

ФГБОУ ВО

“Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”

На правах рукописи

СЕМЕНОВ Владимир Викторович

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
СТОХАСТИЧЕСКИХ БИФУРКАЦИЙ
В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ
АВТОГЕНЕРАТОРОВ И НЕЛИНЕЙНЫХ
ОСЦИЛЛЯТОРОВ**

01.04.03 – Радиофизика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., профессор

Вадивасова Татьяна Евгеньевна

Саратов – 2016

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Экспериментальное исследование стохастической бифуркации Андронова-Хопфа	22
1.1. Методы проведения численных и физических экспериментов	24
1.2. Влияние шума на суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа в генераторе Ван дер Поля	27
1.3. Суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа в генераторе с инерционной нелинейностью Анищенко–Астахова	39
1.4. Суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа в модели брюсселятора	46
1.5. Субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа в генераторе с жестким возбуждением в присутствии шума	55
1.6. Выводы по первой главе	68
Глава 2. Управление когерентным резонансом с помощью запаздывающей обратной связи	72
2.1. Экспериментальное исследование влияния запаздывающей обратной связи на когерентный резонанс в системе ФитцХью-Нагумо	73
2.2. Влияние запаздывающей обратной связи на генератор с жестким возбуждением. Анализ в квазигармоническом приближении.	82
2.3. Управление когерентным резонансом с помощью запаздывающей обратной связи в генераторе с жестким возбуждением. Численное моделирование и физический эксперимент	87
2.4. Выводы по второй главе	93

Глава 3. Индуцированные шумом эффекты в двухъямном осцилляторе с нелинейным трением	94
3.1. Исследуемая модель	96
3.2. Численное исследование индуцированных шумом эффектов	99
3.3. Эффективный потенциал как способ описания наблюдаемых эффектов	102
3.4. Структура фазового пространства исследуемой системы. Причины наблюдаемых явлений	106
3.5. Физический эксперимент и его результаты	109
3.6. Выводы по третьей главе	115
Заключение	117
Список литературы	121

Введение

Долгое время понятие "шум" воспринималось исключительно как помеха, как деструктивный фактор, наличие которого ухудшает функционирование любой системы. Хорошо известны классические проблемы радиофизики, связанные с негативным воздействием шумов [1–3]. Широкое распространение получили задачи разработки методов борьбы с шумами. К примеру, защита радиоэлектронных средств различного назначения от радиопомех и сегодня представляет собой одну из важнейших проблем, возникающих как при разработке, так и при использовании радиотехнических устройств и систем [4–7].

Флуктуации присущи всем реальным системам и в принципе неустранимы. Из этого следует ограниченность детерминированного подхода при рассмотрении в частности проблем теории нелинейных колебаний. Переход к статистическому описанию динамических систем послужил основой для развития ряда исследований в области статистической радиофизики [8]. Важно отметить, что данная тематика не ограничивается задачами радиофизики, а имеет междисциплинарный характер [9–16]. В последнее время в понимании вызванных шумом процессов произошли существенные изменения. Было установлено, что источники шума в нелинейных динамических системах могут порождать принципиально новые режимы функционирования, например, незатухающие колебания [17]. Эти эффекты получили название индуцированных шумом переходов [13]. За последние 30–40 лет обнаружены явления, коренным образом изменившие понимание термина "шум". Было показано, что в нелинейных системах воздействие шума может индуцировать новые более упорядоченные режимы, приводить к образованию более регулярных структур, увеличивать степень когерентности, вызывать рост усиления и отношения сигнал/шум. Среди подобных эффектов наиболее значимы

ми представляются явления стохастического резонанса [18–24], когерентного резонанса (КР) [25–27], стохастической синхронизации [28–30], индуцированного шумом хаоса [31–33], подавление хаотической динамики случайным воздействием [34–36], синхронизация шумом ансамбля осцилляторов [37, 38] и т.д. Широкий спектр вызванных шумом эффектов, которые существенным образом зависят как от нелинейных свойств динамической системы, так и от характеристик шума, серьезно затрудняет формирование общей концепции поведения динамических систем в присутствии шума.

Проблематика исследований стохастических объектов включает в себя важные вопросы, касающиеся влияния шума на бифуркационные явления. Вблизи бифуркаций малые возмущения (в том числе случайные) могут существенным образом влиять на поведение динамических систем [39–43]. Изучение бифуркационных явлений в системах с шумом продолжает быть актуальным направлением в нелинейной динамике, в рамках которого остается много нерешенных задач. Одной из таких задач является анализ стохастических бифуркаций. Под стохастическими бифуркациями понимают бифуркационные явления в системах с источником шума. Не всегда ясно, как определить момент бифуркации в зашумленной системе, и как могут повлиять различные источники шума на ту или иную бифуркацию. Согласно [15] стохастические бифуркации делятся на феноменологические бифуркации (Р-бифуркации), состоящие в качественном изменении формы стационарного вероятностного распределения, и динамические бифуркации (D-бифуркации), связанные с изменением устойчивости траекторий по отношению к малым возмущениям. В литературе представлено большое число теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию влияния шума на различные бифуркации [32, 44–51]. Отметим, что общая теория стохастических бифуркаций на сегодняшний момент еще не сформирована. Это объясняется отсутствием универсальности стохастических бифуркаций, присущей локальным

бифуркациям детерминированных систем (основные свойства не зависят от конкретного вида уравнений, описывающих систему, и функций, задающих нелинейности). Случайные воздействия на один и тот же тип бифуркации в различных системах могут приводить к существенно различным эффектам. Кроме того, влияние шума на динамические системы зачастую зависит от статистических характеристик шума, таких как интенсивность, дисперсия, время корреляции или ширина спектра, которые могут играть роль бифуркационных параметров системы.

Бифуркация Андронова-Хопфа [39, 52], с которой связан переход в режим генерации, является одной из важнейших бифуркаций в динамических системах. Различают суперкритическую и субкритическую бифуркации Андронова-Хопфа. Суперкритическая бифуркация соответствует мягкому возбуждению автоколебаний, при котором в фазовом пространстве рождается устойчивый предельный цикл из неподвижной точки фокусного типа, потерявшей устойчивость. При мягком возбуждении переход к развитой генерации происходит постепенно, отсутствуют резкие изменения амплитуды колебаний. Субкритической бифуркации соответствует жесткое возбуждение автоколебаний, при котором наблюдается скачкообразный первоначальный рост амплитуды. При субкритической бифуркации происходит переход от бистабильности, когда в фазовом пространстве сосуществуют устойчивый предельный цикл и устойчивая точка равновесия, которые разделены неустойчивым предельным циклом, к моностабильности: неустойчивый предельный цикл стягивается в устойчивый фокус, после чего фокус теряет устойчивость, и в фазовом пространстве остается один аттрактор - устойчивый предельный цикл.

Стохастическая бифуркация Андронова-Хопфа состоит в возникновении характерного для зашумленных автоколебаний вероятностного распределения, имеющего форму замкнутого кратера. В точках детерминирован-

ного цикла имеет место локальный максимум плотности вероятности, а в неустойчивой точке равновесия - минимум. Стохастическая бифуркация Андронова-Хопфа была исследована в ряде работ для различной статистики шума [15, 32, 46, 47, 53–65]. В частности, в [32] аналитически и численно было показано, что суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа в генераторе Ван дер Поля с аддитивным шумом происходит не в одной точке (как это следует из квазигармонического приближения), а при прохождении через так называемый бифуркационный интервал, соответствующий постепенной перестройке вероятностного распределения. Ширина этого интервала растет с ростом интенсивности шума. Таким образом, при фиксированном значении управляющего параметра, соответствующему режиму генерации, рост интенсивности шума приводит к переходу внутрь бифуркационного интервала. При этом кратерообразная форма вероятностного распределения разрушается. Существование бифуркационного интервала при воздействии цветного параметрического шума обосновывается в теоретических исследованиях [54, 58]. Там же отмечается запаздывающий характер суперкритической бифуркации при некоторых значениях времени корреляции шума. Анализ гармонического осциллятора Хопфа с параметрическим белым шумом, проведенный в [62], также выявил запаздывание бифуркации Андронова – Хопфа. К сожалению, вблизи бифуркаций, где система структурно неустойчива, а также при большом шуме, как приближенные аналитические методы, так и методы численного моделирования могут приводить к существенным ошибкам. *В такой ситуации особенно важное значение приобретают физические эксперименты. Однако, в научной литературе число публикаций, посвященных экспериментальному исследованию стохастических бифуркаций, невелико.* Экспериментальное подтверждение существования бифуркационного интервала для суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа было дано только в [55] для аналоговой модели брюсселятора с низкоча-

стотным параметрическим шумом. *Вопрос существования бифуркационного интервала при субкритической бифуркации Андронова-Хопфа ранее не рассматривался ни теоретически, ни экспериментально.*

В ряде случаев стохастические бифуркации анализируются в тесной взаимосвязи с другими индуцированными шумом эффектами. Так, в работах [51, 64] когерентный резонанс (КР) рассматривался с точки зрения стохастических бифуркаций, имеющих место в исследуемых системах. Явление КР первоначально было обнаружено в возбудимых системах [25–27, 66]. Данное явление заключается в существовании оптимального уровня шума, при котором индуцированные шумом колебания становятся наиболее близкими к регулярным. Различают возбудимые системы I и II типа [67]. Для систем I типа возбудимый режим связан с существованием нелокальной седло-узловой бифуркации точек равновесия, в результате которой из сепаратрисного контура рождается предельный цикл (это так называемая SNIPER-бифуркация от слов saddlenode-infinite-period bifurcation). Рождению предельного цикла предшествует возбудимый режим, связанный с существованием сепаратрисного контура, обеспечивающего возврат траектории в устойчивую точку равновесия. В случае возбудимости II типа сепаратрисный контур отсутствует, а возврат в устойчивую точку равновесия из состояния возбуждения обеспечивается существованием в фазовом пространстве некоторой петли, образованной линиями быстрых и медленных движений. Классическим примером возбудимой системы II типа может служить осциллятор ФитцХью-Нагумо [68, 69].

В последние годы КР был установлен также в автогенераторах с бифуркацией Андронова-Хопфа [64, 70–72]. При этом «настоящий» эффект КР, состоящий в абсолютном уменьшении ширины спектральной линии и увеличении времени корреляции, наблюдается в автогенераторах с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа, в то время как в окрестности суперкритиче-

ской бифуркации возможно получить только относительное уменьшение ширины спектра [70]. КР в генераторах с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа (в генераторах с жестким возбуждением) исследовался численно и с применением приближенных аналитических методов [64, 70, 72], а также экспериментально на аналоговой модели генератора [71, 72]. КР наблюдается не только в области бистабильности, где система имеет два аттрактора: предельный цикл и устойчивую точку равновесия, но и в подпороговом режиме, у границы касательной бифуркации рождения устойчивого и неустойчивого циклов, где колебания в детерминированной системе не возникают.

Генератор с жестким возбуждением иногда рассматривают как особый случай возбудимой системы (см., например, [73]). Однако, данное утверждение вызывает споры. Действительно, для возбудимых систем как I, так и II типа выброшенная за порог возбуждения траектория движется по заданной петле и время релаксации к точке равновесия слабо зависит от шума. В генераторе в подпороговом режиме подобная петля отсутствует. При этом время возврата стохастической траектории в окрестность состояния равновесия является полностью случайным и характеризуется широким разбросом возможных значений. Механизмы КР в возбудимых осцилляторах и в генераторе с жестким возбуждением также несколько различаются [64, 72].

Индукцированные шумом колебания в условиях КР обладают определенными чертами автоколебательного режима. Так, для них было установлено явление вынужденной и взаимной синхронизации [30, 74–76], причем было показано, что синхронизация стохастических колебаний происходит по тому же сценарию, что и частотно-фазовая синхронизация в детерминированных автоколебательных системах. В последнее время актуальной стала проблема управления динамическими системами, в том числе системами, содержащими источники шума и демонстрирующими различные стохастические эффекты. Одной из проблем в этом направлении является решение задачи управления

эффектом КР с целью получения максимально регулярного поведения системы при оптимальном шумовом воздействии. Известно, что КР в возбудимых системах как I, так и II типа может контролироваться с помощью запаздывающей обратной связи [77–80]. Аналогичное влияние запаздывающей обратной связи было установлено и для КР в модели Стюарта-Ландау с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа [73,81]. В отмеченных исследованиях используются теоретические методы анализа и численное моделирование. *При этом на сегодняшний день практически отсутствуют работы, в которых задача управления эффектом КР рассматривалась средствами физического эксперимента.* Исключение составляет экспериментальное исследование колебаний в гальваническом элементе [82]. В то же время, как уже было сказано выше, экспериментальные методы очень важны в задачах с шумом, поскольку теоретический анализ нелинейных стохастических систем в большинстве случаев является приближенным.

Изучение свойств стохастических бистабильных систем представляет собой особый класс задач. Бистабильными называют динамические системы, в фазовом пространстве которых сосуществуют два аттрактора. В зависимости от начальных условий в отсутствие внешних воздействий в системе реализуется один из двух аттракторов. Бистабильное поведение типично для широкого круга динамических систем, встречающихся в различных областях физики [11, 83, 84], химии [85, 86], биологии [20, 87–91], экологии [92, 93], климатологии [18, 19, 94] и других наук. Простейший вид бистабильности - это сосуществование в фазовом пространстве двух устойчивых состояний равновесия. В такой системе без внешних воздействий в установившемся режиме нет колебаний. Однако, добавление источника шума может приводить к возникновению случайных переключений между состояниями равновесия. В этом случае говорят о стохастическом бистабильном осцилляторе [84, 85]. Следует отметить, что аддитивный гауссов шум приводит к объединению бассей-

нов всех аттракторов и образованию в фазовом пространстве динамической системы единого притягивающего множества с определенной вероятностной мерой. Под бистабильностью стохастической системы принято понимать наличие двух локальных максимумов в функции плотности распределения вероятностей.

