей главе приведено решение для приближений до третьего порядка включительно и выполнен сравнительный анализ с другими способами исследования.

Рассматривается несоосная толстостенная труба с несмещенным внутренним контуром радиуса $r = a$ и смещенным на малую величину δ центром внешнего контура радиуса $r = b$ относительно центра внутренней окружности (см. рисунок 3.1). Величины a, b являются безразмерными.

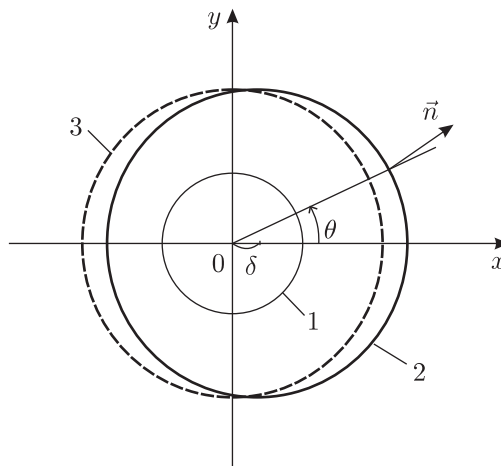


Рисунок 3.1 — Схема несоосной трубы: 1 — внутренний контур трубы $r = a$; 2 — внешний контур трубы; 3 — внешний контур трубы $r = b$ для осесимметричного случая

В качестве малого параметра δ принимается расстояние между центрами внешнего и внутреннего контуров трубы.

Уравнение внешнего контура трубы с учетом возмущения δ имеет вид

$$(r \cos \theta - \delta)^2 + r^2 \sin^2 \theta = b^2. \quad (3.1)$$

Раскладывая последнее соотношение в степенной ряд по параметру δ и оставляя члены четвертого порядка включительно, получаем

$$r = b + \delta \cos \theta + \delta^2 (\cos 2\theta - 1)/4b - \delta^4 \sin^4 / 8b^3. \quad (3.2)$$

Заметим, что разложение радиус-вектора по малому параметру не содержит третьей степени малого параметра.

Уравнение (3.2) представляет собой уравнение внешнего контура трубы, в котором при решении каждого приближения учитываются такие слагаемые, в которых степень параметра δ не превышает номера соответствующего приближения.

Для данной задачи выполняются все предположения и допущения, принятые во второй главе, а именно:

- 1) задача решается в условиях плоского деформированного состояния (2.2);
- 2) предполагается несжимаемость материала для скоростей деформаций ползучести (2.3);
- 3) для каждого приближения выполняются соотношения типа Коши-Эйлера (2.6) и уравнения равновесия (2.4), (2.5).

Обратимся к рассмотрению уравнений равновесия. Первоначальный вид уравнений (2.4), (2.5) во второй главе был представлен в виде (2.58), (2.59), где выделены тригонометрические функции переменной θ . Поскольку член разложения уравнения внешнего контура (3.2), соответствующий первой степени малого параметра δ , содержит $\cos \theta$, положим для первого приближения коэф-

коэффициент $f = 1$ в уравнениях (2.58), (2.59):

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \rho_{r\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + \Delta \rho^{(1)} \right) \cos \theta, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} = \left(-r \frac{\partial \rho_{r\theta}^{(1)}}{\partial r} - 2\rho_{r\theta}^{(1)} \right) \sin \theta. \quad (3.4)$$

3.2. Построение первого приближения

Рассмотрим граничные условия. Обращаясь ко второй главе, сравним уравнение внешнего возмущенного контура в общем виде (2.32) с уравнением внешнего контура для несоосной трубы (3.2). Выпишем коэффициент при первой степени малого параметра δ в уравнении возмущенной границы трубы и функцию S_1 из (2.42), необходимую для записи граничного условия для первого приближения:

$$r_1 = \cos \theta, \quad S_1 = \cos \theta / b, \quad \dot{S}_1 = -\sin \theta / b. \quad (3.5)$$

Получаем линеаризованные граничные условия для первого приближения при $r = b$:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=b} &= -\frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} \Big|_{r=b} \cos \theta = -\frac{Qp}{b} \cos \theta, \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=b} &= \Delta \sigma^{(0)} \Big|_{r=b} \frac{\sin \theta}{b} = -\frac{Qp}{b} \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Граничные условия на внутреннем контуре согласно (2.46) имеют вид

$$\sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=a} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=a} = 0. \quad (3.7)$$

Уравнения (2.3), (2.6), (3.3), (3.4), определяющие соотношения для первого приближения (2.25) с граничными условиями (3.6), (3.7) образуют краевую задачу для определения первого приближения, которая решается в напряжениях.

Рассмотрим построение решения в первом приближении. Обратим вни-

мание, что член разложения уравнения внешнего контура, соответствующий первой степени малого параметра δ (3.2) содержит $\cos \theta$, краевое условие на внешнем контуре трубы зависит от $\sin \theta$. Предположим, что в функции $\xi^{(1)}$ коэффициент f при угле в (2.47) $f = 1$. Тогда

$$\xi^{(1)}(r, \theta) = R_1(r) \sin \theta. \quad (3.8)$$

Следовательно,

$$\dot{u}_r^{(1)} = -R_1 r^{-1} \cos \theta, \quad \dot{u}_\theta^{(1)} = R_1' \sin \theta. \quad (3.9)$$

Используем полученные формулы (3.8), (3.9) в соотношениях типа Коши-Эйлера в виде (2.51):

$$\dot{\varepsilon}_{rr}^{(1)} = (-R_1' r^{-1} + R_1 r^{-2}) \cos \theta, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{2}(R_1'' - R_1' r^{-1} + R_1 r^{-2}) \sin \theta. \quad (3.10)$$

В выражениях (2.56), (2.57) полагаем $\tilde{T}_1 = 0$, $\tilde{B}_1 = 0$ ввиду независимости нулевого приближения от функций угла θ . Следовательно,

$$\Delta \sigma^{(1)} = \frac{4}{nLr^s} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(1)} = \frac{2p}{L} (-R_1' r^{-p+1} + R_1 r^{-p}) \cos \theta = \Delta \rho^{(1)} \cos \theta, \quad (3.11)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{2L} (R_1'' r^{-p+2} - R_1' r^{-p+1} + R_1 r^{-p}) \sin \theta = \rho_{r\theta}^{(1)} \sin \theta. \quad (3.12)$$

Используя (3.11), (3.12), уравнения равновесия (3.3), (3.4) примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial r} = \frac{1}{2L} [-R_1'' r^{-p+1} + (4p+1)R_1' r^{-p} - 4pR_1 r^{-p-1}] \cos \theta, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{1}{2L} [-R_1''' r^{-p} + (s-4)R_1'' r^{-p+1} + (s-2)R_1' r^{-p+2}] \sin \theta, \quad (3.14)$$

Воспользуемся уравнением (2.67) для определения функции $R_1(r)$:

$$R_1^{IV} + 2(3-p)R_1'''r^{-1} + (p^2 - 8p + 5)R_1''r^{-2} + (3p^2 - 2p - 1)R_1'r^{-3} + (-3p^2 + 2p + 1)R_1r^{-4} = 0, \quad (3.15)$$

поскольку $Y_1(r) = 0$. Используем степенное представление $R_1(r) = r^\mu$. Тогда из (3.15) имеем

$$\mu^4 - 2p\mu^3 + (p^2 - 2p - 2)\mu^2 + (2p^2 + 2p)\mu + (-3p^2 + 2p + 1) = 0. \quad (3.16)$$

Корни уравнения (3.16) имеют вид

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = p - 1, \quad \mu_3 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 12p + 4}}{2}, \quad \mu_4 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 12p + 4}}{2}.$$

Вводя обозначения

$$s = p - 2, \quad v = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 12p + 4}}{2}, \quad w = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 12p + 4}}{2}, \quad (3.17)$$

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = s + 1, \quad \mu_3 = v + 1, \quad \mu_4 = w + 1,$$

общее решение уравнения (3.15) запишется в виде:

$$R_1(r) = C_{11}r + C_{12}r^{s+1} + C_{13}r^{v+1} + C_{14}r^{w+1}. \quad (3.18)$$

Применим (3.18) для определения функции перемещений $\xi^{(1)}(r, \theta)$:

$$\xi^{(1)}(r, \theta) = [C_{11}r + C_{12}r^{s+1} + C_{13}r^{v+1} + C_{14}r^{w+1}] \sin \theta. \quad (3.19)$$

Используя (3.19), скорости перемещений вследствие ползучести примут вид:

$$\dot{u}_r^{(1)} = -[C_{11} + C_{12}r^s + C_{13}r^v + C_{14}r^w] \cos \theta, \quad (3.20)$$

$$\dot{u}_\theta^{(1)} = [C_{11} + C_{12}(s+1)r^s + C_{13}(v+1)r^v + C_{14}(w+1)r^w] \sin \theta.$$

Согласно (3.10) скорости деформаций ползучести выражаются так:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr}^{(1)} &= -[C_{12}sr^{s-1} + C_{13}vr^{v-1} + C_{14}wr^{w-1}] \cos \theta, \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} &= [C_{12}sr^{s-1} + C_{13}vr^{v-1} + C_{14}wr^{w-1}] \cos \theta, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)} &= \frac{1}{2}[C_{12}s^2r^{s-1} + C_{13}v^2r^{v-1} + C_{14}w^2r^{w-1}] \sin \theta.\end{aligned}\quad (3.21)$$

По формулам (3.11), (3.12) имеем

$$\Delta\sigma^{(1)} = \frac{4}{nLr^s}\dot{\varepsilon}_{rr}^{(1)} = -\frac{2p}{L}[C_{12}sr^{-1} + C_{13}vr^{-w-1} + C_{14}wr^{-v-1}] \cos \theta = \Delta\rho^{(1)} \cos \theta, \quad (3.22)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{Lr^s}\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{2L}[C_{12}s^2r^{-1} + C_{13}v^2r^{-w-1} + C_{14}w^2r^{-v-1}] \sin \theta = \rho_{r\theta}^{(1)} \sin \theta. \quad (3.23)$$

Напряжение σ_{rr} определяется из соотношения (3.13):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{rr}^{(1)}}{\partial r} &= -\frac{1}{2L}[C_{12}s(s-4p)r^{-2} + \\ &\quad + C_{13}v(v-4p)r^{-w-2} + C_{14}w(w-4p)r^{-v-2}] \cos \theta,\end{aligned}\quad (3.24)$$

интегрируя которое, приходим к выражению:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(1)} &= \frac{1}{2L}[C_{12}s(s-4p)r^{-1} + C_{13}\frac{v(v-4p)}{w+1}r^{-w-1} + \\ &\quad + C_{14}\frac{w(w-4p)}{v+1}r^{-v-1}] \cos \theta + \varphi(\theta),\end{aligned}\quad (3.25)$$

где $\varphi(\theta)$ – неизвестная, подлежащая определению из граничных условий функция. Из вида $\sigma_{rr}^{(1)}$ можно предположить, что $\varphi(\theta) = C_{11} \cos \theta$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(1)}(r, \theta) &= \frac{1}{2L}\left[C_{11} + C_{12}s(s-4p)r^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + C_{13}\frac{v(v-4p)}{w+1}r^{-w-1} + C_{14}\frac{w(w-4p)}{v+1}r^{-v-1}\right] \cos \theta = \rho_{rr}^{(1)} \cos \theta.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Тангенциальная компонента напряжений $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ находится из (3.22), используя

(3.26), поскольку $\Delta\sigma^{(1)} = \sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}$:

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, \theta) = \frac{1}{2L} \left[C_{11} + C_{12}s^2r^{-1} + C_{13}\frac{v(v+4pw)}{w+1}r^{-w-1} + \right. \\ \left. + C_{14}\frac{w(w+4pv)}{v+1}r^{-v-1} \right] \cos\theta = \rho_{\theta\theta}^{(1)} \cos\theta. \quad (3.27)$$

Равенства (3.23), (3.26) и (3.27) определяют первое приближение задачи в напряжениях с точностью до констант интегрирования, определяемых из граничных условий.

Подставляем граничные условия (3.6), (3.7) в формулы для напряжений (3.23), (3.26) и произведем сокращение на тригонометрические множители:

$$\left. \begin{aligned} C_{11} + C_{12}s(s-4p)a^{-1} + C_{13}\frac{v(v-4p)}{w+1}a^{-w-1} + C_{14}\frac{w(w-4p)}{v+1}a^{-v-1} &= 0, \\ C_{11} + C_{12}s(s-4p)b^{-1} + C_{13}\frac{v(v-4p)}{w+1}b^{-w-1} + C_{14}\frac{w(w-4p)}{v+1}b^{-v-1} &= \\ &= -2pLQb^{-1}, \\ C_{12}s^2a^{-1} + C_{13}v^2a^{-w-1} + C_{14}w^2a^{-v-1} &= 0, \\ C_{12}s^2b^{-1} + C_{13}v^2b^{-w-1} + C_{14}w^2b^{-v-1} &= -2pLQb^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Полученная система уравнений является системой для нахождения постоянных интегрирования $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}$. Ввиду безразмерности решаемой задачи принимаем $a = 1, b > a$ и вводим обозначения:

$$P = w^2(s-4p)(b-1)/s + w(w-4p)(b^{-v}-b)/(v+1) + w^2(1-b^{-v}), \\ X = v^2(s-4p)(b-1)/s + v(v-4p)(b^{-w}-b)/(w+1) + v^2(1-b^{-w}).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
C_{14} &= \frac{2pLQX}{Pv^2(b^{-w} - 1) - Xw^2(b^{-v} - 1)}, \\
C_{13} &= -\frac{2pLQP}{Pv^2(b^{-w} - 1) - Xw^2(b^{-v} - 1)}, \\
C_{12} &= \frac{2pLQ[Pv^2 - Xw^2]}{s^2[Pv^2(b^{-w} - 1) - Xw^2(b^{-v} - 1)]}, \\
C_{11} &= \frac{2pLQ}{Pv^2(b^{-w} - 1) - Xw^2(b^{-v} - 1)} \times \\
&\times \left[P \frac{v(v - 4p)}{w + 1} - (Pv^2 - Xw^2) \frac{s - 4p}{s} - X \frac{w(w - 4p)}{v + 1} \right].
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Итак, компоненты тензора напряжений для первого приближения определяются из соотношений (3.23), (3.26) и (3.27), компоненты тензора скоростей деформаций – из соотношений (3.21), коэффициенты C_{1i} , ($i = \overline{1, 4}$) в которых находятся по формулам (3.29) и представлены в Приложении А.

3.3. Постановка задачи для второго приближения

Из линеаризованных определяющих соотношений для второго приближения (2.27) необходимо выразить напряжения:

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma^{(2)} &= \frac{2p}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(2)} - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{[\Delta\sigma^{(1)}]^2}{\Delta\sigma^{(0)}} + s \frac{[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{\Delta\sigma^{(0)}}, \\
\sigma_{r\theta}^{(2)} &= \frac{1}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} - \frac{(n-1)\Delta\sigma^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(1)}}{\Delta\sigma^{(0)}}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Преобразуем определяющие соотношения (3.30). Воспользуемся решением для первого приближения в виде (3.22), (3.23), где выделены тригонометрические функции угла θ :

$$\Delta\sigma^{(1)} = \Delta\rho^{(1)}(r) \cos \theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \rho_{r\theta}^{(1)}(r) \sin \theta, \quad \sigma_{rr}^{(1)} = \rho_{rr}^{(1)}(r) \cos \theta. \tag{3.31}$$

Решение для первого приближения в виде (3.31) используется для соотно-

шений (3.30):

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma^{(2)} &= \frac{2p}{Lr^s}\dot{\epsilon}_{rr}^{(2)} - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{[\Delta\rho^{(1)}]^2 \cos^2\theta}{\Delta\sigma^{(0)}} + s \cdot \frac{[\rho_{r\theta}^{(1)}]^2 \sin^2\theta}{\Delta\sigma^{(0)}} = \\
&= \frac{2p}{Lr^s}\dot{\epsilon}_{rr}^{(2)} - \frac{1}{2\Delta\sigma^{(0)}} \left(\frac{n-1}{2} [\Delta\rho^{(1)}]^2 + s [\rho_{r\theta}^{(1)}]^2 \right) \cos 2\theta - \\
&\quad - \frac{1}{2\Delta\sigma^{(0)}} \left(\frac{n-1}{2} [\Delta\rho^{(1)}]^2 - s [\rho_{r\theta}^{(1)}]^2 \right), \\
\sigma_{r\theta}^{(2)} &= \frac{1}{Lr^s}\dot{\epsilon}_{r\theta}^{(2)} - \frac{n-1}{2\Delta\sigma^{(0)}} \Delta\rho^{(1)} \rho_{r\theta}^{(1)} \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Введем обозначения для известных слагаемых, определяемых из нулевого и первого приближений, где верхний индекс обозначает номер приближения, а нижний индекс согласован с коэффициентом f при функции угла θ :

$$\begin{aligned}
B_2^{(2)} &= \frac{1}{2\Delta\sigma^{(0)}} \left(\frac{n-1}{2} [\Delta\rho^{(1)}]^2 + s [\rho_{r\theta}^{(1)}]^2 \right), \\
B_0^{(2)} &= \frac{1}{2\Delta\sigma^{(0)}} \left(\frac{n-1}{2} [\Delta\rho^{(1)}]^2 - s [\rho_{r\theta}^{(1)}]^2 \right), \\
T_2^{(2)} &= \frac{n-1}{2\Delta\sigma^{(0)}} \Delta\rho^{(1)} \rho_{r\theta}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Линеаризованные определяющие соотношения для второго приближения (3.32) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma^{(2)} &= \frac{2p}{Lr^s}\dot{\epsilon}_{rr}^{(2)} - B_2^{(2)} \cos 2\theta - B_0^{(2)}, \\
\sigma_{r\theta}^{(2)} &= \frac{1}{Lr^s}\dot{\epsilon}_{r\theta}^{(2)} - T_2^{(2)} \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Обратимся к рассмотрению граничных условий для второго приближения. В уравнении внешней границы (3.2), используя обозначения (2.33), (2.34), принимаем

$$r_2 = (\cos 2\theta - 1)/4b, \quad S_2 = (\cos 2\theta - 1)/4b^2, \quad \dot{S}_2 = -\sin 2\theta/2b^2. \tag{3.35}$$

Линеаризованные граничные условия для второго приближения (2.37) при

$r = b$ зависят от нулевого и первого приближений, в которых, учитывая (3.31), (3.35), выделяем функции угла θ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=b} &= -\frac{d\sigma_{rr}^{(1)}}{dr} \cos \theta - \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2} \frac{\cos^2 \theta}{2} - \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} \frac{(\cos 2\theta - 1)}{4b} + \\
&+ \frac{\Delta\sigma^{(0)}}{b^2} \sin^2 \theta - 2\sigma_{r\theta}^{(1)} \frac{\sin \theta}{b} = -\frac{d\rho_{rr}^{(1)}}{dr} \cos^2 \theta - \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2} \frac{\cos^2 \theta}{2} + \\
&+ \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} \frac{(1 - \cos 2\theta)}{4b} + \frac{\Delta\sigma^{(0)}}{b^2} \sin^2 \theta - 2\rho_{r\theta}^{(1)} \frac{\sin^2 \theta}{b} = \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{d\rho_{rr}^{(1)}}{dr} - \frac{1}{2} \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2} - \frac{1}{2b} \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} - \frac{\Delta\sigma^{(0)}}{b^2} + \frac{2}{b} \rho_{r\theta}^{(1)} \right] \cos 2\theta + \\
&+ \frac{1}{2} \left[-\frac{d\rho_{rr}^{(1)}}{dr} - \frac{1}{2} \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2} + \frac{1}{2b} \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} + \frac{\Delta\sigma^{(0)}}{2b^2} - \frac{1}{b} \rho_{r\theta}^{(1)} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{d\rho_{rr}^{(1)}}{dr} + \frac{2}{b} \rho_{r\theta}^{(1)} + \frac{Qp(p+2)}{2b^2} \right] \cos 2\theta + \\
&+ \frac{1}{2} \left[-\frac{d\rho_{rr}^{(1)}}{dr} - \frac{1}{b} \rho_{r\theta}^{(1)} + \frac{Qp(p+1)}{2b^2} \right], \quad (3.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=b} &= -\Delta\sigma^{(0)} \left(\frac{\cos \theta \sin \theta}{b^2} - \frac{\sin 2\theta}{2b^2} \right) + \Delta\sigma^{(1)} \frac{\sin \theta}{b} - \frac{d\sigma_{r\theta}^{(1)}}{dr} \cos \theta + \\
&+ \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr} \frac{\sin \theta \cos \theta}{b} = \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta\rho^{(1)}}{b} - \frac{d}{dr} \left(\rho_{r\theta}^{(1)} - \frac{\Delta\sigma^{(0)}}{b} \right) \right] \sin 2\theta = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta\rho^{(1)}}{b} - \frac{d\rho_{r\theta}^{(1)}}{dr} + \frac{Qp^2}{b^2} \right] \sin 2\theta. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Краевые условия на внутреннем контуре (при $r = a$) имеют вид

$$\sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=a} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=a} = 0, \quad (3.38)$$

поскольку на внутреннем радиусе трубы задано давление q и граница не возмущена.

Уравнения (2.3), (2.6), (3.3), (3.4), (3.34) с граничными условиями (3.36)–(3.38) образуют краевую задачу для нахождения 2-го приближения в напряжениях.

3.4. Построение решения для второго приближения

Радиальная составляющая напряжений $\sigma_{rr}^{(2)}$, входящая в граничное условие (3.36), состоит из двух слагаемых, одно из которых зависит от функции радиуса r и тригонометрической функции угла θ , а другое – только от функции радиуса. Очевидно, что при построении решения задачи для второго приближения необходимо рассматривать скорости перемещений в таком виде, чтобы при принятии перемещений в этом виде определяемые радиальные напряжения удовлетворяли граничным условиям. Граничному условию (3.36) можно удовлетворить только в том случае, если радиальная составляющая скоростей перемещений $\dot{u}_r^{(2)}$ будет содержать два слагаемых, одно из которых зависит от радиуса r и угла θ , а второе – только от радиуса r ; скорость тангенциальных перемещений $\dot{u}_\theta^{(2)}$ должна зависеть и от радиуса r и от угла θ :

$$\begin{aligned}\dot{u}_r^{(2)}(r, \theta) &= \tilde{u}_r^\rho(r, \theta) + \tilde{u}_r^\psi(r) = \dot{u}_r^\rho(r) \cos 2\theta + \dot{u}_r^\psi(r), \\ \dot{u}_\theta^{(2)}(r, \theta) &= \tilde{u}_\theta^\rho(r, \theta) = \dot{u}_\theta^\rho(r) \sin 2\theta,\end{aligned}\tag{3.39}$$

где $\dot{u}_r^\rho = \dot{u}_r^\rho(r)$, $\dot{u}_r^\psi = \dot{u}_r^\psi(r)$, $\dot{u}_\theta^\rho = \dot{u}_\theta^\rho(r)$ – неизвестные, подлежащие определению функции.

Подставляя выражения для перемещений (3.39) в соотношения типа Коши-Эйлера в виде (2.6), получаем

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr}^{(2)} &= \frac{\partial \dot{u}_r^\rho}{\partial r} \cos 2\theta + \frac{\partial \dot{u}_r^\psi}{\partial r}, \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(2)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (\dot{u}_\theta^\rho \sin 2\theta)}{\partial \theta} + \frac{\dot{u}_r^\rho \cos 2\theta + \dot{u}_r^\psi}{r} = \left(\frac{2}{r} \dot{u}_\theta^\rho + \frac{\dot{u}_r^\rho}{r} \right) \cos 2\theta + \frac{\dot{u}_r^\psi}{r}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_\theta^\rho}{\partial r} - \frac{2\dot{u}_r^\rho}{r} - \frac{\dot{u}_\theta^\rho}{r} \right) \sin 2\theta.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Соотношения типа Коши-Эйлера в виде (3.40) позволяют тождественно удовле-

творить условие несжимаемости материала (2.3):

$$\left(\frac{\partial \dot{u}_r^\rho}{\partial r} + \frac{2}{r} \dot{u}_\theta^\rho + \frac{\dot{u}_r^\rho}{r} \right) \cos 2\theta + \frac{\partial \dot{u}_r^\psi}{\partial r} + \frac{\dot{u}_r^\psi}{r} = 0 \quad (3.41)$$

при выполнении согласно (3.41) следующих равенств:

$$\frac{\partial \tilde{u}_r^\rho}{\partial r} + \frac{2}{r} \tilde{u}_\theta^\rho + \frac{\tilde{u}_r^\rho}{r} = 0, \quad (3.42)$$

$$\frac{d\dot{u}_r^\psi}{dr} + \frac{\dot{u}_r^\psi}{r} = 0. \quad (3.43)$$

Уравнение (3.42) тождественно выполняется путем введения функции скоростей перемещений

$$\xi^{(2)}(r, \theta) = R_2(r) \sin 2\theta \quad (3.44)$$

такой, что

$$\tilde{u}_r^\rho = -\frac{1}{r} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \theta}, \quad \tilde{u}_\theta^\rho = \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial r}. \quad (3.45)$$

Уравнение (3.43) позволяет определить составляющую скоростей перемещений (3.39), независящую от угла θ :

$$\dot{u}_r^\psi = \frac{C}{r} \quad (3.46)$$

и, следовательно,

$$\dot{\varepsilon}_{rr}^\psi = -\frac{C}{r^2}. \quad (3.47)$$

Полученные представления для скоростей перемещений (3.45), (3.46) используются в выражениях для скоростей деформаций ползучести (3.40):

$$\dot{\varepsilon}_{rr}^{(2)} = -\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(2)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial \theta \partial r} + \frac{d\dot{u}_r^\psi}{dr},$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial r} \right].$$

Воспользуемся определением $\xi^{(2)}$ согласно (3.44):

$$\dot{\epsilon}_{rr}^{(2)} = -\dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{(2)} = [-2R_2' r^{-1} + 2R_2 r^{-2}] \cos 2\theta + \frac{du_r^\psi}{dr}, \quad (3.48)$$

$$\dot{\epsilon}_{r\theta}^{(2)} = \frac{1}{2} [R_2'' - R_2' r^{-1} + 4R_2 r^{-2}] \sin 2\theta. \quad (3.49)$$

Полученные формулы для скоростей деформаций ползучести (3.48), (3.49) применим в определяющих соотношениях (3.32), учитывая наличие зависимости от угла θ :

$$\Delta\sigma^{(2)} = \frac{4p}{L} (-R_2' r^{-p+1} + R_2 r^{-p}) \cos 2\theta - B_2^{(2)} \cos 2\theta - \frac{2pC}{L} r^{-p} - B_0^{(2)}, \quad (3.50)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(2)} = \frac{1}{2L} (R_2'' r^{-p+2} - R_2' r^{-p+1} + 4R_2 r^{-p}) \sin 2\theta - T_2^{(2)} \sin 2\theta. \quad (3.51)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^\rho &= \frac{4p}{L} (-R_2' r^{-p+1} + R_2 r^{-p}), \\ \Delta\sigma^\psi &= -\frac{2pC}{L} r^{-p}, \\ \sigma_{r\theta}^\rho &= \frac{1}{2L} [R_2'' r^{-p+2} - R_2' r^{-p+1} + 4R_2 r^{-p}]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Тогда соотношения (3.50), (3.51) принимают вид:

$$\Delta\sigma^{(2)} = \Delta\sigma^\rho \cos 2\theta + \Delta\sigma^\psi - B_2^{(2)} \cos 2\theta - B_0^{(2)} = \Delta\rho^{(2)} \cos 2\theta + \Delta\psi^{(2)}, \quad (3.53)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(2)} = \sigma_{r\theta}^\rho \sin 2\theta - T_2^{(2)} \sin 2\theta = \rho_{r\theta}^{(2)} \sin 2\theta. \quad (3.54)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta\rho^{(2)} &= \Delta\sigma^\rho - B_2^{(2)}, \\ \Delta\psi^{(2)} &= \Delta\sigma^\psi - B_0^{(2)}, \\ \rho_{r\theta}^{(2)} &= \sigma_{r\theta}^\rho - T_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

С учетом обозначений (3.53)–(3.55) уравнения равновесия (2.4), (2.5) предста-

ВИМЫ В ВИДЕ:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(2)}}{\partial r} = -\frac{1}{r}(2\rho_{r\theta}^{(2)} + \Delta\rho^{(2)}) \cos 2\theta - \frac{\Delta\psi^{(2)}}{r}, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(2)}}{\partial \theta} = -(r\frac{\partial \rho_{r\theta}^{(2)}}{\partial r} + 2\rho_{r\theta}^{(2)}) \sin 2\theta. \quad (3.57)$$

Для определения функции $R_2(r)$ необходимо произвести действия, аналогичные (2.60), (2.61), (2.62), т.е. предварительно найти производную по θ от обеих частей уравнения равновесия (3.56), учитывая, что $\Delta\psi^{(2)}$ не зависит от угла θ ; далее найти производную по r от обеих частей уравнения равновесия (3.57) и вторую производную по θ и по r от обеих частей соотношения (3.53) для $\Delta\sigma^{(2)}$.

Разность продифференцированных уравнений равновесия тождественно равна второй производной $\Delta\sigma^{(2)}$. Опираясь на уравнение (2.64) и сокращая на $\sin 2\theta$ без нарушения общности искомого решения приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} r\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^\rho}{\partial r^2} + 3\frac{\partial \sigma_{r\theta}^\rho}{\partial r} + 2\frac{\partial \Delta\sigma^\rho}{\partial r} + \frac{4\sigma_{r\theta}^\rho + 2\Delta\sigma^\rho}{r} = \\ = r\frac{\partial^2 T_2^{(2)}}{\partial r^2} + 3\frac{\partial T_2^{(2)}}{\partial r} + 2\frac{\partial B_2^{(2)}}{\partial r} + \frac{4T_2^{(2)} + 2B_2^{(2)}}{r}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Учитывая в уравнении (3.58) обозначения, введенные в (3.52), получаем дифференциальное уравнение четвертого порядка для нахождения функции $R_2(r)$:

$$\begin{aligned} R_2^{(IV)} + (6 - 2p)R_2'''r^{-1} + (p^2 - 20p + 11)R_2''r^{-2} + \\ + (15p^2 - 20p + 5)R_2'r^{-3} + (16 - 12p^2 + 8p)R_2r^{-4} = 2Lr^{p-3}Y_2(r), \end{aligned} \quad (3.59)$$

где

$$Y_2(r) = r\frac{\partial^2 T_2^{(2)}}{\partial r^2} + 3\frac{\partial T_2^{(2)}}{\partial r} + 2\frac{\partial B_2^{(2)}}{\partial r} + \frac{4T_2^{(2)} + 2B_2^{(2)}}{r}.$$

Для получения решения необходимо найти решение соответствующего однород-

ного дифференциального уравнения четвертого порядка аналогично (2.69):

$$R_2^{(IV)} + (6 - 2p)R_2'''r^{-1} + (p^2 - 20p + 11)R_2''r^{-2} + (15p^2 - 20p + 5)R_2'r^{-3} + (16 - 12p^2 + 8p)R_2r^{-4} = 0. \quad (3.60)$$

Используя степенное представление $R_2(r) = r^\nu$ в однородном уравнении (3.60), получим

$$\nu^4 - 2p\nu^3 + (p^2 - 14p + 4)\nu^2 + (14p^2 - 4p)\nu + (16 - 12p^2 + 8p) = 0, \quad (3.61)$$

решением которого являются корни

$$\nu_{1,2,3,4} = \frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 + 28p - 8 \pm 4\sqrt{61p^2 - 36p - 12}}}{2}.$$

Уравнение (3.61) имеет комплексные корни при

$$61p^2 - 36p - 12 < 0,$$

что выполняется при $p = 2/n < 0,83$, т.е. при показателе нелинейности $n > 2,42$. Следовательно, ν_i ($i = \overline{1,4}$) при $n > 2,42$ представимы в виде:

$$\nu_{1,2,3,4} = \frac{p}{2} \pm \frac{l}{2} \pm iz.$$

Здесь $l = l(p)$ и $z = z(p)$ – известные значения для конкретного материала. Воспользуемся тригонометрическим представлением полученного решения для (3.60) согласно [131]:

$$R_2(r) = C_{21}r^{(p+l)/2} \cos(z \ln r) + C_{22}r^{(p+l)/2} \sin(z \ln r) + C_{23}r^{(p-l)/2} \cos(z \ln r) + C_{24}r^{(p-l)/2} \sin(z \ln r),$$

где $C_{21} \div C_{24}$ – константы интегрирования.

Для нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка (3.58) используется метод вариации произвольных постоянных [131], применяя который получаем систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C'_{21}(r)m_1(r) + C'_{22}(r)m_2(r) + C'_{23}(r)m_3(r) + C'_{24}(r)m_4(r) &= 0, \\ C'_{21}(r)\frac{dm_1(r)}{dr} + C'_{22}(r)\frac{dm_2(r)}{dr} + C'_{23}(r)\frac{dm_3(r)}{dr} + C'_{24}(r)\frac{dm_4(r)}{dr} &= 0, \\ C'_{21}(r)\frac{d^2m_1(r)}{dr^2} + C'_{22}(r)\frac{d^2m_2(r)}{dr^2} + C'_{23}(r)\frac{d^2m_3(r)}{dr^2} + C'_{24}(r)\frac{d^2m_4(r)}{dr^2} &= 0, \\ C'_{21}(r)\frac{d^3m_1(r)}{dr^3} + C'_{22}(r)\frac{d^3m_2(r)}{dr^3} + C'_{23}(r)\frac{d^3m_3(r)}{dr^3} + C'_{24}(r)\frac{d^3m_4(r)}{dr^3} &= \\ &= 2Lr^{p-3}Y_2(r). \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

Здесь символ $(')$ при C'_{2i} означает дифференцирование по r ;

$$m_1(r) = r^{(p+l)/2} \cos(z \ln r), \quad m_2(r) = r^{(p+l)/2} \sin(z \ln r),$$

$$m_3(r) = r^{(p-l)/2} \cos(z \ln r), \quad m_4(r) = r^{(p-l)/2} \sin(z \ln r).$$

Решение данной системы уравнений позволяет получить полное решение неоднородного дифференциального уравнения (3.58) в виде

$$R_2(r) = \sum_{i=1}^4 [C_{2i}(r) + c_{2i}]m_i(r). \quad (3.63)$$

Здесь C_{2i} – известные функции радиуса r ; c_{2i} – константы интегрирования.

Вернемся к рассмотрению уравнения равновесия (3.56). Оно содержит два слагаемых, одно из которых зависит от $\cos 2\theta$, а второе не содержит функции переменной θ . С другой стороны, частная производная $\sigma_{rr}^{(2)}$ по r представима в

виде:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(2)}}{\partial r} = \frac{d\rho_{rr}^{(2)}}{dr} \cos 2\theta + \frac{d\psi_{rr}^{(2)}}{dr}. \quad (3.64)$$

Приравняем правые части уравнений (3.56) и (3.64):

$$-\frac{1}{r}(2\rho_{r\theta}^{(2)} + \Delta\rho^{(2)}) \cos 2\theta - \frac{\Delta\psi^{(2)}}{r} = \frac{d\rho_{rr}^{(2)}}{dr} \cos 2\theta + \frac{d\psi_{rr}^{(2)}}{dr}. \quad (3.65)$$

Можем сделать вывод, что

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{rr}^{(2)}}{dr} &= -\frac{1}{r}(2\rho_{r\theta}^{(2)} + \Delta\rho^{(2)}), \\ \frac{d\psi_{rr}^{(2)}}{dr} &= -\frac{\Delta\psi^{(2)}}{r}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Воспользуемся обозначением (3.52), (3.55) и подставим в равенство (3.66) полученное решение для функции $R_2(r)$ из (3.63):

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{rr}^{(2)}}{dr} &= -\frac{1}{r}(2\rho_{r\theta}^{(2)} + \Delta\rho^{(2)}) = -\frac{1}{r}(2\sigma_{r\theta}^\rho - 2T_2^{(2)} + \Delta\sigma^\rho - B_2^{(2)}) = \\ &= \frac{1}{L}[-R_2''r^{-p+1} + (4p+1)R_2'r^{-p} - (4p+4)R_2r^{-p-1}] + \frac{2T_2^{(2)} + B_2^{(2)}}{r}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\frac{d\psi_{rr}^{(2)}}{dr} = -\frac{\Delta\psi^{(2)}}{r} = \frac{2p}{L}Cr^{-p-1} + \frac{B_0^{(2)}}{r}.$$

Интегрируя по r , приходим к выражению для радиальной составляющей тензора напряжений

$$\sigma_{rr}^{(2)} = (\rho_{rr}^{(2)} + K^\rho) \cos 2\theta + (\psi_{rr}^{(2)} + K^\psi), \quad (3.68)$$

где K^ρ и K^ψ — константы интегрирования.

Составляющая тензора напряжений $\sigma_{r\theta}^{(2)}$ определяется по формуле (3.51)

с учетом (3.63):

$$\sigma_{r\theta}^{(2)} = \left[\frac{1}{2L} (R_2'' r^{-p+2} - R_2' r^{-p+1} + 4R_2 r^{-p}) - T_2^{(2)}(r) \right] \sin 2\theta = \rho_{r\theta}^{(2)} \sin 2\theta. \quad (3.69)$$

Подставляя полученное решение для $\sigma_{rr}^{(2)}$ и $\sigma_{r\theta}^{(2)}$ в граничные условия (3.36) – (3.38), определяем константы интегрирования $c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, C, K^\rho, K^\psi$. Поскольку уравнение для нахождения $\sigma_{rr}^{(2)}$ распадается на два уравнения по признаку наличия зависимости от угла θ , получаем шесть уравнений и семь неизвестных констант интегрирования, что позволяет без нарушения общности решения положить $K^\rho = 0$. Обозначая

$$\Psi_{rr}^{(2)} = \psi_{rr}^{(2)} + K^\psi,$$

получаем окончательный вид радиальной составляющей

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \rho_{rr}^{(2)} \cos 2\theta + \Psi_{rr}^{(2)}. \quad (3.70)$$

Следовательно, обращаясь к уравнению (3.53), имеем

$$\Delta\sigma^{(2)} = \sigma_{rr}^{(2)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2)} = \Delta\rho^{(2)} \cos 2\theta + \Delta\Psi^{(2)}. \quad (3.71)$$

Из соотношений (3.70), (3.71) определяется тангенциальная компонента тензора напряжений:

$$\sigma_{\theta\theta}^{(2)} = \sigma_{rr}^{(2)} - \Delta\sigma^{(2)} = (\rho_{rr}^{(2)} - \Delta\rho^{(2)}) \cos 2\theta + \Psi_{rr}^{(2)} - \Delta\Psi^{(2)}. \quad (3.72)$$

Использование полученного решения позволяет определить напряжения, скорости деформаций ползучести в трубе до приближения второго порядка включительно.

