

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г.Чернышевского»

На правах рукописи

Ардазишвили Роман Вячеславович

Трехмерные кромочные волны в пластинах и оболочках

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
Вильде Мария Владимировна

Саратов – 2016

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Трехмерные поверхностные волны в упругом полупро-	
странстве	19
1.1. Постановка задачи	19
1.2. Трехмерная поверхностная волна в случае свободной поверх-	
ности	23
1.3. Трехмерная поверхностная волна в случае закрепления грани-	
цы полупространства в одном из касательных направлений . .	30
1.3.1. На поверхности полупространства ставятся граничные	
условия $\sigma_x = u_y = \sigma_{xz} = 0$	30
1.3.2. На поверхности полупространства ставятся граничные	
условия $\sigma_x = \sigma_{xy} = u_z = 0$	38
1.4. Другие типы граничных условий	40
1.4.1. На поверхности полупространства ставятся граничные	
условия $\sigma_x = u_y = u_z = 0$	40
1.4.2. На поверхности полупространства ставятся граничные	
условия $u_x = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$	40
1.4.3. На поверхности полупространства ставятся граничные	
условия $u_x = u_y = \sigma_{xz} = 0$	40
1.4.4. На поверхности полупространства ставятся граничные	
условия $u_x = \sigma_{xy} = u_z = 0$	41
1.4.5. На поверхности полупространства ставятся граничные	
условия $u_x = u_y = u_z = 0$	42
1.5. Результаты и выводы	42

Глава 2. Трехмерные кромочные волны в пластинах	44
2.1. Постановка задачи и метод численного решения	44
2.2. Антисимметричные кромочные волны высшего порядка в случае свободного торца	52
2.2.1. Свободные лицевые поверхности	52
2.2.2. Жестко заземленные лицевые поверхности	61
2.3. Кромочные волны высшего порядка в случае смешанных граничных условий на торце	65
2.3.1. Свободные лицевые поверхности	65
2.3.2. Жестко заземленные лицевые поверхности	71
2.4. Фундаментальная кромочная волна в случае смешанных граничных условий на торце	76
2.5. Результаты и выводы	79
Глава 3. Трехмерные кромочные волны в тонкой оболочке . .	81
3.1. Постановка задачи	81
3.2. Цилиндрическая поверхностная волна	85
3.3. Моды полого цилиндра	87
3.4. Фундаментальные кромочные волны в полом цилиндре	101
3.5. Кромочные волны высшего порядка в тонкой оболочке	107
3.6. Фундаментальные кромочные волны в цилиндрической оболочке со смешанными граничными условиями на торце	117
3.7. Результаты и выводы	123
Заключение	126
Список литературы	128

Введение

Актуальность темы. Поверхностные волны, начало исследования которых было положено в 1885 г. работой Рэля [115], находят широкое применение в сейсмологии и сейсморазведке, а также в различных методах неразрушающего контроля поверхностного слоя элементов конструкций и целостности соединений (см., например, [90, 97, 120, 124]). Большую практическую значимость имеет изучение закономерностей распространения поверхностных волн в тонкостенных элементах конструкций — пластинах и оболочках. При этом следует различать волны, распространяющиеся вдоль лицевых поверхностей, и волны, локализованные у краев (торцов) пластины или оболочки — краевые, или кромочные волны. Исследование последних представляет собой более сложную задачу, потому что такие волны являются, по сути, волновыми пакетами, состоящими из поверхностной волны и комплекса объемных волн, возникающих вследствие многократного отражения поверхностной волны от лицевых поверхностей. До последнего времени подобного рода волны рассматривались, в основном, на основе прикладных теорий пластин и оболочек, “усредняющих” волновую картину по толщине.

В связи с появлением высокочувствительной измерительной аппаратуры в настоящее время становится актуальным изучение поверхностных волн в высокочастотных диапазонах, выходящих за рамки применимости прикладных двумерных теорий. Рассмотрение кромочных волн на основе трехмерных уравнений теории упругости связано со значительными вычислительными трудностями, поскольку, за исключением случая смешанных граничных условий на лицевых поверхностях, допускающих разделение переменных, записать дисперсионное уравнение в аналитической форме не представляется возможным. По-видимому, именно этим объясняется тот факт, что работы, посвященные исследованию кромочных волн в пластинах с точки зрения

трехмерной теории упругости, весьма немногочисленны и начали появляться только в последнее время (см. [26, 27, 134]). Другой особенностью трехмерных кромочных волн является наличие бесконечного счетного множества кромочных волн высшего порядка, существование которого в случае симметричных колебаний пластин установлено в монографии [27]. В работе [16] для случая смешанных граничных условий на лицевых поверхностях показано, что трехмерные кромочные волны в пластинах могут существовать не только в случае условий свободного края, но и при определенных смешанных граничных условиях на кромке. Это заставляет предположить, что в пластинах со свободными лицевыми поверхностями также возможно появление кромочных волн при смешанных граничных условиях на торце. Кроме того, применение трехмерных уравнений теории упругости позволяет изучить кромочные волны в пластине (толстой плите) с жестко зацементированными лицевыми поверхностями. Очевидно также, что бесконечный спектр кромочных волн высшего порядка, обнаруженный в пластинах, должен иметь свой аналог в оболочках.

Целью данной диссертационной работы является исследование системы трехмерных кромочных волн в пластинах и оболочках в широком диапазоне изменения частоты и длины волны, изучение предельного поведения скоростей данных волн при стремлении волнового числа к бесконечности, форм колебаний и их эволюции при изменении волнового числа, характера демпфирования кромочных волн распространяющимися модами.

Задачи, рассмотренные в работе, состоят в исследовании

- антисимметричных кромочных волн высшего порядка в пластине как со свободными, так и с жестко закрепленными лицевыми поверхностями, на торце которой ставятся условия свободного края;
- системы кромочных волн в пластине как со свободными, так и с жестко закрепленными лицевыми поверхностями, на торце которой запрещено перемещение в одном из касательных направлений;

- фундаментальных кромочных волн в тонкой оболочке;
- кромочных волн высшего порядка в тонкой оболочке, на торце которой ставятся условия свободного края.

Как первый этап исследования рассмотрена задача о распространении трехмерных поверхностных волн в упругом полупространстве, на поверхности которого ставятся как условия отсутствия напряжений, так и граничные условия другого типа.

Обзор литературы. В основе данного исследования лежит представление о связи кромочных волн в пластинах и оболочках с поверхностными волнами, которые могли бы распространяться вдоль торцевой поверхности при отсутствии лицевых поверхностей. Это представление позволяет показать наличие бесконечного спектра кромочных волн высшего порядка, а также получить простые асимптотические формулы для скоростей волн. Кроме того, опираясь на идею о связи существования поверхностных и кромочных волн, нетрудно заключить, что явления, аналогичные обнаруженным в данной работе, будут иметь место также в телах с иными материальными свойствами (анизотропных, слоистых, вязкоупругих и т.д.), для которых установлено существование соответствующей поверхностной волны.

Как уже отмечалось, впервые существование поверхностных волн было отмечено в работе Рэлея [115] для случая изотропного полупространства, находящегося в условиях плоской деформации. Рэлей показал, что однородная задача о колебаниях полупространства с условиями свободного края на поверхности имеет нетривиальное решение, описывающее гармоническую волну, распространяющуюся вдоль поверхности полупространства и экспоненциально затухающую по координате, направленной вглубь поверхности. Скорость волны Рэлея зависит только от свойств материала и определяется из известного уравнения, решению которого и более глубокому изучению волны Рэлея посвящены работы [29, 98, 101, 112, 113]. В работе [22] рассмотрена

волна, аналогичная волне Рэлея, но распространяющаяся вдоль цилиндрической поверхности. Обзоры других возможных обобщений волны Рэлея даны в работах [19, 23]. Множество работ посвящено обобщению волны Рэлея на случай анизотропного полупространства (см., например, [61, 64, 66, 100, 106, 132]). Поверхностные волны в предварительно напряженном полупространстве изучались в работах [67, 71, 72], в случае упругого закрепления поверхности в касательном направлении в работе [79]. В работах [41, 60] исследована поверхностная волна с горизонтальной поляризацией, возникновение которой связано с влиянием пьезоэффекта на чисто сдвиговую объемную волну. В работе Стоунли [123] показано, что вдоль границы между двумя упругими полупространствами с различными свойствами материала может распространяться волна, экспоненциально затухающая при удалении вглубь каждого из полупространств.

В случае свободного полупространства трехмерная задача о распространении поверхностной волны с плоским фронтом может быть сведена к двумерной путем поворота системы координат на угол, определяющий направление распространения волны. По-видимому, именно этим объясняется практически полное отсутствие работ, связанных с обобщением волны Рэлея на случай задач в трехмерной постановке. Однако при наличии лицевых поверхностей поворот системы координат приводит только к дополнительному усложнению задачи, поэтому для исследования кромочных волн требуется построить трехмерное решение. Такая задача рассмотрена в работе [17], где также показано, что трехмерная волна существует не только в случае свободной поверхности, но и в случае, когда на поверхности запрещено перемещение в одном из касательных направлений. В работе [48] исследована трехмерная поверхностная волна в случае смешанных граничных условий для трансверсально-изотропного полупространства. Трехмерные волны в случае свободной поверхности исследованы для трансверсально-изотропного полупространства в работе [18]

и для магнитоупругого полупространства в работе [46].

Простейшее обобщение волны Рэлея в применении к пластинам можно получить, рассматривая пластину в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Поскольку задачи о плоской деформации цилиндрического тела и об обобщенном плоском напряженном состоянии пластины математически идентичны (см., например, [2]), ясно, что в пластине должна существовать планарная волна рэлеевского типа, скорость которой определяется из того же уравнения, что и скорость волны Рэлея, с заменой упругой постоянной Ламе λ на соответствующую постоянную для пластины. Аналог волны Рэлея в теории изгибных колебаний пластины, основанной на гипотезах Кирхгофа, был, по-видимому, впервые построен в [45]. Эта волна называется изгибной волной рэлеевского типа или волной Коненкова. В более ранней работе [43] рассматривается задача об устойчивости прямоугольных пластин, приводящая к решению, аналогичному решению для волны Коненкова. Впоследствии волна Коненкова многократно “открывалась заново” в работах западных ученых (см. [89, 122, 129]). В работах [68, 104, 125, 126] исследовано отражение изгибных краевых волн от трещин и дефектов. Хорошо исследована волна Коненкова в анизотропных и слоистых пластинах (см. [73, 74, 96, 102, 109, 127] и др.). Краевые волны в круглой пластине изучались на основе теории обобщенного плоского напряженного состояния в [65, 78] и на основе теории изгиба пластин Кирхгофа в [70]. В [49] отмечается, что асимптотика, связанная с выходом изгибной краевой волны в круглой пластине на волну Коненкова, начинает работать только при очень больших значениях волнового числа, выходящих за пределы применимости теории Кирхгофа для пластин, обычно применяемых на практике.

Для исследования поведения краевых волн в пластинах за пределами применимости гипотез Кирхгофа применяются различные приближенные теории (см., например, [1, 65, 99, 103, 121]) или численные расчеты с использо-

ванием метода конечного элемента [62, 63, 92, 93, 105] и иных методов [91]. В монографии [27] решение для трехмерной фундаментальной антисимметричной (соответствующей на низких частотах изгибной) краевой волны в пластинах получено методом разложения по модам. Показано, что при стремлении волнового числа к бесконечности трехмерная изгибная краевая волна вырождается в волны, локализованные у ребра четвертьпространства. Этот результат согласуется с результатами работы [91], в которой решение строилось методом суперпозиции. Кроме того, в [27] показано, что фундаментальная симметричная волна (соответствующая на низких частотах планарной волне рэлеевского типа) также вырождается при стремлении волнового числа в бесконечности в волны, локализованные у ребра четвертьпространства. Трехмерные волны в полубесконечной пластине со смешанными условиями на лицевых поверхностях, допускающими разделение переменных, рассмотрены в работах [16, 42, 86]. В работе [16] рассмотрены различные виды граничных условий на кромке, в работе [86] получено также решение для предварительно напряженной пластины.

Исследование кромочных волн тесно связано с исследованием явления краевого резонанса, впервые обнаруженном при экспериментальном изучении колебаний круглого диска [119]. Это явление характеризуется локализацией наиболее интенсивных колебаний у края диска и слабой зависимостью резонансной частоты от радиуса. Последнее свойство позволяет исследовать явление краевого резонанса в полубесконечных телах. Наиболее простой из таких задач является задача о колебаниях полуполосы, находящейся в условиях плоской деформации либо обобщенного плоского напряженного состояния. Однако даже в такой упрощенной постановке задача остается достаточно сложной, если на боковых сторонах полосы ставятся условия, не допускающие разделения переменных — условия свободного края или условия жесткого закрепления. В большинстве работ, посвященных краевому резонансу,

явление краевого резонанса в полуполосе исследуется различными приближенными [54, 57] или численными методами, связанными с разложением искомого решения по некоторой бесконечной системе функций, удовлетворяющих либо только уравнениям движения [33, 38], либо уравнениям движения и всем граничным условиям на боковых сторонах [80, 130, 131, 114]. В этих работах показано, что основную роль в образовании резонанса в полуполосе играют нераспространяющиеся моды, а единственная распространяющаяся мода, существующая на данной частоте, вносит в систему малое радиационное демпфирование, унося некоторую долю энергии на бесконечность. Последнее обстоятельство приводит к тому, что в полубесконечной полосе амплитуда колебаний на частоте краевого резонанса остается конечной, несмотря на то, что никакие виды трения в постановке задачи не учитываются. По аналогии с колебательными системами, включающими трение, малое радиационное демпфирование может быть описано малой мнимой поправкой к собственной частоте. В работе [38] показано, что случай нулевого коэффициента Пуассона представляет собой исключение. В этом случае единственная распространяющаяся мода, существующая на частоте краевого резонанса, отделяется и не оказывает влияния на резонанс. Следовательно, амплитуда колебаний на резонансной частоте обращается в бесконечность, а соответствующая собственная частота однородной задачи является действительной. В работе [117] дано строгое доказательство существования действительной собственной частоты упругой полубесконечной полосы при нулевом значении коэффициента Пуассона. Другое значение коэффициента Пуассона ($\nu_L \approx 0.2248$), при котором собственная частота краевого резонанса является действительной, было обнаружено в сравнительно недавних работах [85, 108, 135]. При $\nu = \nu_L$ частота краевого резонанса совпадает с частотой Ламе, на которой распространяющаяся мода представляет собой чисто сдвиговую волну и не возбуждается нераспространяющимися модами.

Если на боковых сторонах полуполосы ставятся смешанные граничные условия, допускающие разделение переменных, задача о собственных колебаниях полуполосы допускает простое аналитическое решение (см. [27, 44]), определяющее бесконечное счетное множество действительных собственных частот, которым в случае задачи о вынужденных колебаниях соответствуют частоты краевого резонанса. Соответствующие этим частотам собственные формы в точности совпадают с формой волны Рэлея, что устанавливает связь явления краевого резонанса с поверхностной волной. Для случаев свободных и жестко заземленных боковых сторон представление о связи явления краевого резонанса с волной Рэлея позволяет (см. [25, 27]) показать существование бесконечного спектра (бесконечного счетного множества) частот краевого резонанса в дополнение к первой частоте, исследованной ранее. Для высших краевых резонансов связь с волной Рэлея устанавливается близостью формы колебаний при резонансе и формы волны Рэлея, а также анализом вклада различных групп нераспространяющихся мод в форму колебаний при резонансе. Численные результаты, приведенные в [27], показывают, что наибольший вклад в краевой резонанс вносят нераспространяющиеся моды, параметры затухания которых наиболее близки к параметрам затухания двух составляющих формы волны Рэлея. Форма первого резонанса сильно искажается влиянием объемных волн, возникающих при отражении волны Рэлея от боковых сторон полуполосы, поэтому представление о связи первого резонанса с волной Рэлея можно принять только как гипотезу. Аналогичные результаты получены в [24] (см. также [27]) для изгибных колебаний полубесконечной пластины-полосы, описываемых теорией изгиба пластин Кирхгофа. Здесь установлена связь явления краевого резонанса с волной Коненкова, которая прослеживается также для первого резонанса. В работе [111] изучены краевые колебания предварительно напряженной полуполосы.

Полубесконечная полоса представляет собой математическую абстракт-

цию, удобную для изучения краевых резонансных явлений. Явление краевого резонанса в более близком к практике случае колебаний прямоугольных пластин изучалось в работах [27, 34, 36, 37, 39]. Результаты данных работ показывают, что в ограниченных телах явление краевого резонанса проявляется себя в виде практически горизонтальной спектральной линии (кривой зависимости резонансной частоты от длины прямоугольника) либо, если собственная частота соответствующей задачи для полубесконечной полосы является комплексной, в виде серии “плато”, представляющих собой участки, в той или иной степени близкие к горизонтальным, плавно переходящие с обеих сторон в снижающиеся спектральные линии “обычных” резонансов. Для изгибных колебаний прямоугольной пластины в работе [27] установлена зависимость между степенью искажения “плато” и величиной мнимой части собственной частоты полубесконечной пластины-полосы.

Явление краевого резонанса в сплошном круговом цилиндре изучалось в работах [27, 39, 40, 47, 59, 81]. В этих работах также основное внимание уделялось первому резонансу. В работе [27] показано, что как при осесимметричных, так и при неосесимметричных колебаниях сплошного кругового цилиндра при каждом фиксированном значении числа волн по окружной координате существует бесконечный спектр краевых резонансов. В работе [95] представлен обзор исследований явления краевого резонанса и краевых волн в полубесконечной полосе, а также в стержнях, пластинах и оболочках.

Явления краевого и граничного резонансов в оболочках рассматривались в работах [15, 20, 27, 75, 83, 87, 88] в рамках теории оболочек Кирхгофа–Лява. Применение асимптотических методов теории оболочек, развитых в монографиях [31, 32, 82], позволило выделить различные типы краевых резонансов и получить простые приближенные формулы для определения резонансных частот. Например, в случае круговой замкнутой полубесконечной цилиндрической оболочки в работах [27, 83] выделяются изгибные краевые

колебания, аналогичные изгибным краевым колебаниям пластин, и тангенциальные колебания, аналогичные планарным колебаниям пластин. На низких частотах изгибные колебания переходят в сверхнизкочастотные краевые колебания, характерные только для оболочек и описываемые полубезмоментной теорией оболочек. В соответствии с представлением о связи краевых колебаний и краевых резонансов с поверхностными (в данном случае кромочными) волнами, мы можем выделить три типа кромочных волн в оболочках: изгибную волну, в первом приближении совпадающую с волной Коненкова, тангенциальную волну, главный член асимптотики для которой совпадает с планарной волной рэлеевского типа, и сверхнизкочастотную волну, сменяющую изгибную при небольших значениях числа волн по окружной координате. Особенностью тангенциальной волны является малое радиационное демпфирование, вызванное изгибной распространяющейся модой. Другой особенностью всех названных волн является возможность их существования не только в случае условий свободного края на торце оболочки, но и в случае определенного вида смешанных граничных условий. Так, изгибная кромочная волна существует в случаях, когда элементы торцевого сечения закреплены в одном или обоих тангенциальных направлениях, но могут свободно смещаться в поперечном направлении и поворачиваться. Тангенциальная кромочная волна, напротив, существует в случаях, когда на торце допускаются смещения в обоих тангенциальных направлениях, а прогиб и поворот нормального элемента (или только прогиб или поворот), запрещены. В [27] представлены асимптотические оценки мнимой поправки, описывающей малое радиационное демпфирование тангенциального резонанса изгибной распространяющейся модой. Анализ этих формул показывает, что способ закрепления торца оказывает существенное влияние на порядок мнимой поправки. Все описанные результаты, как уже упоминалось, получены в рамках теории оболочек. Необходимость рассмотрения кромочных волн в оболочках на основе трехмерной тео-

рии упругости диктуется следующими причинами: а) теория оболочек Кирхгофа–Лява имеет ограниченные пределы применимости по частоте и длине волны (подробнее об этом см. монографию [82]), поэтому сделать какие-либо заключения о поведении изгибной и тангенциальной волн при стремлении волнового числа к бесконечности без рассмотрения задачи по трехмерной теории невозможно (сверхнизкочастотная волна сменяется изгибной еще в пределах теории Кирхгофа–Лява, следовательно, её рассмотрение в рамках трехмерной теории не представляет большого интереса); б) граничные условия теории оболочек формулируются для величин, зависящих только от координаты точки на срединной поверхности, в связи с чем представляет интерес подтверждение существования кромочных волн в оболочках с точки зрения трехмерной теории упругости, в которой граничные условия выполняются на всей торцевой поверхности; в) применение трехмерной теории позволит более точно определить величину асимптотически малой мнимой поправки, на значение которой погрешность теории Кирхгофа–Лява оказывает особенно сильное влияние.

Наличие бесконечного спектра частот краевого резонанса в полуполосе в условиях плоской деформации позволяет предположить существование бесконечного спектра трехмерных кромочных волн высшего порядка в пластинах. Частоты краевого резонанса при этом играют роль частот запирающих. Для случая симметричных колебаний пластины этот спектр исследован в работе [27]. Как результат асимптотического анализа, основанного на использовании формы трехмерной поверхностной волны, получены асимптотики скоростей, из которых следует, что предельной скоростью всех кромочных волн высшего порядка является скорость волны Рэлея. Кроме того, асимптотический анализ показывает, что с ростом волнового числа демпфирование кромочных волн распространяющимися модами становится асимптотически малым. Для пластины с жестко защемленными лицевыми поверхностями также установ-

лено существование бесконечного спектра кромочных волн высшего порядка. Для каждой из этих волн можно найти значение волнового числа, после которого демпфирование данной волны распространяющимися модами прекращается. В данной диссертационной работе методика исследования кромочных волн, предложенная в [27], применяется для исследования антисимметричных трехмерных кромочных волн в пластинах и развивается для исследования трехмерных кромочных волн в пластинах со смешанными граничными условиями на кромке и трехмерных кромочных волн в оболочках.

Методология и методы исследования. Методика исследования кромочных волн, принятая в данной работе, состоит в совместном использовании асимптотических методов и метода численного эксперимента. При исследовании волн высшего порядка используется представление о связи с соответствующим типом поверхностных волн. Численные результаты получены методом разложения по модам, позволяющим тождественно удовлетворить уравнениям движения и граничным условиям на полубесконечных лицевых поверхностях. В случае пластины задача расчета дисперсионных характеристик мод сводится к нахождению мод плоского слоя, которые изучались в работах [21, 39, 50, 53, 94, 116]. В случае оболочки следует рассмотреть моды полого цилиндра, во многом аналогичные модам сплошного цилиндра (см. [30, 39, 69, 107, 110, 133]). Изучению мод полого цилиндра посвящены работы [35, 58, 76, 77, 118, 128]. В работе [28] доказана теорема о полноте и возможность использования разложения по модам для решения задач с граничными условиями, заданными на сечении волновода.

Научная новизна. В диссертационной работе впервые

- исследованы антисимметричные кромочные волны высшего порядка в пластине со свободным торцом, установлено существование бесконечного спектра таких волн и изучены их свойства;
- исследована система кромочных волн высшего порядка в пластинах со

смешанными граничными условиями на торце;

- обнаружена и исследована фундаментальная симметричная кромочная волна в пластине со смешанными граничными условиями на торце;
- предложен численно-аналитический метод решения задач о колебаниях полубесконечного полого цилиндра, основанный на методе разложения по модам и использовании специально построенной фундаментальной системы решений дифференциального уравнения Бесселя;
- на основе трехмерных уравнений теории упругости исследованы кромочные волны в тонкой оболочке, ранее изучавшиеся только на основе прикладных двумерных теорий.

Теоретическая и практическая значимость работы определяется тем, что в ней представлено систематическое исследование проблемы существования и свойств трехмерных кромочных волн в пластинах и оболочках, расширяющее и углубляющее современные научные представления о волновых процессах в упругих тонкостенных телах. Результаты работы могут быть использованы для разработки новых методов неразрушающего контроля, совершенствования методов расчета различных элементов конструкций на динамические нагрузки с учетом локализованных резонансных форм колебаний (краевой резонанс), других приложений в различных областях техники, а также в сейсмологии и сейсморазведке. Исследования по теме диссертационной работы выполнены при частичной поддержке РФФИ (проект 11-01-00545) и Минобрнауки РФ (госзадание № 2014/203, код проекта 1617).

Положения, выносимые на защиту:

1. Если торец пластины или оболочки свободен либо закреплен в одном из касательных направлений, то в ней существует бесконечное счетное множество трехмерных кромочных волн высшего порядка, асимптотическое поведение которых при большом значении волнового числа может быть опи-

сано с помощью методик, предложенных в данной работе.

2. Использование специальной фундаментальной системы решений уравнения Бесселя, предложенной в данной работе, позволяет преодолеть ряд вычислительных трудностей при построении мод тонкостенного полого цилиндра.

3. Существование фундаментальных кромочных волн в оболочке, установленное ранее только на основе теории Кирхгофа–Лява, подтверждается с точки зрения трехмерной теории упругости. В достаточно тонкой оболочке как изгибная, так и тангенциальная волна продолжают существовать при любом значении волнового числа, в пределе вырождаясь в волны, локализованные в окрестности угловых окружностей.

Достоверность результатов обеспечивается использованием классических динамических уравнений теории упругости, строгостью применяемых математических методов, тщательным контролем точности при выполнении вычислений. Она подтверждается согласованностью результатов численного исследования и асимптотического анализа, соответствием построенной картины изучаемого процесса общим физическим представлениям о волновых процессах в упругих телах, сравнением результатов, полученных по трехмерной и прикладным двумерным теориям в области применимости последних.

Апробация работы. Результаты исследований, выполненных в диссертации, докладывались на

- Международной научной конференции “Теории оболочек и пластин в механике и биологии: от микро- до наноразмерных структур” (Минск, Беларусь, 2013);
- Международной школе-конференции молодых ученых МЕХАНИКА-2013 (Цахкадзор, Армения, 2013);
- Конференции механико-математического факультета СГУ “Актуальные проблемы математики и механики” (Саратов, 2014);

- IX, X Всероссийских школах-семинарах “Математическое моделирование и биомеханика в современном университете” (пос. Дивноморское, 2014, 2015);
- XLII Международной летней школе-конференции “Актуальные проблемы механики” (АРМ–2014) (Санкт-Петербург (Репино), 2014);
- VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 2014);
- XVII Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды” (Ростов-на-Дону, 2014);
- XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015);
- Всероссийской научной школе-конференции “Механика предельного состояния и смежные вопросы” (Чебоксары, 2015);
- Всероссийской научной конференции с международным участием “Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред” (Москва, 2015).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 14 работах (с [3] по [14], [55, 56]), из них 4 статьи в журналах из перечня рецензируемых изданий ВАК РФ, 5 статей в сборниках трудов международных конференций, 3 статьи в сборниках трудов и 2 статьи в сборниках тезисов всероссийских конференций.

Личный вклад автора. Все результаты, представленные в данной работе, получены автором. Соавторам публикаций принадлежит постановка задач и обсуждение результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 136 наименований. Общий объем работы составляет 143 страницы, включая 50 рисунков и 3 таблицы.

Трёхмерные поверхностные волны в упругом полупространстве

Изучение трёхмерных поверхностных волн в однородном линейно упругом изотропном полупространстве, отнесенном к декартовой системе координат, связано с данной диссертационной работой как первый этап исследования трёхмерных кромочных волн в пластинах. В данной главе представлено систематическое исследование условий существования трёхмерных поверхностных волн. Рассматриваются все возможные варианты граничных условий на поверхности, связанные либо с отсутствием напряжений, либо с закреплением в каждом из трех взаимно перпендикулярных направлений.

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим гармонические колебания упругого изотропного полупространства, отнесенного к декартовой системе координат (x, y, z) и занимающего область $0 \leq x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Будем изучать распространение поверхностных волн, используя для описания колебаний полупространства трёхмерные уравнения теории упругости. Введём безразмерные переменные

$$\begin{aligned} x &= h\pi^{-1}\tilde{x}, \quad y = h\pi^{-1}\tilde{y}, \quad z = h\pi^{-1}\tilde{z}, \quad \{u_x, u_y, u_z\} = h\pi^{-1}\{\tilde{u}_x\tilde{u}_y, \tilde{u}_z\}, \\ \tilde{\omega} &= h\pi^{-1}\omega c_2^{-1}, \quad \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\} = \\ &= E[2(1 + \nu)]^{-1}\{\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \tilde{\sigma}_z, \tilde{\sigma}_{xy}, \tilde{\sigma}_{xz}, \tilde{\sigma}_{yz}\}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$ — вектор перемещений, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ — компоненты тензора напряжений, ω — круговая частота, c_2 — скорость волны сдвига,

E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — характерный размер. Знак “ \sim ”, обозначающий безразмерные переменные, далее опущен.

Представим вектор перемещений через упругие потенциалы Ламе φ и $\boldsymbol{\psi}$ в виде

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \boldsymbol{\psi}. \quad (1.2)$$

Выражения напряжений через потенциалы φ и $\boldsymbol{\psi}$ удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\omega^2 \varphi + 2 \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} \right), \\ \sigma_y &= -\omega^2 \varphi + 2 \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial y} \right), \\ \sigma_z &= -\omega^2 \varphi + 2 \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial z} \right), \\ \sigma_{xy} &= 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial z}, \\ \sigma_{xz} &= 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_{yz} &= 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Представление (1.2) следует дополнить условием

$$\text{div } \boldsymbol{\psi} = 0. \quad (1.4)$$

Условие (1.4) является достаточным для получения однозначного представления компонентов вектора перемещения в упругом теле в виде (1.2). Выражения компонент вектора перемещений через потенциалы φ и $\boldsymbol{\psi}$ имеют вид

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, \\ u_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x}, \\ u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подстановка (1.2) в уравнения Ламе приводит к волновым уравнениям относительно функций φ и ψ (см., например, [51]), которые в случае стационарной динамики переходят в уравнения Гельмгольца

$$\Delta\varphi + \kappa^2\omega^2\varphi = 0, \quad \Delta\psi + \omega^2\psi = 0, \quad (1.6)$$

где Δ — оператор Лапласа, $\kappa = \sqrt{(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)}$.

В линейной теории упругости рассматриваются два типа граничных условий (см., например, [51]):

(1) В каждой точке поверхности задаются либо проекции вектора напряжения, действующего на поверхность, либо проекции вектора перемещения в каждом из трех взаимно перпендикулярных направлений.

(2) При тех же условиях вместо части проекций векторов перемещений или напряжений задаются линейные соотношения между одноименными проекциями векторов перемещений (или их производных по времени) и напряжений (упругие опоры, присоединенные массы и т.п.)

Мы будем рассматривать только граничные условия первого типа. Существование нетривиального решения однородной задачи, затухающего при удалении от поверхности полупространства $x = 0$, означает существование поверхностной волны.

Из требования корректности постановки задачи вытекает, что при $x = 0$ возможны следующие варианты однородных граничных условий типа (1):

а) граница полупространства свободна от напряжений:

$$\sigma_x = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0; \quad (1.7)$$

б) запрещено перемещение в одном из касательных направлений:

$$\sigma_x = u_y = \sigma_{xz} = 0 \text{ (I)}, \quad \sigma_x = \sigma_{xy} = u_z = 0 \text{ (II)}; \quad (1.8)$$

в) запрещено перемещение в обоих касательных направлениях:

$$\sigma_x = u_y = u_z = 0; \quad (1.9)$$

г) запрещено перемещение в нормальном направлении:

$$u_x = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0; \quad (1.10)$$

д) запрещено перемещение в одном из касательных направлений и в нормальном направлении:

$$u_x = u_y = \sigma_{xz} = 0 \text{ (I)}, \quad u_x = \sigma_{xy} = u_z = 0 \text{ (II)}; \quad (1.11)$$

е) запрещено перемещение во всех направлениях:

$$u_x = u_y = u_z = 0. \quad (1.12)$$

Частные решения уравнений (1.6), затухающие при $x \rightarrow \infty$, будем искать в виде

$$\varphi = C_1 e^{-r_1 x} e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \quad \psi = \mathbf{C} e^{-r_2 x} e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \quad (1.13)$$

где $\mathbf{C} = \{C_3, C_4, C_2\}^T$, γ и s – волновые числа в направлениях y и z , соответственно, C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные константы.

Подстановка функций (1.13) в уравнения (1.6) показывает, что параметры r_1, r_2 должны быть связаны с параметрами γ, s, ω соотношениями

$$r_1 = \sqrt{\gamma^2 + s^2 - \kappa^2 \omega^2}, \quad r_2 = \sqrt{\gamma^2 + s^2 - \omega^2}. \quad (1.14)$$

Поскольку постоянная κ^2 изменяется в пределах от $\kappa^2 = 0$ при $\nu = 0.5$ до $\kappa^2 = 0.5$ при $\nu = 0$, условие затухания решения при $x \rightarrow \infty$ будет удовлетворено при выполнении условия $\gamma^2 + s^2 > \omega^2$.

Подставляя (1.13) в выражения для напряжений и перемещений через потенциалы φ и ψ , приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}
u_x &= [-r_1 C_1 e^{-r_1 x} - i(\gamma C_2 - s C_4) e^{-r_2 x}] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\
u_y &= [-i\gamma C_1 e^{-r_1 x} + (r_2 C_2 - i s C_3) e^{-r_2 x}] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\
u_z &= [-i s C_1 e^{-r_1 x} + (i\gamma C_3 - r_2 C_4) e^{-r_2 x}] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\
\sigma_x &= [(2\gamma^2 + 2s^2 - \omega^2) C_1 e^{-r_1 x} + 2i(r_2 \gamma C_2 - r_2 s C_4) e^{-r_2 x}] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\
\sigma_y &= [(-2r_1^2 + 2s^2 - \omega^2) C_1 e^{-r_1 x} - 2(ir_2 \gamma C_2 + \gamma s C_3) e^{-r_2 x}] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\
\sigma_z &= [(-2r_1^2 + 2\gamma^2 - \omega^2) C_1 e^{-r_1 x} + 2(\gamma s C_3 + ir_2 s C_4) e^{-r_2 x}] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\
\sigma_{xy} &= [2ir_1 \gamma C_1 e^{-r_1 x} - ((r_2^2 + \gamma^2) C_2 - ir_2 s C_3 - \gamma s C_4) e^{-r_2 x}] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\
\sigma_{xz} &= [2ir_1 s C_1 e^{-r_1 x} - (\gamma s C_2 + ir_2 \gamma C_3 - (r_2^2 + s^2) C_4) e^{-r_2 x}] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\
\sigma_{yz} &= [-2\gamma s C_1 e^{-r_1 x} - (ir_2 s C_2 - (\gamma^2 - s^2) C_3 - ir_2 \gamma C_4) e^{-r_2 x}] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Формулы (1.15) показывают, что выбранный нами вид частных решений позволяет тождественно удовлетворить граничным условиям на поверхности полупространства $x = 0$ и условию (1.4) во всем полупространстве при надлежащем выборе постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 .

1.2. Трехмерная поверхностная волна в случае свободной поверхности

Рассмотрим случай, когда на поверхности полупространства ставятся условия (1.7). Четвертым условием, необходимым для определения четырех произвольных постоянных, служит условие (1.4), которое должно выполняться во всей области, занятой телом. В данном случае задача может быть упрощена путем поворота системы координат на угол, определяющий направление распространения волны. Мы не применяем здесь этот прием, потому что использование введенной выше произвольно ориентированной системы коор-

динат позволяет получить решение в виде, удобном для анализа кромочных волн в пластинах.

Подставляя (1.15) в (1.7) и в условие (1.4), получим систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\begin{cases} (2s^2 + 2\gamma^2 - \omega^2)C_1 + 2ir_2\gamma C_2 - 2ir_2sC_4 = 0, \\ 2ir_1\gamma C_1 - (\gamma^2 + r_2^2)C_2 + ir_2sC_3 + \gamma sC_4 = 0, \\ 2ir_1sC_1 - \gamma sC_2 - ir_2\gamma C_3 + (r_2^2 + s^2)C_4 = 0, \\ isC_2 + r_2C_3 + i\gamma C_4 = 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Непосредственное вычисление определителя полученной системы требует громоздких выкладок. Приведем процедуру вывода условия существования нетривиального решения системы (1.16), позволяющую избежать вычисления определителя четвертого порядка. На первом шаге следует выразить постоянную C_3 из четвертого уравнения:

$$C_3 = -\frac{i}{r_2}(sC_2 + \gamma C_4). \quad (1.17)$$

Из третьего уравнения выразим C_1 через C_2 и C_4 , заменяя C_3 по формуле (1.17):

$$C_1 = -\frac{i}{r_1s} \left[\gamma sC_2 - \left(s^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) C_4 \right]. \quad (1.18)$$

Подставляя (1.17) и (1.18) во второе уравнение, выразим C_2 через C_4 :

$$C_2 = -\frac{\gamma}{s}C_4. \quad (1.19)$$

И, наконец, подставляя (1.18) и (1.19) в первое уравнение, приходим к соотношению

$$\left[(2(\gamma^2 + s^2) - \omega^2)^2 - 4(\gamma^2 + s^2)r_1r_2 \right] C_4 = 0. \quad (1.20)$$

Заметим, что при выводе соотношения (1.20) производилось деление только на величины r_1, r_2 , отличные от нуля в силу условия затухания волны, и

на величину s . Полагая в (1.20) $C_4 = 0$, мы получим тривиальное решение. Таким образом, при $s \neq 0$ условие существования нетривиального решения системы (1.16) сводится к соотношению

$$(2(\gamma^2 + s^2) - \omega^2)^2 - 4(\gamma^2 + s^2)r_1r_2 = 0. \quad (1.21)$$

Соотношение (1.21) связывает волновые числа s и γ с частотой ω , то есть представляет собой дисперсионное уравнение.

Введем параметр α (см. рисунок 1.1), характеризующий направление распространения волны и связанный с параметрами s и γ соотношениями

$$\gamma = \gamma_1 \cos \alpha, \quad s = \gamma_1 \sin \alpha, \quad (1.22)$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{\gamma^2 + s^2}. \quad (1.23)$$

Случай $s = 0$ соответствует $\alpha = 0$, то есть случаю распространения волны в направлении оси y . Анализируя НДС, определяемое потенциалами (1.13) при $s = 0$, нетрудно убедиться, что в этом случае все искомые величины зависят только от двух пространственных координат (x, y) . Задача распадается на две независимые двумерные задачи: для полупространства, находящегося в условиях плоской деформации, и для полупространства, находящегося в условиях антиплоской деформации. Решение первой задачи, описывающее поверхностную волну, было дано Рэлеем в [115]. Других поверхностных волн в полупространстве, находящемся в условиях плоской деформации, не существует. Антиплоская задача при данных граничных условиях не имеет решений, затухающих при $x \rightarrow \infty$ (см., например, [23]). Исследование трехмерных поверхностных волн при $s \neq 0$ сводится к исследованию дисперсионного уравнения (1.21). Запишем его в виде

$$(2 - c^2)^2 - 4\sqrt{1 - \kappa^2 c^2}\sqrt{1 - c^2} = 0, \quad (1.24)$$

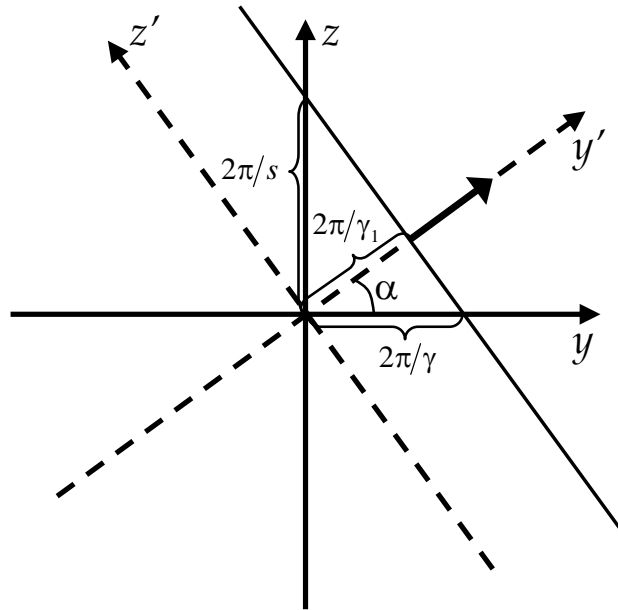


Рисунок 1.1 — Определение угла распространения

где

$$c = \frac{\omega}{\gamma_1}. \quad (1.25)$$

Уравнение (1.24) совпадает с уравнением для определения скорости волны Рэлея [115], если принять во внимание нормировку (1.1). Известно (см., например, [2], [39], [19]), что уравнение (1.24) имеет единственный корень $c = c_R$ при любых значениях упругих параметров. Величина c_R ($0 < c_R < 1$) представляет собой скорость волны Рэлея, отнесенную к скорости волны сдвига. Уравнение (1.24) показывает также, что скорость трехмерной поверхностной волны в случае свободной поверхности не зависит от угла распространения.

Полагая

$$\omega = \gamma_1 c_R, \quad (1.26)$$

мы выполним соотношение (1.21), эквивалентное условию равенства нулю определителя системы (1.16). Положим

$$C_4 = isC, \quad (1.27)$$

где C — произвольная комплексная постоянная. Определяя остальные постоянные из соотношений (1.19), (1.18), (1.20), получим нетривиальное решение системы (1.16) в виде

$$C_1 = K_R \gamma_1 C, \quad C_2 = i\gamma C, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = -isC, \quad (1.28)$$

где

$$K_R = \frac{2\sqrt{1 - c_R^2}}{2 - c_R^2}.$$

Подставляя (1.28) в (1.15), получим форму колебаний в трёхмерной поверхностной волне в случае свободной поверхности:

$$\begin{aligned} u_x &= C \left[-r_1 \gamma_1 K_R e^{-r_1 x} + \gamma_1^2 e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\ u_y &= i\gamma C \left[-\gamma_1 K_R e^{-r_1 x} + r_2 e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\ u_z &= isC \left[-\gamma_1 K_R e^{-r_1 x} + r_2 e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\ \sigma_x &= 2C\gamma_1 \left[\left(\gamma_1^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) K_R e^{-r_1 x} - r_2 \gamma_1 e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\ \sigma_y &= 2C \left[\left(-r_1^2 + s^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) \gamma_1 K_R e^{-r_1 x} + r_2 \gamma^2 e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\ \sigma_z &= 2C \left[\left(-r_1^2 + \gamma^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) \gamma_1 K_R e^{-r_1 x} + r_2 s^2 e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\ \sigma_{xy} &= 2iC\gamma \left[r_1 \gamma_1 K_R e^{-r_1 x} - \left(\gamma_1^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\ \sigma_{xz} &= 2iCs \left[r_1 \gamma_1 K_R e^{-r_1 x} - \left(\gamma_1^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\ \sigma_{yz} &= -2C\gamma s \left[\gamma_1 K_R e^{-r_1 x} - r_2 e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

В системе координат (x, y', z') , повернутой относительно оси x на угол α , имеем $u_{z'} \equiv 0$, то есть движение частиц происходит в плоскости (x, y') и может быть описано двумерной задачей. Таким образом, в данном случае трехмерная поверхностная волна представляет собой волну Рэлея, распространяющуюся в направлении, определяемом углом α .