Шум в бистабильных системах вызывает не только стохастические переключения, но также отвечает за ряд фундаментальных эффектов, таких как стохастический резонанс [18–24, 94, 95], стохастическая синхронизация [28, 29, 96], индуцированный шумом хаос [31–33] и т.д. Анализ стохастических бифуркаций и индуцированных шумом переходов (новых типов поведения) в бистабильных системах продолжает привлекать внимание исследователей [13, 15]. Само свойство бистабильности может быть вызвано действием шума, т.е. представлять собой индуцированный шумом переход [64, 97, 98]. Все вышеперечисленные явления существенно зависят от конкретного типа бистабильного осциллятора, а также от характеристик шума. Большое число работ посвящено динамике осциллятора, описывающего движение частицы в двухъямном потенциальном поле с постоянным трением (осциллятор Крамера [84, 85]). Это объясняется широким спектром индуцированных шумом эффектов: в данной системе наблюдается эффект стохастического резонанса, стохастической синхронизации, индуцированного шумом хаоса и др.. Однако, осциллятор Крамера не является универсальной моделью, охватывающей все свойства бистабильных осцилляторов. Можно предположить, к примеру, что наличие нелинейной диссипации может существенным образом изменить картину наблюдаемых явлений. *Особенности поведения бистабильного осциллятора с нелинейной, зависящей от мгновенного состояния диссипацией составляют проблему до настоящего времени не описанную в научной литературе. При этом важной задачей является создание достаточно простой и более универсальной модели такого осциллятора, доступной как для*

численного анализа, так и для эксперимента.

Все вышесказанное подтверждает актуальность исследований в выбранной области и служит основанием для формулировки цели и задач диссертационного исследования. **Целью диссертационной работы** является решение актуальной задачи радиофизики, состоящей в экспериментальном исследовании индуцированных шумом эффектов в нелинейных колебательных системах: стохастической бифуркации Андронова-Хопфа в различных моделях осцилляторов, КР в возбудимых и невозбудимых системах, охваченных запаздывающей обратной связью, а также стохастических бифуркаций в двухъямном осцилляторе с нелинейным трением.

Для достижения поставленной цели в рамках диссертационного исследования необходимо было решить следующие основные задачи:

1. Методами численного и радиотехнического экспериментов провести анализ стохастической суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа в генераторе Ван дер Поля, генераторе Анищенко-Астахова и брюсселяторе при наличии аддитивного и параметрического гауссова белого шума. Для этого создать аналоговую модель генератора и разработать программное обеспечение для считывания необходимых данных и обработки их на компьютере. Численно и экспериментально исследовать эволюцию вероятностного распределения при вариации параметров рассматриваемых систем и интенсивности шума средствами компьютерного моделирования и радиотехнического эксперимента. Исследовать экстремумы вероятностного распределения при наличии шума. Сравнить полученные экспериментальные данные с результатами теоретического анализа.
2. Провести анализ стохастической субкритической бифуркации Андронова-Хопфа в генераторе с жестким возбуждением при наличии адди-

тивного и параметрического гауссова шума. Для этого создать аналоговую радиотехническую модель генератора и провести анализ эволюции вероятностного распределения при вариации параметров и интенсивности шума средствами численного моделирования и экспериментально. Исследовать эволюцию экстремумов вероятностного распределения при наличии шума. Сравнить полученные данные с результатами для суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа.

3. Экспериментально исследовать особенности когерентного резонанса в осцилляторе ФитцХью-Нагумо при наличии запаздывающей обратной связи. Для этого сначала создать радиотехническую модель системы, разработать электронное устройство, реализующее линию запаздывания, а также необходимое программное обеспечение для записи и обработки временных реализаций на компьютере. Провести эксперименты, по результатам которых установить влияние спектральных характеристик шума на эффект когерентного резонанса при отсутствии запаздывающей обратной связи. Установить зависимость времени корреляции и среднеквадратичного отклонения интерспайкового интервала от времени корреляции шума. Установить зависимость времени корреляции индуцированных шумом колебаний от времени запаздывания как для случая белого гауссова, так и для случая цветного шума. Сравнить полученные экспериментальные данные с результатами численного и теоретического анализа.
4. Исследовать особенности когерентного резонанса в генераторе с жестким возбуждением при наличии запаздывающей обратной связи и аддитивного гауссова шума. Провести теоретический анализ системы при отсутствии шума в квазигармоническом приближении. Выявить особенности влияния запаздывающей обратной связи на бифуркации в детер-

минированной системе. Разработать и реализовать экспериментальную установку. В численном и физическом экспериментах получить зависимость времени корреляции индуцированных шумом колебаний от времени запаздывания в системе с шумом, а также установить эволюцию вероятностного распределения амплитуды колебаний с ростом времени запаздывания. Обосновать наблюдаемые эффекты на основе результатов квазигармонического анализа детерминированной системы. Сравнить полученные результаты с результатами исследования осциллятора ФитцХью-Нагумо с шумом и запаздывающей обратной связью.

5. Разработать простую и достаточно общую модель бистабильного осциллятора, отличного от классической модели зависимостью коэффициента трения от динамических переменных. Создать экспериментальную установку. Численно и экспериментально исследовать динамику двухъямного осциллятора с нелинейным трением в присутствии шума. Установить эволюцию вероятностного распределения с ростом шума. Исследовать зависимость частоты Райса от интенсивности шума в исследуемой системе. Провести анализ структуры фазового пространства системы и на ее основе дать объяснение наблюдаемым явлениям. Получить описание динамики системы на основе сравнения с осциллятором Крамерса при конечном трении, для чего ввести эффективные характеристики системы.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы.

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы диссертации, проводится краткий обзор имеющихся в научной литературе результатов по теме проводимого исследования, определяются цели и задачи исследования, формулируются положения и результаты, выносимые на защиту.

В первой главе диссертации приведен алгоритм численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), который используется при всех численных исследованиях, проведенных в рамках диссертационной работы. Описывается принцип создания электронных устройств, являющихся аналоговыми моделями исследуемых систем, приводится описание созданных экспериментальных установок. Исследуется динамика генератора Ван дер Поля, генератора Анищенко-Астахова, брюсселятора и генератора с жестким возбуждением при наличии шума. Приведены результаты численного моделирования и физических экспериментов, произведенных с целью экспериментальной диагностики бифуркаций Р-типа, связанных с качественными перестройками формы совместного вероятностного распределения динамических переменных. Проводится сопоставление результатов численных и натурных экспериментов.

Во второй главе рассмотрена проблема управления характеристиками КР с помощью цепочки запаздывающей обратной связи. Представлены результаты экспериментального исследования влияния дополнительной цепи запаздывающей обратной связи на эффект КР в возбудимом осцилляторе ФитцХью-Нагумо и экспериментально оценены возможности управления характеристиками стохастических колебаний в режиме КР с помощью вариации параметров запаздывающей обратной связи. Результаты экспериментов сопоставляются с результатами работ [79, 80], в которых данная задача была рассмотрена численно. Проведен теоретический анализ генератора Ван дер Поля с жестким возбуждением с запаздывающей обратной связью, а также численные и физические эксперименты по выявлению особенностей влияния запаздывающей обратной связи на эффект КР в данной системе. На основании полученных данных делаются общие выводы о возможности управления характеристиками КР в возбудимых и невозбудимых системах.

В третьей главе предложен и исследован стохастический бистабиль-

ный осциллятор с нелинейной диссипацией, который, в зависимости от значений управляющих параметров, может демонстрировать более сложное и разнообразное поведение. Приведены результаты численного и экспериментального исследования динамики исследуемой системы при наличии шума. Показана эволюция вероятностного распределения динамических переменных исследуемой системы с ростом шума. Показан немонотонный характер зависимости частоты Райса от интенсивности шума. Представлены результаты исследований структуры фазового пространства системы, на основе которых делаются выводы о причинах наблюдаемых явлений. Проводится сопоставление результатов с теоретическими соотношениями, справедливыми для осциллятора Крамерса, для чего вводятся эффективные характеристики предлагаемой бистабильной модели.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы. Материал диссертационной работы изложен на 134 страницах, содержит 44 иллюстрацию и список цитируемой литературы из 124 наименований.

Научная новизна результатов диссертационной работы определяется следующим:

1. В физическом эксперименте с использованием радиотехнических моделей нелинейных систем установлена последовательность бифуркационных изменений вероятностного распределения при вариации управляющих параметров (сценарий стохастической бифуркации) суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа при наличии аддитивного или мультипликативного (параметрического) белого гауссова шума в генераторе Ван дер Поля, генераторе Анищенко-Астахова и брюсселяторе.
2. В численном и физическом экспериментах установлен сценарий стохастической субкритической бифуркации Андронова-Хопфа и стохастиче-

ской седло-узловой бифуркации предельных циклов при наличии аддитивного или мультипликативного (параметрического) белого гауссова шума в генераторе с жестким возбуждением.

3. В физическом эксперименте установлены особенности влияния запаздывающей обратной связи на характеристики индуцированных шумом колебаний в системе ФитцХью-Нагумо в режиме когерентного резонанса.
4. В численном и физическом экспериментах установлены особенности влияния запаздывающей обратной связи на характеристики индуцированных шумом колебаний в генераторе с жестким возбуждением в режиме когерентного резонанса, а также дано исчерпывающее объяснение полученным результатам.
5. Предложен и исследован бистабильный осциллятор с двухъямным потенциалом и нелинейным трением, поведение которого качественно отличается от поведения осциллятора Крамерса, установлены особенности влияния шума на динамику исследуемой системы, установлены причины наблюдаемых явлений, а также введены эффективные характеристики исследуемой системы для сопоставления полученных результатов с теоретическими соотношениями, справедливыми для осциллятора Крамерса с конечным (постоянным) трением.

Достоверность научных выводов работы подтверждается соответствием результатов, полученных в численных и физических экспериментах, а также соответствием между теоретическими и экспериментальными данными. Также отмечается соответствие между полученными в рамках диссертационной работы результатами и некоторыми результатами других авторов, представленными в научной литературе.

На защиту выносятся следующие положения и результаты:

Положения:

1. В физически реализуемых генераторах при воздействии аддитивного шума как субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, так и седло-узловая бифуркация рождения циклов характеризуются наличием бифуркационного интервала, соответствующего постепенной трансформации формы стационарного вероятностного распределения при изменении управляющих параметров.
2. Запаздывающая обратная связь одинаковым образом влияет на динамику возбудимых и невозбудимых систем, демонстрирующих эффект когерентного резонанса, и позволяет управлять степенью регулярности колебаний.
3. Наличие нелинейного трения в модели стохастического осциллятора, описывающей движение в бистабильном потенциальном поле, при определенной форме нелинейности приводит к появлению индуцированных шумом переходов: первоначально происходит подавление бистабильности и переход к унимодальному распределению плотности вероятности, однако при дальнейшем росте шума наблюдается обратный процесс перехода к бистабильному поведению и формирования соответствующего вероятностного распределения с двумя максимумами.

Результаты:

1. В физическом эксперименте подтверждены характерные черты стохастической суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа, известные из теоретических и численных исследований.

2. Экспериментально и численно установлена типичная эволюция стационарного распределения, соответствующая стохастической субкритической бифуркации Андронова-Хопфа и стохастической седло-узловой бифуркации циклов в генераторе с жестким возбуждением: установлено существование бифуркационного интервала для субкритической бифуркации Андронова-Хопфа и седло-узловой бифуркации рождения циклов при наличии аддитивного шума, установлен запаздывающий характер бифуркации Андронова-Хопфа при наличии как аддитивного, так и мультипликативного шума.
3. Показано, что введение запаздывающей обратной связи позволяет изменять характеристики (ширина спектральной линии, время корреляции и др.) индуцированных шумом колебаний в режиме когерентного резонанса как в возбудимых, так и в невозбудимых системах, таких как генератор с жестким возбуждением. При этом можно добиться более регулярного поведения системы по сравнению с динамикой при отсутствии обратной связи.
4. Предложена достаточно общая модель осциллятора, описывающая движение в бистабильном потенциальном поле при наличии нелинейной диссипации. На примере данной модели численно и экспериментально показана возможность управления динамикой осциллятора с помощью внешнего шума с изменяемой интенсивностью.

Научная и практическая значимость результатов диссертации обусловлена тем, что они существенно расширяют современные представления нелинейной теории колебаний и статистической радиофизики в области стохастических бифуркаций и сопутствующих им индуцированных шумом эффектов. Научно-практическая значимость состоит в следующем:

1. Экспериментально установлен сценарий перехода к автоколебательному режиму в присутствии аддитивного и мультипликативного шума, соответствующий бифуркации Андронова-Хопфа в детерминированном случае. Показан общий характер эффектов, наблюдаемых в случае субкритической и суперкритической бифуркации. Также установлен характер стохастической седло-узловой бифуркации предельных циклов, предшествующей субкритической бифуркации Андронова-Хопфа.
2. Показана возможность управления характеристиками колебаний систем, демонстрирующих эффект когерентного резонанса. Показано, что характер влияния запаздывающей обратной связи не имеет принципиальных различий для возбудимых и невозбудимых систем.
3. Установлен факт качественных изменений динамики модели бистабильного осциллятора с нелинейной диссипацией при изменении интенсивности шума, а также выявлены причины обнаруженных эффектов.

Полученные результаты могут быть применены при создании новых радиофизических устройств с учетом роли динамического шума, при разработке новых методов управления радиофизическими устройствами, основанными на использовании источников шума, при математическом моделировании стохастических явлений в нелинейных системах и интерпретации экспериментальных данных в различных сферах научных исследований. Материалы диссертации частично используются в курсах лекций по теории нелинейных колебаний и теории флуктуаций в колебательных системах. Предполагается дальнейшее внедрение результатов работы в учебном процессе.

Апробация работы. Основные результаты научных исследований были представлены на следующих научных семинарах и конференциях:

- Научная школа-конференция "Нелинейные дни в Саратове для моло-

дых"(Саратов, 2012)

- Международная конференция "Динамика, бифуркации и странные аттракторы"(Нижний Новгород, 2013)
- Международная конференция "Topical Problems of Nonlinear Wave Physics"(Нижний Новгород, 2014)
- Международная конференция "Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems. Unraveling Complexity"(Саратов, 2014)
- Научный семинар "Applications of Complex Networks", Берлинский технический университет (Берлин, 2014)

а также на научных семинарах кафедры радиофизики и нелинейной динамики.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ (код проекта 1008), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №15-02-02288 и №14-52-12002).

Личный вклад. Все результаты, представленные в данной работе, были получены лично автором в ходе численных и физических экспериментов. Также автор принимал активное участие в постановке задач и интерпретации полученных экспериментальных данных.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 печатных изданиях (10 статей [99–108] в журналах, рекомендованных ВАК, 1 глава книги [109] и 4 работы в сборниках тезисов конференций [110–113]).