3.5. Построение решения для третьего приближения

Обратимся к определяющим соотношениям для третьего приближения в виде (2.28), (2.29) и выразим компоненты напряжений, отвечающих за третье приближение, из определяющих соотношений (2.28), (2.29):

$$\Delta\sigma^{(3)} = \frac{4}{nLr^s}\dot{\varepsilon}_{rr}^{(3)} - \left[(n-1)\frac{\Delta\sigma^{(1)}\Delta\sigma^{(2)}}{\Delta\sigma^{(0)}} + \frac{(n-1)(n-2)}{6} \cdot \frac{[\Delta\sigma^{(1)}]^3}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} + \right. \\ \left. + \frac{2(n-1)(n-2)}{n} \frac{\Delta\sigma^{(1)}[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} + \frac{4(n-1)}{n} \frac{\sigma_{r\theta}^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(2)}}{\Delta\sigma^{(0)}} \right], \quad (3.73)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(3)} = \frac{1}{Lr^s}\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(3)} - \left[\frac{(n-1)}{\Delta\sigma^{(0)}} \left[\Delta\sigma^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(2)} + \Delta\sigma^{(2)}\sigma_{r\theta}^{(1)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(n-1)\sigma_{r\theta}^{(1)}}{2[\Delta\sigma^{(0)}]^2} \left[(n-2)[\Delta\sigma^{(1)}]^2 + 4[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2 \right] \right]. \quad (3.74)$$

Решения для первого (3.31) и второго (3.69), (3.71) приближений соответственно используются для выделения функций угла θ из определяющих соотношений (3.73), (3.74):

$$\Delta\sigma^{(3)} = \frac{2p}{Lr^s}\dot{\varepsilon}_{rr}^{(3)} - \left((n-1)\frac{\Delta\rho^{(1)}\cos\theta(\Delta\rho^{(2)}\cos 2\theta + \Delta\Psi^{(2)})}{\Delta\sigma^{(0)}} + \right. \\ \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{6} \cdot \frac{[\Delta\rho^{(1)}]^3\cos^3\theta}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} - \right. \\ \left. - s(n-2)\frac{\Delta\rho^{(1)}[\rho_{r\theta}^{(1)}]^2\cos\theta\sin^2\theta}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} - 2s\frac{\rho_{r\theta}^{(1)}\rho_{r\theta}^{(2)}\sin\theta\sin 2\theta}{\Delta\sigma^{(0)}} \right), \quad (3.75)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(3)} = \frac{1}{Lr^s}\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(3)} - \left(\frac{(n-1)}{\Delta\sigma^{(0)}} \left[\Delta\rho^{(1)}\rho_{r\theta}^{(2)}\cos\theta\sin 2\theta + (\Delta\rho^{(2)}\cos 2\theta + \Delta\Psi^{(2)})\rho_{r\theta}^{(1)}\sin\theta \right] + \right.$$

$$+ \frac{(n-1)\rho_{r\theta}^{(1)} \sin \theta}{2[\Delta\sigma^{(0)}]^2} \left[(n-2)[\Delta\rho^{(1)}]^2 \cos^2 \theta + 4[\rho_{r\theta}^{(1)}]^2 \sin^2 \theta \right]. \quad (3.76)$$

Для решения задачи необходимы следующие формулы из элементарной геометрии:

$$\begin{aligned} \cos \theta \cos 2\theta &= \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 3\theta, & \cos^3 \theta &= \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta, \\ \sin \theta \sin 2\theta &= \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \cos 3\theta, & \sin^3 \theta &= \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta, \\ \sin \theta \cos^2 \theta &= \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 3\theta, & \sin \theta \cos 2\theta &= -\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 3\theta, \\ \cos \theta \sin^2 \theta &= \frac{1}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta, & \cos \theta \sin 2\theta &= \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 3\theta. \end{aligned} \quad (3.77)$$

В дальнейшем принимаются обозначения:

$$\begin{aligned} B_1^{(3)}(r) &= \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\Delta\rho^{(1)}(\Delta\rho^{(2)} + 2\Delta\Psi^{(2)})}{\Delta\sigma^{(0)}} + \frac{(n-1)(n-2)}{8} \cdot \frac{[\Delta\rho^{(1)}]^3}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} - \\ &\quad - \frac{s(n-2)}{4} \frac{\Delta\rho^{(1)}[\rho_{r\theta}^{(1)}]^2}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} - 2s \frac{\rho_{r\theta}^{(1)}\rho_{r\theta}^{(2)}}{\Delta\sigma^{(0)}}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} B_3^{(3)}(r) &= \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\Delta\rho^{(1)}\Delta\rho^{(2)}}{\Delta\sigma^{(0)}} + \frac{(n-1)(n-2)}{24} \cdot \frac{[\Delta\rho^{(1)}]^3}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} - \\ &\quad - \frac{s(n-2)}{4} \frac{\Delta\rho^{(1)}[\rho_{r\theta}^{(1)}]^2}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} - s \frac{\rho_{r\theta}^{(1)}\rho_{r\theta}^{(2)}}{\Delta\sigma^{(0)}}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} T_1^{(3)}(r) &= \frac{n-1}{2} \left(\frac{\Delta\rho^{(1)}\rho_{r\theta}^{(2)}}{\Delta\sigma^{(0)}} + \frac{n-2}{4} \cdot \frac{\rho_{r\theta}^{(1)}[\Delta\rho^{(1)}]^2}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_{r\theta}^{(1)}}{\Delta\sigma^{(0)}} (2\Delta\Psi^{(2)} - \Delta\rho^{(2)}) + \frac{3[\rho_{r\theta}^{(1)}]^3}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} \right), \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$T_3^{(3)}(r) = \frac{n-1}{2} \left(\frac{\Delta\rho^{(1)}\rho_{r\theta}^{(2)}}{\Delta\sigma^{(0)}} + \frac{n-2}{4} \cdot \frac{\rho_{r\theta}^{(1)}[\Delta\rho^{(1)}]^2}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} + \frac{\rho_{r\theta}^{(1)}\Delta\rho^{(2)}}{\Delta\sigma^{(0)}} - \frac{[\rho_{r\theta}^{(1)}]^3}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} \right), \quad (3.81)$$

которые используются в определяющих соотношениях (3.75), (3.76) с учетом тригонометрических выражений (3.77):

$$\begin{aligned}\Delta\sigma^{(3)} &= \frac{2p}{Lr^s}\dot{\varepsilon}_{rr}^{(3)} - B_1^{(3)}\cos\theta - B_3^{(3)}\cos 3\theta, \\ \sigma_{r\theta}^{(3)} &= \frac{1}{Lr^s}\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(3)} - T_1^{(3)}\sin\theta - T_3^{(3)}\sin 3\theta.\end{aligned}\quad (3.82)$$

Уравнения (3.82) приведены к виду, который является частным случаем общей постановки решения задачи в виде (2.56), (2.57).

Обратимся к рассмотрению граничных условий для третьего приближения, предварительно отметив, что в уравнении внешнего контура несоосной трубы (3.2) отсутствует слагаемое, содержащее третью степень малого параметра δ^3 , следовательно,

$$r_3 = 0, \quad S_3 = 0, \quad \dot{S}_3 = 0. \quad (3.83)$$

Тогда граничные условия для третьего приближения на внешнем контуре (2.45) примут вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(3)}\Big|_{r=b} &= -\frac{d\sigma_{rr}^{(2)}}{dr}\cos\theta - \frac{d^2\sigma_{rr}^{(1)}}{dr^2}\frac{\cos^2\theta}{2} - \frac{d^3\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^3}\frac{\cos^3\theta}{6} + \\ &+ 2\Delta\sigma^{(0)}\left(\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{b^3} - \frac{\sin\theta\sin 2\theta}{2b^3}\right) + \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr}\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{b^2} + \\ &+ \Delta\sigma^{(1)}\frac{\sin^2\theta}{b^2} - \frac{d\sigma_{rr}^{(1)}}{dr}\frac{\cos 2\theta - 1}{4b} - \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2}\frac{\cos\theta(\cos 2\theta - 1)}{4b} - \\ &- 2\sigma_{r\theta}^{(1)}\left(\frac{\sin 2\theta}{2b^2} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{b^2}\right) - 2\frac{d\sigma_{r\theta}^{(1)}}{dr}\frac{\sin\theta\cos\theta}{b} - 2\sigma_{r\theta}^{(2)}\frac{\sin\theta}{b},\end{aligned}\quad (3.84)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta}^{(3)}\Big|_{r=b} &= -\Delta\sigma^{(0)}\left(\frac{\sin 2\theta\cos\theta}{2b^3} - \frac{\cos^2\theta\sin\theta}{b^3} + \frac{\sin\theta(\cos 2\theta - 1)}{4b^3} + \frac{\sin^3\theta}{b^3}\right) - \\ &- \Delta\sigma^{(1)}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{b^2} - \frac{\sin 2\theta}{2b^2}\right) + \Delta\sigma^{(2)}\frac{\sin\theta}{b} + 2\sigma_{r\theta}^{(1)}\frac{\sin^2\theta}{b^2} - \frac{d\sigma_{r\theta}^{(1)}}{dr}\frac{\cos 2\theta - 1}{4b} - \\ &- \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr}\frac{\sin^3\theta}{2b^2} - \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{b^2} - \frac{\sin 2\theta}{2b^2}\right)\cos\theta +\end{aligned}$$

$$+ \frac{d\Delta\sigma^{(1)}}{dr} \frac{\sin\theta \cos\theta}{b} - \frac{d\sigma_{r\theta}^{(2)}}{dr} \cos\theta - \frac{d^2}{dr^2} \left(\sigma_{r\theta}^{(1)} - \Delta\sigma^{(0)} \frac{\sin\theta}{b} \right) \frac{\cos^2\theta}{2}. \quad (3.85)$$

С учетом тригонометрических формул (3.77) граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(3)} \Big|_{r=b} = & \left(\frac{1}{4b^2} \Delta\rho^{(1)} + \frac{1}{2b^2} \rho_{r\theta}^{(1)} + \frac{1}{2b} \frac{d\rho_{r\theta}^{(1)}}{dr} + \frac{1}{b} \rho_{r\theta}^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{d\rho_{rr}^{(2)}}{dr} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} \frac{d^2\rho_{rr}^{(1)}}{dr^2} - \frac{1}{24} \frac{d^3\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^3} - \frac{1}{4b^2} \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr} - \frac{1}{8b} \frac{d\rho_{rr}^{(1)}}{dr} - \frac{1}{8b} \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2} \right) \cos 3\theta + \\ & + \left(\frac{1}{4b^2} \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr} + \frac{1}{4b^2} \Delta\rho^{(1)} - \frac{1}{2b^2} \rho_{r\theta}^{(1)} + \frac{1}{8b} \frac{d\rho_{rr}^{(1)}}{dr} + \frac{1}{8b} \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2} - \frac{1}{2b} \frac{d\rho_{r\theta}^{(1)}}{dr} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{b} \rho_{r\theta}^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{d\rho_{rr}^{(2)}}{dr} - \frac{d\Psi_{rr}^{(2)}}{dr} - \frac{3}{8} \frac{d^2\rho_{rr}^{(1)}}{dr^2} - \frac{1}{8} \frac{d^3\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^3} \right) \cos\theta, \quad (3.86) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r=b} = & \left(\frac{1}{8b^3} \Delta\sigma^{(0)} - \frac{1}{2b^2} \rho_{r\theta}^{(1)} + \frac{1}{2b} \Delta\rho^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{d\rho_{r\theta}^{(2)}}{dr} + \frac{1}{4b} \frac{d\Delta\rho^{(1)}}{dr} - \frac{1}{8b} \frac{d\rho_{r\theta}^{(1)}}{dr} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8b^2} \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr} + \frac{1}{8b} \frac{d^2\Delta\sigma^{(0)}}{dr^2} - \frac{1}{8} \frac{d^2\rho_{r\theta}^{(1)}}{dr^2} \right) \sin 3\theta + \\ & \left(-\frac{3}{8b^3} \Delta\sigma^{(0)} + \frac{3}{2b^2} \rho_{r\theta}^{(1)} - \frac{1}{2b} \Delta\rho^{(2)} + \frac{1}{b} \Delta\Psi^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{d\rho_{r\theta}^{(2)}}{dr} + \frac{1}{4b} \frac{d\Delta\rho^{(1)}}{dr} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{8b} \frac{d\rho_{r\theta}^{(1)}}{dr} - \frac{3}{8b^2} \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr} - \frac{1}{8} \frac{d^2\rho_{r\theta}^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{8b} \frac{d^2\Delta\sigma^{(0)}}{dr^2} \right) \sin\theta. \quad (3.87) \end{aligned}$$

Задача определения напряжений в третьем приближении состоит в удовлетворении полученного решения граничным условиям (3.86), (3.87). Поскольку граничные условия (3.86), (3.87) зависят от функций углов θ и 3θ , можно провести аналогию с рассуждениями, приведенными в пункте 3.4 для второго приближения, и предположить, что напряжения удовлетворят граничным условиям только в том случае, если и радиальная и тангенциальная составляющая скорости перемещений в третьем приближении также будут содержать два слагаемых: одно из которых зависит от угла θ , второе – от угла 3θ . Таким

образом, предполагаем, что решение третьего приближения состоит из суммы двух решений, одно из которых является функцией угла θ , другое — функцией тройного угла 3θ .

Граничные условия (2.46) на внутреннем невозмущенном контуре трубы должны выполняться независимо от вида функций угла θ . Следовательно, они тоже распадаются на две составляющие, зависящие от θ и 3θ .

$$\sigma_{rr}^{(3)} \Big|_{r=a} = \tilde{\sigma}_{rr}^{\chi} + \tilde{\sigma}_{rr}^{\kappa} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(3)} \Big|_{r=a} = \tilde{\sigma}_{r\theta}^{\chi} + \tilde{\sigma}_{r\theta}^{\kappa} = 0. \quad (3.88)$$

При решении краевой задачи для нахождения третьего приближения используются соотношения типа Коши-Эйлера (2.6), уравнения равновесия (2.58), (2.59), определяющие соотношения (3.82) и граничные условия (3.86), (3.87), (3.88). В результате имеем

$$\begin{aligned} \dot{u}_r^{(3)}(r, \theta) &= \tilde{u}_r^{\chi}(r, \theta) + \tilde{u}_r^{\kappa}(r, \theta) = \dot{u}_r^{\chi}(r) \cos 3\theta + \dot{u}_r^{\kappa}(r) \cos \theta, \\ \dot{u}_{\theta}^{(3)}(r, \theta) &= \tilde{u}_{\theta}^{\chi}(r, \theta) + \tilde{u}_{\theta}^{\kappa}(r, \theta) = \dot{u}_{\theta}^{\chi}(r) \sin 3\theta + \dot{u}_{\theta}^{\kappa}(r) \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.89)$$

где $\dot{u}_r^{\chi} = \dot{u}_r^{\chi}(r)$, $\dot{u}_r^{\kappa} = \dot{u}_r^{\kappa}(r)$, $\dot{u}_{\theta}^{\chi} = \dot{u}_{\theta}^{\chi}(r)$, $\dot{u}_{\theta}^{\kappa} = \dot{u}_{\theta}^{\kappa}(r)$ — неизвестные, подлежащие определению функции. Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(3)} &= \tilde{\varepsilon}_{r\theta}^{\chi} + \tilde{\varepsilon}_{r\theta}^{\kappa} = \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{\chi} \sin 3\theta + \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{\kappa} \sin \theta, \\ \dot{\varepsilon}_{rr}^{(3)} &= \tilde{\varepsilon}_{rr}^{\chi} + \tilde{\varepsilon}_{rr}^{\kappa} = \dot{\varepsilon}_{rr}^{\chi} \cos 3\theta + \dot{\varepsilon}_{rr}^{\kappa} \cos \theta, \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(3)} &= \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^{\chi} + \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^{\kappa} = \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{\chi} \cos 3\theta + \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{\kappa} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Используя (3.90), в определяющих соотношениях (3.82) можно выделить функции угла θ :

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^{(3)} &= \left(\frac{2p}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{rr}^{\chi} - B_3^{(3)} \right) \cos 3\theta + \left(\frac{2p}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{rr}^{\kappa} - B_1^{(3)} \right) \cos \theta = \\ &= \Delta\chi^{(3)} \cos 3\theta + \Delta\kappa^{(3)} \cos \theta, \\ \sigma_{r\theta}^{(3)} &= \left(\frac{1}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{\chi} - T_3^{(3)} \right) \sin 3\theta + \left(\frac{1}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{\kappa} - T_1^{(3)} \right) \sin \theta = \\ &= \chi_{r\theta}^{(3)} \sin 3\theta + \kappa_{r\theta}^{(3)} \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Чтобы выражения (3.89), (3.90) являлись решением для третьего приближения, необходимо, чтобы условие несжимаемости (2.3) выполнялось тождественно:

$$\left(\frac{\partial \dot{u}_r^\chi}{\partial r} + \frac{3}{r} \dot{u}_\theta^\chi + \frac{\dot{u}_r^\chi}{r}\right) \cos 3\theta + \left(\frac{\partial \dot{u}_r^\kappa}{\partial r} + \frac{1}{r} \dot{u}_\theta^\kappa + \frac{\dot{u}_r^\kappa}{r}\right) \cos \theta = 0, \quad (3.92)$$

что возможно при соблюдении следующих равенств:

$$\frac{\partial \dot{u}_r^\chi}{\partial r} + \frac{3}{r} \dot{u}_\theta^\chi + \frac{\dot{u}_r^\chi}{r} = 0, \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial \dot{u}_r^\kappa}{\partial r} + \frac{1}{r} \dot{u}_\theta^\kappa + \frac{\dot{u}_r^\kappa}{r} = 0. \quad (3.94)$$

Уравнение (3.93) выполняется тождественно при вводе в рассмотрение функции скоростей перемещений, аналогичной (2.47), где $f = 3$, т.е.

$$\xi_3^{(3)}(r, \theta) = X_3(r) \sin 3\theta. \quad (3.95)$$

Уравнение (3.94) выполняется тождественно при вводе в рассмотрение функции скоростей перемещений, аналогичной (2.47), где $f = 1$:

$$\xi_1^{(3)}(r, \theta) = R_3(r) \sin \theta. \quad (3.96)$$

Подставим в определяющие соотношения (3.91) выражения для функций скоростей перемещений (3.95), (3.96). Принимая во внимание выражения для определяющих соотношений (2.56), (2.57), учитывающие любое (после нулевого) приближение, можно переписать определяющие соотношения (3.91) в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma^{(3)} = & \left[\frac{6p}{L} (-X_3' r^{-p+1} + X_3 r^{-p}) - B_3^{(3)} \right] \cos 3\theta + \\ & + \left[\frac{2p}{L} (-R_3' r^{-p+1} + R_3 r^{-p}) - B_1^{(3)} \right] \cos \theta, \quad (3.97) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(3)} = & \left[\frac{1}{2L} (X_3'' r^{-p+2} - X_3' r^{-p+1} + 9X_3 r^{-p}) - T_3^{(3)} \right] \sin 3\theta + \\ & + \left[\frac{1}{2L} (R_3'' r^{-p+2} - R_3' r^{-p+1} + R_3 r^{-p}) - T_1^{(3)} \right] \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Функции скоростей перемещений $\xi_3^{(3)}(r, \theta)$, $\xi_1^{(3)}(r, \theta)$, согласно (3.95), (3.96), используются в соотношениях типа Коши-Эйлера (2.6) и затем в определяющих соотношениях (3.91). Преобразование данных выражений, аналогичное преобразованиям в первом и втором приближениях, позволяет получить два уравнения для определения функций $X_3(r)$ и $R_3(r)$ соответственно:

$$\begin{aligned} X_3^{(IV)} + 2(3-p)X_3''' r^{-1} + (p^2 - 40p + 21)X_3'' r^{-2} + \\ + (35p^2 - 50p + 15)X_3' r^{-3} + (-27p^2 + 18p + 81)X_3 r^{-4} = 2Lr^{p-3}Y_3^{(3)}(r), \end{aligned} \quad (3.99)$$

где
$$Y_3^{(3)}(r) = r \frac{d^2 T_3^{(3)}}{dr^2} + 3 \frac{dT_3^{(3)}}{dr} + 3 \frac{dB_3^{(3)}}{dr} + 9 \frac{T_3^{(3)}}{r} + 3 \frac{B_3^{(3)}}{r}.$$

$$\begin{aligned} R_3^{(IV)} + 2(3-p)R_3''' r^{-1} + (p^2 - 8p + 5)R_3'' r^{-2} + \\ + (3p^2 - 2p - 1)R_3' r^{-3} + (-3p^2 + 2p + 1)R_3 r^{-4} = 2Lr^{p-3}Y_1^{(3)}(r), \end{aligned} \quad (3.100)$$

где
$$Y_1^{(3)}(r) = r \frac{\partial^2 T_1^{(3)}}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial T_1^{(3)}}{\partial r} + \frac{\partial B_1^{(3)}}{\partial r} + \frac{T_1^{(3)} + B_1^{(3)}}{r}.$$

Используется степенное представление $X_3^{(3)}(r) = r^\lambda$ для подстановки в однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (3.99). Упрощение полученного однородного уравнения приводит к алгебраическому уравнению для определения λ вида

$$\begin{aligned} \lambda^4 - 2p\lambda^3 + (p^2 - 34p + 14)\lambda^2 + (34p^2 - 14p)\lambda + \\ + (-27p^2 + 18p + 81) = 0, \end{aligned} \quad (3.101)$$

корнями которого являются

$$\lambda_{1,2,3,4} = \frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 + 68p - 28 \pm 8\sqrt{79p^2 - 64p - 8}}}{2}.$$

Уравнение (3.101) имеет комплексные корни при

$$79p^2 - 64p - 8 < 0,$$

что выполняется при $p = 2/n < 0,92$, т. е. при показателе нелинейности $n > 2,17$. Следовательно, при $n > 2,17$

$$\lambda_{1,2,3,4} = \frac{p}{2} \pm \frac{h}{2} \pm ig.$$

Здесь $h = h(p)$ и $g = g(p)$ – известные значения для конкретного материала.

Воспользуемся тригонометрическим представлением полученного решения:

$$\begin{aligned} X_3^{(3)}(r) = & K_{31}r^{(p+h)/2} \cos(g \ln r) + K_{32}r^{(p+h)/2} \sin(g \ln r) + \\ & + K_{33}r^{(p-h)/2} \cos(g \ln r) + K_{34}r^{(p-h)/2} \sin(g \ln r), \end{aligned}$$

где $K_{31} \div K_{34}$ – константы интегрирования.

Для решения неоднородного уравнения (3.99) применяется метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Вычисления аналогичны выполненным при нахождении второго приближения, что позволяет выписать решение неоднородного уравнения в виде:

$$X_3(r) = \sum_{i=1}^4 [K_{3i}(r) + k_{3i}]x_i(r). \quad (3.102)$$

Здесь K_{3i} – известные функции радиуса r ; k_{3i} – константы интегрирования,

$$\begin{aligned} x_1(r) &= r^{(p+h)/2} \cos(g \ln r), & x_2(r) &= r^{(p+h)/2} \sin(g \ln r), \\ x_3(r) &= r^{(p-h)/2} \cos(g \ln r), & x_4(r) &= r^{(p-h)/2} \sin(g \ln r), \end{aligned} \quad (3.103)$$

$h = h(p)$, $g = g(p)$ – известные значения для материала образца.

Вид функции $\xi_1^{(3)}(r, \theta)$, введенной в рассмотрение в (3.96), полностью идентичен функции $\xi^{(1)}(r, \theta)$ для первого приближения задачи (3.8), следовательно, вычисления, проведенные для первого приближения (3.10)–(3.16), позволяют выписать решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному дифференциальному уравнению (3.100):

$$R_3(r) = C_{31}r + C_{32}r^{s+1} + C_{33}r^{v+1} + C_{34}r^{w+1}. \quad (3.104)$$

Здесь s, v, w определены по формулам (3.17).

Для нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка (3.100) используется метод вариации произвольных постоянных [131], применяя который получаем систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C'_{31}(r)r + C'_{32}(r)r^{s+1} + C'_{33}(r)r^{v+1} + C'_{34}(r)r^{w+1} &= 0, \\ C'_{31}(r) + C'_{32}(r)r^s + C'_{33}(r)r^v + C'_{34}(r)r^w &= 0, \\ C'_{32}(r)r^{s-1} + C'_{33}(r)r^{v-1} + C'_{34}(r)r^{w-1} &= 0, \\ C'_{32}(r)r^{s-2} + C'_{33}(r)r^{v-2} + C'_{34}(r)r^{w-2} &= 2Lr^{p-3}Y_1^{(3)}(r). \end{aligned} \right\} \quad (3.105)$$

Здесь символ $(')$ при C'_{3i} означает дифференцирование по r .

Решение системы уравнений (3.105) и интегрирование $C'_{3i}(r)$ по r позволяет получить полное решение неоднородного уравнения (3.100) в виде:

$$\begin{aligned} R_3(r) &= [C_{31}(r) + c_{31}]r + [C_{32}(r) + c_{32}]r^{s+1} + \\ &+ [C_{33}(r) + c_{33}]r^{v+1} + [C_{34}(r) + c_{34}]r^{w+1}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Здесь $C_{3i}(r)$ – известные функции радиуса r ; c_{3i} – константы интегрирования.

Подставляя решения (3.102), (3.106) для $X_3(r)$ и $R_3(r)$ в соотношения (3.97), (3.98), затем в уравнение равновесия вида (2.58) для третьего приближения, получаем выражение для нахождения радиальной составляющей тензора напряжений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(3)}}{\partial r} = & \left[-\frac{1}{r} (3\chi_{r\theta}^{(3)} + \Delta\chi^{(3)}) + \frac{1}{r} (3T_3^{(3)} + B_3^{(3)}) \right] \cos 3\theta + \\ & + \left[-\frac{1}{r} (\kappa_{r\theta}^{(3)} + \Delta\kappa^{(3)}) + \frac{1}{r} (T_1^{(3)} + B_1^{(3)}) \right] \cos \theta. \end{aligned}$$

После интегрирования данного уравнения получаем радиальное напряжение для третьего приближения вида

$$\sigma_{rr}^{(3)} = (\chi_{rr}^{(3)} + C^\chi) \cos 3\theta + (\kappa_{rr}^{(3)} + C^\kappa) \cos \theta, \quad (3.107)$$

где C^χ и C^κ – константы интегрирования.

Полученное решение (3.107) для $\sigma_{rr}^{(3)}$ и (3.98) для $\sigma_{r\theta}^{(3)}$ используется в граничных условиях (3.86), (3.87), (3.88). Константы интегрирования k_{31} , k_{32} , k_{33} , k_{34} , C^χ – для задачи, использующей функцию тройного угла; константы интегрирования c_{31} , c_{32} , c_{33} , c_{34} , C^κ – для задачи, использующей функцию одинарного угла, определяются из граничных условий, которые тоже распадаются по признаку зависимости от функции угла, в результате чего для нахождения десяти констант интегрирования используется восемь уравнений. Это позволяет положить $C^\chi = 0$, $C^\kappa = 0$.

Использование полученного решения третьего приближения позволяет определить напряжения, скорости деформаций ползучести в трубе до третьего порядка приближения включительно.

Анализ уравнения (3.61) для второго приближения и уравнения (3.101) для третьего приближения показывает, что приведённое решение применимо при показателе нелинейности $n > 2,42$.

3.6. Анализ результатов аналитического решения

В качестве модельного примера рассмотрена труба с внутренним радиусом $a = 0,115$ м, внешним радиусом $b = 0,15$ м из двух материалов: углеродистой стали с характеристиками нелинейности материала $n = 3,03$, $A = 9,04 \cdot 10^{-9}$ МПа $^{-n}$ ч $^{-1}$ и жаропрочного сплава ХН73МБТЮ(ЭИ698) с характеристиками нелинейности материала $n = 10,96$, $A = 4,57 \cdot 10^{-33}$ МПа $^{-n}$ ч $^{-1}$ под действием внутреннего давления $q = 22,07$ МПа.

Результаты расчётов на основании построенных аналитических решений на внешнем контуре трубы приведены в таблицах 3.1 и 3.2, причем в расчётах используется $\tilde{\delta} = \delta/a$, $\tilde{r} = r/a$. В таблицах 3.1 и 3.2 представлены значения: $\sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}/\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ при учете приближения первого порядка на внешней границе трубы при $\tilde{r} = b/a + \tilde{\delta} \cos \theta$; $\sigma_{\theta\theta}^{**} = \sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}/\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ при учете приближения второго порядка на внешней границе трубы при $\tilde{r} = b/a + \tilde{\delta} \cos \theta + \tilde{\delta}^2(\cos 2\theta - 1)/(4b/a)$; $\sigma_{\theta\theta}^{***} = \sigma_{\theta\theta}^{(0-3)}/\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ при учете приближения третьего порядка на внешней границе трубы при $\tilde{r} = b/a + \tilde{\delta} \cos \theta + \tilde{\delta}^2(\cos 2\theta - 1)/(4b/a)$ при $\theta = \pi$ (см. рисунок 3.1) для $n = 3,03$ и $n = 10,96$ соответственно, вычисленные с шагом 0,01 по величине $\tilde{\delta}$. В этом сечении минимальная толщина стенки трубы и как следствие – наибольшие напряжения.

Таблица 3.1 — Значения тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ для трубы из углеродистой стали ($n = 3,03$, $A = 9,04 \cdot 10^{-9}$) на внешнем контуре трубы при $\theta = \pi$

$\tilde{\delta}$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1,0	1,04	1,09	1,13	1,17	1,21	1,25	1,29	1,33	1,37	1,40
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1,0	1,04	1,09	1,14	1,19	1,24	1,29	1,35	1,41	1,48	1,54
$\sigma_{\theta\theta}^{***}$	1,0	1,04	1,09	1,14	1,19	1,25	1,30	1,37	1,44	1,52	1,62

Таблица 3.2 — Значения тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ для трубы из сплава ХН73МБТЮ (ЭИ698) ($n = 10,96$, $A = 4,57 \cdot 10^{-33}$) на внешнем контуре трубы при $\theta = \pi$

$\tilde{\delta}$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1,0	1,04	1,09	1,13	1,17	1,22	1,26	1,30	1,34	1,38	1,42
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1,0	1,04	1,10	1,14	1,19	1,24	1,29	1,34	1,40	1,46	1,52
$\sigma_{\theta\theta}^{***}$	1,0	1,04	1,10	1,14	1,19	1,24	1,29	1,34	1,39	1,46	1,50

Аналогично в таблицах 3.3 и 3.4 приведены результаты расчётов на внутреннем контуре трубы в наименьшем сечении при $\theta = \pi$ (см. рисунок 3.1). Здесь представлены значения:

$\sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\theta\theta}^{(0-1)} / \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ при учете приближения первого порядка на внутренней границе трубы при $\tilde{r} = b/a + \tilde{\delta} \cos \theta$; $\sigma_{\theta\theta}^{**} = \sigma_{\theta\theta}^{(0-2)} / \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ при учете приближения второго порядка на внутренней границе трубы при $\tilde{r} = b/a + \tilde{\delta} \cos \theta + \tilde{\delta}^2 (\cos 2\theta - 1) / (4b/a)$; $\sigma_{\theta\theta}^{***} = \sigma_{\theta\theta}^{(0-3)} / \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ при учете приближения третьего порядка на внутренней границе трубы при $\tilde{r} = b/a + \tilde{\delta} \cos \theta + \tilde{\delta}^2 (\cos 2\theta - 1) / (4b/a)$ при $\theta = \pi$ для $n = 3,03$ и $n = 10,96$ соответственно, вычисленные с шагом 0,01 по величине $\tilde{\delta}$.

Несмотря на то, что внутренняя граница несоосной трубы не возмущена, учет последующих (после нулевого) порядков приближения в вычислениях приводит к уточнению тангенциальных напряжений на внутреннем контуре трубы.

Таблица 3.3 — Значения тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ для трубы из углеродистой стали ($n = 3,03, A = 9,04 \cdot 10^{-9}$) на внутреннем контуре трубы при $\theta = \pi$

$\tilde{\delta}$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1,0	1,03	1,07	1,10	1,13	1,17	1,20	1,24	1,27	1,30	1,34
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1,0	1,03	1,07	1,10	1,14	1,18	1,22	1,26	1,31	1,35	1,40
$\sigma_{\theta\theta}^{***}$	1,0	1,03	1,07	1,11	1,14	1,18	1,23	1,28	1,34	1,40	1,46

Таблица 3.4 — Значения тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ для трубы из сплава ХН73МБТЮ (ЭИ698) ($n = 10,96, A = 4,57 \cdot 10^{-33}$) на внутреннем контуре трубы при $\theta = \pi$

$\tilde{\delta}$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1,0	1,04	1,08	1,11	1,15	1,19	1,22	1,26	1,30	1,34	1,42
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1,0	1,04	1,08	1,12	1,17	1,21	1,26	1,31	1,37	1,43	1,52
$\sigma_{\theta\theta}^{***}$	1,0	1,04	1,08	1,12	1,17	1,21	1,25	1,30	1,36	1,42	1,49

В таблицах 3.5–3.8 приведены значения тангенциального напряжения для углеродистой стали и сплава ХН73МБТЮ (ЭИ698) при $\theta = 0$ на внешнем и внутреннем контурах трубы.

Таблица 3.5 — Значения тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ для трубы из углеродистой стали ($n = 3,03, A = 9,04 \cdot 10^{-9}$) на внешнем контуре при $\theta = 0$

$\tilde{\delta}$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1,0	0,96	0,91	0,87	0,82	0,77	0,73	0,68	0,63	0,58	0,53
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1,0	0,96	0,92	0,87	0,83	0,80	0,76	0,72	0,69	0,65	0,62
$\sigma_{\theta\theta}^{***}$	1,0	0,96	0,92	0,87	0,83	0,80	0,75	0,70	0,67	0,64	0,61

Таблица 3.6 — Значения тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ для трубы из сплава ХН73МБТЮ (ЭИ698) ($n = 10,96, A = 4,57 \cdot 10^{-33}$) на внешнем контуре при $\theta = 0$

$\tilde{\delta}$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1,0	0,96	0,91	0,86	0,82	0,77	0,72	0,68	0,63	0,58	0,53
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1,0	0,96	0,91	0,86	0,82	0,78	0,73	0,69	0,64	0,60	0,55
$\sigma_{\theta\theta}^{***}$	1,0	0,96	0,91	0,86	0,82	0,76	0,71	0,65	0,60	0,45	0,28

Таблица 3.7 — Значения тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ для трубы из углеродистой стали ($n = 3,03, A = 9,04 \cdot 10^{-9}$) на внутреннем контуре трубы при $\theta = 0$

$\tilde{\delta}$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1,0	0,97	0,93	0,90	0,87	0,83	0,80	0,76	0,73	0,70	0,66
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1,0	0,97	0,93	0,90	0,87	0,83	0,80	0,77	0,73	0,70	0,66
$\sigma_{\theta\theta}^{***}$	1,0	0,97	0,93	0,90	0,87	0,83	0,80	0,76	0,72	0,69	0,65

Таблица 3.8 — Значения тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ для трубы из сплава ХН73МБТЮ (ЭИ698) ($n = 10,96, A = 4,57 \cdot 10^{-33}$) на внутреннем контуре трубы при $\theta = 0$

$\tilde{\delta}$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1,0	0,96	0,93	0,89	0,85	0,81	0,78	0,74	0,70	0,66	0,63
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1,0	0,96	0,93	0,89	0,87	0,84	0,81	0,79	0,76	0,74	0,72
$\sigma_{\theta\theta}^{***}$	1,0	0,96	0,93	0,90	0,87	0,85	0,83	0,81	0,80	0,77	0,75

3.7. Конечно-элементная дискретная модель для анализа напряжённо-деформированного состояния несоосной трубы

Несмотря на большое число работ по проблеме использования метода малого параметра для построения приближенного аналитического решения (в подавляющем большинстве случаев – в упругой и упругопластической областях), вопросам сходимости и оценки погрешности построенных решений практически не уделяется внимания. Восполнить оценку погрешности решений можно либо

имея точное аналитическое решение хотя бы в частном случае (а для нелинейной теории ползучести это крайне редкий вариант), либо имея численное решение при частных значениях параметров решаемой задачи. Поэтому в данном пункте поставленная задача решается численно и в последующем сравниваются результаты численного решения с результатами построенного приближенного решения в некоторых частных случаях, в частности, в наиболее нагруженных областях при $\theta = \pi$.

Для построения численного решения разработана конечно-элементная модель толстостенной несоосной трубы, находящейся под внутренним давлением, с помощью программного комплекса ANSYS.

Решение выполняется двумя шагами:

- 1) упругое решение;
- 2) решение с учётом свойств ползучести материала за время $1 \cdot 10^3$ ч, поскольку за это время напряженное состояние выходит на стационарный режим, соответствующий стадии установившейся ползучести.

В качестве модельных материалов для толстостенных труб в расчетах используются те же материалы, что и при анализе приближённых аналитических решений: углеродистая сталь [64] и жаропрочный сплав ХН73МБТЮ(ЭИ698) [107]. Модуль упругости E и плотность материала ρ принимаются постоянными для выбранного материала и температуры:

углеродистая сталь: $E = 1,56 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 7630$ кг/м³, $T = 649^\circ\text{C}$;

ХН73МБТЮ (ЭИ698): $E = 1,44 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 7900$ кг/м³, $T = 775^\circ\text{C}$.

В расчетах использовался плоский восьмиузловой элемент PLANE183, пригодный для моделирования плоского деформированного состояния и позволяющий учитывать большие деформации при установившейся ползучести. В силу симметрии задачи конечно-элементная модель строилась для половины несоосной трубы. Количество элементов для половины трубы составляет порядка 24 000. Отсутствующая часть трубы заменена условием симметричности по оси x (см. рисунок 3.2). На рисунке 3.2 представлена схема наложения жестких

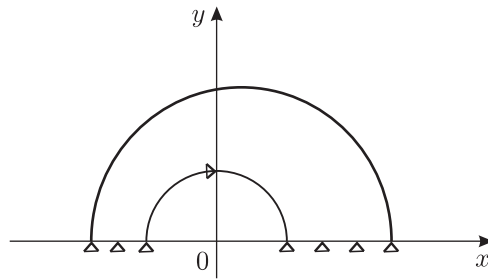


Рисунок 3.2 — Схема наложения жестких связей на несоосную трубу

связей на несоосную трубу, которые обеспечивают выполнение условия симметрии по оси x при моделировании половины трубы, а также отсутствие движения трубы как жесткого целого вдоль оси x .

Для оценки адекватности конечно-элементной модели на предварительном этапе решается задача для осесимметричной трубы, находящейся в условиях установившейся ползучести под внутренним давлением q . Решение задачи в такой постановке соответствует нулевому приближению (2.19) поставленной задачи, аналитическое решение которой хорошо известно [96].

Поскольку экспериментальные данные для показателя нелинейности n и коэффициента A приведены в единицах МПа, ч, произведён перерасчёт плотности материалов с учетом указанных единиц измерений. Для исключения движения трубы как жёсткого целого вдоль оси x запрещена степень свободы по оси x точки, принадлежащей внутреннему радиусу $r = a$ при $\theta = \pi/2$.

3.8. Сравнение результатов приближённого

аналитического и конечно-элементного решений

В настоящем пункте была проведена оценка погрешности приближённого аналитического решения по отношению к конечно-элементному решению задачи для осесимметричной и несоосной трубы до второго порядка приближения включительно (таблицы 3.9 и 3.10) и с учетом третьего порядка приближения (таблицы 3.11 и 3.12) на основе значений радиальных σ_{rr} и тангенциальных $\sigma_{\theta\theta}$ напряжений в 15 равноотстоящих точках по координате r_i :

$a \leq r_i \leq b + \delta \cos \theta + \delta^2(\cos 2\theta - 1)/4b$ ($i = \overline{1, 15}$) при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Вычисление погрешности проведено по двум нормам:

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{15} |\sigma_{\omega\omega_i}^{(0-k)} - \sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}|}{\sum_{i=1}^{15} |\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}|} \cdot 100\% \quad \text{и} \quad \sigma = \left(\frac{\sum_{i=1}^{15} [\sigma_{\omega\omega_i}^{(0-k)} - \sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}]^2}{\sum_{i=1}^{15} [\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}]^2} \right)^{1/2} \cdot 100\%, \quad (3.108)$$

где $\omega = r, \theta$; $k = 2, 3$ – номера порядков приближения; $\sigma_{\omega\omega_i}^{(0-k)} = \sigma_{\omega\omega}^{(0-k)}(r_i, \theta)$, $\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}} = \sigma_{\omega\omega}^{\text{ANS}}(r_i, \theta)$ – расчётные значения для аналитического и численного решений соответственно с учетом приближения второго или третьего порядка.