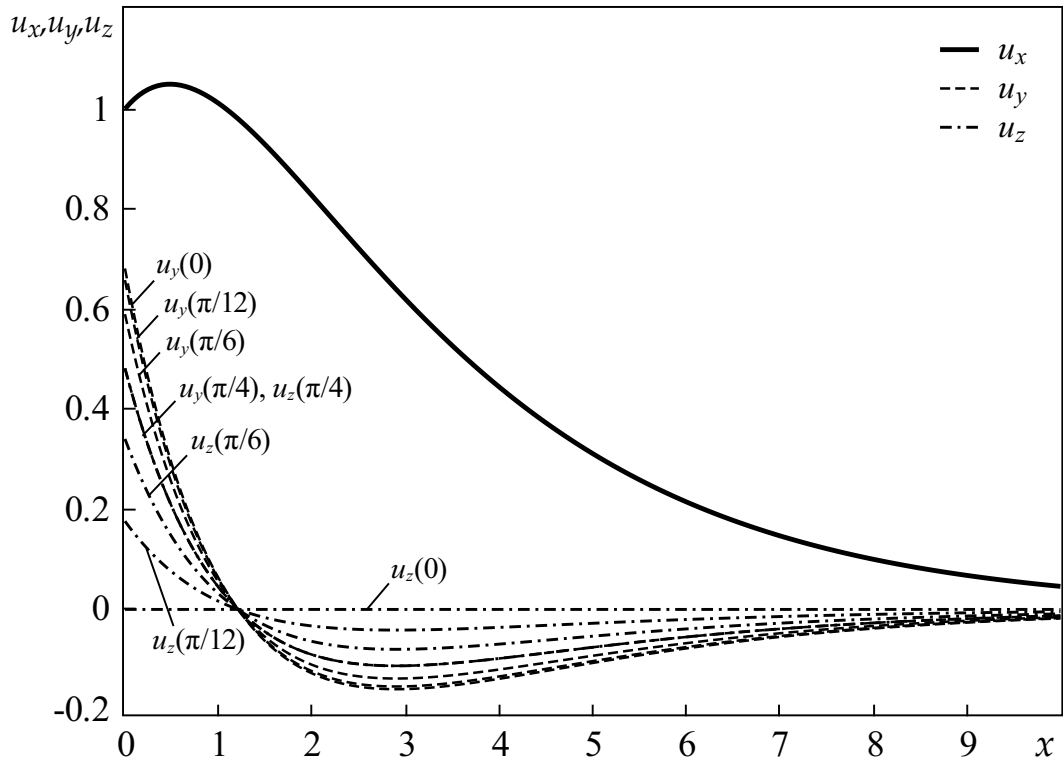
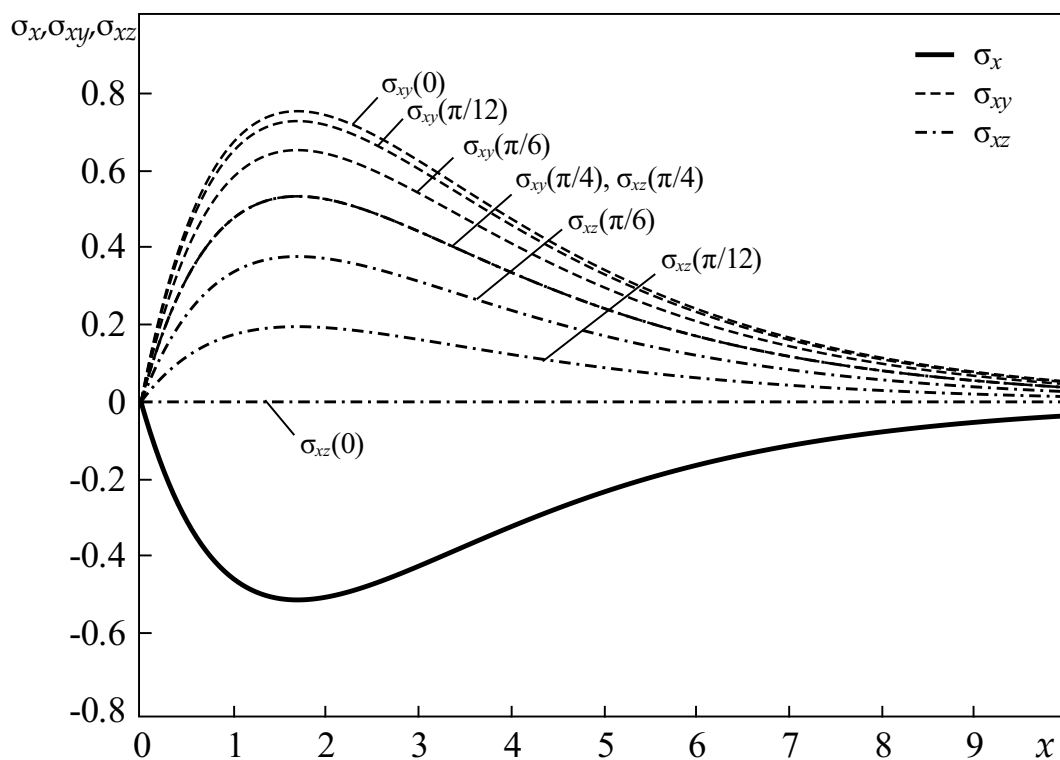
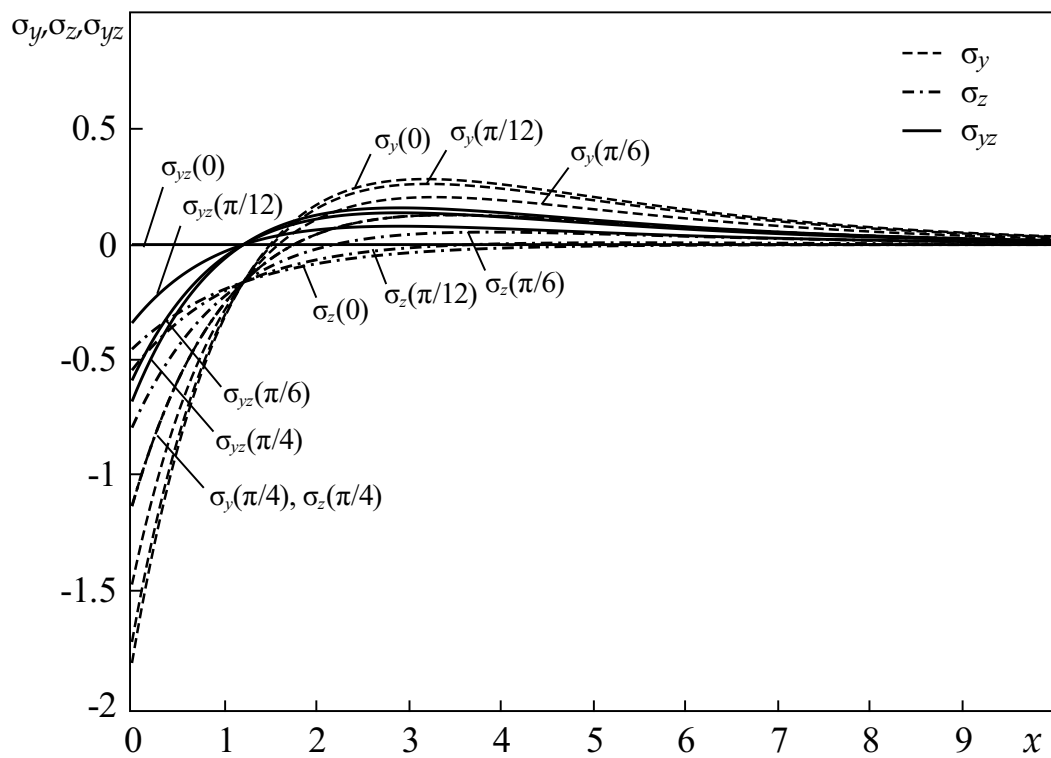


Рисунок 1.2 — Перемещения в трехмерной поверхностной волне в случае свободной поверхности

На рисунках 1.2–1.4 для $\nu = 0.25$ представлены перемещения и напряжения для различных значений угла распространения, нормированные на $u_x(0, 0, 0, 0)$. При вычислении формы колебаний по формулам (1.29) было принято $C = 1$, $\gamma_1 = 1$, $t = 0$. Величины, не имеющие множителя i в (1.29), вычислялись при $y = 0$, $z = 0$, остальные величины при $y = -\frac{\pi}{2\gamma_1} \cos \alpha$, $z = -\frac{\pi}{2\gamma_1} \sin \alpha$. При таком выборе значений y, z мнимые части функций (1.29) обращаются в нуль. При замене значения α на $\frac{\pi}{2} - \alpha$ графики перемещений u_y, u_z переходят в графики перемещений u_z, u_y , соответственно. При $\alpha = \frac{\pi}{4}$ перемещения u_y и u_z совпадают.

Формулы (1.29) и рисунки 1.2–1.4 показывают, что при данных граничных условиях скорость затухания поверхностной волны при $x \rightarrow \infty$ не зависит от угла распространения.

Рисунок 1.3 — Напряжения σ_x , σ_{xy} , σ_{xz} в случае свободной поверхностиРисунок 1.4 — Напряжения σ_y , σ_z , σ_{yz} в случае свободной поверхности

1.3. Трехмерная поверхностная волна в случае закрепления границы полупространства в одном из касательных направлений

1.3.1. На поверхности полупространства ставятся граничные

$$\text{условия } \sigma_x = u_y = \sigma_{xz} = 0$$

В двумерном случае поверхностная волна существует только тогда, когда на поверхности ставятся условия отсутствия напряжений. Соответствующее решение для случая плоской деформации в плоскости (x, z) представляет собой частное решение уравнений движения, удовлетворяющее как граничным условиям (1.7), так и граничным условиям (1.8), вариант I. Этот факт позволяет предположить, что трехмерная поверхностная волна может существовать не только в случае свободной поверхности, но и при других типах граничных условий.

Изучим возможность существования трехмерной поверхностной волны, если на поверхности запрещено перемещение в направлении оси y . Подставляя (1.15) в граничные условия (1.8), вариант I, и в условие (1.4), приходим к следующей системе однородных линейных уравнений относительно постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\begin{cases} (2s^2 + 2\gamma^2 - \omega^2)C_1 + 2ir_2\gamma C_2 - 2ir_2sC_4 = 0, \\ 2ir_1sC_1 - \gamma sC_2 - ir_2\gamma C_3 + (r_2^2 + s^2)C_4 = 0, \\ i\gamma C_1 - r_2C_2 + isC_3 = 0, \\ isC_2 + r_2C_3 + i\gamma C_4 = 0. \end{cases} \quad (1.30)$$

Для выяснения возможности существования нетривиального решения системы (1.30) следует приравнять её определитель нулю. Так же, как и в предыдущем случае, вычисления определителя четвертого порядка можно избежать,

выражая неизвестные постоянные через какую-либо одну из них. В данном случае удобно выразить постоянные C_1, C_2, C_4 через C_3 . Из третьего и четвертого уравнений имеем

$$C_2 = \frac{i}{r_2} (\gamma C_1 + s C_3), \quad (1.31)$$

$$C_4 = \frac{1}{\gamma} (-s C_2 + i r_2 C_3). \quad (1.32)$$

Величина r_2 отлична от нуля в силу условия затухания волны. Примем, что $\gamma \neq 0$. Подставляя (1.31) в (1.32), получим:

$$C_4 = -\frac{i}{r_2 \gamma} [\gamma s C_1 - (\gamma^2 - \omega^2) C_3]. \quad (1.33)$$

Внося найденные выражения для C_2 и C_4 в первое уравнение, находим

$$C_1 = -\frac{2s}{\gamma} C_3. \quad (1.34)$$

После подстановки выражений (1.31), (1.33) и (1.34) второе уравнение принимает вид

$$\frac{1}{r_2 \gamma} \{ [2(\gamma^2 + s^2) - \omega^2] (2s^2 - \omega^2) + \gamma^2 \omega^2 - 4s^2 r_1 r_2 \} C_3 = 0. \quad (1.35)$$

Для существования нетривиального решения необходимо обращение в нуль выражения в фигурных скобках. Таким образом, мы пришли к дисперсионному уравнению

$$[2(\gamma^2 + s^2) - \omega^2] (2s^2 - \omega^2) + \gamma^2 \omega^2 - 4s^2 r_1 r_2 = 0. \quad (1.36)$$

Введём параметры (1.22) и (1.23). Дисперсионное уравнение (1.36) преобразуется к виду

$$(2 - \theta)(2 \sin^2 \alpha - \theta) + \theta \cos^2 \alpha - 4\tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \sin^2 \alpha = 0, \quad (1.37)$$

где

$$\theta = c^2 = \frac{\omega^2}{\gamma_1^2}, \quad \tilde{r}_1 = \sqrt{1 - \kappa^2 \theta}, \quad \tilde{r}_2 = \sqrt{1 - \theta}. \quad (1.38)$$

Покажем, что уравнение (1.37) имеет единственный корень, которому соответствует нетривиальное решение системы (1.30).

Введём функцию

$$D(\theta, \kappa, \alpha) = (2 - \theta)(2 \sin^2 \alpha - \theta) + \theta \cos^2 \alpha - 4\tilde{r}_1\tilde{r}_2 \sin^2 \alpha. \quad (1.39)$$

Первая и вторая производные функции (1.39) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(\theta, \kappa, \alpha)}{\partial \theta} &= -4 + 3 \cos^2 \alpha + 2\theta + 2 \sin^2 \alpha \frac{\tilde{r}_2^2 \kappa^2 + \tilde{r}_1^2}{\tilde{r}_1 \tilde{r}_2}, \\ \frac{\partial^2 D(\theta, \kappa, \alpha)}{\partial \theta^2} &= 2 + \sin^2 \alpha \frac{(\kappa - 1)^2 (\kappa + 1)^2}{\tilde{r}_1^3 \tilde{r}_2^3}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Вторая производная положительна внутри промежутка $(0, 1)$, значит, наше уравнение может иметь не более двух корней на промежутке $[0, 1]$.

Проанализируем поведение графика функции $D(\theta, \kappa, \alpha)$:

$$D(0, \kappa, \alpha) = 0, \quad D'_\theta(0, \kappa, \alpha) = -1 + \sin^2 \alpha (-1 + 2\kappa^2) < 0.$$

Функция убывает в окрестности $\theta = 0$, следовательно, $D(\theta, \kappa, \alpha) < 0$ в окрестности этой точки. С другой стороны, имеем

$$D(1, \kappa, \alpha) = \sin^2 \alpha > 0 \quad \forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, на интервале $(0, 1)$ график функции один раз пересечёт ось абсцисс. Таким образом, при $\alpha \in (0, \pi/2)$ уравнение (1.37) имеет единственный корень, не равный нулю. Зависимость безразмерной фазовой скорости от угла распространения для различных значений коэффициента Пуассона представлена на рисунке 1.5. Уравнение (1.37) решалось численно методом секущих. При $\alpha = \pi/2$ ($\gamma = 0$) задача распадается на задачи

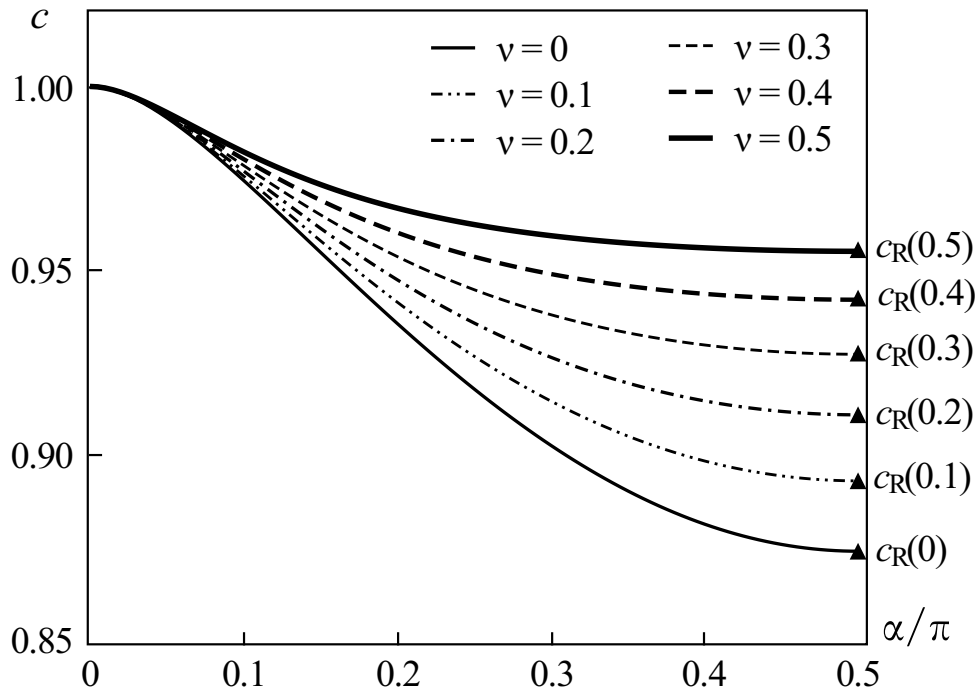


Рисунок 1.5 — Зависимость скорости волны от угла распространения в случае граничных условий $\sigma_x = u_y = \sigma_{xz} = 0$

плоской и антиплоской деформации полупространства. Первая из них имеет решение, описывающее поверхностную волну и удовлетворяющее граничным условиям (1.8), вариант I. Это решение есть не что иное, как волна Рэлея. Задача антиплоской деформации не имеет решений, описывающих поверхностные волны. С другой стороны, при $\alpha \rightarrow \pi/2$ уравнение (1.37) переходит в уравнение для определения скорости волны Рэлея. Это согласуется с результатами численного решения, представленными на рисунке 1.5. Как видно из рисунка, скорость трехмерной поверхностной волны при $\alpha \rightarrow \pi/2$ стремится к значению c_R , отмеченному треугольными маркерами. При $\alpha \rightarrow 0$ значение величины c стремится к единице при любом значении коэффициента Пуассона, что также можно подтвердить анализом уравнения (1.37). В принятой нами нормировке значение безразмерной скорости $c = 1$ соответствует скорости волны сдвига. При этом величина r_2 обращается в нуль, то есть волна,

затухающая от поверхности, перестает существовать. Этот факт нетрудно объяснить, рассмотрев отдельно случай $s = 0$. Задача снова распадается на плоскую и антиплоскую, но теперь в плоской задаче на поверхности ставятся смешанные граничные условия. Поскольку в двумерном случае поверхностная волна существует только в случае условий свободного края, трехмерная поверхностная волна при данных граничных условиях в случае $s = 0$ не существует. Таким образом, результаты, представленные на рисунке 1.5, можно интерпретировать следующим образом: если волна распространяется перпендикулярно направлению запрещенного перемещения (ось y), она “не замечает” закрепления; если волна движется под некоторым углом к оси y , закрепление частично стесняет свободу смещения частиц в направлении распространения волны, и скорость волны повышается; если направление распространения волны совпадает с направлением закрепления, смещение частиц в направлении распространения волны становится невозможным, что приводит к устранению поверхностной волны.

Примем, что $\theta = c^2$ — корень уравнения (1.37). Полагая

$$C_3 = -\gamma C \quad (1.41)$$

и используя соотношения (1.34), (1.33), (1.31), получим нетривиальное решение системы (1.30), определенное с точностью до произвольного постоянного множителя C :

$$C_1 = 2sC, \quad C_2 = i\frac{\gamma s}{r_2}C, \quad C_3 = -\gamma C, \quad C_4 = -i\frac{r_2^2 + s^2}{r_2}C. \quad (1.42)$$

При вычислении констант (1.42) следует иметь в виду, что параметры распространения волны связаны соотношением $\omega = \gamma_1 c$.

Подставляя (1.42) в (1.15), получим выражения для перемещений и напряжений в трёхмерной поверхностной волне для данного случая смешанных

граничных условий на поверхности полупространства. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
u_x &= 2sC \left[-r_1 e^{-r_1 x} + \frac{1}{r_2} \left(\gamma_1^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\
u_y &= -2i\gamma sC (e^{-r_1 x} - e^{-r_2 x}) e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\
u_z &= -2iC \left[s^2 e^{-r_1 x} - \left(s^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\
\sigma_x &= 4sC \left(\gamma_1^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) (e^{-r_1 x} - e^{-r_2 x}) e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\
\sigma_y &= 4sC \left[\left(-r_1^2 + s^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-r_1 x} + \gamma^2 e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\
\sigma_z &= 4sC \left[\left(-r_1^2 + \gamma^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-r_1 x} + \left(s^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\
\sigma_{xy} &= 4i\gamma sC \left[r_1 e^{-r_1 x} - \frac{1}{r_2} \left(\gamma_1^2 - \frac{3\omega^2}{4} \right) e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\
\sigma_{xz} &= 4iC \left[r_1 s^2 e^{-r_1 x} - \frac{1}{4r_2} [(r_2^2 + s^2)^2 - \gamma^2(r_2^2 - s^2)] e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}, \\
\sigma_{yz} &= -4C\gamma \left[s^2 e^{-r_1 x} - \left(s^2 - \frac{\omega^2}{4} \right) e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + sz))}.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

На рисунках 1.6–1.8 представлены графики зависимости от x перемещений и напряжений для различных значений угла распространения, также указанных на рисунках. Значения остальных параметров те же, что и в случае свободного края. Сравнение рисунков 1.6–1.8 с рисунками 1.2–1.4 показывает, что при наличии закрепления изменение угла распространения оказывает существенное влияние на форму колебаний. При уменьшении угла α от $\pi/2$ до нуля скорость затухания волны при $x \rightarrow \infty$ уменьшается. Перемещение u_z вблизи поверхности увеличивается и при малых α приближается к значению перемещения u_x . Максимальное (по модулю) значение напряжения σ_x зависит от α и уменьшается с уменьшением α . Максимально возможное значение напряжения σ_{xy} становится больше, чем в случае свободной поверхности. Максимально возможное значение напряжения σ_y , напротив, становится примерно в четыре раза меньше. В случае свободного края напряжение σ_{yz} и

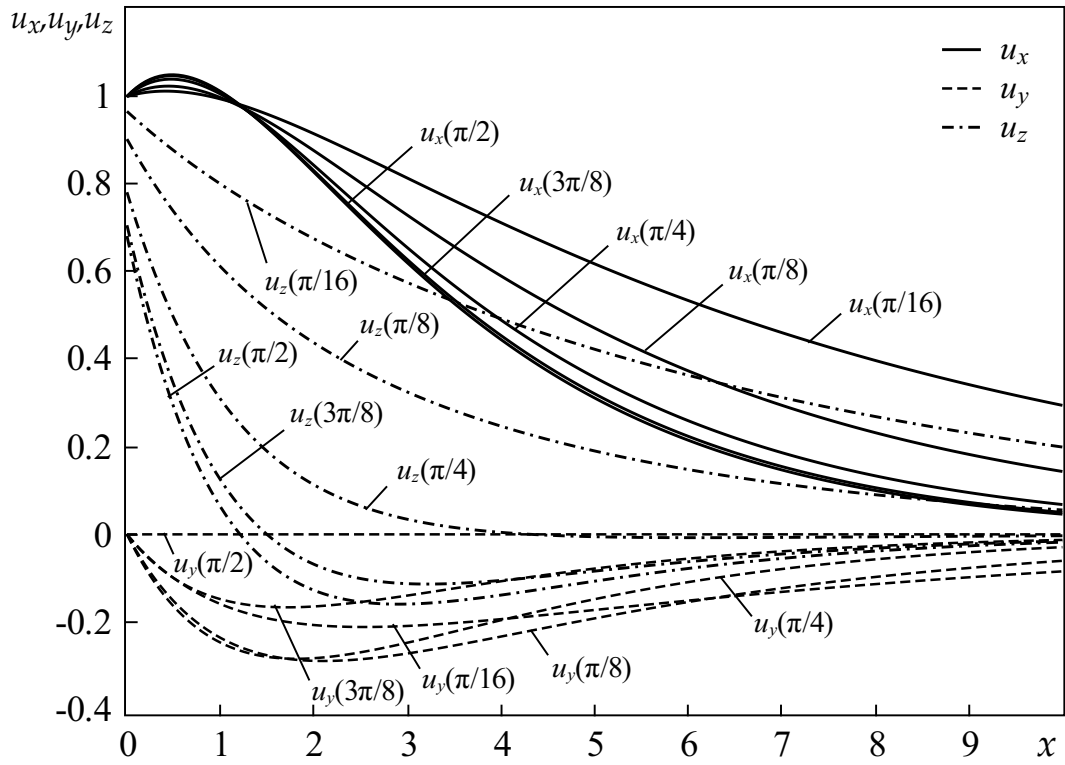


Рисунок 1.6 — Перемещения в случае граничных условий $\sigma_x = u_y = \sigma_{xz} = 0$

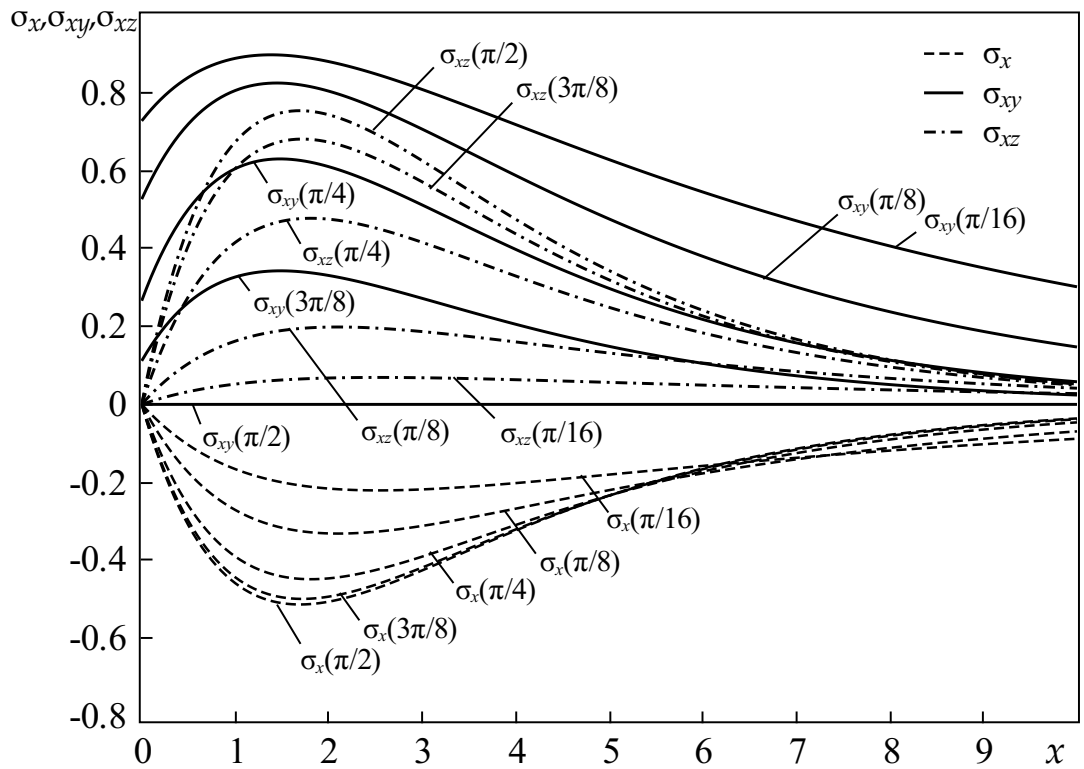


Рисунок 1.7 — Напряжения $\sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ в случае граничных условий $\sigma_x = u_y = \sigma_{xz} = 0$

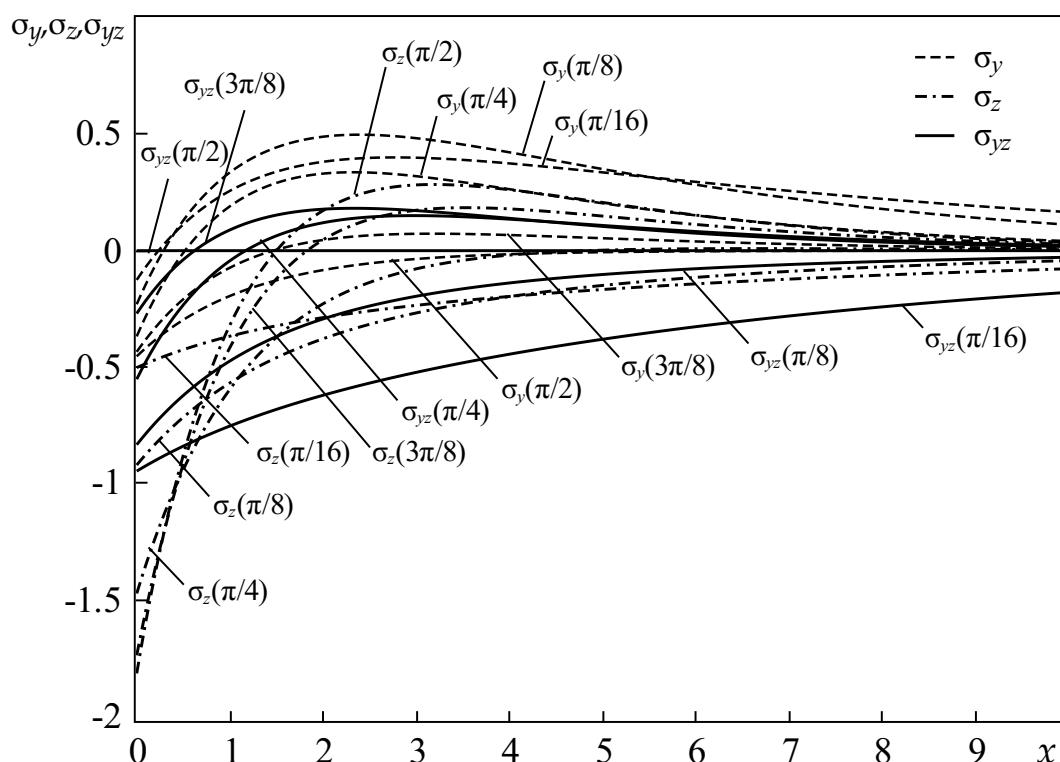


Рисунок 1.8 — Напряжения $\sigma_y, \sigma_z, \sigma_{yz}$ в случае граничных условий $\sigma_x = u_y = \sigma_{xz} = 0$

перемещения u_y, u_z меняли знак в некоторой точке x_0 , положение которой не зависело от угла α . В случае смешанных граничных условий перемещение u_y не меняет знак, а для перемещения u_z и напряжения σ_{yz} координата точки смены знака x_0 зависит от значения α , при этом для каждой из этих функций существует такое значение угла, начиная с которого они перестают менять знак.

При $\alpha \rightarrow 0$ зависимости от x величин $u_y, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xz}$ стремятся к функциям, тождественно равным нулю, а величин $u_x, u_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}$ — к функциям, тождественно равным некоторой константе, отличной от нуля. Таким образом, при $\alpha = 0$ исследуемая поверхностная волна вырождается в сумму двух плоскополяризованных в плоскостях (x, y) и (y, z) объемных волн сдвига. Амплитуды колебаний плоскополяризованных составляющих, получающиеся из решения (1.43) предельным переходом при $\alpha \rightarrow 0$, совпадают.

1.3.2. На поверхности полупространства ставятся граничные

условия $\sigma_x = \sigma_{xy} = u_z = 0$

Подставляя (1.15) в граничные условия (1.8), вариант II, и повторяя ход вывода для предыдущего случая, приходим к дисперсионному уравнению вида

$$(2 - \theta)(2 \cos^2 \alpha - \theta) + \theta \sin^2 \alpha - 4\tilde{r}_1\tilde{r}_2 \cos^2 \alpha = 0. \quad (1.44)$$

Уравнение (1.44) совпадет с уравнением (1.37), если выполнить замену $\alpha = \pi/2 - \alpha_1$. Используя результаты анализа, проведенного выше, мы можем заключить, что в данном случае трехмерная поверхностная волна существует при всех значениях α , кроме $\alpha = \pi/2$. На рисунке 1.9 представлены зависимости скорости волны от угла распространения для данного случая. Форма колебаний определяется выражениями

$$\begin{aligned} u_x &= 2\gamma C \left[-r_1 e^{-r_1 x} + \frac{1}{r_2} \left(\gamma_1^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\ u_y &= -2iC \left[\gamma^2 e^{-r_1 x} - \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\ u_z &= -2i\gamma s C (e^{-r_1 x} - e^{-r_2 x}) e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\ \sigma_x &= 4\gamma C \left(\gamma_1^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) (e^{-r_1 x} - e^{-r_2 x}) e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\ \sigma_y &= 4\gamma C \left[\left(-r_1^2 + s^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-r_1 x} + \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\ \sigma_z &= 4\gamma C \left[\left(-r_1^2 + \gamma^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-r_1 x} + s^2 e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\ \sigma_{xy} &= 4iC \left[r_1 \gamma^2 e^{-r_1 x} - \frac{1}{4r_2} [(r_2^2 + \gamma^2)^2 - s^2(r_2^2 - \gamma^2)] e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\ \sigma_{xz} &= 4i\gamma s C \left[r_1 e^{-r_1 x} - \frac{1}{r_2} \left(\gamma_1^2 - \frac{3\omega^2}{4} \right) e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \\ \sigma_{yz} &= -4Cs \left[\gamma^2 e^{-r_1 x} - \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{4} \right) e^{-r_2 x} \right] e^{i(\omega t - (\gamma y + s z))}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

в которых $\omega = \gamma_1 c$, где $c = \sqrt{\theta}$, θ — корень уравнения (1.44).

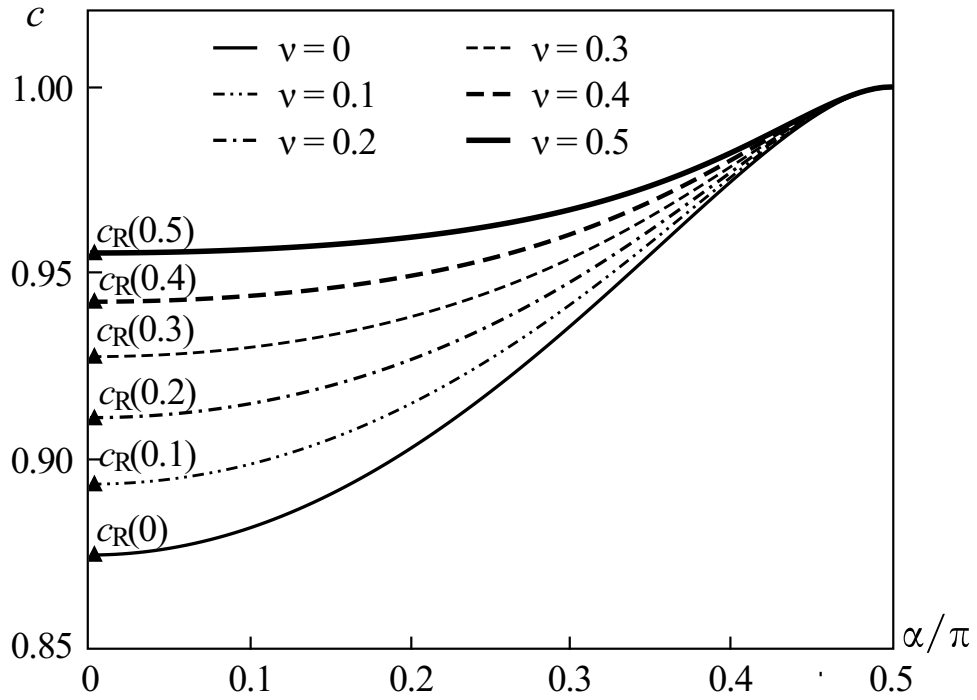


Рисунок 1.9 — Зависимость квадрата скорости волны от угла распространения в случае граничных условий $\sigma_x = \sigma_{xy} = u_z = 0$

Очевидно, что все выводы, сделанные в предыдущем пункте, можно повторить для данного случая с учетом того, что ось z играет здесь роль оси y , а ось y — роль оси z . В частности, при $\alpha \rightarrow 0$ скорость трехмерной поверхностной волны стремится к скорости волны Рэлея (значения этой скорости отмечены на рисунке 1.9 треугольными маркерами). При $\alpha = 0$ исследуемая волна представляет собой волну Рэлея, распространяющуюся вдоль оси y . При $\alpha \rightarrow \pi/2$ скорость c стремится к единице при любом значении коэффициента Пуассона. Форма колебаний при этом изменяется так же, как и в предыдущем случае, с учетом перемены ролей осей y и z . При изменении значения α от $\alpha = 0$ до $\alpha = \pi/2$ скорость затухания амплитуды колебаний при $x \rightarrow \infty$ уменьшается. При $\alpha = \pi/2$ форма колебаний вырождается в сумму двух объемных волн сдвига, плоскополяризованных в плоскостях (x, z) и (y, z) , то есть поверхностная волна при таком значении α не существует.

1.4. Другие типы граничных условий

1.4.1. На поверхности полупространства ставятся граничные

$$\text{условия } \sigma_x = u_y = u_z = 0$$

Дисперсионное уравнение сводится к виду

$$\sqrt{1 - \theta} = 0 \quad (1.46)$$

Очевидно, что это уравнение не имеет корней при $\theta \in (0; 1)$, следовательно, трехмерная поверхностная волна в данном случае не существует.

1.4.2. На поверхности полупространства ставятся граничные

$$\text{условия } u_x = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$$

В данном случае запрещено перемещение в нормальном направлении, а в обоих касательных направлениях закрепление отсутствует. Для таких граничных условий получается дисперсионное уравнение

$$\sqrt{1 - \kappa^2 \theta} \sqrt{1 - \theta} = 0, \quad (1.47)$$

которое также не имеет корней при $\theta \in (0; 1)$. Таким образом, трехмерная поверхностная волна в данном случае также не существует.

1.4.3. На поверхности полупространства ставятся граничные

$$\text{условия } u_x = u_y = \sigma_{xz} = 0$$

Указанным граничным условиям соответствует уравнение

$$(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2) \cos^2 \alpha - \tilde{r}_1 \theta = 0. \quad (1.48)$$

Введем функцию $D(\theta, \kappa, \alpha) = (\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2) \cos^2 \alpha - \tilde{r}_1 \theta$ и исследуем её поведение при $\theta \in [0, 1]$. На концах отрезка $[0, 1]$ для любых значений $\nu \in [0, 0.5]$ и

$\alpha \in [0, \pi/2]$ имеем $D(0, \kappa, \alpha) = 0$, $D(1, \kappa, \alpha) = -\sqrt{1 - \kappa^2} \sin^2 \alpha \leq 0$. Первая и вторая производные функции $D(\theta, \kappa, \alpha)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(\theta, \kappa, \alpha)}{\partial \theta} &= \left(\frac{1}{2\tilde{r}_2} - \frac{\kappa^2}{2\tilde{r}_1} \right) \cos^2 \alpha + \frac{\kappa^2 \theta}{2\tilde{r}_1} - \tilde{r}_1, \\ \frac{\partial^2 D(\theta, \kappa, \alpha)}{\partial \theta^2} &= \left(\frac{1}{4\tilde{r}_2^3} - \frac{\kappa^4}{4\tilde{r}_1^3} \right) \cos^2 \alpha + \frac{\kappa^4}{4\tilde{r}_1^3} \theta + \frac{\kappa^2}{\tilde{r}_1}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Поскольку постоянная κ изменяется в пределах от 0 до $1/\sqrt{2}$, то $\tilde{r}_2 < \tilde{r}_1$ для любого $\theta \in [0, 1]$. Тогда

$$\frac{\partial^2 D(\theta, \kappa, \alpha)}{\partial \theta^2} > 0 \quad \forall \theta \in [0, 1], \nu \in [0, 0.5], \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

то есть график функции $D(\theta, \kappa, \alpha)$ вогнут на отрезке $[0, 1]$. Кроме того, имеем

$$D'_\theta(0, \kappa, \alpha) = -1 + 0.5 \cos^2 \alpha (1 - \kappa^2) < 0.$$

Таким образом, функция $D(\theta, \kappa, \alpha)$ обращается в нуль при $\theta = 0$, убывает в окрестности этой точки и меньше или равна нулю при $\theta = 1$. Следовательно, в интервале $\theta \in (0, 1)$ левая часть уравнения (1.48) не обращается в ноль, и трехмерная поверхностная волна при данных граничных условиях не существует.

1.4.4. На поверхности полупространства ставятся граничные

$$\text{условия } u_x = \sigma_{xy} = u_z = 0$$

Дисперсионное уравнение в данном случае имеет вид

$$(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2) \sin^2 \alpha - \tilde{r}_1 \theta = 0 \quad (1.50)$$

и отличается от уравнения в предыдущем случае заменой $\cos \rightarrow \sin$. Анализ, аналогичный проведенному в предыдущем случае, показывает, что и в этом случае трехмерная поверхностная волна не существует.

1.4.5. На поверхности полупространства ставятся граничные условия $u_x = u_y = u_z = 0$

Дисперсионное уравнение преобразуется к виду

$$\tilde{r}_1 \tilde{r}_2 - 1 = 0 \quad (1.51)$$

Поскольку при $\theta \in (0, 1)$ выполняются неравенства $\tilde{r}_1 < 1$, $\tilde{r}_2 < 1$, уравнение (1.51) не имеет корней на этом интервале, следовательно, трехмерная поверхностная волна отсутствует.

1.5. Результаты и выводы

Анализ, проведенный в данной главе, показывает, что в однородном упругом полупространстве распространение трехмерных поверхностных волн с плоским фронтом возможно в двух случаях: в случае свободной поверхности и в случае, когда на поверхности запрещено перемещение в одном из взаимно перпендикулярных касательных направлений. Волна в случае свободной поверхности совпадает с волной Рэлея с точностью до поворота системы координат. Скорость этой волны постоянна и равна скорости волны Рэлея. В случае смешанных граничных условий на поверхности трехмерная поверхностная волна также не обладает дисперсией, однако её скорость зависит от угла между направлением распространения волны и направлением запрещенного перемещения. Если волна распространяется перпендикулярно закреплению, её скорость равна скорости волны Рэлея. При уменьшении угла распространения скорость трехмерной поверхностной волны растет и стремится к скорости волны сдвига. В случае, когда направление распространения волны совпадает с направлением запрещенного перемещения, поверхностная волна вырождается в объемную волну сдвига.

Отметим, что трехмерная поверхностная волна в случае смешанных граничных условий до настоящего времени была практически не исследована. Мы можем сослаться только на работы [17], [48], в которых задача решалась другим методом. В отличие от данной, в этих работах не представлен анализ зависимости скорости волны от угла распространения. Трехмерные волны в случае свободной поверхности исследованы для трансверсально-изотропного полупространства в работе [18] и для магнитоупругого полупространства в работе [46].