Глава 1

Экспериментальное исследование стохастической бифуркации Андронова-Хопфа

Введение

Первая глава диссертационной работы посвящена экспериментальному исследованию бифуркации Андронова-Хопфа в различных динамических системах и установлению таких явлений, как существование бифуркационного интервала и сдвиг бифуркации Андронова-Хопфа при наличии аддитивного и мультипликативного белого гауссова шума. Рассматривается как суперкритическая бифуркация, так и субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, а также седло-узловая бифуркация, приводящая к рождению устойчивого и неустойчивого предельных циклов. Проводится сравнительный анализ субкритической и суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа при наличии шума, выделяются общие черты этих бифуркаций в различных системах.

Суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа рассматривается на примере следующих систем: генератор Ван дер Поля с мягким возбуждением, генератор с инерционной нелинейностью Анищенко-Астахова и Брюсселятор. Бифуркационные явления в генераторе Ван дер Поля в присутствии шума анализировались ранее теоретически [32, 47, 57], однако детального экспериментального исследования представлено не было. В связи с этим, были проведены численные и физические эксперименты с целью выявления особенностей влияния шума на генератор Ван дер Поля с мягким возбуждением, которые позволили сделать окончательные выводы на основе сопоставления теоретических и экспериментальных результатов. Следующим шагом было изучение суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа на примере

генератора Анищенко-Астахова, который является более сложной чем генератор Ван дер Поля системой, реализующей бифуркацию Андронова-Хопфа в трехмерном фазовом пространстве. Целью рассмотрения генератора Анищенко-Астахова является анализ степени влияния индивидуальных особенностей отдельно взятой исследуемой системы, размерности фазового пространства, формы нелинейности и т.д. на исследуемую бифуркацию, что позволит сделать более общие выводы о наблюдаемых явлениях. С этой же целью в качестве исследуемой системы был взят брюсселятор. Брюсселятор с цветным шумом рассматривался ранее в работах [54, 55, 58]. В представленной работе брюсселятор исследуется при воздействии белого шума. Сопоставление полученных в рамках первой главы диссертационной работы результатов с результатами работ [54, 55, 58] позволяет сделать вывод о степени влияния спектральных особенностей шума на бифуркацию Андронова-Хопфа. В рамках диссертационной работы также рассматривается субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа в генераторе Ван дер Поля с жестким возбуждением, поведение которого сопоставляется с поведением генератора с мягким возбуждением.

В приложение к работе приведен алгоритм численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), который используется при всех численных исследованиях, проведенных в рамках диссертационной работы. Также изложен принцип создания электронных устройств, являющихся аналоговыми моделями исследуемых систем, приведено описание созданных экспериментальных установок. Приведены результаты численного моделирования и физических экспериментов, произведенных с целью экспериментальной диагностики бифуркаций Р-типа, связанных с качественными перестройками формы совместного вероятностного распределения динамических переменных. Проводится сопоставление результатов численных и физических экспериментов.

1.1. Методы проведения численных и физических экспериментов

В первую очередь необходимо описать, каким образом проводились численные и физические эксперименты. Численные эксперименты осуществлялись в два этапа: моделирование поведения динамической системы и обработка полученных в результате моделирования временных рядов. При численном моделировании использовался метод Гюна [114, 115] (модифицированный метод Эйлера) с учетом шума. Рассмотрим метод Гюна в простейшем одномерном случае для уравнения Стратоновича $\frac{dx}{dt} = f(t, x) + g(t, x)n(t)$, где $n(t)$ - нормированный источник белого гауссова шума. Задача численного интегрирования заключается в нахождении частного решения в виде функции $x(t)$, удовлетворяющей начальному условию $x(t_0) = x_0$. На каждом новом шаге интегрирования $t_i = t_0 + i \cdot h$ (где h - шаг интегрирования) значение $x(t_i)$ определяется согласно формуле:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} (f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, \tilde{x}_{i+1})) + \frac{\sqrt{h}}{2} (g(t_i, x_i) + g(t_{i+1}, \tilde{x}_{i+1})) \xi_i, \quad (1.1)$$

где $\tilde{x}_{i+1} = x_i + h \cdot f(t_i, x_i) + \sqrt{h} \cdot g(t_i, x_i)\xi_i$, где ξ_i - случайная величина, выдаваемая на i -м шаге генератором некоррелированных случайных чисел со стандартным гауссовым распределением.

При проведении численных экспериментов оптимальный шаг по времени Δt для каждой системы выбирался в диапазоне от $\Delta t_{min} = 5 \cdot 10^{-5}$ до $\Delta t_{max} = 10^{-3}$ в зависимости от характерного времени системы. Общее время интегрирования изменялось в зависимости от условий задачи от $t = 10^5$ до $t = 10^{10}$. По полученным временным рядам производился расчет плотности вероятности динамических переменных исследуемой системы. Большое время интегрирования объясняется требованием стационарности вероятностных

распределений и минимизации статистических ошибок.

В целях проведения физических экспериментов создавались радиотехнические экспериментальные установки. При проектировании установок использовались принципы аналогового моделирования [116, 117]. Главным элементом аналоговой модели является схема интегратора на основе операционного усилителя (рис. 1.1а), рассмотрим ее отдельно. Пусть интегратор имеет несколько входов, к которым подключены источники $U_{1,2,\dots,n}$ через сопротивления $R_{1,2,\dots,n}$, через которые протекают токи $i_n = U_n/R_n$. Пусть используемый операционный усилитель является идеальным, тогда входной ток, протекающий через инвертирующий вход операционного усилителя, равен нулю. На инвертирующий вход подается часть выходного напряжения U_{out} через конденсатор C . Через конденсатор течет ток i_c . Для идеального ОУ, охваченного отрицательной обратной связью, выполняется условие: $U_+ = U_-$, где U_+ - напряжение на неинвертирующем входе усилителя (в нашем случае $U_+ = 0$, т.к. неинвертирующий вход заземлен), U_- - напряжение на инвертирующем входе усилителя. Следовательно $U_- = 0$. Для узла а на рис. 1.1а первый закон Кирхгофа будет иметь вид: $i_c + i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0$, или $U_1/R_1 + U_2/R_2 + \dots + U_n/R_n = -C \frac{dU_{out}}{dt}$. Пусть $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$, тогда выражение, описывающее работу интегратора примет вид: $RC \frac{dU_{out}}{dt} = -U_1 - U_2 - \dots - U_n$. Теперь рассмотрим пример использования интегратора,

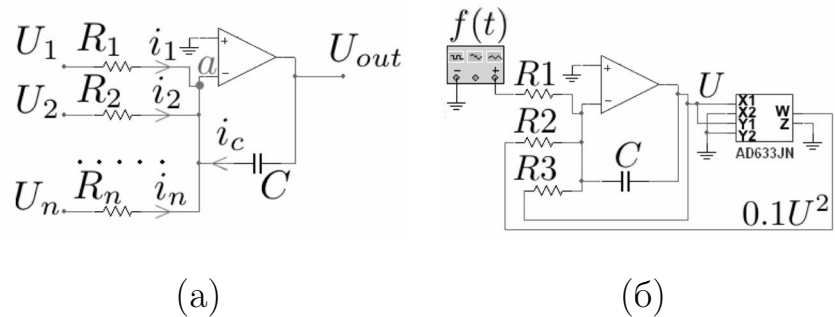


Рис. 1.1. а) Интегратор на операционном усилителе; б) Пример схемы на основе интегратора.

представленный на рис.1.1б. Пусть на выходе интегратора мы имеем напряжение U . На вход интегратора поступают три сигнала. Через резистор $R1$ подключен источник переменного напряжения $U_1 = f(t)$. С помощью аналогового умножителя AD633JN мы преобразуем выходное напряжение интегратора U и получаем сигнал $U_2 = 0.1U^2$, который затем подается на вход интегратора через сопротивление $R2$. Третий сигнал $U_3 = U$ подключен через сопротивление $R3$. Выражение, описывающее работу схемы на рис.1.1б, будет иметь вид:

$$RC \frac{dU}{dt} = -(f(t) + 0.1U^2 + U). \quad (1.2)$$

Все члены в правой части уравнения (1.2) вне зависимости от степени имеет размерность [В]. Дальнейший переход к безразмерным переменным осуществляется перенормировкой всех динамических переменных на 1[В]. Перейдем к безразмерному времени $t^* = RCt$, тогда $\frac{dU}{dt^*} = \frac{dU}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{RC} \frac{dU}{dt}$. С учетом нового временного масштаба уравнение (1.2) примет вид:

$$\dot{U} = -(f(\frac{1}{RC}t^*) + 0.1U^2 + U), \quad (1.3)$$

где $\dot{U} = \frac{dU}{dt^*}$.

В ходе физических экспериментов, проводимых в рамках представленной работы, были созданы аналоговые модели различных динамических систем. Сигналы, отвечающие за мгновенные значения динамических переменных, снимались с соответствующих выходов установок, оцифровывались с помощью АЦП, встраиваемых в компьютер, и затем подвергались дальнейшей обработке. При проведении всех физических экспериментов использовались АЦП PCI-6133 (производство компании National Instruments). Сигналы экспериментальных установок оцифровывались с частотой от $5 \cdot 10^4$ до 10^5 точек в секунду и с разрешением 14 бит. Максимальная ошибка при считывании и

оцифровке аналоговых сигналов не превышала 5мВ. При оцифровке аналоговых сигналов, а также записи временных реализаций в файлы использовались специально разработанные программы в среде Labview 8.5. Обработка временных рядов осуществлялась с помощью программ, написанных на языке С.

При изучении стохастических эффектов в физическом эксперименте использовался широкополосный генератор гауссова шума Г2-59, спектральная плотность которого практически постоянна в полосе частот 0–100кГц. В этом частотном диапазоне можно считать, что $\xi(t) = \sqrt{2\tilde{D}}n(t)$, где $n(t)$ – нормированный источник с единичной спектральной плотностью мощности. Величина $2\tilde{D}$ есть спектральная плотность мощности шумового сигнала, подаваемого на схему, которую можно регулировать в эксперименте и измерять по спектру мощности выходного сигнала генератора шума. Для удобства сравнения результатов физических и численных экспериментов находилась нормированная интенсивность шума D , соответствующая математической модели. Во всех экспериментах, проведенных в рамках диссертационной работы, создавались аналоговые модели, характерный временной масштаб которых определяется значениями R и C при интеграторах экспериментальных установок. С учетом масштаба времени имеем: $D = \tilde{D}/RC$.

1.2. Влияние шума на суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа в генераторе Ван дер Поля

В качестве базовой модели для исследования мягкого возникновения автоколебаний рассмотрим генератор Ван дер Поля. Стохастические уравнения

генератора с аддитивным шумом имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\varepsilon - x^2)y - x + \sqrt{2D}n(t). \end{cases} \quad (1.4)$$

Здесь переменные x , y и время t являются безразмерными величинами. Параметр ε управляет режимом генерации. Во второе уравнение добавлен аддитивный белый гауссов шум, $n(t)$ – нормированный источник $\langle n(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$, $\delta(\tau)$ – функция Дирака, D – интенсивность шума. Уравнения (1.4) описывают многие автоколебательные системы различной природы, в том числе радиотехнический генератор. В отсутствие шума в системе имеется единственная точка равновесия в начале координат $x = 0, y = 0$. При $\varepsilon < 0$ она устойчива и в интервале $-2 < \varepsilon < 0$ является устойчивым фокусом. При $\varepsilon = 0$ имеет место суперкритическая ("мягкая") бифуркация Андронова – Хопфа, в результате которой из устойчивого фокуса рождается устойчивый предельный цикл.

Рассмотрим систему (1.4) в квазигармоническом приближении. Замена переменных:

$$x(t) = a(t)\cos(t + \varphi(t)), \quad y(t) = -a(t)\sin(t + \varphi(t))$$

и условие медленного изменения амплитуды $a(t)$ и фазы $\varphi(t)$ приводят к следующим усредненным уравнениям [118]:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{a}{2} \left(\varepsilon - \frac{a^2}{4} \right) + \frac{D}{2a} + \sqrt{D}n_1(t), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\sqrt{D}}{a}n_2(t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ – независимые нормированные источники гауссова белого шума. Из (1.5) следует амплитудное распределение

$$P(a) = Na \exp \left\{ -\frac{1}{16D} (a^2 - 4\varepsilon)^2 \right\},$$

где N – нормировочная константа, таким образом, распределение динамических переменных есть

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi a} p(a) = C \exp \left\{ -\frac{1}{16D} (x^2 + y^2 - 4\varepsilon)^2 \right\}, \quad (1.6)$$

где $C = N/2\pi$.

Как следует из (1.6), в квазигармоническом приближении характер стохастической бифуркации и бифуркационное значение параметра $\varepsilon = 0$ не зависят от интенсивности шума D . Однако, квазигармоническое приближение корректно при $D \ll \varepsilon^2$ и вблизи значения $\varepsilon = 0$ при конечной интенсивности шума может приводить к ошибочным результатам. В [32] на основании приближенного аналитического решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова было получено выражение для вероятностного распределения в автогенераторе, справедливое также при $\varepsilon^2 \ll D$:

$$P(x, y) = C \exp \left\{ -\frac{1}{32D} ((x^2 + y^2)^2 - 8\varepsilon(x^2 + y^2)) - \frac{3}{4}xy \right\}. \quad (1.7)$$

Анализ выражения (1.7) дает следующую картину стохастической бифуркации: при $\varepsilon < -3D/2$ распределение $P(x, y)$ имеет единственный максимум в начале координат, что соответствует зашумленному состоянию устойчивого равновесия при $x = 0, y = 0$. Область $-3D/2 < \varepsilon < 3D/2$ представляет собой бифуркационный интервал. На левой границе интервала $\varepsilon = -3D/2$ в точках $x_{1,2} = \pm\sqrt{(2\varepsilon + 3D)}$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{(2\varepsilon + 3D)}$ возникают два максимума, что приводит к разрушению радиальной симметрии распределения. В пределах бифуркационного интервала форма распределения плавно эволюционирует и при $\varepsilon = 3D/2$ завершается формирование замкнутого кратера вокруг минимума распределения в начале координат. Т.е. образуется распределение, форма которого характерна для режима автоколебаний в системе с шумом.