В таблицах 3.9–3.12 через дробную черту представлены погрешности по двум нормам s/σ в процентах.

Таблица 3.9 — Погрешность решений для труб из углеродистой стали до второго порядка приближения включительно

$\tilde{\delta}$	0	0,02	0,04	0,06	0,08
$\sigma_{rr}(r, 0)$	0,12/0,35	0,21/0,41	0,22/0,42	0,20/0,41	0,28/0,42
$\sigma_{rr}(r, \pi)$	0,12/0,35	0,21/0,41	0,25/0,42	0,27/0,44	0,33/0,51
$\sigma_{\theta\theta}(r, 0)$	0,01/0,02	0,32/0,32	1,31/1,32	2,98/3,05	5,41/5,57
$\sigma_{\theta\theta}(r, \pi)$	0,01/0,02	0,32/0,35	1,24/1,29	2,75/2,80	4,79/4,85

Таблица 3.10 — Погрешность решений для труб из сплава ХН73МБТЮ(ЭИ698) до второго порядка приближения включительно

$\tilde{\delta}$	0	0,02	0,04	0,06	0,08
$\sigma_{rr}(r, 0)$	0,17/0,39	0,18/0,40	0,34/0,44	1,10/1,07	2,89/3,25
$\sigma_{rr}(r, \pi)$	0,17/0,39	0,21/0,40	0,40/0,46	0,55/0,56	3,89/4,12
$\sigma_{\theta\theta}(r, 0)$	0,02/0,06	0,36/0,41	1,81/2,02	6,10/7,05	—
$\sigma_{\theta\theta}(r, \pi)$	0,02/0,06	0,32/0,35	1,23/1,24	2,61/2,62	4,02/4,55

Таблица 3.11 — Погрешность решений для труб из углеродистой стали с учётом третьего порядка приближения

$\tilde{\delta}$	0	0,02	0,04	0,06	0,08
$\sigma_{rr}(r, 0)$	0,12/0,35	0,21/0,40	0,32/0,42	0,68/0,87	1,47/1,37
$\sigma_{rr}(r, \pi)$	0,12/0,35	0,21/0,41	0,29/0,37	1,64/1,83	1,98/1,96
$\sigma_{\theta\theta}(r, 0)$	0,01/0,02	0,32/0,32	1,30/1,49	3,00/3,05	5,30/5,49
$\sigma_{\theta\theta}(r, \pi)$	0,01/0,02	0,32/0,35	1,24/1,29	1,85/2,08	2,42/2,87

Таблица 3.12 — Погрешность решений для труб из сплава ХН73МБТЮ(ЭИ698) с учётом третьего порядка приближения

$\tilde{\delta}$	0	0,02	0,04	0,06	0,08
$\sigma_{rr}(r, 0)$	0,17/0,39	0,18/0,40	0,37/0,45	1,22/1,47	3,05/3,11
$\sigma_{rr}(r, \pi)$	0,17/0,39	0,21/0,40	0,40/0,51	1,45/1,76	4,30/4,87
$\sigma_{\theta\theta}(r, 0)$	0,02/0,06	0,36/0,41	1,17/1,26	3,97/4,39	8,29/10,02
$\sigma_{\theta\theta}(r, \pi)$	0,02/0,06	0,32/0,35	1,22/1,24	2,53/3,04	5,59/5,90

Анализируя данные, представленные в таблицах 3.9–3.12, можно сделать вывод, что использование приближения третьего порядка в расчётах приводит к более точному нахождению тангенциальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ в наиболее узком сечении трубы (при $\theta = \pi$), где напряжения возрастают и могут приводить к превышению допустимых деформаций, также использование приближения третьего порядка в расчётах приводит к увеличению погрешности решения для тангенциальных напряжений при $\theta = 0$, где $\sigma_{\theta\theta}$ уменьшаются. Однако различия в решении при использовании приближения до второго порядка включительно или приближения до третьего порядка включительно для тангенциальных напряжений при любом значении угла θ составляют около 0,5% для $\tilde{\delta} = 4\%$.

Определим степень соответствия малого параметра $\tilde{\delta}$ величине разностенности толстостенной трубы, определённой в ГОСТ. Согласно ГОСТ [18] разностенность труб, т.е. разность наибольшего и наименьшего значений диаметров, измеренных в одном поперечном сечении трубы, «не должны выводить размер труб за предельные отклонения по диаметру и толщине стенки». В соответствии с ГОСТ 8732-78 «Трубы стальные бесшовные горячедеформированные» [18] предельные отклонения по разностенности толстостенных труб составляют не более +10,0%; –12,5% от толщины трубы, для ГОСТ ISO 9329-4-2013 «Трубы стальные бесшовные для работы под давлением» [20] – не более $\pm 12,5\%$ от толщины трубы.

В качестве примера соотношения малого параметра и допустимого предельного отклонения по толщине стенки в соответствии с ГОСТ [18, 20] рассмотрим модельную трубу с внутренней границей радиуса $a = 115$ мм и внешней

границей радиуса $b = 150$ мм, следовательно, толщина стенки трубы $\eta = 35$ мм. Величина разностенности τ определяется как отношение

$$\tau = \frac{\delta}{\eta} \cdot 100\% = \tilde{\delta} \cdot \frac{a}{\eta} \cdot 100\%. \quad (3.109)$$

В таблице 3.13 для модельной трубы представлено соотношение геометрических характеристик: величины малого параметра $\tilde{\delta}$ и разностенности трубы τ .

Таблица 3.13 — Соответствие безразмерной величины малого параметра $\tilde{\delta}$ величине разностенности толстостенной трубы τ .

$\tilde{\delta} \cdot 100, \%$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau, \%$	3,29	6,57	9,86	13,14	16,43	19,71	23,0	26,29

Из данных, представленных в таблице 3.13, следует, что значения $\tilde{\delta}$, превышающие уже 3,8%, являются недопустимыми по ГОСТ. Поэтому для целей практического использования полученного приближенного аналитического решения можно ограничиться значением $\tilde{\delta} = 4\%$. Однако следует отметить, что и для величины малого параметра $\tilde{\delta}$ до 8%, что соответствует приблизительно 26% толщины осесимметричной трубы, наблюдается хорошая согласованность приближенного аналитического решения с численным. Погрешность приближенного аналитического решения по отношению к численному не превышает 10%.

На рисунках 3.3—3.7 представлены графики зависимостей тангенциальной компоненты тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ от величины малого параметра $\tilde{\delta}$ для труб из углеродистой стали ($n = 3,03$) при значении угла $\theta = \pi$, соответствующему максимальным значениям тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$. Верхний индекс у компонент тензора напряжений означает порядок приближения, используемого для оценки величин. Индекс ^(ANS) означает конечно-элементное решение.

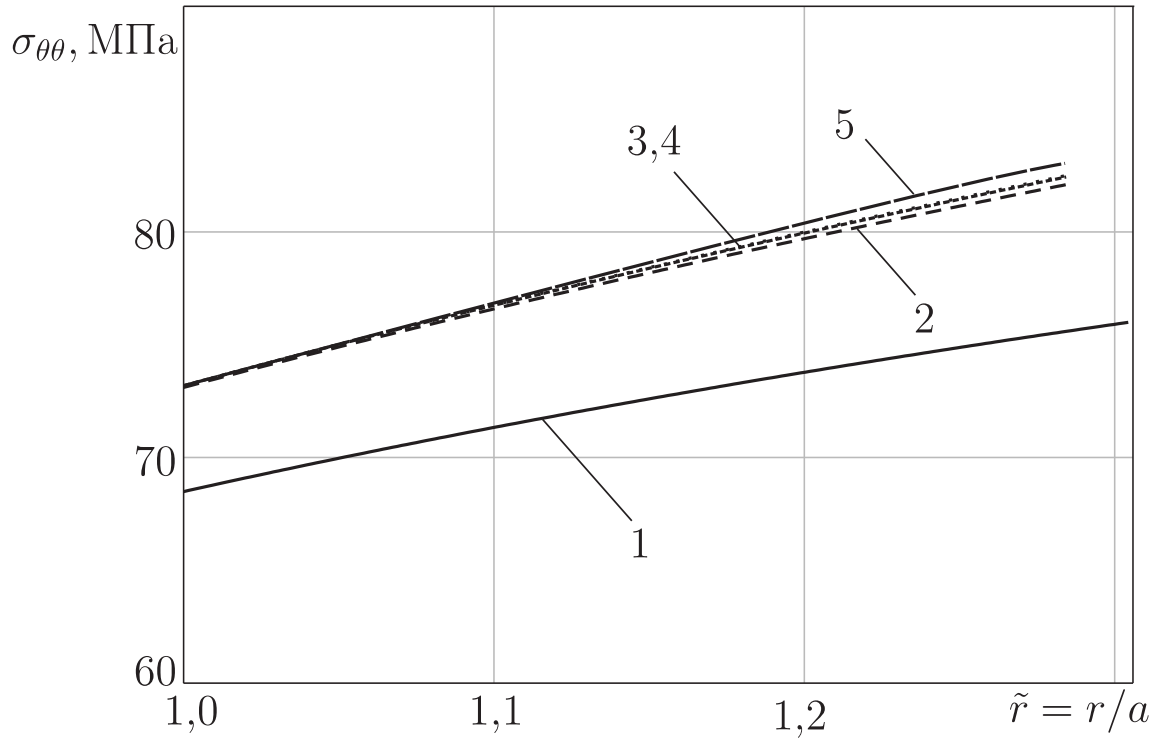


Рисунок 3.3 — Тангенциальные напряжения для труб из углеродистой стали при $\tilde{\delta} = 0,02$, $\theta = \pi$: 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-3)}$, 5 — $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ANS}}$

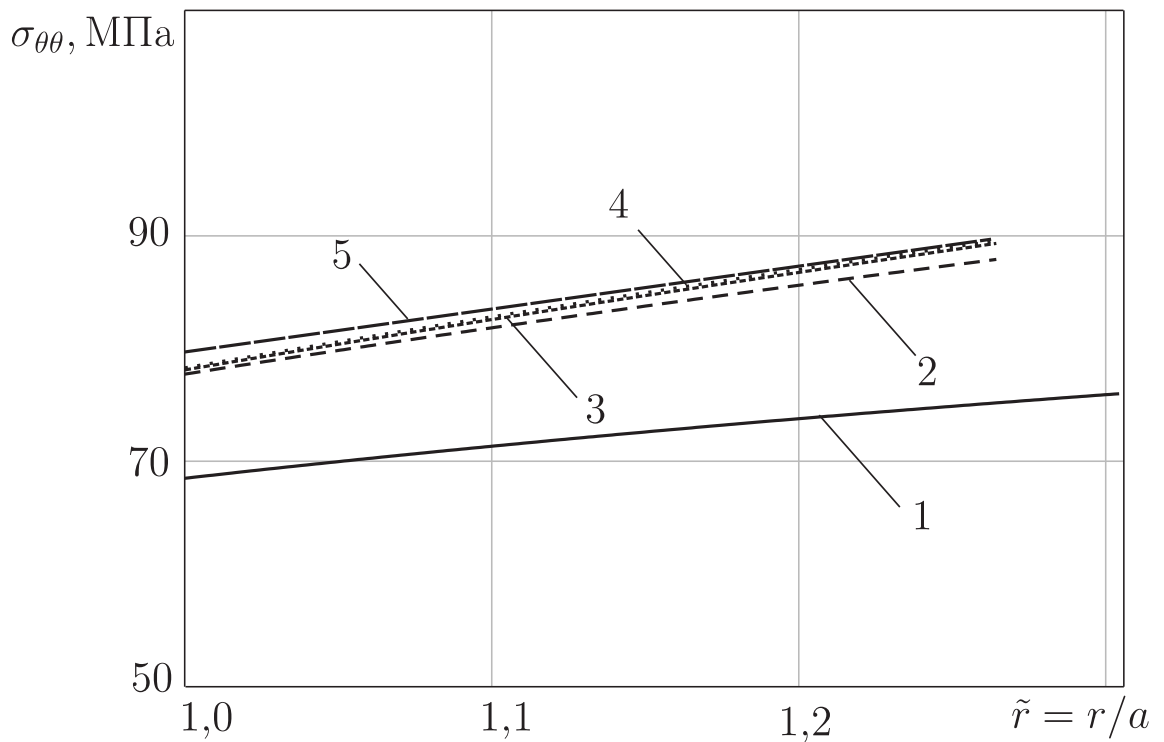


Рисунок 3.4 — Тангенциальные напряжения для труб из углеродистой стали при $\tilde{\delta} = 0,04$, $\theta = \pi$: 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-3)}$, 5 — $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ANS}}$

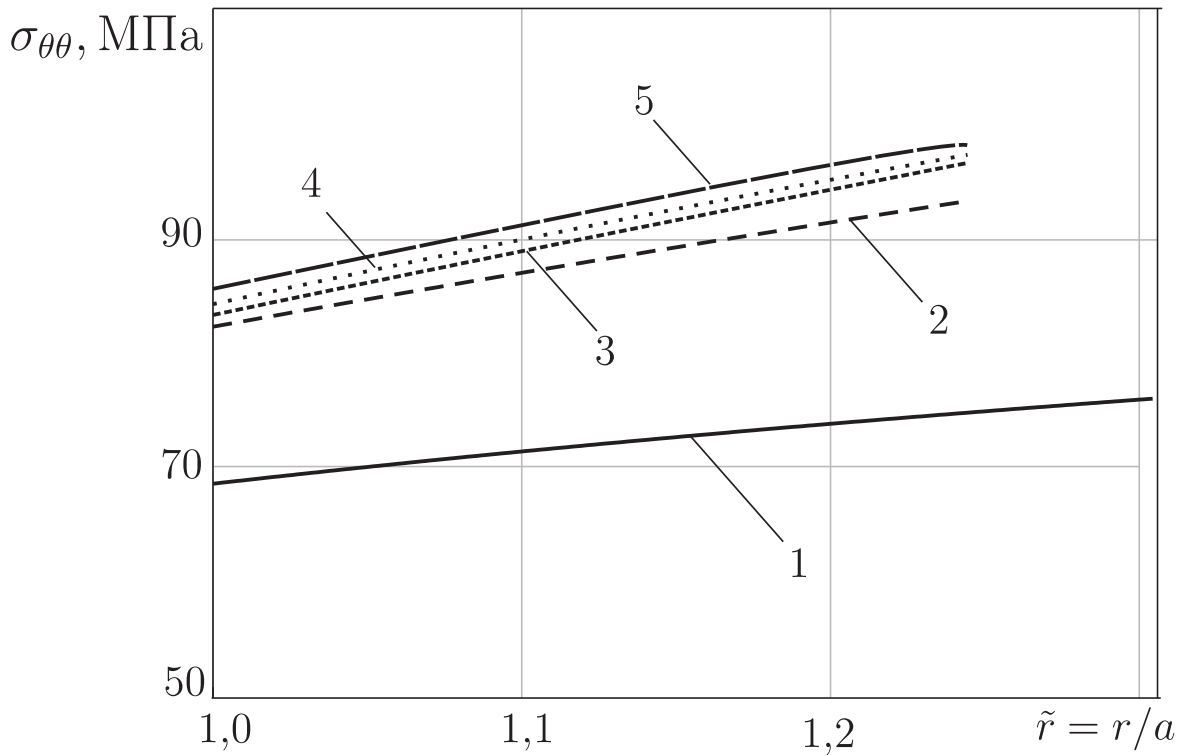


Рисунок 3.5 — Тангенциальные напряжения для труб из углеродистой стали при $\tilde{\delta} = 0,06$, $\theta = \pi$: 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-3)}$, 5 — $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ANS}}$

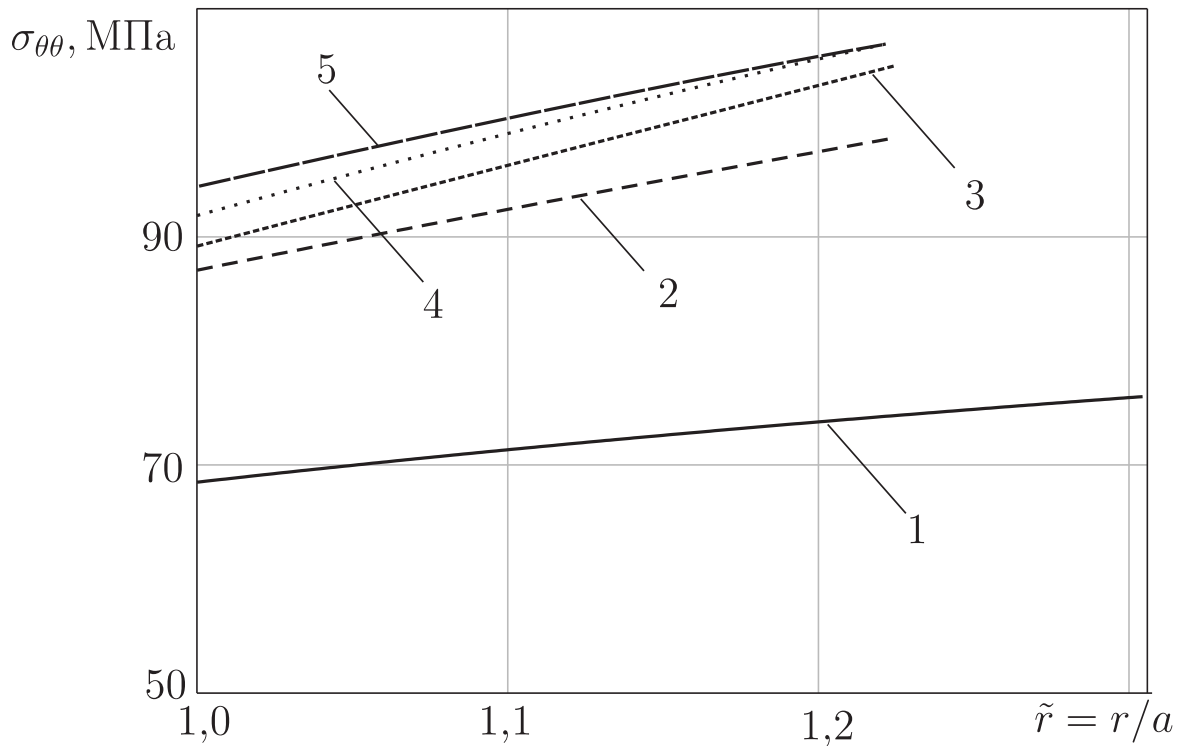


Рисунок 3.6 — Тангенциальные напряжения для труб из углеродистой стали при $\tilde{\delta} = 0,08$, $\theta = \pi$: 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-3)}$, 5 — $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ANS}}$

На рисунках 3.8—3.12 представлены графики зависимостей тангенциальной компоненты тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ от величины малого параметра $\tilde{\delta}$ для

труб из сплава ХН73МБТЮ ($n = 10,96$) при значении угла $\theta = \pi$, соответствующему максимальным значениям тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$. Верхний индекс у компонент тензора напряжений означает порядок приближения, используемого для оценки величин. Индекс ^(ANS) означает конечно-элементное решение.

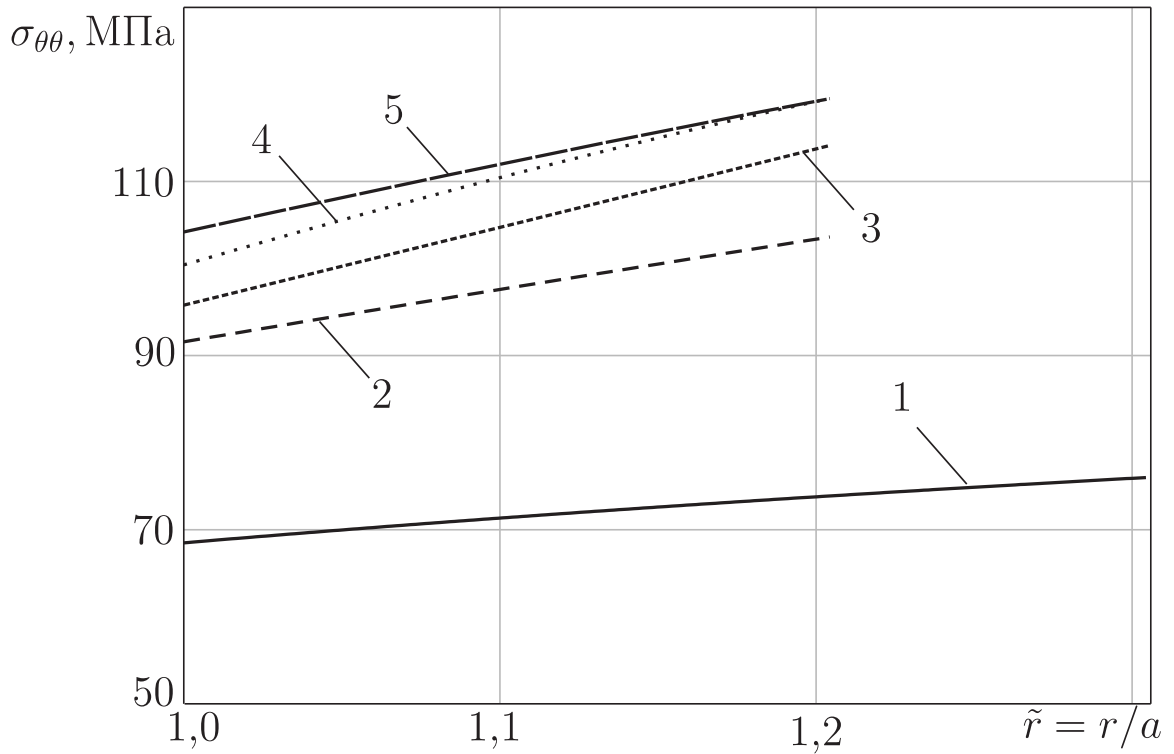


Рисунок 3.7 — Тангенциальные напряжения для труб из углеродистой стали при $\tilde{\delta} = 0,1$, $\theta = \pi$: 1— $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2— $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3— $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4— $\sigma_{\theta\theta}^{(0-3)}$, 5— $\sigma_{\theta\theta}^{ANS}$

На рисунках 3.13—3.14 представлены графики зависимостей радиальной компоненты тензора напряжений σ_{rr} от величины малого параметра $\tilde{\delta}$ для труб из углеродистой стали.

На рисунках 3.15—3.16 представлены графики зависимостей радиальной компоненты тензора напряжений σ_{rr} от величины малого параметра $\tilde{\delta}$ для труб из сплава ХН73МБТЮ. Верхний индекс у компонент тензора напряжений означает порядок приближения, используемого для оценки величин. Индекс ^(ANS) означает конечно-элементное решение.

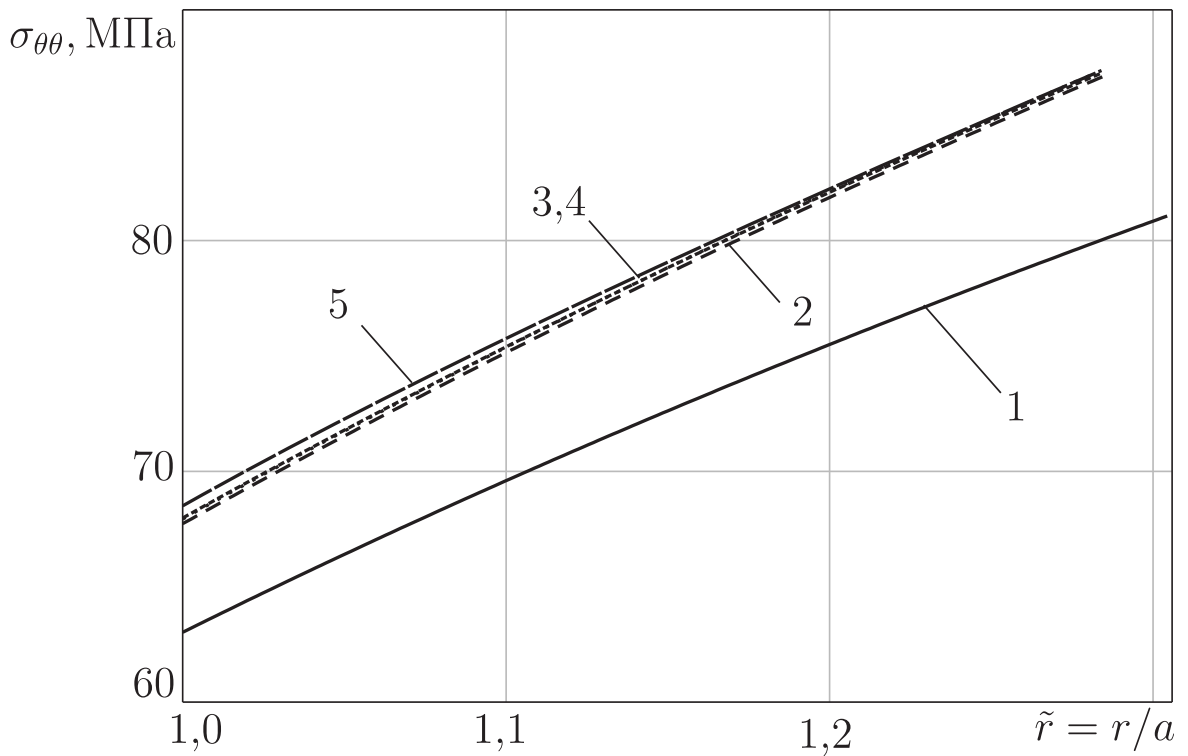


Рисунок 3.8 — Тангенциальные напряжения для труб из сплава ХН73МБТЮ при $\tilde{\delta} = 0,02$, $\theta = \pi$: 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-3)}$, 5 — $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ANS}}$

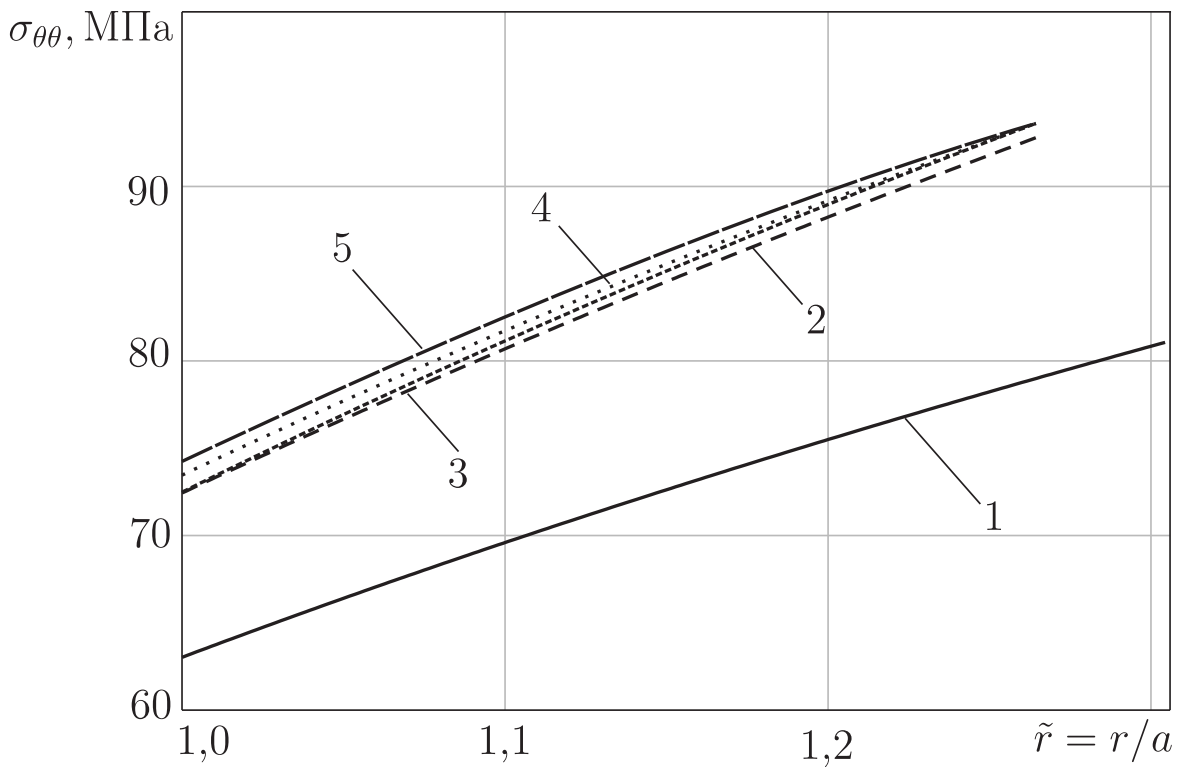


Рисунок 3.9 — Тангенциальные напряжения для труб из сплава ХН73МБТЮ при $\tilde{\delta} = 0,04$, $\theta = \pi$: 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-3)}$, 5 — $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ANS}}$

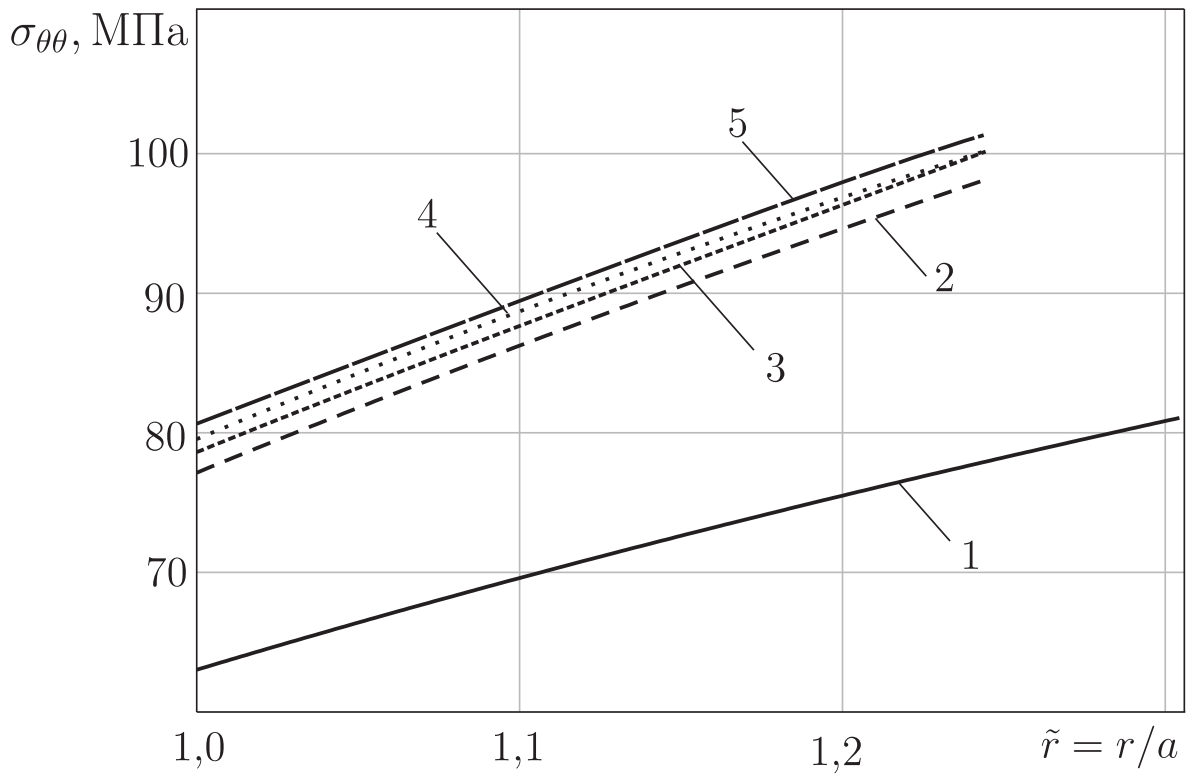


Рисунок 3.10 — Тангенциальные напряжения для труб из сплава ХН73МБТЮ при $\tilde{\delta} = 0,06$, $\theta = \pi$: 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-3)}$, 5 — $\sigma_{\theta\theta}^{ANS}$

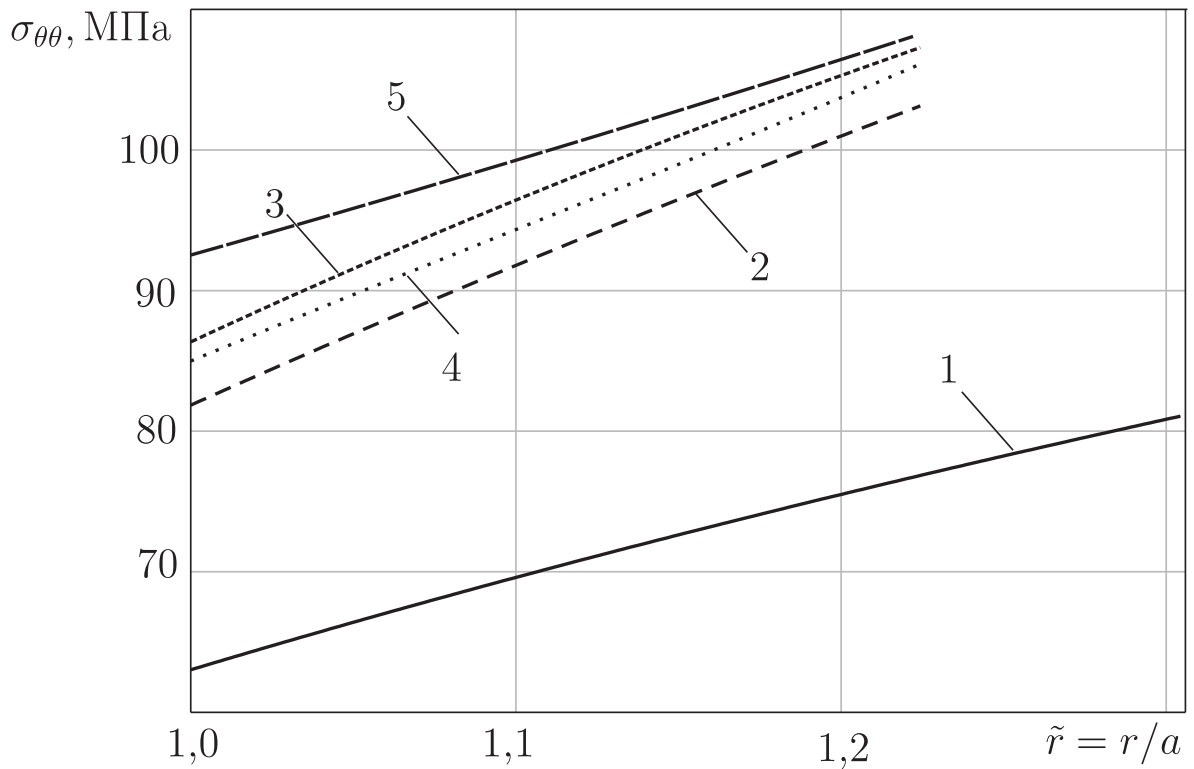


Рисунок 3.11 — Тангенциальные напряжения для труб из сплава ХН73МБТЮ при $\tilde{\delta} = 0,08$, $\theta = \pi$: 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-3)}$, 5 — $\sigma_{\theta\theta}^{ANS}$

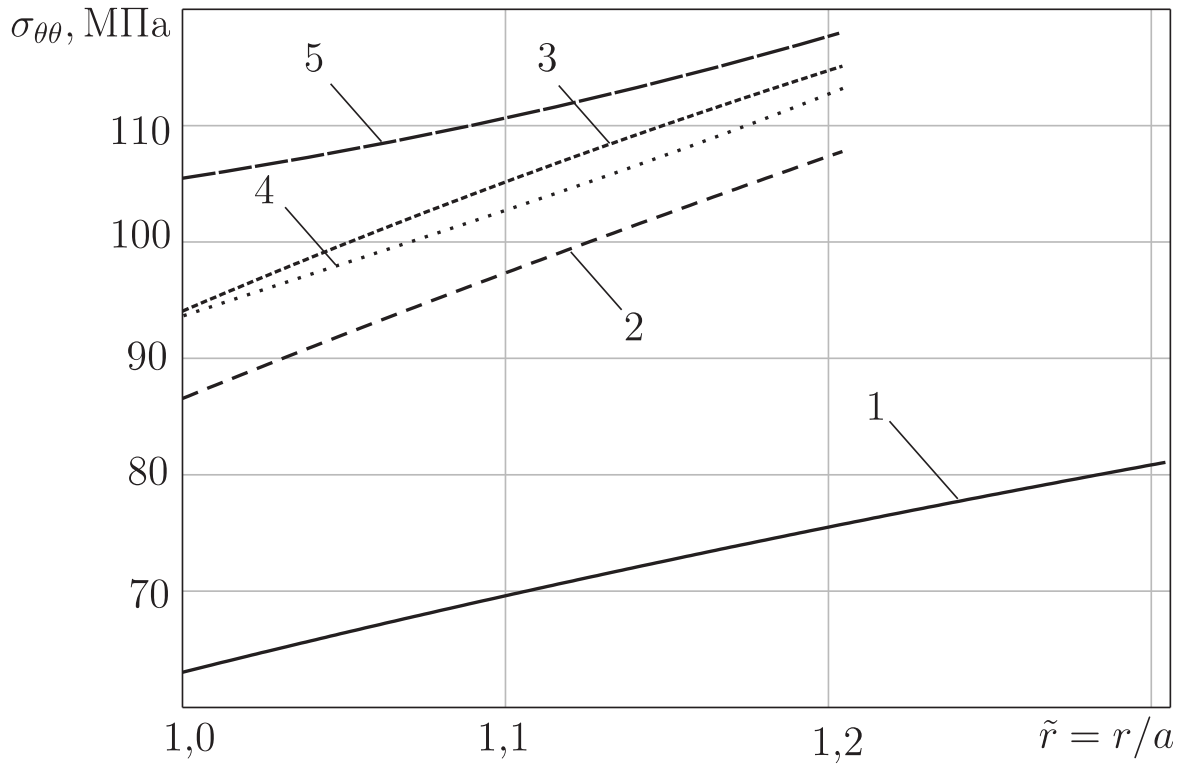


Рисунок 3.12 — Тангенциальные напряжения для труб из сплава ХН73МБТЮ при $\tilde{\delta} = 0,1$, $\theta = \pi$: 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-3)}$, 5 — $\sigma_{\theta\theta}^{ANS}$