Результаты, полученные в данной главе, будут использованы далее при исследовании трехмерных кромочных волн высшего порядка в пластинах.

Трехмерные кромочные волны в пластинах

Трехмерные кромочные волны в пластинах, распространяющиеся вдоль свободного торца, подробно изучены в работах [26, 27, 134], но только для случая НДС, симметричного относительно срединной поверхности пластины. В данной главе исследованы антисимметричные трехмерные кромочные волны высшего порядка как для пластины со свободными, так и для пластины (полу-бесконечного слоя) с жестко заземленными лицевыми поверхностями, а также трехмерные кромочные волны в пластинах со свободными (либо жестко заземленными) лицевыми поверхностями и смешанными граничными условиями на торце.

2.1. Постановка задачи и метод численного решения

Изучим распространение трехмерных поверхностных волн в упругой пластине, отнесенной к декартовой системе координат (x, y, z) и занимающей область $0 \leq x < \infty$, $|y| \leq h$, $-\infty < z < \infty$ (см. рисунок 2.1). Выражения напряжений и перемещений через потенциалы φ и ψ в безразмерных переменных (1.1) имеют вид (1.3) и (1.5), соответственно.

Будем рассматривать два вида граничных условий на лицевых поверхностях $y = \pm h$: условия свободного края

$$\sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0 \quad (2.1)$$

и условия жестко заземленного края

$$u_x = u_y = u_z = 0. \quad (2.2)$$

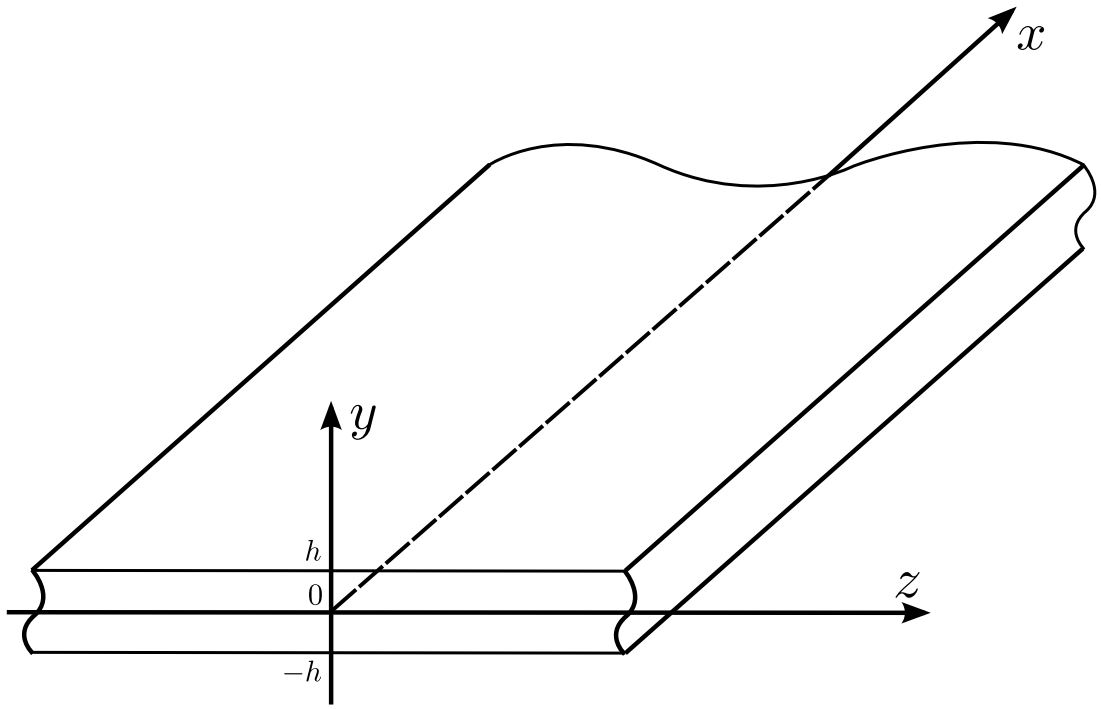


Рисунок 2.1 — Геометрия задачи

Рассмотрим стоячую гармоническую кромочную волну. В этом случае можно считать, что напряженно-деформированное состояние изменяется по переменной z по гармоническому закону вида $\cos(sz)$. Опираясь на результаты главы 1, сформулируем граничные условия при $x = 0$, при выполнении которых возможно существование кромочных волн, связанных с трехмерной поверхностной волной в полупространстве:

а) кромка пластины свободна:

$$\sigma_x = 0, \sigma_{xy} = 0, \sigma_{xz} = 0; \quad (2.3)$$

б) на кромке пластины запрещено перемещение в направлении, перпендикулярном лицевым поверхностям:

$$\sigma_x = 0, u_y = 0, \sigma_{xz} = 0; \quad (2.4)$$

в) на кромке пластины запрещено перемещение в направлении, параллельном

лицевым поверхностям:

$$\sigma_x = 0, \sigma_{xy} = 0, u_z = 0. \quad (2.5)$$

Существование кромочной волны равносильно существованию решения однородной задачи, которое соответствует принятому закону изменения НДС по переменной z и затухает при $x \rightarrow \infty$. На бесконечности ставится условие отсутствия источников энергии.

Решение поставленной однородной задачи представляет собой сумму двух кромочных волн, распространяющихся в противоположных направлениях вдоль оси z . Для таких волн параметр s играет роль волнового числа. Таким образом, исследование зависимости от s собственных частот поставленной задачи равносильно исследованию дисперсии кромочных волн. Фазовую скорость кромочных волн можно вычислить по формуле

$$c = \frac{\omega_0}{s}, \quad (2.6)$$

где ω_0 — собственная частота соответствующей однородной задачи. В силу нормировки (1.1) скорость, вычисленная по формуле (2.3), отнесена к скорости волны сдвига c_2 .

При численном определении собственных частот удобнее искать не корень некоторого довольно сложного уравнения, а резонансную частоту соответствующей неоднородной задачи. Однородным граничным условиям (2.3)–(2.5) соответствуют неоднородные граничные условия

$$\sigma_x = T_g(y) \cos(sz) e^{i\omega t}, \sigma_{xy} = 0, \sigma_{xz} = 0, \quad (2.7)$$

$$\sigma_x = T_g(y) \cos(sz) e^{i\omega t}, u_y = 0, \sigma_{xz} = 0, \quad (2.8)$$

$$\sigma_x = T_g(y) \cos(sz) e^{i\omega t}, \sigma_{xy} = 0, u_z = 0, \quad (2.9)$$

где $T_g(y)$ – заданная функция переменной y . Условия (2.7)–(2.9) моделируют возбуждение колебаний пластины нормальной нагрузкой, приложенной на торце. Временной множитель $e^{i\omega t}$ далее будем опускать.

Построим частные решения уравнений (1.6), удовлетворяющие однородным условиям (2.1) или (2.2) на лицевых поверхностях. Нетрудно убедиться, что функции

$$\begin{aligned}\varphi &= C_1 \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_1 y) \\ \sin(\alpha_1 y) \end{Bmatrix} \cos(sz) \exp(-rx), \\ \psi_x &= C_3 \begin{Bmatrix} \sin(\alpha_2 y) \\ \cos(\alpha_2 y) \end{Bmatrix} \sin(sz) \exp(-rx), \\ \psi_y &= C_4 \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_2 y) \\ \sin(\alpha_2 y) \end{Bmatrix} \sin(sz) \exp(-rx), \\ \psi_z &= C_2 \begin{Bmatrix} \sin(\alpha_2 y) \\ \cos(\alpha_2 y) \end{Bmatrix} \cos(sz) \exp(-rx)\end{aligned}\tag{2.10}$$

являются частными решениями уравнений (1.6), если r, C_1, C_2, C_3, C_4 – некоторые константы, и

$$\alpha_1 = \sqrt{r^2 + \kappa^2 \omega^2 - s^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{r^2 + \omega^2 - s^2}.\tag{2.11}$$

Для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4 имеем условие (1.4) и граничные условия (2.1) и (2.2), которые в силу симметрии достаточно удовлетворить только при $y = \pi$. Используя верхние строчки в (2.10), соответствующие симметричным колебаниям, приходим к дисперсионному уравнению

$$\alpha_2 \sin(\alpha_2 \pi) [\alpha_3^4 \cos(\alpha_1 \pi) \sin(\alpha_2 \pi) - \hat{r}^2 \alpha_1 \alpha_2 \sin(\alpha_1 \pi) \cos(\alpha_2 \pi)] = 0\tag{2.12}$$

в случае граничных условий (2.1), где $\hat{r}^2 = r^2 - s^2$, $\alpha_3^2 = \hat{r}^2 + 0.5\omega^2$. В случае

граничных условий (2.2) получим уравнение

$$\cos(\alpha_2\pi) [\hat{r}^2 \cos(\alpha_1\pi) \sin(\alpha_2\pi) - \alpha_1\alpha_2 \sin(\alpha_1\pi) \cos(\alpha_2\pi)] = 0. \quad (2.13)$$

Для антисимметричных колебаний, которым соответствуют нижние строчки в (2.10), получаются уравнения, аналогичные уравнениям (2.12) и (2.13), но с заменой $\sin \rightarrow \cos$, $\cos \rightarrow \sin$.

Уравнения (2.12) и (2.13) получаются из условия равенства нулю определителя системы однородных линейных алгебраических уравнений относительно констант C_1, C_2, C_3, C_4 . Пусть $r_n = r_n(\omega)$ — корень уравнения (2.12) или (2.13). Ему соответствует нетривиальное решение уравнений движения, удовлетворяющее однородным граничным условиям на лицевых поверхностях. Такие решения мы будем называть *модами* и обозначать как $\mathbf{f}^{(n)}$, где $\mathbf{f} = (\varphi, \psi_x, \psi_y, \psi_z)^T$.

Структура уравнений (2.12) и (2.13) показывает, что в данном случае существует два типа мод. Моды, которые определяются уравнениями, получающимися при приравнении нулю выражения в квадратных скобках из (2.12) и (2.13), соответствуют модам бесконечной полосы в условиях плоской деформации, исследованным впервые в работах [94, 116]. Будем называть эти моды плоскими. Свойства плоских мод бесконечной полосы, необходимые в данном исследовании, описаны в [27]. Вторая серия мод, определяемая уравнением

$$\sin(\alpha_2\pi) = 0$$

или

$$\cos(\alpha_2\pi) = 0,$$

связана с антиплоской задачей для той же полосы. Антиплоские моды определяются параметрами

$$r_k^{sh} = \sqrt{k^2 + s^2 - \omega^2}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

для симметричных колебаний в случае условий свободного края (2.1) и для антисимметричных колебаний в случае условий жесткой заделки (2.2) (в этом случае $k = 1, 2, \dots$); для антисимметричных колебаний в случае условий свободного края и симметричных колебаний в случае жесткой заделки имеем

$$r_k^{sh} = \sqrt{(k - 0.5)^2 + s^2 - \omega^2}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Из дополнительного условия (1.4) следует соотношение

$$C_3 = -\frac{1}{r} (sC_2 \pm \alpha_2 C_4), \quad (2.16)$$

позволяющее исключить константу C_3 (здесь и далее верхний знак соответствует симметричным колебаниям, а нижний — антисимметричным). После исключения константы C_3 можно определить остальные константы из системы, получающиеся при удовлетворении граничным условиям. Эти константы определяются с точностью до произвольного постоянного множителя, при этом каждый из двух типов мод следует рассматривать отдельно. Для плоских мод в случае условий свободного края (2.1) получаем

$$C_1 = C, C_2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{r\alpha_1 \sin(\alpha_1\pi)}{(\hat{r}^2 + 0.5\omega^2)^2 \sin(\alpha_2\pi)} \\ -\frac{r\alpha_1 \cos(\alpha_1\pi)}{(\hat{r}^2 + 0.5\omega^2)^2 \cos(\alpha_2\pi)} \end{array} \right\} C, C_4 = 0, \quad (2.17)$$

для плоских мод в случае условий жесткой заделки (2.2) имеем

$$C_1 = C, C_2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{r \cos(\alpha_1\pi)}{\alpha_2 \cos(\alpha_2\pi)} \\ -\frac{r \sin(\alpha_1\pi)}{\alpha_2 \sin(\alpha_2\pi)} \end{array} \right\} C, C_4 = 0, \quad (2.18)$$

и для антиплоских мод в обоих случаях

$$C_1 = 0, C_2 = \pm \frac{\alpha_2 s}{\hat{r}^2} C, C_4 = C. \quad (2.19)$$

В соотношениях (2.17), (2.18), (2.19) C — постоянная, которая может быть задана произвольно для каждой моды в отдельности. НДС мод определяется формулами (1.3), (1.5), в которые следует подставить потенциалы (2.10). Выражения, определяющие перемещения и напряжения в моде $\mathbf{f}^{(n)}$, имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}
u_x^{(n)}(x, y, z) &= u_n(y) \cos(sz) \exp(-r_n x), \\
u_y^{(n)}(x, y, z) &= v_n(y) \cos(sz) \exp(-r_n x), \\
u_z^{(n)}(x, y, z) &= w_n(y) \sin(sz) \exp(-r_n x). \\
\sigma_x^{(n)}(x, y, z) &= T_n(y) \cos(sz) \exp(-r_n x), \\
\sigma_{xy}^{(n)}(x, y, z) &= S_n(y) \cos(sz) \exp(-r_n x), \\
\sigma_{xz}^{(n)}(x, y, z) &= H_n(y) \sin(sz) \exp(-r_n x).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

В симметричном случае функций $u_n(y)$, $w_n(y)$, $T_n(y)$, $H_n(y)$ четны по y , функции $v_n(y)$, $S_n(y)$ — нечетны, в антисимметричном случае четные функции становятся нечетными и наоборот.

Представим решение поставленной краевой задачи в виде разложения по модам

$$\mathbf{f} = \sum_n C_n \mathbf{f}^{(n)}. \tag{2.21}$$

В представление (2.21) мы будем включать только те из мод, которые затухают при $x \rightarrow \infty$ или представляют собой волны, переносящие энергию в направлении от кромки пластины (энергетический принцип излучения, см. [28]). Таким образом, в представление (2.21) входят моды, удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} r_n > 0$, или, если $\operatorname{Re} r_n = 0$, условию $\frac{d(\operatorname{Im} r_n)}{d\omega} > 0$. Коэффициенты разложения C_n определяются при удовлетворении граничным условиям при $x = 0$. Уравнения колебаний и граничные условия на лицевых поверхностях тождественно удовлетворяются представлением (2.21), так как они являются

линейными однородными и им удовлетворяет каждая из мод $\mathbf{f}^{(n)}$.

Поскольку рассматриваемая пластина является полубесконечной по оси x , резонансы волн, распространяющихся в направлении оси x , в ней невозможны. Резонансы в данной системе могут быть связаны только с кромочными волнами. Таким образом, изучение кромочных волн сводится к поиску резонансных частот при различных значениях параметра s . Используя решения для трехмерных поверхностных волн в полупространстве, полученные в предыдущей главе, можно получить асимптотические оценки искомых частот при $s \rightarrow \infty$. При этом следует иметь в виду, что в случае пластины следует использовать сумму двух трехмерных поверхностных волн, распространяющихся в противоположных направлениях по отношению к оси y и в одном и том же направлении по отношению к оси z . Скорость волны в пластине определяется по волновому числу в направлении оси z (т.н. “кажущаяся” скорость), а не в направлении распространения волны, как в главе 1, т.е. теперь она уже не будет постоянной. Если на лицевых поверхностях пластины $y = \pm\pi$ ставятся определенные смешанные граничные условия, например, условия вида

$$u_y = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0,$$

то стоячая трехмерная поверхностная волна позволяет удовлетворить всем граничным условиям, то есть получить точное решение задачи. Задачи такого рода рассмотрены в работах [16, 42, 86]. Граничные условия свободного края (2.1) и жесткой заделки (2.2) не могут быть удовлетворены таким образом, что приводит к значительному усложнению задачи. С физической точки зрения это означает, что в образовании формы кромочной волны участвует как поверхностная волна, так и объемные волны расширения и сдвига, возникающие при отражении поверхностной волны от лицевых поверхностей.

2.2. Антисимметричные кромочные волны высшего порядка в случае свободного торца

2.2.1. Свободные лицевые поверхности

Описание кромочной волны в пластине со свободными лицевыми поверхностями сводится к нахождению нетривиального решения однородной краевой задачи (1.6), (2.1), (2.3). Построим приближенную собственную форму для данной задачи, используя решение для трехмерной поверхностной волны (1.29). В данном случае следует рассмотреть стоячую волну с антисимметричным законом изменения НДС по координате y . Примем, что значение параметра γ фиксировано, и запишем асимптотики при $s \rightarrow \infty$ для напряжений, входящих в граничные условия (2.1):

$$\begin{aligned}\sigma_y^R &= \frac{C}{\gamma} \left\{ K_R c_R^2 \left[(1 - 2\kappa^2) s^3 + \left(1 - 2\kappa^2 + \frac{2}{c_R^2} \right) \gamma^2 s \right] e^{-s\tilde{r}_1 x} - \right. \\ &\quad \left. - 2\tilde{r}_2^R \gamma^2 s e^{-s\tilde{r}_2 x} \right\} \left(1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right) \right) \sin(\gamma y) \cos(sz), \quad (2.22) \\ \sigma_{xy}^R &= 2Cs^2 \left[K_R \tilde{r}_1^R e^{-s\tilde{r}_1 x} - \left(1 - \frac{c_R^2}{2} \right) e^{-s\tilde{r}_2 x} \right] \left(1 + \frac{\gamma^2}{s^2} \right) \cos(\gamma y) \cos(sz), \\ \sigma_{yz}^R &= 2Cs^2 \left[K_R e^{-s\tilde{r}_1 x} - \tilde{r}_2^R e^{-s\tilde{r}_2 x} \right] \left(1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right) \right) \cos(\gamma y) \sin(sz),\end{aligned}$$

где $\tilde{r}_1^R = \sqrt{1 - \kappa^2 c_R^2}$, $\tilde{r}_2^R = \sqrt{1 - c_R^2}$, $\tilde{r}_i = \tilde{r}_i^R \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{s^2}}$ ($i = 1, 2$), c_R – корень уравнения (1.24). Анализ выражений (2.22) показывает, что если $\kappa \neq 1/2$ ($\nu \neq 0$), то при $s \rightarrow \infty$ наибольшим из напряжений, входящих в граничные условия на лицевых поверхностях $y = \pm\pi$, является напряжение σ_y^R . Чтобы удовлетворить всем граничным условиям однородной задачи с асимптотически малой погрешностью, достаточно выполнить граничное условие для σ_y^R , то есть положить

$$\gamma = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.23)$$

Таким образом, в качестве первого приближения собственной формы колебаний рассматриваемой пластины можно принять форму трехмерной поверхностной волны. Подставляя (2.23) в выражение $\omega = \gamma_1 c_R$, связывающее частоту и волновое число, получим асимптотику собственных частот при $s \rightarrow \infty$:

$$\omega_n^{(\infty)} = c_R \sqrt{s^2 + n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.24)$$

Формула (2.24) показывает, что при $s \rightarrow \infty$ существует бесконечное множество дисперсионных кривых $\omega = \omega(s)$. Это означает, что в рассматриваемой пластине существует бесконечное счетное множество антисимметричных кромочных волн высшего порядка. Погрешность асимптотики (2.24) определяется значением величины n/s , следовательно, для волн больших номеров асимптотика (2.24) начинает работать позже.

С другой стороны, в работе [27] было показано, что в полуполосе, находящейся в условиях плоской деформации, существует бесконечный спектр частот антисимметричных краевых резонансов. Задача, рассмотренная в [27], соответствует рассматриваемой нами задаче (1.6), (2.1), (2.3) при $s = 0$. Таким образом, при малых s также существует бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка. Поведение дисперсионных кривых, начинающихся с частот краевых резонансов и выходящих при $s \rightarrow \infty$ на асимптотики (2.24), может быть исследовано только путем численного решения поставленной краевой задачи. При этом асимптотики (2.24) можно использовать как начальное приближение при больших s . При малых s можно воспользоваться приближенными формулами для частот антисимметричных краевых резонансов, полученными в [27]:

$$\omega_k \approx \omega_k^{(0)} = \frac{(k + \frac{1}{2}) \operatorname{Re} r_{2k-1}^{\text{st}}}{\sqrt{(\operatorname{Re} r_{2k-1}^{\text{st}})^2 + (k + \frac{1}{2})^2 (c_R^{-2} - 1)}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.25)$$

где r_{2k-1}^{st} — предельные значения комплексных корней уравнения Рэля-Лэм-

ба при $\omega \rightarrow 0$:

$$r_{2k-1}^{\text{st}} \approx k + \frac{1}{4} - \frac{\text{arch}[(2k + \frac{1}{2})\pi]}{2\pi\sqrt{(2k + \frac{1}{2})^2\pi^2 - 1}} - \frac{i}{2\pi}\text{arch}\left[\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right]. \quad (2.26)$$

При увеличении s от нуля до бесконечности происходит переход от собственных частот, определяемых формулой (2.25), к собственным частотам, определяемым формулой (2.24). При больших k можно положить $\text{Re } r_{2k-1}^{\text{st}} \approx k + 1/2$, тогда из формулы (2.24) имеем $\omega_k \approx c_{\text{R}}(k + 1/2)$, что соответствует $\gamma \approx k + 1/2$. Таким образом, с ростом s форма кромочной волны изменяется от формы, близкой к стоячей трехмерной поверхностной волне с $\gamma \approx k + 1/2$, до формы, близкой к форме той же волны с $\gamma \approx n$ (число n может быть равно либо k , либо $k + 1$). Поскольку выход на асимптотику (2.24) возможен только при достаточно больших значениях s , в переходной области ($s \sim k$) должна действовать приближенная формула

$$\omega_k \approx \omega_k^{(1)} = c_{\text{R}}\sqrt{s^2 + \left(k + \frac{1}{2}\right)^2}. \quad (2.27)$$

В случае $\nu = 0$ асимптотически главными среди напряжений $\sigma_y^{\text{R}}, \sigma_{xy}^{\text{R}}, \sigma_{yz}^{\text{R}}$ становятся напряжения $\sigma_{xy}^{\text{R}}, \sigma_{yz}^{\text{R}}$, так как коэффициент при s^3 в (2.22) обращается в ноль. Чтобы удовлетворить с асимптотически малой погрешностью всем граничным условиям задачи, положим $\gamma = n + 1/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Асимптотическая формула для собственных частот при $s \rightarrow \infty$ примет вид

$$\omega_n^{(\infty)} = c_{\text{R}}\sqrt{s^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}. \quad (2.28)$$

Таким образом, при $\nu = 0$ приближенная формула в переходной области совпадает с асимптотикой при $s \rightarrow \infty$. Антисимметричный краевой резонанс при $k = 0$ в [27] обнаружен не был, однако при больших s собственная частота, соответствующая форме трехмерной поверхностной волны с $\gamma \approx 1/2$,

должна существовать. Следовательно, при некотором s , отличном от нуля, должна появиться дополнительная волна, выходящая на асимптотику (2.28) при $n = 0$.

Подставляя (2.24), (2.28) в формулу (2.6), получим асимптотики фазовых скоростей кромочных волн высшего порядка при $s \rightarrow \infty$:

$$c_n^{(\infty)} = \begin{cases} c_R \sqrt{1 + \frac{n^2}{s^2}} & \text{при } \nu \neq 0, \\ c_R \sqrt{1 + \frac{(n + 0.5)^2}{s^2}} & \text{при } \nu = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Формулы (2.29) показывают, что предельной скоростью всех антисимметричных кромочных волн высшего порядка при $s \rightarrow \infty$ является скорость волны Рэлея. Та же самая предельная скорость была найдена в [27] для симметричных волн.

В работах [27, 134] было показано, что симметричные кромочные волны высшего порядка демпфируются распространяющимися модами. Степень затухания волны, связанного с радиационным демпфированием, характеризуется мнимой частью собственной частоты. Очевидно, что то же явление будет иметь место и в случае антисимметричных волн. При $s \rightarrow \infty$, как было показано выше, форма колебаний волны асимптотически стремится к форме стоячей поверхностной волны, которая формируется только нераспространяющимися модами. Следовательно, при $s \rightarrow \infty$ мнимая часть собственных частот должна стремиться к нулю. При малых значениях s и в переходной области зависимость мнимой части от волнового числа имеет сложный характер и может быть исследована только в ходе численного решения.

Методика численного решения, основанного на разложении по модам, описана в п. 2.1. В данном случае следует решить задачу о вынужденных колебаниях (1.6), (2.1), (2.7) и найти резонансные частоты для каждого заданного значения s . При этом определяется также ширина резонансного пика,

связанная с мнимой частью собственной частоты (см. [27]). Для определения констант C_n в разложении (2.21) будем требовать удовлетворения граничных условий (2.7) в отдельных точках отрезка $[-\pi, \pi]$ (метод коллокаций). Численное определение констант C_n сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n T_n \left(y_m^{(1)} \right) &= T_g \left(y_m^{(1)} \right), m = \overline{1, n_1}, \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n \int_0^\pi T_n(y) dy = \int_0^\pi T_g(y) dy, \\ \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n S_n \left(y_m^{(2)} \right) &= 0, m = \overline{0, n_1 - 1}, \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n \int_0^\pi S_n(y) dy = 0, \\ \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n H_n \left(y_m^{(3)} \right) &= 0, m = \overline{1, n_2 - 1}, \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n \int_0^\pi H_n(y) dy = 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где $n_1 = \frac{n_0 - 1}{2}$, $y_m^{(1)} = \frac{\pi m}{n_1 + 1}$, $y_m^{(2)} = \frac{\pi m}{n_1 + 1}$, $y_m^{(3)} = \frac{\pi m}{n_2 + 1}$, $n_0 + 1$ – число плоских мод, n_2 – число антиплоских мод. Интегральные условия выражают требование самоуравновешенности невязок и позволяют локализовать влияние погрешностей в удовлетворении граничным условиям в окрестности угловых точек.

Проведенный выше анализ показывает, что для наиболее эффективного возбуждения резонанса k -той волны в (2.7) следует положить $T_g(y) = \sin [(k + 0.5)y]$. В процессе поиска резонансных частот удобно использовать приближенные соотношения (2.24) и (2.27). Запишем их в виде общей формулы:

$$\omega_\gamma^{appr} = c_R \sqrt{s^2 + \gamma^2}, \quad (2.31)$$

где $\gamma = 1, 2, 3, \dots$ или $\gamma = 0.5, 1.5, 2.5, \dots$. В численном исследовании было обнаружено, что вблизи частот, определяемых приближенной формулой (2.27), действительно существуют резонансы. С ростом s резонансные частоты волны с номером k ($k = 1, 2, 3, \dots$) переходят на асимптотику (2.24) при $n = k + 1$.

Кроме того, при $s \geq 0.3$ появляется дополнительная волна, выходящая при $s \rightarrow \infty$ на асимптотику (2.24) при $n = 1$. В переходной области резонансы этой волны наиболее эффективно возбуждаются нагрузкой $T_g(y) = \sin(0.5y)$. Поскольку в данной задаче существует также фундаментальная волна, исследованная в [27], дополнительной волне был присвоен номер $k = 0.5$.

В таблице 2.1 и на рисунках 2.2, 2.3 приведены результаты для значения коэффициента Пуассона $\nu = 0.25$. На рисунке 2.2 показаны значения ширины резонансов Γ_k , а также фазовые скорости, рассчитанные по формуле $c_k = \frac{\omega_k^{num}}{s}$, где ω_k^{num} и Γ_k — частота и ширина резонанса k -той волны при данном s , найденных численно. Для $k = 1$ резонансная частота определялась как частота, на которой достигается максимум величины $|u_y(0, 0, 0)|$, а для $k = \frac{1}{2}, 2, 3$ — как частота, на которой достигается максимум величины $|u_x(0, \frac{\pi}{8}, 0)|$. Значения указанных величин на резонансной частоте можно принять за амплитуду колебаний при резонансе A_k^{num} . Ширина резонанса Γ_k вычислялась как полусумма ширины слева и ширины справа, равных модулю разности между резонансной частотой и частотой, в которой достигается значение $A_k^{num}/\sqrt{2}$. В расчетах при $s \in (0.0, 10.0)$ использовалось 40 плоских мод и 20 антиплоских, $s \in (10.0, 20.0)$ — 80 плоских мод и 40 антиплоских. Погрешность удовлетворения граничным условиям вне малых окрестностей угловых точек при этом не превышала 1%.

Рисунок 2.3 иллюстрирует связь результатов численных экспериментов с результатами теоретического анализа, полученными выше. На нем представлены четыре группы графиков, соответствующих каждой найденной волне. Каждая группа включает три графика, представляющих величину $\delta_R = \omega - c_R s$, где жирным линиям соответствует $\omega = \omega_k^{num}$ при $k = 0.5, \overline{1}, \overline{3}$ (численное решение), тонким линиям — $\omega = \omega_j^{appr}$ при $j = \overline{1}, \overline{4}$ (асимптотика на бесконечности), а штрихпунктирным — $\omega = \omega_{j-0.5}^{appr}$ при $j = \overline{1}, \overline{4}$ (аппроксимация в переходной области).

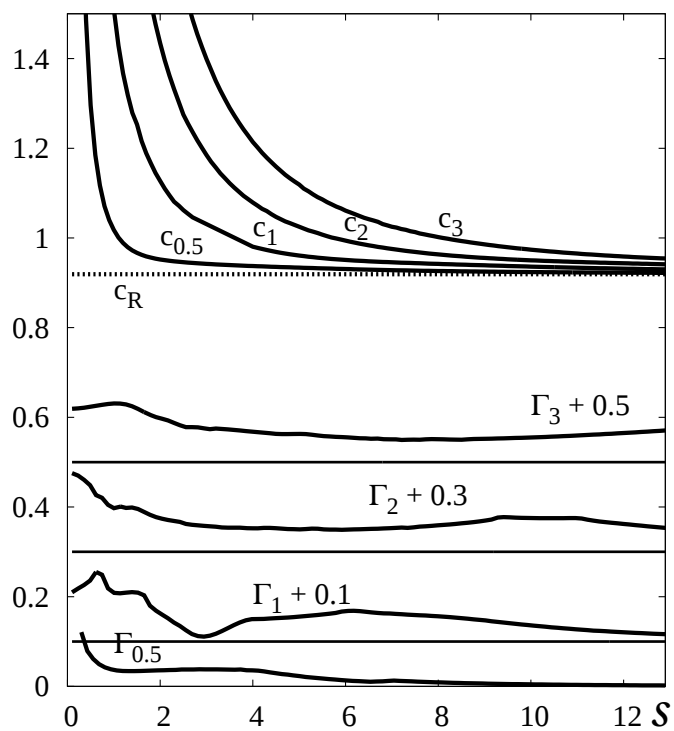


Рисунок 2.2 — Фазовые скорости и ширина резонансов антисимметричных кромочных волн высшего порядка

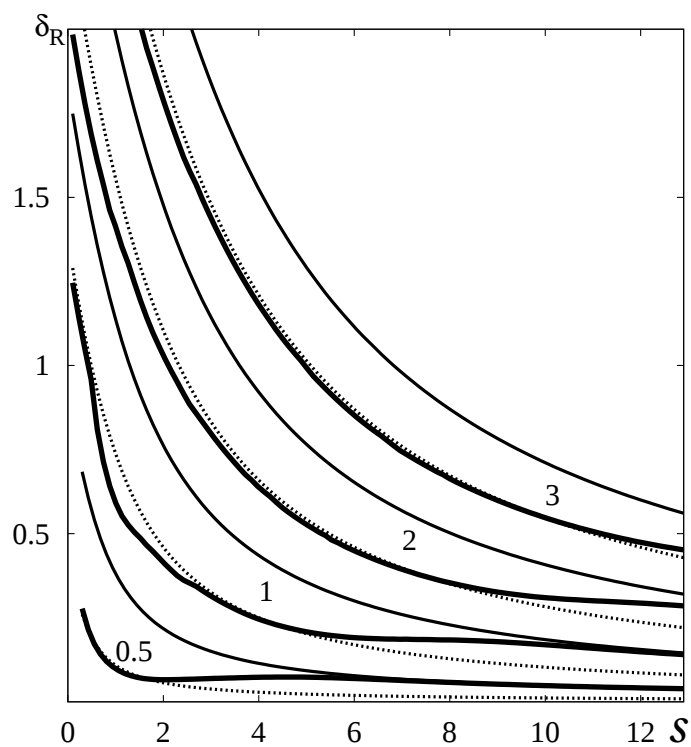


Рисунок 2.3 — Сравнение численных результатов с асимптотиками и приближенными формулами для антисимметричных кромочных волн высшего порядка

Таблица 2.1 — Результаты при условиях (2.1)

s	ω_k^{num}	ω_k^{appr}	Γ_k^{num}	s	ω_k^{num}	ω_k^{appr}	Γ_k^{num}
$k = 0.5$				$k = 1$			
0.3	0.553	0.960	0.121	0.1	1.338	1.841	0.110
0.6	0.711	1.072	0.056	0.3	1.366	1.859	0.125
1.0	1.018	1.300	0.037	0.6	1.379	1.920	0.152
1.3	1.273	1.508	0.034	0.9	1.458	2.016	0.117
2.2	2.088	2.222	0.036	1.5	1.880	2.299	0.110
5.0	4.669	4.688	0.023	5.0	4.804	4.951	0.055
6.0	5.584	5.593	0.019	6.0	5.706	5.815	0.076
10.0	9.239	9.240	$4.474 \cdot 10^{-3}$	10.0	9.361	9.376	0.036
15.0	13.822	13.822	$1.211 \cdot 10^{-3}$	15.3	14.184	14.187	$9.316 \cdot 10^{-3}$
20.0	18.411	18.411	$6.056 \cdot 10^{-4}$	20.0	18.479	18.480	$5.017 \cdot 10^{-3}$
$k = 2$				$k = 3$			
0.1	2.076	2.760	0.175	0.1	3.095	3.679	0.119
0.3	2.098	2.772	0.165	0.3	3.108	3.688	0.121
0.6	2.170	2.813	0.128	0.6	3.150	3.719	0.125
0.9	2.279	2.880	0.103	0.9	3.214	3.770	0.130
1.7	2.688	3.170	0.087	1.5	3.400	3.928	0.120
3.3	3.776	4.100	0.055	2.8	4.074	4.489	0.078
5.8	5.793	6.004	0.049	4.5	5.216	5.536	0.063
10.0	9.501	9.599	0.075	10.0	9.739	9.902	0.055
15.0	14.048	14.064	0.035	15.0	14.206	14.273	0.071
20.0	18.591	18.594	0.021	20.0	18.745	18.752	0.035

В таблице 2.1 приведены значения величин ω_k^{num} , ω_k^{appr} и Γ_k при некоторых значениях s . Величина ω_k^{appr} вычислена по формуле (2.31) при $\gamma = 1, 2, 3, 4$ для $k = 0.5, 1, 2, 3$, соответственно.

Для сравнения на рисунках 2.4, 2.5 приведены графики для симметричных волн высшего порядка, полученные в работе [27]. Сравнение рисунков 2.2, 2.3 и 2.4, 2.5 показывает, что в антисимметричном случае дополнительная волна появляется при меньших значениях волнового числа, чем в симметричном. Остальные антисимметричные волны высшего порядка выходят на асимптотику при $s \rightarrow \infty$ позже, чем симметричные волны с тем же номером.

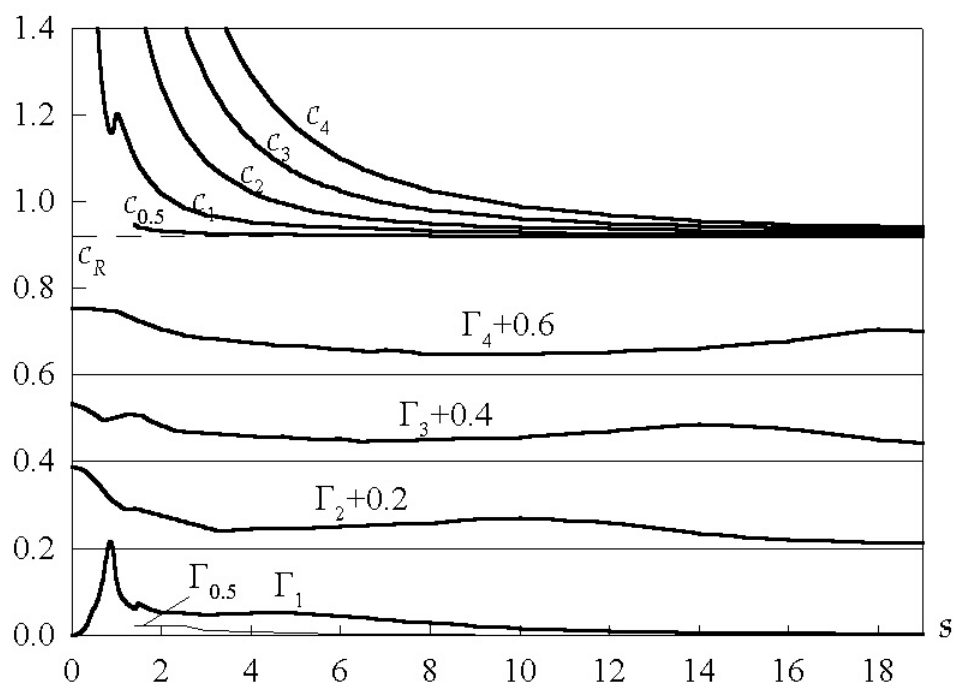


Рисунок 2.4 — Фазовые скорости и ширина резонансов симметричных кромочных волн высшего порядка (из работы [27])

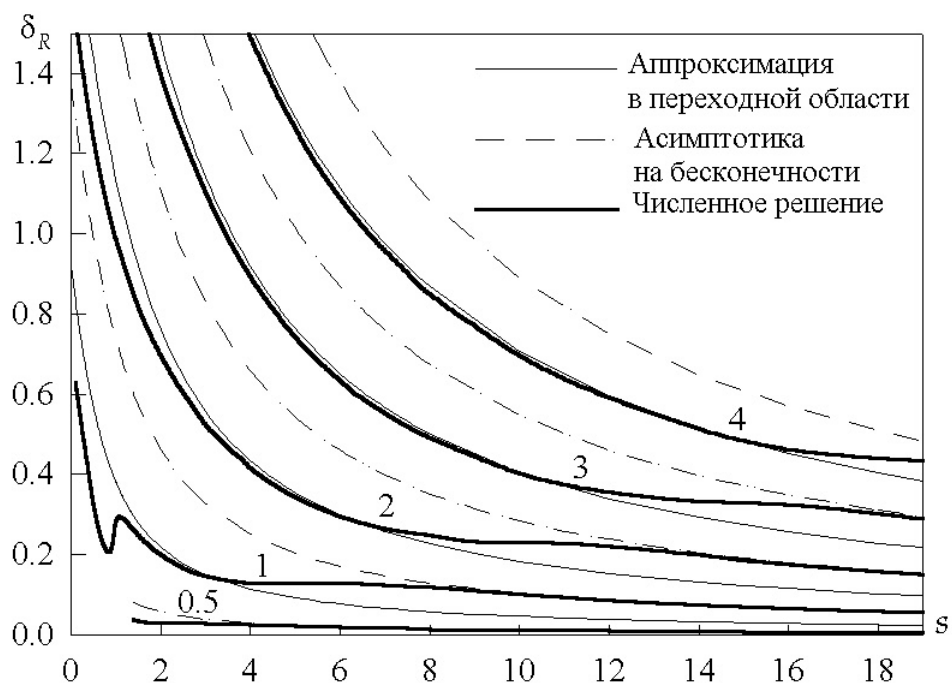


Рисунок 2.5 — Сравнение численных результатов с асимптотиками и приближенными формулами для симметричных кромочных волн высшего порядка (из работы [27])

2.2.2. Жестко заземленные лицевые поверхности

Примем теперь, что на лицевых поверхностях пластины ставятся условия жесткой заделки (2.2). Как и в случае свободных лицевых поверхностей, будем искать приближенную собственную форму в виде стоячей трехмерной поверхностной волны, имеющей антисимметричный закон изменения НДС по координате y . Асимптотические представления при $s \rightarrow \infty$ для перемещений, входящих в граничные условия (2.2), имеют вид

$$\begin{aligned} u_x^R &= \frac{Cs^2}{\gamma} [K_R \tilde{r}_1^R e^{-s\tilde{r}_1 x} - e^{-s\tilde{r}_2 x}] \left(1 + \frac{\gamma^2}{s^2}\right) \sin(\gamma y) \cos(sz), \\ u_y^R &= Cs [-K_R e^{-s\tilde{r}_1 x} + \tilde{r}_2^R e^{-s\tilde{r}_2 x}] \left(1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right)\right) \cos(\gamma y) \cos(sz), \\ u_z^R &= \frac{Cs^2}{\gamma} [K_R e^{-s\tilde{r}_1 x} - \tilde{r}_2^R e^{-s\tilde{r}_2 x}] \left(1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right)\right) \sin(\gamma y) \sin(sz), \end{aligned} \quad (2.32)$$

где приняты те же обозначения, что и в формулах (2.22). Формулы (2.32) показывают, что при $s \rightarrow \infty$ наибольшими из перемещений являются перемещения u_x^R и u_z^R . Чтобы удовлетворить всем граничным условиям однородной задачи с асимптотически малой погрешностью, достаточно положить

$$\gamma = n, \quad n = 1, 2, 3... \quad (2.33)$$

Асимптотика собственных частот при $s \rightarrow \infty$ в данном случае имеет вид

$$\omega_n^{(\infty)} = c_R \sqrt{s^2 + n^2}, \quad n = 1, 2, 3... \quad (2.34)$$

Таким образом, как и в случае свободных поверхностей, в случае жестко заземленных лицевых поверхностей существует бесконечное счетное множество антисимметричных кромочных волн высшего порядка. Аналогичный результат получен в [27] для симметричных волн в случае жестко заземленных лицевых поверхностей. Приведем для сравнения асимптотики фазовых скоростей при $s \rightarrow \infty$, полученные в [27] и при подстановке частот (2.34) в формулу

для вычисления скорости (2.6):

$$c_n^{(\infty)} = \begin{cases} c_R \sqrt{1 + \frac{(n + 0.5)^2}{s^2}} & \text{для симметричных волн,} \\ c_R \sqrt{1 + \frac{n^2}{s^2}} & \text{для антисимметричных волн.} \end{cases} \quad (2.35)$$

Наименьшей частотой запираания при $s \rightarrow \infty$ в антисимметричном случае является частота запираания низшей плоской моды, которая имеет асимптотическое представление $\Omega_1^{(\infty)} = \sqrt{s^2 + 0.25}$. Нетрудно убедиться, что при

$$s > s_{\text{cr},n}^{(\infty)} = \sqrt{\frac{4n^2 c_R^2 - 1}{4(1 - c_R^2)}}. \quad (2.36)$$

выполняется неравенство $\omega_n^{(\infty)} < \Omega_1^{(\infty)}$. Следовательно, для каждой волны с фиксированным номером $n > 0$ найдется такое значение волнового числа $s_{\text{cr},n}$, после которого частота колебаний становится ниже первой частоты запираания, что равносильно прекращению демпфирования.