В рамках диссертационной работы были проведены расчеты, основан-

ные на численном интегрировании стохастических уравнений (1.4) и построении вероятностного распределения $P(x, y)$ путем статистической обработки данных (рис. 1.2,а). Для более точной диагностики бифуркационных переходов помимо плотности вероятности $P(x, y)$ строились сечения вероятностного распределения плоскостями $x = y$ и $x = -y$ (рис. 1.2,б). Данные сечения являются характерными для осциллятора Ван дер Поля, т.к. проходят через стенки кратера распределения в точках их наименьшей и наибольшей высоты, соответственно (данный факт был установлен экспериментально, см. рис. 1.2,б).

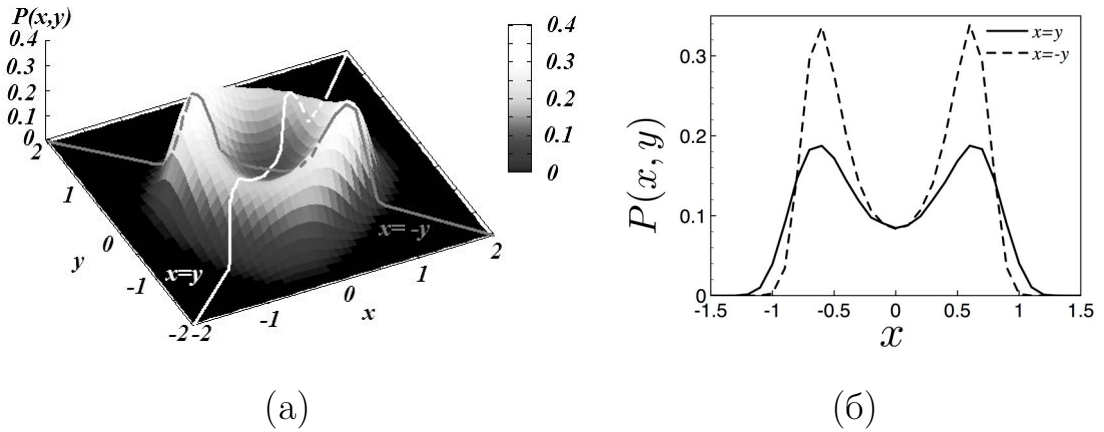


Рис. 1.2. Иллюстрации к методу исследования вероятностного распределения

Наблюдаемая эволюция плотности вероятности при вариации параметров ε и D , полностью согласуется с выводами теории, изложенной в [32]. Расчеты показали наличие бифуркационного интервала, соответствующего стохастической бифуркации Андронова-Хопфа. Причем оценка границ бифуркационного интервала, полученная в численных экспериментах близка к теоретическим результатам. В качестве иллюстрации ниже приведены вероятностные распределения в (1.4) при изменении параметра ε (рис. 1.3).

В рамках данной работы был проведен ряд физических экспериментов, направленных на исследование влияния аддитивного шума на возникновение автогенерации в системе (1.4). В этих целях была создана установка, ко-

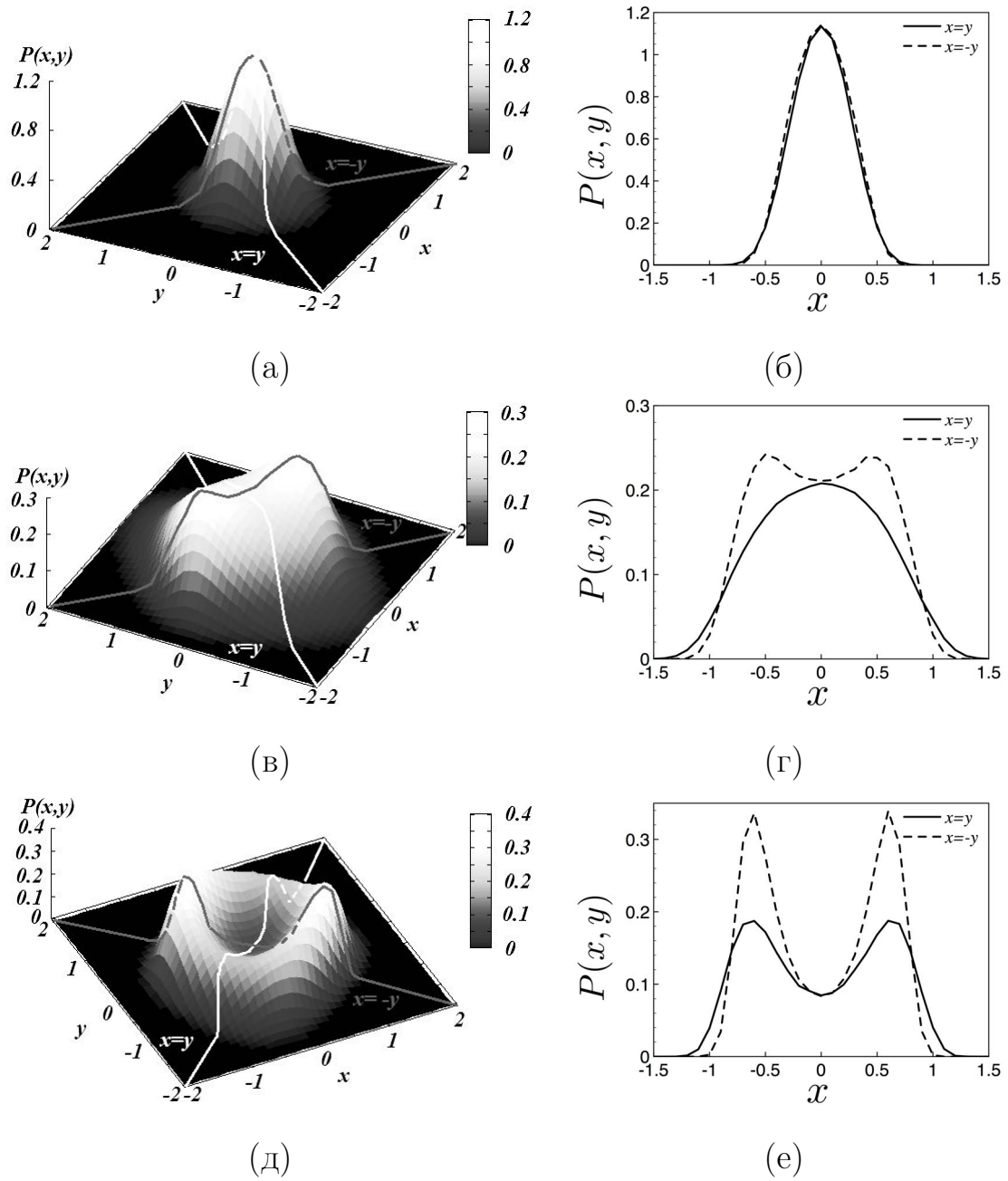


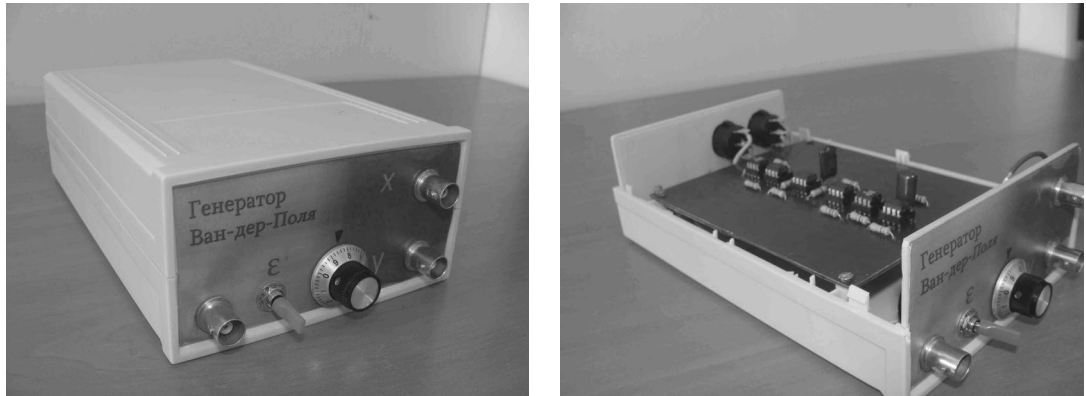
Рис. 1.3. Вероятностные распределения системы (1.4) и соответствующие сечения $x = y$ и $x = -y$: а,б: $\varepsilon = -0.20$, $D = 0.035$, в,г: $\varepsilon = 0$, $D = 0.35$, д,е: $\varepsilon = 0.20$, $D = 0.035$

торая является аналоговой моделью исследуемой системы. Схема установки представлена на рис.1.4. Уравнения в физических переменных, описывающие данную схему, имеют вид:

$$\begin{cases} R_0 C \dot{x} = y, \\ R_0 C \dot{y} = (U - x^2)y - x + \xi(t). \end{cases} \quad (1.8)$$

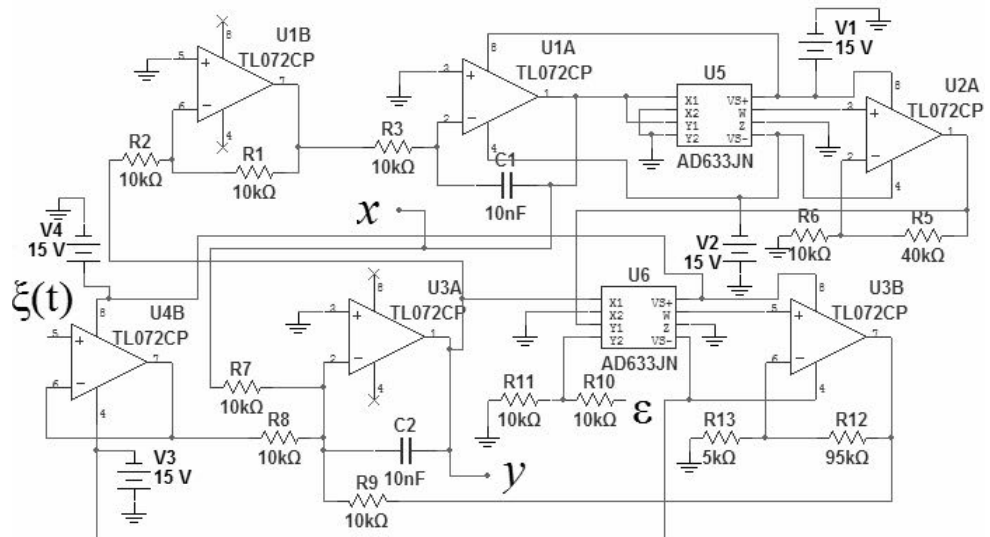
где x, y – напряжения, снимаемые с соответствующих выходов установки, U – напряжение, управляющее значением параметра ε ($\varepsilon = U$). Параметры схемы подбирались таким образом, чтобы имело место количественное совпадение безразмерных переменных x и $y = \dot{x}$ в (1.4) и соответствующих величин в (1.8). Таким образом, уравнения (1.4) и (1.8) отличаются только масштабом времени, который в (1.8) задается параметрами $R_0 = 10$ кОм и $C = 10$ нФ. Все члены в уравнениях (1.8), независимо от степени, представляют собой напряжения, снимаемые с различных точек схемы и измеряемые в вольтах. В (1.8) также входит случайное слагаемое $\xi(t)$, которое описывает напряжение, создаваемое генератором шума. Интенсивность шума D , соответствующая математической модели, есть $D = \tilde{D}/R_0 C = \tilde{D}/10^{-4}$, где \tilde{D} – экспериментально измеренная спектральная плотность шума. При проведении физических экспериментов снимались реализации переменных $x(t)$ и $y(t)$, которые оцифровывались и обрабатывались на компьютере, что позволяло получить плотность вероятности $P(x, y)$ и проследить, как она меняется при изменении параметров ε и D .

Проведенные физические эксперименты подтверждают наличие бифуркационного интервала и установленную в [32] теоретическую зависимость формы распределения $p(x, y)$ от интенсивности аддитивного шума. В экспериментах с ростом интенсивности шума D при $\varepsilon > 0$ наблюдалось разрушение кратерообразной формы распределения. Карта режимов исследуемого генератора с аддитивным шумом, полученная в физическом эксперименте,



(а)

(б)



(в)

Рис. 1.4. Внешний вид (а,б) и принципиальная схема (в) экспериментальной установки (аналоговая модель системы (1.4))

представлена на рис.1.5. На рис. 1.5 приведены границы бифуркационного интервала, полученные в численном и физическом экспериментах, которые сопоставляются с теоретическим результатом из [32].

На представленной диаграмме можно видеть, что границы бифуркационного интервала, полученные в физическом эксперименте не являются симметричными относительно вертикали $\varepsilon = 0$ и отличаются от теоретических, причем для левой границы это отличие весьма заметно. Данные количественные расхождения объясняются неполным соответствием нелинейности в реальной схеме и в уравнениях (1.4), а также неточностями, возникающими при нормировке интенсивности шума в эксперименте. Однако качественное соответствие физического и численного экспериментов, с одной стороны, и теоретических результатов, с другой стороны, очевидно.

Рассмотрим теперь автогенератор, находящийся под действием мультипликативного шума. Предположим, что параметр возбуждение ε помодулирован гауссовым белым шумом. В рассматриваемом случае параметрическое шумовое воздействие соответствует мультипликативному шуму, интенсивность воздействия которого на систему оказывается пропорциональной переменной \dot{x} .

Генератор Ван дер Поля с суперкритической бифуркацией Андронова-Хопфа, содержащий, помимо аддитивного шума, указанный выше источник мультипликативного шума задается системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = ((\varepsilon + \sqrt{2D}n_2(t)) - x^2)y - x + \sqrt{2D_1}n_1(t). \end{cases} \quad (1.9)$$

где нормированный источник $n_2(t)$ с интенсивностью D соответствует мультипликативному шуму, а $n_1(t)$, характеризующийся интенсивностью D_1 , отвечает за аддитивный шум. Источники шума полагаются независимыми, белыми, гауссовыми.