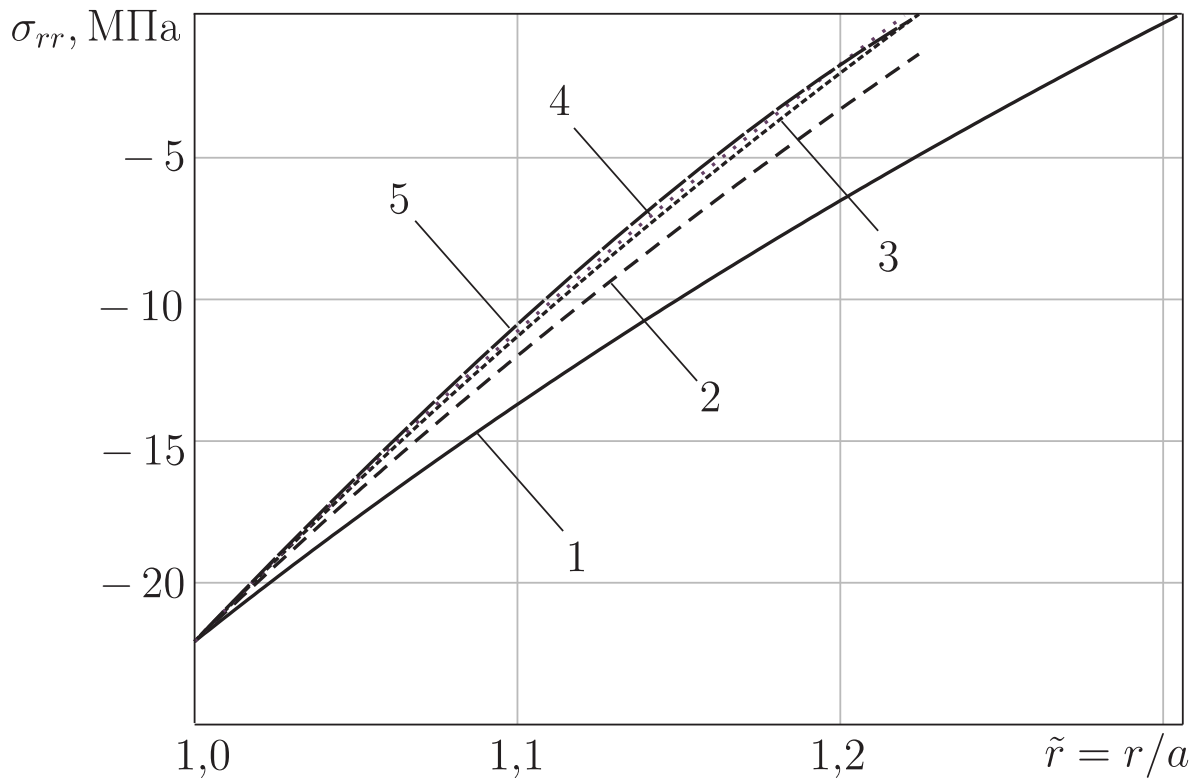


Рисунок 3.13 — Радиальные напряжения для труб из углеродистой стали при $n = 3,03$, $\tilde{\delta} = 0,08$, $\theta = \pi$: 1 — $\sigma_{rr}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{rr}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{rr}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{rr}^{(0-3)}$, 5 — σ_{rr}^{ANS}

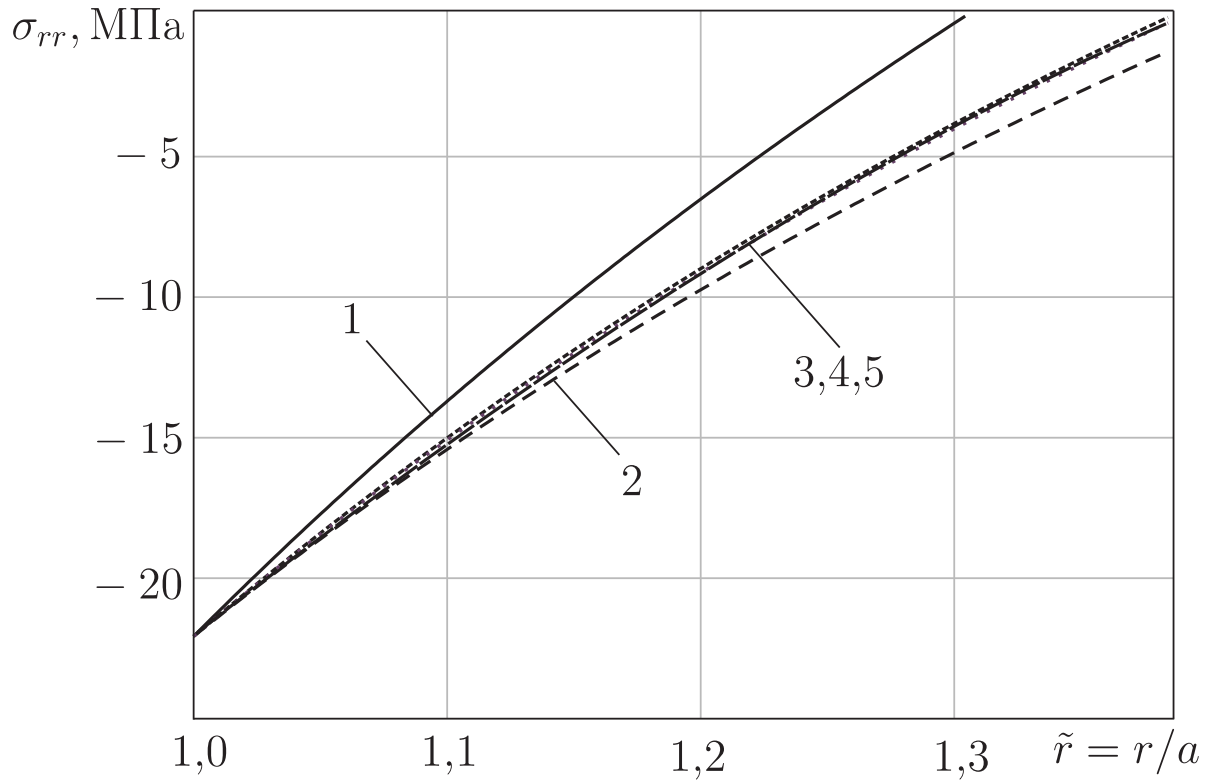


Рисунок 3.14 — Радиальные напряжения для труб из углеродистой стали при $n = 3,03$, $\tilde{\delta} = 0,08$, $\theta = 0$: 1 — $\sigma_{rr}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{rr}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{rr}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{rr}^{(0-3)}$, 5 — σ_{rr}^{ANS}

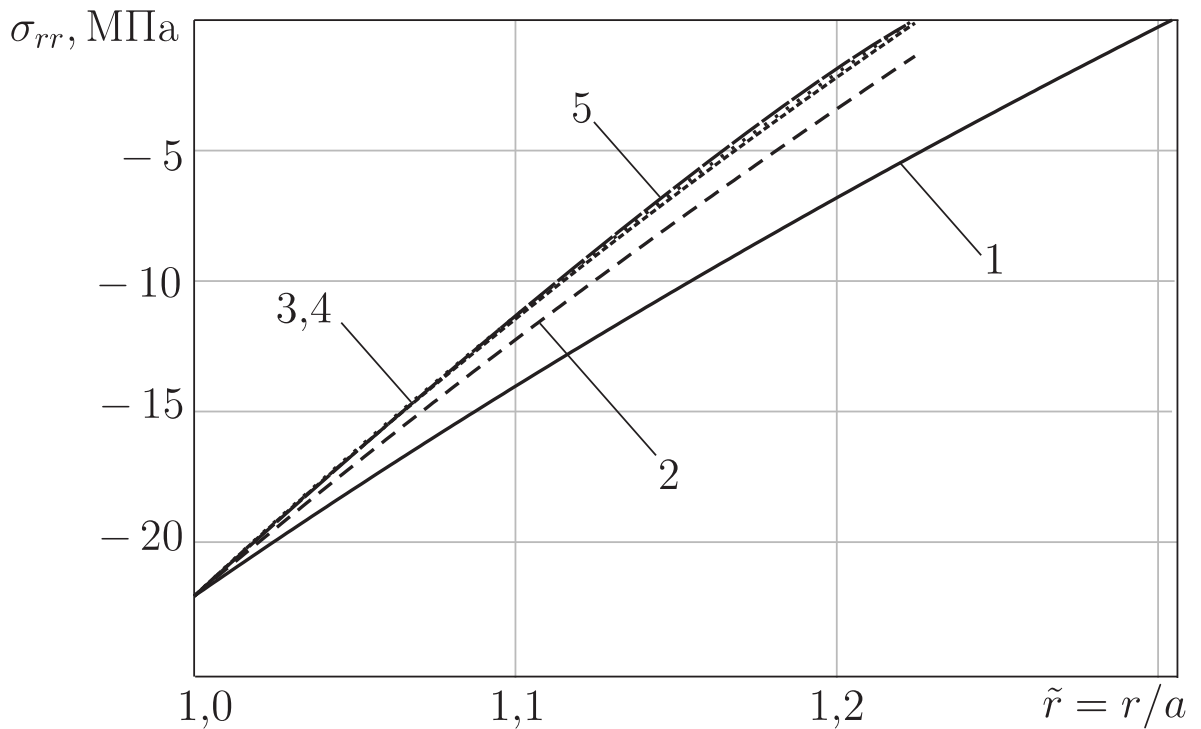


Рисунок 3.15 — Радиальные напряжения для труб из сплава ХН73МБТЮ при $n = 10,96$, $\tilde{\delta} = 0,08$, $\theta = \pi$: 1 — $\sigma_{rr}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{rr}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{rr}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{rr}^{(0-3)}$, 5 — σ_{rr}^{ANS}

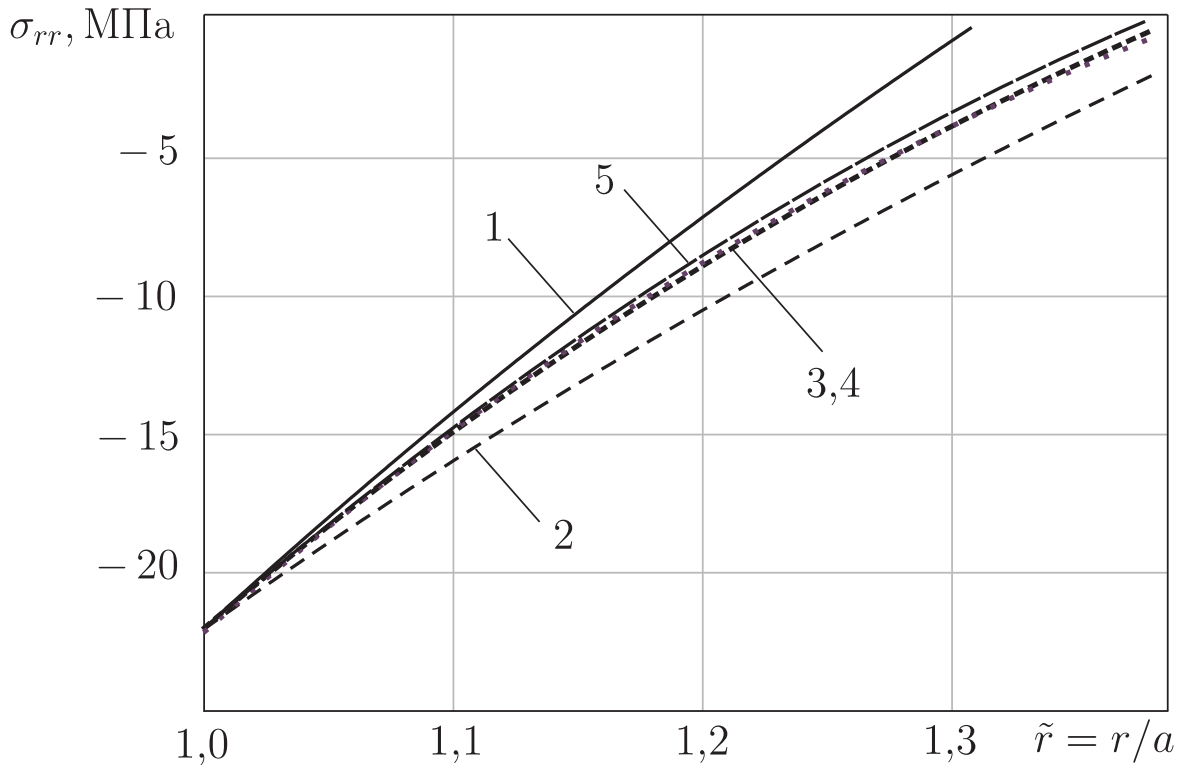


Рисунок 3.16 — Радиальные напряжения для труб из сплава ХН73МБТЮ при $n = 10,96$, $\tilde{\delta} = 0,08$, $\theta = 0$: 1 — $\sigma_{rr}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{rr}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{rr}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{rr}^{(0-3)}$, 5 — σ_{rr}^{ANS}

На рисунках 3.17—3.21 приведены графики зависимостей радиальной компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{rr}$ от величины малого параметра $\tilde{\delta}$ для труб из углеродистой стали и жаропрочного сплава ХН73МБТЮ при значении угла $\theta = \pi$.

Обратимся к рассмотрению касательных напряжений $\sigma_{r\theta}$. Для осесимметричной трубы $\sigma_{r\theta} = 0$, но при наличии несоосности трубы касательные напряжения отличны от нуля. На рисунках 3.22, 3.23 приведены графики $\sigma_{r\theta}$ при величине малого параметра $\tilde{\delta} = 0,04$ для трубы из углеродистой стали при $\theta = 3\pi/4$ (рисунок 3.22), для трубы из сплава ХН73МБТЮ при $\theta = \pi/4$ (рисунок 3.23).

На основании данных, представленных на рисунках 3.22, 3.23, можно сделать вывод, что величина возникающих в результате несоосности толстостенной трубы касательных напряжений $\sigma_{r\theta}$ на два порядка меньше величины тангенциальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$.

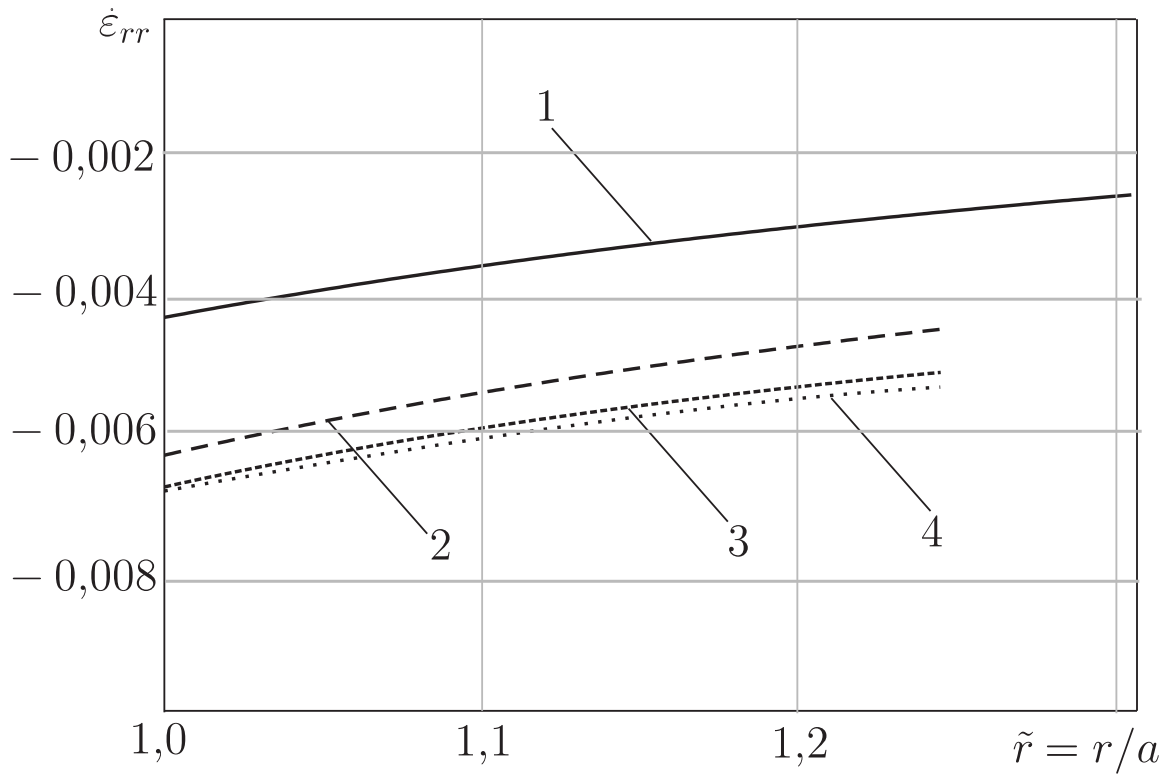


Рисунок 3.17 — Скорость радиальной деформации для труб из углеродистой стали при $n = 3,03$, $\tilde{\delta} = 0,06$, $\theta = \pi$: 1 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0)}$, 2 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-1)}$, 3 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-2)}$, 4 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-3)}$

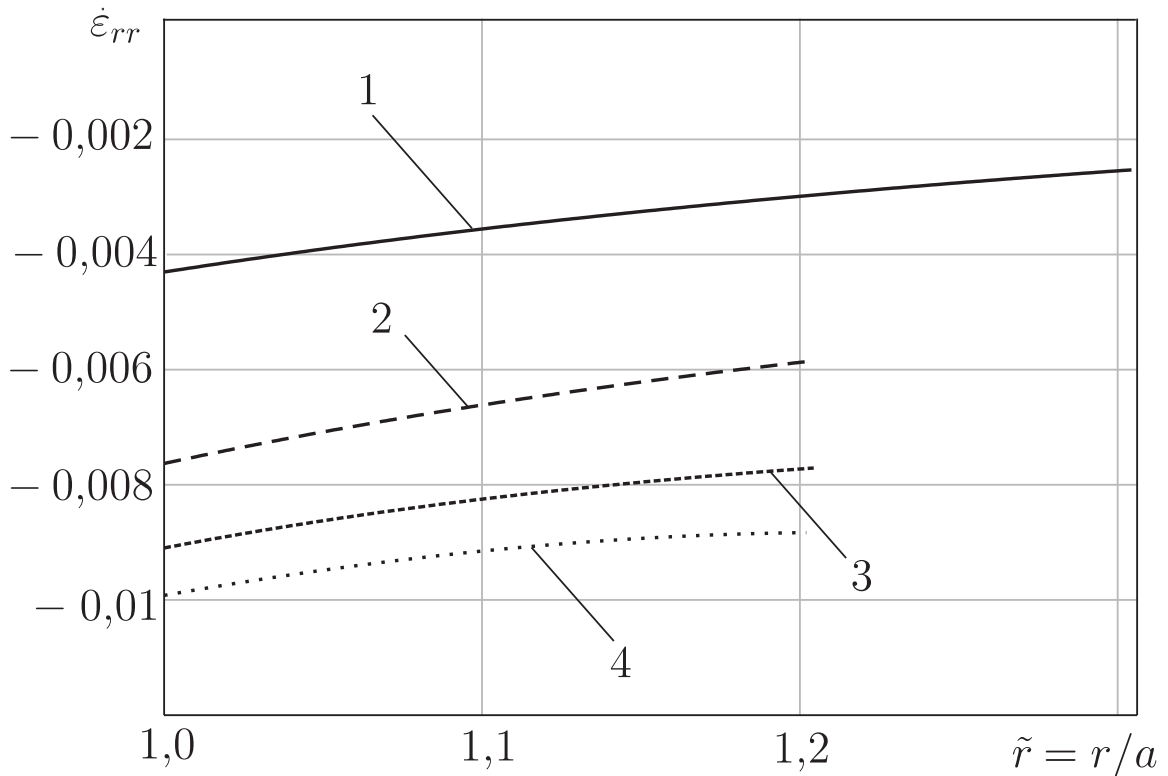


Рисунок 3.18 — Скорость радиальной деформации для труб из углеродистой стали при $n = 3,03$, $\tilde{\delta} = 0,1$, $\theta = \pi$: 1 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0)}$, 2 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-1)}$, 3 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-2)}$, 4 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-3)}$

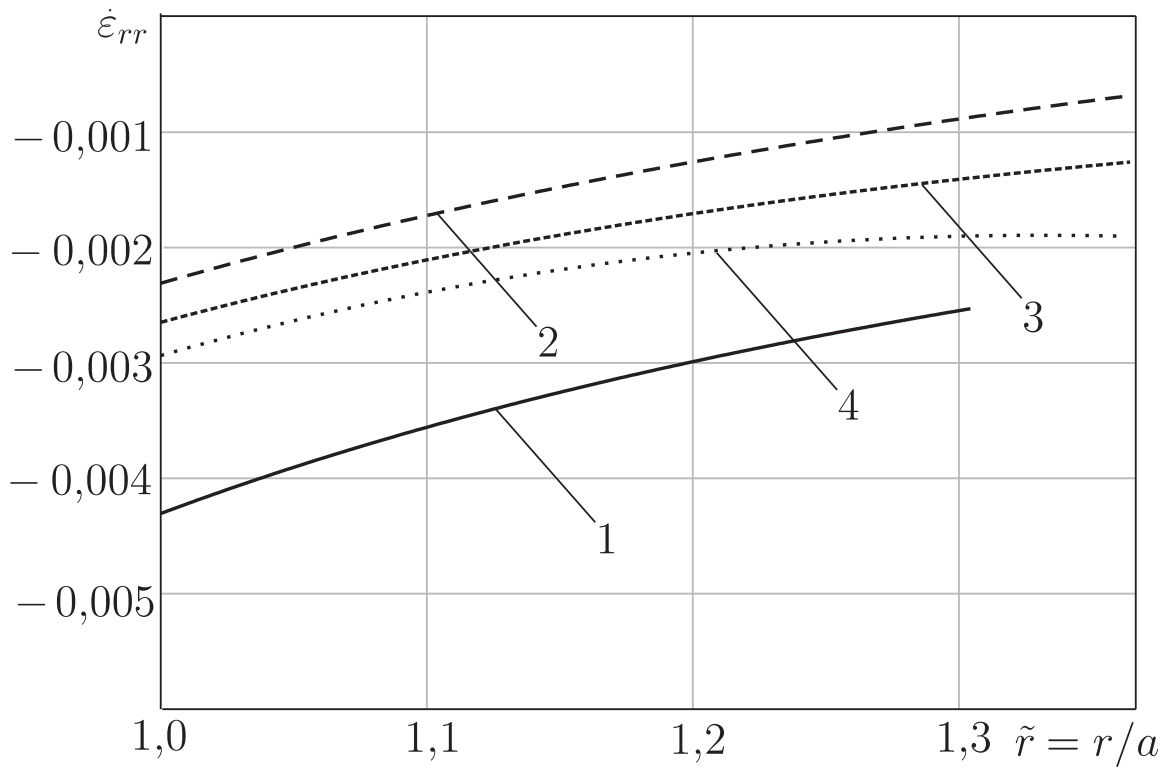


Рисунок 3.19 — Скорость радиальной деформации для труб из углеродистой стали при $n = 3,03$, $\tilde{\delta} = 0,06$, $\theta = 0$: 1 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0)}$, 2 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-1)}$, 3 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-2)}$, 4 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-3)}$

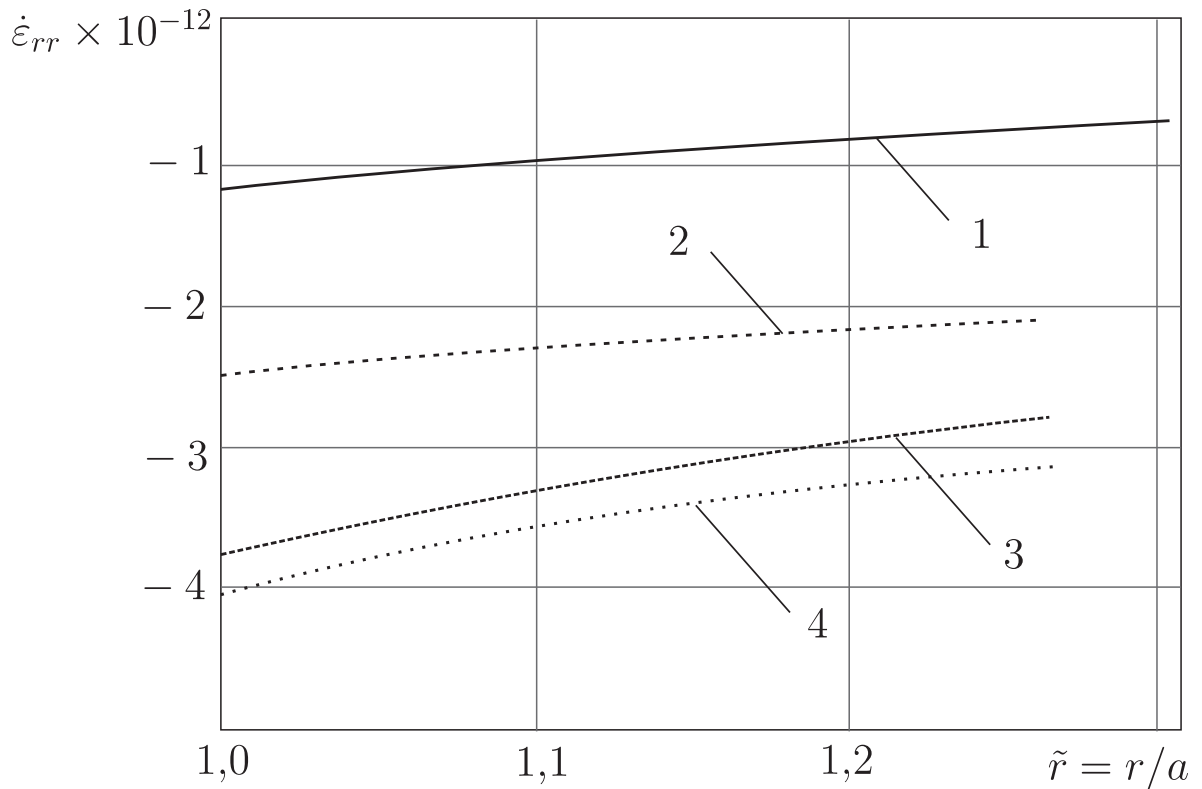


Рисунок 3.20 — Скорость радиальной деформации для труб из сплава ХН73МБТЮ при $n = 10,96$, $\tilde{\delta} = 0,04$, $\theta = \pi$: 1 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0)}$, 2 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-1)}$, 3 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-2)}$, 4 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-3)}$

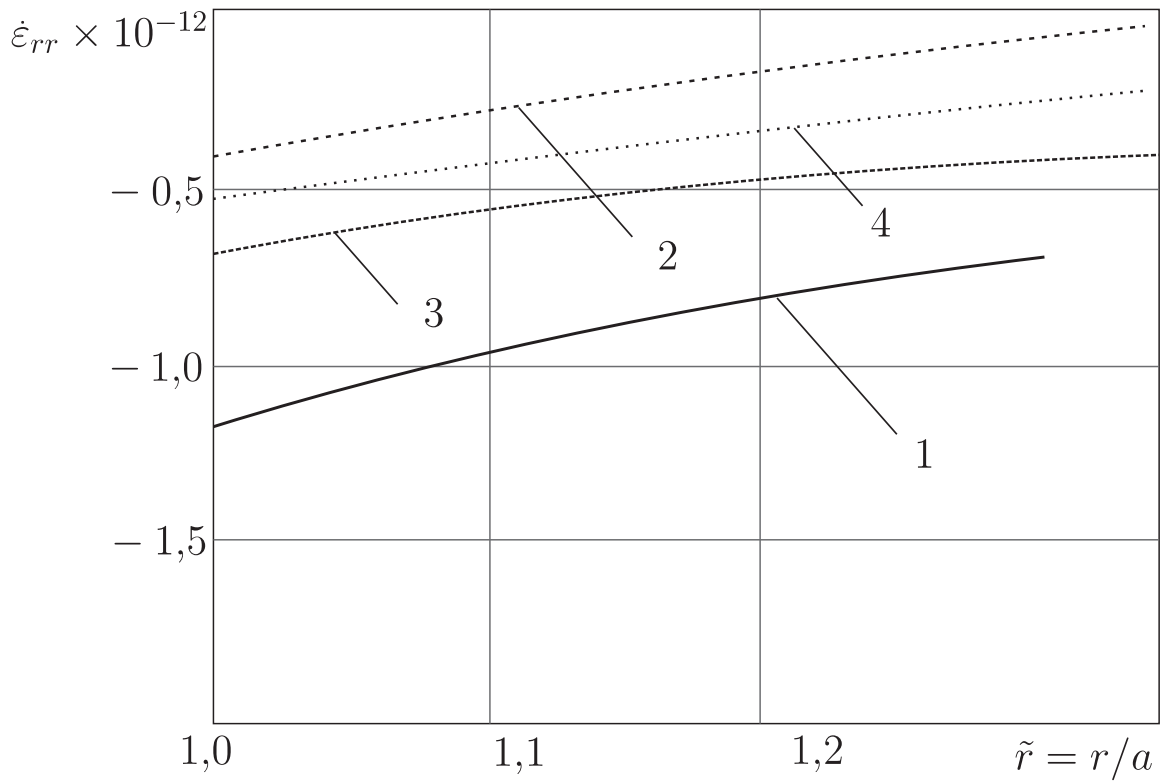


Рисунок 3.21 — Скорость радиальной деформации для труб из сплава ХН73МБТЮ при $n = 10,96$, $\tilde{\delta} = 0,04$, $\theta = 0$: 1 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0)}$, 2 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-1)}$, 3 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-2)}$, 4 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-3)}$

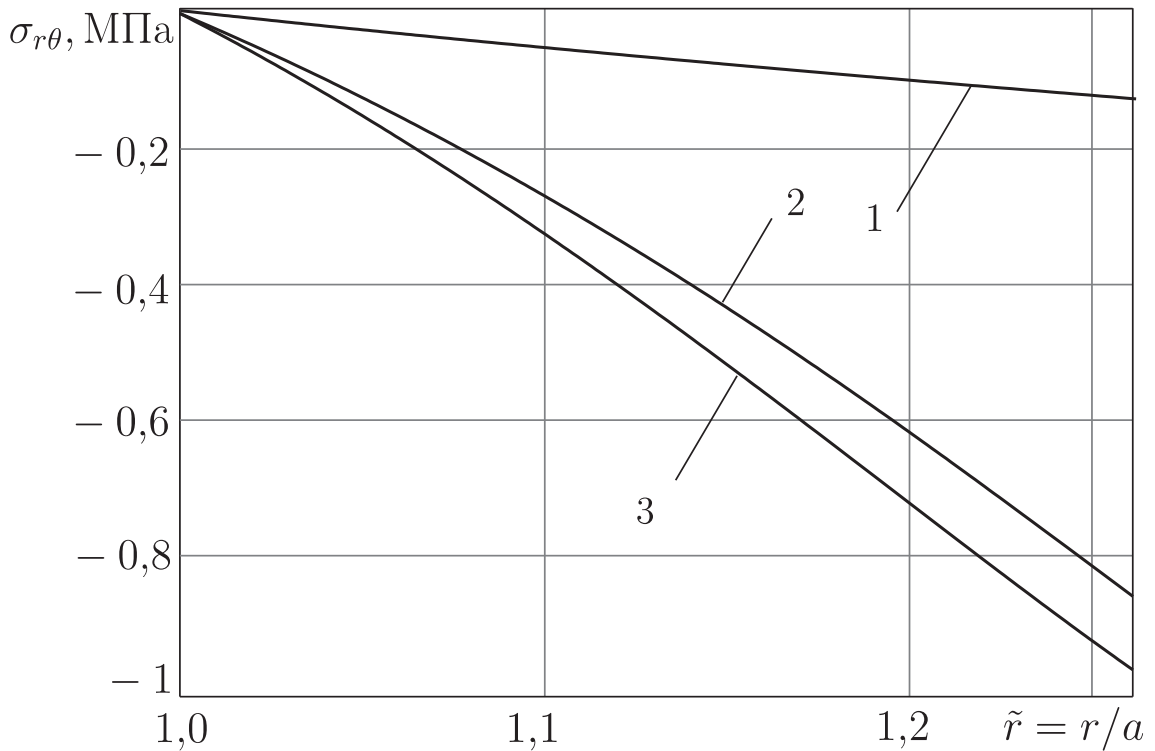


Рисунок 3.22 — Касательные напряжения для труб из углеродистой стали при $n = 3,03$, $\tilde{\delta} = 0,04$, $\theta = 3\pi/4$: 1 — $\sigma_{r\theta}^{(1)}$, 2 — $\sigma_{r\theta}^{(1-2)}$, 3 — $\sigma_{r\theta}^{(1-3)}$

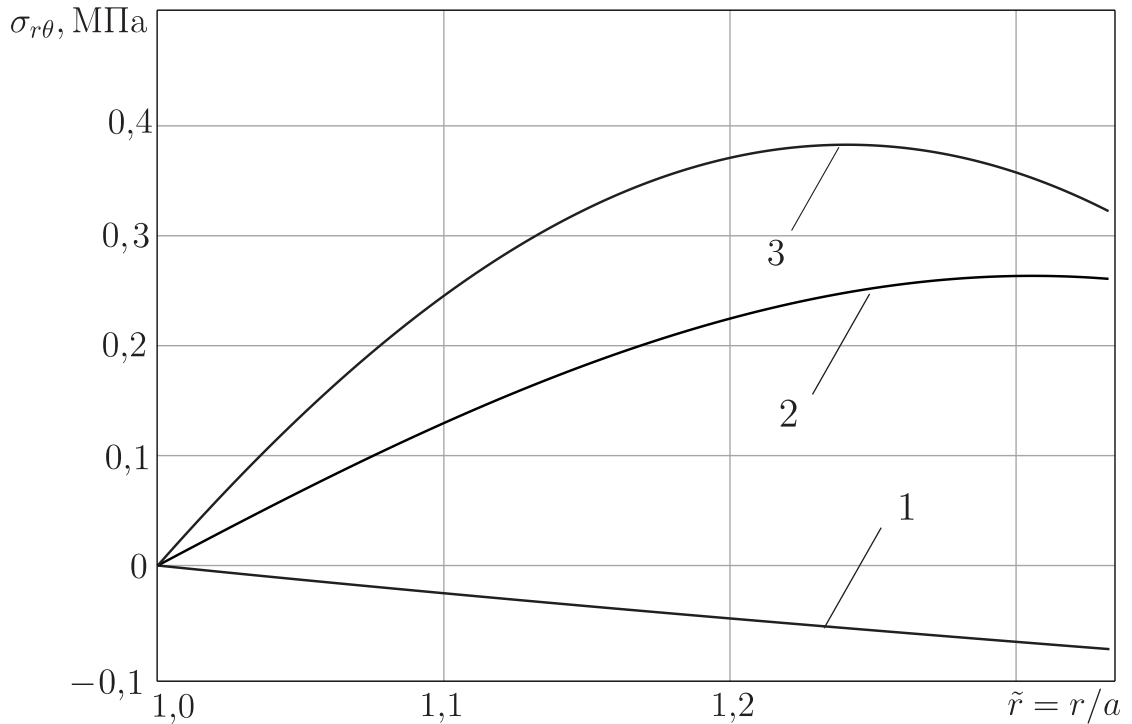


Рисунок 3.23 — Касательные напряжения для труб из сплава ХН73МБТЮ при $n = 10,96$, $\tilde{\delta} = 0,04$, $\theta = \pi/4$: 1 — $\sigma_{r\theta}^{(1)}$, 2 — $\sigma_{r\theta}^{(1-2)}$, 3 — $\sigma_{r\theta}^{(1-3)}$

3.9. Сравнение результатов приближённого аналитического решения и решения с помощью метода, применяемого в инженерных расчётах

В инженерной практике применяется метод, в основе которого лежит использование в расчетах толщины самого тонкого места трубы [34], данная толщина принимается постоянной. Для этой методики используется нулевое приближение (2.19) решения задачи о толстостенной трубе, находящейся под внутренним давлением, где за толщину стенки принимается $\eta = a - b - \delta$ (см. рисунок 3.24), что соответствует толщине несоосной трубы при $\theta = \pi$.

В таблицах 3.14, 3.15 приведены значения тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ в МПа на внешнем контуре трубы при $\theta \in (0, \pi)$, полученные с помощью приближенного аналитического решения до третьего порядка приближения включительно, в правом столбце показано тангенциальное напряжение $\sigma_{\theta\theta}^{(0-\delta)}$, рассчитанное при постоянной толщине трубы, где в качестве толщины принимается

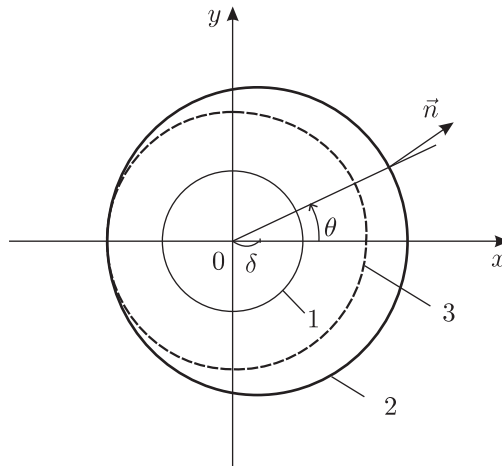


Рисунок 3.24 — Схема несоосной трубы: 1 — внутренний контур трубы $r = a$; 2 — внешний контур трубы; 3 — внешний контур трубы для инженерных расчетов $r = b - \delta$.

толщина трубы при нулевом приближении, из которой вычитается величина δ .

Таблица 3.14 — Сравнение решений для тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (МПа) для труб из углеродистой стали на внешнем контуре

$\tilde{\delta} \setminus \theta$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$\sigma_{\theta\theta}^{(0-\delta)}$
0,02	69,9	71,5	75,7	80,7	82,5	81,1
0,04	64,1	66,9	74,7	84,5	89,6	87,0
0,06	58,6	62,0	73,0	88,7	97,5	93,8
0,08	53,3	57,2	70,7	92,4	107,1	101,2
0,10	46,4	51,3	67,7	96,5	119,5	110,7

Таблица 3.15 — Сравнение решений для тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (МПа) для труб из сплава ЭИ698 на внешнем контуре

$\tilde{\delta} \setminus \theta$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$\sigma_{\theta\theta}^{(0-\delta)}$
0,02	74,9	76,5	80,9	85,4	87,3	86,2
0,04	67,5	71,6	80,4	89,7	93,7	92,1
0,06	58,4	66,1	79,6	94,6	100,4	97,9
0,08	56,1	60,2	78,4	97,9	107,3	103,0

Данные, приведенные в таблицах 3.14, 3.15, показывают, что приближённое аналитическое решение в отличие от инженерного подхода обеспечивает уточнение расчетов в самом опасном месте сечения трубы до 7%, а в утолщённом сечении при $\theta = 0$ различия в решении достигают 58%.

Отмеченные отличия в решении на основании приближённого аналитического решения и на основании инженерного подхода можно объяснить тем, что в первом случае мы имеем концентрацию напряжений при $\theta = \pi$, хотя и незначительную, а во втором случае – однородное напряжённое состояние при толщине стенки, такой же как в минимальном сечении несоосной трубы.

3.10. Выводы по главе 3

- Построено приближённое аналитическое решение нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной несоосной трубы, находящейся под внутренним давлением, методом малого параметра до приближения третьего порядка включительно.
- Показано, что при $\tilde{\delta} \leq 4\%$ использование приближения третьего порядка вносит уточнение ко второму порядку приближения не более $0,5\%$ при $n = 3,03$ и $n = 10,96$, а при $\tilde{\delta} = 10\%$ уточнение составляет менее 8% при $n = 3,03$ и 5% при $n = 10,96$ в наиболее опасном сечении толстостенной трубы.
- Разработана конечно-элементная модель толстостенной несоосной трубы и получено численное решение задачи для анализируемых частных случаев.
- На основе сравнения приближённого аналитического и конечно-элементного решений проведено исследование погрешности приближённого аналитического решения.
- Анализ погрешности решения показывает, что для практического применения приближённого аналитического решения задачи о толстостенной несоосной трубе использование третьего порядка приближения не представляется целесообразным, поскольку погрешность между приближённым

ным аналитическим решением до приближения второго порядка включительно и до приближения третьего порядка включительно при $\tilde{\delta} = 0,04$ не превышает 0,5% по сравнению с конечно-элементным решением.