Приведем результаты численного исследования, проведенного по методике, описанной в п. 2.2.1. Система для определения C_n имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n T_n \left(y_m^{(1)} \right) &= T_g \left(y_m^{(1)} \right), m = \overline{1, n_1}, \\ \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n \int_0^\pi T_n(y) (\pi - y) dy &= \int_0^\pi T_g(y) (\pi - y) dy, \\ \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n S_n \left(y_n^{(2)} \right) &= 0, m = \overline{0, n_1 - 1}, \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n \int_0^\pi S_n(y) (\pi - y) dy = 0, \\ \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n H_n \left(y_m^{(3)} \right) &= 0, m = \overline{1, n_2 - 1}, \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n \int_0^\pi H_n(y) (\pi - y) dy = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

На рисунке 2.6 представлены дисперсионные кривые кромочных волн высшего порядка в случае граничных условий (2.3) для значения коэффициента Пуассона $\nu = 0.25$. Тонкими линиями обозначены частоты запираания

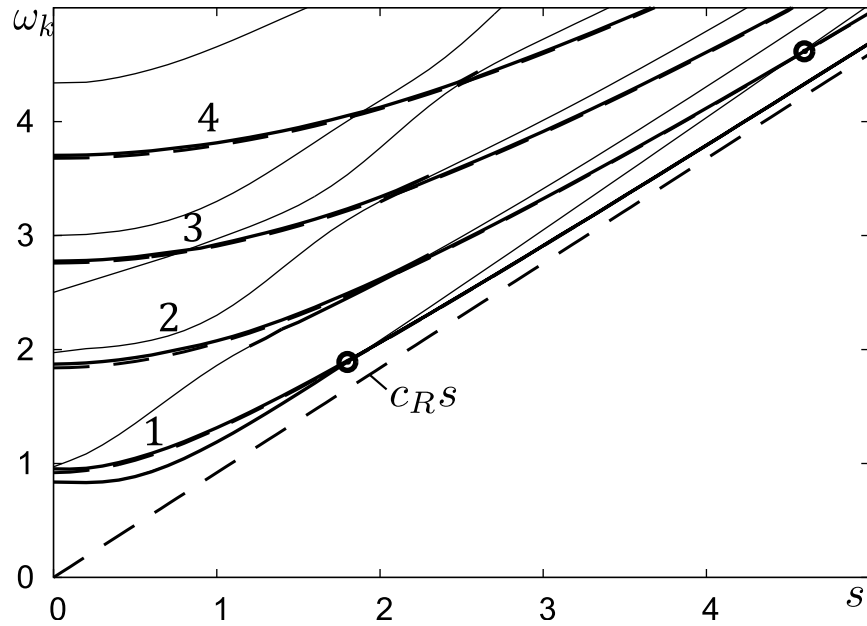


Рисунок 2.6 — Дисперсионные кривые антисимметричных краевых волн высшего порядка в случае жестко заземленных лицевых поверхностей

плоских мод, толстыми сплошными — результаты численного эксперимента, толстыми пунктирными — асимптотические кривые, соответствующие асимптотикам (2.34). Кругами отмечены значения волнового числа $s_{cr,1}^{(\infty)}$ и $s_{cr,2}^{(\infty)}$.

При поиске резонансных частот в некоторых областях изменения s было обнаружено два резонансных пика вблизи асимптотических приближений, вычисленных по формуле (2.34). Дополнительные пики также связаны с краевыми волнами высшего порядка и показаны на рисунке 2.6 сплошными линиями. Анализ рисунка 2.6 показывает, что “удвоение” волны возникает при сближении асимптотик (2.34) с частотой запирания. Такое явление было обнаружено также при исследовании симметричных волн в [27], однако в антисимметричном случае оно выражено более отчетливо. Очевидно, здесь мы имеем дело с малым возмущением толщинной формы колебаний, приводящего к появлению резонансов с формой, экспоненциально затухающей при удалении от торца. С другой стороны, близость второго пика к асимптотике (2.34) говорит о том, что появление этого резонанса также связано с существованием поверхностной волны. В таблице 2.2 приведены результаты

расчетов для некоторых значений параметра s . Здесь $\omega_n^{(\infty)}$ — приближенная частота, вычисленная по формуле (2.34), $\omega_{k,down}^{num}$ и $\omega_{k,up}^{num}$ — частоты, найденные численно в окрестности частоты ω_k^{appr} , при этом меньшая из двух частот обозначается как $\omega_{k,down}^{num}$, а большая — как $\omega_{k,up}^{num}$, $\Gamma_{k,down}^{num}$ и $\Gamma_{k,up}^{num}$ — ширина пиков с резонансными частотами $\omega_{k,down}^{num}$ и $\omega_{k,up}^{num}$, соответственно.

Таблица 2.2 — Результаты при условиях (2.2)

s	$\omega_{k,down}^{num}$	$\omega_{k,up}^{num}$	$\omega_n^{(\infty)}$	$\Gamma_{k,down}^{num}$	$\Gamma_{k,up}^{num}$	s	$\omega_{k,down}^{num}$	$\omega_{k,up}^{num}$	$\omega_n^{(\infty)}$	$\Gamma_{k,down}^{num}$	$\Gamma_{k,up}^{num}$
$k = 1$						$k = 2$					
0.3	0.838	0.978	0.96	-	0.057	0.1	-	1.876	1.841	-	0.013
0.6	0.928	1.089	1.072	-	0.016	0.6	-	1.952	1.920	-	0.018
1.3	1.436	1.519	1.508	-	$5.5 \cdot 10^{-4}$	1.1	-	2.115	2.099	-	0.012
1.7	1.798	1.823	1.813	-	$1.9 \cdot 10^{-4}$	1.2	2.02906	2.160	2.144	0.013	0.010
1.9	1.980	-	1.974	-	-	2.0	2.59601	2.620	2.600	$5.8 \cdot 10^{-5}$	0.004
3.0	2.911	-	2.907	-	-	3.0	3.32439	-	3.315	$1.1 \cdot 10^{-4}$	-
5.0	4.690	-	4.689	-	-	5.0	4.95608	-	4.951	-	-
$k = 3$						$k = 4$					
0.1	-	2.778	0.96	-	0.032	0.1	-	3.705	0.96	-	0.020
0.5	-	2.796	1.072	-	0.032	1.0	-	3.814	1.300	-	0.020
1.0	-	2.922	1.300	-	0.011	2.0	-	4.125	1.508	-	0.010
1.9	-	3.285	1.508	-	0.011	2.4	-	4.307	1.813	-	0.015
2.0	3.296	3.339	1.813	$1.4 \cdot 10^{-3}$	0.012	2.5	4.333	4.360	1.974	0.003	0.018
3.0	3.914	-	1.974	$1.2 \cdot 10^{-3}$	-	3.0	4.613	-	2.907	0.003	-
5.0	5.371	-	4.689	$2.6 \cdot 10^{-5}$	-	5.0	5.906	-	4.689	$4 \cdot 10^{-4}$	-

Сравнение данных таблицы 2.2 с данными таблицы 2.1 позволяет заключить, что демпфирование кромочных волн распространяющимися модами в случае жестко заземленных лицевых поверхностей на порядок меньше, чем в случае свободных. Ширина второго пика (нижнего), как правило, еще на порядок меньше. Можно заметить также, что при появлении второго пика ширина первого пика увеличивается. Сложный характер поведения ширины резонансов и явление удвоения резонансных пиков объясняется сложностью процесса взаимодействия поверхностной волны с лицевыми поверхностями.

2.3. Кромочные волны высшего порядка в случае смешанных граничных условий на торце

2.3.1. Свободные лицевые поверхности

Рассмотрим однородную краевую задачу (1.6), (2.1), (2.4), соответствующую случаю, когда на торце запрещено перемещение в направлении, перпендикулярном лицевым поверхностям (см. рисунок 2.7). Для построения приближенной собственной формы следует воспользоваться решением для трехмерной поверхностной волны в случае смешанных граничных условий на поверхности, полученном в п. 1.3. Запишем асимптотики для напряжений, входящих в граничные условия (2.1), при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном γ в антисимметричном случае:

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^R &= C \left\{ \left[2s^2 \left(1 - \frac{\vartheta_1^2}{\vartheta^2} \left(1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right) \right) \right) - \omega^2 \right] e^{-s\tilde{r}_1 x} + 2\gamma^2 e^{-s\tilde{r}_2 x} \right\} \cdot \sin(\gamma y) \cos(sz), \\
 \sigma_{xy}^R &= C \frac{\gamma s}{2} \left\{ -4 \frac{\vartheta_1}{\vartheta} e^{-s\tilde{r}_1 x} + \left[3 \frac{\vartheta_2}{\vartheta} + \frac{\vartheta}{\vartheta_2} \left(1 + \frac{\gamma^2}{s^2} \right) e^{-s\tilde{r}_2 x} \right] \right\} \cdot \left(1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right) \right) \cos(\gamma y) \cos(sz), \\
 \sigma_{yz}^R &= C \frac{\gamma s}{2} \left\{ -4 e^{-s\tilde{r}_1 x} + \left[3 - \frac{\gamma^2}{s^2} + \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta^2} \left(1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right) \right) \right] e^{-s\tilde{r}_2 x} \right\} \cdot \cos(\gamma y) \sin(sz),
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

где $\tilde{r}_1 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{s^2}}$, $\tilde{r}_2 = \frac{\vartheta_2}{\vartheta} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{s^2}}$, $\vartheta_1 = \sqrt{\vartheta^2 - \kappa^2}$, $\vartheta_2 = \sqrt{\vartheta^2 - 1}$ при

$$\vartheta = \vartheta(s) = \frac{1}{\sqrt{\theta(s)}}. \tag{2.39}$$

В (2.39) $\theta(s)$ – корень уравнения (1.37), в котором следует положить $\alpha = \operatorname{arctg}(s/\gamma)$. В симметричном случае в формулах (2.38) следует выполнить замену $\sin \rightarrow \cos$, $\cos \rightarrow \sin$, $\gamma \rightarrow -\gamma$. Рассуждая аналогично случаю

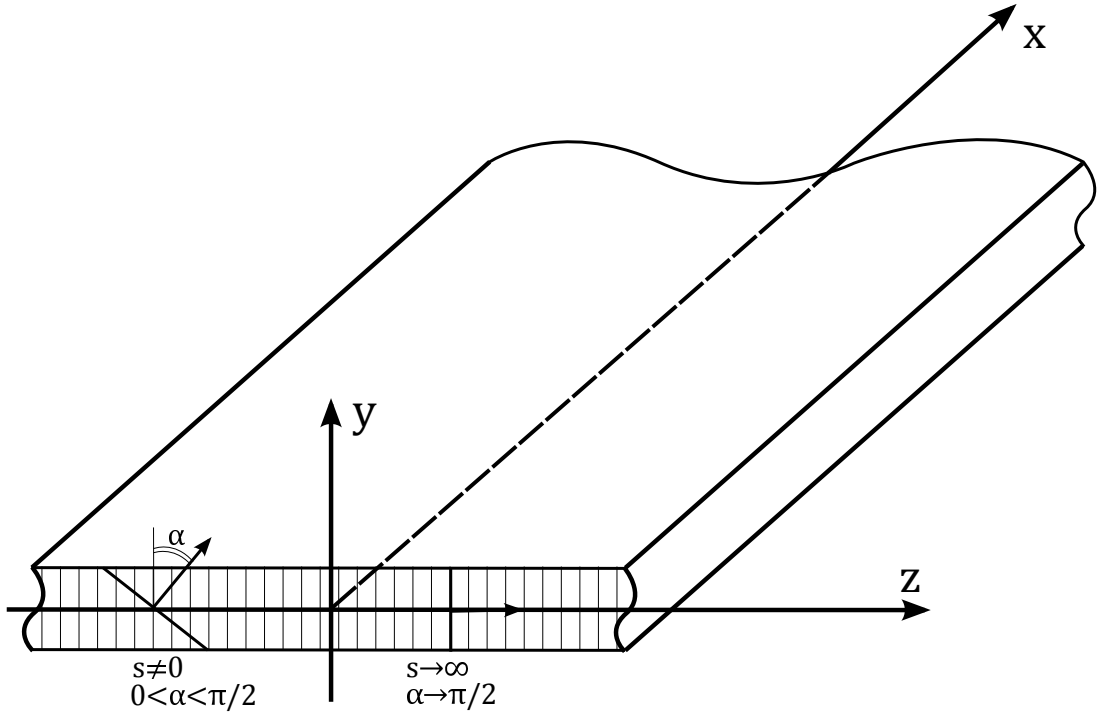


Рисунок 2.7 — Пластина со смешанными граничными условиями на торце вида (2.4)

свободного торца, получим асимптотику собственных частот при $s \rightarrow \infty$:

$$\omega_n^{(\infty)} = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + n^2} & \text{в антисимметричном случае,} \\ \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + (n + 0.5)^2} & \text{в симметричном случае.} \end{cases} \quad (2.40)$$

Из формул (2.40) видно, что в пластине со смешанными граничными условиями на торце также существует бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка. Асимптотики фазовых скоростей этих волн при $s \rightarrow \infty$ имеют вид

$$c_n^{(\infty)} = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta} \sqrt{1 + \frac{n^2}{s^2}} & \text{в антисимметричном случае,} \\ \frac{1}{\vartheta} \sqrt{1 + \frac{(n + 0.5)^2}{s^2}} & \text{в симметричном случае.} \end{cases} \quad (2.41)$$

Из (1.37) следует, что если $s \rightarrow \infty$, то $\vartheta \rightarrow \frac{1}{c_R}$, следовательно, фазовые скорости кромочных волн высшего порядка в случае граничных условий (2.4) стремятся к скорости волны Рэлея.

Рассмотрим теперь однородную краевую задачу (1.6), (2.1), (2.5), соответствующую случаю, когда на торце запрещено перемещение в направлении, параллельном лицевым поверхностям (см. рисунок 2.8). Асимптотики собственных частот и фазовых скоростей краевых волн при $s \rightarrow \infty$ строятся по аналогии со случаем граничных условий (2.4) и имеют вид (2.40), (2.41) с точностью до замены антисимметричного случая на симметричный и наоборот. В формулах (2.40), (2.41) теперь следует считать, что величина $\vartheta = \vartheta(s)$ связана соотношением (2.39) с величиной $\theta(s)$, определенной уравнением (1.44) при $\alpha = \arctg(s/\gamma)$.

Из дисперсионного уравнения (1.44) при данных граничных условиях следует, что $\vartheta \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$, следовательно, фазовые скорости краевых волн высшего порядка в случае граничных условий (2.5) на торце стремятся к скорости волны сдвига.

Для численного решения задач со смешанными граничными условиями на торце также можно использовать метод разложения по модам, описанный в п. 2.1. Разрешающая система уравнений в случае антисимметричных колебаний и граничных условий (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n T_n \left(y_m^{(1)} \right) &= T_g \left(y_m^{(1)} \right), m = \overline{1, n_1}, \quad \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n \int_0^\pi T_n(y) dy = \int_0^\pi T_g(y) dy, \\ \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n v_n \left(y_n^{(2)} \right) &= 0, m = \overline{0, n_1}, \\ \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n H_n \left(y_m^{(3)} \right) &= 0, m = \overline{1, n_2 - 1}, \quad \sum_{n=0}^{n_0+n_2} C_n \int_0^\pi H_n(y) dy = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Результаты численных расчетов подтверждают проведенный выше асимптотический анализ. При граничных условиях (2.4) в антисимметричном случае обнаружена дополнительная волна высшего порядка (присвоим ей номер 0.5), значение фазовой скорости которой в коротковолновом пределе совпадает с

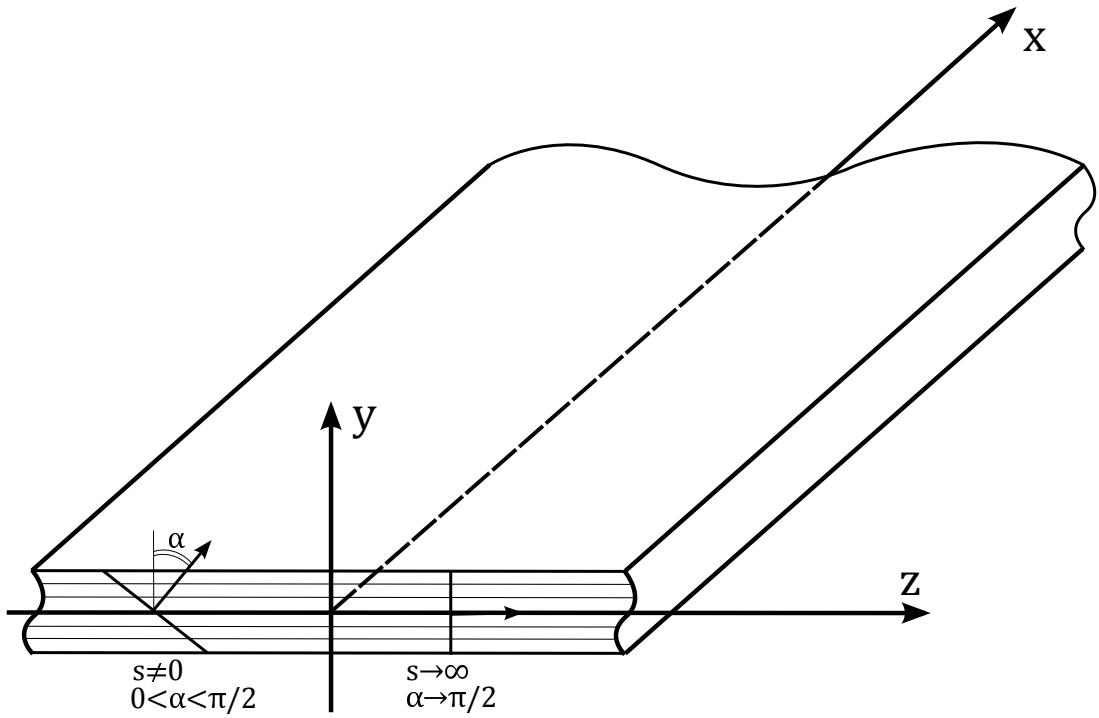


Рисунок 2.8 — Пластина со смешанными граничными условиями на торце вида (2.5)

соответствующим значением для симметричной фундаментальной волны, которая будет рассмотрена далее.

На рисунках 2.9, 2.10 приведены графики для $\nu = 0.45$ в случае граничных условий (2.4), на рисунках 2.11, 2.12 для $\nu = 0.25$ в случае граничных условий (2.5). На них представлены группы графиков, соответствующих каждой найденной волне за исключением половинной. Каждая группа включает три графика, представляющих величину $\delta_R = \omega - \sqrt{\theta}s$, где жирным линиям соответствует $\omega = \omega_k^{num}$ (численное решение), штрихпунктирным линиям — $\omega = \omega_j^{appr}$ при $j = \overline{1,3}$ для рисунков 2.9, 2.10 и $j = \overline{1,4}$ для рисунков 2.11, 2.12, а тонким — $\omega = \omega_{j-\frac{1}{2}}^{appr}$ при $j = \overline{2,4}$ для рисунка 2.9, $j = \overline{1,3}$ для рисунка 2.10 и $j = \overline{1,4}$ для рисунков 2.11, 2.12. Величина ω_j^{appr} определена формулой

$$\omega_j^{appr} = \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + j^2}. \quad (2.43)$$

В случае граничных условий (2.5) для первой волны в симметричном случае и второй волны в антисимметричном случае существуют области зна-

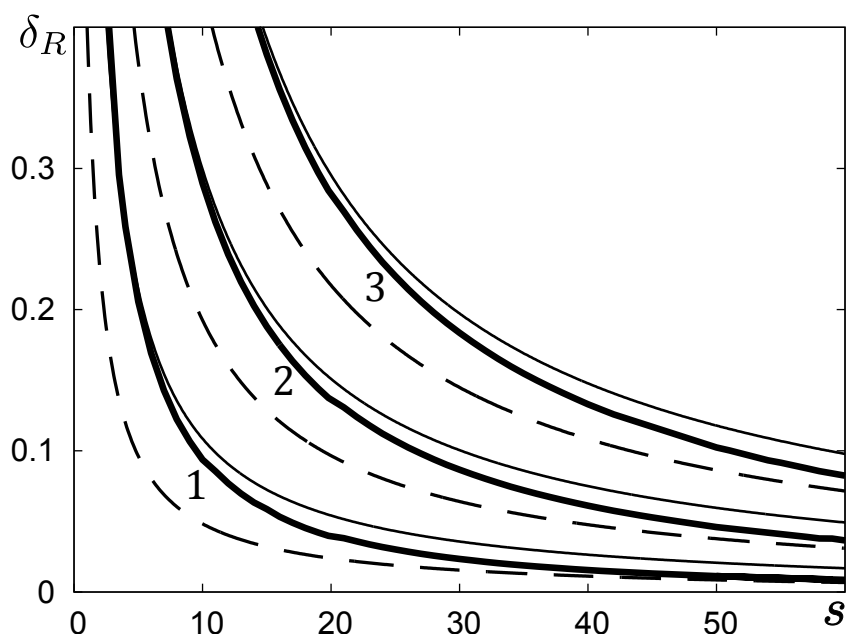


Рисунок 2.9 — Результаты для антисимметричных краевых волн в случае свободных лицевых поверхностей и смешанных граничных условий (2.4) на торце

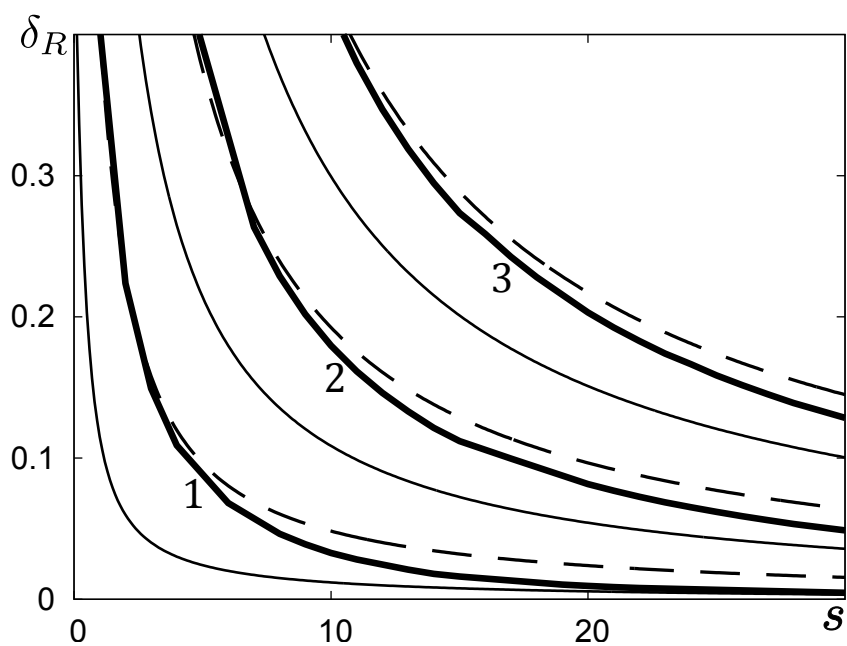


Рисунок 2.10 — Результаты для симметричных краевых волн в случае свободных лицевых поверхностей и смешанных граничных условий (2.4) на торце

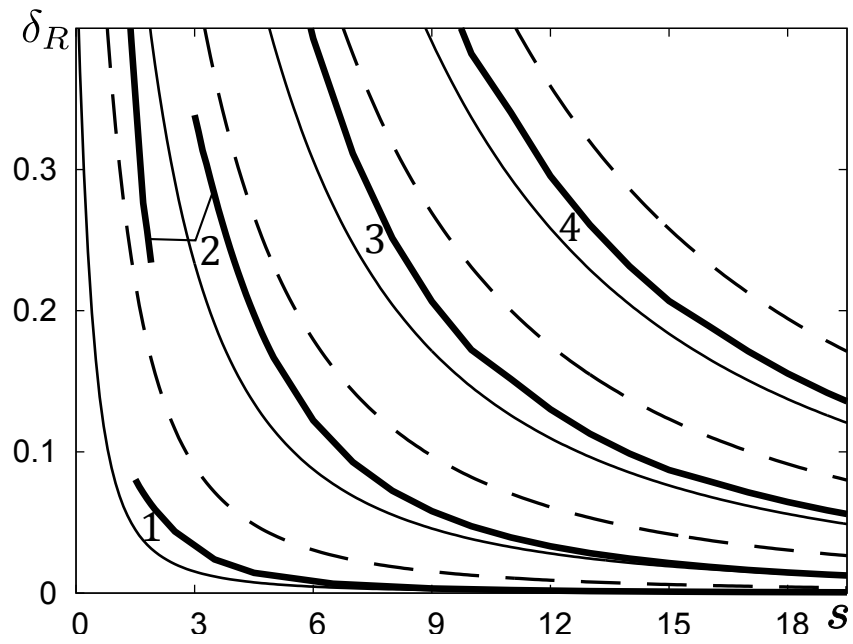


Рисунок 2.11 — Результаты для антисимметричных краевых волн в случае свободных лицевых поверхностей и смешанных граничных условий (2.5) на торце

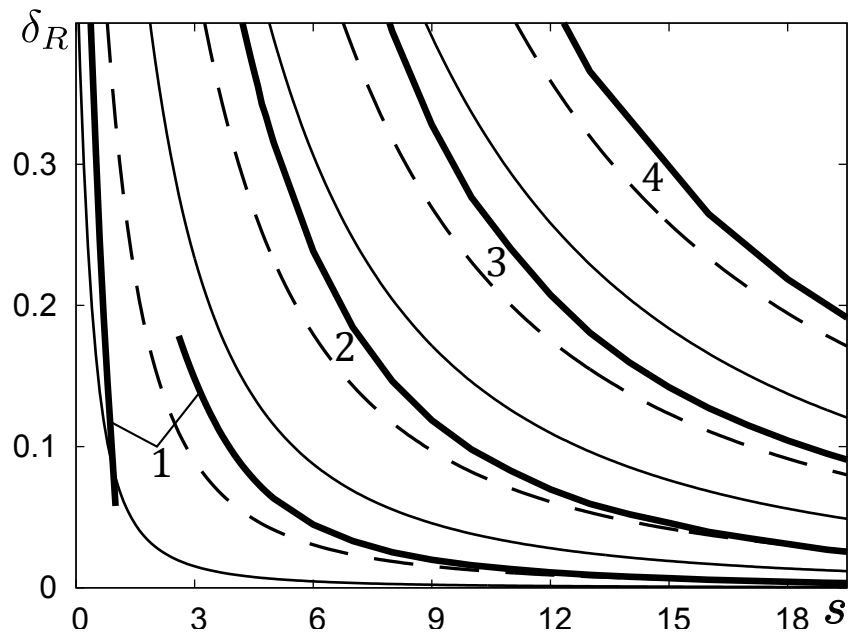


Рисунок 2.12 — Результаты для симметричных краевых волн в случае свободных лицевых поверхностей и смешанных граничных условий (2.5) на торце

чений параметра s , в которых резонансы соответствующих волн не обнаруживаются. По-видимому, это связано с тем, что из-за влияния лицевых поверхностей и слишком сильного демпфирования распространяющимися модами волновой процесс теряет краевой характер, а резонансы волн, не локализованных у края, в полубесконечной пластине возбуждаться не могут. Мы определяем резонансы до и после области исчезновения как резонансы одной и той же кромочной волны, дисперсионная кривая которой имеет разрыв. Детальное исследование этого явления требует рассмотрения задачи об отражении трехмерной поверхностной волны от лицевых поверхностей, что выходит за рамки данной работы.

2.3.2. Жестко заземленные лицевые поверхности

Теоретический анализ кромочных волн высшего порядка в случае жестко заземленных лицевых поверхностей аналогичен случаю свободных лицевых поверхностей. Рассмотрим сначала пластину с граничными условиями на торце вида (2.5). Асимптотики собственных частот при $s \rightarrow \infty$ имеют вид

$$\omega_n^{(\infty)} = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + n^2} & \text{в симметричном случае,} \\ \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + (n + 0.5)^2} & \text{в антисимметричном случае,} \end{cases} \quad (2.44)$$

фазовых скоростей – вид

$$c_n^{(\infty)} = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta} \sqrt{1 + \frac{n^2}{s^2}} & \text{в симметричном случае,} \\ \frac{1}{\vartheta} \sqrt{1 + \frac{(n + 0.5)^2}{s^2}} & \text{в антисимметричном случае.} \end{cases} \quad (2.45)$$

где величина ϑ определена формулой (2.39), θ – корень уравнения (1.44). Из (1.44) следует, что если $s \rightarrow \infty$, то $\vartheta \rightarrow 1$, следовательно, фазовые скорости кромочных волн высшего порядка в случае граничных условий (2.5) стремятся к скорости волны сдвига. Наименьшей частотой запираения при $s \rightarrow \infty$ в

антисимметричном случае является частота запираания низшей плоской моды, которая имеет асимптотическое представление $\Omega_1^{(\infty)} = \sqrt{s^2 + 0.25}$. Низшей частотой запираания в симметричном случае является частота запираания нулевой антиплоской моды $\Omega_0^{sh} = \sqrt{s^2 + 0.25}$. Используя приведенные выражения, получаем, что $\omega_n^{(\infty)} < \Omega_1^{(\infty)}$ и $\omega_n^{(\infty)} < \Omega_0^{sh}$ при $s > s_{cr,n}^{(\infty)}$, где $s_{cr,n}^{(\infty)}$ — корень уравнения

$$n = \begin{cases} \sqrt{\vartheta^2(s^2 + 0.25) - s^2} & \text{в симметричном случае,} \\ \sqrt{\vartheta^2(s^2 + 0.25) - s^2} - 0.5 & \text{в антисимметричном случае.} \end{cases} \quad (2.46)$$

Здесь n — номер волны.

Рассмотрим теперь пластину с жестко заземленными лицевыми поверхностями и смешанными граничными условиями на торце вида (2.4). Аналогично предыдущему, получим асимптотики собственных частот и фазовых скоростей в виде

$$\omega_n^{(\infty)} = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + (n + 0.5)^2} & \text{в симметричном случае,} \\ \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + n^2} & \text{в антисимметричном случае} \end{cases} \quad (2.47)$$

и

$$c_n^{(\infty)} = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta} \sqrt{1 + \frac{(n + 0.5)^2}{s^2}} & \text{в симметричном случае,} \\ \frac{1}{\vartheta} \sqrt{1 + \frac{n^2}{s^2}} & \text{в антисимметричном случае,} \end{cases} \quad (2.48)$$

соответственно. Здесь $\vartheta = \vartheta(s)$ связана с корнем уравнения (1.37). Поскольку из уравнения (1.37) следует $\vartheta \rightarrow \frac{1}{c_R}$ при $s \rightarrow \infty$, фазовые скорости краевых волн высшего порядка в случае граничных условий (2.4) стремятся к скорости волны Рэлея. В случае граничных условий (2.4) справедливы выражения (2.46) для нахождения $s_{cr,n}^{(\infty)}$, но величина ϑ в данном случае определяется корнем уравнения (1.37).

Результаты численного исследования приведены на рисунках 2.13–2.16. Во всех случаях было принято значение коэффициента Пуассона $\nu = 0.25$. Рисунки 2.13, 2.14 иллюстрируют связь результатов численных экспериментов с результатами асимптотического анализа, полученными выше для граничных условий (2.5). На них представлены четыре группы графиков, соответствующих каждой найденной волне. Каждая группа включает три графика, представляющих величину $\delta_R = \omega - s$, где жирным линиям соответствует $\omega = \omega_k^{num}$ при $k = \overline{1, 4}$ (численное решение), тонким линиям — $\omega = \omega_j^{appr}$ при $j = \overline{1, 4}$, а толстым пунктирным — $\omega = \omega_{j-\frac{1}{2}}^{appr}$ при $j = \overline{1, 4}$. Рисункам 2.13, 2.14 соответствуют асимптотики (2.46).

В случае граничных условий (2.4), как и в случае свободного торца, обнаружены области удвоения резонансных пиков, расположенные вблизи частот запираания плоских мод. На рисунках 2.15, 2.16 представлены дисперсионные кривые кромочных волн высшего порядка в случае граничных условий (2.4). Тонкими линиями обозначены частоты запираания плоских мод, тонкой пунктирной — частоты запираания нулевой антиплоской моды, толстыми сплошными — результаты численного эксперимента, толстыми пунктирными — асимптотические кривые, построенные по формулам (2.47). Кружками на рисунках 2.15, 2.16 отмечены значения $s_{cr,n}^{(\infty)}$ волнового числа, выше которых отсутствует демпфирование кромочной волны высшего порядка распространяющимися модами.

Отметим, что при граничных условиях (2.4) кромочные волны не существуют при $s = 0$ и малых значениях s как в случае жестко заземленных, так и в случае свободных лицевых поверхностей. Они появляются при $s \sim 0.1$ на частотах, близких к частотам запираания плоских мод. Это свойство соответствует поведению трехмерной поверхностной волны в случае смешанных условий на поверхности (см. п. 1.3), скорость которой при стремлении угла распространения к нулю стремится к скорости волны сдвига.

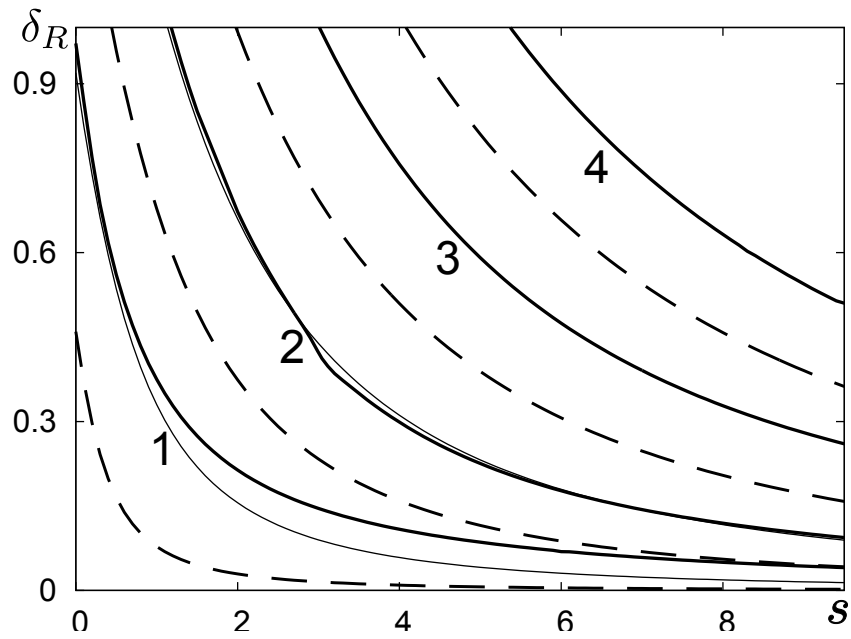


Рисунок 2.13 — Результаты для антисимметричных краевых волн в случае жестко заземленных лицевых поверхностей и смешанных граничных условий (2.5) на торце

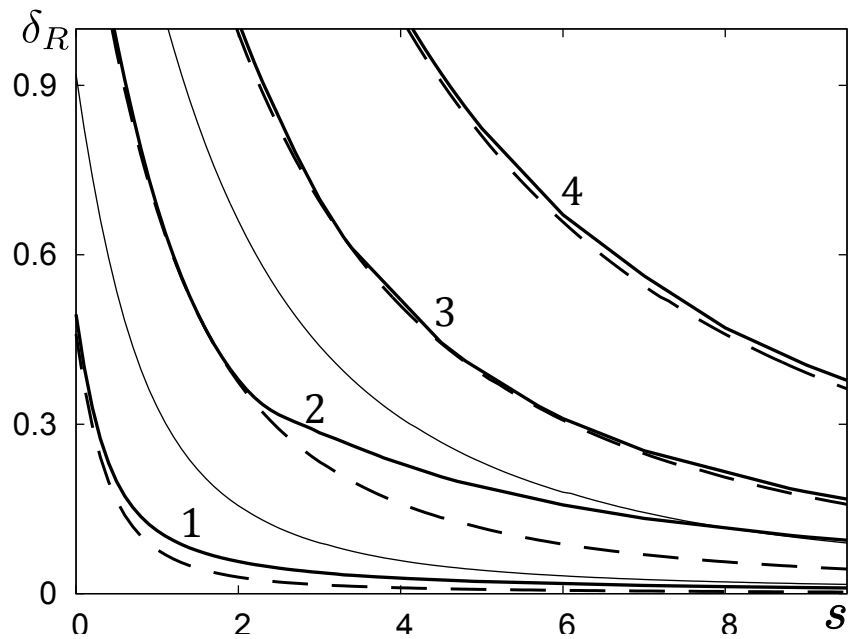


Рисунок 2.14 — Результаты для симметричных краевых волн в случае жестко заземленных лицевых поверхностей и смешанных граничных условий (2.5) на торце

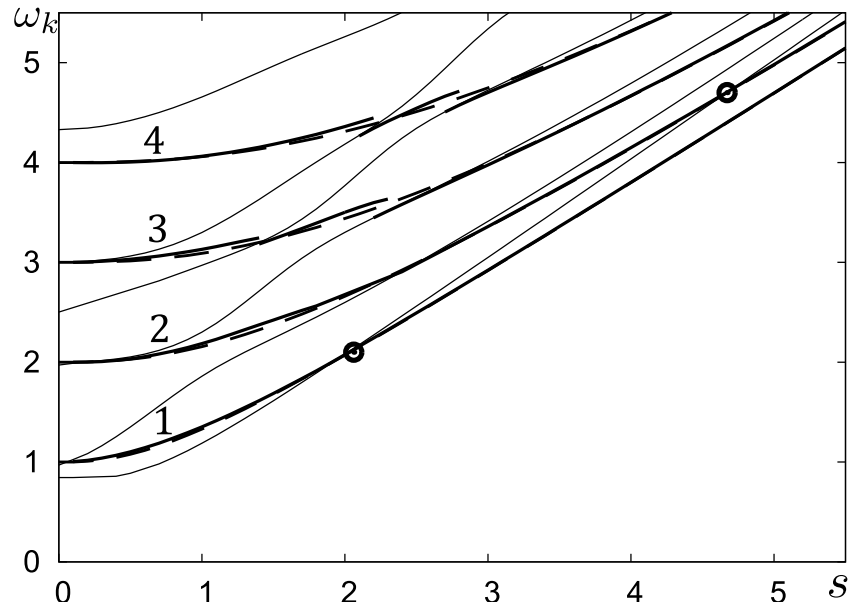


Рисунок 2.15 — Результаты для антисимметричных краевых волн в случае жестко заземленных лицевых поверхностей и смешанных граничных условий (2.4) на торце

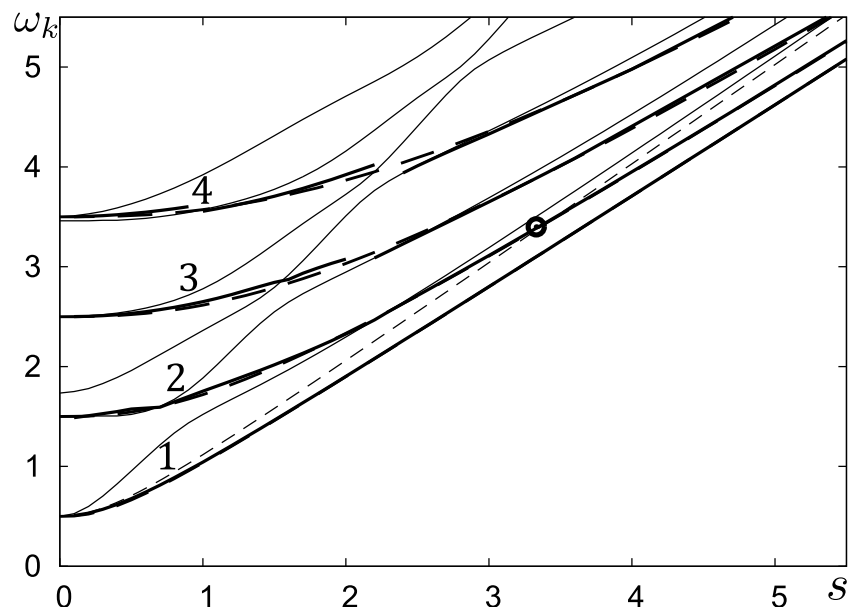


Рисунок 2.16 — Результаты для симметричных краевых волн в случае жестко заземленных лицевых поверхностей и смешанных граничных условий (2.4) на торце

2.4. Фундаментальная кромочная волна в случае смешанных граничных условий на торце

В пластинах со смешанными граничными условиями на торце фундаментальная волна найдена только в одном из рассмотренных случаев: симметричные колебания, лицевые поверхности свободны, на торце ставятся смешанные граничные условия вида (2.4).

Разрешающая система для определения констант C_n в симметричном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n_0+n_2+1} C_n T_n \left(y_m^{(1)} \right) &= T_g \left(y_m^{(1)} \right), m = \overline{0, n_1 - 1}, \quad \sum_{n=0}^{n_0+n_2+1} C_n \int_0^{\pi} T_n dy = \int_0^{\pi} T_g dy, \\ \sum_{n=0}^{n_0+n_2+1} C_n v_n \left(y_n^{(2)} \right) &= 0, m = \overline{1, n_1}, \\ \sum_{n=0}^{n_0+n_2+1} C_n H_n \left(y_m^{(3)} \right) &= 0, m = \overline{0, n_2 - 1}, \quad \sum_{n=0}^{n_0+n_2+1} C_n \int_0^{\pi} H_n(y) dy = 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где $n_1 = n_0/2$, $y_m^{(1)} = \pi m / (n_1 + 1)$, $y_m^{(2)} = \pi m / (n_1 + 1)$, $y_m^{(3)} = \pi m / (n_2 + 1)$, $n_0 + 1$ - число плоских мод, $n_2 + 1$ - число антиплоских мод.