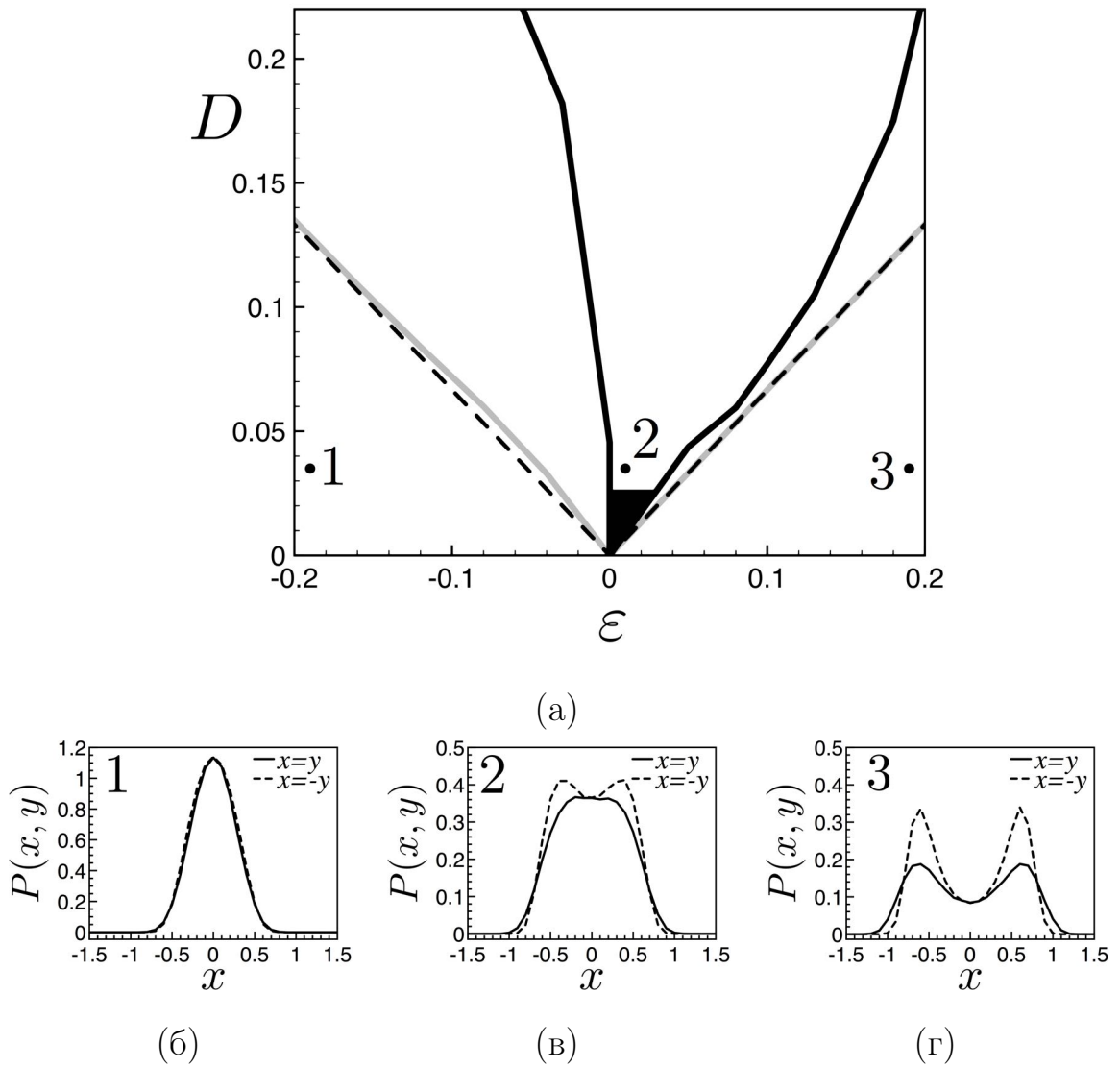


Рис. 1.5. а) Карта режимов исследуемой системы. Серые линии - границы бифуркационного интервала, полученные в численном эксперименте для системы (1.4), черные линии - границы бифуркационного интервала, которые были получены в физическом эксперименте для системы (1.8) (черная область вблизи $\varepsilon = 0$ соответствует области, в которой не представляется возможным достоверно выявить границы бифуркационного интервала), пунктиром отмечены границы бифуркационного интервала, полученные теоретически для системы (1.4) в работе [32]. б), в), г) - характерные сечения вероятностного распределения в соответствующих точках на карте режимов, полученные в физическом эксперименте.

В рамках квазигармонического анализа приходим к следующему стационарному распределению амплитуды (при отсутствии аддитивного шума оно совпадает с приведенным в [15])

$$P(a) = Na(Da^2 + 4D_1)^\alpha \exp -\frac{a^2}{2D}, \quad \alpha = \frac{2\varepsilon}{D} + \frac{2D_1}{D^2},$$

из которого, с учетом независимости амплитуды и фазы, следует стационарное распределение динамических переменных:

$$P(x, y) = C (D(x^2 + y^2) + 4D_1)^\alpha \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2D} \right\}. \quad (1.10)$$

где N и $C = N/2\pi$ – нормировочные константы. Распределение (1.10) демонстрирует стохастическую бифуркацию при $\varepsilon = 0$, состоящую в переходе от распределения с одним максимумом в начале координат к распределению в форме замкнутого кратера. Однако квазигармонический анализ не дает полного представления о бифуркации.

В целях экспериментального исследования стохастической бифуркации Андронова-Хопфа в случае мультипликативного шумового воздействия были проведены численные и физические эксперименты. В физических экспериментах использовалась аналоговая модель генератора, представленная на рис.1.4, но вместо аддитивного шумового воздействия к напряжению U_0 , задающему значение управляющего параметра ε добавляется широкополосный случайный сигнал. Следует отметить, что в экспериментальной установке, помимо мультипликативного шума, всегда присутствуют естественные источники аддитивного шума. Аддитивная компонента шума в эксперименте мала по сравнению с внешним мультипликативным шумом, задаваемым специальным генератором. При численном моделировании она также учитывается (источник $\sqrt{2D_1}n_1(t)$ в (1.9)), а ее интенсивность полагается малой: $D_1 = 0.0001$. Уравнения, описывающие работу экспериментальной установки имеют вид:

$$\begin{cases} R_0 C \dot{x} = y, \\ R_0 C \dot{y} = ((U_0 + \xi(t)) - x^2)y - x + \chi(t). \end{cases} \quad (1.11)$$

где $\xi(t)$ – внешний сигнал широкополосного генератора шума. Источник $\chi(t)$ представляет собой совокупный аддитивный шум, присутствующий в экспериментальной установке.

Как показали проведенные численные и физические эксперименты, суперкритическая бифуркация при мультипликативном шуме носит запаздывающий характер, т.е. переход к распределению в форме кратера происходит в области $\varepsilon > 0$, причем бифуркационное значение параметра тем больше, чем сильнее шум. При этом, бифуркационный интервал не наблюдается вплоть до очень больших значений интенсивности шума. При численном исследовании в области больших значений параметра ε и интенсивности мультипликативного шума D удалось обнаружить эффект, подобный образованию бифуркационного интервала. Он связан с сильной асимметрией распределения и проявляется в возникновении распределений с тремя максимумами. При фиксированном значении $\varepsilon > 0$ с ростом интенсивности шума имеет место "стягивание" кратера, т.е. уменьшение его диаметра, что приводит к формированию распределения с одним острым пиком. Такое распределение в случае параметрического шума характерно для состояния устойчивого равновесия. Таким образом, влияние мультипликативного шума на систему является принципиально иным по сравнению с влиянием аддитивного шума. Результаты численных и физических экспериментов отражены на карте режимов, представленной на рис.1.6.

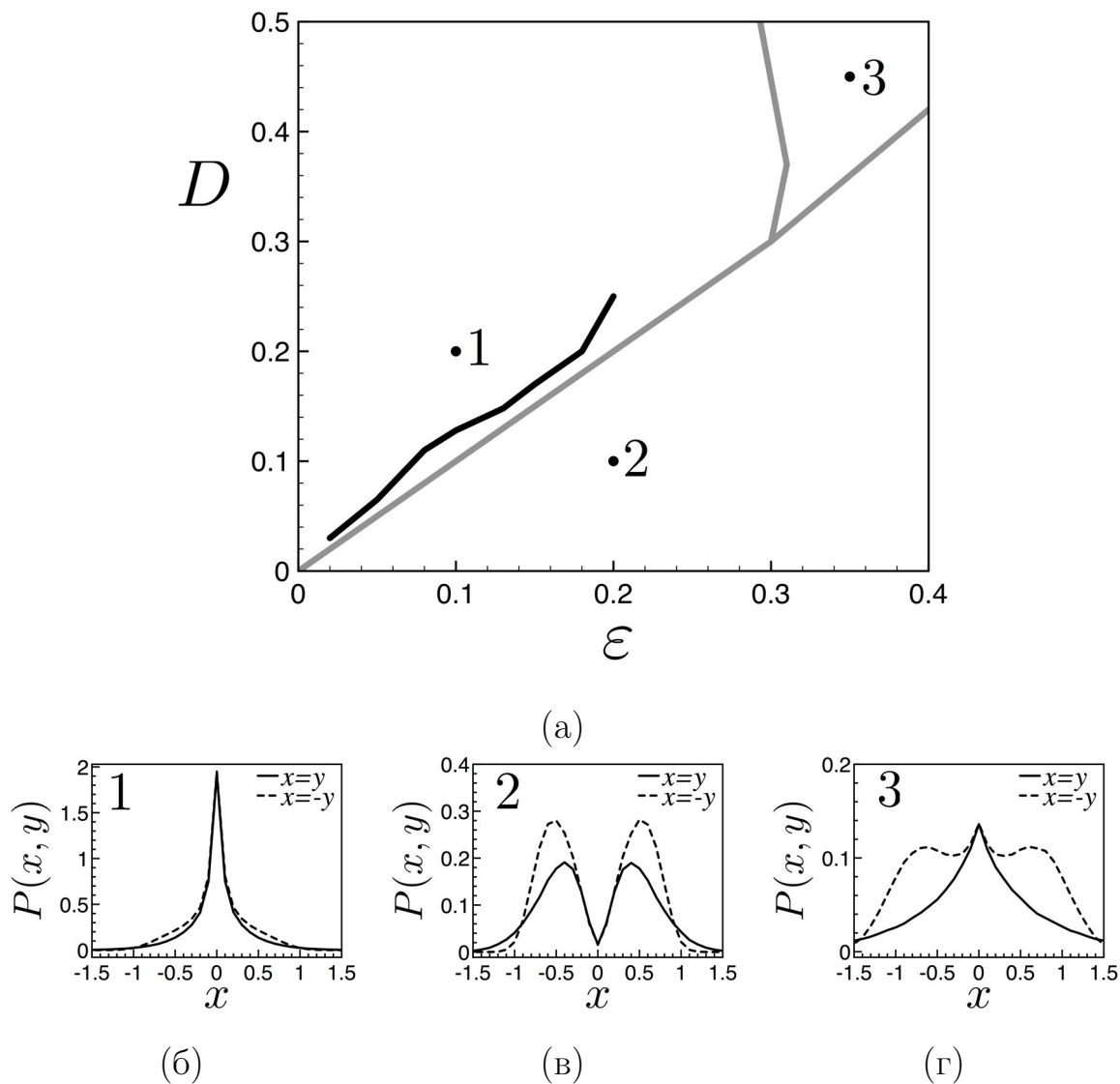


Рис. 1.6. а) Карта режимов, полученная численно для системы (1.9) (серые линии) и для системы (1.11) в физическом эксперименте. б, в, г - вероятностные распределения, характерные для каждой из областей.

1.3. Суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа в генераторе с инерционной нелинейностью

Анищенко–Астахова

Можно предположить, что представленный в предыдущем разделе характер перестройки вероятностного распределения, наблюдаемый с ростом шума, зависит от свойств динамической системы: от ее размерности и формы нелинейности. Однако, в любом случае с ростом шума замкнутый кратер, соответствующий зашумленным автоколебаниям, должен разрушаться. В целях проверки данного предположения помимо генератора Ван дер Поля с размерностью фазового пространства, равной двум, экспериментально была исследована также модель генератора с инерционной нелинейностью Анищенко–Астахова, имеющая размерность 3 [119]. Генератор Анищенко-Астахова описывается следующей системой уравнений для безразмерных переменных:

$$\begin{cases} \dot{x} = mx + y - xz + \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y} = -x, \\ \dot{z} = -g(z - F(x)), \\ F(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 0, \\ 0, x < 0, \end{cases} \end{cases} \quad (1.12)$$

где m, g – управляющие параметры системы, $n(t)$ – нормальный нормированный источник белого шума, D – интенсивность шума. Система (1.12) при $D = 0$ имеет единственную точку равновесия в начале координат, которая устойчива при $m < 0$ и претерпевает суперкритическую бифуркацию Андронова – Хопфа при $m = 0$. Исследование стохастической бифуркации в трехмерной системе (1.12) ограничилось рассмотрением совместного распределения только двух переменных: x и y , поскольку в плоскости этих переменных происходит вращение фазовых траекторий вокруг неустойчивой точки

равновесия. Поскольку данная система не обладает симметрией относительно сечений $y = x$ и $y = -x$, данные сечения не рассматриваются. Для осуществления физических экспериментов была создана установка, представляющая собой аналоговую модель системы (1.12), схема которой приведена на рис.1.7. Уравнения, описывающие эту схему в физических переменных, имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0 C \dot{x} = U_1 x + y - xz + \xi(t), \\ R_0 C \dot{y} = -x, \\ R_0 C \dot{z} = -U_2(z - F(x)), \\ F(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 0, \\ 0, x < 0, \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.13)$$

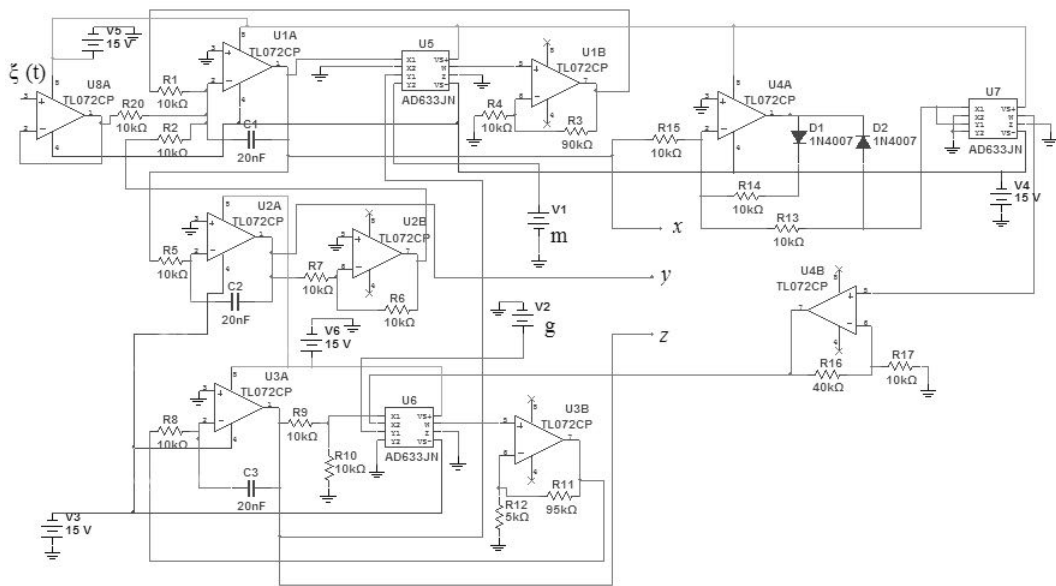
где x, y, z – напряжения, снимаемые с соответствующих выходов установки, $U_{1,2}$ – напряжения, управляющие значениями параметров ($m = U_1, g = U_2$). Как и в случае с генератором Ван дер Поля, параметры схемы подбирались таким образом, чтобы имело место равенство безразмерных переменных x и $y = \dot{x}$ в (1.12) и соответствующих величин в (1.13). Масштаб времени, в (1.13) задается параметрами $R_0 = 10$ кОм и $C = 10$ нФ. Случайное слабое $\xi(t)$ описывает напряжение, создаваемое генератором шума (как и в случае с генератором Ван дер Поля): $\xi(t) = \sqrt{2\tilde{D}}n(t)$. Интенсивность шума D , соответствующая математической модели определялась как $D = \tilde{D}/R_0C$.