- Показана зависимость изменения тангенциальных и радиальных напряжений с возрастанием величины малого параметра δ и с возрастанием показателя нелинейности материала n .
- Показано, что при $\tilde{\delta} \leq 4\%$ использование приближения третьего порядка вносит уточнение ко второму порядку приближения не более 0,5% при $n = 3,03$ и $n = 10,96$, а при $\tilde{\delta} = 10\%$ уточнение составляет менее 8% при $n = 3,03$ и 5% при $n = 10,96$ в наиболее опасном сечении толстостенной трубы.
- Проведен сравнительный анализ приближённого аналитического решения с решением на основе метода, применяемого в инженерных расчётах. Показано, что приближённое аналитическое решение обеспечивает уточнение инженерных расчётов в опасном сечении трубы до 7%, а в утолщённом сечении при $\theta = 0$ различия в решениях достигают 58%.

Решение задачи установившейся ползучести толстостенной трубы с эллиптически возмущённой внешней границей

Одним из видов возмущений внешней границы толстостенной трубы может являться эллиптическое возмущение. При слабоэллиптической форме внешней границы в напряженно-деформированном состоянии толстостенной трубы наблюдаются процессы, отличные от рассмотренных в главе 3. Можно предположить, что наиболее напряженное место трубы будет расположено на вертикальной оси симметрии эллипса (см. рисунок 4.1). Целью данной главы является определение полей напряжений и деформаций в толстостенной трубе с эллиптической внешней границей под действием внутреннего давления при установившейся ползучести.

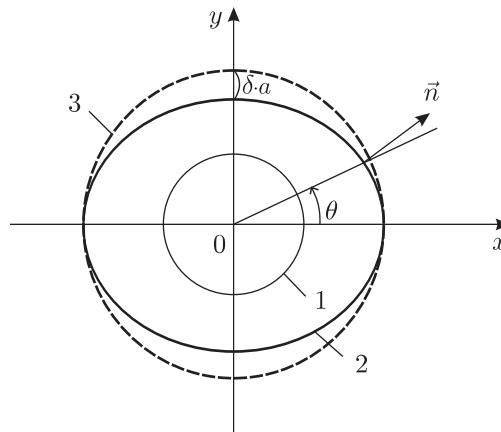


Рисунок 4.1 — Схема трубы с эллиптически возмущённой внешней границей: 1 — внутренний контур трубы $r = h$; 2 — внешний эллиптический контур трубы; 3 — внешний контур трубы $r = a$ для осесимметричного случая

В данной главе решаются следующие задачи:

- разработка метода построения приближённого аналитического решения для толстостенной трубы с эллиптически возмущённой внешней границей в условиях нелинейной установившейся ползучести на основе метода

малого параметра;

- проверка адекватности приближённого аналитического решения по отношению к численному решению;
- оценка сходимости и погрешности построенного приближённого аналитического решения по отношению к численному решению методом конечных элементов.

Изложение результатов данной главы выполнено в соответствии с работами автора настоящего диссертационного исследования [71, 103].

4.1. Постановка задачи

При получении приближенного аналитического решения задачи установившейся ползучести о толстостенной трубе с внутренним контуром в виде окружности радиуса $r = h$, внешним эллиптическим контуром с большой полуосью $r = a$ и малой полуосью $r = b$ под действием внутреннего давления q вводятся следующие допущения:

- 1) реализуется плоское деформированное состояние в трубе:

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = 0; \quad (4.1)$$

- 2) выполняется гипотеза о несжимаемости материала для скоростей деформаций установившейся ползучести, что находит экспериментальное подтверждение [77, 95]:

$$\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = 0; \quad (4.2)$$

- 3) выполняется предположение о малости упругих деформаций по сравнению с деформациями ползучести, и, как следствие, исключение из рассмотрения деформации ползучести, вызванной перераспределением напряжений в результате их кинетики от упругого состояния до состояния установившейся

ползучести; с физической точки зрения это означает рассмотрение установившихся полей напряжений и скоростей деформаций ползучести.

Эллиптичность внешнего контура характеризуется эксцентриситетом:

$$e = \sqrt{1 - b^2/a^2}.$$

Принимая центр эллипса за полюс, уравнение эллиптического внешнего контура трубы в полярных координатах имеет вид:

$$r = b/\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}. \quad (4.3)$$

В качестве малого параметра принимается величина сжатия окружности радиуса $r = a$ к эллипсу по оси ординат:

$$\delta = (a - b)/a = 1 - \sqrt{1 - e^2}, \quad (4.4)$$

причем $\delta \ll 1$. Выражаем эксцентриситет из последнего соотношения

$$e = \sqrt{2\delta - \delta^2}$$

и используем полученную величину e в соотношении (4.3):

$$r = a(1 - \delta)/\sqrt{1 + (\delta^2 - 2\delta) \cos^2 \theta}. \quad (4.5)$$

Раскладываем уравнение для эллиптического контура (4.5) в степенной ряд по малому параметру, ограничиваясь членами второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} r = a(1 - \delta) \left[1 - \frac{1}{2}(\delta^2 - 2\delta) \cos^2 \theta + \frac{3}{8}(\delta^2 - 2\delta)^2 \cos^4 \theta \right] &= a \left[1 + (\cos^2 \theta - 1)\delta + \right. \\ &\left. + \frac{3}{2}(\cos^4 \theta - \cos^2 \theta)\delta^2 \right] = a + \frac{a}{2}(\cos 2\theta - 1)\delta + \frac{3a}{16}(\cos 4\theta - 1)\delta^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Разложение тензора напряжений σ_{ij} , тензора скоростей деформаций ползучести $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и вектора скоростей перемещений \dot{u}_i по малому параметру до членов второго порядка определяется в соответствии с (2.1).

Постановка задачи включает в себя уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{rr}^{(k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{r}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial \theta} = -r \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} - 2\sigma_{r\theta}^{(k)}, \quad (4.8)$$

которые выполняются для каждого приближения ввиду их линейности относительно компонент напряжений, $k = 1, 2$ – номера приближений.

Также для каждого приближения выполняются соотношения типа Коши-Эйлера:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(k)} &= \frac{\partial \dot{u}_r^{(k)}}{\partial r}, \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(k)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_\theta^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\dot{u}_r^{(k)}}{r}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(k)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_r^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{u}_\theta^{(k)}}{\partial r} - \frac{\dot{u}_\theta^{(k)}}{r} \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$k = 1, 2$ – номера приближений.

В качестве определяющих используются соотношения теории установившейся ползучести со степенным законом:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} A \sigma_e^{n-1} S_{ij}, \quad (4.10)$$

где n, A – постоянные характеристики нелинейного поведения материала, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ – девиатор напряжений, σ_e – интенсивность напряжений для случая плоской деформации

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (4\sigma_{r\theta})^2 \right]^{1/2}.$$

Учитывая разложение (2.26), определяющие соотношения для первого прибли-

жения представимы в виде:

$$\Delta\sigma^{(1)} = \frac{4}{nLr^s}\dot{\varepsilon}_{rr}^{(1)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{Lr^s}\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)}; \quad (4.11)$$

соотношения для второго приближения:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(2)} = -\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(2)} &= \frac{1}{4}Lr^s \left[n\Delta\sigma^{(2)} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n[\Delta\sigma^{(1)}]^2 + 4[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{\Delta\sigma^{(0)}} \right], \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} &= Lr^s \left[\sigma_{r\theta}^{(2)} + \frac{(n-1)\Delta\sigma^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(1)}}{\Delta\sigma^{(0)}} \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Постановка задачи о трубе с эллиптически возмущенной внешней границей соответствует условиям более общей задачи о толстостенной трубе с возмущенной внешней границей, рассмотренной в главе 2. При построении решения для трубы с эллиптическим внешним контуром можно воспользоваться полученными во второй главе результатами, а также использовать решение для нулевого приближения (классическое решение для толстостенной трубы с невозмущенными границами) в напряжениях (2.19), где невозмущенным внешним контуром является радиус $r = a$, внутренним — радиус $r = h$:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} &= Q \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^p \right], & \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= Q \left[1 - (1-p) \left(\frac{a}{r} \right)^p \right], \\ \sigma_{zz}^{(0)} &= Q \left[1 - (1+p) \left(\frac{a}{r} \right)^p \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Здесь $Q = \frac{q}{(a/h)^p - 1}$, $p = 2/n$.

Обратимся к рассмотрению граничных условий. Разложение внешнего контура (4.6) в степенной ряд позволяет определить коэффициенты в общем уравнении возмущенной границы (2.33), учитывая обозначение (2.34):

$$\begin{aligned} r_0 &= a, & r_1 &= \frac{a}{2}(\cos 2\theta - 1), & r_2 &= \frac{3a}{16}(\cos 4\theta - 1), & S_1 &= r_1/r_0 = \frac{1}{2}(\cos 2\theta - 1), \\ S_2 &= r_2/r_0 = \frac{3}{16}(\cos 4\theta - 1), & \dot{S}_1 &= -\sin 2\theta, & \dot{S}_2 &= -\frac{3}{4}\sin 4\theta. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Тогда граничные условия на внешнем эллиптически возмущённом контуре при $r = a$ для первого приближения рассматриваемой задачи с использованием (4.11) принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=a} &= -\frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} r_1 = -\frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} \cdot \frac{a}{2} (\cos 2\theta - 1) = \frac{Qp}{2} - \frac{Qp}{2} \cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=a} &= -\Delta\sigma^{(0)} \dot{S}_1 = \Delta\sigma^{(0)} \sin 2\theta = -Qp \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (4.15)$$

В граничных условиях для второго приближения при $r = a$, опираясь в вычислениях на (2.44), используется нулевое приближение (4.13) и соотношения (4.14):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=a} &= -\frac{d\sigma_{rr}^{(1)}}{dr} r_1 - \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2} \frac{r_1^2}{2} - \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} r_2 + \Delta\sigma^{(0)} \dot{S}_1^2 + 2\sigma_{r\theta}^{(1)} \dot{S}_1 = \\ &= -\frac{d\sigma_{rr}^{(1)}}{dr} \frac{a}{2} (\cos 2\theta - 1) - \frac{d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{dr^2} \frac{a^2}{8} (\cos 2\theta - 1)^2 - \frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} \frac{3a}{16} (\cos 4\theta - 1) + \\ &\quad + \Delta\sigma^{(0)} \sin^2 2\theta - \sigma_{r\theta}^{(1)} 2 \sin 2\theta = -\frac{d\sigma_{rr}^{(1)}}{dr} \frac{a}{2} (\cos 2\theta - 1) - \sigma_{r\theta}^{(1)} 2 \sin 2\theta + \\ &\quad + \frac{Qp(p+1)}{16} (\cos 4\theta - 4 \cos 2\theta + 3) - \frac{3}{16} Qp (\cos 4\theta - 1) + \\ &\quad + \frac{Qp}{2} (\cos 4\theta - 1) = -\frac{d\sigma_{rr}^{(1)}}{dr} \frac{a}{2} (\cos 2\theta - 1) - \sigma_{r\theta}^{(1)} 2 \sin 2\theta + \\ &\quad + \frac{Qp(p+6)}{16} \cos 4\theta - \frac{Qp(p+1)}{4} \cos 2\theta + \frac{Qp(3p-2)}{16}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=a} &= -\Delta\sigma^{(0)} (\dot{S}_2 - S_1 \dot{S}_1) - \Delta\sigma^{(1)} \dot{S}_1 - \frac{d\sigma_{r\theta}^{(1)}}{dr} r_1 - \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr} \dot{S}_1 r_1 = \\ &= \Delta\sigma^{(0)} \frac{1}{2} (\sin 2\theta + \sin 4\theta) + \Delta\sigma^{(1)} \sin 2\theta - \frac{d\sigma_{r\theta}^{(1)}}{dr} \frac{a}{2} (\cos 2\theta - 1) + \\ &\quad + \frac{d\Delta\sigma^{(0)}}{dr} \frac{a}{2} (\cos 2\theta - 1) \sin 2\theta = \Delta\sigma^{(1)} \sin 2\theta - \frac{d\sigma_{r\theta}^{(1)}}{dr} \frac{a}{2} (\cos 2\theta - 1) + \\ &\quad + \frac{Qp(p-2)}{4} \sin 4\theta - \frac{Qp(p+1)}{2} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Линеаризованные граничные условия при $r = h$ для первого и второго приближений определяются согласно условию задания постоянного давления q на внутреннем радиусе трубы:

$$\sigma_{rr}^{(k)} \Big|_{r=h} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(k)} \Big|_{r=h} = 0, \quad (4.18)$$

$k = 1, 2$ – номера приближений.

4.2. Построение первого приближения методом малого параметра

Уравнения (4.1), (4.2), (4.7)–(4.9), (4.11) для первого приближения с граничными условиями (4.15), (4.18) образуют краевую задачу для нахождения первого приближения в напряжениях.

Коэффициент при первой степени малого параметра в уравнении внешнего эллиптического контура (4.6) содержит слагаемые, одно из которых зависит от угла 2θ . Кроме того, в граничных условиях для первого приближения при $r = a$ содержатся слагаемые, зависящие от угла 2θ и радиуса r , и слагаемые, которые не зависят от угла θ . Следовательно, для решения поставленной задачи можно ввести предположение, что скорость радиальных перемещений $\dot{u}_r^{(1)}$ является суммой двух составляющих, одно из которых зависит от радиуса r и угла 2θ , а второе – только от радиуса r ; скорость тангенциальных перемещений $\dot{u}_\theta^{(1)}$ зависит и от радиуса r , и от угла 2θ . Тогда справедливо представление

$$\begin{aligned} \dot{u}_r^{(1)}(r, \theta) &= \tilde{\dot{u}}_r^\rho(r, \theta) + \tilde{\dot{u}}_r^\psi(r) = \dot{u}_r^\rho(r) \cos 2\theta + \dot{u}_r^\psi(r), \\ \dot{u}_\theta^{(1)}(r, \theta) &= \tilde{\dot{u}}_\theta^\rho(r, \theta) = \dot{u}_\theta^\rho(r) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $\dot{u}_r^\rho = \dot{u}_r^\rho(r)$, $\dot{u}_r^\psi = \dot{u}_r^\psi(r)$, $\dot{u}_\theta^\rho = \dot{u}_\theta^\rho(r)$ – неизвестные, подлежащие определению, функции.

Представление для скоростей перемещений (4.19) с учетом условий сов-

местности (4.9) позволяет удовлетворить условию несжимаемости материала (4.2) тождественно в случае выполнения следующих равенств:

$$\frac{d\dot{u}_r^\rho}{dr} + \frac{2}{r}\dot{u}_\theta^\rho + \frac{\dot{u}_r^\rho}{r} = 0, \quad (4.20)$$

$$\frac{d\dot{u}_r^\psi}{dr} + \frac{\dot{u}_r^\psi}{r} = 0. \quad (4.21)$$

Уравнение (4.20) тождественно выполняется путем введения функции скоростей перемещений

$$\zeta^{(1)}(r, \theta) = H_1(r) \sin 2\theta \quad (4.22)$$

такой, что

$$\tilde{u}_r^\rho = -\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \theta}, \quad \tilde{u}_\theta^\rho = \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial r}. \quad (4.23)$$

Уравнение (4.21) позволяет определить составляющую скоростей перемещений, независящую от угла θ :

$$\dot{u}_r^\psi = \frac{K_1}{r}$$

и, следовательно,

$$\dot{\varepsilon}_{rr}^\psi = -\frac{K_1}{r^2}, \quad (4.24)$$

где K_1 – константа интегрирования.

Анализ постановки задачи для нахождения первого приближения показывает, что функция $\zeta^{(1)}$ полностью совпадает с функцией $\xi^{(2)}$ второго приближения задачи о несоосной трубе, приведенной в главе 3. Следовательно, изложение построения решения для второго приближения задачи о несоосной трубе (3.39)–(3.59) можно воспроизвести для первого приближения задачи о трубе с эллиптически возмущенным внешним контуром. Отличие состоит в том, что определяющие соотношения для первого приближения в виде (4.11) не содержат слагаемых, зависящих от предыдущих приближений, как в формулах для

общего случая определяющих соотношений (2.56), (2.57), т. е.

$$T_2^{(1)}(r) = B_2^{(1)}(r) = B_0^{(1)}(r) = 0.$$

Используя решение для второго приближения задачи о несоосной трубе (3.52)–(3.57), получаем уравнение вида (3.58), где правая часть уравнения равна нулю. Функция $H_1(r) \equiv R_2(r)$ и однородное уравнение для нахождения $H_1(r)$, аналогичное (3.59), имеет вид:

$$\begin{aligned} H_1^{(IV)} + (6 - 2p)R_2''' r^{-1} + (p^2 - 20p + 11)H_1'' r^{-2} + \\ + (15p^2 - 20p + 5)H_1' r^{-3} + (16 - 12p^2 + 8p)H_1 r^{-4} = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Используя степенное представление: $H_1(r) = r^\nu$, определяем корни уравнения (4.25):

$$\nu_{1,2,3,4} = \frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 + 28p - 8 \pm 4\sqrt{61p^2 - 36p - 12}}}{2} = \frac{p}{2} \pm \frac{l}{2} \pm iz.$$

Здесь $l = l(p)$ и $z = z(p)$ – известные значения для конкретного материала, такие же, как при решении уравнения (3.61). Функция $H_1(r)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} H_1(r) = C_{11}r^{(p+l)/2} \cos(z \ln r) + C_{12}r^{(p+l)/2} \sin(z \ln r) + \\ + C_{13}r^{(p-l)/2} \cos(z \ln r) + C_{14}r^{(p-l)/2} \sin(z \ln r), \end{aligned}$$

где $C_{11} \div C_{14}$ – константы интегрирования.

Окончательный вид решения задачи для первого приближения трубы с эллиптически возмущенным внешним контуром получаем, используя формулы (3.67), (3.69) второго приближения метода малого параметра для задачи о несоосной трубе:

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \frac{1}{L} \int \left[-H_1'' r^{-p+1} + (4p+1)H_1' r^{-p} - (4p+4)H_1 r^{-p-1} \right] dr \cos 2\theta + K^\rho - \frac{2K_1}{L} r^{-p} + K^\psi = (\rho_{rr}^{(1)} + K^\rho) \cos 2\theta + (\psi_{rr}^{(1)} + K^\psi), \quad (4.26)$$

где K^ρ и K^ψ — константы интегрирования,

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{2L} \left[H_1'' r^{-p+2} - H_1' r^{-p+1} + 4H_1 r^{-p} \right] \sin 2\theta = \rho_{r\theta}^{(1)} \sin 2\theta. \quad (4.27)$$

Скорости деформаций ползучести также зависят от вида функции H_1 :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(1)} = -\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} &= [-2H_1' r^{-1} + 2H_1 r^{-2}] \cos 2\theta - \frac{K_1}{r^2}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)} &= \frac{1}{2} [H_1'' - H_1' r^{-1} + 4H_1 r^{-2}] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Уравнение для нахождения $\sigma_{rr}^{(1)}$ из (4.26) состоит из двух частей, первая из которых зависит от 2θ , а вторая — не зависит от угла θ . Напряжение $\sigma_{r\theta}^{(1)}$ согласно (4.27) зависит от угла 2θ . Граничным условиям (4.15), (4.18) можно удовлетворить только тогда, когда отдельно рассматриваются слагаемые, содержащие 2θ , и отдельно — независимые от угла θ . Разделяя соотношения (4.26), (4.27) согласно указанному принципу и подставляя в граничные условия (4.15), (4.18) получаем шесть уравнений и семь неизвестных констант интегрирования $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, K_1, K^\rho, K^\psi$. От угла 2θ зависят 4 уравнения, которые содержат 5 констант интегрирования, что позволяет без нарушения общности решения положить $K^\rho = 0$. В итоге радиальная составляющая тензора напряжений запишется в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)} &= \frac{1}{L} \int \left[-H_1'' r^{-p+1} + (4p+1)H_1' r^{-p} - (4p+4)H_1 r^{-p-1} \right] dr \cos 2\theta - \\ &\quad - \frac{2K_1}{L} r^{-p} + K^\psi = \rho_{rr}^{(1)} \cos 2\theta + \Psi_{rr}^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Тангенциальную составляющую тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ определим, используя

формулу (3.72) второго приближения задачи о несоосной трубе и обозначение $\Delta\sigma^{(1)} = \sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^{(1)} &= (\rho_{rr}^{(1)} - \Delta\rho^{(1)}) \cos 2\theta + \Psi_{rr}^{(1)} - \Delta\Psi^{(1)} = \\ &= \frac{1}{L} \int \left[-H_1'' r^{-p+1} + (4p+1)H_1' r^{-p} - (4p+4)H_1 r^{-p-1} \right] dr \cos 2\theta - \\ &\quad - \frac{4p}{L} (-H_1' r^{-p+1} + H_1 r^{-p}) \cos 2\theta + \frac{2(p-1)K_1}{L} r^{-p} + K^\psi = \\ &= \rho_{\theta\theta}^{(1)} \cos 2\theta + \psi_{\theta\theta}^{(1)} + K^\psi = \rho_{\theta\theta}^{(1)} \cos 2\theta + \Psi_{\theta\theta}^{(1)}. \quad (4.30)\end{aligned}$$

Решение краевой задачи для первого приближения в виде (4.26) – (4.30) позволяет определить напряжения и скорости деформаций ползучести в трубе с эллиптически возмущенным внешним контуром с учетом первого приближения.

4.3. Построение решения для второго приближения метода малого параметра

Краевая задача для второго приближения состоит из условия несжимаемости материала (4.2) при условии реализации плоского деформированного состояния (4.1), уравнений равновесия (4.7), (4.8), соотношений типа Коши-Эйлера (4.9) и определяющих соотношений для второго приближения (4.12) с учетом краевых условий (4.16) – (4.18) для второго приближения.

Для преобразования граничных условий (4.16), (4.17) вводится обозначение

$$\Delta\sigma^{(1)} = \sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = (\rho_{rr}^{(1)} - \rho_{\theta\theta}^{(1)}) \cos 2\theta + \Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\theta\theta}^{(1)} = \Delta\rho^{(1)} \cos 2\theta + \Delta\Psi^{(1)}. \quad (4.31)$$

Проведем преобразования линеаризованных граничных условий (4.16), (4.17), выделяя функции угла θ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=a} &= -\frac{a}{2} \left(\frac{d\rho_{rr}^{(1)}}{dr} \cos 2\theta + \frac{d\Psi_{rr}^{(1)}}{dr} \right) (\cos 2\theta - 1) - \rho_{r\theta}^{(1)} 2 \sin^2 2\theta + \\
&\quad + \frac{Qp(p+6)}{16} \cos 4\theta - \frac{Qp(p+1)}{4} \cos 2\theta + \frac{Qp(3p-2)}{16} = \\
&= \left[\rho_{r\theta}^{(1)} - \frac{a d\rho_{rr}^{(1)}}{4 dr} + \frac{Qp(p+6)}{16} \right]_{r=a} \cos 4\theta + \left[\frac{a d\rho_{rr}^{(1)}}{2 dr} - \frac{pK_1}{La^p} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{Qp(p+1)}{4} \right]_{r=a} \cos 2\theta + \left[-\frac{a d\rho_{rr}^{(1)}}{4 dr} - \rho_{r\theta}^{(1)} + \frac{pK_1}{La^p} + \frac{Qp(3p-2)}{16} \right]_{r=a}, \quad (4.32) \\
\sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=a} &= \left(\Delta\rho^{(1)} \cos 2\theta + \Delta\Psi^{(1)} \right) \sin 2\theta - \frac{a d\rho_{r\theta}^{(1)}}{2 dr} \sin 2\theta (\cos 2\theta - 1) + \\
&\quad + \frac{Qp(p-2)}{4} \sin 4\theta - \frac{Qp(p+1)}{2} \sin 2\theta = \left[\frac{1}{2} \Delta\rho^{(1)} - \frac{a d\rho_{r\theta}^{(1)}}{4 dr} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{Qp(p-2)}{4} \right]_{r=a} \sin 4\theta + \left[\frac{a d\rho_{r\theta}^{(1)}}{2 dr} - \frac{2pK_1}{La^p} - \frac{Qp(p+1)}{2} \right]_{r=a} \sin 2\theta.
\end{aligned}$$

Преобразуем определяющие соотношения для второго приближения (4.12), используя решение для первого приближения (4.27), (4.29):

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma^{(2)} &= \frac{2p}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(2)} - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{[\Delta\sigma^{(1)}]^2}{\Delta\sigma^{(0)}} + s \frac{[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{\Delta\sigma^{(0)}} = \\
&= \frac{2p}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(2)} - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{[\Delta\rho^{(1)} \cos 2\theta + \Delta\Psi^{(1)}]^2}{\Delta\sigma^{(0)}} + s \frac{[\rho_{r\theta}^{(1)} \sin 2\theta]^2}{\Delta\sigma^{(0)}} = \\
&= \frac{2p}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(2)} - A_4^{(2)}(r) \cos 4\theta - A_2^{(2)}(r) \cos 2\theta - A_0^{(2)}(r), \quad (4.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta}^{(2)} &= \frac{1}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} - \frac{(n-1)\Delta\sigma^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(1)}}{\Delta\sigma^{(0)}} = \\
&= \frac{1}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} - \frac{(n-1)[\Delta\rho^{(1)} \cos 2\theta + \Delta\Psi^{(1)}]\rho_{r\theta}^{(1)} \sin 2\theta}{\Delta\sigma^{(0)}} = \\
&= \frac{1}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} - B_4^{(2)}(r) \sin 4\theta - B_2^{(2)}(r) \sin 2\theta. \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Здесь

$$A_4^{(2)}(r) = \frac{n-1}{4\Delta\sigma^{(0)}} \left([\Delta\rho^{(1)}]^2 - 2p[\rho_{r\theta}^{(1)}]^2 \right), \quad A_2^{(2)}(r) = (n-1) \frac{\Delta\rho^{(1)}\Delta\Psi^{(1)}}{\Delta\sigma^{(0)}},$$

$$\begin{aligned}
A_0^{(2)}(r) &= \frac{n-1}{4\Delta\sigma^{(0)}} \left([\Delta\rho^{(1)}]^2 + 2p[\rho_{r\theta}^{(1)}]^2 + 2[\Delta\Psi]^2 \right), \\
B_4^{(2)}(r) &= \frac{n-1}{2\Delta\sigma^{(0)}} \Delta\rho^{(1)} \rho_{r\theta}^{(1)}, \quad B_2^{(2)}(r) = (n-1) \frac{\rho_{r\theta}^{(1)} \Delta\Psi^{(1)}}{\Delta\sigma^{(0)}} \quad (4.35)
\end{aligned}$$

– функции, зависящие от решения нулевого и первого приближений.

Вид граничных условий (4.32), преобразованных определяющих соотношений (4.33), (4.34) и уравнения внешнего контура (4.6) задает структуру выражения для радиальных напряжений, состоящей из суммы трех слагаемых, каждое из которых зависит от радиуса r , причем первое зависит еще и от угла 4θ , второе слагаемое зависит от 2θ , третье – не зависит от θ ; касательные напряжения помимо зависимости от r зависят от величин 4θ и 2θ . Можно сделать предположение, что скорость радиальных перемещений $\dot{u}_r^{(2)}$ является суммой трех составляющих, одно из которых зависит от радиуса r и угла 4θ , второе – от радиуса r и угла 2θ , третье – только от радиуса r ; скорость тангенциальных перемещений $\dot{u}_\theta^{(2)}$ является суммой двух составляющих, одно из которых зависит от радиуса r и угла 4θ , а второе – от радиуса r и угла 2θ , т.е.

$$\begin{aligned}
\dot{u}_r^{(2)}(r, \theta) &= \tilde{u}_r^V(r, \theta) + \tilde{u}_r^W(r, \theta) + \tilde{u}_r^U(r) = \dot{u}_r^V(r) \cos 4\theta + \dot{u}_r^W(r) \cos 2\theta + \dot{u}_r^U(r), \\
\dot{u}_\theta^{(2)}(r, \theta) &= \tilde{u}_\theta^V(r, \theta) + \tilde{u}_\theta^W(r, \theta) = \dot{u}_\theta^V(r) \sin 4\theta + \dot{u}_\theta^W(r) \sin 2\theta, \quad (4.36)
\end{aligned}$$

где $\dot{u}_r^V = \dot{u}_r^V(r)$, $\dot{u}_r^W = \dot{u}_r^W(r)$, $\dot{u}_r^U = \dot{u}_r^U(r)$, $\dot{u}_\theta^V = \dot{u}_\theta^V(r)$, $\dot{u}_\theta^W = \dot{u}_\theta^W(r)$ – неизвестные функции, подлежащие определению.

Использование такого разложения в выражениях для скоростей деформаций ползучести (2.6) позволяет тождественно выполнить условие несжимаемости при соблюдении равенств:

$$\frac{d\dot{u}_r^V}{dr} + \frac{4}{r} \dot{u}_\theta^V + \frac{\dot{u}_r^V}{r} = 0, \quad (4.37)$$

$$\frac{d\dot{u}_r^W}{dr} + \frac{2}{r}\dot{u}_\theta^W + \frac{\dot{u}_r^W}{r} = 0, \quad (4.38)$$

$$\frac{d\dot{u}_r^U}{dr} + \frac{\dot{u}_r^U}{r} = 0, \quad (4.39)$$

Приведем краткое решение во втором приближении, так как оно является комбинацией решений частных случаев методом, описанным во второй главе. Положим $f = 4$ в формуле для функции скоростей перемещений (2.47), что позволяет использовать функцию вида

$$\zeta^V(r, \theta) = V(r) \sin 4\theta \quad (4.40)$$

для соотношения (4.36), для которой выполняется:

$$\tilde{u}_r^V = -\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta^V}{\partial \theta} = -\frac{4}{r} V \cos 4\theta, \quad \tilde{u}_\theta^V = \frac{\partial \zeta^V}{\partial r} = V' \sin 4\theta. \quad (4.41)$$

Условие (4.38) полностью совпадает с условием (4.22), применяемым в первом приближении, путем введения функции

$$\zeta^W(r, \theta) = W(r) \sin 2\theta \quad (4.42)$$

такой, что

$$\tilde{u}_r^W = -\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta^W}{\partial \theta} = -\frac{2}{r} W \cos 2\theta, \quad \tilde{u}_\theta^W = \frac{\partial \zeta^W}{\partial r} = W' \sin 2\theta, \quad (4.43)$$

причем $W(r) \equiv H_1(r)$. Условие (4.39) выполняется при

$$\dot{u}_r^U = \frac{C^U}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_{rr}^U = -\frac{C^U}{r^2}, \quad (4.44)$$

где C^U – константа интегрирования.

Подставляем выражения для перемещений (4.41), (4.43), (4.44) в соотношения типа Коши-Эйлера (4.9); затем преобразованные соотношения используем

в определяющих соотношениях (4.33), (4.34):

$$\begin{aligned}\Delta\sigma^{(2)} &= \left[\frac{8p}{L}(-V'r^{-p+1} + Vr^{-p}) - A_4^{(2)}(r) \right] \cos 4\theta + \\ &+ \left[\frac{4p}{L}(-W'r^{-p+1} + Wr^{-p}) - A_2^{(2)}(r) \right] \cos 2\theta + \left[-\frac{2pC^U}{L}r^{-p} - A_0^{(2)}(r) \right] = \\ &= \Delta\sigma^V \cos 4\theta + \Delta\sigma^W \cos 2\theta + \Delta\sigma^U, \quad (4.45)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta}^{(2)} &= \left[\frac{1}{2L}(V''r^{-p+2} - V'r^{-p+1} + 16Vr^{-p}) - B_4^{(2)}(r) \right] \sin 4\theta + \\ &+ \left[\frac{1}{2L}(W''r^{-p+2} - W'r^{-p+1} + 4Wr^{-p}) - B_2^{(2)}(r) \right] \sin 2\theta = \sigma_{r\theta}^V \sin 4\theta + \sigma_{r\theta}^W \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (4.46)$$

Соотношения (4.45), (4.46) применим в уравнениях равновесия и выполним преобразования, аналогичные проведенным при построении первого приближения, в итоге приходим к основному уравнению для нахождения функций $V(r)$ и $W(r)$:

$$\begin{aligned}\left[r \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^V}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \sigma_{r\theta}^V}{\partial r} + 4 \frac{\partial \Delta\sigma^V}{\partial r} + 16 \frac{\sigma_{r\theta}^V}{r} + 4 \frac{\Delta\sigma^V}{r} \right] \sin 4\theta + \\ + \left[r \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^W}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \sigma_{r\theta}^W}{\partial r} + 2 \frac{\partial \Delta\sigma^W}{\partial r} + 4 \frac{\sigma_{r\theta}^W}{r} + 2 \frac{\Delta\sigma^W}{r} \right] \sin 2\theta = 0.\end{aligned}$$

Данное уравнение должно выполняться при любых значениях угла θ . Следовательно,

$$r \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^V}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \sigma_{r\theta}^V}{\partial r} + 4 \frac{\partial \Delta\sigma^V}{\partial r} + 16 \frac{\sigma_{r\theta}^V}{r} + 4 \frac{\Delta\sigma^V}{r} = 0, \quad (4.47)$$

$$r \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^W}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \sigma_{r\theta}^W}{\partial r} + 2 \frac{\partial \Delta\sigma^W}{\partial r} + 4 \frac{\sigma_{r\theta}^W}{r} + 2 \frac{\Delta\sigma^W}{r} = 0. \quad (4.48)$$

Учитывая обозначения для $\sigma_{r\theta}^V$, $\Delta\sigma^V$, введенные в (4.45), (4.46), дифференциальное уравнение (4.47) принимает вид

$$V^{(4)} + (6 - 2p)V'''r^{-1} + (p^2 - 68p + 35)V''r^{-2} +$$

$$+ (63p^2 - 92p + 29)V' r^{-3} + (256 - 48p^2 + 32p)V r^{-4} = 2Lr^{p-3}Y_4^{(2)}(r), \quad (4.49)$$

где

$$Y_4^{(2)}(r) = r \frac{d^2 B_4^{(2)}}{dr^2} + 3 \frac{dB_4^{(2)}}{dr} + 16 \frac{B_4^{(2)}}{r} + 4 \frac{dA_4^{(2)}}{dr} + 4 \frac{A_4^{(2)}}{r}.$$

Использование степенного представления $V(r) = r^\mu$ позволяет получить уравнение для нахождения значений μ :

$$\mu^4 - 2p\mu^3 + (p^2 - 62p + 28)\mu^2 + (62p^2 - 28p)\mu + (256 - 48p^2 + 32p) = 0,$$

решением которого являются корни

$$\mu_{1,2,3,4} = \frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 + 124p - 56 \pm 4\sqrt{1009p^2 - 900p - 60}}}{2}.$$

Уравнение имеет комплексные корни при

$$1009p^2 - 900p - 60 < 0,$$

что выполняется при показателе нелинейности $n = 2/p > 2,10$. Следовательно, решение при $n > 2,10$ представимо в виде:

$$\mu_{1,2,3,4} = \frac{p}{2} \pm \frac{m}{2} \pm it.$$

Здесь $m = m(p)$ и $t = t(p)$ – известные значения для конкретного материала. Воспользуемся тригонометрическим представлением полученного решения согласно [131]:

$$V(r) = V_1 r^{(p+m)/2} \cos(t \ln r) + V_2 r^{(p+m)/2} \sin(t \ln r) + \\ + V_3 r^{(p-m)/2} \cos(t \ln r) + V_4 r^{(p-m)/2} \sin(t \ln r), \quad (4.50)$$

где $V_1 \div V_4$ – константы интегрирования однородного дифференциального уравнения.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения находится по методу неопределенных коэффициентов. В итоге полное решение неоднородного уравнения (4.49) представимо в виде

$$V(r) = [V_1(r) + v_1]r^{(p+m)/2} \cos(t \ln r) + [V_2(r) + v_2]r^{(p+m)/2} \sin(t \ln r) + \\ + [V_3(r) + v_3]r^{(p-m)/2} \cos(t \ln r) + [V_4(r) + v_4]r^{(p-m)/2} \sin(t \ln r), \quad (4.51)$$

где $v_1 \div v_4$ – константы интегрирования неоднородного дифференциального уравнения.

Используя в уравнении (4.48) обозначения, введенные в (4.45), (4.46), получаем неоднородное дифференциальное уравнение

$$W^{(4)} + (6 - 2p)W''' r^{-1} + (p^2 - 20p + 11)W'' r^{-2} + \\ + (15p^2 - 20p + 5)W' r^{-3} + (16 - 12p^2 + 8p)W r^{-4} = 2Lr^{p-3}Y_2^{(2)}(r), \quad (4.52)$$

где

$$Y_2^{(2)}(r) = r \frac{d^2 B_2^{(2)}}{dr^2} + 3 \frac{dB_2^{(2)}}{dr} + 2 \frac{dA_2^{(2)}}{dr} + 4 \frac{B_2^{(2)}}{r} + 2 \frac{A_2^{(2)}}{r}.$$

Вид однородного уравнения, соответствующего (4.52), полностью совпадает с однородным уравнением (4.25), что позволяет сразу выписать решение однородного уравнения

$$W(r) = W_1 r^{(p+l)/2} \cos(y \ln r) + W_2 r^{(p+l)/2} \sin(y \ln r) + \\ + W_3 r^{(p-l)/2} \cos(y \ln r) + W_4 r^{(p-l)/2} \sin(y \ln r), \quad (4.53)$$

где $l = l(p)$ и $y = y(p)$ – конкретные значения, определенные в первом приближении, $W_1 \div W_4$ – константы интегрирования однородного дифференциального уравнения.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (4.52) находится по методу неопределенных коэффициентов. В итоге полное решение неоднородного уравнения представимо в виде

$$W(r) = [W_1(r) + w_1]r^{(p+l)/2} \cos(y \ln r) + [W_2(r) + w_2]r^{(p+l)/2} \sin(y \ln r) + \\ + [W_3(r) + w_3]r^{(p-l)/2} \cos(y \ln r) + [W_4(r) + w_4]r^{(p-l)/2} \sin(y \ln r), \quad (4.54)$$

где $w_1 \div w_4$ – константы интегрирования неоднородного дифференциального уравнения.

Воспользуемся полученными решениями для функций $V(r)$ из равенства (4.51), для функции $W(r)$ из равенства (4.54) и для скорости деформаций ползучести $\dot{\varepsilon}_{rr}^U$ из соотношения (4.44) в выражениях для напряжений (4.45) и (4.46). Затем подставляем полученные соотношения в уравнение равновесия (4.7) и, группируя члены, содержащие одинаковые функции угла θ , получаем

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(2)}}{\partial r} = \frac{d\sigma_{rr}^V}{dr} \cos 4\theta + \frac{d\sigma_{rr}^W}{dr} \cos 2\theta + \frac{d\sigma_{rr}^U}{dr}.$$

Интегрируя полученное соотношение по r , приходим к выражению для радиальной составляющей тензора напряжений

$$\sigma_{rr}^{(2)} = (\sigma_{rr}^V + K^V) \cos 4\theta + (\sigma_{rr}^W + K^W) \cos 2\theta + (\sigma_{rr}^U + K^U), \quad (4.55)$$

где K^V , K^W и K^U – константы интегрирования.