Для поиска резонансной частоты, соответствующей фундаментальной кромочной волне, приложим нагрузку

$$T_g = 1 \quad (2.50)$$

и будем искать резонансную частоту методом подбора. После определения резонансной частоты ω_0 вычислим фазовую скорость кромочной волны по формуле (2.6). Поведение дисперсионной кривой найденной волны при фиксированном значении коэффициента Пуассона качественно отличается от поведения аналогичной кривой в случае граничных условий свободного края на торце (см. [27]). С ростом волнового числа скорость этой волны стремится не

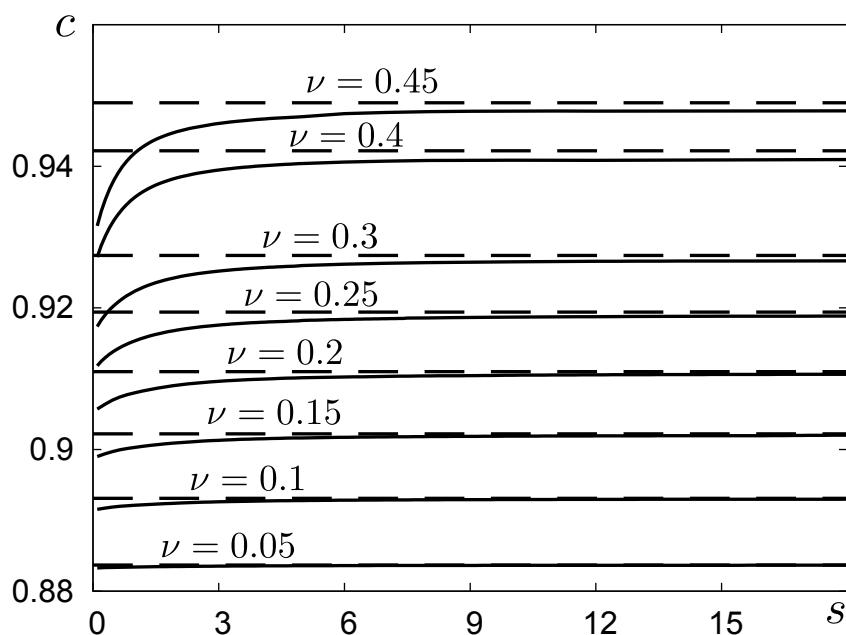


Рисунок 2.17 — Фазовая скорость фундаментальной кромочной волны

к скорости угловой волны в четверть пространстве [30], а к некоторой другой величине, не совпадающей также со скоростью волны Рэлея. На рисунке 2.17 представлены дисперсионные кривые фазовых скоростей найденной волны при различных значениях коэффициента Пуассона. На нем сплошными линиями обозначены дисперсионные кривые фазовых скоростей, найденные численно, штриховыми — значения фазовых скоростей волны Рэлея. На рисунке 2.18 представлена разность между фазовой скоростью найденной волны и скоростью волны Рэлея в зависимости от коэффициента Пуассона.

В антисимметричном случае фундаментальная волна не была обнаружена, однако численные расчеты показали, что фазовая скорость дополнительной волны, которой был присвоен номер 0.5, стремятся при $s \rightarrow \infty$ к скорости симметричной фундаментальной волны. На рисунке 2.19 фазовые скорости дополнительной кромочной волны высшего порядка в антисимметричном случае (толстые сплошные линии) представлены в сравнении с фазовой скоростью симметричной фундаментальной волны (тонкие сплошные линии).

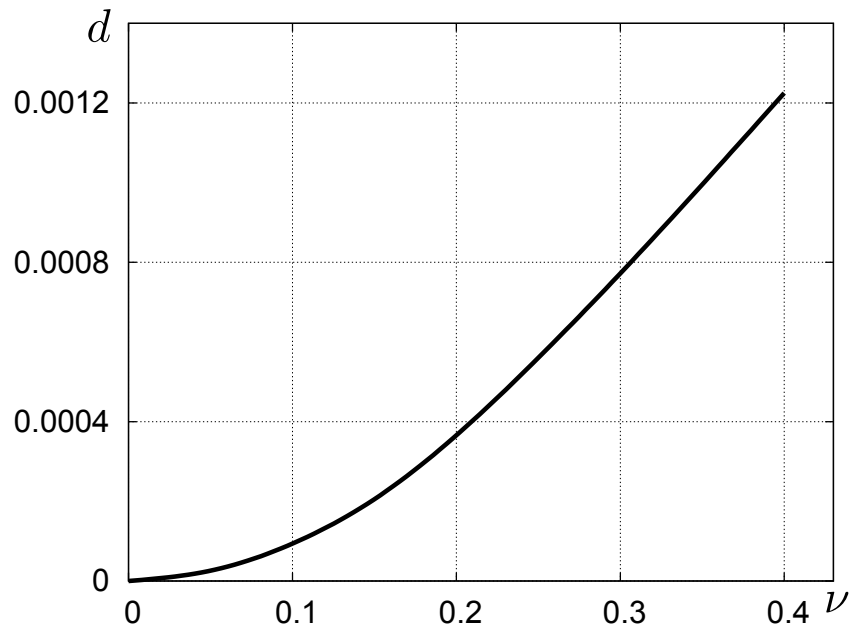


Рисунок 2.18 — Разность между фазовой скоростью симметричной фундаментальной волны и скоростью волны Рэлея

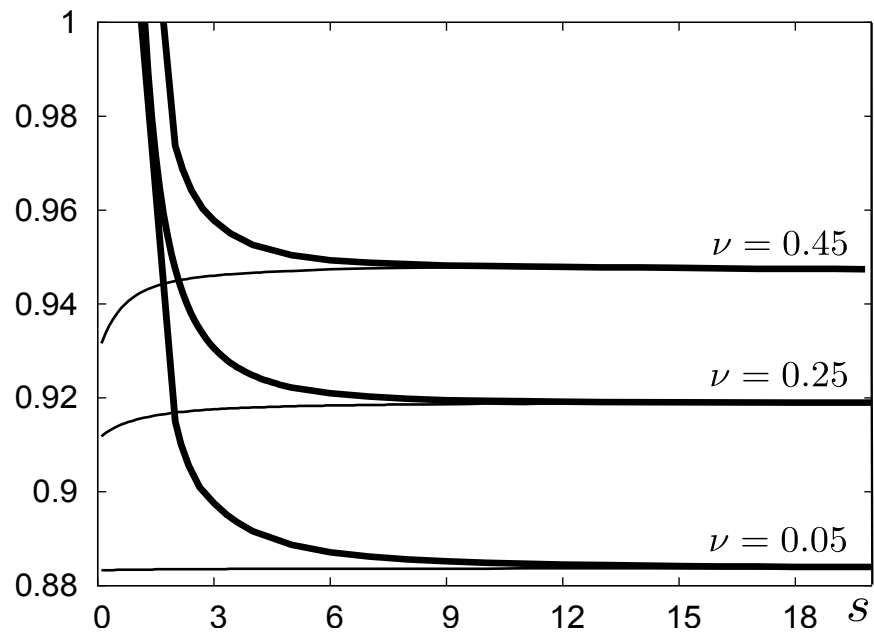


Рисунок 2.19 — Фазовые скорости половинной кромочной волны в антисимметричном случае и симметричной фундаментальной волны

2.5. Результаты и выводы

Обобщая результаты, полученные в данной главе, можно сделать следующие выводы:

- Показано, что в пластине, на торце которой ставятся условия свободного края, существует бесконечное счетное множество антисимметричных кромочных волн высшего порядка. С уменьшением длины волны фазовые скорости найденных волн стремятся к скорости волны Рэлея. Этот результат установлен как для случая свободных, так и для случая жестко заземленных лицевых поверхностей. Он дополняет результаты исследования фундаментальных трехмерных кромочных волн и симметричных кромочных волн высшего порядка, полученные ранее другими авторами, и позволяет представить общую картину трехмерных кромочных волн в пластинах с условиями свободного края на торце.
- В случае симметричных колебаний пластины со свободными лицевыми поверхностями, на торце которой запрещено перемещение в направлении, перпендикулярном лицевым поверхностям, обнаружена фундаментальная волна, дисперсионная кривая которой существенно отличается от соответствующей кривой для пластины со свободным торцом. Предельная скорость данной волны при стремлении длины волны к нулю зависит от коэффициента Пуассона и не совпадает ни со скоростью угловой волны в четвертьпространстве, ни со скоростью волны Рэлея.
- В пластине, на торце которой запрещено перемещение в одном из тангенциальных направлений, также существует бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка. Множество всех волн распадается на два бесконечных счетных подмножества: симметричные и антисимметричные кромочные волны. Если на торце запрещено перемещение в направлении, перпендикулярном лицевым поверхностям, то

скорости кромочных волн высшего порядка стремятся с уменьшением длины волны к скорости волны Рэлея. Если на торце пластины ставятся условия, запрещающие перемещение в тангенциальном направлении, параллельном лицевым поверхностям, то скорости кромочных волн высшего порядка стремятся к скорости волны сдвига. Указанные свойства имеют место как в случае свободных, так и в случае жестко заземленных лицевых поверхностей пластины. Исключение составляет низшая волна в случае антисимметричных колебаний пластины со свободными лицевыми поверхностями, скорость которой стремится к скорости симметричной фундаментальной волны.

- Во всех рассмотренных случаях обнаружено явление демпфирования кромочных волн высшего порядка распространяющимися модами. В случае жесткого заземления лицевых поверхностей для каждой кромочной волны высшего порядка существует критическое значение волнового числа (для первой волны оно в некоторых случаях равно нулю), начиная с которого демпфирование данной волны отсутствует.
- Для всех найденных кромочных волн высшего порядка получены асимптотические приближения для частот и форм колебаний. Показано, что эти формы приближенно совпадают с формами колебаний стоячих трехмерных поверхностных волн, удовлетворяющих тем же граничным условиям на поверхности, что и условия на торце пластины. Указанное соответствие позволяет предположить, что причиной возникновения кромочных волн является накопление энергии при многократном отражении трехмерных поверхностных волн от лицевых поверхностей.

Трехмерные кромочные волны в тонкой оболочке

В данной главе методика, примененная в предыдущей главе для исследования трехмерных кромочных волн в пластинах, обобщается на случай полубесконечного кругового полого цилиндра. Исследование ограничивается случаем тонкостенного цилиндра, который с геометрической точки зрения представляет собой тонкую оболочку. В асимптотическом анализе кромочных волн высшего порядка используется цилиндрическая поверхностная волна. Для численного исследования применяется метод разложения по модам бесконечного полого цилиндра, для построения которых предложена специальная фундаментальная система решений уравнения Бесселя.

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим неосесимметричные гармонические колебания полубесконечного полого упругого цилиндра (цилиндрической оболочки). Для описания колебаний цилиндра будем использовать трехмерные уравнения теории упругости в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , в которой область, занятая цилиндром (см. рисунок 3.1), определяется неравенствами $b \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z < \infty$. Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} r &= R\tilde{r}, z = R\tilde{z}, \{u_r, u_\theta, u_z\} = R\{\tilde{u}_r, \tilde{u}_\theta, \tilde{u}_z\}, \tilde{\omega} = R\omega c_2^{-1}, \\ \{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}\} &= E[2(1+\nu)]^{-1}\{\tilde{\sigma}_r, \tilde{\sigma}_\theta, \tilde{\sigma}_z, \tilde{\sigma}_{r\theta}, \tilde{\sigma}_{rz}, \tilde{\sigma}_{\theta z}\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $R = (a + b)/2$ — радиус срединной поверхности, $u = \{u_r, u_\theta, u_z\}$ — вектор перемещений, $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}$ — компоненты тензора напряжений,

E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, c_2 — скорость поперечных волн, ρ — плотность, ω — круговая частота. Численные результаты, приведенные в параграфах 3.3–3.5, получены при $\nu = 0.25$, в параграфе 3.6 — при $\nu = 0.3$. Временной множитель $e^{i\omega t}$ и знак “ \sim ”, обозначающий безразмерные переменные, далее опущены.

Введем параметр тонкостенности

$$\eta = \frac{h}{R}, \quad (3.2)$$

где $h = (a - b)/2$ — полутолщина оболочки. Оболочку принято считать тонкой, если $\eta \ll 1$.

Так же, как в случае пластины, перемещения и напряжения удобно представить через упругие потенциалы Ламе φ и ψ . Имеем соотношения:

$$u = \text{grad}\varphi + \text{rot}\psi, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\omega^2\varphi + 2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi_z}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r\partial z} \right), \\ \sigma_\theta &= -(1 - 2\kappa^2)\omega^2\varphi + \\ &+ 2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi_z}{\partial\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_\theta}{\partial z} \right), \\ \sigma_z &= -(1 - 2\kappa^2)\omega^2\varphi + 2 \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_\theta}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta\partial z} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{2}{r} \frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \\ &+ \frac{\partial^2\psi_r}{\partial r\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_r}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi_z}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_z}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta\partial z}, \\ \sigma_{rz} &= 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_r}{\partial r\partial\theta} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_z}{\partial\theta\partial z}, \\ \sigma_{\theta z} &= \frac{2}{r} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

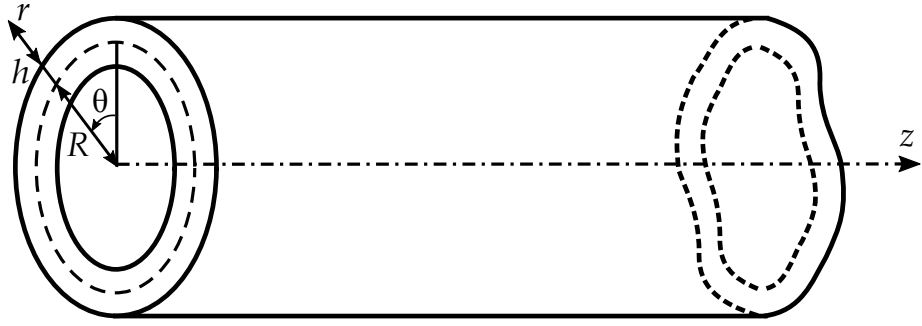


Рисунок 3.1 — Полубесконечная цилиндрическая оболочка, отнесенная к цилиндрической системе координат

К записанным соотношениям следует добавить условие

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0, \quad (3.5)$$

которое является достаточным для получения однозначного представления компонентов вектора перемещения в упругом теле в виде (3.3). Уравнения для потенциалов φ , $\boldsymbol{\psi}$ имеют вид

$$\Delta \varphi + \kappa^2 \omega^2 \varphi = 0, \quad \Delta \boldsymbol{\psi} + \omega^2 \boldsymbol{\psi} = 0, \quad (3.6)$$

где $\kappa = \sqrt{(1 - 2\nu)(2(1 - \nu))^{-1}}$,

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \\ \Delta \boldsymbol{\psi} &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{\psi}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Лицевые поверхности оболочки $r = 1 \pm \eta$ будем считать свободными от напряжений. Тогда при $r = 1 \pm \eta$ следует удовлетворить условиям

$$\sigma_r = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0. \quad (3.8)$$

Условиям свободного края на торце оболочки $z = 0$

$$\sigma_z = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0 \quad (3.9)$$

соответствуют неоднородные граничные условия при $z = 0$:

$$\sigma_z = T_g(r) \cos p\theta, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0, \quad (3.10)$$

где $T_g(r)$ — заданная функция переменной r , $p = 1, 2, \dots$. Функцию $T_g(r)$ будем подбирать таким образом, чтобы резонанс интересующей нас волны возбуждался наиболее эффективно. При $z \rightarrow \infty$ ставится условие отсутствия источников энергии.

В соответствии с граничными условиями (3.10) будем искать функции φ, ψ в виде

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, z) &= \varphi^0(r, z) \cos p\theta, & \psi_r(r, \theta, z) &= \psi_r^0(r, z) \sin p\theta, \\ \psi_\theta(r, \theta, z) &= \psi_\theta^0(r, z) \cos p\theta, & \psi_z(r, \theta, z) &= \psi_z^0(r, z) \sin p\theta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Решение вида (3.11) можно интерпретировать как стоячую волну, представляющую собой сумму двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях вдоль оси θ . Функции, представляющие такие волны, должны иметь вид

$$F(r, \theta, z, t) = F^0(r, z) e^{i(\omega t \mp p\theta)}. \quad (3.12)$$

Формула (3.12) показывает, что в данном случае, в отличие от случая пластины, поверхность постоянной фазы не перемещается параллельно самой себе, а поворачивается на некоторый угол, зависящий от времени. Линейная скорость распространения волны зависит от координаты r . Если мы зафиксируем некоторое значение r_0 , то линейная скорость распространения волны вдоль поверхности $r = r_0$ в направлении оси θ может быть вычислена по формуле

$$c_{r_0} = \frac{\omega}{p} r_0. \quad (3.13)$$

Для определенности будем называть “скоростью волны” скорость распространения волны в направлении оси θ вдоль срединной поверхности $r = 1$. Таким

образом, скорость кромочных волн в данном исследовании определяется по формуле

$$c = \frac{\omega_0}{p}, \quad (3.14)$$

где ω_0 – собственная частота однородной задачи (3.6), (3.9) или резонансная частота неоднородной задачи (3.6), (3.10).

Отметим также, что если известна скорость \hat{c} распространения некоторой волны в направлении оси θ вдоль поверхности $r = r_0$, то соответствующая ей скорость c вычисляется по формуле

$$c = \frac{\hat{c}}{r_0}. \quad (3.15)$$

В частности, волны, распространяющаяся в направлении оси θ вдоль наружной ($r = 1 + \eta$) и внутренней ($r = 1 - \eta$) поверхности со скоростями \hat{c}_{\pm} , соответственно, в принятой нами нормировке будут иметь скорости

$$c_{\pm} = \frac{\hat{c}_{\pm}}{1 \pm \eta}. \quad (3.16)$$

Волновое число в формуле (3.14) равно $(p/r_0)|_{r_0=1} = p$, поэтому параметр p в дальнейшем будем называть “волновым числом”. Для простоты будем рассматривать только целые значения p . Значения скорости и других параметров волны при нецелых p могут быть получены по приведенным данным с помощью интерполяции.

3.2. Цилиндрическая поверхностная волна

Цилиндрическая поверхностная волна является обобщением волны Рэлея [115] на случай задачи в трехмерной постановке в цилиндрической системе координат.

Найдем нетривиальное решение уравнений (3.6), удовлетворяющее однородным граничным условиям (3.9) на поверхности $z = 0$ и экспоненциально

затухающее при $z \rightarrow \infty$. Представим функции φ^0, ψ^0 в виде

$$\begin{aligned}\varphi^0 &= \Phi(r) \exp(-s_1^0 z), & \psi_r^0 &= \Psi_r(r) \exp(-s_2^0 z), \\ \psi_\theta^0 &= \Psi_\theta(r) \exp(-s_2^0 z), & \psi_z^0 &= \Psi_z(r) \exp(-s_2^0 z)\end{aligned}\quad (3.17)$$

и введем функции

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} (\Psi_r + \Psi_\theta), \quad \Psi_2 = \frac{1}{2} (\Psi_r - \Psi_\theta). \quad (3.18)$$

Уравнения для функций $\Phi, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_z$ получаются после подстановки (3.17) в (3.6) и сводятся к уравнениям Бесселя. Используя известные решения этих уравнений (см., например, [52]), мы можем записать частное решение уравнений (3.6) в виде

$$\begin{aligned}\varphi &= C_1^0 Z_p(\alpha_1 r) \cos p\theta \exp(-s_1^0 z), \\ \psi_r &= (C_2^0 Z_{p-1}(\alpha_2 r) + C_3^0 Z_{p+1}(\alpha_2 r)) \sin p\theta \exp(-s_2^0 z), \\ \psi_\theta &= (C_2^0 Z_{p-1}(\alpha_2 r) - C_3^0 Z_{p+1}(\alpha_2 r)) \cos p\theta \exp(-s_2^0 z), \\ \psi_z &= C_4^0 Z_p(\alpha_2 r) \sin p\theta \exp(-s_2^0 z),\end{aligned}\quad (3.19)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{(s_1^0)^2 + \kappa^2 \omega^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{(s_2^0)^2 + \omega^2}, \quad (3.20)$$

Z_m – какая-либо цилиндрическая функция указанного порядка. Чтобы удовлетворить граничным условиям при $z = 0$, следует положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1$. Удовлетворяя граничным условиям (3.9), приходим, с учетом (3.5), к условию существования нетривиального решения:

$$[2\gamma_1^2 - \omega^2]^2 - 4\gamma_1^2 \sqrt{\gamma_1^2 - \kappa^2 \omega^2} \sqrt{\gamma_1^2 - \omega^2} = 0. \quad (3.21)$$

Используя асимптотики цилиндрических функций [52], нетрудно показать, что уравнение (3.21) является аналогом дисперсионных уравнений, возникающих при изучении плоских поверхностных волн. Корень этого уравнения

можно представить в виде

$$\gamma_1 = \frac{\omega}{c_R}, \quad (3.22)$$

где c_R – скорость волны Рэлея [115]. Чтобы получить расходящуюся волну, следует взять в качестве функции Z_m функцию Ганкеля первого рода. Тогда цилиндрическая поверхностная волна будет описываться потенциалами

$$\begin{aligned} \varphi &= -C \frac{s_2^R \gamma_1}{s_3^2} \mathbf{H}_p^{(1)}(\gamma_1 r) \cos p\theta \exp(-s_1^R z), \\ \psi_r &= C \frac{p}{\gamma_1 r} \mathbf{H}_p^{(1)}(\gamma_1 r) \sin p\theta \exp(-s_2^R z), \\ \psi_\theta &= C \mathbf{H}_p^{(1)'}(\gamma_1 r) \cos p\theta \exp(-s_2^R z), \quad \psi_z \equiv 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $s_1^R = \frac{\omega}{c_R} \sqrt{1 - \kappa^2 c_R^2}$, $s_2^R = \frac{\omega}{c_R} \sqrt{1 - c_R^2}$, $s_3^2 = \frac{\omega^2}{c_R^2} \left(1 - \frac{c_R^2}{2}\right)$, C – произвольная постоянная, штрихом обозначена производная по аргументу. Для сходящейся волны функция Ганкеля первого рода заменяется на функцию Ганкеля второго рода. Далее полученное решение будет использовано для анализа асимптотического поведения кромочных волны высшего порядка.

3.3. Моды полого цилиндра

Построим нетривиальные решения уравнений (3.6), удовлетворяющие однородным граничным условиям (3.8). Для этого также можно использовать частные решения (3.20), однако теперь в них следует положить $s_1^0 = s_2^0 = s$. При изучении мод полого цилиндра традиционное представление решения уравнения Бесселя в виде линейной комбинации функций Бесселя и Неймана, или функций Ганкеля первого и второго рода, оказывается неудобным. Эти функции связаны с началом координат $r = 0$, расположенном вне области, занятой телом, что приводит к “проблеме вычитания близких чисел” при вычислении определителя и другим вычислительным трудностям. Построим специальную фундаментальную систему решений уравнения цилиндрических

функций, связанную со срединной поверхностью оболочки. Для определения функций Φ , Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_z нужно записать решение уравнения вида

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{p^2}{r^2} F + \alpha^2 F = 0, \quad (3.24)$$

сводящегося к уравнению Бесселя ($\alpha \neq 0$). Введем функции $\text{Cb}_p(r; \alpha)$ и $\text{Sb}_p(r; \alpha)$, удовлетворяющие уравнению (3.24) и следующим условиям:

$$\begin{aligned} \text{Cb}_p(1; \alpha) = 1, & \quad \left. \frac{d\text{Cb}_p(r; \alpha)}{dr} \right|_{r=1} = 0, \\ \text{Sb}_p(1; \alpha) = 0, & \quad \left. \frac{d\text{Sb}_p(r; \alpha)}{dr} \right|_{r=1} = \alpha. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Очевидно, что функции $\text{Cb}_p(r; \alpha)$ и $\text{Sb}_p(r; \alpha)$ являются линейно независимыми. Используя известные фундаментальные системы решений уравнения Бесселя [52], можно выразить функции $\text{Cb}_p(r; \alpha)$ и $\text{Sb}_p(r; \alpha)$ в виде

$$\begin{aligned} \text{Cb}_p(r; \alpha) &= \frac{\pi\alpha}{2} [Y'_p(\alpha)J_p(\alpha r) - J'_p(\alpha)Y_p(\alpha r)], \\ \text{Sb}_p(r; \alpha) &= \frac{\pi\alpha}{2} [J_p(\alpha)Y_p(\alpha r) - Y_p(\alpha)J_p(\alpha r)], \end{aligned} \quad (3.26)$$

или

$$\begin{aligned} \text{Cb}_p(r; \alpha) &= i \frac{\pi\alpha}{4} [H_p^{(2)'}(\alpha)H_p^{(1)}(\alpha r) - H_p^{(1)'}(\alpha)H_p^{(2)}(\alpha r)], \\ \text{Sb}_p(r; \alpha) &= i \frac{\pi\alpha}{4} [H_p^{(1)}(\alpha)H_p^{(2)}(\alpha r) - H_p^{(2)}(\alpha)H_p^{(1)}(\alpha r)], \end{aligned} \quad (3.27)$$

где $J_p(x)$ – функция Бесселя первого рода, $Y_p(x)$ – функция Неймана, $H_p^{(1)}(x)$, $H_p^{(2)}(x)$ – функции Ганкеля первого и второго рода. Используя рекуррентные соотношения для цилиндрических функций [52], получим формулы дифференцирования (штрих обозначает дифференцирование по r):

$$\begin{aligned} \text{Sb}'_p(r; \alpha) &= \alpha \text{Cb}_{p-1}(r; \alpha) + (p-1)\text{Sb}_{p-1}(r; \alpha) - \frac{p}{r}\text{Sb}_p(r; \alpha), \\ \text{Sb}'_p(r; \alpha) &= \alpha \text{Cb}_{p+1}(r; \alpha) - (p+1)\text{Sb}_{p+1}(r; \alpha) + \frac{p}{r}\text{Sb}_p(r; \alpha), \\ \text{Cb}'_p(r; \alpha) &= -\alpha^- \text{Sb}_{p-1}(r; \alpha) + p\text{Cb}_{p-1}(r; \alpha) - \frac{p}{r}\text{Cb}_p(r; \alpha), \\ \text{Cb}'_p(r; \alpha) &= -\alpha^+ \text{Sb}_{p+1}(r; \alpha) - p\text{Cb}_{p+1}(r; \alpha) + \frac{p}{r}\text{Cb}_p(r; \alpha), \end{aligned} \quad (3.28)$$

где $\alpha^\pm = \alpha \left(1 - \frac{p(p\pm 1)}{\alpha^2}\right)$.

Рекуррентные формулы для вычисления интегралов имеют вид

$$\begin{aligned} \int \text{Sb}_p(r; \alpha) dr &= - \left(1 - \frac{2(p-1)(p-2)}{\alpha^2}\right) \int \text{Sb}_{p-2}(r; \alpha) dr - \\ &\quad - \frac{2(p-1)}{\alpha^2} \text{Sb}_{p-1}(r; \alpha) - \frac{2}{\alpha} \text{Cb}_{p-1}(r; \alpha) + \\ &\quad + \frac{2(p-1)}{\alpha} \int \text{Cb}_{p-2}(r; \alpha) dr, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \int \text{Cb}_p(r; \alpha) dr &= - \left(1 - \frac{2p(p-1)}{\alpha^2}\right) \int \text{Cb}_{p-2}(r; \alpha) dr - \\ &\quad - \frac{2(p-1)}{\alpha} \left(1 - \frac{p(p-2)}{\alpha^2}\right) \int \text{Sb}_{p-2}(r; \alpha) dr - \\ &\quad - \frac{2p}{\alpha^2} \text{Cb}_{p-1}(r; \alpha) + \frac{2}{\alpha} \left(1 - \frac{p(p-1)}{\alpha^2}\right) \text{Sb}_{p-1}(r; \alpha). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Подставляя в (3.26) представления функций Бесселя и Неймана в виде степенных рядов [52], получим асимптотики при малых α :

$$\begin{aligned} \text{Sb}_p(r; \alpha) &= \frac{\alpha}{2} \left[2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2p} r^p S_p^{(1)}(\alpha) S_p^{(1)}(\alpha r) \ln r + \right. \\ &\quad + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2p} r^p \left(S_p^{(1)}(\alpha r) S_p^{(2)}(\alpha) - S_p^{(1)}(\alpha) S_p^{(2)}(\alpha r) \right) + \\ &\quad \left. + r^p S_p^{(1)}(\alpha r) S_p^{(3)}(\alpha) - r^{-p} S_p^{(1)}(\alpha r) S_p^{(3)}(\alpha) \right], \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \text{Cb}_p(r; \alpha) &= -2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2p} r^p S_p^{(4)}(\alpha) S_p^{(1)}(\alpha r) \ln r + \\ &\quad + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2p} r^p \left[S_p^{(1)}(\alpha r) \left(S_p^{(1)}(\alpha) - S_p^{(5)}(\alpha) \right) + S_p^{(4)}(\alpha) S_p^{(2)}(\alpha r) \right] + \\ &\quad - r^p S_p^{(1)}(\alpha r) S_p^{(6)}(\alpha) + r^{-p} S_p^{(3)}(\alpha r) S_p^{(4)}(\alpha), \end{aligned} \quad (3.32)$$

где

$$\begin{aligned} S_p^{(1)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, & S_p^{(3)}(x) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(p-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \\ S_p^{(2)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{p+k} \frac{1}{j} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_p^{(4)}(x) &= \frac{p}{2} S_p^{(1)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!(p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \\
S_p^{(5)}(x) &= \frac{p}{2} S_p^{(2)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!(p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{p+k} \frac{1}{j} \right), \\
S_p^{(6)}(x) &= -\frac{p}{2} S_p^{(3)}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-k-1)!}{(k-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Заметим, что в отличие от функций $Y_p(\alpha r)$, $H_p^{(1)}(\alpha r)$, $H_p^{(2)}(\alpha r)$, введенные нами функции $Cb_p(r; \alpha)$ и $Sb_p(r; \alpha)$ не имеют логарифмической особенности при $\alpha = 0$, более того, являются ограниченными в этой точке.

Будем искать потенциалы φ, ψ в виде

$$\begin{aligned}
\varphi &= [C_1 Cb_p(r; \alpha_1) + C_5 Sb_p(r; \alpha_1)] \cos p\theta \exp(-sz), \\
\psi_r &= [C_2 Cb_{p-1}(r; \alpha_2) + C_3 Cb_{p+1}(r; \alpha_2) + \\
&\quad + C_6 Sb_{p-1}(r; \alpha_2) + C_7 Sb_{p+1}(r; \alpha_2)] \sin p\theta \exp(-sz), \\
\psi_\theta &= [C_2 Cb_{p-1}(r; \alpha_2) - C_3 Cb_{p+1}(r; \alpha_2) + \\
&\quad + C_6 Sb_{p-1}(r; \alpha_2) - C_7 Sb_{p+1}(r; \alpha_2)] \cos p\theta \exp(-sz), \\
\psi_z &= [C_4 Cb_p(r; \alpha_2) + C_8 Sb_p(r; \alpha_2)] \sin p\theta \exp(-sz).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.8) при $r = 1 \pm \eta = r_{\pm}$, а также соотношению (3.5) (оно должно выполняться во всем интервале $r \in [1 - \eta, 1 + \eta]$), получим однородную систему восьми алгебраических уравнений относительно восьми неизвестных констант представления (3.34). Запишем эту систему в виде

$$\sum_{j=1}^8 \beta_{ij} C_j = 0, \quad i = \overline{1, 8}. \tag{3.35}$$

В (3.35)

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= \left(\alpha_3^2 - \frac{p^2}{r_+^2} \right) c_{p,+}^{(1)} + \frac{d_{p,+}^{(1)}}{r_+}, \quad \beta_{21} = \frac{p}{r_+} \left(d_{p,+}^{(1)} - \frac{c_{p,+}^{(1)}}{r_+} \right), \quad \beta_{31} = s d_{p,+}^{(1)}, \\
\beta_{22} &= \frac{s}{2} \left(d_{p-1,+}^{(2)} + \frac{p-1}{r_+} c_{p-1,+}^{(2)} \right), \quad \beta_{32} = \left(\alpha_3^2 - \frac{p(p-1)}{2r_+^2} \right) c_{p-1,+}^{(2)} + \frac{p}{2r_+} d_{p-1,+}^{(2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{23} &= \frac{s}{2} \left(d_{p+1,+}^{(2)} - \frac{p+1}{r_+} c_{p+1,+}^{(2)} \right), & \beta_{33} &= - \left(\alpha_3^2 - \frac{p(p+1)}{2r_+^2} \right) c_{p+1,+}^{(2)} + \frac{p}{2r_+} d_{p+1,+}^{(2)}, \\
\beta_{12} &= -s d_{p-1,+}^{(2)}, & \beta_{13} &= s d_{p+1,+}^{(2)}, & \beta_{42} &= -(p-1), & \beta_{43} &= p+1, \\
\beta_{14} &= -\frac{p}{r_+} \left(d_{p,+}^{(2)} - \frac{c_{p,+}^{(2)}}{r_+} \right), & \beta_{34} &= \frac{s}{2} \frac{p}{r_+} c_{p,+}^{(2)}, & \beta_{48} &= 0, \\
\beta_{24} &= - \left(\alpha_3^2 - \frac{s^2}{2} - \frac{p^2}{r_+^2} \right) c_{p,+}^{(2)} - \frac{1}{r_+} d_{p,+}^{(2)}, & \beta_{41} &= 0, & \beta_{44} &= -s, \\
\beta_{45} &= 0, & \beta_{46} &= \alpha_2, & \beta_{47} &= \alpha_2, & \beta_{81} &= 0, & \beta_{82} &= -\alpha_2^-, & \beta_{83} &= -\alpha_2^+, \\
\beta_{84} &= 0, & \beta_{85} &= 0, & \beta_{86} &= -p, & \beta_{87} &= p, & \beta_{88} &= -s,
\end{aligned}$$

где $c_{m,+}^{(k)} = \text{Cb}_m(r_+; \alpha_k)$, $d_{m,+}^{(k)} = \text{Cb}'_m(r_+; \alpha_k)$, $\alpha_3^2 = s^2 + \omega^2/2$, коэффициенты β_{ij} ($i = \overline{1,3}, j = \overline{5,8}$) получаются из коэффициентов $\beta_{i,j-4}$ заменой $\text{Cb} \rightarrow \text{Sb}$, коэффициенты β_{ij} ($i = \overline{5,7}, j = \overline{1,8}$) получаются из коэффициентов $\beta_{i-4,j}$ заменой $r_+ \rightarrow r_-$. Приравнивая определитель системы (3.35) нулю, получим дисперсионное уравнение

$$\det(\beta_{ij}) = 0. \quad (3.36)$$

Исключая два неизвестных в (3.35) с помощью четвертого и восьмого уравнений, нетрудно свести определитель в (3.36) к определителю шестого порядка.

Уравнение (3.35) имеет счетное множество корней $s_n = s_n(\omega)$, определяющих моды кругового бесконечного полого цилиндра $\mathbf{f}^{(n)}$, где $\mathbf{f} = (\varphi, \psi_r, \psi_\theta, \psi_z)^\top$. Система функций, образованных функциями $\mathbf{f}^{(n)}$ в некотором поперечном сечении, является полной (см. [28]). Поведение дисперсионных кривых и свойства соответствующих им мод исследовались в работах [35, 58, 76, 77, 118, 128] и во многом аналогичны свойствам мод плоского слоя и сплошного кругового цилиндра, подробно исследованных в работах [30, 39, 107, 133] и др., поэтому ограничимся некоторыми замечаниями.

В отличие от задач для плоского слоя и сплошного цилиндра, в рассматриваемой задаче имеются два характерных размера: радиус R и толщина h . Для тонкой оболочки эти два масштабных фактора существенно различаются, что позволяет выделить область длинноволновых колебаний,

где характерным масштабом является радиус R , и область коротковолновых колебаний, которая характеризуется масштабным фактором h (см. [82]). Безразмерные переменные (3.1) удобны для сопоставления результатов расчетов с результатами, полученными по теории оболочек Кирхгофа–Лява. При изучении кромочных волн высшего порядка следует ориентироваться на результаты для пластины, полученные в нормировке по отношению к толщине (см. (1.1)). Формулы пересчета частоты и волнового числа при переходе от (3.1) к (1.1) имеют вид

$$\omega_h = \frac{\eta\omega}{\pi}, \quad p_h = \frac{\eta p}{\pi}. \quad (3.37)$$

Величина p_h соответствует параметру s в главе 2. Для удобства на рисунке 3.2 представлены графики зависимости p от p_h для различных значений η . Вертикальная линия $p_h = 0.1$ обозначает условный предел применимости двумерных теорий.

На рисунках 3.3–3.5 представлены дисперсионные кривые для полого цилиндра относительной полутолщины $\eta = 0.02$. При p из области $p_h < 0.1$ (для $\eta = 0.02$ эта область соответствует $p < 20$, как видно из рисунка 3.2) первые четыре моды соответствуют четырем модам бесконечной цилиндрической оболочки по теории Кирхгофа–Лява. Остальные моды отвечают за Сен-Венановский краевой эффект. Для их расчета можно использовать асимптотические формулы для пластин (см. [27] с учетом перенормировки (3.37)). Заметим, что в полом цилиндре присутствуют моды, близкие как к модам симметричных, так и к модам антисимметричных колебаний пластины. В окрестности гипотетических точек пересечения дисперсионных кривых “симметричных” и “антисимметричных” мод возникает либо явление отталкивания, либо явление преобразования двух действительных корней в комплексно-сопряженные. При больших p ($p_h > 3$) наблюдается сгущение дисперсионных кривых (см. рисунок 3.5). Частоты запираания мод полого цилиндра разделяются на две

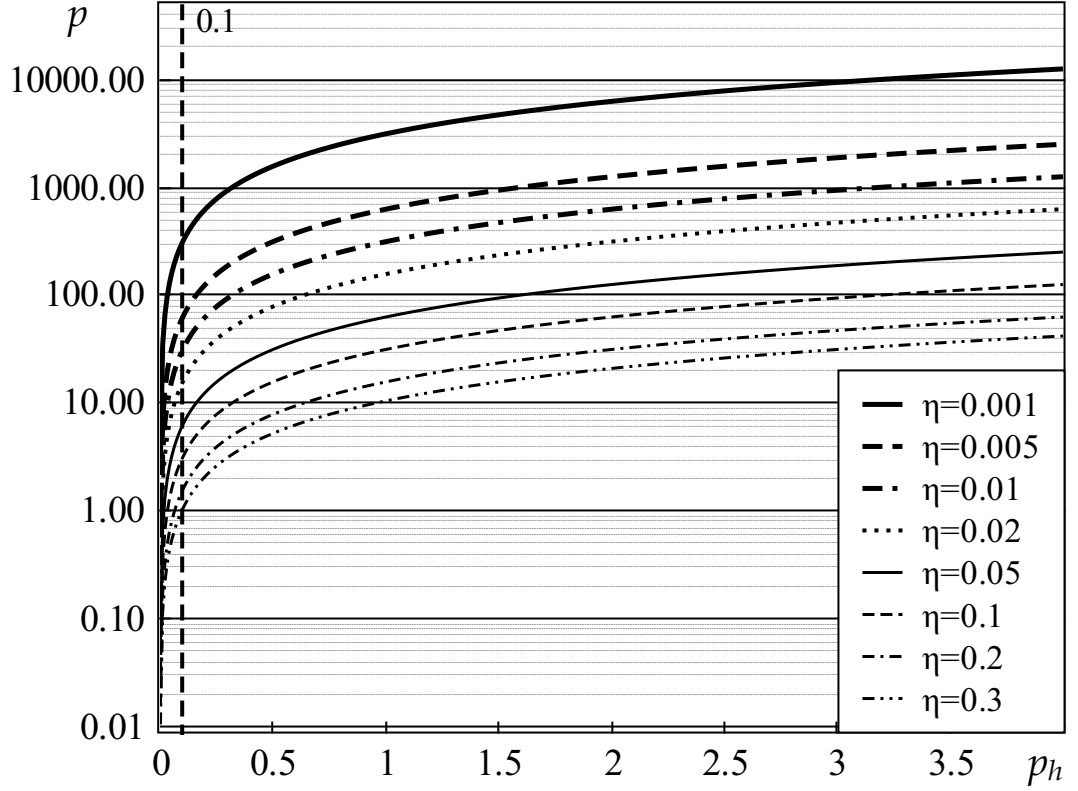


Рисунок 3.2 — Соотношение между волновыми числами, нормированными по отношению к толщине и по отношению к радиусу

серии: корни уравнения

$$\text{Sb}'_p(r_+; \alpha_2) \text{Cb}'_p(r_-; \alpha_2) - \text{Cb}'_p(r_+; \alpha_2) \text{Sb}'_p(r_-; \alpha_2) = 0 \quad (3.38)$$

и корни уравнения

$$\det(\delta_{ij}) = 0. \quad (3.39)$$

В (3.39)

$$\delta_{k,k} = \gamma_+^2 c_{p,+}^{(k)} + \frac{d_{p,+}^{(k)}}{r_+}, \quad \delta_{k,l} = \frac{p}{r_+} \left(d_{p,+}^{(l)} - \frac{c_{p,+}^{(l)}}{r_+} \right), \quad k, l = 1, 2, \quad k \neq l,$$

где $c_{p,+}^{(k)} = \text{Cb}_p(r_+; \alpha_k^0)$, $d_{p,+}^{(k)} = \text{Cb}'_p(r_+; \alpha_k^0)$, $\gamma_{\pm}^2 = \omega^2/2 - p^2/r_{\pm}^2$, $\alpha_1^0 = \kappa\omega$, $\alpha_2^0 = \omega$, коэффициенты δ_{ij} ($i = 1, 2, j = 3, 4$) получаются из коэффициентов $\delta_{i,j-2}$ заменой $\text{Cb} \rightarrow \text{Sb}$, коэффициенты δ_{ij} ($i = 3, 4, j = \overline{1, 4}$) получаются из