Численные эксперименты показали, что в (1.12) также как и в (1.4) наблюдается разрушение кратерообразной формы распределения при увеличении интенсивности шума D . Однако в данном случае происходит разрушение стенки кратера только с одной стороны. На рис.1.8а,б этот эффект хорошо различим. Проведенные физические эксперименты полностью подтвердили тот же характер эволюции вероятностного распределения, который был обнаружен при численном моделировании. Хотя аналоговая модель (1.13) не вполне строго в количественном отношении соответствует уравнениям (1.12)



(а)

(б)



(в)

Рис. 1.7. Внешний вид (а,б) и принципиальная схема (в) экспериментальной установки (аналоговая модель системы (1.12) с аддитивным шумом)

(имеется незначительный сдвиг бифуркационных значений параметров), но качественно экспериментально полученная эволюция плотности вероятности с ростом шума (рис.1.8в,г) полностью соответствует данным численного моделирования.

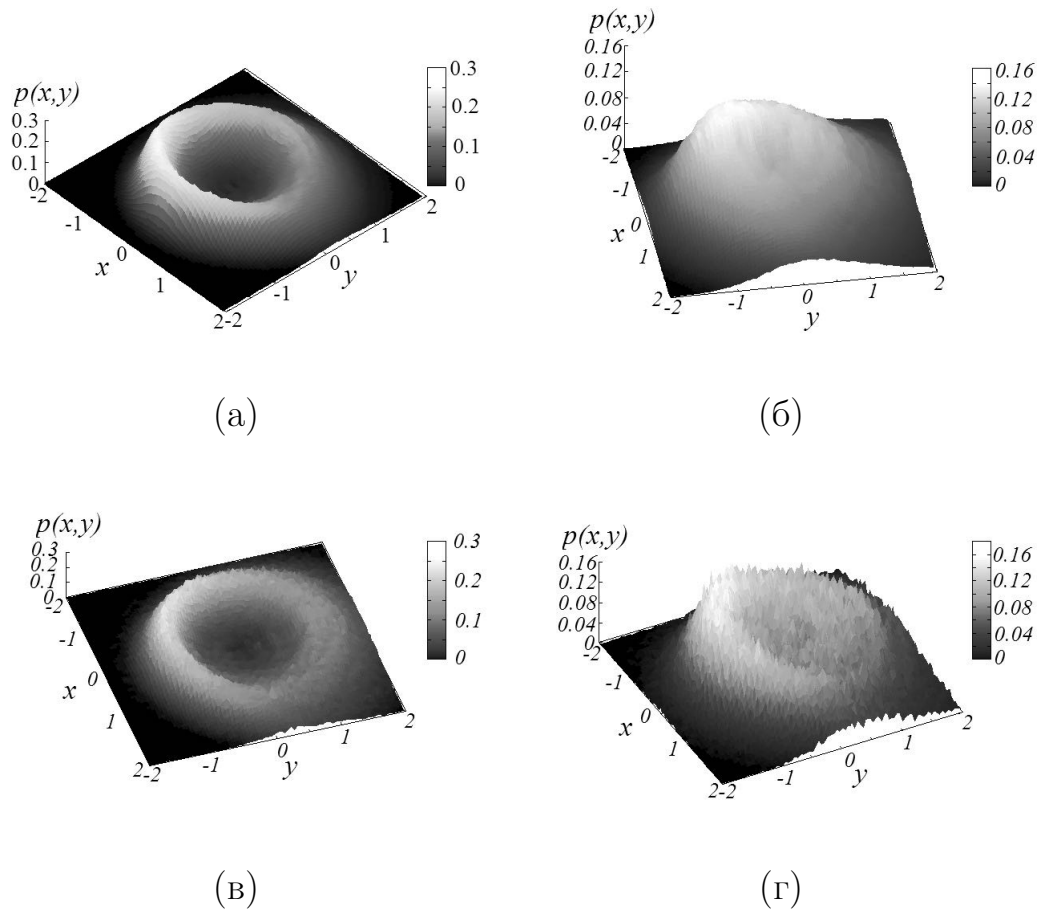


Рис. 1.8. Распределения вероятностей в генераторе Анищенко–Астахова при $m = 0.4$, $g = 0.25$ и различных интенсивностях аддитивного шума в численном эксперименте: $D = 0.027$ (а); $D = 0.11$ (б) и в физическом эксперименте: $D = 0.11$ (в); $D = 0.41$ (г)

Численные и физические эксперименты были также проведены для генератора Анищенко–Астахова с параметрическим шумом, модулирующим па-

раметр m . В численном эксперименте исследуемая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = (m + \sqrt{2D}n(t))x + y - xz, \\ \dot{y} = -x, \\ \dot{z} = -g(z - F(x)), \\ F(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 0, \\ 0, x < 0, \end{cases} \end{cases} \quad (1.14)$$

где m, g – управляющие параметры системы, $n(t)$ – нормированный источник гауссова белого шума, D – интенсивность шума.

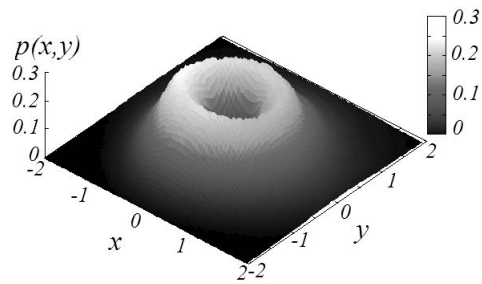
В физическом эксперименте использовалась аналоговая модель генератора Анищенко–Астахова, изображенная на рис.1.7. Аддитивное внешнее воздействие было заменено на случайный сигнал $\xi(t) = \sqrt{2\tilde{D}}n(t)$, добавляемый к напряжению U_1 , задающему значение управляющего параметра m . В целях количественного сравнения полученных экспериментальных данных с результатами численного моделирования при описании полученных результатов использовалась интенсивность шума, соответствующая математической модели, $D = \tilde{D}/R_0C$. Напряжение U_2 , которое задает значение управляющего параметра $g = U_2$ было постоянным ($g = U_2 = 0.25$). Уравнения, описывающие работу экспериментальной установки, имеют вид:

$$\begin{cases} R_0C\dot{x} = (U_0 + \xi(t))x + y - xz, \\ R_0C\dot{y} = -x, \\ R_0C\dot{z} = -g(z - F(x)), \\ F(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 0, \\ 0, x < 0, \end{cases} \end{cases} \quad (1.15)$$

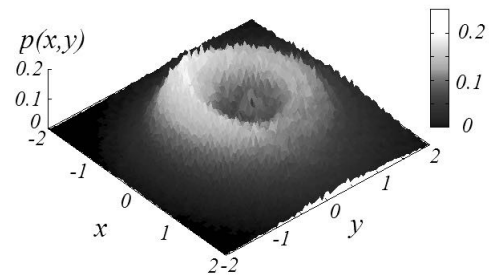
Эволюция плотности вероятности с ростом интенсивности параметрического шума представлена на рис.1.9. Как при численном моделировании (рис.1.9 а, б, в), так и в физическом эксперименте (рис.1.9 г, д, е) наблюдалась качественно одинаковая картина эволюции. При увеличении интенсивности

шума имеет место перестройка вероятностного распределения, при которой происходит "просаживание" стенок кратера и одновременное формирование пика в центре кратера.

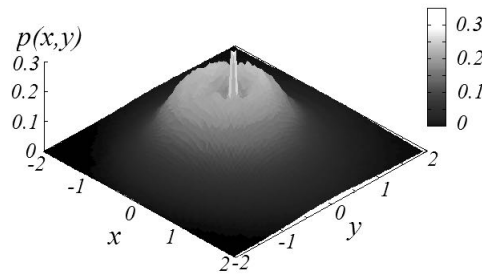
Таким образом, эволюция вероятностного распределения в генераторе Анищенко–Астахова при параметрическом шумовом воздействии качественно отличается от той, которая наблюдается в генераторе Ван дер Поля. Она больше напоминает перестройку вероятностного распределения в генераторе с субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа [63]. Однако бифуркация в генераторе Анищенко–Астахова является суперкритической. Можно предположить, что в данном случае принципиальной оказывается размерность системы. Точка равновесия в генераторе Анищенко–Астахова после бифуркации является седлофокусом и помимо неустойчивого двумерного многообразия имеет одномерное устойчивое многообразие, направленное вдоль оси z . Параметрический шум может приводить к появлению фазовых траекторий, стремящихся к точке равновесия вдоль устойчивого многообразия, в результате чего в начале координат (в точке равновесия) возникает максимум распределения раньше, чем разрушается кратер, соответствующий предельному циклу.



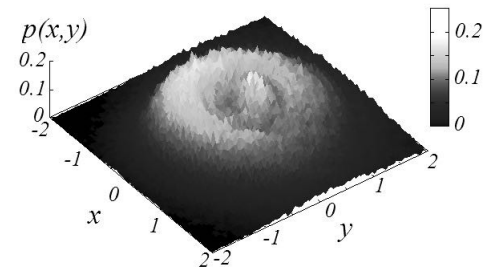
(а)



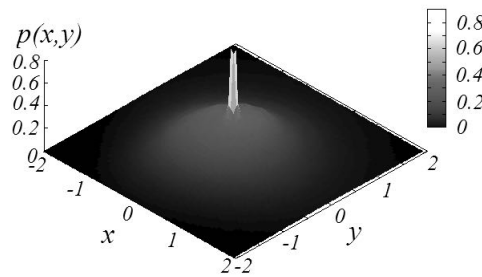
(г)



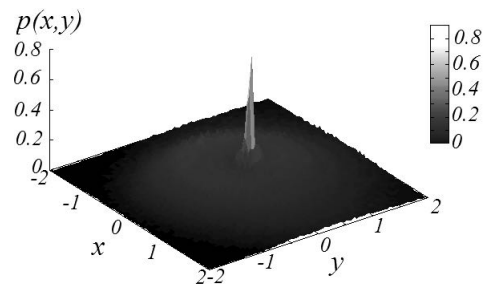
(б)



(д)



(в)



(е)

Рис. 1.9. Графики плотности вероятности в генераторе Анищенко –Астахова при $m = 0.3$, $g = 0.25$ и различной интенсивности параметрического шума в численном эксперименте: $D = 0.05$ (а); $D = 0.08$ (б); $D = 0.10$ (в) и в физическом эксперименте: $D = 0.10$ (г); $D = 0.12$ (д); $D = 0.13$ (е)

1.4. Суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа в модели брюсселятора

Далее рассмотрим модель брюсселятора [120]. Данная система может управляться параметром, входящим в уравнения как отдельное слагаемое. Поскольку в [54, 55, 58] также рассматривается брюсселятор, полученные результаты удобно сравнивать с уже имеющимися. Проводилось численное исследование системы при модуляции последовательно двух разных управляющих параметров гауссовым белым шумом и физический эксперимент с помощью аналоговой модели брюсселятора.

Модель брюсселятора представляет собой следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = A - (1 + B)x + x^2y, \\ \dot{y} = Bx - x^2y, \end{cases} \quad (1.16)$$

где x, y - динамические переменные, A, B - управляющие параметры. В отсутствии шума система (1.16) демонстрирует суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа при достижении параметра B значения $B = 1 + A^2$. Сначала рассмотрим шумовую модуляцию параметра B : $B = B_0 + \sqrt{2D}n(t)$, где $n(t)$ - нормированный источник белого гауссова шума, D - интенсивность шума. Такой параметрический шум является мультипликативным и присутствует в обоих уравнениях системы. Случай шумовой модуляции параметра B был рассмотрен в работах [54, 55, 58], однако в них шум полагался узкополосным. Сравнительный анализ полученных нами результатов и экспериментальных результатов, представленных в [55], позволит оценить степень влияния спектральных характеристик шума на стохастическую бифуркацию Андронова-Хопфа.

Зафиксируем параметр системы (1.16) $A = 1$ и интенсивность шума

$D = 0.01$ и пронаблюдаем за эволюцией вероятностного распределения динамических переменных $P(x, y)$ с ростом параметра B . Полученные результаты представлены на рис. 1.10. Распределение $P(x, y)$ показано на диаграммах градациями серого цвета от белого (нулевое значение) до черного (максимальное значение). Из рис. 1.10 видно, что с ростом значения параметра B наблюдается переход от распределения с ярко выраженным пиком (рис. 1.10а), соответствующего зашумленной устойчивой неподвижной точке, к распределению в форме замкнутого кратера, характерного для устойчивого предельного цикла (рис. 1.10в). Этот переход происходит не сразу при определенном значении параметра, а постепенно, при прохождении параметра через некоторую область, в которой имеет место промежуточная форма вероятностного распределения, похожая на кратер с разрушенной стенкой (рис. 1.10б). Данные результаты свидетельствуют о существовании бифуркационного интервала. Аналогичная эволюция распределения была установлена в [55] при узкополосной шумовой модуляции параметра B . Таким образом, спектральные характеристики параметрического шума в данном случае не являются принципиальными. Необходимо отметить, что в брюсселяторе начало (левая граница) бифуркационного интервала не определяется строго, поскольку не связана с возникновением новых экстремумов вероятностного распределения, как это имеет место в осцилляторе Ван дер Поля с аддитивным шумом [32], или иной качественной перестройкой формы распределения. Более-менее строго можно определить только правую границу, соответствующую образованию распределения в форме замкнутого кратера. Таким образом, в брюсселяторе понятие бифуркационного интервала является достаточно условным. Для определенности будем далее считать моментом бифуркации Андронова-Хопфа пересечение правой границы бифуркационного интервала, определяющей переход в режим генерации.