Составляющая тензора напряжений $\sigma_{r\theta}^{(2)}$ определяется по формуле (4.46). Тангенциальная составляющая тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ определяется из (4.45) и (4.55)

$$\sigma_{\theta\theta}^{(2)} = (\sigma_{rr}^V + K^V - \Delta\sigma^V) \cos 4\theta + \\ + (\sigma_{rr}^W + K^W - \Delta\sigma^W) \cos 2\theta + \sigma_{rr}^U + K^U - \Delta\sigma^U. \quad (4.56)$$

Подставляем выражения (4.55), (4.45) для $\sigma_{rr}^{(2)}, \sigma_{r\theta}^{(2)}$ соответственно в граничные условия (4.18), (4.32). Решение должно выполняться для любого значения угла θ , поэтому уравнение для нахождения радиальных напряжений распадается на три составляющих по признаку различной зависимости от θ , а уравнение для касательных напряжений – на две составляющие. Рассматривая отдельно граничные условия, содержащие 4θ и отдельно, содержащие 2θ , можно увидеть, что четыре уравнения граничных условий для каждой функции 4θ и 2θ содержат пять неизвестных констант, поэтому можем принять равными нулю следующие константы интегрирования: $K^V = 0$ и $K^W = 0$. Составляющую напряжений, независимую от угла θ , содержит только уравнение для $\sigma_{rr}^{(2)}$, следовательно, для нахождения констант интегрирования C^U и K^U рассматриваем два уравнения, которые содержат две неизвестные. Окончательно радиальные и тангенциальные компоненты тензора напряжений приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(2)} &= \sigma_{rr}^V \cos 4\theta + \sigma_{rr}^W \cos 2\theta + (\sigma_{rr}^U + K^U), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} &= (\sigma_{rr}^V - \Delta\sigma^V) \cos 4\theta + (\sigma_{rr}^W - \Delta\sigma^W) \cos 2\theta + (\sigma_{rr}^U + K^U - \Delta\sigma^U).\end{aligned}\quad (4.57)$$

Анализ решения уравнений для первого и второго приближений показывает, что найденное решение применимо при параметре нелинейности материала $n > 2,42$.

Таким образом, использование первого и второго приближений метода малого параметра позволяет определить напряжения и скорости деформаций ползучести в трубе с внешним эллиптическим контуром при величине сжатия $\delta = (a - b)/a$, принимаемого в качестве малого параметра, что соответствует малой величине эксцентриситета.

Необходимость построения приближения третьего порядка требует дополнительных исследований по сходимости и погрешности полученного решения в приближении первых двух порядков, что и является целью дальнейших пунктов.

4.4. Анализ приближённого аналитического решения

Выполним параметрический анализ построенных решений в первом и втором порядках приближения на предмет сходимости на конкретных модельных примерах толстостенных труб, которые рассматривались и в главе 3.

В качестве модельного примера рассмотрена труба с внутренним радиусом $h = 0,115$ м, внешней большой полуосью эллипса $a = 0,15$ м под действием внутреннего давления $q = 22,07$ МПа. Толщина стенки трубы с эллиптически возмущенной внешней границей будет минимальна при значении угла $\theta = \pi/2$, что означает наличие максимальных напряжений в этом сечении. В качестве материалов трубы рассмотрены углеродистая сталь [64] и жаропрочный сплав ХН73МБТЮ (ЭИ698) [107] с реологическими характеристиками модели (пункт 3.6):

$$\text{углеродистая сталь:} \quad n = 3,03, \quad A = 9,04 \cdot 10^{-9} \text{ МПа}^{-n} \text{ч}^{-1};$$

$$\text{сплав ХН73МБТЮ(ЭИ698):} \quad n = 10,96, \quad A = 4,57 \cdot 10^{-33} \text{ МПа}^{-n} \text{ч}^{-1}.$$

В таблицах 4.1 и 4.2 приведены значения: $\sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\theta\theta}^{(0+1)}/\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ – при учете приближения первого порядка на внешней границе трубы при $\tilde{r} = a/h + \delta \cdot a(\cos 2\theta - 1)/2h$; $\sigma_{\theta\theta}^{**} = \sigma_{\theta\theta}^{(0+1+2)}/\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ – при учете приближения второго порядка на внешней границе трубы при $\tilde{r} = a/h + \delta \cdot a(\cos 2\theta - 1)/2h + \delta^2 \cdot 3a(\cos 4\theta - 1)/16h$, вычисленные с шагом 0,01 для величины сжатия δ при $\theta = \pi/2$ для углеродистой стали [64] и жаропрочного сплава ХН73МБТЮ (ЭИ698) [107].

Таблица 4.1 – Значения тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ на внешнем контуре трубы с эллиптически возмущённой границей из углеродистой стали при $\theta = \pi/2$

$\delta \cdot 100, \%$	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1,0	1,06	1,12	1,18	1,24	1,30	1,35	1,41	1,46	1,51	1,56
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1,0	1,07	1,13	1,21	1,29	1,37	1,45	1,54	1,63	1,72	1,82

Из данных, приведённых в таблицах 4.1 и 4.2, можно сделать вывод, что при возрастании величины сжатия эллипса до 0,1 внешнего радиуса трубы тангенциальные напряжения в опасном (наиболее напряженном) сечении при $\theta = \pi/2$ возрастают в 1,7–1,8 раза. Если использование решения первого поряд-

Таблица 4.2 — Значения тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ на внешнем контуре трубы с эллиптически возмущённой границей из сплава ХН73МБТЮ (ЭИ698) при $\theta = \pi/2$

$\delta \cdot 100, \%$	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1,0	1,06	1,12	1,18	1,24	1,30	1,36	1,42	1,48	1,54	1,60
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1,0	1,06	1,13	1,20	1,27	1,34	1,42	1,49	1,56	1,63	1,70

ка приближения задачи по сравнению с нулевым дает уточнение результатов расчета напряжений приблизительно 56-60%, то уточнение решения задачи с использованием второго порядка приближения по сравнению с решением до первого порядка приближения включительно составляет 6-17%.

Согласно ГОСТ [18] овальность труб, т.е. разность наибольшего и наименьшего значений диаметров, измеренных в одном поперечном сечении трубы, «не должны выводить размер труб за предельные отклонения по диаметру и толщине стенки». В соответствии с ГОСТ 8732-78 [18] предельные отклонения по овальности толстостенных труб составляют не более +10,0%; –12,5% от толщины трубы, для ГОСТ ISO 9329-4-2013 [20] – не более $\pm 12,5\%$ от толщины трубы.

Поставим в соответствие малому параметру δ допустимое предельное отклонение по толщине η стенки модельной трубы $\tau = \delta a / \eta$. В таблице 4.3 для модельной трубы представлено соотношение геометрических характеристик: величины малого параметра δ , приведённое в процентах по отношению к внешнему радиусу $r = a$, и отклонения по толщине трубы τ , приведённое в процентах от толщины η .

Таблица 4.3 — Соответствие величины малого параметра δ отклонению по толщине трубы с эллиптически возмущённой внешней границей τ .

$\delta, \%$	1	2	3	4	5	6
$\tau, \%$	4,3	8,6	12,9	17,1	21,4	25,7

Из данных, представленных в таблице 4.3, следует, что значения δ , превышающие уже 2,9%, являются недопустимыми по ГОСТ. Поэтому для целей практического использования полученного приближённого аналитического решения можно ограничиться 3% величины малого параметра δ .

4.5. Конечно-элементная дискретная модель

Несмотря на большое число работ по проблеме использования метода малого параметра для построения приближённого аналитического решения (в подавляющем большинстве случаев – в упругой и упругопластической области), вопросам сходимости и оценки погрешности построенных решений практически не уделяется внимания. Восполнить оценку погрешности решений можно либо имея точное аналитическое решение хотя бы в частном случае (а для нелинейной теории ползучести это крайне редкий вариант), либо имея численное решение при частных значениях параметров решаемой задачи. Поэтому в данном пункте поставленная задача решается численно и в последующем сравниваются численное решение с построенным приближённым решением в некоторых частных случаях.

Для проверки результатов приближённого аналитического решения была построена конечно-элементная модель трубы с эллиптическим внешним контуром. Ввиду симметрии задачи построена геометрическая модель $1/4$ трубы, взаимодействие с остальными $3/4$ частями трубы заменено условиями симметрии при $\theta = \pi/2$ и $\theta = 0$. Для исключения движения трубы как жесткого целого была запрещена степень свободы на внутреннем контуре при $\theta = \pi/2$. Для моделирования использовался восьмиузловой элемент **PLANE183**, позволяющий учитывать большие деформации, в том числе деформации ползучести. Количество элементов разбиения составляло около 20000. В расчетах при достижении значений времени в 5 – 10 часов напряжения выходили на установившиеся значения, что позволяет говорить о наступлении стадии установившейся ползучести. Для иллюстрации расчётов принимались напряжения в момент времени 10^3 часов.

4.6. Сравнение результатов приближённого аналитического и конечно-элементного решений

Была проведена оценка погрешности приближённого аналитического по отношению к конечно-элементному решению задачи для осесимметричной трубы и трубы с эллиптическим внешним контуром с учетом второго порядка приближения включительно на основе значений радиальных σ_{rr} и тангенциальных $\sigma_{\theta\theta}$ напряжений в 15 равноотстоящих точках по координате r_i :

$$h \leq r_i \leq a + \delta \cdot a(\cos 2\theta - 1)/2 + \delta^2 \cdot 3a(\cos 4\theta - 1)/16$$

($i = \overline{1, 15}$) в наиболее опасном сечении при $\theta = \pi/2$. Вычисление погрешности, как и в главе 3, проведено по двум нормам:

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{15} |\sigma_{\omega\omega_i}^{(0+1+2)} - \sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}|}{\sum_{i=1}^{15} |\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}|} \cdot 100\% \quad \text{и} \quad \sigma = \left(\frac{\sum_{i=1}^{15} [\sigma_{\omega\omega_i}^{(0+1+2)} - \sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}]^2}{\sum_{i=1}^{15} [\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}}]^2} \right)^{1/2} \cdot 100\%,$$

где $\omega = r, \theta$, $\sigma_{\omega\omega_i}^{(0+1+2)} = \sigma_{\omega\omega}^{(0+1+2)}(r_i)$, $\sigma_{\omega\omega_i}^{\text{ANS}} = \sigma_{\omega\omega}^{\text{ANS}}(r_i)$ – расчетные значения для аналитического (приближение второго порядка) и численного решений соответственно.

В таблицах 4.4 и 4.5 приведены оценки погрешности между приближённым аналитическим и конечно-элементным расчетами в процентах для труб из малоуглеродистой стали и сплава ЭИ698, используемых в качестве модельных примеров. Через дробную черту приведены погрешности по двум нормам: s/σ .

Таблица 4.4 – Погрешность решений для труб из углеродистой стали при $\theta = \pi/2$

δ	0	0,02	0,04	0,06
σ_{rr}	0,14/0,32	2,01/1,94	2,61/2,55	2,98/2,91
$\sigma_{\theta\theta}$	0,03/0,07	3,47/4,04	6,21/7,36	9,72/10,05

Таблица 4.5 – Погрешность решений для труб из сплава ХН73МБТЮ (ЭИ698) при $\theta = \pi/2$

δ	0	0,02	0,04	0,06
σ_{rr}	0,09/0,20	1,67/1,61	1,87/1,79	2,23/2,24
$\sigma_{\theta\theta}$	0,01/0,02	2,55/3,24	5,11/6,11	8,98/9,04

Графики на рисунках 4.2 – 4.4 построены для тангенциальной компоненты тензора напряжений для углеродистой стали при значении угла $\theta = \pi/2$, соответствующего максимальным значениям тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$, и величине сжатия $\delta = 0,02; 0,04; 0,06$ соответственно.

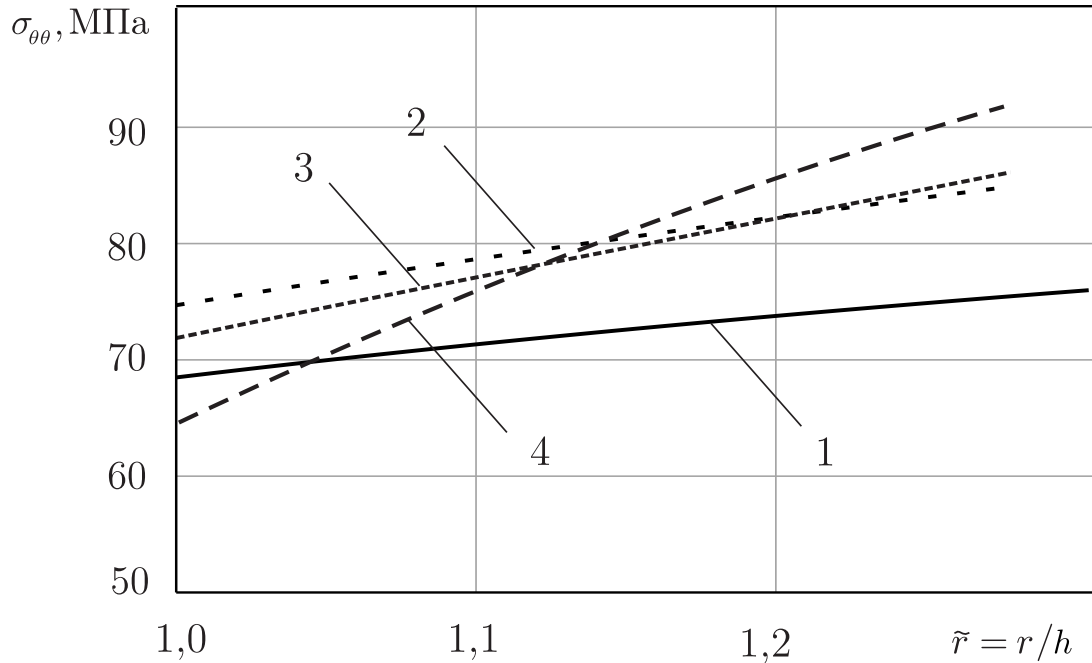


Рисунок 4.2 — Тангенциальные напряжения для труб из углеродистой стали при $\delta = 0,02$:
 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ANS}}$

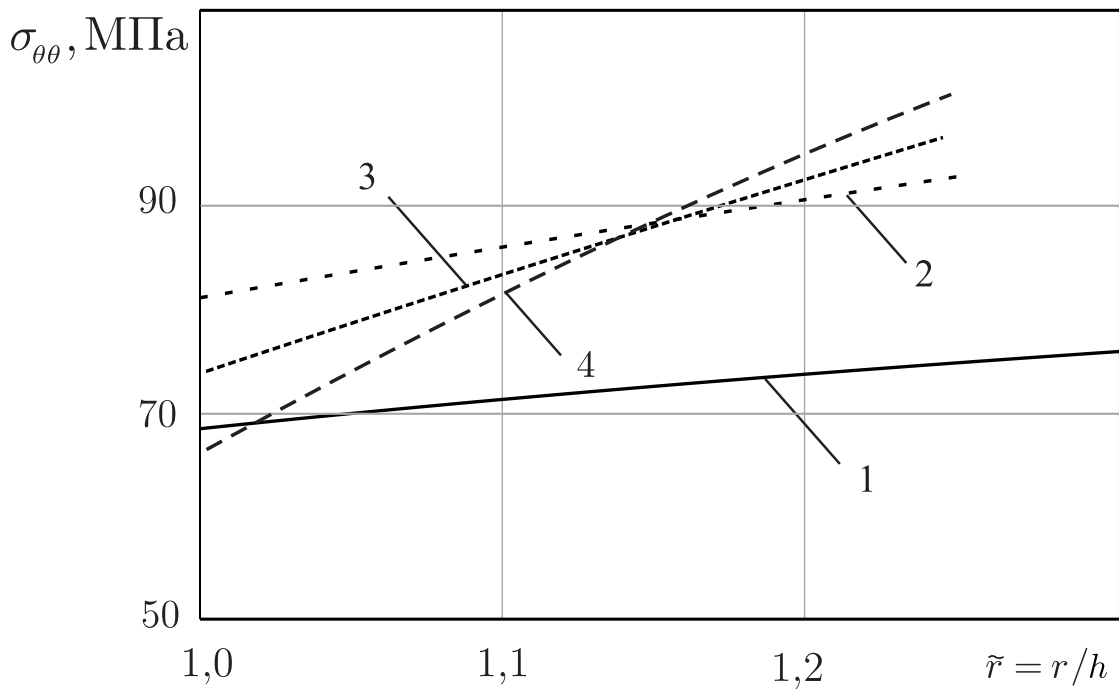


Рисунок 4.3 — Тангенциальные напряжения для труб из углеродистой стали при $\delta = 0,04$:
 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ANS}}$

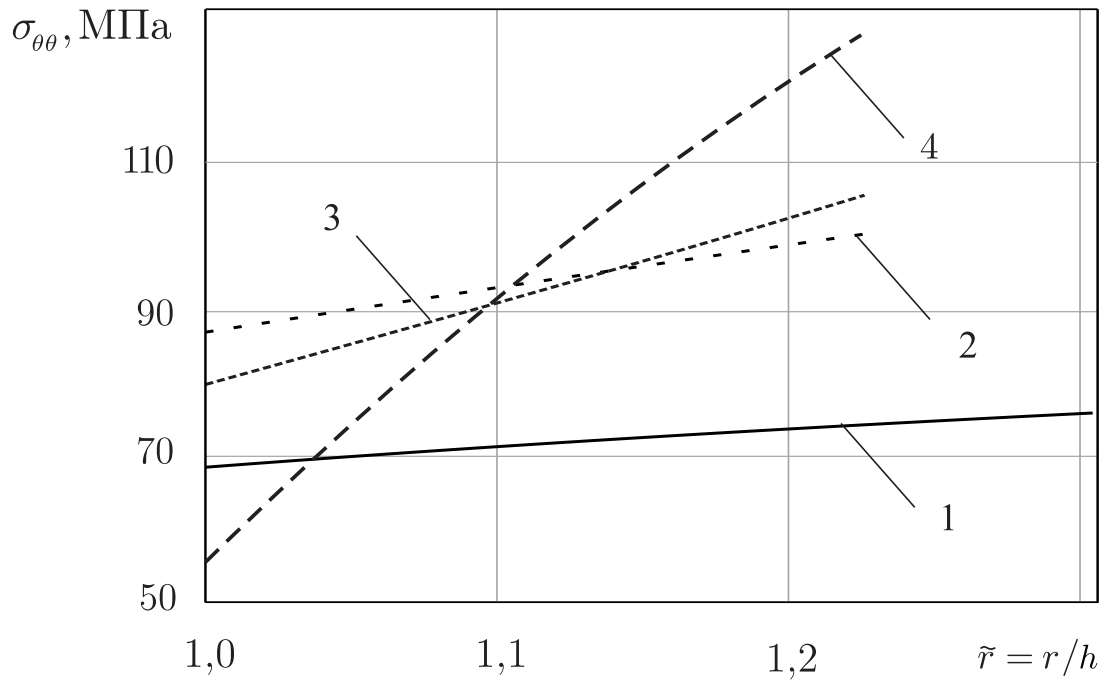


Рисунок 4.4 — Тангенциальные напряжения для труб из углеродистой стали при $\delta = 0,06$:
 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{ANS}$

Графики на рисунках 4.5 – 4.7 построены для тангенциальной компоненты тензора напряжений для сплава ЭИ698 при значении угла $\theta = \pi/2$, соответствующего максимальным значениям тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$, и величине сжатия $\delta = 0,02; 0,04; 0,06$ соответственно.

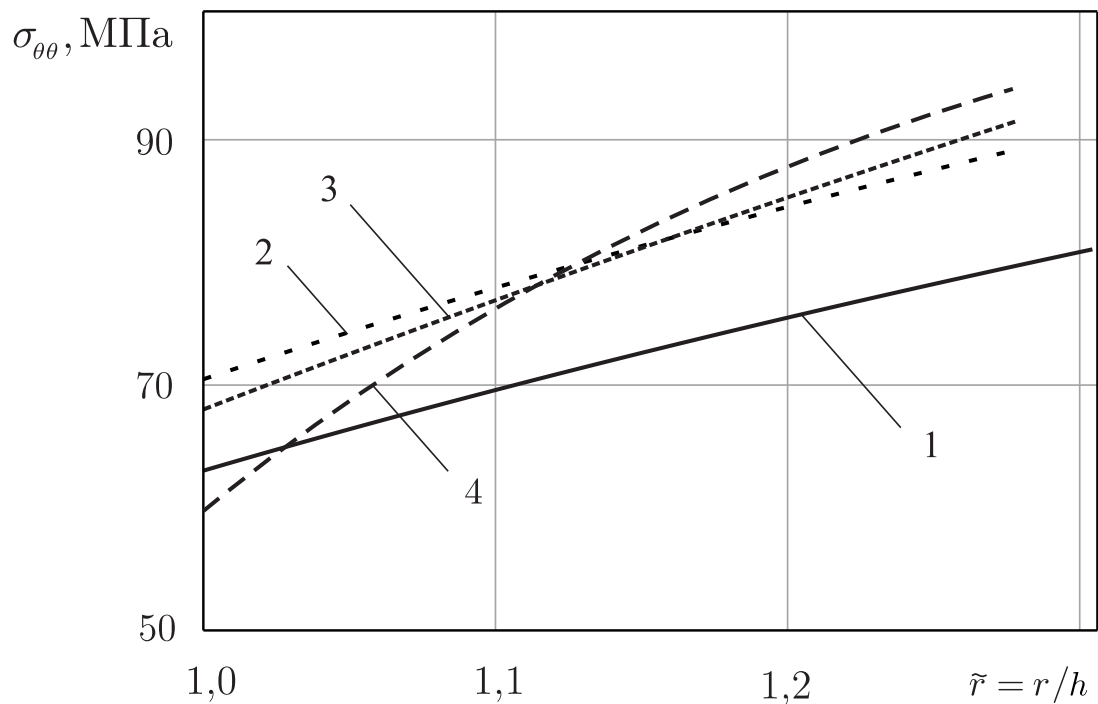


Рисунок 4.5 — Тангенциальные напряжения для труб из сплава ЭИ698 при $\delta = 0,02$, $\theta = \pi/2$:
 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{ANS}$

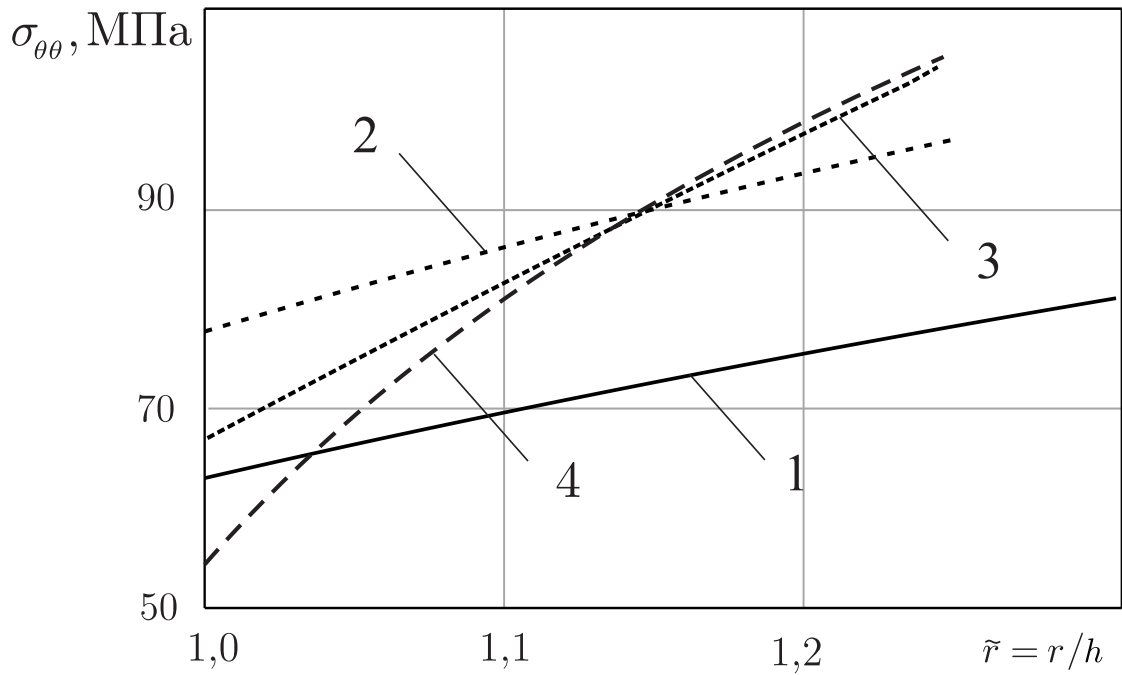


Рисунок 4.6 — Тангенциальные напряжения для труб из сплава ЭИ698 при $\delta = 0,04$, $\theta = \pi/2$: 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ANS}}$

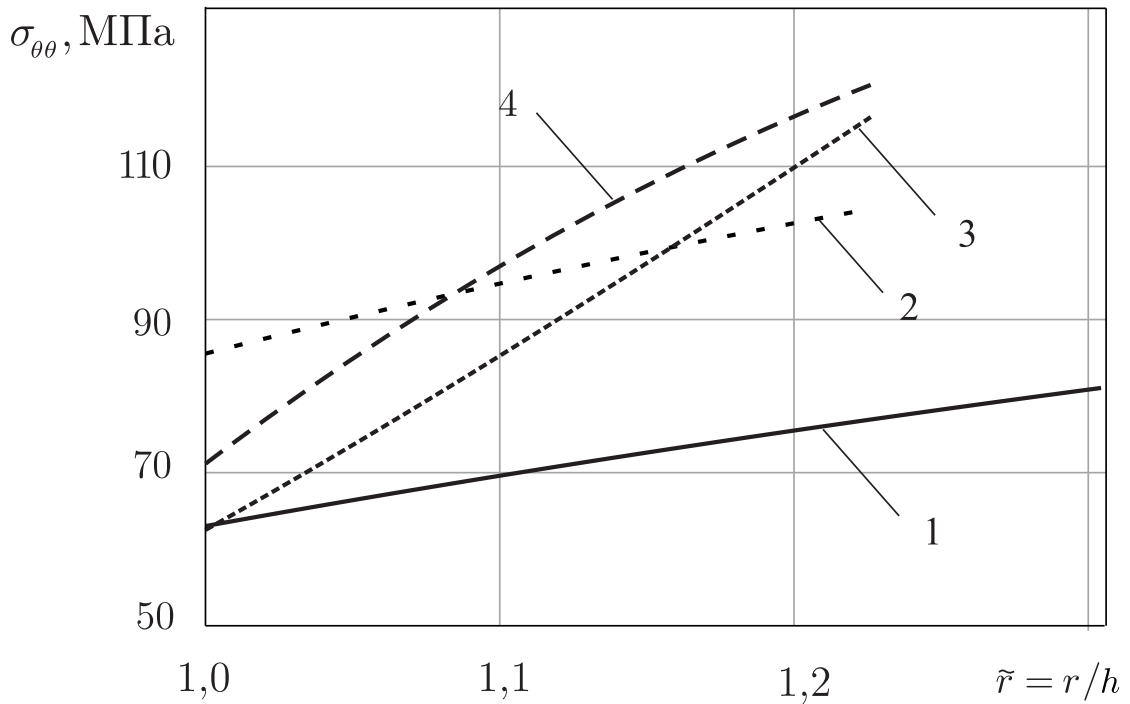


Рисунок 4.7 — Тангенциальные напряжения для труб из сплава ЭИ698 при $\delta = 0,06$, $\theta = \pi/2$: 1 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{\theta\theta}^{(0-2)}$, 4 — $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ANS}}$.

Графики на рисунках 4.8 и 4.9 построены для радиальной компоненты тензора напряжений σ_{rr} при значении угла $\theta = \pi/2$ и величине сжатия $\delta = 0,06$ для углеродистой стали и сплава ЭИ698 соответственно.

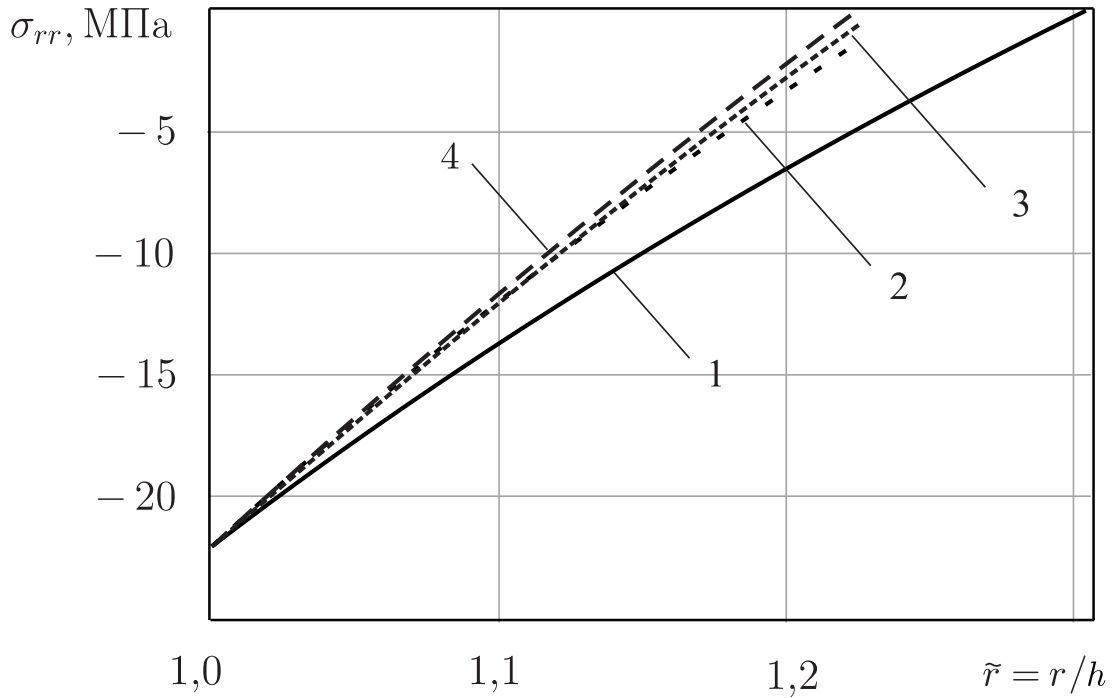


Рисунок 4.8 — Радиальные напряжения для труб из углеродистой стали при $\delta = 0,06$, $\theta = \pi/2$:
 1 — $\sigma_{rr}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{rr}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{rr}^{(0-2)}$, 4 — σ_{rr}^{ANS} .

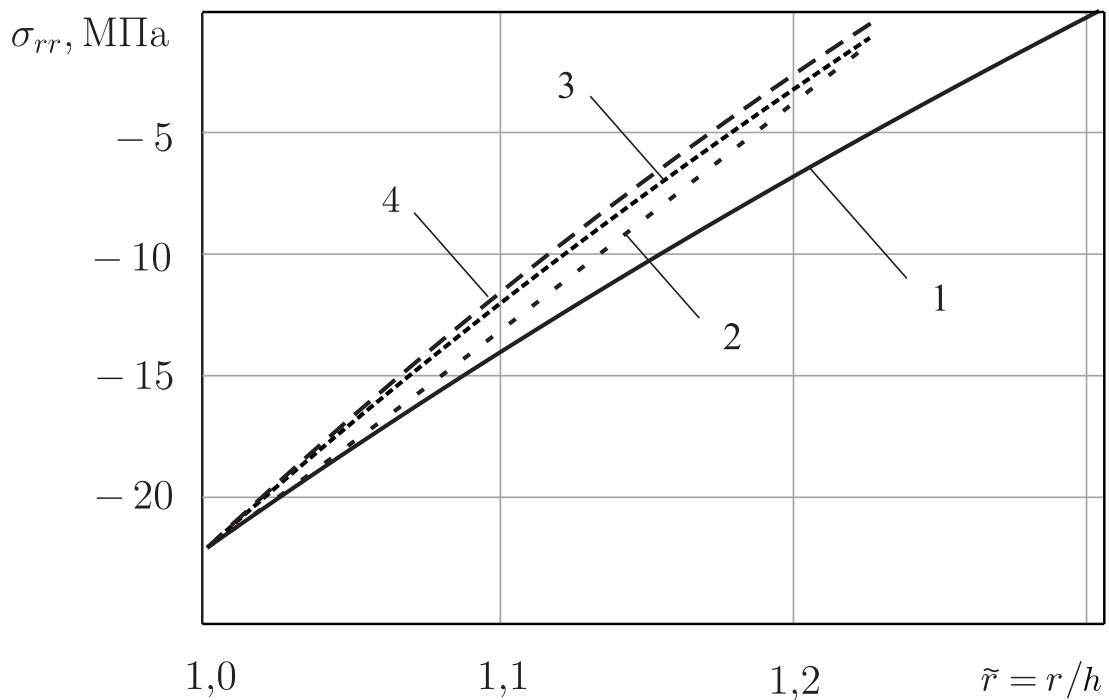


Рисунок 4.9 — Радиальные напряжения для труб из сплава ЭИ698 при $\delta = 0,06$, $\theta = \pi/2$:
 1 — $\sigma_{rr}^{(0)}$, 2 — $\sigma_{rr}^{(0-1)}$, 3 — $\sigma_{rr}^{(0-2)}$, 4 — σ_{rr}^{ANS} .

Графики на рисунках 4.10 и 4.11 построены для скорости радиальной деформации ползучести $\dot{\epsilon}_{rr}$ с использованием первого и второго порядков приближений при значении угла $\theta = \pi/2$, величине сжатия $\delta = 0,04$ для углеродистой стали и $\delta = 0,02$ для сплава ЭИ698 соответственно.

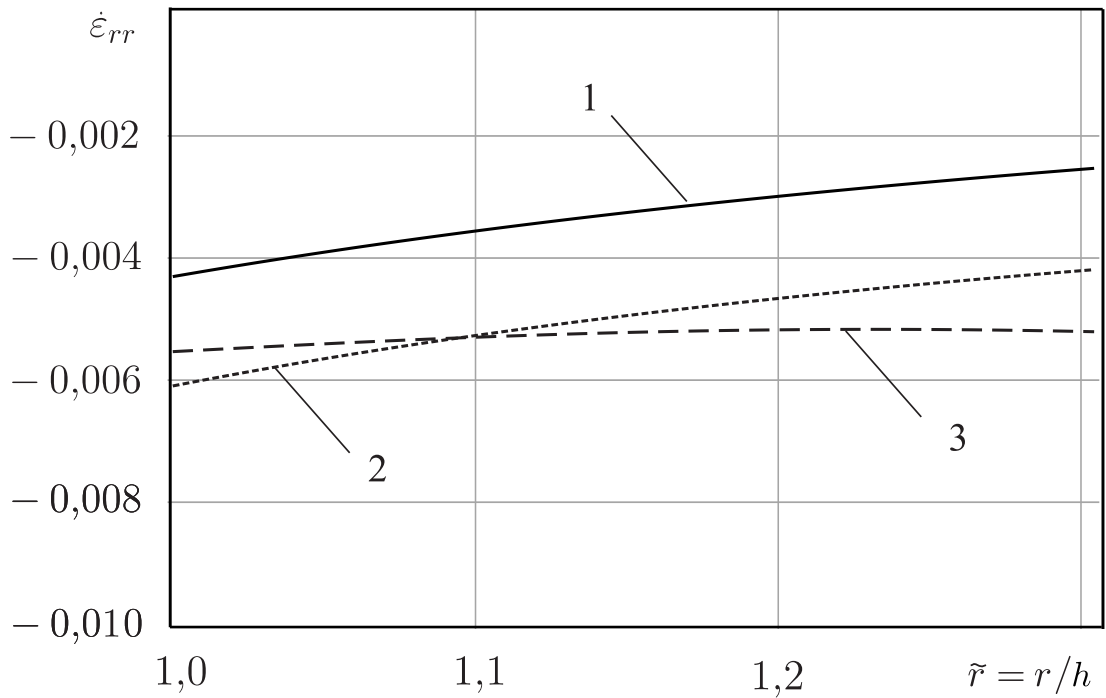


Рисунок 4.10 — Скорость радиальной деформации для труб из углеродистой стали при $\theta = \pi/2$, $\delta = 0,04$: 1 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0)}$, 2 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-1)}$, 3 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-2)}$.

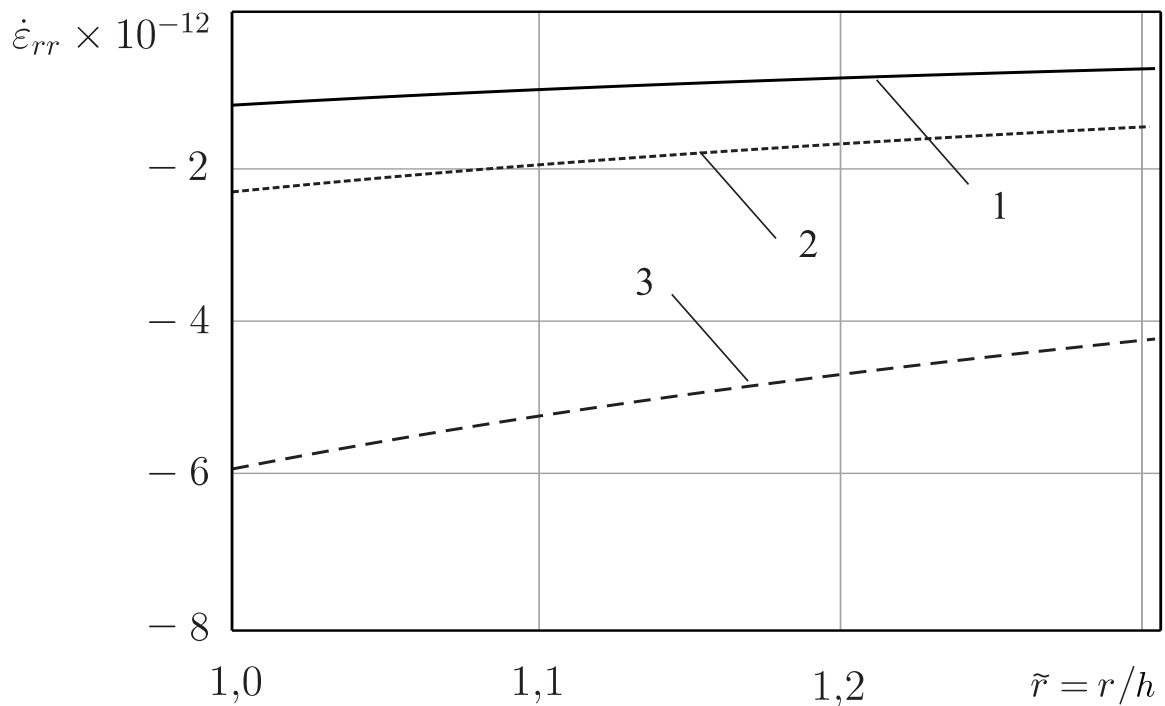


Рисунок 4.11 — Скорость радиальной деформации для труб из сплава ЭИ698 при $\delta = 0,02$, $\theta = \pi/2$:

1 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0)}$, 2 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-1)}$, 3 — $\dot{\epsilon}_{rr}^{(0-2)}$.

Величина сжатия $\delta = 6\%$ для рассмотренной модельной задачи для трубы в абсолютных величинах составляет 9 мм, что при толщине данной трубы 35 мм составляет 26% толщины. Тем не менее, при $\delta = 6\%$ погрешность анали-

тического решения от численного составляет около 10%. Таким образом, можно утверждать, что приближённое аналитическое решение применимо в прикладных задачах при величине сжатия эллиптического внешнего контура до $\delta = 6\%$.