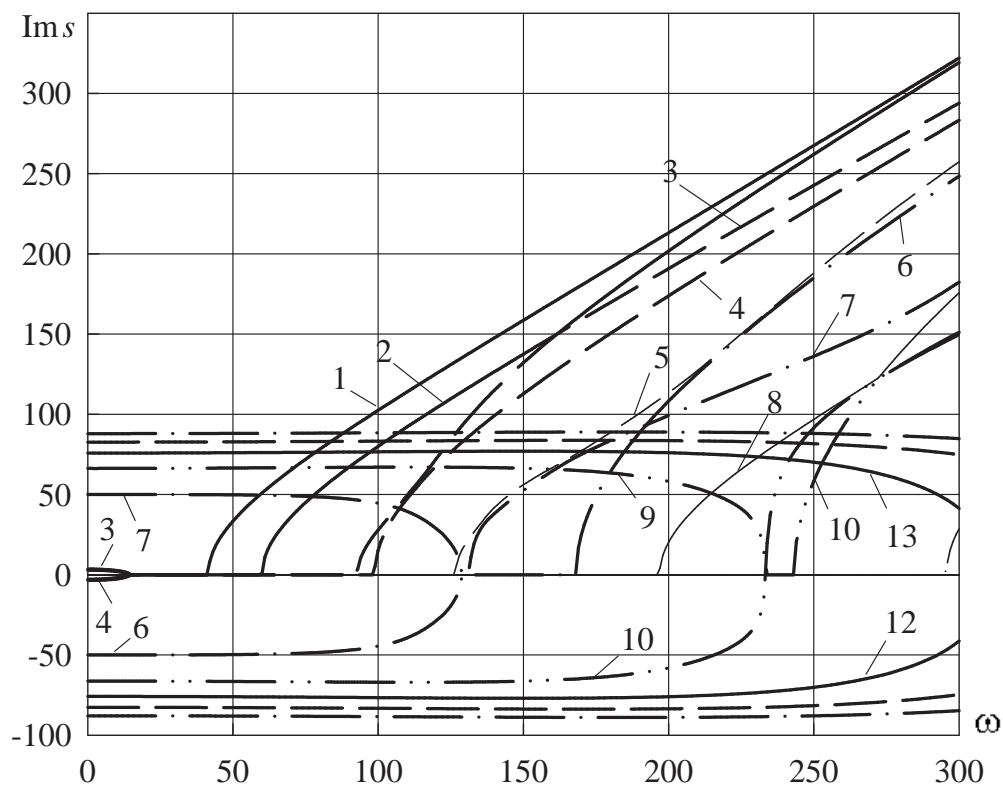
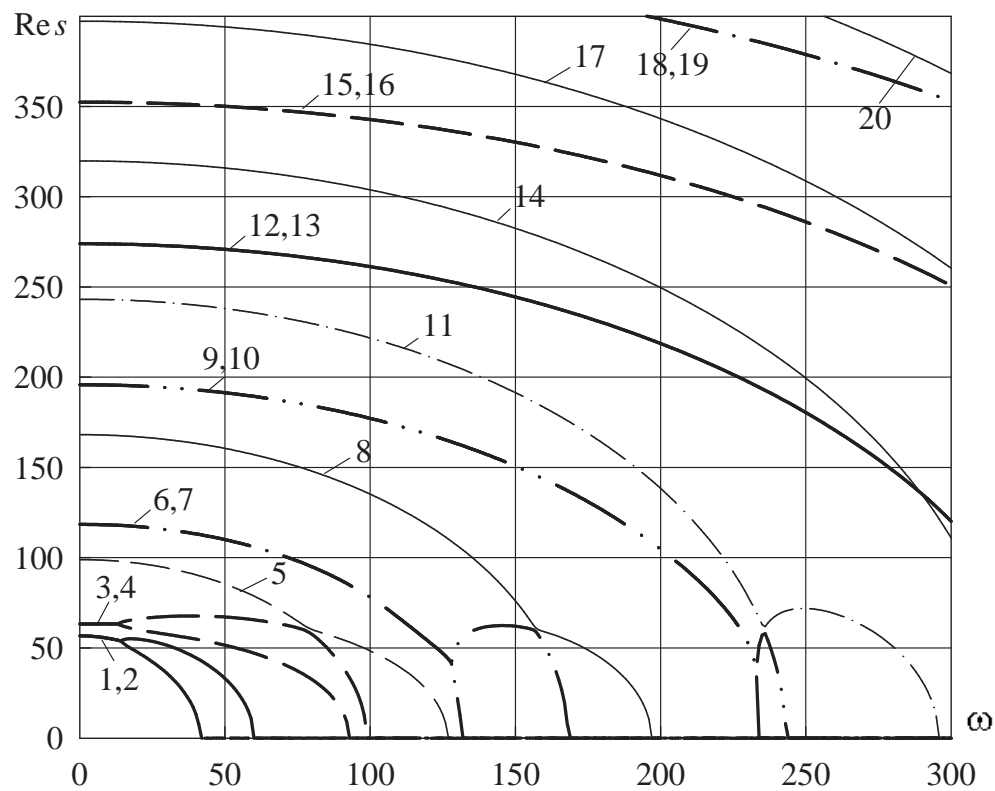


Рисунок 3.3 — Дисперсионные кривые мод бесконечного полого цилиндра при $p = 60$

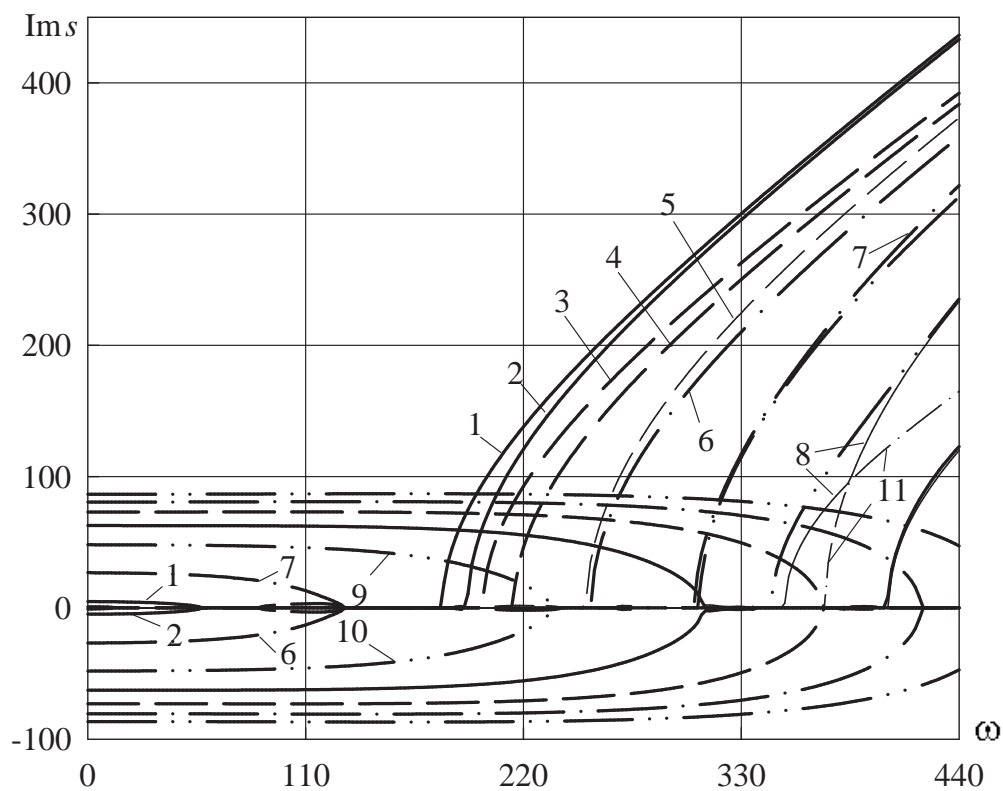
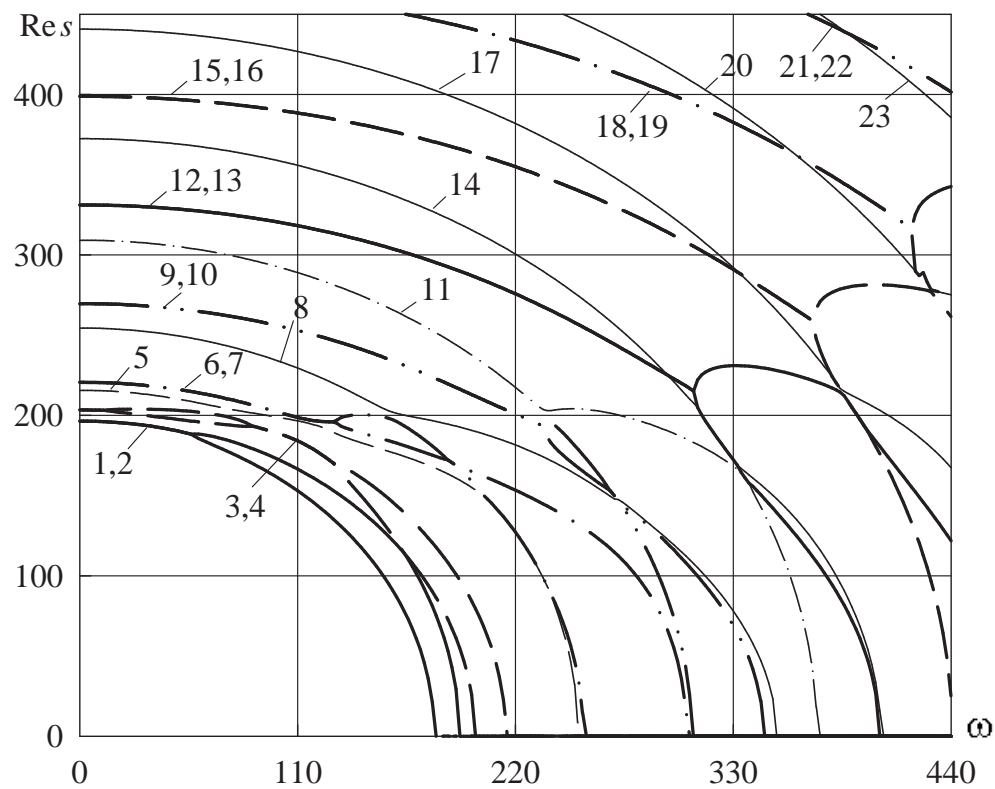


Рисунок 3.4 — То же, что рисунок 3.3, при $p = 200$

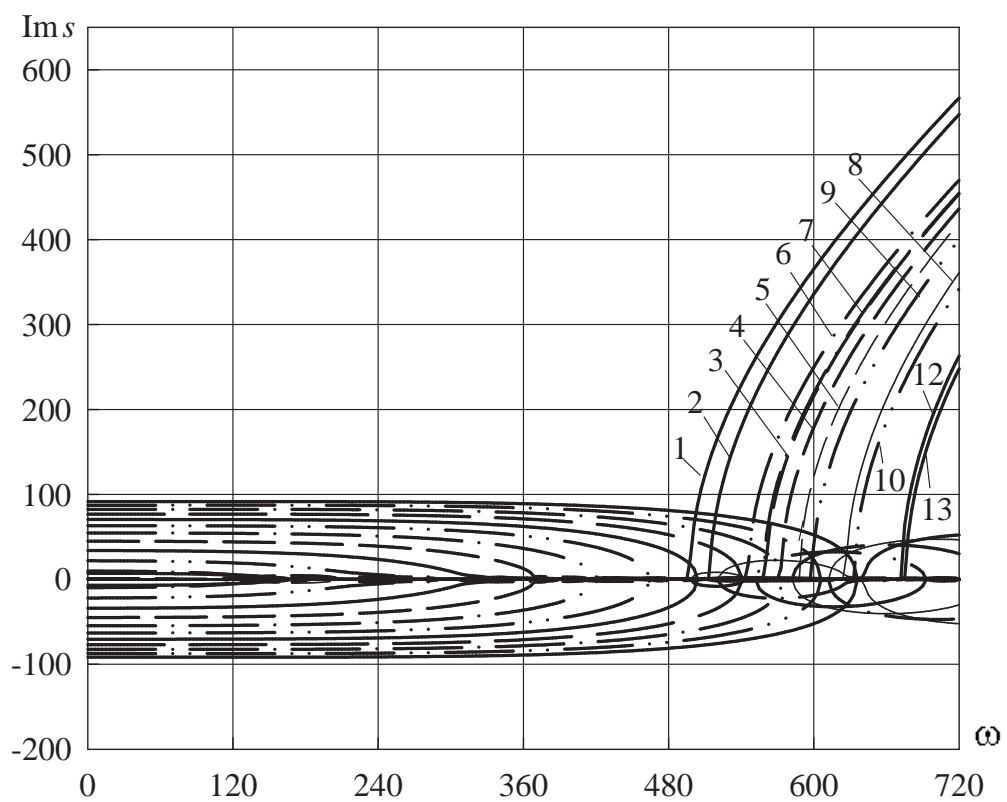
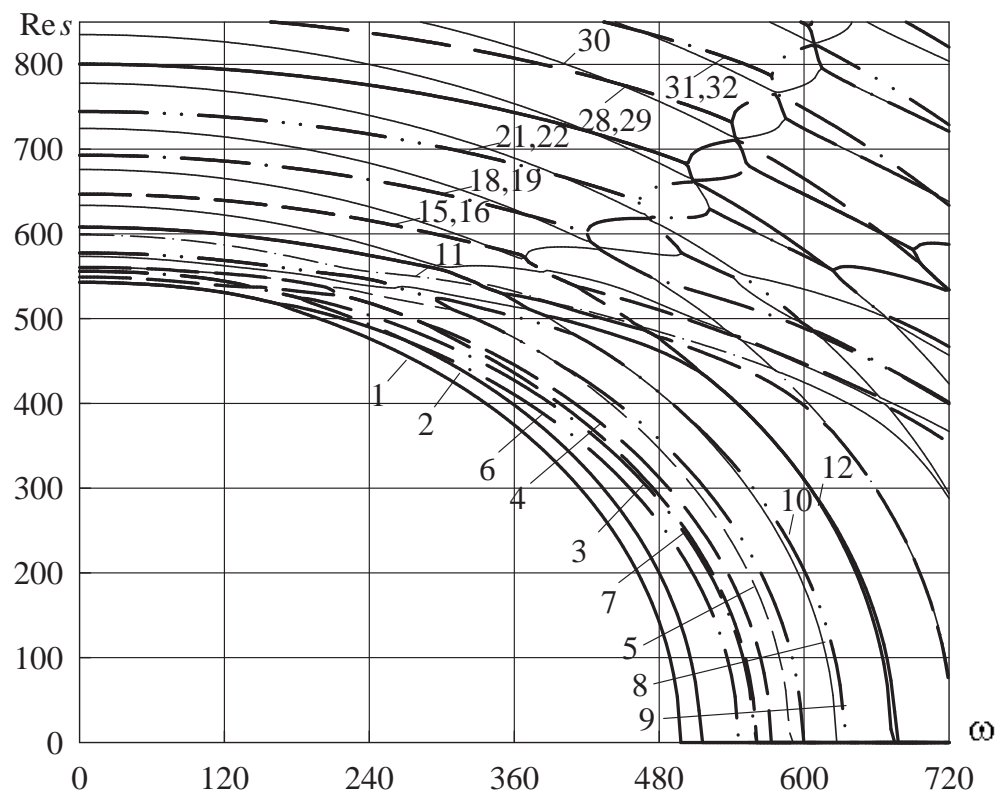


Рисунок 3.5 — То же, что рисунок 3.3, при $p = 550$

коэффициентов $\delta_{i-2,j}$ заменой $r_+ \rightarrow r_-$.

Номера мод определяются значениями s при $\omega \rightarrow 0$, которые мы нумеруем по возрастанию действительной части. Комплексно-сопряженным корням с равными действительными частями присваиваются последовательные номера, четный номер — корню с отрицательной действительной частью, нечетный — с положительной. Из-за явления отталкивания приписать каждой дисперсионной кривой определенный тип (продольная или крутильная, “симметричная” или “антисимметричная”) не представляется возможным. При необходимости тип моды можно определить, построив форму колебаний на данной частоте.

Представим выражения для перемещений и напряжений, входящих в граничные условия при $z = 0$, в виде

$$\begin{aligned} u_r^{(n)} &= v_n(r) \exp(-s_n z), & \sigma_{rz}^{(n)} &= S_n(r) \exp(-s_n z), \\ u_\theta^{(n)} &= w_n(r) \exp(-s_n z), & \sigma_{\theta z}^{(n)} &= H_n(r) \exp(-s_n z), \\ u_z^{(n)} &= u_n(r) \exp(-s_n z), & \sigma_z^{(n)} &= T_n(r) \exp(-s_n z). \end{aligned} \quad (3.40)$$

В (3.40) введены обозначения

$$\begin{aligned} u_n(r) &= -s_n \left(C_1 c_p^{(1)} + C_5 s_p^{(1)} \right) - C_2 \left(\alpha_{2,n}^- s_p^{(2)} + (p-1) c_p^{(2)} \right) + \\ &+ C_3 \left(\alpha_{2,n}^+ s_p^{(2)} - (p+1) c_p^{(2)} \right) + C_6 \left(\alpha_{2,n} c_p^{(2)} - p s_p^{(2)} \right) - \\ &- C_7 \left(\alpha_{2,n} c_p^{(2)} + p s_p^{(2)} \right), \\ v_n(r) &= C_1 d_p^{(1)} + C_5 t_p^{(1)} + \frac{s_n}{\alpha_{2,n}^2} \left(K_{11} d_p^{(2)} + K_{12} t_p^{(2)} \right) - \\ &- \frac{\omega^2}{s_n \alpha_{2,n}^2} \frac{p}{r} \left(K_{21} c_p^{(2)} + K_{22} s_p^{(2)} \right), \\ w_n(r) &= -\frac{p}{r} \left(C_1 c_p^{(1)} + C_5 s_p^{(1)} \right) - \frac{s_n}{\alpha_{2,n}^2} \frac{p}{r} \left(K_{11} c_p^{(2)} + K_{12} s_p^{(2)} \right) + \\ &+ \frac{\omega^2}{s_n \alpha_{2,n}^2} \left(K_{21} d_p^{(2)} + K_{22} t_p^{(2)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_n(r) &= \alpha_{4,n}^2 \left(C_1 c_p^{(1)} + C_5 s_p^{(1)} \right) + \\
&+ 2s_n \left[C_2 \left(\alpha_{2,n}^- s_p^{(2)} + (p-1)c_p^{(2)} \right) - C_3 \left(\alpha_{2,n}^+ s_p^{(2)} - (p+1)c_p^{(2)} \right) - \right. \\
&\quad \left. - C_6 \left(\alpha_{2,n} c_p^{(2)} - p s_p^{(2)} \right) + C_7 \left(\alpha_{2,n} c_p^{(2)} + p s_p^{(2)} \right) \right], \\
S_n(r) &= -2s_n \left(C_1 d_p^{(1)} + C_5 t_p^{(1)} \right) - \frac{2\alpha_{3,n}^2}{\alpha_{2,n}^2} \left(K_{11} d_p^{(2)} + K_{12} t_p^{(2)} \right) + \\
&\quad + \frac{\omega^2 p}{\alpha_{2,n}^2 r} \left(K_{21} c_p^{(2)} + K_{22} s_p^{(2)} \right), \\
H_n(r) &= 2s_n \frac{p}{r} \left(C_1 c_p^{(1)} + C_5 s_p^{(1)} \right) + \frac{2\alpha_{3,n}^2 p}{\alpha_{2,n}^2 r} \left(K_{11} c_p^{(2)} + K_{12} s_p^{(2)} \right) - \\
&\quad - \frac{\omega^2}{\alpha_{2,n}^2} \left(K_{21} d_p^{(2)} + K_{22} t_p^{(2)} \right),
\end{aligned} \tag{3.41}$$

где

$$K_{11} = C_2(p-1) + C_3(p+1) - \alpha_{2,n} C_6 + \alpha_{2,n} C_7,$$

$$K_{12} = C_2 \alpha_{2,n}^- - C_2 \alpha_{2,n}^+ + p C_2 + p C_7,$$

$$K_{21} = C_2(p-1) - C_3(p+1) - \alpha_{2,n} C_6 - \alpha_{2,n} C_7,$$

$$K_{22} = C_2 \alpha_{2,n}^- + C_2 \alpha_{2,n}^+ + p C_2 - p C_7,$$

$$\alpha_{2,n}^\pm = \alpha_{2,n} \left(1 - \frac{p(p \pm 1)}{\alpha_{2,n}^2} \right), \quad \alpha_{i,n} = \alpha_i(s_n, \omega),$$

$$c_p^{(i)} = \text{Cb}_p(r; \alpha_{i,n}), \quad d_p^{(i)} = \text{Cb}'_p(r; \alpha_{i,n}),$$

$$s_p^{(i)} = \text{Sb}_p(r; \alpha_{i,n}), \quad t_p^{(i)} = \text{Sb}'_p(r; \alpha_{i,n}), \quad i = 1, 2,$$

коэффициенты C_j определяются из системы (3.35) с точностью до произвольного постоянного множителя при $s = s_n$.

Решение краевой задачи (3.6), (3.8), (3.10) будем искать в виде разложения по модам

$$\mathbf{f} = \sum_n C_n \mathbf{f}^{(n)}, \tag{3.42}$$

где C_n – неизвестные постоянные. В представление (3.42) должны входить моды, удовлетворяющие условию $\text{Re } s_n > 0$, или, если $\text{Re } s_n = 0$, условию $d(\text{Im } s_n)/d\omega > 0$, что является выражением энергетического принципа излучения (принцип Мандельштама) [28]. Для удовлетворения граничным усло-

виям при $z = 0$ применим метод коллокаций, что даст нам систему для определения неизвестных постоянных C_n (разрешающая система):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{n_0} C_n T_n(y_m) &= T_g(y_m), & \sum_{n=0}^{n_0} C_n \int_1^{1+\eta} T_n(r) r dr &= \int_1^{1+\eta} T_g(r) r dr, \\
\sum_{n=0}^{n_0} C_n \int_1^{1-\eta} T_n(r) r dr &= \int_1^{1-\eta} T_g(r) r dr, & \sum_{n=0}^{n_0} C_n S_n(y_m) &= 0, \\
\sum_{n=0}^{n_0} C_n \int_1^{1-\eta} S_n(r) r dr &= 0, & \sum_{n=0}^{n_0} C_n \int_1^{1+\eta} S_n(r) r dr &= 0, \\
\sum_{n=0}^{n_0} C_n \int_1^{1+\eta} H_n(r) r dr &= 0, & \sum_{n=0}^{n_0} C_n H_n(y_m) &= 0, \\
\sum_{n=0}^{n_0} C_n \int_1^{1-\eta} H_n(r) r dr &= 0, & m &= \overline{0, n_1 - 1},
\end{aligned} \tag{3.43}$$

где $n_1 = n_0/3$, $y_m = 1 - \eta + 2\eta(m + 1)/(n_1 + 1)$, T_n , S_n , H_n определены формулами (3.41), $n_0 + 1$ – число мод в разложении (3.42). Точки коллокаций располагаются вне некоторой малой окрестности точек $r = 1 \pm \eta$, что позволяет локализовать погрешности в окрестности угловых окружностей. Интегральные условия, выражающие требование статической самоуравновешенности погрешностей, приводят по принципу Сен-Венана к локализации влияния невязок.

Пример анализа сходимости метода представлены в таблице 3.1, где

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta^{\max} &= \max_{|r-1| \leq \eta} \{ |\sigma_\theta(r, 0, 0)| \}, & \varepsilon_1 &= \max_{|r-1| \leq \eta} \left\{ \frac{|\sigma_r(r, 0, 0)|}{\sigma_\theta^{\max}} \right\} \cdot 100, \\
\varepsilon_2 &= \max_{|r-1| \leq \eta} \left\{ \frac{|\sigma_{rz}(r, 0, 0)|}{\sigma_\theta^{\max}} \right\} \cdot 100, & \varepsilon_3 &= \max_{|r-1| \leq \eta} \left\{ \frac{|\sigma_{\theta z}(r, 0, 0)|}{\sigma_\theta^{\max}} \right\} \cdot 100.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Также в таблице 3.1 представлены величины $y_i^{(0.01)}$ ($i = 1, 2, 3$), определенные

следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \max_{|r-1| \leq y_1^{(0.01)}} \left\{ \frac{|\sigma_r(r, 0, 0)|}{\sigma_\theta^{\max}} \right\} &< 0.0001, \\
 \max_{|r-1| \leq y_2^{(0.01)}} \left\{ \frac{|\sigma_{rz}(r, 0, 0)|}{\sigma_\theta^{\max}} \right\} &< 0.0001, \\
 \max_{|r-1| \leq y_3^{(0.01)}} \left\{ \frac{|\sigma_{\theta z}(r, 0, 0)|}{\sigma_\theta^{\max}} \right\} &< 0.0001.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Данные таблицы 3.1 получены при $T_g(r) = (r - 1)/\eta$, $p = 9$, $\omega = 1.4674$.

Таблица 3.1 — Сходимость численного метода

n_0	$ u_r(1, 0, 0) $	σ_θ^{\max}	$y_1^{(0.01)}$	$y_2^{(0.01)}$	$y_3^{(0.01)}$	$\varepsilon_1, \%$	$\varepsilon_2, \%$	$\varepsilon_3, \%$
24	3.821	14.729	0.009	0.02	0.0008	0.063	0.0085	0.97
48	3.861	14.882	0.019	0.02	0.014	0.037	0.0079	0.53
96	3.869	14.908	0.02	0.02	0.018	0.006	0.0007	0.28
192	3.870	14.912	0.02	0.02	0.019	0.005	0.0006	0.14

Как видно из таблицы 3.1, предложенный метод позволяет получить решение, удовлетворяющее граничным условиям с погрешностью менее 1%, за исключением малых окрестностей угловых окружностей. Заметим, что с увеличением числа мод эти погрешности также стремятся к нулю.

Вид задаваемой функции $T_g(r)$ зависит от типа изучаемой волны. На основании результатов, полученных в рамках теории Кирхгофа–Лява, и результатов для пластин (см. [27] и п.2.2 настоящей работы) можно предположить, что в тонкостенном полем цилиндре возможны кромочные волны следующих типов:

- *фундаментальные волны*: две волны, описываемые в низкочастотном диапазоне теорией оболочек Кирхгофа–Лява;
- *волны высшего порядка*: серия волн, аналогичных волнам высшего порядка в пластинах.

Фундаментальные волны можно, в свою очередь, разделить на (условно говоря) “симметричную” (тангенциальная волна в теории Кирхгофа–Лява) и “антисимметричную” (изгибная волна в теории Кирхгофа–Лява, на низких частотах переходящая в сверхнизкочастотную). Будем обозначать эти волны для краткости ES_0 и EA_0 , соответственно. За пределами применимости теории Кирхгофа–Лява формы этих волн не обладают даже приближенной симметрией, однако мы сохраним за ними данные обозначения. Волны высшего порядка также можно разделить на приближенно симметричные и приближенно антисимметричные. Будем обозначать их ES_k , EA_k ($k = 1, 2, \dots$), соответственно.

3.4. Фундаментальные кромочные волны в полом цилиндре

Для исследования волны EA_0 на низких частотах приложим нагрузку $T_g(r) = (r - 1)/\eta$, соответствующую изгибному характеру этой волны. На высоких частотах, где линейный закон изменения НДС по толщине более не имеет места, положим для простоты $T_g(r) = 1$. При каждом значении p существует серия резонансных частот, соответствующих резонансам упомянутых выше волн. В численном исследовании резонансную частоту можно определить методом подбора значения частоты ω , при котором амплитуда колебаний достигает максимума. Низшая резонансная частота соответствует волне EA_0 . Скорость волны вычисляется по формуле (3.14).

В работе [27] (см. также [83]) было показано, что в рамках теории Кирхгофа–Лява волна EA_0 не демпфируется распространяющимися модами. Расчеты показали, что это свойство сохраняется при $p \rightarrow \infty$, то есть частоты, соответствующие этой волне, всегда лежат ниже первой частоты запираения. На рисунке 3.6 сопоставляются результаты, полученные по трехмерной теории

и по теории Кирхгофа–Лява для двух значений относительной полутолщины: $\eta = 0.02$, $\eta = 0.1$. Как видно из этих графиков, теория Кирхгофа–Лява правильно описывает волну EA_0 только при небольших значениях p , а далее дает качественно неверную картину. На рисунке 3.7 представлено поведение скорости изучаемой волны при $p \rightarrow \infty$ для трех значений относительной полутолщины: $\eta = 0.02$, $\eta = 0.1$, $\eta = 0.3$. Для удобства сравнения значения p перенормируются по отношению к толщине по формуле (3.36). Предельной скоростью является скорость угловой волны, распространяющейся вдоль ребра четвертьпространства. В работе [30] для $\nu = 0.25$ было найдено значение скорости угловой волны $c^E = 0.9014$. Поскольку в нашем случае волна распространяется вдоль наружной угловой окружности, по формуле (3.16) получаем значение предельной скорости при $\eta = 0.02$

$$c_+^E = \frac{c^E}{1 + \eta} = 0.8837. \quad (3.46)$$

Заметим, что в толстом цилиндре волна EA_0 выходит на предельную скорость позже, чем в тонком. Также с ростом толщины увеличивается высота “петли” при переходе от линейного роста к выходу на константу. На рисунке 3.8 (здесь и далее $y = r - 1$, $\gamma = (r, \theta, z)$) показана эволюция формы волны EA_0 от линейного закона изменения по толщине в области применимости теории Кирхгофа–Лява до локализации у наружной поверхности при больших значениях p . Перемещения на рисунке 3.8 нормированы на величину $u_r(0, 0, 0)$ при $p = 9$ и на $u_z(7\eta/8, 0, 0)$ в остальных случаях. Анализ форм колебаний также подтверждает тот факт, что предельной скоростью волны EA_0 является скорость угловой волны, распространяющейся вдоль наружной угловой окружности.

При исследовании волны ES_0 всегда прикладывалась нагрузка $T_g(r) = 1$.

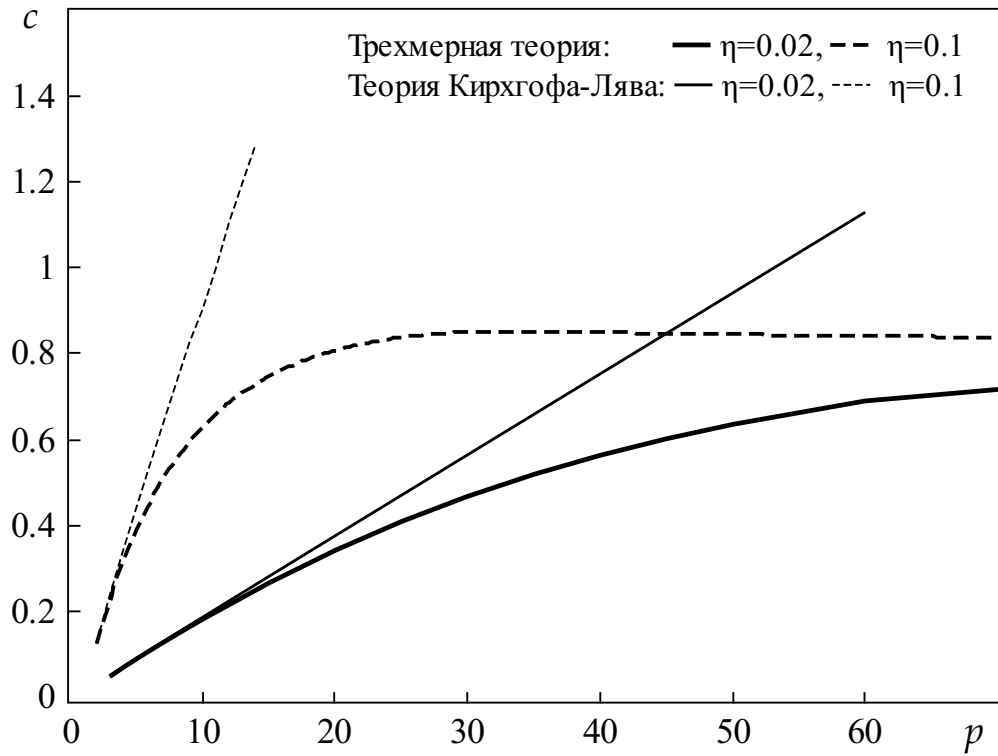


Рисунок 3.6 — Сравнение трехмерной теории и теории оболочек Кирхгофа–Лява для волны EA_0

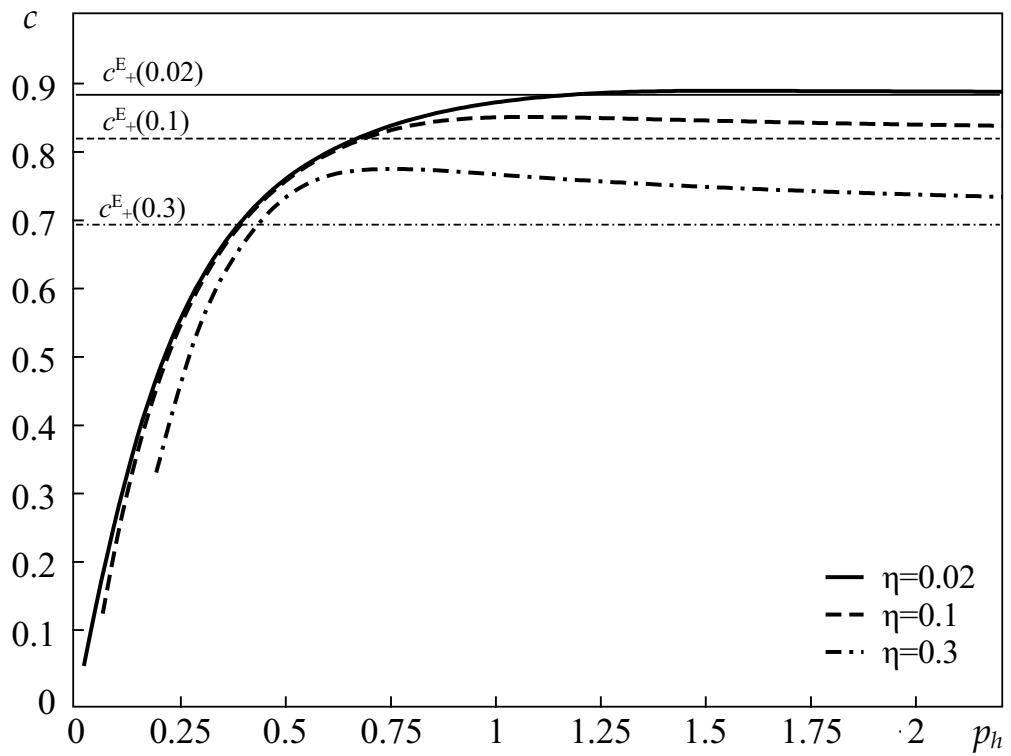
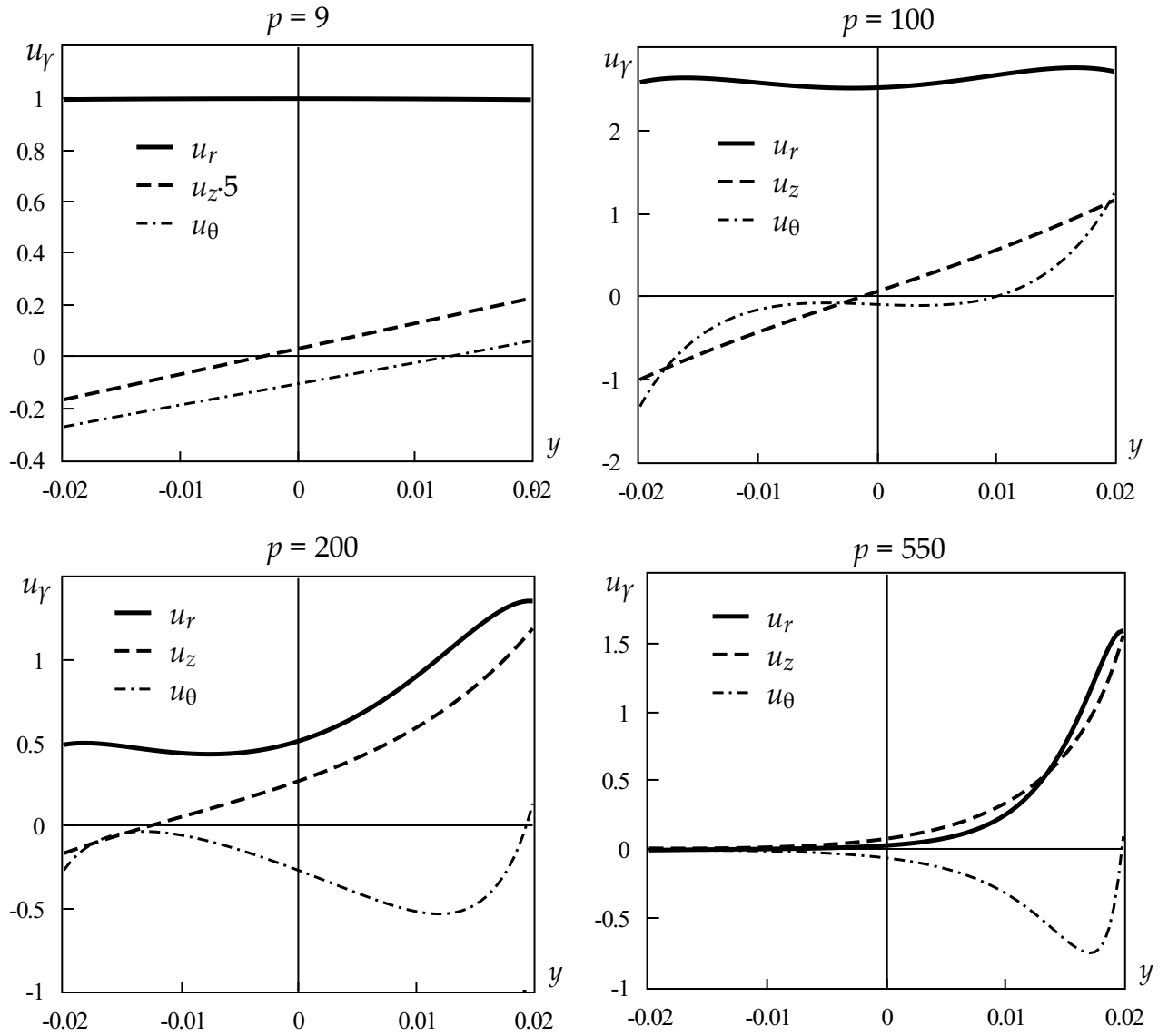


Рисунок 3.7 — Дисперсионные кривые волны EA_0

Рисунок 3.8 — Эволюция формы волны EA_0

На рисунке 3.9 значения скорости волны ES_0 по трехмерной теории сравниваются со скоростью тангенциальной волны, найденной по теории Кирхгофа–Лява. Согласно последней, асимптотически предельной скоростью тангенциальной волны является скорость планарной волны рэлеевского типа c_{pl} (её можно определить из уравнения (1.24), если заменить постоянную κ на $\kappa_1 = \sqrt{(1-\nu)/2}$). В рамках трехмерной теории эта скорость не является предельной, при выходе из пределов применимости теории Кирхгофа–Лява значение скорости понижается. Дальнейшее поведение скорости волны ES_0

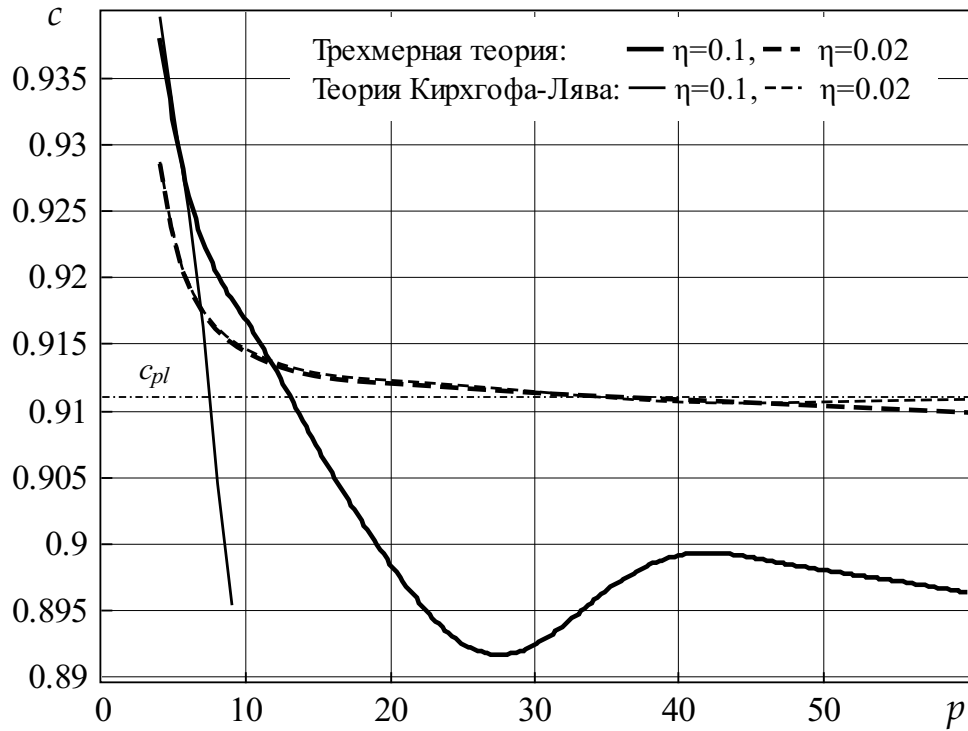


Рисунок 3.9 — Сравнение трехмерной теории и теории оболочек Кирхгофа–Лява для волны ES_0

показано на рисунке 3.10 для $\eta = 0.02$, где для сравнения приведен также график скорости волны EA_0 . Временно снизившись, скорость волны ES_0 снова возрастает и стремится к скорости угловой волны, распространяющейся вдоль внутренней угловой окружности

$$c_-^E = \frac{c^E}{1 - \eta} = 0.9198. \quad (3.47)$$

Для толстой оболочки было обнаружено, что при определенном значении p волна ES_0 исчезает. Это можно объяснить следующим образом: при большом значении относительной полутолщины скорость c_-^E становится настолько большой, что волна ES_0 начинает взаимодействовать с кромочными волнами высшего порядка. Чтобы изучить этот процесс подробнее, нужно исследовать кромочные волны высшего порядка в толстостенном полом цилиндра, что выходит за рамки данной работы.