Чтобы выяснить, сдвигается ли бифуркационное значение параметра B

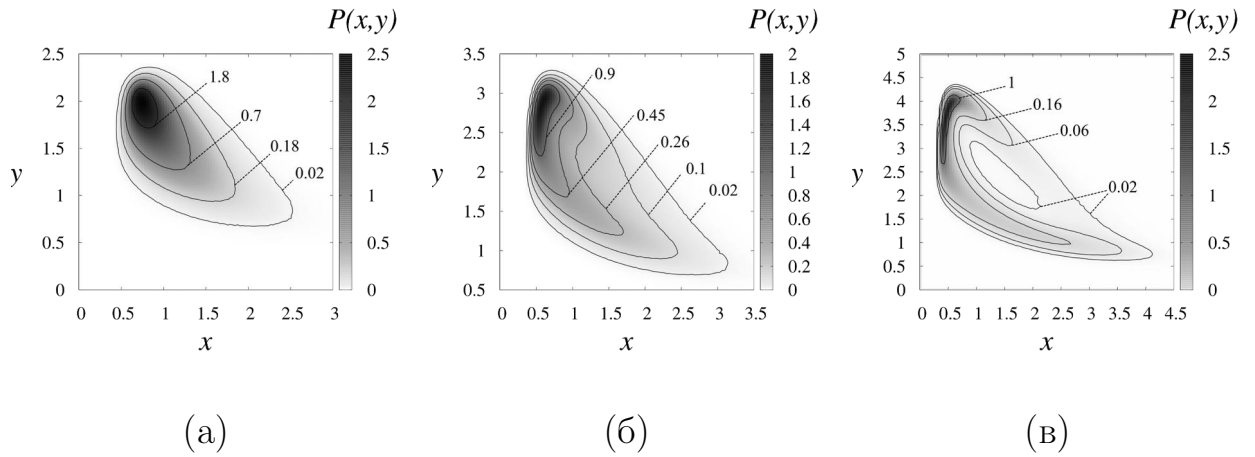


Рис. 1.10. Эволюция вероятностного распределения системы (1.16) с ростом параметра B при шумовой модуляции параметра B : $B = B_0 + \sqrt{2D}n(t)$, $A = 1$, $D = 0.01$: а) $B_0 = 1.7$; б) $B_0 = 2.2$; в) $B_0 = 2.7$. Замкнутые линии соответствуют уровням плотности вероятности $p(x, y)$, указанным сбоку цифрами.

в результате действия шума, зафиксируем значения параметров так, чтобы система находилась в автоколебательном режиме, и пронаблюдаем, какие изменения претерпевает вероятностное распределение с ростом шума. Полученные результаты представлены на рис.1.11. Увеличение интенсивности шума приводит к разрушению кратерообразного распределения. Чтобы снова получить распределение в форме замкнутого кратера необходимо увеличить значение управляющего параметра. Таким образом, можно говорить о сдвиге стохастической бифуркации Андронова-Хопфа в сторону увеличения значений B .

Пусть теперь имеет место шумовая модуляция параметра A : $A = A_0 + \sqrt{2D}n(t)$, где $n(t)$ - нормированный источник белого гауссова шума, D - интенсивность шума. В этом случае источник шума в системе (1.16) будет аддитивным. Зафиксируем параметр $A_0 = 1$ и интенсивность шума $D = 0.01$ и будем увеличивать параметр B . Полученные результаты представлены на рис.1.12, они свидетельствуют о наличии бифуркационного интервала при стохастической бифуркации Андронова-Хопфа в случае шумовой модуляции

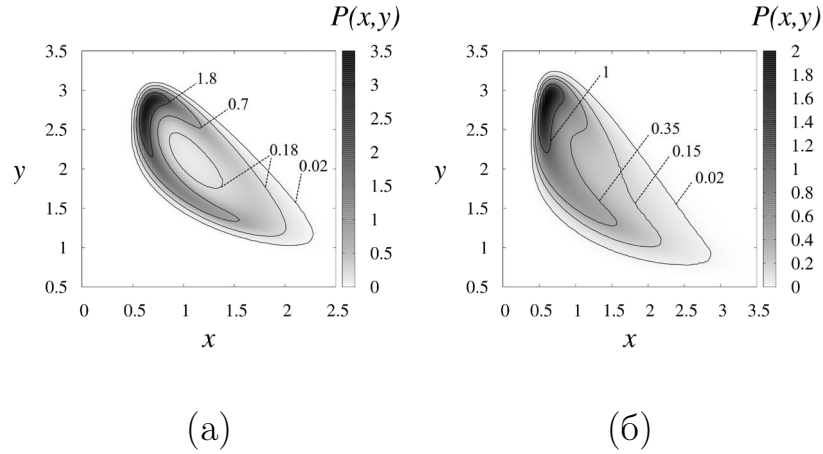


Рис. 1.11. Эволюция вероятностного распределения системы (1.16) с ростом интенсивности шума D при шумовой модуляции параметра B : $B = 2.2 + \sqrt{2D}n(t)$, $A = 1$: а) $D = 0.001$; б) $D = 0.006$.

параметра A . В целом характер эволюции вероятностного распределения остается тем же самым, что и при модуляции параметра B . Можно также говорить о запаздывании бифуркации в указанном ранее смысле, что подтверждается результатами, представленными на рис. 1.13.

В целях экспериментального подтверждения результатов численного моделирования системы (1.16) в присутствии параметрического шума были проведены физические эксперименты на аналоговой модели системы (1.16). Схема экспериментальной установки представлена на рис.1.14, а ее работа описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} R_0 C \dot{x} = A - (1 + B)x + x^2 y, \\ R_0 C \dot{y} = Bx - x^2 y. \end{cases} \quad (1.17)$$

Параметры A и B системы (1.17) есть напряжения, которые подаются на соответствующие входы установки, причем значения параметров A и B равны величине напряжения на соответствующих входах в вольтах. При такой конфигурации стало возможным подавать на входы, отвечающие за значения параметров A и B , суммы постоянного напряжения и шумового сигнала:

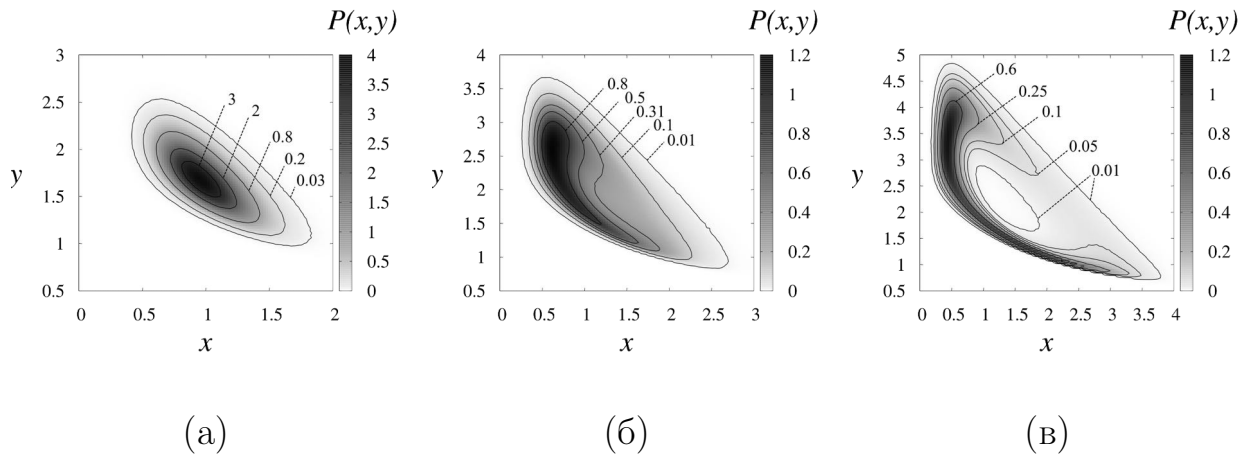


Рис. 1.12. Эволюция вероятностного распределения системы (1.16) с ростом параметра B при шумовой модуляции параметра A : $A = 1 + \sqrt{2D}n(t)$, $D = 0.01$: а) $B = 1.7$; б) $B = 2.2$; в) $B = 2.7$.

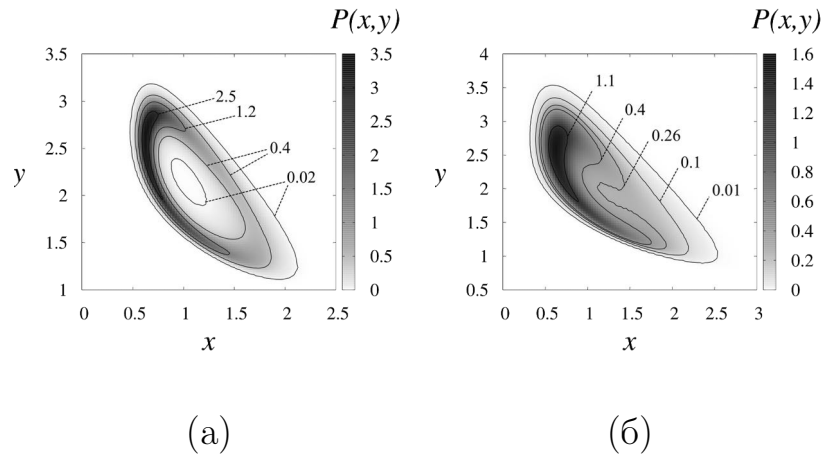
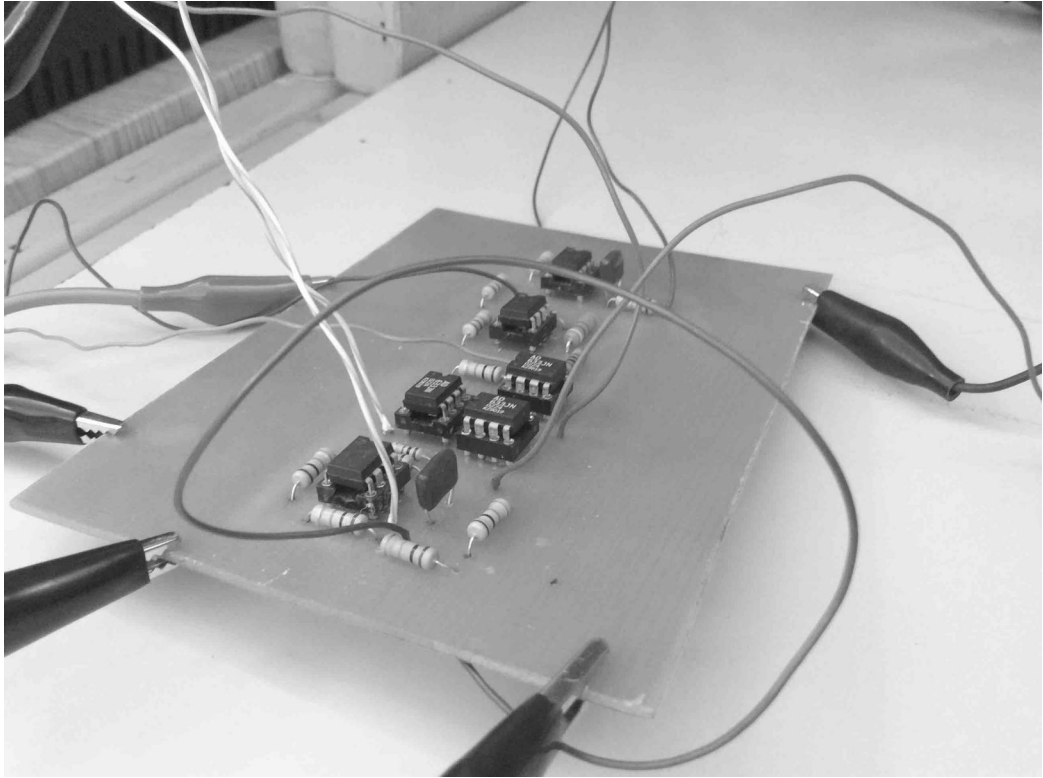


Рис. 1.13. Эволюция вероятностного распределения системы (1.16) с ростом интенсивности шума D при шумовой модуляции параметра A : $A = 1 + \sqrt{2D}n(t)$, $B = 2.2$; а) $D = 0.001$; б) $D = 0.006$.

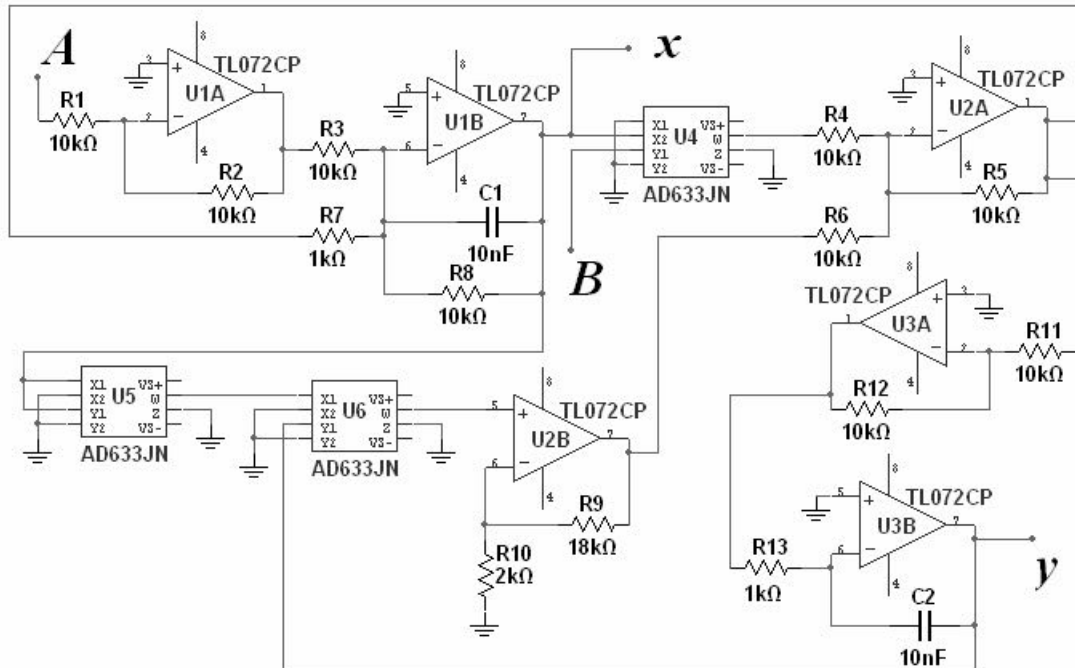
$A = A_0 + \xi(t)$, или $B = B_0 + \xi(t)$. Уравнения (1.16) и (1.17) отличаются только масштабом времени, который в (1.17) задается параметрами $R_0 = 10\text{кОм}$ и $C = 10\text{нФ}$. Случайное слагаемое $\xi(t)$ описывает напряжение, создаваемое генератором шума. Как и ранее, интенсивность шума D , соответствующая математической модели, определялась как $D = \tilde{D}/R_0C$, где \tilde{D} - экспериментально измеренная интенсивность шума.