4.7. Выводы по главе 4

- Методом малого параметра до второго порядка приближения включительно построено приближённое аналитическое решение задачи установившейся ползучести толстостенной трубы с эллиптически возмущённым внешним контуром, находящейся под внутренним давлением.
- Выполнено параметрическое исследование изменения тангенциальных и радиальных напряжений от величины малого параметра δ и показателя нелинейности материала n . Показано, что при $\delta \leq 6\%$ второй порядок приближения для напряжений вносит уточнение к первому не более 7% при $n = 3,03$ и не более 4% при $n = 10,96$ в наиболее опасном сечении толстостенной трубы с эллиптически возмущённой внешней границей.
- Получено численное решение данной задачи с помощью программного комплекса **ANSYS** при частных значениях реологических и геометрических характеристик.
- Исследование погрешности приближённого аналитического решения задачи о толстостенной трубе с эллиптически возмущённой внешней границей по сравнению с конечно-элементным решением показывает, что для практического применения использование приближения третьего порядка не представляется целесообразным, поскольку погрешность для напряжений между приближённым аналитическим решением с учётом приближения второго порядка включительно при $\delta = 0,04$ составляет около 6 – 7% по сравнению с конечно-элементным решением.

Оценка надёжности несоосной трубы по деформационному критерию отказа в условиях ползучести при стохастически возмущённой внешней границе

5.1. Оценка надёжности несоосной трубы на основе приближённого аналитического решения

Обеспечение надёжности работы элементов конструкций является одной из основных задач, стоящих в нелинейной механике и, в частности, в теории ползучести. Рассмотрим задачу обеспечения надёжности на модельном примере несоосной трубы со стохастически возмущённой внешней границей. Будем считать, что малый параметр δ (см. рисунок 3.1) является случайной величиной, имеющей нормальный закон распределения. Одним из критериев работоспособности изделия (в нашем случае – толстостенная труба) является деформационный критерий отказа, при котором изделие выходит из строя, если хотя бы в одной его точке какая-либо компонента вектора перемещений достигает некоторого заданного значения u^* , т.е. конструктивный элемент выходит из строя при выполнении условия

$$u(t) \geq u^*, \quad (5.1)$$

где $u(t)$ – интересующая нас компонента вектора перемещений в заданной точке. Применительно к задаче о несоосной трубе в (5.1) под $u(t)$ будем понимать радиальное перемещение в заданной точке внешнего контура. Основной количественной характеристикой надёжности элемента конструкции является вероятность того, что во всех точках элемента конструкции выполняется условие

работоспособности $u(t) < u^*$. Отметим, что критерий отказа (5.1) широко применяется в инженерных прикладных задачах (процессы трения, выбор зазоров между контактирующими деталями и т.д.), в том числе при решении задач в условиях ползучести, где время явно входит в напряженно-деформированное состояние [23, 35, 43, 106].

Для оценки возможности практического применения полученного в главе 3 решения для несоосной толстостенной трубы, находящейся под внутренним давлением на стадии установившейся ползучести, рассмотрим стохастическую постановку указанной задачи, где случайной величиной является малый параметр δ , определяющий величину несоосности толстостенной трубы (см. рисунок 3.1). Одним из методов решения задач в стохастической постановке является метод статистических испытаний (метод Монте-Карло).

Данный метод применялся в работе В.Н. Исуткиной [35] при решении задачи о толстостенной трубе из стохастически неоднородного материала, в исследовании В.В. Радченко, Н.Н. Попова и А.А. Должкового [24] об оценке надежности толстостенной трубы из микронеоднородного материала по деформационному критерию отказа на основании приближенного аналитического решения, полученного методом возмущений; в работе [43], где рассмотрена стохастическая постановка задачи о пластине с круговым отверстием и других работах.

Однако, следует отметить, что в указанных работах рассматривались так называемые внутренние стохастические задачи, когда границы области были фиксированными, а случайными полагались свойства материала, т.е. рассматривались стохастические уравнения состояния. Класс внешних стохастических краевых задач (со стохастически возмущенными границами) в задачах ползучести практически не исследован.

Функция надёжности $P(t)$, описывающая вероятность безотказной работы на отрезке $[0, t]$, является вероятностью того, что случайная функция $u(t)$ принимает значения в интервале $(0, u^*)$ на этом отрезке времени [10, 11]:

$$P(t) = P\{u(t) \in (0, u^*)\}.$$

Для реализации метода статистических испытаний рассмотрим в качестве случайной величины малый параметр δ , определяющий величину несоосности толстостенной трубы (см. рисунок 3.1). При построении вероятностных характеристик ограничимся использованием полученного в главе 3 приближённого аналитического решения задачи методом малого параметра до второго порядка приближения включительно, поскольку, как было показано во второй главе, третий порядок приближения не оказывает существенного влияния на решение задачи в рамках требований существующих ГОСТов по разностенности, но создает дополнительные трудности вычислительного характера.

Приведем алгоритм решения внешней стохастической краевой задачи с использованием построенного приближённого аналитического решения:

- 1) определяется закон плотности распределения случайной величины δ , если имеется соответствующая статистическая информация, либо он постулируется (в модельной задаче);
- 2) исходя из выбранного закона распределения (в настоящей задаче это нормальный закон) генерируется выборка значений случайной величины δ ;
- 3) определяются точки на внешнем контуре несоосной трубы, в которых скорость деформации ползучести $\dot{\epsilon}_{\theta\theta}$ имеет максимальное значение, что выполняется для точек при $\theta = \pi$, причем здесь $\dot{u}_\theta = 0$, а, следовательно, из соотношений типа Коши-Эйлера (2.6) получаем

$$\dot{u}_r = \dot{\epsilon}_{\theta\theta} r \quad \Rightarrow \quad u_r = \dot{\epsilon}_{\theta\theta} r t \quad (5.2)$$

для любого r (при $\theta = \pi$), поскольку на стадии установившейся ползучести $\dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \text{const}$;

- 4) для каждого случайного значения величины δ определяется величина $u_r = u_r(t)$ с использованием (5.2), реологических соотношений (3.48) для

компоненты $\dot{\epsilon}_{\theta\theta}$ и приближённых решений для компонент тензора напряжений (3.69), (3.70), (3.72).

- 5) для конкретной заданной критической величины перемещения u_r^* : $u_r = u_r^*$ (при $\theta = \pi$, $r = b + \delta \cos \theta + \delta^2(\cos 2\theta - 1)/4b$, см. (3.2)) определяют моменты времени t^* , при которых радиальное перемещение достигает критического значения u_r^* ;
- 6) расчётные значения времени t^* образуют статистическую выборку случайной величины времени отказа, для которой можно определить характеристики этой выборки: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, доверительный интервал и т.д.

Для иллюстрации применения метода статистических испытаний рассмотрим модельную трубу с внутренним радиусом $a = 115$ мм и возмущенным на малую величину δ внешним радиусом $b = 150$ мм, находящуюся под внутренним давлением. В главе 3 было показано, что значение $\tilde{\delta} = 0,03$ соответствует величине разностенности трубы 10%, что является практически предельно допустимым по ГОСТ 8732–78 [18].

Величина δ является случайной с нормальным законом распределения, поэтому используем значение $\tilde{\delta} = 0,03$ в качестве математического ожидания, т.е. $m_\delta = 0,03$, а для среднего квадратического отклонения в дальнейших модельных расчетах будем использовать величину $\sigma_\delta = 0,009$. Учитывая нормальный закон распределения и численные значения для m_δ и σ_δ , можно сгенерировать любое количество значений $\tilde{\delta}$ (в дальнейших расчетах генерировалось по $h = 30$ значений), и далее при каждом δ рассчитать функцию $u_r = u_r(t)$ по (5.2) с учетом приближенных аналитических решений для компонент тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$, которые используются для расчёта $\dot{\epsilon}_{\theta\theta}$.

Проиллюстрируем детально изложенную выше методику на двух модельных задачах для толстостенной трубы:

- 1) из углеродистой стали при параметрах нелинейности $n = 3,03$, $A =$

$9,04 \cdot 10^{-9}$ МПа $^{-n}$ ч $^{-1}$, находящейся под внутренним давлением $q = 10$ МПа, для которой зададим критическое перемещение $u_r^* = 0,0522 \cdot a = 6$ мм, что составляет 2% от наружного диаметра трубы;

2) из сплава ЭИ698 при параметрах нелинейности $n = 10,96$ $A = 4,57 \cdot 10^{-33}$ МПа $^{-n}$ ч $^{-1}$, находящейся под внутренним давлением $q = 60$ МПа, для которой зададим критическое перемещение $u_r^* = 0,0261 \cdot a = 3$ мм, что составляет 1% от наружного диаметра трубы.

Графики зависимости перемещения $u_r(t)$ от времени для каждого значения малого параметра δ для того и другого варианта приведены на рисунках 5.1 и 5.2.

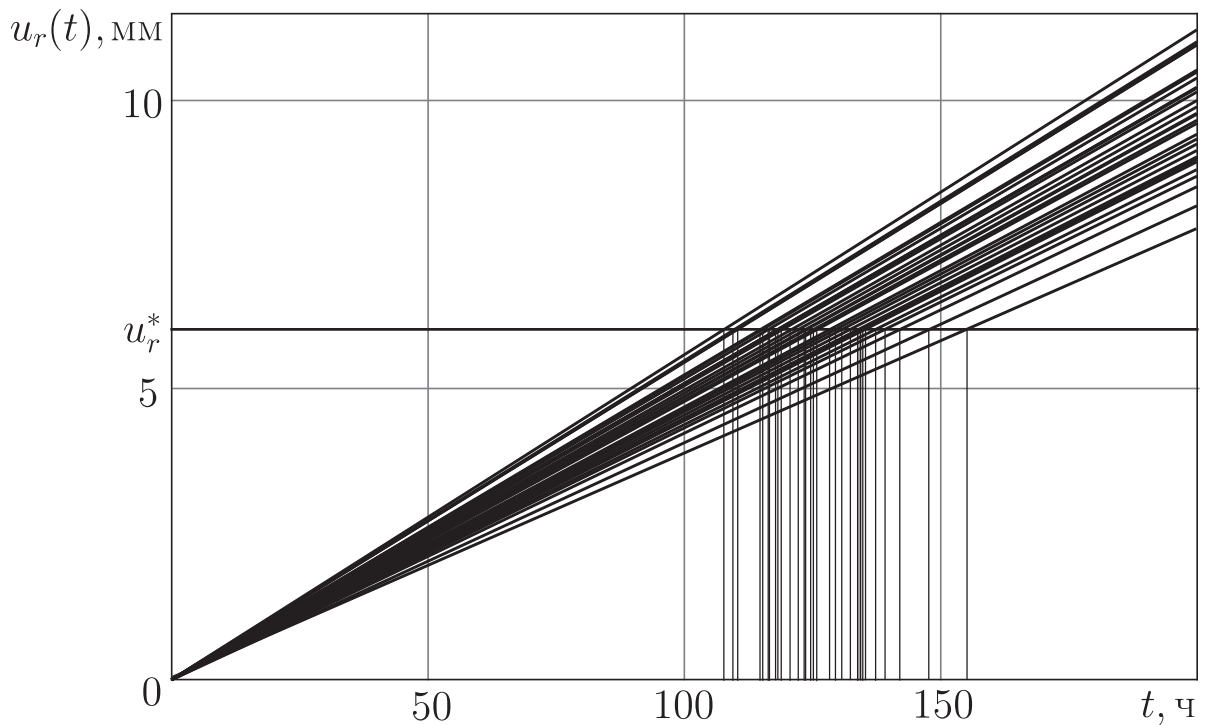


Рисунок 5.1 — Выборка радиальных перемещений $u_r(t)$ при $m_\delta = 0,03$ и $\sigma_\delta = 0,009$ для трубы из углеродистой стали

При решении каждой из 30 детерминированных задач установившейся ползучести определяется критическое время отказа t^* для трубы из углеродистой стали и сплава ЭИ698, т.е. решается уравнение $u_r(t^*) = u_r^*$. Для значений $m_\delta = 0,03$ и $\sigma_\delta = 0,009$ время отказа t^* для каждой реализации приведено в таблице 5.1.

Таблица 5.1 — Выборка $\tilde{\delta}_i$ и время t_i^* достижения критического значения $u_r(t_i^*) = u_r^*$ для углеродистой стали и сплава ЭИ698 при $m_\delta = 0,03$ и $\sigma_\delta = 0,009$

№ п/п, i	$\tilde{\delta}_i$	t_i^* , ч для $n = 3,03$	$t_i^* \cdot 10^5$, ч для $n = 10,96$
1	0,0415	109,53	1,27
2	0,0343	118,27	1,55
3	0,0074	161,60	3,78
4	0,0377	114,02	1,41
5	0,0202	138,10	2,38
6	0,0365	115,55	1,46
7	0,0297	124,27	1,76
8	0,0420	109,00	2,16
9	0,0183	141,03	2,54
10	0,0258	129,80	1,99
11	0,0236	132,97	2,13
12	0,0292	124,97	1,79
13	0,0415	109,46	1,27
14	0,0148	146,70	2,87
15	0,0329	120,00	1,61
16	0,0307	122,91	1,71
17	0,0319	121,34	1,65
18	0,0235	133,18	2,14
19	0,0362	115,90	1,47
20	0,0267	128,59	1,94
21	0,0227	134,24	2,19
22	0,0351	117,31	1,51
23	0,0369	117,47	1,44
24	0,0214	136,27	2,29
25	0,0309	122,72	1,71
26	0,0247	131,35	2,06
27	0,0374	114,42	1,42
28	0,0437	106,98	1,21
29	0,0273	127,47	1,90
30	0,0232	133,53	2,16

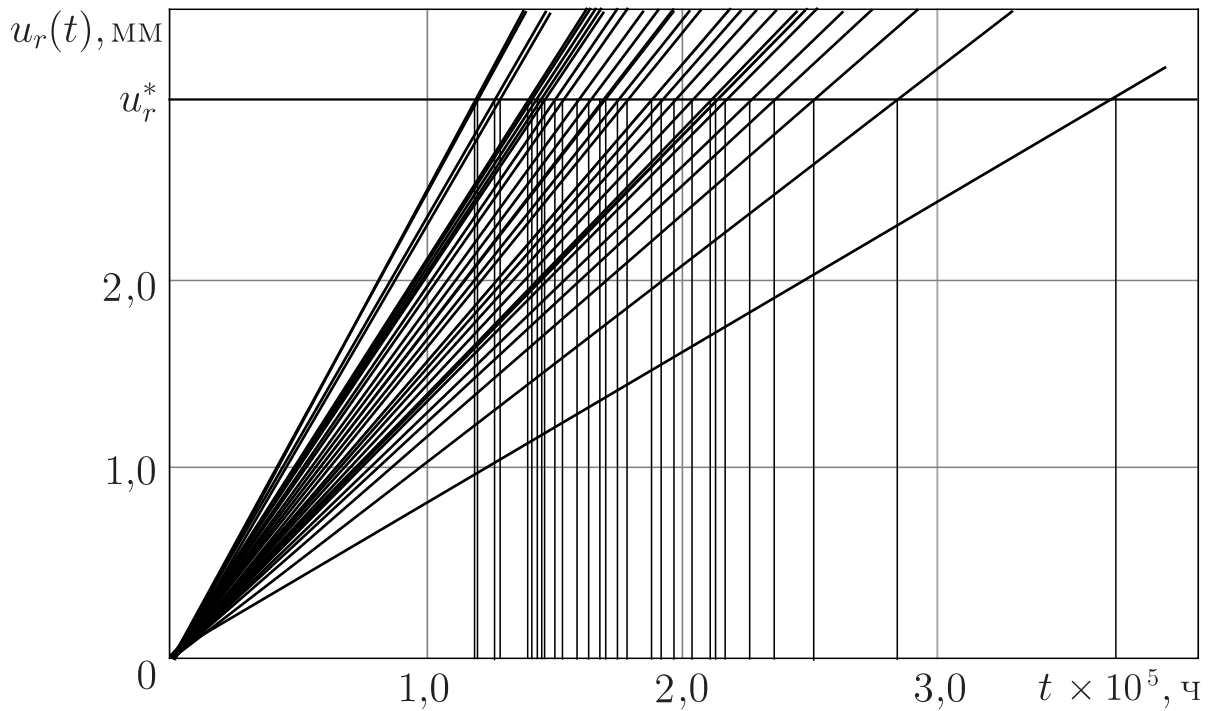


Рисунок 5.2 — Выборка радиальных перемещений $u_r(t)$ при $m_\delta = 0,03$ и $\sigma_\delta = 0,009$ для трубы из сплава ЭИ698

Для выборки из 30 критических времен t_i^* ($i = \overline{1, 30}$) определяются статистические характеристики. Для этого в качестве оценки для математического ожидания \tilde{m}_t используется среднее арифметическое полученных значений критического времени t_i^* :

$$\tilde{m}_t = \frac{\sum_{i=1}^{30} t_i^*}{30}. \quad (5.3)$$

Несмещённая оценка для дисперсии математического ожидания дискретной случайной величины согласно [13] имеет вид:

$$\tilde{D}_t = \frac{\sum_{i=1}^{30} (t_i^* - \tilde{m}_t)^2}{29}. \quad (5.4)$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_{\tilde{m}_t} = \sqrt{\tilde{D}_t/30}$.

Определим границы доверительного интервала I_β для математического ожидания при доверительной вероятности $\beta = 0,95$ и $\beta = 0,9973$ для двух рассмотренных выше модельных труб, предполагая нормальный закон для вре-

мени отказа:

$$I_{\beta} = (\tilde{m}_t - t_{\beta}\sigma_{\tilde{m}_t}, \tilde{m}_t + t_{\beta}\sigma_{\tilde{m}_t}),$$

где t_{β} – количество средних квадратических отклонений $\sigma_{\tilde{m}_t}$, которое необходимо отложить от центра рассеивания (т.е. математического ожидания), чтобы достичь вероятности β . В результате проведенных расчётов в таблице 5.2 показаны значения вероятностей и доверительные интервалы для математического ожидания времени отказа $m_t = 125,3$ ч для углеродистой стали и математического ожидания времени отказа $m_t = 1,87 \cdot 10^5$ ч для сплава ЭИ698 при заданном значении математического ожидания малого параметра $m_{\delta} = 0,03$ и $\sigma_{\delta} = 0,009$. Нижняя граница доверительного интервала времени отказа и определяет время

Таблица 5.2 – Доверительные интервалы времени отказа t^* при $m_{\delta} = 0,03$ и $\sigma_{\delta} = 0,09$ для труб из углеродистой стали и сплава ЭИ698

β	t_{β}	Труба из углеродистой стали, $I_{\beta}, \text{ч}$	Труба из сплава ЭИ698, $I_{\beta}, \text{ч}$
0,95	1,96	(120,88 ; 129,71)	$(1,66 \cdot 10^5; 2,07 \cdot 10^5)$
0,9973	3,0	(118,54 ; 132,05)	$(1,56 \cdot 10^5; 2,18 \cdot 10^5)$

безотказной работы элемента конструкции с соответствующей вероятностью.

Таким образом, для двух данных модельных задач время отказа по деформационному критерию отказа для трубы из углеродистой стали составляет $t^* = 120,88$ ч при доверительной вероятности $\beta = 0,95$ и $t^* = 118,54$ ч при $\beta = 0,9973$ (трехсигмовый интервал), а для трубы из сплава ЭИ896 эти величины соответственно $t^* = 1,66 \cdot 10^5$ ч при $\beta = 0,95$ и $t^* = 1,56 \cdot 10^5$ ч при $\beta = 0,9973$.

5.2. Статистический анализ времени отказа

В предыдущем пункте *á priori* принято и использовано предположение о нормальном законе распределения времени отказа. Далее сделана попытка обосновать эту гипотезу.

Для проверки гипотезы о нормальности распределения случайной величины t^* воспользуемся критерием согласия Шапиро-Уилка, который применяется при небольших объемах выборок (порядка $8 \div 50$ случайных величин), и является надежным критерием выбора или отклонения гипотезы о нормальном распределении [41, 46].

Критерий основан на получении статистики вида

$$W = \frac{1}{s^2} \left[\sum_{i=1}^k a_{h-i+1} (t_{h-i+1}^* - t_i^*) \right]^2; \quad \text{где} \quad s^2 = \sum_{i=1}^h (t_i^* - m_t)^2, \quad m_t = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h t_i^*.$$

Индекс k изменяется от 1 до $h/2$ или от 1 до $(h-1)/2$ при чётном и нечётном h соответственно, т.е. при $h = 30$ $k = 15$. Коэффициенты a_i приведены в ГОСТ Р ИСО 5479-2002 «Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения» [19].

Нулевая гипотеза нормальности отклоняется при значениях статистики $W < W(\alpha)$ на уровне значимости α (т.е. допустимой для данной задачи вероятности ошибки). Критические значения статистики $W(\alpha)$ приведены в монографии [41] в табл. 66 (с. 240). Принимая $\alpha = 0,01$ табличное значение $W_{30}(0,01) = 0,900$.

При $n = 3,03$ (труба из углеродистой стали) получаем значение статистики $W = 0,9505$, что больше табличного значения, следовательно, «нулевая» гипотеза о нормальном распределении статистического ряда, состоящего из значений времени до достижения перемещением u_r критического значения, не отвергается. Для трубы из сплава ЭИ698 ($n = 10,96$) значение статистики $W = 0,916$, таким образом, «нулевая» гипотеза о нормальности распределения не отвергается и для сплава ЭИ698.

Для определения числовых характеристик нормального распределения времени до отказа необходимо сгруппировать выборку из 30 времён по разрядам,

количество которых l определяется по правилу Старджена [46]:

$$l = 1 + 3,3 \lg 30 \approx 6.$$

Для указанных рядов определяются статистические характеристики:

- статистическое среднее \hat{m}_t , которое согласно закону больших чисел при увеличении числа опытов сходится к математическому ожиданию:

$$\hat{m}_t = \frac{\sum_{i=1}^{30} t_i}{30}; \quad (5.5)$$

- статистическая дисперсия:

$$\hat{D}_t = \frac{\sum_{i=1}^{30} (t_i^* - \hat{m}_t)^2}{30}; \quad (5.6)$$

- статистическое среднее квадратичное отклонение:

$$\hat{\sigma}_t = \sqrt{\hat{D}_t}. \quad (5.7)$$

Приравнивая полученные статистические характеристики распределения математическому ожиданию и среднему квадратичному отклонению, определим плотность нормального закона для времени отказа:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m_t)^2}{2\sigma_t^2}}. \quad (5.8)$$

Статистический ряд времени отказа и плотность нормального закона для рассматриваемых модельных задач представлены в виде гистограммы и кривой распределения $f(t)$ для трубы из углеродистой стали на рисунке 5.3 и для сплава ЭИ698 на рисунке 5.4. Результаты расчета величины \hat{m}_t , \hat{D}_t и $\hat{\sigma}_t$ для обоих модельных примеров приведены в таблице 5.3.

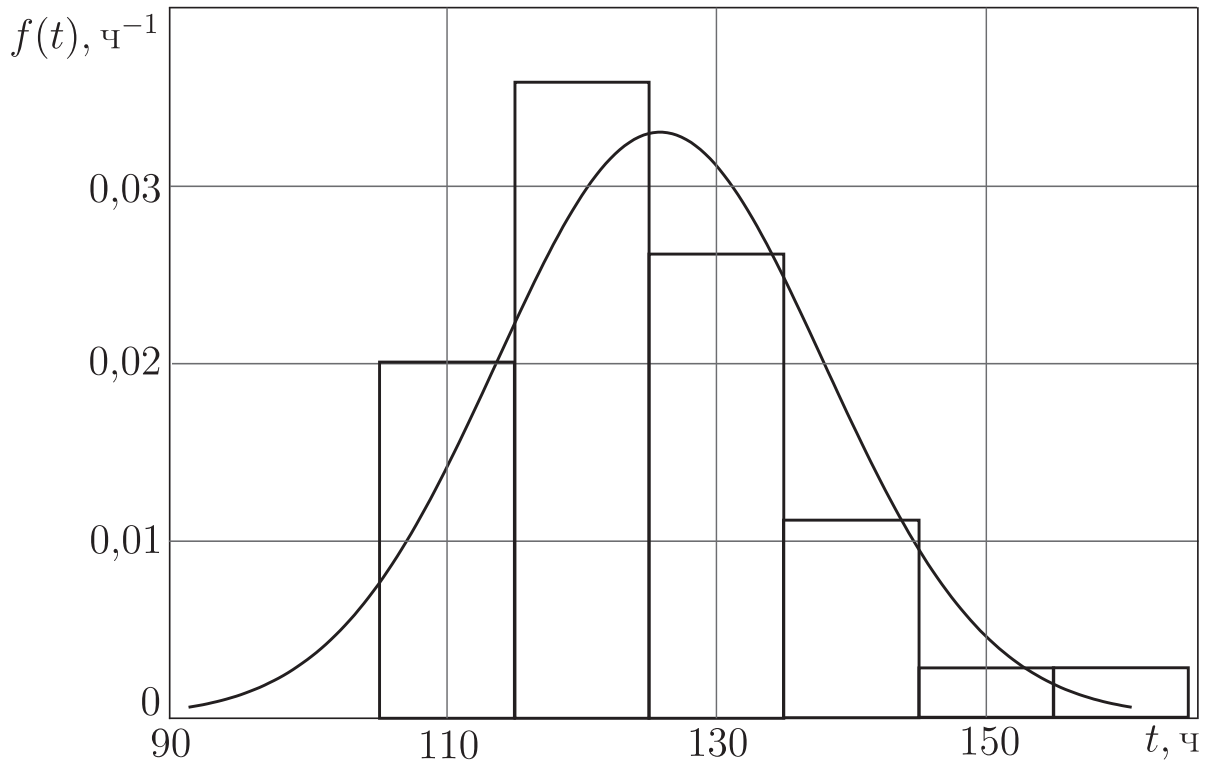


Рисунок 5.3 — Гистограмма и плотность нормального распределения для времени отказа трубы из углеродистой стали при $m_\delta = 0,03$

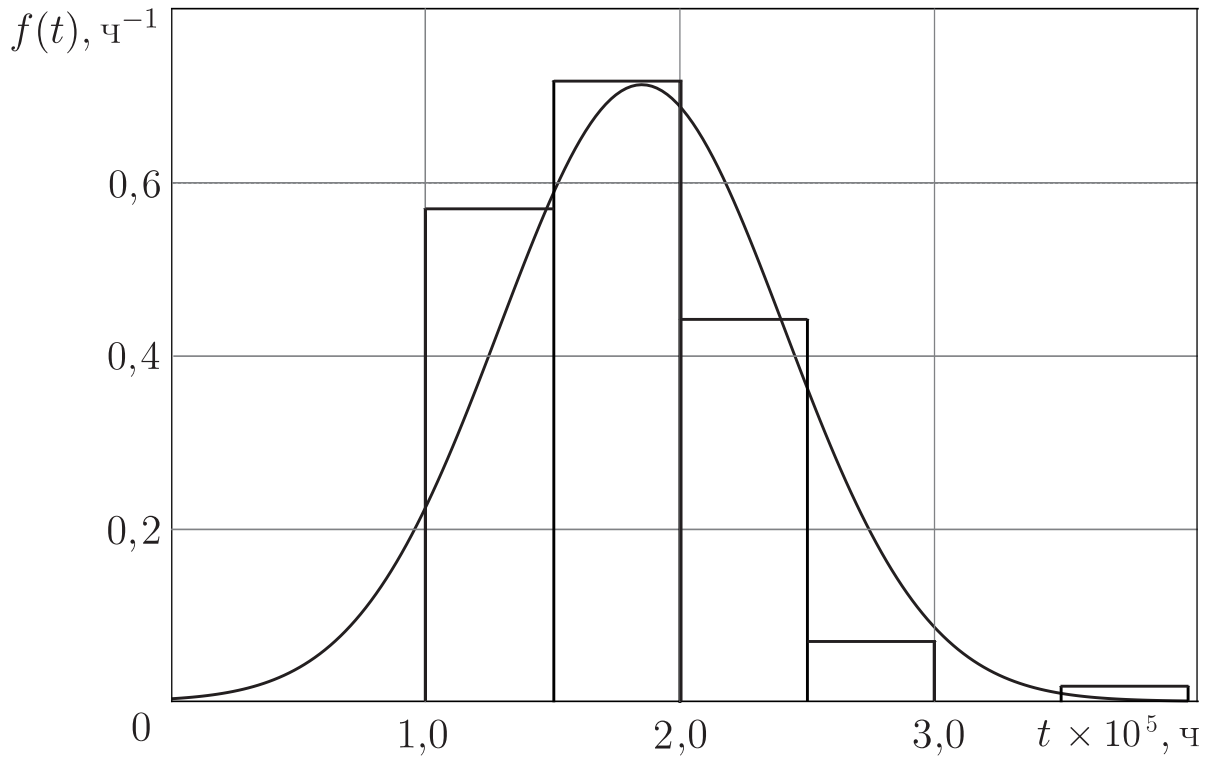


Рисунок 5.4 — Гистограмма и плотность нормального распределения для времени отказа трубы из сплава ЭИ698 при $m_\delta = 0,03$

Таблица 5.3 — Характеристики нормального распределения времени отказа для трубы из углеродистой стали и сплава ЭИ698 при $m_\delta = 0,03$

Материал трубы	$\hat{m}_t, \text{ч}$	$\hat{D}_t, \text{ч}^2$	$\hat{\sigma}_t, \text{ч}$
углеродистая сталь	125	147,1	12,1
сплав ЭИ698	$1,85 \cdot 10^5$	$3,13 \cdot 10^9$	$5,60 \cdot 10^4$

5.3. Расчёт работоспособности толстостенной трубы с возмущёнными границами на основе функции надёжности

Рассмотренный в пункте 5.1 «лобовой» метод оценки надёжности на основе «экспериментальной» информации, полученный расчётом времени отказа для каждой реализации, требует при моделировании существенных временных затрат, поскольку для каждого значения u^* требуется статистический ряд времён отказа для всей совокупности сгенерированных реализаций функции $u = u(t)$ в заданной точке. Рассмотрим приближённый аналитический подход для оценки работоспособности толстостенной трубы с возмущёнными границами на основе функции надёжности.

Определим вероятность безотказной работы через функцию надёжности $P(t)$ на отрезке времени $(0, t)$ с использованием функции распределения $F(t)$:

$$\begin{aligned}
 P(t) = F(u^*(t)) - F(u^*(0)) &= \int_0^{u^*(t)} f(x, t) dx = \\
 &= \frac{1}{\sigma_u(t)\sqrt{2\pi}} \int_0^{u^*} \exp^{-[x-m_u(t)]^2/2[\sigma_u(t)]^2} dx. \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Здесь $f(x, t)$ – плотность функции распределения $F(t)$. Уравнение (5.9) для вероятности безотказной работы при нормальном законе распределения прини-

мает интегральный вид:

$$P(t) = \frac{1}{\sigma_u(t)\sqrt{2\pi}} \int_0^{u^*} \exp^{-[x-m_u(t)]^2/2[\sigma_u(t)]^2} dx \quad (5.10)$$

или может быть выражена с использованием функции Лапласа:

$$P(t) = \Phi \left[\frac{u^* - m_u(t)}{\sigma_u(t)} \right] + \Phi \left[\frac{m_u(t)}{\sigma_u(t)} \right], \quad (5.11)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ — функция Лапласа.

Из формул (5.10), (5.11) следует, что если известны аналитические зависимости для математического ожидания $m_u(t)$ и среднеквадратического отклонения $\sigma_u(t)$, то при заданном значении вероятности $P(t)$ и известном значении критической величины перемещения u^* время до разрушения можно найти из решения интегральных уравнений (5.10) или (5.11).

В связи с вышеизложенным можно предложить следующую методику оценки надёжности толстостенной трубы с возмущёнными границами, используя метод Монте-Карло. Аналогично методике, изложенной в пункте 5.1, генерируются значения случайной величины δ и рассчитывается спектр случайных функций $u = u(t, \delta)$. Имея выборку случайных функций $u = u(t)$, можно найти оценки случайных функций математического ожидания $\hat{m}_u(t)$ и среднего квадратического отклонения $\hat{\sigma}_u(t)$, а затем положить

$$m_u(t) \cong \hat{m}_u(t), \quad \sigma_u(t) \cong \hat{\sigma}_u(t) \quad (5.12)$$

и использовать их при решении интегральных уравнений (5.10) или (5.11) для определения времени безотказной работы.

Применим изложенную методику к двум рассматриваемым модельным примерам. В каждой задаче генерировалось по 30 реализаций для перемеще-

ний $u = u(t)$ (см. рисунки 5.1 и 5.2). Далее в каждом случае были построены оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения, которые имеют линейный характер

$$\hat{m}_u(t) = C_m t, \quad \hat{\sigma}_u(t) = C_\sigma t, \quad (5.13)$$

где C_m, C_σ – коэффициенты, определяемые для каждой из задач исходя из статистического анализа выборок $u = u(t)$. Так, для труб из углеродистой стали уравнения зависимости математического ожидания и среднего квадратического отклонения от времени имеют вид:

$$\hat{m}_u(t) = 4,167 \cdot 10^{-4} t, \quad \hat{\sigma}_u(t) = 7,227 \cdot 10^{-6} t,$$

для труб из сплава ЭИ698 соответственно

$$\hat{m}_u(t) = 1,500 \cdot 10^{-7} t, \quad \hat{\sigma}_u(t) = 6,787 \cdot 10^{-9} t.$$

Далее величины \hat{m}_u и $\hat{\sigma}_u$ в соответствии с (5.12) использовались в соотношениях (5.10) или (5.11). Из приведенных данных следует

$$\hat{m}_u(t)/\hat{\sigma}_u(t) = C_m/C_\sigma \gg 1.$$

Поэтому для второго слагаемого в правой части уравнения (5.11) с использованием табличного значения $\Phi(x)$ имеем

$$\Phi \left[\frac{m_u(t)}{\sigma_u(t)} \right] = \Phi \left[\frac{C_m}{C_\sigma} \right] = 0,4999 \approx 0,500. \quad (5.14)$$

Определим критическое время t^* , за которое с вероятностью $P(t)$ перемещение $u_r(t)$ достигнет значения u^* . Из (5.11) следует, что время безотказной

работы определяется из решения уравнения

$$P(t) = \Phi \left[\frac{u^* - m_u(t)}{\sigma_u(t)} \right] + \Phi \left[\frac{C_m}{C_\sigma} \right] = \Phi \left[\frac{u^*}{\sigma_u(t)} - \frac{C_m}{C_\sigma} \right] + 0,500 \quad (5.15)$$

относительно времени t .

Выполненные расчеты времени безотказной работы для труб из углеродистой стали при $u_r^* = 6$ мм и для труб из сплава ЭИ698 при $u_r^* = 3$ мм сведены в таблице 5.4.

Таблица 5.4 — Время безотказной работы для труб из углеродистой стали и из сплава ЭИ698 (при $m_\delta = 0,03$), определенное с использованием функции Лапласа и уравнения (5.15).

Вероятность $P(t)$	Время безотказной работы t^* , ч	
	труба из углерод. стали	труба из сплава ЭИ698
0,95	121,79	$1,62 \cdot 10^5$
0,9973	119,47	$1,54 \cdot 10^5$

В ряде случаев необходимо прямое интегрирование соотношения (5.10), которое можно рассматривать как интегральное уравнение относительно параметра t . Результаты численного решения интегрального уравнения (5.10) представлены в таблице 5.5.

Таблица 5.5 — Время безотказной работы для трубы из углеродистой стали и сплава ЭИ698 (при $m_\delta = 0,03$), определенное путем интегрирования уравнения (5.10).

Вероятность $P(t)$	Время безотказной работы t^* , ч	
	труба из углерод. стали	труба из сплава ЭИ698
0,95	121,79	$1,619 \cdot 10^5$
0,9973	119,50	$1,545 \cdot 10^5$

Анализ данных из таблиц 5.2, 5.4 и 5.5 о вероятности безотказной работы несоосной трубы из модельных материалов при $m_\delta = 0,03$ в соответствии с деформационным критерием отказа показывает, что время безотказной работы по обеим методикам даёт практически одно и тоже значение. Расхождения связаны, по-видимому, с погрешностью вычисления интегралов и ограниченным объемом выборки. Осредняя данные таблиц 5.2, 5.4 и 5.5, можно констатировать

в данных модельных примерах, что для трубы из углеродистой стали время безотказной работы составляет:

- с вероятностью $P(t) = 0,95$ $t^* = 121,5$ ч,

- с вероятностью $P(t) = 0,9973$ $t^* = 119,2$ ч;

а для трубы из сплава ЭИ698 время безотказной работы составляет:

- с вероятностью $P(t) = 0,95$ $t^* = 1,63 \cdot 10^5$ ч,

- с вероятностью $P(t) = 0,9973$ $t^* = 1,55 \cdot 10^5$ ч.

Графически изложенный метод определения времени отказа через функцию надёжности проиллюстрирован на рисунке 5.5. Здесь построена (протабулирована) с использованием (5.10) функция $P = P(t)$ для трубы из сплава ЭИ698 при заданном $u^* = 3$ мм. Тогда, задавая численные значения вероятности $P_1 = 0,95$ и $P_2 = 0,9973$, графически можно определить время отказа $t^* = 1,63 \cdot 10^5$ ч и $t^* = 1,55 \cdot 10^5$ ч соответственно. Однако, нужно учитывать, что функцию надёжности нужно перестраивать с изменением критической величины u^* .

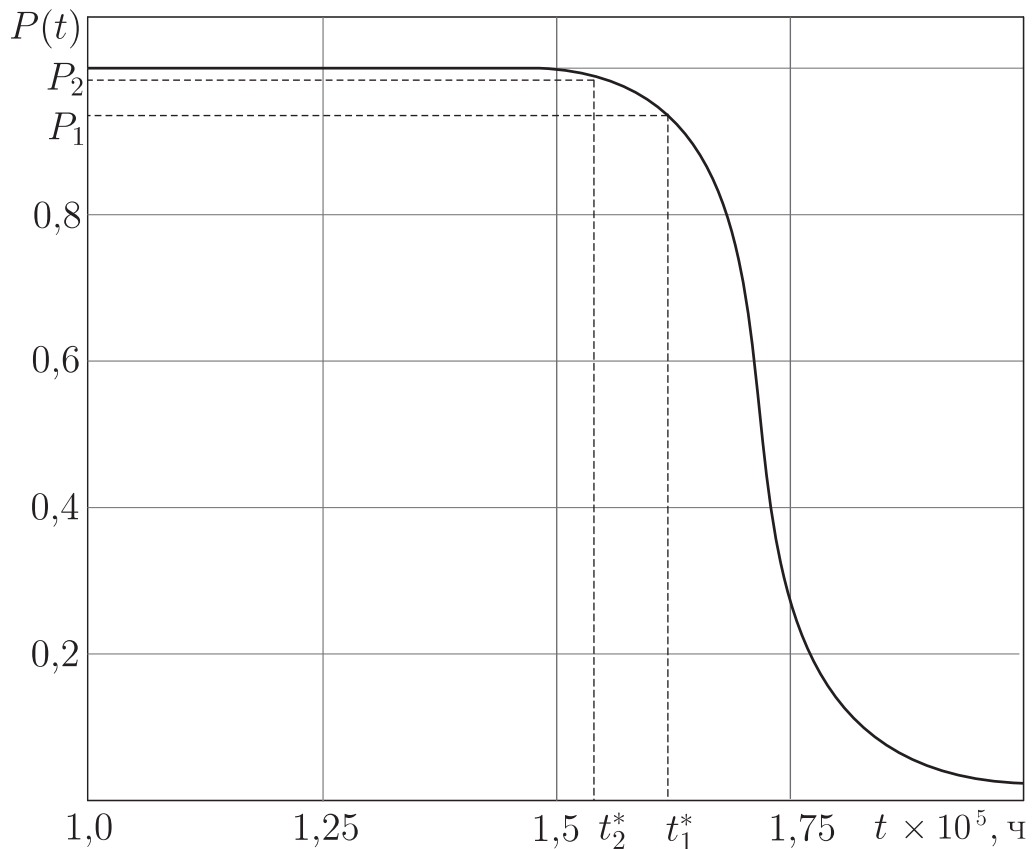


Рисунок 5.5 — Функция надёжности $P(t)$ для труб из сплава ЭИ698 при $m_\delta = 0,03$

Таким образом, при наличии приближённых аналитических решений для компонент тензора напряжений решение краевой задачи для несоосной трубы сводится к табулированию функций и алгебраических выражений, а в задачах надёжности добавляются простейшие математические операции осреднения для получения математического ожидания m_u и среднего квадратического отклонения σ_u . При численных же подходах требуется каждый раз решать эту задачу, например, методом конечных элементов при любом изменении параметров. А задачи табулирования функции и численного решения краевой задачи в полной постановке – это совершенно разные задачи по трудоёмкости.