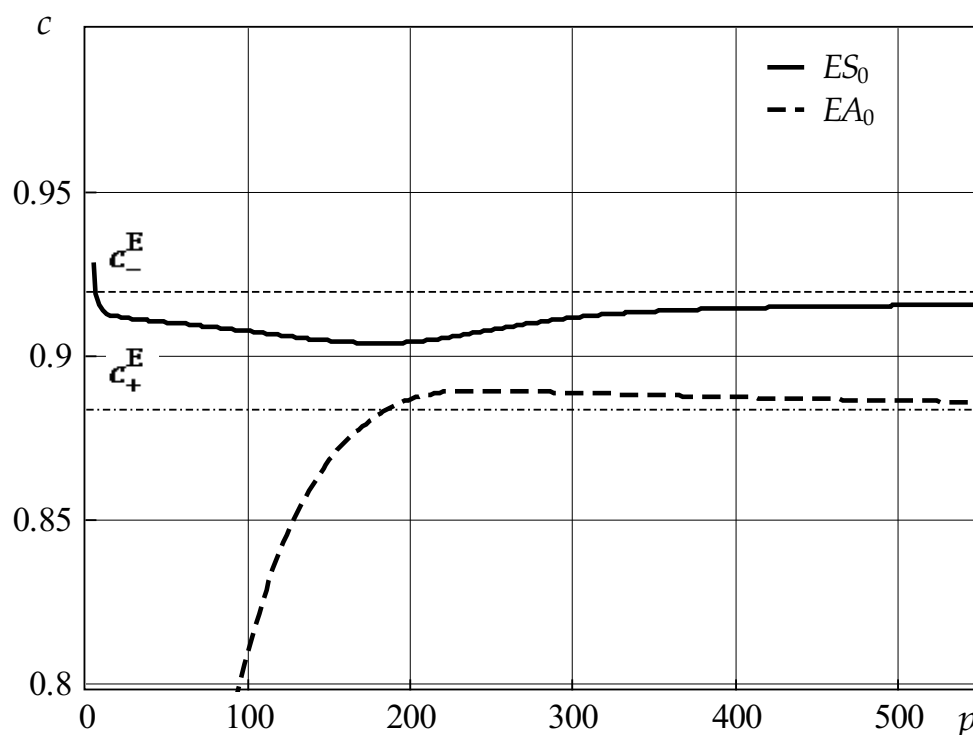
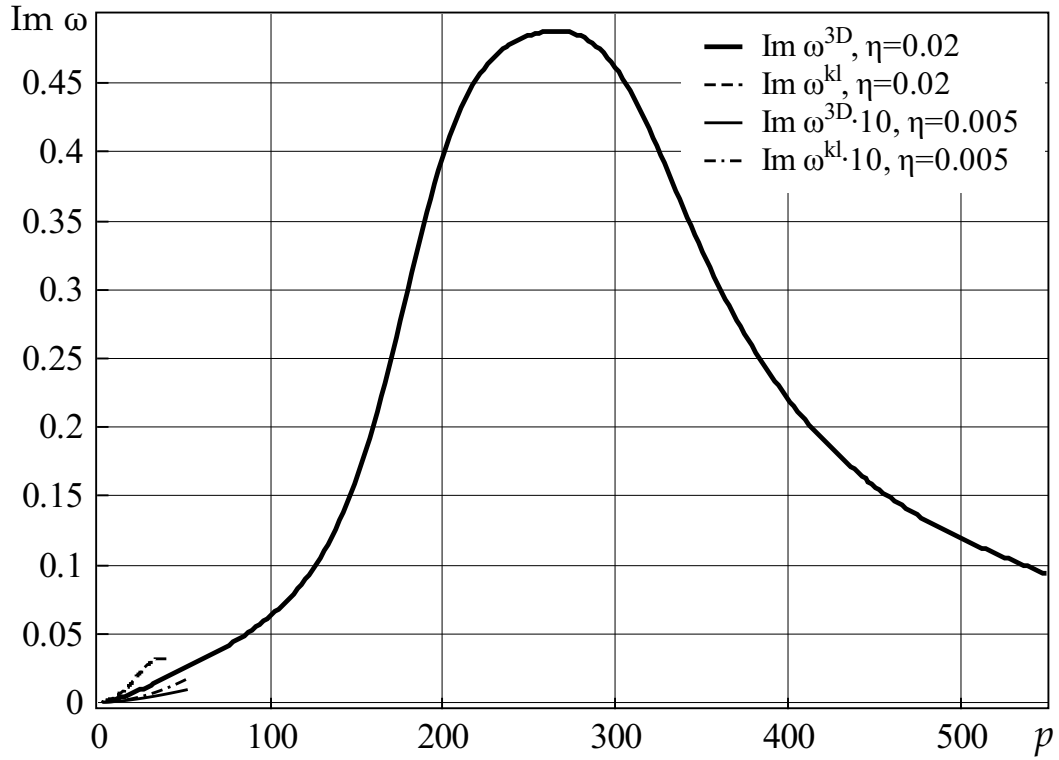


Рисунок 3.10 — Дисперсионные кривые для волн ES_0 и EA_0

В работе [83] (см. также [27]) было обнаружено, что тангенциальная кромочная волна демпфируется изгибной распространяющейся модой. С ростом волнового числа малая мнимая часть частоты, характеризующая это демпфирование, росла по закону $Kp^{3/2}$. В данном исследовании мнимая поправка к частоте определялась через ширину резонансного пика, равную ей с точностью до малых высшего порядка. На рисунке 3.11 представлено поведение ширины резонансных пиков волны ES_0 для $\eta = 0.02$. Также на рисунке 3.11 приведены графики мнимой поправки, вычисленной по теории Кирхгофа–Лява для двух значений относительной полутолщины: $\eta = 0.02$ и $\eta = 0.005$. Как видно из рисунка, теория Кирхгофа–Лява дает количественно близкие значения поправки только для очень тонких оболочек. При $\eta \sim 0.01$ и больше можно говорить только об описании с точностью до порядка. На рисунке 3.12 показана эволюция формы волны ES_0 . Здесь перемещения нормированы на величину $u_z(0, 0, 0)$ при $p = 9$ и на $u_z(-7\eta/8, 0, 0)$ в остальных случаях.

Рисунок 3.11 — Коэффициент демпфирования волны ES_0

3.5. Кромочные волны высшего порядка в тонкой оболочке

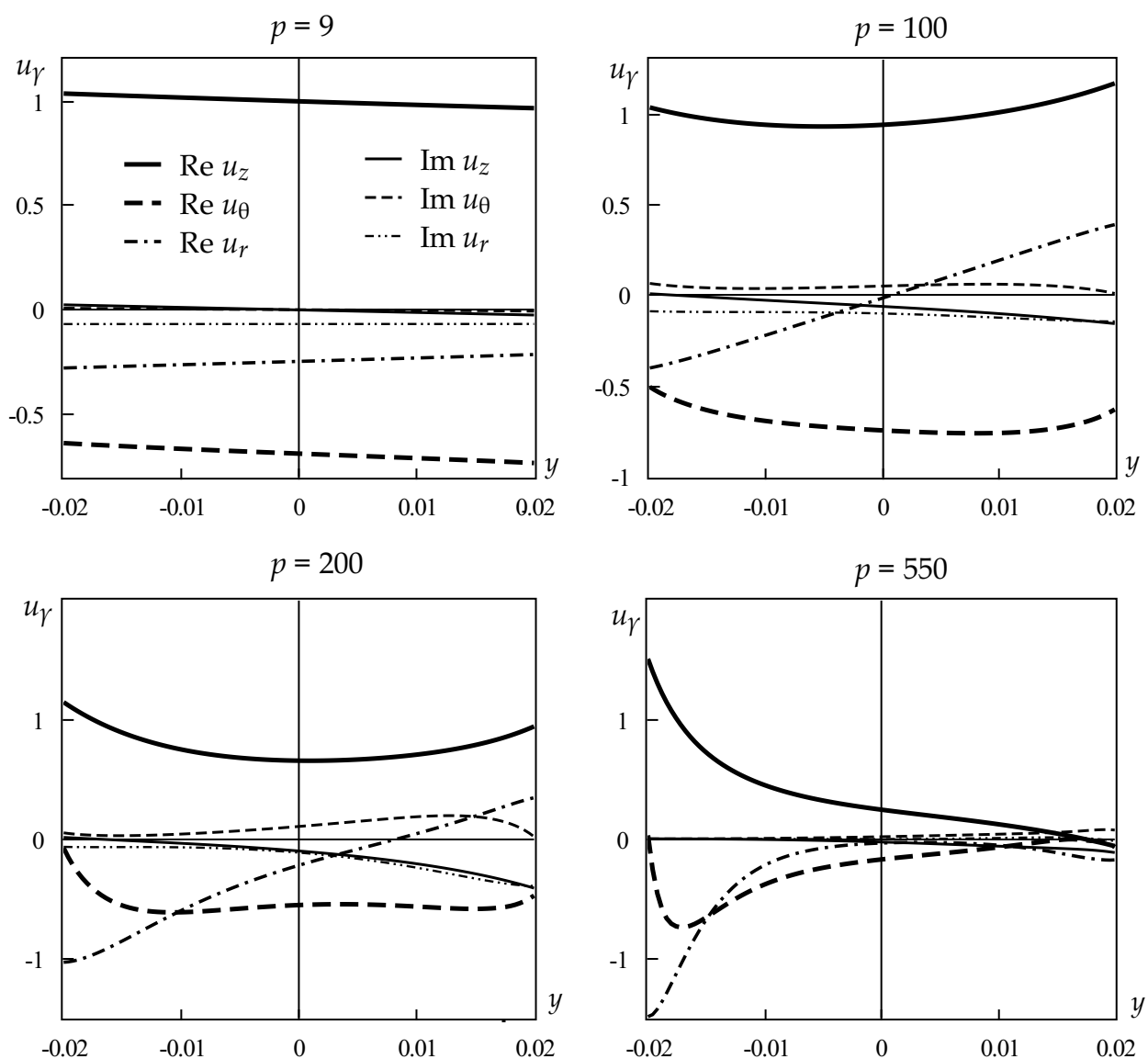
Асимптотическое и численное исследование кромочных волн в пластинах (глава 2) показало, что существование кромочных волн высшего порядка связано с существованием поверхностной волны, распространяющейся вдоль торцевой поверхности. В случае оболочки следует использовать поверхностную волну в цилиндрических координатах, рассмотренную в п. 3.2.

Получим асимптотики при $p \gg 1$ для кромочных волн высшего порядка в тонкой оболочке. Основываясь на соотношениях (3.37), введем большой параметр

$$\chi = \frac{\pi}{\eta} \gg 1 \quad (3.48)$$

и положим

$$p = \chi p_h, \quad \gamma_1 = \chi \gamma_{1,h}, \quad \omega = \chi \omega_h. \quad (3.49)$$

Рисунок 3.12 — Эволюция формы волны ES_0

Примем, что $p_h \sim 1$, $\gamma_{1,h} \sim 1$, $\omega_h \sim 1$ по отношению к параметру χ . Используя асимптотики функций Ганкеля [52]

$$H_p^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\mu}} e^{i(\mu - p \arcsin \frac{\mu}{x} - \frac{\pi}{4})}, \quad H_p^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\mu}} e^{-i(\mu - p \arcsin \frac{\mu}{x} - \frac{\pi}{4})}, \quad (3.50)$$

где $\mu = \sqrt{x^2 - p^2}$, запишем следующие асимптотические представления для потенциалов, описывающих расходящуюся (+) и сходящуюся (−) цилиндри-

ческие поверхностные волны:

$$\begin{aligned}
\varphi^\pm &= -\frac{k_3^2}{k_1} B_0 \frac{1}{\sqrt{r} \sqrt{\gamma(r)}} e^{-\chi k_1 z} \cos p\theta \exp \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right), \\
\psi_r^\pm &= \frac{p_h}{r} B_0 \frac{1}{\sqrt{r} \sqrt{\gamma(r)}} e^{-\chi k_2 z} \sin p\theta \exp \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right), \\
\psi_\theta^\pm &= \pm i \gamma(r) B_0 \frac{1}{\sqrt{r} \sqrt{\gamma(r)}} e^{-\chi k_2 z} \cos p\theta \exp \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right),
\end{aligned} \tag{3.51}$$

где $\gamma(r) = \sqrt{\gamma_{1,h}^2 - \frac{p_h^2}{r^2}}$, $k_1 = \sqrt{\gamma_{1,h}^2 - \kappa^2 \omega_h^2}$, $k_2 = \sqrt{\gamma_{1,h}^2 - \omega_h^2}$, $k_3^2 = \gamma_{1,h}^2 - \frac{\omega_h^2}{2}$.
Рассматривая сумму и разность расходящейся и сходящейся волн, получим “симметричную” и “антисимметричную” стоячие волны. Представим искомое решение в виде линейной комбинации этих волн:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{k_3^2}{k_1} \frac{1}{\sqrt{r} \sqrt{\gamma(r)}} e^{-\chi k_1 z} \cos p\theta \cdot \left[C_1 \cos \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right) - C_2 \sin \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right) \right], \\
\psi_r^\pm &= -\frac{p_h}{r} \frac{1}{\sqrt{r} \sqrt{\gamma(r)}} e^{-\chi k_2 z} \sin p\theta \cdot \left[C_1 \cos \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right) - C_2 \sin \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right) \right], \\
\psi_\theta^\pm &= \gamma(r) \frac{1}{\sqrt{r} \sqrt{\gamma(r)}} e^{-\chi k_2 z} \cos p\theta \cdot \left[C_1 \sin \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right) + C_2 \cos \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Подставляя (3.52) в (3.4), получим выражения для напряжений, входящих в

граничные условия на лицевых поверхностях. Сохраняя в них только асимптотически главные члены, будем иметь:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\chi^2}{\sqrt{r}\sqrt{\gamma(r)}} \left[\frac{k_3^2}{k_1} [(2\kappa^2 - 1)\omega_h^2 - 2\gamma^2(r)] e^{-\chi k_1 z} + 2k_2\gamma^2(r)e^{-\chi k_2 z} \right] \\
&\quad \cdot \left[C_1 \cos \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right) - C_2 \sin \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right) \right] \cos p\theta, \\
\sigma_{r\theta} &= \frac{\chi^2}{\sqrt{r}\sqrt{\gamma(r)}} \left[\frac{2k_3^2 p_h \gamma(r)}{k_1 r} e^{-\chi k_1 z} - \frac{2k_2 \gamma(r) p_h}{r} e^{-\chi k_2 z} \right] \\
&\quad \cdot \left[C_1 \sin \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right) + C_2 \cos \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right) \right] \sin p\theta, \\
\sigma_{rz} &= \frac{\chi^2 2k_3^2 \gamma(r)}{\sqrt{r}\sqrt{\gamma(r)}} [e^{-\chi k_1 z} - e^{-\chi k_2 z}] \\
&\quad \cdot \left[C_1 \sin \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right) + C_2 \cos \left(\chi \int_1^r \gamma(r) dr \right) \right] \cos p\theta.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Предположим дополнительно, что $p_h \gg \max_{r \in [1-\eta, 1+\eta]} \gamma(r)$. Анализ выражений (3.53) показывает, что при $\nu \neq 0$ асимптотически главным является напряжение σ_r . Удовлетворяя граничным условиям для него, приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
\left[C_1 \cos \left(\chi \int_1^{1+\eta} \gamma(r) dr \right) - C_2 \sin \left(\chi \int_1^{1+\eta} \gamma(r) dr \right) \right] &= 0, \\
\left[C_1 \cos \left(\chi \int_1^{1-\eta} \gamma(r) dr \right) - C_2 \sin \left(\chi \int_1^{1-\eta} \gamma(r) dr \right) \right] &= 0.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Условие равенства нулю определителя системы (3.54) можно записать в виде

$$\sin \left(\chi \int_{1-\eta}^{1+\eta} \gamma(r) dr \right) = 0. \tag{3.55}$$

Условие (3.55) дает следующее уравнение для собственных частот:

$$\int_{1-\eta}^{1+\eta} \sqrt{\frac{\omega^2}{c_R^2} - \frac{p^2}{r^2}} dr = m\pi, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.56)$$

В случае тонкой оболочки мы можем “заморозить” координату r на срединной поверхности и записать приближенное решение уравнения (3.56) в виде

$$\omega_m^{as} = c_R \sqrt{p^2 + \frac{m^2 \pi^2}{4\eta^2}}. \quad (3.57)$$

Формула (3.57) применима при $p \gg \frac{m\pi}{2\eta}$. С другой стороны, асимптотики (3.50) применимы при $\gamma_1 r > p$, $r \in [1 - \eta, 1 + \eta]$. Из этого условия получаем ограничение

$$p < \frac{m\pi}{2\sqrt{2}\eta^{3/2}}. \quad (3.58)$$

Нечетным значениям m ($m = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$) соответствуют приближенно симметричные формы ($C_2 = 0$), четным значениям ($m = 2n$, $n = 1, 2, \dots$) — приближенно антисимметричные ($C_1 = 0$). Выражения для этих форм нетрудно получить, подставляя (3.52) в (3.3), (3.4) и оставляя только старшие члены.

Применяя перенормировку (3.37), получаем

$$\omega_{h,n}^{as} = \begin{cases} c_R \sqrt{p_h^2 + (n + \frac{1}{2})^2} & \text{для симметричных волн,} \\ c_R \sqrt{p_h^2 + n^2} & \text{для антисимметричных волн.} \end{cases} \quad (3.59)$$

Эти формулы совпадают с асимптотиками для пластин (см. [27] и п.2.2.1).

Однако в случае оболочки они не являются асимптотиками при $p \rightarrow \infty$ в силу ограничения (3.58). Чтобы изучить поведение краевых волн при $p > \frac{m\pi}{2\sqrt{2}\eta^{3/2}}$, нужно учесть наличие точки поворота. Для тонкой оболочки этот случай соответствует очень большим значениям p , поэтому мы не будем на нем останавливаться.

Для случая $p \sim \frac{m\pi}{2\eta}$ и меньших значений p можно построить приближенную краевую задачу, основываясь на идеях монографии [82] (см. также [84]). Формулы (3.49) показывают, что в интересующем нас случае $\frac{\partial f}{\partial r} \sim \eta^{-1}f$, $\frac{\partial f}{\partial \theta} \sim \eta^{-1}f$, $\frac{\partial f}{\partial z} \sim \eta^{-1}f$, где f – любая характеристика НДС. Таким образом, мы имеем случай коротковолновых высокочастотных колебаний. Оставляя в уравнениях (3.6) и выражениях (3.3), (3.4) асимптотически главные члены и “замораживая” переменные коэффициенты на срединной поверхности, получим асимптотическую модель типа полубесконечной пластины, состоящую из уравнений

$$\Delta\varphi + \kappa^2\omega^2\varphi = 0, \quad \Delta\psi + \omega^2\psi = 0, \quad (3.60)$$

$$u = \text{grad}\varphi + \text{rot}\psi, \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\omega^2\varphi + 2 \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r\partial\theta} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r\partial z} \right), \\ \sigma_\theta &= -(1 - 2\kappa^2)\omega^2\varphi + 2 \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta\partial z} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r\partial\theta} \right), \\ \sigma_z &= -(1 - 2\kappa^2)\omega^2\varphi + 2 \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r\partial z} - \frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta\partial z} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta} + \frac{\partial^2\psi_r}{\partial r\partial z} + \frac{\partial^2\psi_z}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2} - \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta\partial z}, \\ \sigma_{rz} &= 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} - \frac{\partial^2\psi_r}{\partial r\partial\theta} - \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi_z}{\partial\theta\partial z}, \\ \sigma_{\theta z} &= 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\partial z} - \frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r\partial z} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r\partial\theta}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial r}i + \frac{\partial}{\partial\theta}j + \frac{\partial}{\partial z}k,$$

$$\text{rot}\psi = \nabla \times \psi,$$

и граничных условий

$$\sigma_r = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad r = 1 \pm \eta, \quad (3.63)$$

$$\sigma_z = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (3.64)$$

Уравнения (3.60) совпадают с уравнениями для пластины в метрике срединной поверхности оболочки. Выражения (3.61), (3.62) также совпадают с аналогичными выражениями для пластин. Таким образом, в первом приближении для описания кромочных волн высшего порядка в оболочке можно использовать результаты, полученные для аналогичных волн в пластинах. В частности, можно записать приближенные формулы в переходной области:

$$\omega_n^{(1)} = \begin{cases} c_R \sqrt{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{\eta^2}} & \text{для симметричных волн,} \\ c_R \sqrt{p^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{\eta^2}} & \text{для антисимметричных волн.} \end{cases} \quad (3.65)$$

Подставляя потенциалы (3.52) в выражения для перемещений и напряжений и полагая в полученных выражениях $\omega = \omega_n^{(1)}$, получим приближенные формы колебаний для каждой из волн высшего порядка.

Для подтверждения полученных выше приближенных формул были проведены численные расчеты по методике, описанной в п.3.3. Результаты расчетов, полученные при $\eta = 0.02$, представлены на рисунках 3.13–3.17. Также, как и в случае пластины, при определенных значениях волнового числа появляются дополнительные волны, которые мы обозначим $EA_{0.5}$ и $ES_{0.5}$. При исследовании антисимметричных волн прикладывалась нагрузка

$$T_g(r) = \sin \left(\alpha_T \frac{(r-1)\pi}{\eta} \right), \quad (3.66)$$

где для волн EA_k ($k = 1, 2$) $\alpha_T = k + 0.5$, для волны $EA_{0.5}$ $\alpha_T = 0.5$. Для симметричных волн было принято

$$T_g(r) = \cos \left(\alpha_T \frac{(r-1)\pi}{\eta} \right), \quad (3.67)$$

где $\alpha_T = k$ для волн ES_k ($k = 1, 2$), для волны $ES_{0.5}$ $\alpha_T = 0.5$. На рисунке 3.13 представлены дисперсионные кривые кромочных волн высшего

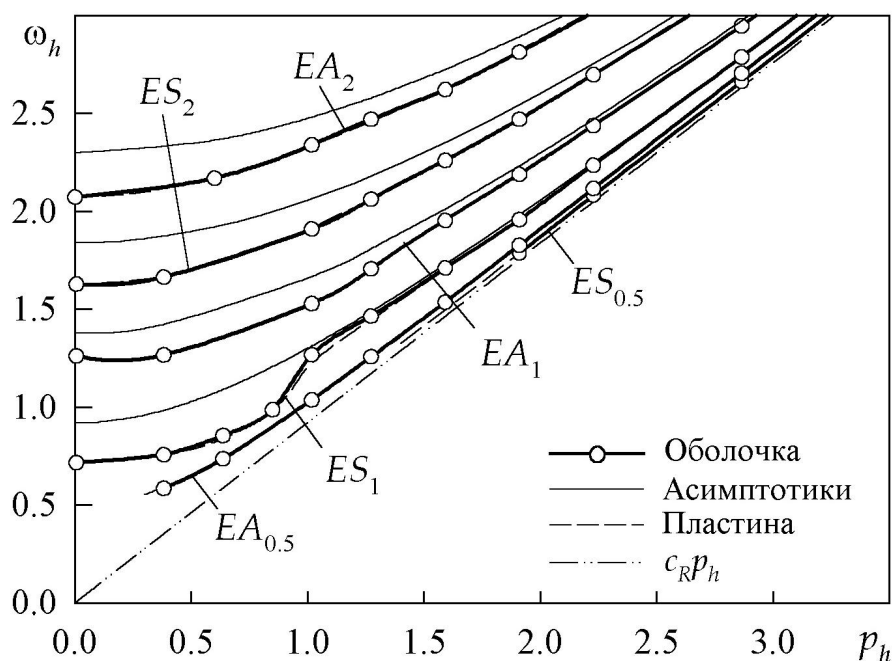


Рисунок 3.13 — Дисперсионные кривые краевых волн высшего порядка в оболочке и в пластине

порядка в тонкой оболочке (здесь и далее в данном параграфе все численные результаты получены при $\eta = 0.02$). Для сравнения здесь приведены также дисперсионные кривые для пластин и асимптотики в переходной области (3.65). В масштабе рисунка 3.13 дисперсионные кривые для оболочки и пластины практически совпадают, что подтверждает применимость модели типа полубесконечной пластины по крайней мере при $\eta \leq 0.02$. Проведенный выше анализ показывает, что предложенная модель будет применима в пределах, ограниченных неравенством (3.58). Это означает, что переход на асимптотику в бесконечности, характерный для пластин (см. рисунки 2.3 и 2.5), будет иметь место и в оболочке.

На рисунке 3.14 представлены формы колебаний для волн $EA_{0.5}$ и ES_1 при $p = 160$. Волна $ES_{0.5}$ при таком значении волнового числа еще не существует. Как видно из рисунка, законы изменения формы колебаний по тол-

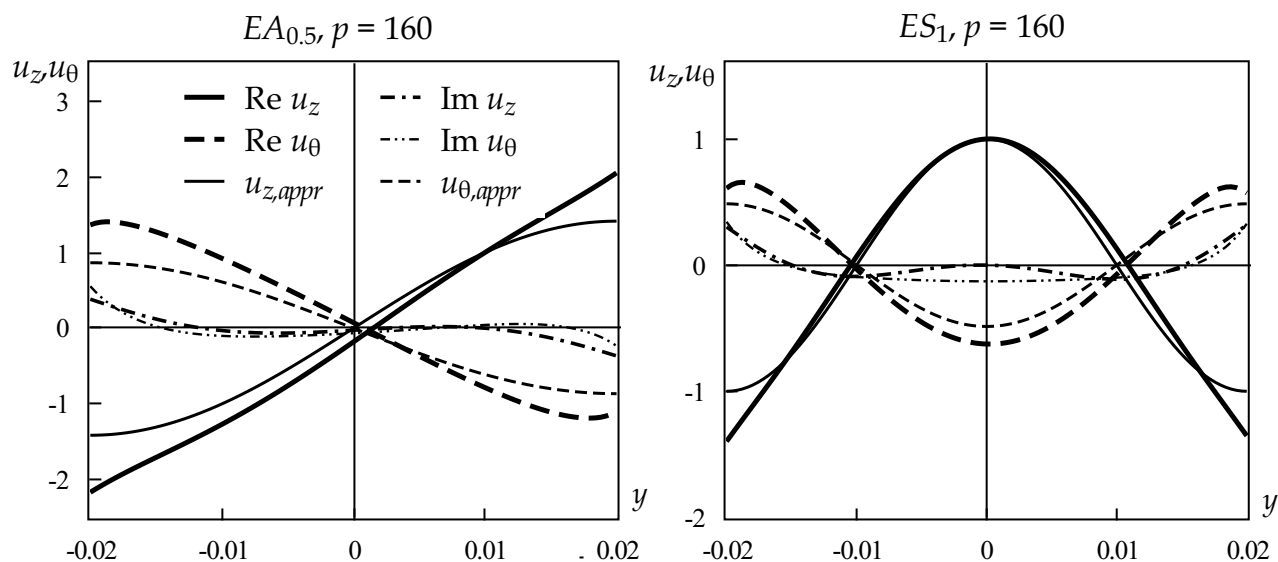


Рисунок 3.14 — Формы краевых волн высшего порядка в оболочке

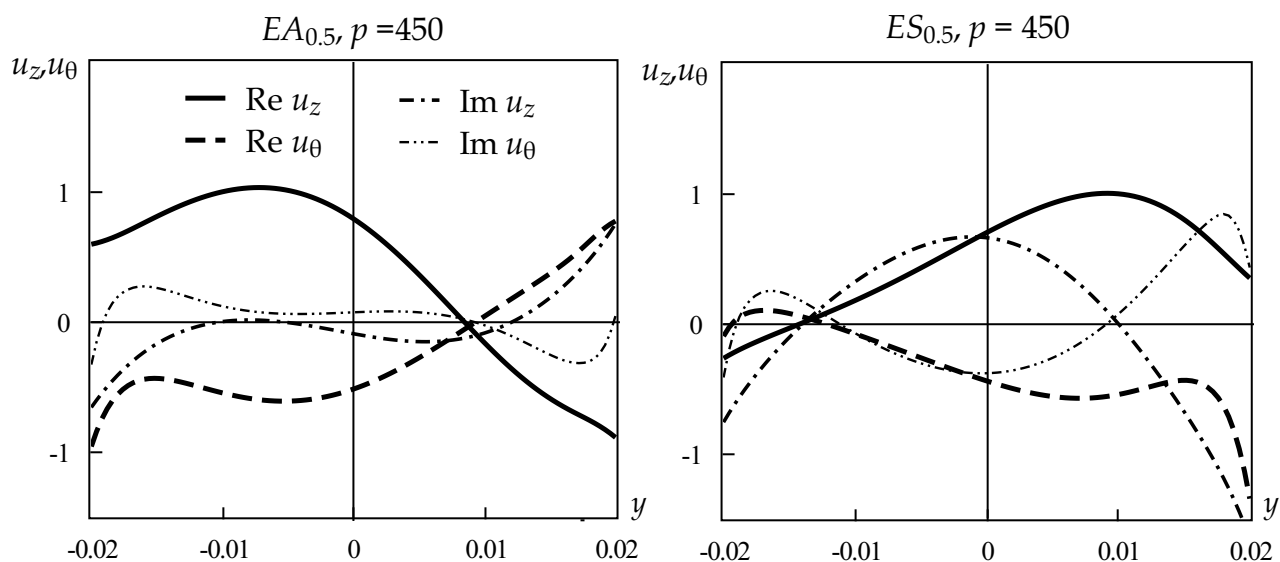


Рисунок 3.15 — Формы колебаний в области сближения дисперсионных кривых “симметричных” и “антисимметричных” краевых волн

щине весьма мало отклоняются от антисимметричного и симметричного, соответственно, и достаточно хорошо описываются аппроксимацией, полученной на основе модели типа полубесконечной пластины. На рисунке 3.15 представлены аналогичные графики для случая, когда уже появилась волна $ES_{0.5}$. Частоты колебаний в волнах $EA_{0.5}$ и $ES_{0.5}$ сближаются (см. рисунок 3.13), вследствие чего возникает взаимодействие симметричных и антисимметрич-

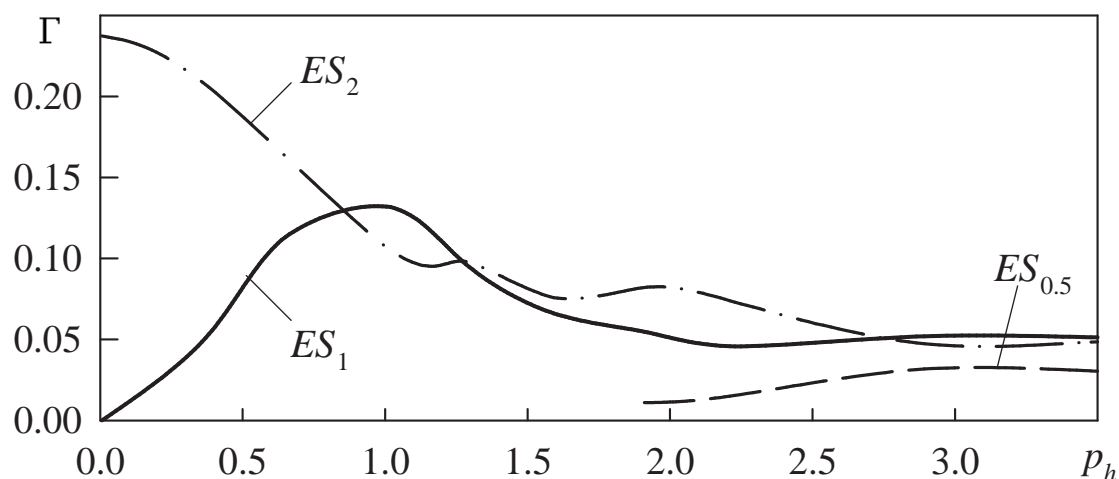


Рисунок 3.16 — Ширина резонансов “симметричных” кромочных волн высшего порядка в оболочке

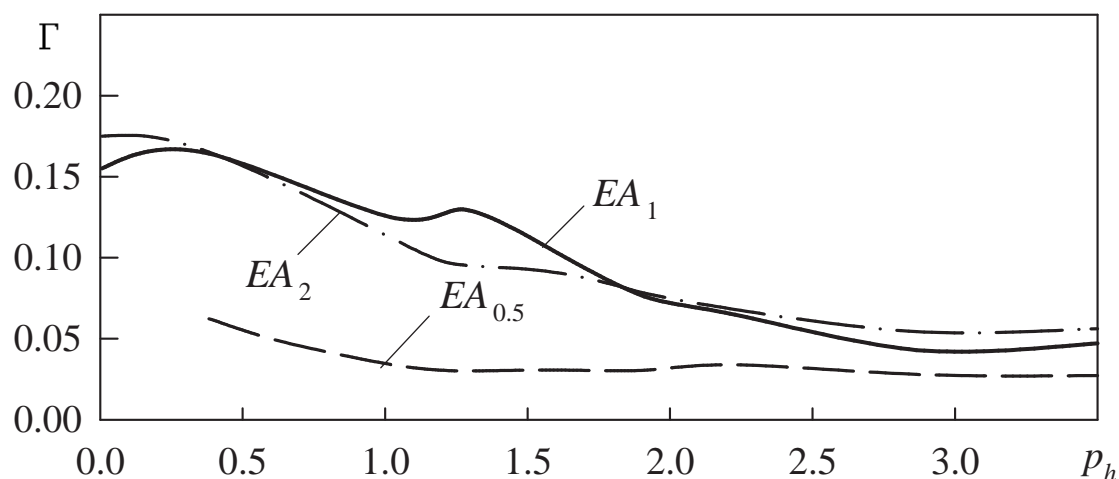


Рисунок 3.17 — Ширина резонансов “антисимметричных” кромочных волн высшего порядка в оболочке

ных волновых движений (в пластине такое взаимодействие отсутствует, так как в них волновые движения в точности распадаются на симметричные и антисимметричные). Как видно из рисунка 3.15, в области сближения дисперсионных кривых формы колебаний для волн $EA_{0.5}$ и $ES_{0.5}$ являются существенно асимметричными. Таким образом, в областях сближения диспер-

сионных кривых “симметричных” и “антисимметричных” кромочных волн модель типа полубесконечной пластины неприменима, если требуется определить не только частоты, но и формы колебаний. На рисунках 3.16 и 3.17 показана ширина резонансов “симметричных и “антисимметричных” волн, соответственно. Сравнение данных этих графиков с рисунками 2.2 и 2.4 для пластин показывает, что коэффициенты демпфирования кромочных волн в оболочке имеют тот же порядок, что и в пластине, за исключением волны $ES_{0.5}$ при $p_h > 3$. Последнее также связано, по-видимому, с взаимодействием симметричных и антисимметричных волновых движений в оболочке.

3.6. Фундаментальные кромочные волны в цилиндрической оболочке со смешанными граничными условиями на торце

Кроме существования волн, упомянутых ранее, в работе [83] (см. также [27]) на основе теории Кирхгофа–Лява установлено существование кромочных волн в оболочке со смешанными граничными условиями на торце. Методика исследования трехмерных кромочных волн в оболочке, представленная в данной главе, позволяет подтвердить эти результаты на основе трехмерной теории упругости. Рассмотрим два типа граничных условий: для случая изгибной волны принимается, что на торце оболочки допускается смещение в нормальном к срединной поверхности направлении и поворот нормального элемента, но перемещения в тангенциальных направлениях запрещены; для случая тангенциальной волны на торце допускаются перемещения в касательных к срединной поверхности направлениях, но запрещается перемещение в нормальном направлении. Поскольку постановка граничных условий указанного типа при нелинейном законе распределения НДС по толщинной коор-

динате требует дополнительного исследования, ограничимся расчетами для фундаментальных волн в области $p_h < 1$. При исследовании изгибной волны следует заменить граничные условия при $z = 0$ (3.9) и (3.10) на

$$\begin{aligned}
\sigma_z(1+y, \theta, 0) - \sigma_z(1-y, \theta, 0) &= 0, \\
\sigma_{\theta z}(1+y, \theta, 0) - \sigma_{\theta z}(1-y, \theta, 0) &= 0, \\
u_z(1+y, \theta, 0) + u_z(1-y, \theta, 0) &= 0, \\
u_\theta(1+y, \theta, 0) + u_\theta(1-y, \theta, 0) &= 0, \\
\sigma_{rz} &= 0
\end{aligned} \tag{3.68}$$

и

$$\begin{aligned}
\sigma_z(1+y, \theta, 0) - \sigma_z(1-y, \theta, 0) &= 2T_g(1+y) \cos p\theta, \\
\sigma_{\theta z}(1+y, \theta, 0) - \sigma_{\theta z}(1-y, \theta, 0) &= 0, \\
u_z(1+y, \theta, 0) + u_z(1-y, \theta, 0) &= 0, \\
u_\theta(1+y, \theta, 0) + u_\theta(1-y, \theta, 0) &= 0, \\
\sigma_{rz} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.69}$$

соответственно (здесь $y \in [-\eta, \eta]$). Для тангенциальной волны вместо условий (3.9) и (3.10) поставим условия

$$\sigma_z = 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0, \quad u_r = 0 \tag{3.70}$$

и

$$\sigma_z = T_g(r) \cos p\theta, \quad \sigma_{\theta z} = 0, \quad u_r = 0, \tag{3.71}$$

соответственно. Остальные граничные условия и метод решения остаются прежними. На рисунках 3.18, 3.19 приведены результаты для изгибной кромочной волны при $\nu = 0.3$. Данные, представленные на рисунке 3.18, получены при $\eta = 0.01$, на рисунке 3.19 — при $\eta = 0.02$.

В работе [83] (см. также [27]) показано, что при $p \ll \eta^{-\frac{1}{2}}$ изгибная кромочная волна переходит в сверхнизкочастотную кромочную волну, обладающую иными асимптотическими свойствами. В отличие от изгибной волны,

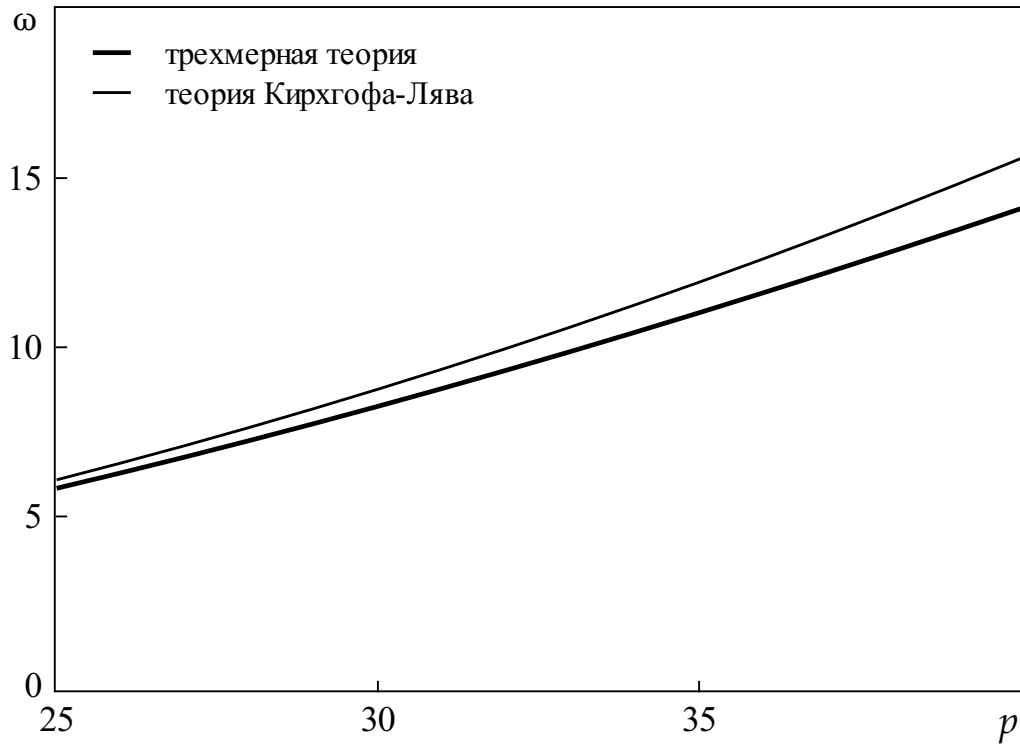


Рисунок 3.18 — Дисперсионная кривая для изгибной кромочной волны при $\eta = 0.01$

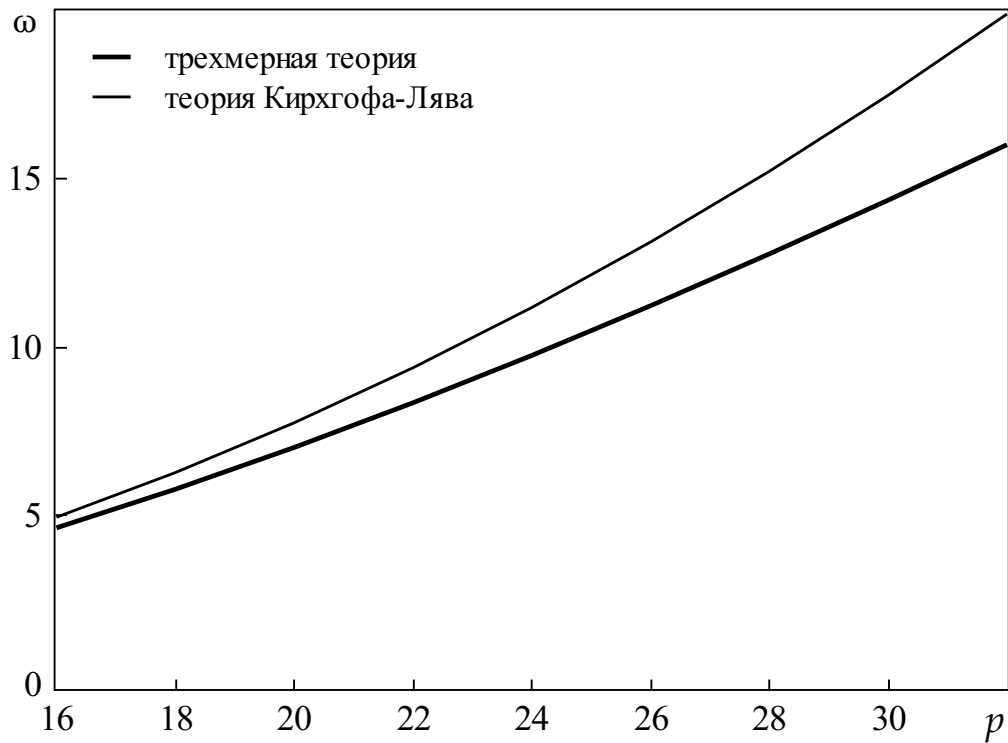


Рисунок 3.19 — То же, что рисунок 3.18, для $\eta = 0.02$

сверхнизкочастотная волна в случае граничных условий (3.68) не существует, поэтому фундаментальная кромочная волна при данных граничных условиях появляется только при $p \sim \eta^{-\frac{1}{2}}$. Этот вывод, сделанный в рамках теории Кирхгофа–Лява, подтверждается расчетами по трехмерной теории как для тонкой оболочки ($\eta = 0.01$, рисунок 3.18), так и для оболочки средней толщины ($\eta = 0.02$, рисунок 3.19). Рисунки 3.18, 3.19 показывают, что в своей области применимости теория Кирхгофа–Лява дает хорошее приближение дисперсионной кривой трехмерной кромочной волны. С ростом толщины и числа волн по окружной координате погрешность теории Кирхгофа–Лява быстро растет, что характерно всех типов изгибных колебаний оболочек.

На рисунках 3.20–3.22 представлены результаты исследования тангенциальной кромочной волны для $\eta = 0.02$ и $\nu = 0.3$. Фазовые скорости, рассчитанные по формуле (3.14), приведены на рисунке 3.20. Величина ω_0 при этом определялась как резонансная частота, на которой достигается максимум величины $|u_z(0, 0, 0)|$. На рисунке 3.21 показаны соответствующие мнимые части частоты, описывающие малое демпфирование кромочной волны изгибной распространяющейся модой. Мнимая часть частоты определялась по ширине резонансного пика для величины $|u_z(0, 0, 0)|$.

Как видно из рисунков 3.20, 3.21, в области $p < 15$, соответствующей для данного значения толщины области $p_h < 0.1$ (см. рисунок 3.2), теория Кирхгофа–Лява достаточно точно описывает как фазовую скорость исследуемой волны, так и мнимую поправку. При $p > 15$ начинаются расхождения, при этом, в отличие от случая условий свободного края (ср. рисунок 3.10), фазовая скорость по трехмерной теории оказывается больше, чем та же скорость, предсказанная теорией Кирхгофа–Лява. Мнимая поправка, характеризующая демпфирование, убывает до некоторого минимального значения, а потом начинает расти. Заметим, что теория Кирхгофа–Лява также описывает это явление, хотя и весьма неверно с количественной точки зрения.