5.4. Выводы по главе 5

- Разработана методика расчета на надёжность толстостенной трубы с возмущённым внешним контуром, находящейся под внутренним давлением, при установившейся ползучести, по деформационному критерию отказа. В методике используется построенное приближённое аналитическое решение задачи о несоосной толстостенной трубе методом малого параметра до второго порядка приближения включительно.
- Выполнен вариативный параметрический анализ оценки надёжности несоосной толстостенной трубы с возмущёнными границами в зависимости от показателя нелинейности установившейся ползучести, различной величины предельно допустимого перемещения, различной доверительной вероятности, разных внутренних давлениях.

Заключение

Сформулируем основные результаты выполненных в настоящей диссертации исследований:

1. Предложен аналитический метод построения приближённого решения для толстостенной трубы, находящейся под внутренним давлением на стадии установившейся ползучести, с произвольно возмущённой внешней границей методом малого параметра до третьего порядка приближения включительно и предложена методика решения задачи для каждого приближения для случая плоского деформированного состояния.
2. Для двух видов возмущения внешней границы толстостенной трубы, находящейся под внутренним давлением, построены приближённые аналитические решения нелинейной краевой задачи установившейся ползучести методом малого параметра: в случае несоосности трубы – до приближения третьего порядка включительно; для случая эллиптически возмущённого внешнего контура – до приближения второго порядка включительно.
3. Проведено исследование зависимости изменения тангенциальных и радиальных напряжений в модельных задачах для труб из углеродистой стали и жаропрочного сплава ХН73МБТЮ (ЭИ698) в зависимости от величины малого параметра $\tilde{\delta}$. Показано, что при $\tilde{\delta} \leq 4\%$ (это соответствует нормативным ГОСТовским требованиям на максимально допустимую разностенность при изготовлении труб) третий порядок приближений вносит уточнение ко второму не более $0,5\%$ при $n = 3,03$ и $n = 10,96$, а при $\tilde{\delta} = 10\%$ уточнение составляет менее 8% при $n = 3,03$ и 5% при $n = 10,96$ в наиболее опасном сечении несоосной толстостенной трубы. В наиболее опасном сечении толстостенной трубы с эллиптически возмущённой внешней границей при $\delta \leq 4\%$ второй порядок приближений вносит уточнение к первому не более 4% при $n = 3,03$ и не более 2% при $n = 10,96$.
4. Разработаны две конечно-элементные математические модели толстостен-

ной трубы: для несоосной трубы и для трубы с эллиптически возмущённым внешним контуром и получены численные решения задач для анализируемых частных случаев.

5. Проведено исследование погрешности приближённого аналитического решения по сравнению с конечно-элементным решением для модельных примеров несоосной трубы и трубы с эллиптическим внешним контуром. Показано, что погрешность приближённого аналитического решения к численному для модельных примеров несоосных труб при $\tilde{\delta} = 0,04$ составляет не более 2%; для модельных примеров трубы с эллиптически возмущённой внешней границей – не превышает 7%.
6. Разработана методика расчета на надёжность толстостенной трубы с возмущённым внешним контуром, находящейся под внутренним давлением, в условиях установившейся ползучести по деформационному критерию отказа. В методике используется построенное приближённое аналитическое решение данной задачи методом малого параметра до второго порядка приближения включительно. Выполнен вариативный параметрический анализ показателей надёжности несоосной толстостенной трубы с возмущёнными границами в зависимости от показателя нелинейности установившейся ползучести, различной величины предельно допустимого перемещения, различных значений доверительной вероятности и внутренних давлений.

Список литературы

1. Архипов, Н. В. Задача о деформировании микронеоднородного цилиндра [Текст] / Н. В. Архипов // Вестник МГУ. Серия I: Математика, механика. — 1984. — № 3. — С. 50–54.
2. Астафьев, В. И. К вопросу о поврежденности и критериях разрушения при ползучести [Текст] / В. И. Астафьев // Проблемы прочности. — 1983. — № 3. — С. 11–13.
3. Астафьев, В. И. Нелинейная механика разрушения [Текст] / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. — Самара : Самарский университет, 2001. — 562 с.
4. Бадаев, А. Н. К вопросу об определении функции распределения параметров уравнения состояния ползучести [Текст] / А. Н. Бадаев // Проблемы прочности. — 1984. — № 12. — С. 22–26.
5. Бадаев, А. Н. Стохастическое прогнозирование ползучести жаропрочных сплавов с использованием метода монте-карло [Текст] / А. Н. Бадаев // Проблемы прочности. — 1985. — № 2. — С. 7–10.
6. Башкинова, Е. В. Решение краевой задачи установившейся ползучести для неосесимметричной толстостенной трубы [Текст] / Е. В. Башкинова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2002. — № 16. — С. 105–110.
7. Беляев, Н. М. Применение теории пластических деформаций к расчетам на ползучесть деталей при высоких температурах [Текст] / Н. М. Беляев // Изв. АН СССР, ОТН. — 1943. — № 7. — С. 24–35.
8. Бойл, Д. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести [Текст] / Дж. Бойл, Дж. Спенс. — М. : Мир, 1985. — 360 с.
9. Болотин, В. В. Статистические методы в строительной механике [Текст] / В. В. Болотин. — М. : Стройиздат, 1965. — 279 с.
10. Болотин, В. В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расче-

- тах сооружений [Текст] / В. В. Болотин. — М. : Стройиздат, 1982. — 352 с.
11. Болотин, В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций [Текст] / В. В. Болотин. — М. : Машиностроение, 1984. — 312 с.
 12. Быковцев, Г. И. Теория пластичности [Текст] / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. — Владивосток : Дальнаука, 1998. — 528 с.
 13. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. — 6-е изд. стер. [Текст] / Е. С. Вентцель. — М. : Высшая школа, 1999. — 576 с.
 14. Вильдеман, В. Э. Закритическое деформирование сталей при плоском напряженном состоянии [Текст] / В. Э. Вильдеман, Е. В. Ломакин, М. П. Третьяков // Изв. РАН. МТТ. — 2014. — № 1. — С. 26–36.
 15. Вильдеман, В. Э. Экспериментальное исследование закономерностей деформирования и разрушения материалов при плоском напряженном состоянии [Текст] / В. Э. Вильдеман, Т. В. Санникова, М. П. Третьяков // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2010. — № 5. — С. 106–111.
 16. Вильдеман, В. Э. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов [Текст] / В. Э. Вильдеман, Ю. В. Соколкин, А. А. Ташкинов. — М. : Наука, 1997. — 228 с.
 17. Гончаренко, В. Н. Вариационная формулировка линейных стохастических краевых задач теории упругости [Текст] / В. Н. Гончаренко // Прикладная механика. — 1982. — Т. 18, № 6. — С. 10–14.
 18. ГОСТ 8732-78 (СТ СЭВ 1481-78). Трубы стальные бесшовные горячедеформированные [Текст]. — М. : ИПК Изд-во Стандартов, 1998. — 10 с.
 19. ГОСТ Р ИСО 5479-2002. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения [Текст]. — М. : Изд-во стандартов, 2002. — 30 с.
 20. ГОСТ ISO 9329-4-2013. Трубы стальные бесшовные для работы под давлением. Технические условия. Часть 4. Аустенитные коррозионно-стойкие стали [Текст]. — М. : Стандартинформ, 2014. — 32 с.
 21. Гузь, А. Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упру-

- гости [Текст] / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. — Киев : Выща школа, 1982. — 352 с.
22. Дегтярев, А. И. Статистический анализ экспериментальных данных по релаксации напряжений высоконаполненного полимерного материала [Текст] / А. И. Дегтярев, Т. Б. Кошкина, А. Н. Куприянов // Вопросы механики полимеров и систем. Свердловск: УНЦ АН СССР. — 1976. — С. 99–102.
23. Должковой, А. А. Решение нелинейной стохастической задачи ползучести для толстостенной трубы методом малого параметра [Текст] / А. А. Должковой, Н. Н. Попов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2002. — № 16. — С. 84–89.
24. Должковой, А. А. Решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы методом малого параметра [Текст] / А. А. Должковой, Н. Н. Попов, В. П. Радченко // ПМТФ. — 2006. — Т. 47, № 1. — С. 161–171.
25. Друянов, Б. А. Метод решения статически неопределимых задач плоской деформации идеально пластических тел [Текст] / Б. А. Друянов // ДАН АН СССР. МТТ. — 1962. — Т. 143. — С. 808.
26. Ершов, Л. В. Упругопластическое состояние эллиптической трубы, находящейся под действием внутреннего давления [Текст] / Л. В. Ершов, Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. — 1957. — № 9.
27. Ефремов, В. Г. Определение напряженно-деформированного состояния тонкой пластины с эллиптическим отверстием из анизотропного материала при несовпадении осей продольной анизотропии с направлением канонических осей эллипса отверстия [Текст] / В. Г. Ефремов, Т. В. Митрофанова, Т. Н. Павлова // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2014. — № 1(19). — С. 52–59.
28. Жуков, А. М. К вопросу о возникновении шейки в образце при растяжении [Текст] / А. М. Жуков // Инженерный сборник. — 1949. — Т. 5, № 2. —

- С. 34–51.
29. Журавков, М. А. Применение метода малого параметра для расчета плоской задачи статики кубически анизотропных тел [Текст] / М. А. Журавков, С. М. Босяков, И. М. Мартыненко // Вестник БГУ. Серия 1. — 2013. — № 3. — С. 64–68.
 30. Захаров, Ю. К. Применение статистических методов анализа для обработки численных и натурных результатов экспериментов при решении задач механики [Текст] / Ю. К. Захаров, Ю. В. Прокофьев, А. А. Черников // Прикл. пробл. прочности и пластичности. — 1999. — № 54. — С. 89–91.
 31. Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела [Текст] / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. — М. : Наука, 1978. — 208 с.
 32. Ильюшин, А. А. Пластичность [Текст] / А. А. Ильюшин. — М. : Гостехиздат, 1948. — 376 с.
 33. Ильюшин, А. А. Основные направления развития проблемы прочности и пластичности [Текст] / А. А. Ильюшин // Прочность и пластичность: сб. науч. тр. — М. : Наука. — 1971. — С. 5–18.
 34. Исследование свойств и методика расчета стеклопластиковых труб : учеб. пособие [Текст] / В. А. Аванесов, В. Ф. Буслаев, И. В. Панцерно, А. В. Сальников. — Ухта : УГТУ, 2006. — 111 с.
 35. Исуткина, В. Н. Разработка аналитических методов решения стохастических краевых задач установившейся ползучести для плоского деформированного состояния [Текст] : Дис. ... канд. физ.-мат. наук: : 01.02.04 / Вера Николаевна Исуткина ; СамГТУ. — Самара : [б. и.], 2007. — 247 с.
 36. Качанов, Л. М. Пластическое кручение круглых стержней переменного диаметра [Текст] / Л. М. Качанов // ПММ. — 1948. — Т. 12, № 4. — С. 375–386.
 37. Качанов, Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести [Текст] / Л. М. Качанов // Изв. АН СССР. ОТН. — 1958. — С. 26–31.
 38. Качанов, Л. М. Теория ползучести [Текст] / Л. М. Качанов. — М. : Физ-

матгиз, 1960. — 455 с.

39. Кержаев, А. П. Об определении перемещений в двухслойной толстостенной трубе, находящейся под действием внутреннего давления, в случае трансляционной анизотропии [Текст] / А. П. Кержаев // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2013. — № 2(16). — С. 68–73.
40. Кержаев, А. П. Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, в случае трансляционной анизотропии [Текст] / А. П. Кержаев // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2013. — № 2(16). — С. 74–81.
41. Кобзарь, А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников [Текст] / А. И. Кобзарь. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 816 с.
42. Ковалев, А. В. О нахождении поля напряжений в эксцентричной трубе, подверженной действию внутреннего давления [Текст] / А. В. Ковалев, А. Н. Спорыхин // Вестник факультета прикладной математики и механики. Воронежский гос. ун-т. — 1997. — № 1. — С. 85–90.
43. Коваленко, Л. В. Решение плоской стохастической краевой задачи ползучести [Текст] / Л. В. Коваленко, Н. Н. Попов, В. П. Радченко // ПММ. — 2009. — Т. 73, № 6. — С. 1009–1016.
44. Ковпак, В. И. Унифицированный подход к прогнозированию ползучести. вопросы жаропрочных материалов в статистическом аспекте [Текст] / В. И. Ковпак, А. Н. Бадаев // Унифицированные методы определения ползучести и длительной прочности. — 1986.
45. Коул, Д. Методы возмущений в прикладной математике [Текст] / Дж. Коул. — М. : Мир, 1972. — 277 с.
46. Кочуров, В. А. Примеры расчета характеристик надежности авиационной техники : метод. указания [Текст] / В. А. Кочуров, Г. А. Новиков. — Сама-

- ра : Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2002. — 48 с.
47. Кузнецов, В. А. О надежности элементов стержневых конструкций в условиях неустановившейся ползучести [Текст] / В. А. Кузнецов // Механика: сб. науч. тр. / Куйбышев : КПТИ. — 1975. — № 8. — С. 67–70.
 48. Кузнецов, В. А. Расчет надежности стержневых элементов конструкции, работающих с ограничением по напряжению в условиях ползучести при заданной величине деформации [Текст] / В. А. Кузнецов, Ю. П. Самарин // Математическая физика. Куйбышев : КуАИ. — 1977. — С. 107–110.
 49. Кульпина, Т. А. Эксцентричная сжимаемая труба под действием внутреннего давления и касательного усилия [Текст] / Т. А. Кульпина // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Естественные и технические науки. — 2005. — № 3(46). — С. 36–40.
 50. Кульпина, Т. А. Напряженное состояние эксцентричной трубы, находящейся под действием внутреннего давления и сдвигающего усилия [Текст] / Т. А. Кульпина // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Естественные и технические науки. — 2007. — № 2(66). — С. 51–54.
 51. Кульпина, Т. А. Анизотропная эксцентричная труба с учетом сжимаемости материала [Текст] / Т. А. Кульпина // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Естественные и технические науки. — 2010. — № 1(65). — С. 46–51.
 52. Кульпина, Т. А. Влияние продольных сдвигов на двусосное растяжение пластины с эллиптическим отверстием [Текст] / Т. А. Кульпина // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Естественные и технические науки. — 2010. — № 4(68). — С. 107–113.
 53. Кунташев, П. А. О сходимости метода возмущений в задачах теории упругости неоднородных тел [Текст] / П. А. Кунташев, Ю. В. Немировский // Изв. АН СССР. МТТ. — 1985. — № 3. — С. 75–78.
 54. Леметр, Д. Применение понятия поврежденности для расчета разрушения в условиях одномерной усталости и ползучести [Текст] / Дж. Леметр, А. Плантри // Теор. основы инж. расчетов. — 1979. — № 3. — С. 124–134.

55. Лепин, Г. Ф. Ползучесть металлов и жаропрочность [Текст] / Г. Ф. Лепин. — М. : Металлургия, 1976. — 345 с.
56. Локощенко, А. М. Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении [Текст] / А. М. Локощенко, С. А. Шестериков // ПМТФ. — 1980. — № 3. — С. 155–159.
57. Ломакин, В. А. О деформировании микронеоднородных упругих тел [Текст] / В. А. Ломакин // ПММ. — 1965. — Т. 29, № 5. — С. 888–893.
58. Ломакин, В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел [Текст] / В. А. Ломакин. — М. : Наука, 1970. — 139 с.
59. Ломакин, В. А. Теория упругости неоднородных тел [Текст] / В. А. Ломакин. — М. : МГУ, 1976. — 368 с.
60. Ломакин, В. А. О применимости метода малого параметра для оценки напряжений в неоднородных упругих средах [Текст] / В. А. Ломакин, В.И. Шейнин // Изв. АН СССР. МТТ. — 1972. — № 3. — С. 33–39.
61. Ломакин, В. А. Концентрация напряжений на границе случайно-неоднородного упругого тела [Текст] / В. А. Ломакин, В.И. Шейнин // Изв. АН СССР. МТТ. — 1974. — № 2. — С. 65–70.
62. Макаров, Б. П. Флуктуации напряженного состояния в статистически неоднородной упругой среде [Текст] / Б. П. Макаров, В. В. Петров, А. А. Газганов // Строительная механика и расчет сооружений. — 1984. — № 6. — С. 9–13.
63. Максимова, А. П. Упругопластическое состояние плоскости с эллиптическим включением, ослабленным эллиптическим отверстием, при двусосном растяжении [Текст] / А. П. Максимова // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2013. — № 3(17). — С. 134–141.
64. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст] / Н. Н. Малинин. — М. : Машиностроение, 1976. — 400 с.
65. Марасанов, А. И. К вопросу о стохастическом анализе упругих систем

- [Текст] / А. И. Марасанов // Вестн. МИИТа. — 2003. — № 9. — С. 121–125.
66. Махутов, Н. А. Нелинейные процессы малоциклового деформирования, повреждений и разрушения [Текст] / Н. А. Махутов // Восьмой Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Пермь, 23–29 августа 2001 г.). Аннотации докладов. — Екатеринбург : УрО РАН, 2001. — С. 424.
67. Метод возмущений в краевых задачах механики деформируемых тел [Текст] / В. Д. Кубенко, Ю. Н. Немиш, К. И. Шнеренко, Н. А. Шульга // Прикладная механика. — 1982. — Т. 18, № 11. — С. 3–20.
68. Минаева, Н. В. Метод возмущений в механике деформируемого тела [Текст] / Н. В. Минаева. — М. : Научная книга, 2002. — 155 с.
69. Мирсалимов, В. И. Неоднородные упругопластические задачи [Текст] / В. И. Мирсалимов. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 256 с.
70. Михайлова, М. В. О растяжении цилиндра переменного сечения при условии пластичности мизеса [Текст] / М. В. Михайлова // Изв. ИТА ЧР. — 1996. — № 1. Вып.2. — С. 54–60.
71. Москалик, А. Д. Приближенное аналитическое решение задачи для трубы с эллиптическим внешним контуром в условиях установившейся ползучести [Текст] / А. Д. Москалик // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2014. — № 4(37). — С. 65–84.
72. Мураками, С. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности [Текст] / С. Мураками, Ю. Н. Радаев // Изв. РАН. МТТ. — 1996. — № 4. — С. 93–110.
73. Муратова, Л. А. Оценка работоспособности турбинных дисков в условиях ползучести с помощью теоретико-экспериментального метода при нестационарном нагружении [Текст] / Л. А. Муратова // Ползучесть и длительная прочность. Куйбышев : Куйб. авиац. ин-т. — 1986. — С. 108–113.
74. Найфэ, А. Методы возмущений [Текст] / А. Найфэ. — М. : Наука, 1976. — 456 с.

75. Найфэ, А. Введение в методы возмущений [Текст] / А. Найфэ. — М. : Мир, 1984. — 535 с.
76. Неустановившаяся ползучесть и релаксация напряжений сплава АК4-1 в вероятностном аспекте [Текст] / С. П. Борисов, Н. И. Борщев, М. Н. Степнов, И. И. Хазанов // Проблемы прочности. — 1975. — № 1. — С. 30–33.
77. Никитенко, А. Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов [Текст] / А. Ф. Никитенко. — Новосибирск : Ин-т гидродинамики СО РАН–НГАСУ, 1997. — 280 с.
78. Никитин, А. В. Предельное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы [Текст] / А. В. Никитин, Б. Г. Миронов // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2014. — № 2(22). — С. 58–67.
79. Никитин, А. В. Влияние нелинейной неоднородности материала на упругопластическое состояние толстостенной трубы под воздействием внутреннего давления при трансляционной анизотропии [Текст] / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. — 2013. — № 4(80). Ч.2. — С. 137–147.
80. Никитин, А. В. Предельное состояние многослойной трансляционно-анизотропной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления [Текст] / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2014. — № 1(19). — С. 88–94.
81. Новожилов, В. В. Микронапряжения в конструктивных материалах [Текст] / В. В. Новожилов, Ю. И. Кадашевич. — Л. : Машиностроение, 1990. — 223 с.
82. О статистическом моделировании характеристик ползучести конструкционных материалов [Текст] / А. Н. Бадаев, Е. Р. Голубовский, М. В. Баумштейн, И. П. Булыгин // Проблемы прочности. — 1982. — № 5. — С. 16–20.
83. Онат, Е. Образование шейки при пластическом течении растягиваемого

- плоского образца [Текст] / Е. Онат, В. Прагер // Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит. — 1955. — № 4(32). — С. 93–97.
84. Павлова, Т. Н. Об определении перемещений в задаче напряженно-деформированного состояния тонкой пластины с эллиптическим отверстием [Текст] / Т. Н. Павлова // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2010. — № 1(65). — С. 64–70.
85. Подалков, В. В. Деформация упругого анизотропного микронеоднородного полупространства [Текст] / В. В. Подалков, В. А. Романов // ПММ. — 1978. — Т. 47, № 3. — С. 455–461.
86. Подалков, В. В. Концентрация напряжений на границе микронеоднородного упругого полупространства [Текст] / В. В. Подалков, В. А. Романов // ПММ. — 1978. — Т. 42, № 3. — С. 540–545.
87. Подалков, В. В. Оценка приближенного решения одной задачи теории упругости неоднородных сред [Текст] / В. В. Подалков, В. А. Романов // Изв. АН СССР. МТТ. — 1987. — № 4. — С. 122–127.
88. Пономарева, Т. Т. О течении вязкопластической трубы, ослабленной выточками [Текст] / Т. Т. Пономарева, Т. И. Рыбакова // Известия НАНИ ЧР. - Чебоксары. — 2000. — № 4. — С. 50–53.
89. Попов, Н. Н. Решение нелинейной стохастической задачи ползучести методом возмущений [Текст] / Н. Н. Попов // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2007. — Т. 13, № 4. — С. 704–705.
90. Попов, Н. Н. Решение стохастической задачи о деформировании толстостенной трубы в третьем приближении [Текст] / Н. Н. Попов, А. А. Должковой // Вестник УГТУ–УПИ. Механика микронеоднородных материалов и разрушение. — 2004. — Т. 22. — С. 52–57.
91. Попов, Н. Н. Построение аналитического решения двумерной стохастической задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы [Текст] / Н. Н. Попов, В. Н. Исуткина // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ. - мат. науки. — 2007. — № 2(15). — С. 90–94.

92. Попов, Н. Н. Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести [Текст] / Н. Н. Попов, Ю. П. Самарин // ПМТФ. — 1988. — № 1. — С. 159–164.
93. Прохоров, С. А. Математическое описание и моделирование случайных процессов [Текст] / С. А. Прохоров. — Самара : СГАУ, 2001. — 329 с.
94. Работнов, Ю. Н. Опытные данные по ползучести технических сплавов и феноменологические теории ползучести (обзор) [Текст] / Ю. Н. Работнов // ПМТФ. — 1965. — № 1. — С. 141–159.
95. Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций [Текст] / Ю. Н. Работнов. — М. : Наука, 1966. — 752 с.
96. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела [Текст] / Ю. Н. Работнов. — Москва : Наука, 1979. — 744 с.
97. Радченко, В. П. Энергетический вариант одноосной теории ползучести и длительной прочности [Текст] / В. П. Радченко // ПМТФ. — 1991. — № 4. — С. 172–179.
98. Радченко, В. П. Математическая модель неупругого деформирования и разрушения металлов при ползучести энергетического типа [Текст] / В. П. Радченко // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 1996. — № 4. — С. 43–63.
99. Радченко, В. П. Решение краевых задач установившейся ползучести в полярных координатах методом возмущений [Текст] / В. П. Радченко, Е. В. Башкинова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 1998. — № 5. — С. 86–91.
100. Радченко, В. П. Метод решения краевой упругопластической задачи о растяжении полосы с концентраторами напряжений с учетом локальных областей пластического рзупрочнения [Текст] / В. П. Радченко, С. В. Горбунов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2014. — № 4(37). — С. 98–110.
101. Радченко, В. П. Реологическое деформирование и разрушение материалов

- и элементов конструкций [Текст] / В. П. Радченко, Ю. А. Еремин. — М. : Машиностроение-1, 2004. — 265 с.
102. Радченко, В. П. Решение стохастических краевых задач для толстостенной трубы из микронеоднородного материала в условиях ползучести методом Монте–Карло [Текст] / В. П. Радченко, В. Н. Исуткина, А. Ю. Маргаритов // СамДиф–2007: Труды Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Самара, 29 января–2 февраля 2007 г.). — Самара : Изд-во Универс–групп, 2007. — С. 96–97.
103. Радченко, В. П. Оценка конечно-элементного и приближенного решений установившейся ползучести для толстостенной трубы с эллиптически возмущенной внешней границей [Текст] / В. П. Радченко, А. Д. Москалик // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2016. — № 2(28). — С. 111–122.
104. Радченко, В. П. Сравнительный анализ приближенного аналитического и конечно-элементного решений для несоосной трубы [Текст] / В. П. Радченко, А. Д. Москалик, И. Е. Адеянов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2014. — № 3(36). — С. 79–93.
105. Радченко, В. П. Структурная модель закритического упругопластического деформирования материалов в условиях одноосного растяжения [Текст] / В. П. Радченко, Е. В. Небогина, М. В. Басов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2000. — № 9. — С. 55–66.
106. Радченко, В. П. Аналитическое решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы [Текст] / В. П. Радченко, Н. Н. Попов // ПММ. — 2012. — Т. 76, № 6. — С. 1023–1031.
107. Радченко, В. П. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упроченных конструкциях [Текст] / В. П. Радченко, М. Н. Саушкин. — М. : Машиностроение-1, 2005. — 226 с.
108. Радченко, В. П. Практические аспекты применения метода статистических испытаний к решению стохастических краевых задач с учетом реологиче-

- ских свойств материалов: Материалы 2 всеросс. симп. по промышленной и прикладной математике [Текст] / В. П. Радченко, А. В. Симонов // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2001. — Т. 8, № 1. — С. 299.
109. Радченко, В. П. Об одном подходе к решению стохастической краевой задачи для толстостенной трубы под действием внутреннего давления в условиях реологического деформирования и разрушения материалов [Текст] / В. П. Радченко, А. В. Симонов, С. Н. Кубышкина // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды одиннадцатой межвузовской конференции (29-31 мая 2001 г.). Ч.1. — Самара : СамГТУ, 2001. — С. 152–156.
110. Рыбакова, Т. И. Об устойчивости вязкопластического течения толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления [Текст] / Т. И. Рыбакова // Изв. ИТА ЧР. — 1996. — № 2(3). — С. 36–40.
111. Самарин, Ю. П. О применении стохастических уравнений в теории ползучести материалов [Текст] / Ю. П. Самарин // Изв. АН СССР. МТТ. — 1974. — № 1. — С. 88–94.
112. Самарин, Ю. П. Обобщенные модели в теории ползучести конструкций [Текст] / Ю. П. Самарин, Я. М. Клебанов. — Самара : СамГТУ – ИАРФ, 1994. — 196 с.
113. Самарин, Ю. П. Оценка надежности стержневых конструкций по критерию деформационного типа [Текст] / Ю. П. Самарин, Г. А. Павлова, Н. Н. Попов // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1990. — № 4. — С. 63–67.
114. Соснин, О. В. Энергетический вариант теории ползучести [Текст] / О. В. Соснин, Б. В. Горев, А. Ф. Никитенко. — Новосибирск : Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986. — 95 с.
115. Стасенко, И. В. Расчет трубопроводов на ползучесть [Текст] / И. В. Стасенко. — М. : Машиностроение, 1986. — 256 с.
116. Степанова, Л. В. Смешанное деформирование пластины с трещиной в

- условиях плоского напряженного состояния [Текст] / Л. В. Степанова, Е. М. Яковлева // Вестник ПНИПУ. Механика. — 2014. — № 3. — С. 129–162.
117. Стружанов, В. В. Упругопластическая среда с разупрочнением. сообщение 1. свойства материала и инкрементный закон пластичности при растяжении [Текст] / В. В. Стружанов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2006. — № 42. — С. 49–61.
118. Стружанов, В. В. Свойства разупрочняющихся материалов и определяющие соотношения при одноосном напряженном состоянии [Текст] / В. В. Стружанов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2007. — № 2(15). — С. 69–78.
119. Стружанов, В. В. Определение инкрементальных модулей по результатам испытаний на растяжение с построением полной диаграммы [Текст] / В. В. Стружанов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2008. — № 1(16). — С. 160–163.
120. Стружанов, В. В. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций [Текст] / В. В. Стружанов, В. И. Миронов. — Екатеринбург : УрО РАН, 1995. — 190 с.
121. Термопрочность деталей машин [Текст] / И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, И. В. Демьянушко [и др.] ; Под ред. И. А. Биргера, Б. Ф. Шорра. — М. : Машиностроение, 1975. — 455 с.
122. Тихонов, С. В. Упругопластическое состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двуосном растяжении [Текст] / С. В. Тихонов, Т. И. Рыбакова // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2015. — № 3(25). — С. 138–146.
123. Ушаков, И. А. Курс теории надежности систем [Текст] / И. А. Ушаков. — М. : Дрофа, 2007. — 239 с.
124. Фоминых, С. О. Упругоидеальнопластическое состояние анизотропной

- трубы [Текст] / С. О. Фоминых // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2010. — № Ч.2, 2(8). — С. 623–627.
125. Фоминых, С. О. Упругопластическое состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов пластической анизотропии [Текст] / С. О. Фоминых // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2011. — № 1(9). — С. 201–216.
126. Цвелодуб, И. Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов [Текст] / И. Ю. Цвелодуб. — Новосибирск : Институт гидродинамики СО АН СССР, 1991. — 201 с.
127. Черепанов, Г. П. О закритических деформациях [Текст] / Г. П. Черепанов // Пробл. прочности. — 1985. — № 8. — С. 3–8.
128. Черепанов, Г. П. Современные проблемы механики разрушения [Текст] / Г. П. Черепанов // Пробл. прочности. — 1987. — № 8. — С. 3–13.
129. Шестериков, С. А. Ползучесть и длительная прочность металлов [Текст] / С. А. Шестериков, А. М. Локощенко // Итоги науки и техники: Серия «Механика твердых деформируемых тел». АН СССР. ВИНТИ. — М. : [б. и.], 1980. — Т. 13. — С. 3–104.
130. Шин, Р. Г. Механизмы деформирования микронеоднородных сред [Текст] / Р. Г. Шин, В. Л. Катков // Проблемы прочности. — 1987. — № 10. — С. 72–74.
131. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление [Текст] / Л. Э. Эльсгольц. — М. : Наука, 1969. — 424 с.
132. Ярдикова, Н. А. Упругопластическое состояние пространства, ослабленного цилиндрической полостью, находящегося под действием давления, крутящих и продольных сдвигающих усилий [Текст] : Дис. ... канд. физ.-мат. наук: : 01.02.04 / Наталия Алексеевна Ярдикова ; ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. — Чебоксары : [б. и.], 2007. — 73 с.
133. Betten, J. A. Net-stress analysis in creep mechanics [Text] / J. A. Betten // Ing. Arch. — 1982. — Vol. 52, no. 6. — P. 405–419.

134. Boyle, J. T. Stress analysis for creep [Text] / J. T. Boyle, J. Spence. — London : Butterworths, 1983. — 284 p.
135. Broberg, H. Creep in structures with random material properties [Text] / H. Broberg, R. Westlund // Int. J. Solids and Struct. — 1978. — Vol. 14, no. 5. — P. 365–374.
136. Broberg, H. Creep rupture of specimens with random material properties [Text] / H. Broberg, R. Westlund // Int. J. Solids and Structures. — 1978. — Vol. 14, no. 12. — P. 959–970.
137. Broberg, H. Creep scatter as an inherent material properties [Text] / H. Broberg, R. Westlund // Arch. Mech. stosow. — 1979. — Vol. 31, no. 2. — P. 165–176.
138. Broberg, H. Properties of a random creep process [Text] / H. Broberg, R. Westlund // Int. J. Solids and Structures. — 1982. — Vol. 18, no. 4. — P. 275–283.
139. Delph, T. J. A finite element method for probabilistic creep of solids [Text] / T. J. Delph, J. E. Yukich // Int. J. Num. Meth. in Eng. — 1992. — Vol. 35. — P. 1171–1182.
140. Ghanem, R. Hybrid stochastic finite elements and generalized monte carlo simulation [Text] / R. Ghanem // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1998. — Vol. 65, no. 4. — P. 1004–1009.
141. Gomez-Fariasa, A. Complex finite element sensitivity method for creep analysis [Text] / A. Gomez-Fariasa, A. Montoyab, H. Millwaterc // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. — 2015. — Vol. 132–133. — P. 27–42.
142. Gu, R. J. Complex finite element sensitivity method for creep analysis [Text] / R. J. Gu, F. A. Cozzarelli // Inr. J. Non-Linear Mechanics. — 1988. — Vol. 23, no. 2. — P. 147–165.
143. Haitian, Y. Perturbation boundary–finite element combined method for solving the linear creep problem [Text] / Yang Haitian, Guo Xinglin // Int. J. Solids and Struct. — 2000. — Vol. 37, no. 15. — P. 2167–2183.

144. Harlow, D. G. A computational probabilistic model for creep-damaging solids [Text] / D. G. Harlow, T. J. Delph // Computers & Structures. — 1995. — Vol. 54, no. 1. — P. 161–166.
145. Jelwan, J. Creep life design criterion and its applications to pressure vessel codes [Text] / J. Jelwan, M. Chowdhury, G. Pearce // Material Physics and Mechanics. — 2011. — no. 11. — P. 157–182.
146. Kaminski, M. Stochastic second-order perturbation approach to the stress-based finite element method [Text] / M. Kaminski // Int. J. Solids and Struct. — 2001. — Vol. 38, no. 21. — P. 3831–3852.
147. Kaminski, M. On the dual iterative stochastic perturbation-based finite element method in solid mechanics with gaussian uncertainties [Text] / M. Kaminski // Int. J. Numer. Meth. Engng. — 2015. — no. 104. — P. 1038–1060.
148. Leckie, F. A. Some structural theorems of creep and their implications [Text] / F. A. Leckie // Advances in Creep Design: Applied Science Publishers. — 1971. — P. 49–63.
149. Maciej, A. Three-dimensional stochastic finite element method for elasto-plastic bodies [Text] / A. Maciej, H. Muneo // Int. J. Numer. Meth. Eng. — 2001. — Vol. 51, no. 4. — P. 449–478.
150. Mishnaevsky, L. L. Determination for the time to fracture of solids [Text] / L. L. Mishnaevsky // Int. J. Fracture. — 1996. — Vol. 79, no. 4. — P. 341–350.
151. Penny, R. K. Design for Creep. 2nd Edition [Text] / R. K. Penny, D. L. Marriott. — London : Chapman & Hall, 1995. — 430 p.
152. Rayleigh, J. The Theory of Sound. Vol. I [Text] / J. Rayleigh. — London : [s. n.], 1927. — 500 p.
153. Rellich, F. Störungstheorie der spektralzerlegung i [Text] / F. Rellich // Mathematical Annual. — 1936. — no. 113. — P. 600–619.
154. Schrödinger, E. Quantisierung als eigenwertproblem [Text] /

- E. Schrödinger // *Ann. Physik.* — 1926. — no. 80. — P. 437–490.
155. Schueller, G. I. Computational stochastic mechanics — recent advances [Text] / G. I. Schueller // *Comput. and Struct.* — 2001. — Vol. 79, no. 22–25. — P. 2225–2234.
156. Sluzalec, A. Simulation of stochastic metal-forming process for rigid-viscoplastic material [Text] / A. Sluzalec // *Int. J. Mech. Sci.* — 2000. — Vol. 42, no. 10. — P. 1935–1946.
157. Stepanova, L. V. Perturbation method for solving the nonlinear eigenvalue problem arising from fatigue crack growth problem in a damage medium [Text] / L. V. Stepanova, S. A. Igonin // *Applied Mathematical Modelling.* — 2014. — Vol. 38, no. 14. — P. 3436–3455.
158. You, L. H. Creep deformations and stresses in thick-walled cylindrical vessels of functionally graded materials subjected to internal pressure [Text] / L. H. You, H. Ou, Z. Y. Zheng // *Composite Structures.* — 2007. — Vol. 78. — P. 285–291.
159. Zhou, C. A stochastic computation model for the creep damage of furnace tube [Text] / C. Zhou, S. Tu // *Int. J. of Pressure Vessels and Piping.* — 2001. — no. 78. — P. 617–625.

Приложение А

Константы интегрирования

Таблица А.1 — Константы интегрирования для несоосной трубы и трубы с эллиптически возмущённой внешней границей из модельных материалов

Несоосная труба					
№ приближения	Константы	Углеродистая сталь			
I	$C_{1i}, i = \overline{1,4}$	$-6,5 \cdot 10^{-11}$	$1,3 \cdot 10^{-11}$	-0,021	0,004
II	$c_{2i}, i = \overline{1,4}$ $C; K^\psi$	-0,107 0,153	0,654 1636,49	0,079	0,044
III	$k_{3i}, i = \overline{1,4}$ $c_{3i}, i = \overline{1,4}$	0,235 $-8,25 \cdot 10^9$	-0,672 25,51	-0,116 109,11	-62,617 -2,31
Сплав ЭИ698					
I	$C_{1i}, i = \overline{1,4}$	$5,0 \cdot 10^{-9}$	$-2,53 \cdot 10^{-9}$	-8,185	0,202
II	$c_{2i}, i = \overline{1,4}$ $C; K^\psi$	147,25 36,96	0,63 $1,53 \cdot 10^5$	-138,49	-316,42
III	$k_{3i}, i = \overline{1,4}$ $c_{3i}, i = \overline{1,4}$	-15,64 $-6,62 \cdot 10^{11}$	5,83 917,14	18,09 993,10	61,12 -1803,16
Труба с эллиптически возмущённым внешним контуром					
Углеродистая сталь					
I	$C_{1i}, i = \overline{1,4}$ $K_1; K^\psi$	0,005 0,022	-0,015 236,20	0,0017	0,0022
II	$v_i, i = \overline{1,4}$ $w_i, i = \overline{1,4}$ C^U, K^U	-0,087 0,018 0,240	0,024 -1,332 1651,43	-0,051 -0,025	1,342 0,016
Сплав ЭИ698					
I	$C_{1i}, i = \overline{1,4}$ $K_1; K^\psi$	-0,157 2,129	-0,719 8563,95	0,077	-0,085
II	$v_i, i = \overline{1,4}$ $w_i, i = \overline{1,4}$ C^U, K^U	-1,838 69,779 617,12	-0,613 -84,854 $1,03 \cdot 10^6$	0,141 27,773	538,34 2,681