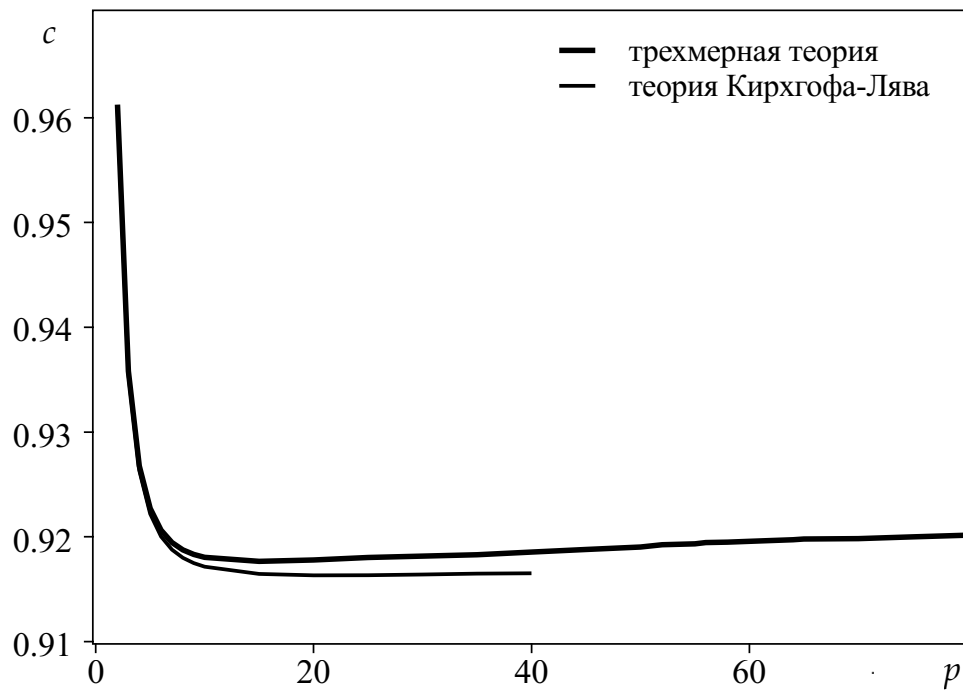


Рисунок 3.20 — Фазовая скорость тангенциальной кромочной волны в случае смешанных граничных условий на торце

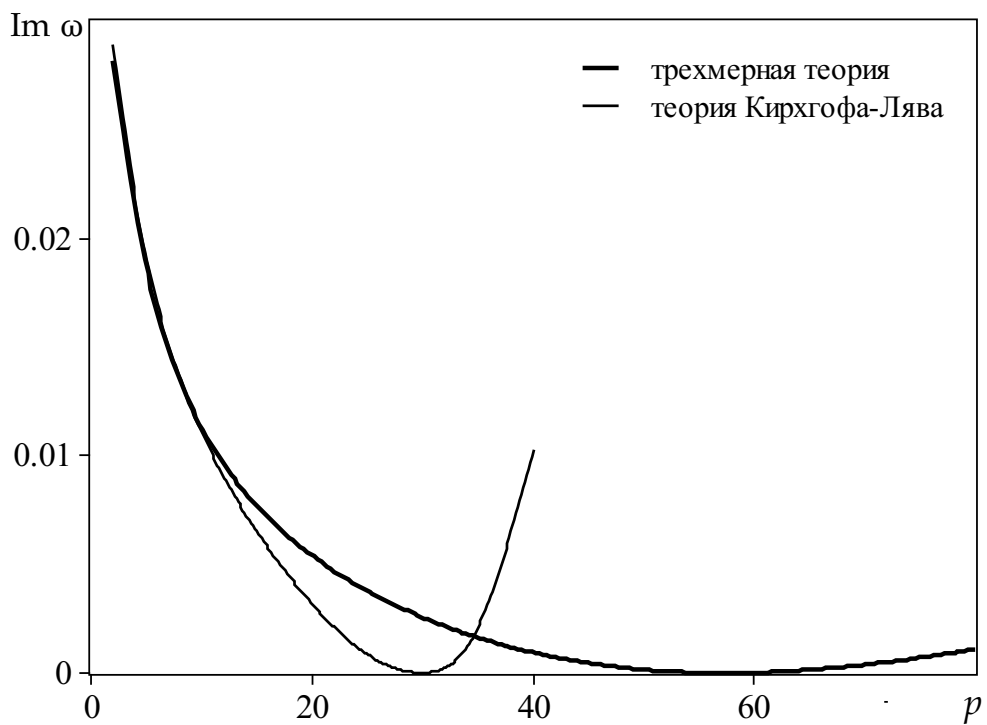


Рисунок 3.21 — Демпфирование тангенциальной кромочной волны в случае смешанных граничных условий на торце

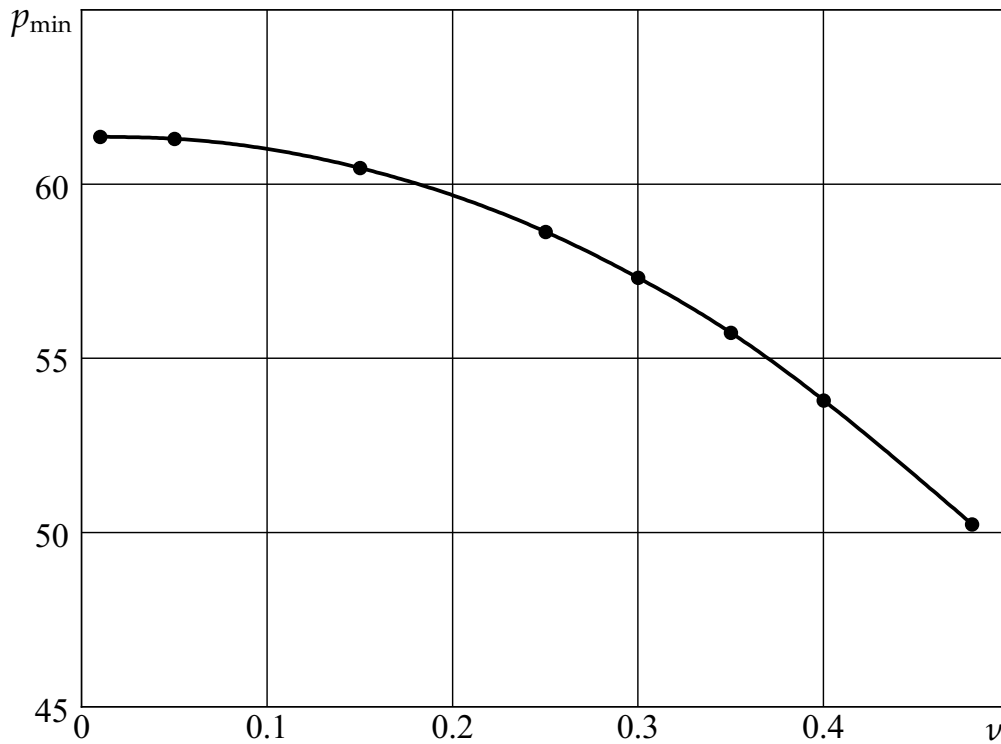


Рисунок 3.22 — Зависимость положения точки минимального демпфирования от коэффициента Пуассона

На рисунке 3.22 представлен график зависимости от коэффициента Пуассона значений волнового числа p_{\min} , найденных по данным расчета при целочисленных p с помощью параболической аппроксимации. Значение мнимой поправки в точке минимума становится настолько малым, что в пределах вычислительной погрешности его можно считать равным нулю. Этот факт имеет большое практическое значение, поскольку он означает значительный рост амплитуды колебаний при резонансе, связанном с данной волной. Представляет интерес исследование возможности определения положения точки минимума с помощью уточненных теорий оболочек высокого порядка точности, например, с помощью теории, предложенной в [136].

В заключение отметим, что выводы из исследования, проведенного в данном параграфе, относятся только к тонкостенному цилиндру. Случай толстостенного цилиндра требует дополнительного исследования.

3.7. Результаты и выводы

Исследование трехмерных кромочных волн в тонкой оболочке, выполненное в данной главе, выявило следующее:

- В оболочке с условиями свободного края на торце существуют две фундаментальные волны EA_0 и ES_0 , первая из которых в низкочастотной области характеризуется приближенно антисимметричным законом распределения НДС по толщине, а вторая — приближенно симметричным. В области применимости теории оболочек Кирхгофа–Лява обе фундаментальные волны описываются данной приближенной теорией, при этом волна EA_0 соответствует изгибной волне, переходящей на низких частотах в сверхнизкочастотную, а волна ES_0 — тангенциальной волне.
- При стремлении волнового числа к бесконечности скорости волны EA_0 и ES_0 стремятся к скоростям угловых волн, локализованной у наружной и внутренней угловых окружностей, соответственно.
- Демпфирование волны EA_0 распространяющимися модами отсутствует во всем диапазоне изменения волнового числа. Волна ES_0 демпфируется распространяющейся модой. Параметр, характеризующий демпфирование, при увеличении волнового числа возрастает до некоторого конечного значения, значительно превосходящего значения этого параметра в области применимости теории оболочек Кирхгофа–Лява. При дальнейшем росте волнового числа возрастание сменяется убыванием. Теория Кирхгофа–Лява удовлетворительно описывает параметр демпфирования только для весьма тонких оболочек.
- Кроме фундаментальных волн, в тонкой оболочке существует бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка, не описываемых двумерными теориями оболочек. Эти волны разделяются на две серии EA_k и ES_k ($k = 1, 2, \dots$), аналогичные кромочным волнам при ан-

тисимметричных и симметричных относительно срединной поверхности колебаниях пластин, соответственно. При некотором значении волнового числа, отличном от нуля, появляется дополнительная волна $EA_{0.5}$, при некотором другом, большем — дополнительная волна $ES_{0.5}$.

- Асимптотический анализ при больших значениях волнового числа показал, что существование кромочных волн высшего порядка связано с существованием цилиндрической поверхностной волны в полупространстве со свободной поверхностью. Для приближенного описания кромочных волн в области, где полученные асимптотики еще не могут быть применены, предложена модель типа полубесконечной пластины, формально совпадающая с краевой задачей для пластин в метрике срединной поверхности оболочки. Возможность упрощения уравнений для оболочки обосновывается тем, что кромочные волны высшего порядка можно отнести к классу коротковолновых высокочастотных колебаний.
- Отличие кромочных волн высшего порядка в оболочках от аналогичных волн в пластинах проявляется в областях сближения дисперсионных кривых симметричных и антисимметричных волн, в которых формы колебаний волн обоих типов становятся существенно асимметричными. При весьма больших значениях волнового числа при изучении кромочных волн в оболочке следует принять во внимание наличие точки поворота, что также делает невозможным замену оболочки пластиной.
- Кромочные волны в оболочках могут существовать также в случаях, когда на торце которых ставятся смешанные граничные условия определенных типов. Решение соответствующей задачи по трехмерной теории упругости подтвердило факт существования данных волн, установленный ранее только на основе теории оболочек. Показано, что в случае смешанных граничных условий на торце теория оболочек описывает с

удовлетворительной точностью как фазовые скорости фундаментальных кромочных волн, так и мнимую поправку, характеризующую демпфирование тангенциальной кромочной волны изгибной распространяющейся модой.

Отметим также, что, хотя все выводы данной главы относятся к случаю тонкой оболочки, мы можем сделать некоторые заключения о свойствах трехмерных кромочных волн в толстостенном полом цилиндра:

- дисперсионная кривая волны, переходящей на коротких волнах в волну, локализованную у внутренней угловой окружности, будет не сплошной, а состоящей из отдельных участков дисперсионных кривых волн высшего порядка;
- разделение на приближенно симметричные и приближенно антисимметричные волны будет выражено гораздо слабее, или будет отсутствовать вообще;
- формы волн высшего порядка будут характеризоваться наличием точки поворота.

Численно-аналитический метод решения краевой задачи для полубесконечного полого цилиндра, основанный на разложении по модам, проявил себя как весьма эффективный при исследовании трехмерных кромочных волн. Использование специальной фундаментальной системы решений уравнений Бесселя позволило обойти вычислительные трудности, возникающие при построении мод полого цилиндра с большим волновым числом по окружной координате. Использование простых приближенных формул, полученных в результате асимптотического анализа, значительно ускорило процесс поиска частот при выполнении численного исследования, что говорит о возможности их применения в практике инженерно-технических расчетов для тел более сложной геометрической формы или с более сложными упругими свойствами материала в сочетании с различными численными методами.

Заключение

Обобщая все сказанное выше, сформулируем кратко основные результаты и выводы данной работы:

1. В пластинах со свободным торцом существует бесконечное счетное множество антисимметричных кромочных волн высшего порядка как в случае свободных, так и в случае жестко заземленных лицевых поверхностей. Коротковолновым пределом фазовых скоростей данных волн является скорость волны Рэлея.
2. Установлено существование бесконечных спектров кромочных волн высшего порядка в пластинах со смешанными граничными условиями на торце и двух случаев закрепления лицевых поверхностей (свободные и жестко заземленные поверхности). В зависимости вида граничных условий на торце предельной скоростью является либо скорость волны Рэлея, либо скорость волны сдвига.
3. Обнаружена и исследована фундаментальная волна, существующая в случае симметричных колебаний пластины со свободными лицевыми поверхностями, на торце которой запрещено перемещение в направлении, перпендикулярном лицевым поверхностям.
4. Предложена методика асимптотического исследования трехмерных кромочных волн в полубесконечном полом цилиндре, а также методика численного исследования этих волн, основанная на методе разложения по модам и использовании специальной фундаментальной системы решений дифференциального уравнения Бесселя.
5. Установлена связь фундаментальных трехмерных кромочных волн с кромочными волнами в теории оболочек Кирхгофа–Лява. На коротких волнах продолжение изгибной волны локализуется у наружной угловой

окружности, а тангенциальной волны — у внутренней угловой окружности. Система кромочных волн высшего порядка в тонкой оболочке в основных чертах аналогична случаю пластины.

6. Показано, что кромочные волны в оболочке со смешанными граничными условиями на торце, исследованные ранее только в рамках теории Кирхгофа–Лява, существуют также с точки зрения трехмерной теории упругости при точном удовлетворении всем граничным условиям.

На практике полученные результаты могут служить ориентиром при расчете волновых процессов в пластинах и оболочках из материалов с более сложными свойствами (анизотропных, слоистых, вязкоупругих и т.д.). В качестве практической рекомендации можно отметить также, что использование трехмерной теории упругости в области применимости теории оболочек Кирхгофа–Лява приводит к весьма значительному увеличению объема вычислений без существенного изменения результатов, другими словами, применение трехмерной теории в данной области нерационально. В связи с этим остается актуальным развитие аналитических и численных методов решения задач теории Кирхгофа–Лява и построение приближенных двумерных теорий с расширенной областью применимости.

Направления дальнейшего теоретического развития темы диссертации могут быть связаны с более подробным исследованием некоторых локальных эффектов, обнаруженных в данной работе (“удвоение” кромочных волн в пластинах с жестко заземленными лицевыми поверхностями, точка минимального демпфирования тангенциальной фундаментальной волны в оболочке со смешанными условиями на торце, случаи наличия точки поворота в формах колебаний кромочных волн высшего порядка в оболочках). Несомненный интерес представляет исследование волн, локализованных у торца полубесконечного толстостенного полого цилиндра.

Список литературы

1. Амбарцумян, С. А. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки / С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян // Прикл. механика. — 1994. — Т.30, № 2. — С. 61–68.
2. Амензаде, Ю. А. Теория упругости / Ю. А. Амензаде. — М.: Высшая школа, 1976. — 272 с.
3. Ардазишвили, Р. В. Кромочные волны высшего порядка в пластинах при смешанных граничных условиях на торце / Р. В. Ардазишвили // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тез. докл. IX Всероссийской школы-семинара, пос. Дивноморское, 26–30 мая 2014 г. — Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2014. — С. 12.
4. Ардазишвили, Р. В. Влияние способа закрепления лицевых поверхностей на демпфирование антисимметричных кромочных волн высшего порядка в пластинах / Р. В. Ардазишвили // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20–24 августа 2015 г. : сборник трудов. — Казань: Изд-во Казанского (Приволжского) федерального ун-та, 2015. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) — С. 199–201.
5. Ардазишвили, Р. В. Кромочные волны в пластинах в случае смешанных граничных условий на торце / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде // Теории оболочек и пластин в механике и биологии: от микро- до наноразмерных структур = Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology: from Macro- to Nanoscale Structures : материалы междунар. науч. конф., Минск, Беларусь, 16–20 августа 2013 г. / под общей ред. Г. И. Михасева, Х. Альтенбаха. — Минск: Изд. центр БГУ, 2013. — С. 62–64.
6. Ардазишвили, Р. В. Кромочные волны высшего порядка в пластинах

- с жёстко закреплёнными лицевыми поверхностями при смешанных граничных условиях на торце / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 16–21 июня 2014 г.) : в 2 ч. Ч.1 / под ред. Н. Ф. Морозова, Б. Г. Миронова, А. В. Манжирова. — Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. — С. 21–24.
7. Ардазишвили, Р. В. Кромочные волны высшего порядка в полубесконечном полом цилиндре со свободным торцом / М. В. Вильде, Р. В. Ардазишвили // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тез. докл. X Всероссийской школы-семинара, пос. Дивноморское, 25–30 мая 2015 г. — Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2015. — С. 22.
 8. Ардазишвили, Р. В. Кромочные волны в цилиндрической оболочке со смешанными граничными условиями на торце: теория оболочек и трехмерная теория упругости / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде // Материалы Всероссийской научной школы-конференции “Механика предельного состояния и смежные вопросы”, посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева (Чебоксары, 15–18 сентября 2015 г.) : в 2 ч. Ч.1. / под ред. Н. Ф. Морозова, Б. Г. Миронова, А. В. Манжирова, Ю. Н. Радаева. — Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2015. — С. 82–86.
 9. Ардазишвили, Р. В. Трехмерная краевая фундаментальная тангенциальная волна в тонкой оболочке в случае смешанных граничных условий на торце / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник материалов Всероссийской научной конференции, Москва, 15-17 декабря 2015 г. — М.: ИПРИМ РАН, 2015. — С. 26–28.
 10. Ардазишвили, Р. В. Антисимметричные кромочные волны высшего порядка в пластинах / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович

- // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, вып. 1, ч. 1. — С. 50–56.
11. Ардазишвили, Р. В. Кромочные волны в пластинах / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович // Труды XVII Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды” (Ростов-на-Дону, 14-17 сентября 2014 г.) в 2 т. — Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2014. — Т.1. — С. 49–53.
 12. Ардазишвили, Р. В. Трехмерная поверхностная волна в полупространстве и кромочные волны в пластинах в случае смешанных граничных условий на поверхности распространения / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2014. — Т. 37, № 4. — С. 53–64. (doi: 10.14498/vsgtu1360)
 13. Ардазишвили, Р. В. Кромочные волны в пластинах с жёстко закреплёнными лицевыми поверхностями при различных способах закрепления на торце / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, вып. 2. — С. 187–193.
 14. Ардазишвили, Р. В. Трехмерные фундаментальные кромочные волны в тонкой оболочке / Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2015. — № 4(26). — С. 109–124.
 15. Багдасарян, Р. А. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке / Р. А. Багдасарян, М. В. Белубекян, К. Б. Казарян // В сб. "Волновые задачи механики". Под ред. А. И. Веснинского и В. И. Ерофеева. — Нижний Новгород, 1992. — С. 87–93.
 16. Белубекян, В. М. К задаче о поверхностных упругих волнах в толстой плите / В. М. Белубекян // Изв. НАН Армении. — 1995. — Т.48, № 1. — С. 9–15.

17. Белубекян, В. М. Трехмерная задача распространения поверхностных волн Рэлея / В. М. Белубекян, М. В. Белубекян // Докл. НАН Армении. — 2005. — Т.105, № 4. — С. 362–368.
18. Белубекян, В. М. Пространственная задача распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной упругой среде / В. М. Белубекян, Д. Э. Мгерян // Изв. НАН Армении. Механика. — 2006. — Т.59, № 2. — С. 3–9.
19. Белубекян, М. В. Поверхностные волны в упругих средах / М. В. Белубекян // В сб. "Проблемы механики деформируемого твердого тела". — Институт механики НАН Армении, Ереван, 1997. — С. 79–96.
20. Белубекян, М. В. Волны типа Рэлея в полубесконечной круговой замкнутой цилиндрической оболочке / М. В. Белубекян, Г. Р. Гулгазарян, А. В. Саакян // Изв. НАН Армении. Механика. — 1997. — Т.50, № 3-4. — С. 49–55.
21. Бобровницкий, Ю. И. Соотношение ортогональности для волн Лэмба / Ю. И. Бобровницкий // Акуст. журн. — 1972. — Т.17, № 4. — С. 513–515.
22. Викторов, И. А. Волны типа Рэлея на цилиндрических поверхностях / И. А. Викторов // Акуст. журн. — 1958. — Т.4, № 2. — С. 131–136.
23. Викторов, И. А. Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах (обзор) / И. А. Викторов // Акуст. журн. — 1979. — Т.25, № 1. — С. 1–17.
24. Вильде, М. В. Изгибный краевой резонанс в тонкой упругой пластине / М. В. Вильде // Вестник ННГУ. Серия Механика. — 2004. — Вып. 1(6). — С. 43–56.
25. Вильде, М. В. Резонансы волны Рэлея в полуполосе / М. В. Вильде // Проблемы прочности и пластичности. — Изд-во ННГУ, 2004. — Вып. 66. — С. 29–38.
26. Вильде, М. В. Кромочные волны высшего порядка в толстой пластине / М. В. Вильде // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Ло-

- бачевского. — 2011. — №4. Часть 5. — С. 2059–2061.
27. Вильде, М. В. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах / М. В. Вильде, Ю. Д. Каплунов, Л. Ю. Коссович. — М: Физматлит, 2010. — 280 с.
 28. Гетман, И. П. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов / И. П. Гетман, Ю. А. Устинов. — Ростов-на-Дону: изд-во Рост. ун-та, 1993. — 144 с.
 29. Гоголадзе, В. Г. Отражение и преломление упругих волн. Общая теория граничных волн Рэлея / В. Г. Гоголадзе // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. — 1947. — Т.125. — С. 1–43.
 30. Головчан, В. Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. В 5 т. Т. 5. Динамика упругих тел / В. Т. Головчан, В. Д. Кубенко, Н. А. Шульга, А. Н. Гузь, В. Т. Гринченко. — Киев: Наук. Думка, 1986. — 288 с.
 31. Гольденвейзер, А. Л. Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер. — М.: Наука, 1976. — 512 с.
 32. Гольденвейзер, А. Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик — М.: Наука, 1979. — 384 с.
 33. Гринченко, В. Т. Краевой резонанс при изгибных колебаниях полуполосы / В. Т. Гринченко, Н. С. Городецкая // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1985. — № 4. — С. 20–23.
 34. Гринченко, В. Т. Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин / В. Т. Гринченко, В. Л. Карлаш, В. В. Мелешко, А.Ф. Улитко // Прикл. механика. — 1976. — Т.12, № 5. — С. 71–78.
 35. Гринченко, В. Т. Свойства поверхностных волн в упругом полом цилиндре / В. Т. Гринченко, Г. Л. Комиссарова // Акуст. вісн. — 2004. — Т. 7, № 3. — С. 39–48.

36. Гринченко, В. Т. О краевом резонансе при планарных колебаниях прямоугольных пластин / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко // Прикл. механика. — 1975. — Т.11, № 10. — С. 52–58.
37. Гринченко, В. Т. Особенности распределения энергии в тонкой прямоугольной пластине при краевом резонансе / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1976. — № 7. — С. 612–616.
38. Гринченко, В. Т. О резонансе в полубесконечной упругой полосе / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко // Прикл. механика. — 1980. — Т. 16, № 2. — С. 58–63.
39. Гринченко, В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. — Киев: Наук. Думка, 1981. — 283 с.
40. Гринченко, В. Т. Особенности волнового поля в полубесконечном упругом цилиндре (краевой резонанс) / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко // Изв. АН СССР. МТТ. — 1982. — № 6. — С. 81–89.
41. Гуляев, Ю. В. Поверхностные электрорезонансные волны в твердых телах / Ю. В. Гуляев // Письма в ЖЭТФ. — 1969. — Т.9, № 1. — С. 63–65.
42. Зильберглейт, А. С. О поверхностных упругих волнах в толстой плите / А. С. Зильберглейт // Акуст. журн. — 1980. — Т. 26, вып. 3. — С. 416–421.
43. Ишлинский, А. Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин / А. Ю. Ишлинский // Докл. АН СССР. — 1954. — Т. 95, № 3. — С. 477–479.
44. Каплунов, Ю. Д. Резонансы волн “рэлеевского” типа в упругой полубесконечной полосе / Ю. Д. Каплунов, М. В. Вильде // Акуст. журн. — 2003. — Т. 49, вып. 1. — С. 38–42.
45. Коненков, Ю. К. Об изгибной волне “рэлеевского” типа / Ю. К. Коненков // Акуст. журн. — 1960. — Т. 6, вып. 1. — С.124–126.
46. Манукян, В. Ф. Распространение трехмерной поверхностной магнитоупругой волны в изотропном, идеально проводящем полупространстве

- / В. Ф. Манукян // Изв. НАН Армении. Механика. — 2011. — Т. 64, № 1. — С. 68–72.
47. Мелешко, В. В. О краевом резонансе при осесимметричных колебаниях полубесконечного упругого цилиндра / В. В. Мелешко // Докл. АН УССР. — 1979. — Вып. 11. — С. 920–924.
48. Мгерян, Д. Э. Распространение пространственной поверхностной волны, когда на границе полупространства одно касательное перемещение равно нулю / Д. Э. Мгерян // Изв. НАН Армении. Механика. — 2006. — Т. 59, № 4. — С. 18–24.
49. Михасев, Г. И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы / Г. И. Михасев, П. Е. Товстик. — М: Физматлит, 2009. — 292 с.
50. Пельц, С. П. О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуполосы / С. П. Пельц, В. М. Шихман // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 295, № 4. — С. 821–824.
51. Слепян, Л. И. Нестационарные упругие волны / Л. И. Слепян. — Л.: Судостроение, 1972. — 376 с.
52. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица и И. М. Стиган — М.: Наука, 1979. — 832 с.
53. Устинов, Ю. А. О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе / Ю. А. Устинов, В. И. Юдович // ПММ. — 1973. — Т. 37, № 4. — С. 706–714.
54. Чау, Ле Хань. О краевом резонансе в полубесконечной упругой полосе / Ле Хань Чау // Вест. МГУ. Мат. Мех. — 1984. — № 5. — С. 57–60.
55. Ardazishvili, R. V. Three-dimensional surface wave for mixed boundary conditions on the surface / R. V. Ardazishvili // Proc. of Young Scientists School–Conference “MECHANICS-2013” (October 1–4, 2013, Tsaghkadzor,

- Armenia). — Institute of Mechanics of NAS of the Republic of Armenia, 2013. — P. 74–79.
56. Ardazishvili, R. V. Antisymmetric higher order edge waves in plates with fixed faces / R. V. Ardazishvili, M. V. Wilde // Proc. of the XLII Summer School–Conference “Advanced problems in mechanics (APM)”, St. Petersburg (Repino), June 30 – July 5, 2014. — 1 CD-ROM — P. 199–204.
 57. Auld, B. A. A variational analysis of edge resonance in a semi-infinite plate / B. A. Auld, E. D. Tsao // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. — 1977. — Vol. 24, № 5. — P. 317–326.
 58. Berezin, V. L. Synthesis of the dispersion curves for a cylindrical shell on the basis of approximate theories / V. L. Berezin, J. D. Kaplunov, L. Yu. Kossovich // J. of Sound and Vibration. — 1995. — Vol. 186, № 1. — P. 37–53.
 59. Billy, M. de. End resonance in infinite immersed rods of different cross sections / M. de Billy // J. Acoust. Soc. Am. — 1996. — Vol. 100. — P. 92–97.
 60. Bleustein, J. L. A new surface wave in piezoelectrical materials / J. L. Bleustein // Appl. Phys. Letters. — 1968. — Vol. 13, № 12. — P. 412–413.
 61. Buchwald, V. Rayleigh waves in transversely isotropic media / V. Buchwald // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 1961. — Vol. 14. — P. 293–317.
 62. Burrige, R. Theoretical computations on ridge acoustic surface waves using the finite element method / R. Burrige, F. Sabina // Electronics Letters. — 1971. — Vol. 7. — P. 720–722.
 63. Burrige, R. The propagation of elastic surface waves guided by ridges R. Burrige, F. Sabina // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1972. — Vol. 330. — P. 417–441.
 64. C. V., P. Formulas for the Rayleigh wave speed in orthotropic elastic solids / P. C.V., R. Ogden // Archives of Mechanics. — 2004. — Vol. 56, № 3. — P. 247–265.

65. Cerv, J. Dispersion of elastic waves and Rayleigh-type waves in a thin disc / J. Cerv // Acta Technica C. — 1988. — Vol. 1. — P. 89–99.
66. Chadwick, P. Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials / P. Chadwick, G. Smith // Advances in Theoretical and Applied Mechanics. — 1977. — Vol. 17. — P. 303–376.
67. Chadwick, P. Interfacial and surface waves in pre-strained isotropic elastic media / P. Chadwick // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). — 1995. — Vol. 46.
68. Chao, H. Multiple scattering of flexural waves in a semi-infinite thin plate with a cutout / H. Chao, F. Xueqian, H. Wenhui // International Journal of Solids and Structures. — 2007. — Vol. 44. — P. 436–446.
69. Chree, C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications / C. Chree // Trans. Cambridge Phil. Soc. — 1889. — Vol. 14. — P. 250–369.
70. Destrade, M. A wave near the edge of a circular disk / M. Destrade, Y. Fu // The Open Acoustics Journal. — 2008. — Vol. 1. — P. 15–18.
71. Destrade, M. Surface waves in a deformed isotropic hyperelastic material subject to an isotropic internal constraint / M. Destrade, N. H. Scott // Wave Motion. — 2004. — Vol. 40, № 4. — P. 347–357.
72. Dowaiikh, M. On surface waves and deformation in a pre-stressed, incompressible elastic solid / M. Dowaiikh, R. Ogden // IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications). — 1990. — Vol. 44, № 3. — P. 261–284.
73. Fu, Y. Existence and uniqueness of edge waves in a generally anisotropic elastic plate / Y. Fu // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 2003. — Vol. 56. — P. 605–616.
74. Fu, Y. B. Edge waves in asymmetrically laminated plates / Y. B. Fu, D. W. Brookes // J. of the Mechanics and Physics of Solids. — 2006. — Vol. 54,

- № 1. — P. 1–21.
75. Fu, Y. B. Analysis of localized edge vibrations of cylindrical shells using the Stroh formalism / Y. B. Fu, J. Kaplunov // *Math. Mech. Solids*. — 2012. — Vol. 17, № 1. — P. 59–66.
76. Gazis, D. C. Three-dimension investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. I. Analytical foundation / D. C. Gazis // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1959. — Vol. 31, № 5. — P. 568–572.
77. Gazis, D. C. Three-dimension investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. II. Numerical results / D. C. Gazis // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1959. — Vol. 31, № 5. — P. 573–578.
78. Gazis, D. Extensional vibrations and waves in a circular disc and a semi-infinite plate / D. Gazis, R. Mindlin // *J. of Applied Mechanics*. — 1960. — Vol. 27. — P. 541–547.
79. Godoy, E. On the existence of surface waves in an elastic half-space with impedance boundary conditions / E. Godoy, M. Durán, J.-C. Nédélec // *Wave Motion*. — 2012. — Vol. 49, № 6. — P. 585–594.
80. Gregory, R. D. The reflection of a symmetric Rayleigh–Lamb wave at the fixed or free edge of a plate / R. D. Gregory, I. Gladwell // *J. Elasticity*. — 1983. — Vol. 13. — P. 185–206.
81. Holst, A. Edge resonance in an elastic semi-infinite cylinder / A. Holst, D. Vassiliev // *Applicable Analysis*. — 2000. — Vol. 74. — P. 479–495.
82. Kaplunov, J. D. Dynamics of thin walled elastic bodies / J. D. Kaplunov, L. Yu. Kossovich, E. V. Nolde. — San Diego: Academic Press, 1998. — 226 c.
83. Kaplunov, J. D. Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell / J. D. Kaplunov, L. Yu. Kossovich, M. V. Wilde // *J. Acoust. Soc. Am.* — 2000. — Vol. 107, № 3. — P. 1383–1393.
84. Kaplunov, J. D. Matching of asymptotic models in scattering of a plane acoustic wave by an elastic cylindrical shell / J. D. Kaplunov, V. A. Kovalev,

- M. V. Wilde // J. of Sound and Vibration. — 2003. — Vol. 264, № 3. — P. 639–655.
85. Kaplunov, J. D. Extensional edge modes in elastic plates and shells / J. D. Kaplunov, A. V. Pichugin, V. Zernov // J. Acoust. Soc. Am. — 2009. — Vol. 125, № 2. — P. 621–623.
86. Kaplunov, J. D. On three-dimensional edge waves in semi-infinite isotropic plates subject to mixed face boundary conditions / J. D. Kaplunov, D. A. Prikazchikov, G. A. Rogerson // J. Acoust. Soc. Am. — 2005. — Vol. 118, № 5. — P. 2975–2983.
87. Kaplunov, J. D. Edge and interfacial vibrations in elastic shells of revolution / J. D. Kaplunov, M. V. Wilde // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). — 2000. — Vol. 51. — P. 530–549.
88. Kaplunov, J. D. Free interfacial vibrations in cylindrical shells / J. D. Kaplunov, M. V. Wilde // J. Acoust. Soc. Am. — 2002. — Vol. 111, № 6. — P. 2692–2704.
89. Kauffmann, C. A new bending wave solution for the classical plate equation / C. Kauffmann // J. Acoust. Soc. Am. — 1998. — Vol. 104. — P. 2220–2222.
90. Kim, J.-Y. Surface acoustic wave measurements of small fatigue cracks initiated from a surface cavity / J.-Y. Kim, S. Rokhlin // International Journal of Solids and Structures. — 2002. — Vol. 39. — P. 1487–1504.
91. Krushynska, A. A. Flexural edge waves in semi-infinite elastic plates / A. A. Krushynska // J. of Sound and Vibration. — 2011. — Vol. 330, № 9. — P. 1964–1976.
92. Lagasse, P. Higher-order finite-element analysis of topographic guides supporting elastic surface waves / P. Lagasse // J. Acoust. Soc. Am. — 1973. — Vol. 53. — P. 1116–1122.
93. Lagasse, P. Acoustic flexural mode on a ridge of semi-infinite height / P. Lagasse, A. Oliner // Electronics Letters. — 1976. — Vol. 12, № 1. — P. 11–13.

94. Lamb, H. On waves in elastic plate / H. Lamb // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1917. — Vol. 93, № 648. — P. 114–128.
95. Lawrie, J. Edge waves and resonance on elastic structures: An overview / J. Lawrie, J. Kaplunov // Math. and Mech. of Solids. — 2012. — Vol. 17, № 1. — P. 4–16.
96. Lu, P. Further studies on edge waves in anisotropic elastic plates / P. Lu. H. Chen, C. Lu // International Journal of Solids and Structures. — 2007. — Vol. 44. — P. 2192–2208.
97. Lu, Y. Crack identification in aluminium plates using Lamb wave signals, of a PZT sensor network / Y. Lu, L. Ye, Z. Su // Smart Materials and Structures. — 2006. — Vol. 15. — P. 839–849.
98. Malischevsky, P. Comment to "A new formula for the velocity of Rayleigh waves" by D. Nkemzi [Wave Motion 26(1997) 199-205] / P. Malischevsky // Wave Motion. — 2000. — Vol. 31, № 1. — P. 93–96.
99. McCoy, J. Extensional waves along the edge of an elastic plate / J. McCoy, R. Mindlin // Journal of Applied Mechanics. — 1963. — Vol. 30, № 1. — P. 75–78.
100. Mielke, A. Uniqueness of the surface-wave speed: A proof that is independent of the Stroh formalism / A. Mielke, Y. Fu // Journal of Mathematics and Mechanics of Solids. — 2004. — Vol. 9, № 1. — P. 5–15.
101. Nkemzi, D. A new formula for the velocity of Rayleigh waves / D. Nkemzi // Wave Motion. — 1997. — Vol. 26, № 2. — P. 199–205.
102. Norris, A. Flexural edge waves / A. Norris // J. of Sound and Vibration. — 1994. — Vol. 171. — P. 571–573.
103. Norris, A. Flexural edge waves and comments on "A new bending wave solution for the classical plate equation" [J. Acoust. Soc. Am. 104, 2220-2222 (1998)] / A. Norris, V. Krylov, I. Abrahams // J. Acoust. Soc. Am. — 2000. — Vol. 107, № 3. — P. 1781–1784.

104. Norris, A. Bending wave diffraction from strips and cracks on thin plates / A. Norris, Z. Wang // *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. — 1994. — Vol. 47. — P. 607–627.
105. Numerical predictions and experiments on the free-plate edge mode / E. Le Clezio, M. Predoi, M. Castaings et al. // *Ultrasonics*. — 2003. — Vol. 41, № 1. — P. 25–40.
106. Ogden, R. On Rayleigh waves in incompressible orthotropic elastic solids / R. Ogden, P. Vinh // *J. Acoust. Soc. Am.* — 2004. — Vol. 115, № 2. — P. 530–533.
107. Oliver, J. Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band, short-duration pulse technique / J. Oliver // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1957. — Vol. 29, № 2. — P. 189–194.
108. Pagneux, V. Revisiting the edge resonance for Lamb waves in a semi-infinite plate / V. Pagneux // *J. Acoust. Soc. Am.* — 2006. — Vol. 120, № 2. — P. 649–656.
109. Piliposian, G.T. Localized bending waves in a transversely isotropic plate / G. T. Piliposian, M. V. Belubekyan, K. B. Ghazaryan // *J. of Sound and Vibration*. — 2010. — Vol. 329, № 17. — P. 3596–3605.
110. Pochhammer, L. Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder / L. Pochhammer // *J. Reine Angew. Math.* — 1876. — B. 81. — S. 324–336.
111. Prikazchikov, D. On localised vibrations on incompressible pre-stressed transversely isotropic elastic solids / D. Prikazchikov, G. Rogerson, K. Sandiford // *J. of Sound and Vibration*. — 2007. — Vol. 301, №. 3-5. — P. 701–717.
112. Rahman, M. Exact expression for the roots of the secular equation for Rayleigh waves / M. Rahman, J. Barber // *J. of Applied Mechanics, Transactions ASME*. — 1995. — Vol. 62, № 1. — P. 250–252.

113. Rahman, M. A note on the formula for the Rayleigh wave speed / M. Rahman, T. Michelitsch // *Wave Motion*.— 2006.— Vol. 43, № 3. — P. 272–276.
114. Ratassepp, M. Edge resonance in semi-infinite thick pipe: numerical predictions and measurements / M. Ratassepp, A. Klauson, F. Chati, F. Léon, G. Maze // *J. Acoust. Soc. Am.* — 2008 . — Vol. 124, № 2. — P. 875–885.
115. Rayleigh, J. On waves propagated along the surface of an elastic solid / J. Rayleigh // *Proc. Lond. Math. Soc.* — 1885. — Vol. 17, № 253. — P. 4–11.
116. Rayleigh, J. On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter / J. Rayleigh // *Proc. Lond. Math. Soc.* — 1888/1889. — Vol. 20, № 357. — P. 225–234.
117. Roitberg, I. Edge resonance in an elastic semi-strip / I. Roitberg, D. Vassiliev, T. Weidl // *Q. Jl Mech. Appl. Math.* — 1998. — Vol. 51. — P. 1–13.
118. Rosenberg, R. L. Relationship between plate and surface modes of a tube / R. L. Rosenberg, R. N. Thurston // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1977. — Vol. 61, № 6. — P. 1499–1502.
119. Shaw, E. A. G. On the resonant vibrations of thick barium titanate disks / E. A. G. Shaw // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1956. — Vol. 28, № 1. — P. 38–50.
120. Shikchman, V. M. Mathematical modelling of the Rayleigh wave reception by the system with elastic waveguide / V. M. Shikchman, S. P. Pelts // *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*. — NY.: Plenum Press, 1996. — Vol. 15A. — P. 153–160.
121. Sinclair, R. Velocity dispersion of waves propagating along the edge of a plate / R. Sinclair, R. Stephens // *Acustica*. — 1971. — Vol. 24, № 3. — P. 160–165.
122. Sinha, B. Some remarks on propagation characteristics of ridge for acoustic waves at low frequencies / B. Sinha // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1974. — Vol. 56.

- P. 16–18.
123. Stoneley, R. Elastic waves at the surface of separation of two solids / R. Stoneley // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1924. — Vol. 106, № 732. — P. 416–428.
124. Surface acoustic wave impedance element ISM Duplexer: modeling and optical analysis / T. Makkonen, S. Kondratiev, V. Plessky et al. // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. — 2001. — Vol. 48, № 3. — P. 652–665.
125. Thompson, I. Diffraction of flexural waves by cracks in orthotropic thin elastic plates. I Formal solution / I. Thompson, I. Abrahams // Proc. R. Soc. Lond. A. — 2005. — Vol. 461. — P. 3413–3436.
126. Thompson, I. Diffraction of flexural waves by cracks in orthotropic thin elastic plates. II Far field analysis / I. Thompson, I. Abrahams // Proc. R. Soc. Lond. A. — 2007. — Vol. 463. — P. 1615–1638.
127. Thompson, I. On the existence of flexural edge waves on thin orthotropic plates I. Thompson, I. Abrahams, A. Norris // J. Acoust. Soc. Am. — 2002. — Vol. 112. — P. 1756–1765.
128. Thurston, R. N. Elastic waves in rod and clad rods / R. N. Thurston // J. Acoust. Soc. Am. — 1978. — Vol. 64, № 1. — P. 1–37.
129. Thurston, R. Flexural acoustic waves along the edge of a plate / R. Thurston, J. McKenna // IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics. — 1974. — Vol. 21. — P. 296–297.
130. Torvik, P. Reflection of wave trains in semi-infinite plates / P. Torvik // J. Acoust. Soc. Am. — 1967. — Vol. 41. — P. 346–353.
131. Torvik, P. J. Response of an elastic plate to a cyclic longitudinal force / P. J. Torvik, J. J. McClatchey // J. Acoust. Soc. Am. — 1968. — Vol. 44. — P. 59–64.
132. Vinh, P. On the Rayleigh wave speed in orthotropic elastic solids / P. Vinh, R. Ogden // Meccanica. — 2005. — Vol. 40, № 2. — P. 147–161.

133. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder / J. Zemanek // J. Acoust. Soc. Am. — 1972. — Vol. 51, № 1, Pt. 2. — P. 265–283.
134. Zernov, V. Three-dimensional edge waves in plates / V. Zernov, J. Kaplunov // Proc. R. Soc. Lond. A. — 2008. — Vol. 464. — P. 301–318.
135. Zernov, V. Eigenvalue of a semi-infinite elastic strip / V. Zernov, A. V. Pichugin, J. Kaplunov // Proc. R. Soc. Lond. A. — 2006. — Vol. 462. — P. 1255–1270.
136. Zhavoronok, S. I. A Vekua-type linear theory of thick elastic shells / S. I. Zhavoronok // ZAMM. — 2014. — Vol. 94, № 1-2. — P. 164–184.