Рассмотрим экспериментально случай шумовой модуляции параметра B в системе (1.17) аналогично тому, как это уже было проделано в численных экспериментах. Зафиксируем параметр системы $A = 1$ и интенсивность шума $D = 0.05$ и пронаблюдаем за эволюцией вероятностного распределения динамических переменных с ростом параметра B . Полученные результаты, представленные на рис.1.15, полностью подтверждают результаты численного моделирования (рис.1.10) и свидетельствуют о наличии бифуркационного интервала для стохастической бифуркации Андронова-Хопфа в случае модуляции параметра B широкополосным шумовым сигналом. Зафиксируем значения параметров так, чтобы система находилась в автоколебательном режиме, и пронаблюдаем, какие изменения претерпевает вероятностное распределение с ростом шума. Полученные результаты представлены на рис.1.16. Увеличение интенсивности шума приводит к разрушению кратерообразного распределения, что можно рассматривать как следствие сдвига стохастической бифуркации Андронова-Хопфа в сторону увеличения значений параметра.

Теперь рассмотрим экспериментальные результаты, полученные при шумовой модуляции параметра A системы (1.17): $A = A_0 + \sqrt{2D}n(t)$. Эволюция вероятностного распределения с ростом параметра B при фиксированных значениях $A_0 = 1$ и $D = 0.05$ проиллюстрирована на рис.1.17. Экспериментальные результаты также полностью согласуются с результатами численного моделирования (рис.1.12): при модуляции шумом параметра A бифуркационный интервал значений параметра B по-прежнему наблюдается. Ве-



(a)



(б)

Рис. 1.14. Внешний вид (а) и принципиальная схема (б) экспериментальной установки (аналоговая модель системы (1.16)).

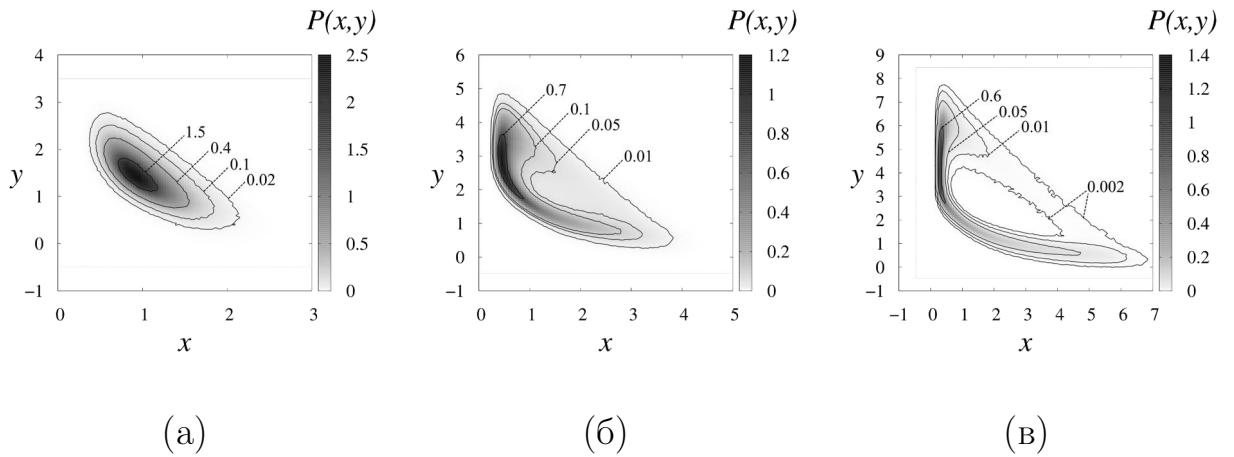


Рис. 1.15. Эволюция вероятностного распределения системы (1.17) с ростом параметра B при шумовой модуляции параметра B : $B = B_0 + \sqrt{2D}n(t)$, $A = 1$, $D = 0.05$: а) $B_0 = 1.2$; б) $B_0 = 2.0$; в) $B_0 = 2.8$. (физический эксперимент)

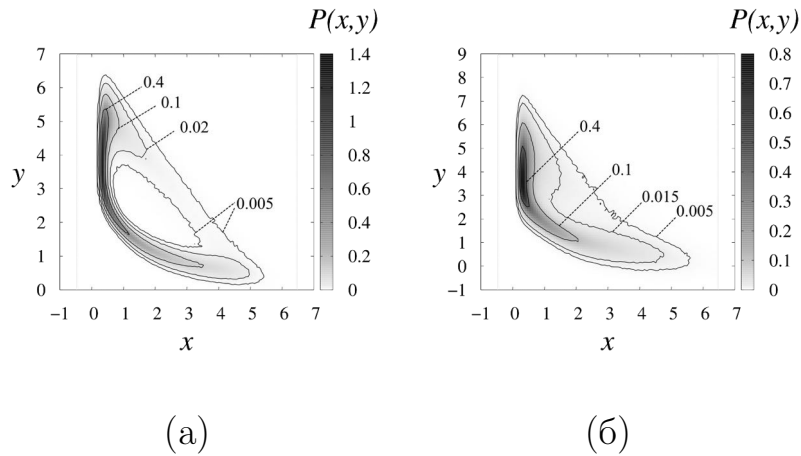


Рис. 1.16. Эволюция вероятностного распределения системы (1.17) с ростом интенсивности шума D при шумовой модуляции параметра B : $B = 2.5 + \sqrt{2D}n(t)$, $A = 1$: а) $D = 0.006$; б) $D = 0.05$ (физический эксперимент).

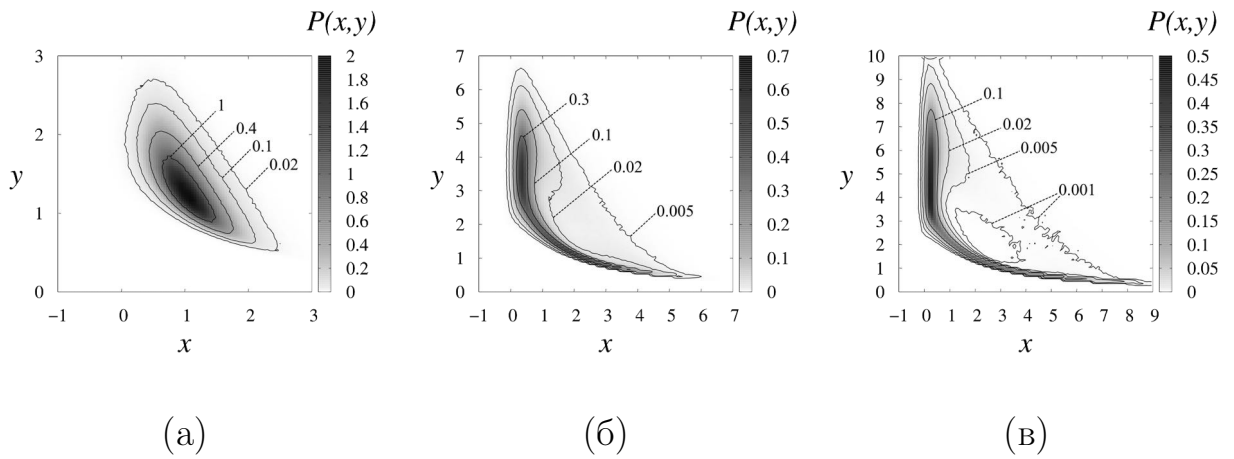


Рис. 1.17. Эволюция вероятностного распределения системы (1.17) с ростом параметра B при шумовой модуляции параметра A : $A = 1 + \sqrt{2D}n(t)$, $D = 0.05$: а) $B = 1.2$; б) $B = 2.6$; в) $B = 3.4$ (физический эксперимент).

роятностные распределения, полученные экспериментально при увеличении интенсивности шумовой модуляции параметра (рис.1.18) полностью аналогичны численным данным (рис.1.13) и свидетельствуют о запаздывании стохастической бифуркации Андронова-Хопфа в указанном ранее смысле.

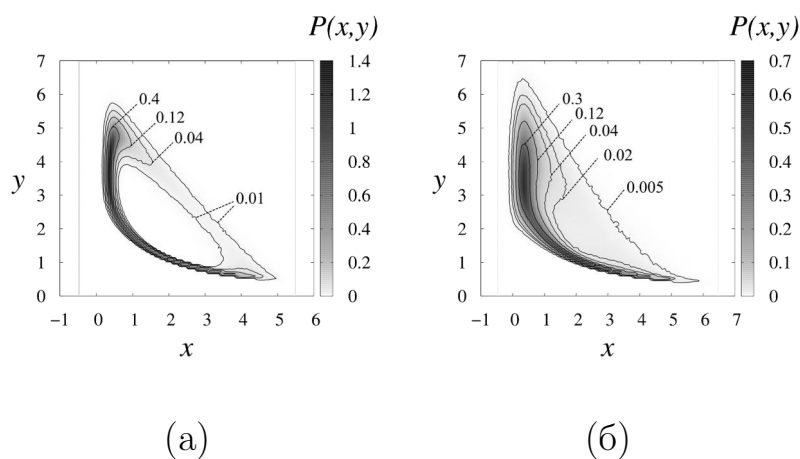


Рис. 1.18. Эволюция вероятностного распределения системы (1.17) с ростом интенсивности шума D при шумовой модуляции параметра A : $A = 1 + \sqrt{2D}n(t)$, $B = 2.5$: а) $D = 0.006$; б) $D = 0.05$ (физический эксперимент).

1.5. Субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа в генераторе с жестким возбуждением в присутствии шума

Обратимся теперь к системе с жестким возбуждением, представляющей собой простую модификацию генератора Ван дер Поля (1.4). Стохастические уравнения исследуемой системы с аддитивным шумом имеют вид:

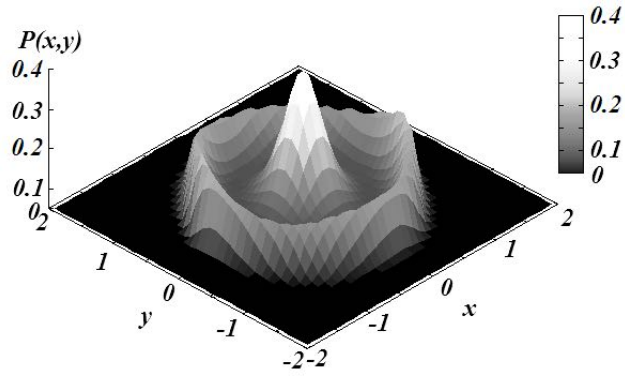
$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\varepsilon + \gamma x^2 - x^4)y - x + \sqrt{2D}n(t), \\ \gamma > 0, \end{cases} \quad (1.18)$$

где $n(t)$ – нормированный гауссов источник белого шума, D – интенсивность шума. В отсутствие шума в (1.18) при $\varepsilon = 0$ имеет место субкритическая ("жесткая") бифуркация Андронова - Хопфа. Стохастическая субкритическая бифуркация Андронова - Хопфа заключается в преобразовании формы вероятностного распределения $P(x, y)$ от кратера над областью устойчивого предельного цикла и пика в начале координат (рис. 1.19а) к кратеру с гладким минимумом в центре (рис. 1.19с). Седло-узловая бифуркация предельных циклов, имеющая место в детерминированной системе (1.18) при $D = 0$, $\varepsilon = -\gamma/8$, в случае воздействия аддитивного шума вырождается в переход от вероятностного распределения с одним пиком (рис.1.19е) к распределению с кратером и пиком в начале координат (рис. 1.19а).

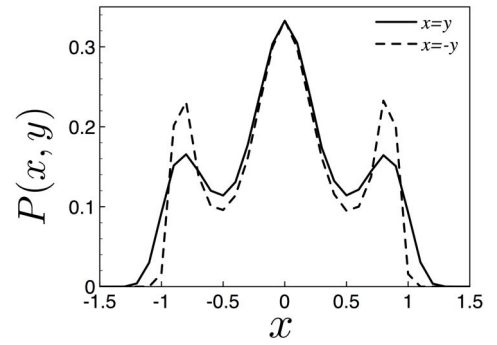
Квазигармонический анализ позволяет получить следующее выражение для стационарного распределения амплитуды [64, 118]

$$P(a) = Na \exp \left\{ -\frac{1}{48D} a^2 (a^4 - 3\gamma a^2 - 24\varepsilon) \right\}.$$

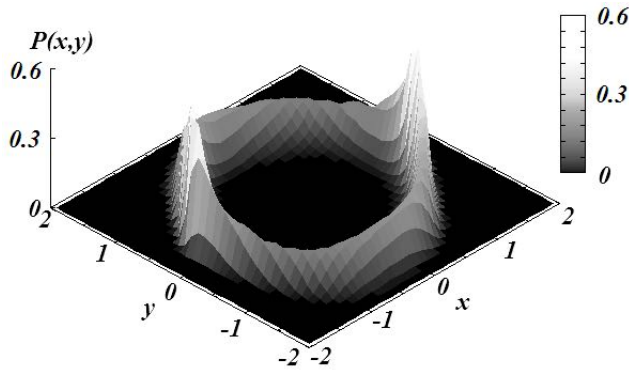
Пренебрегая зависимостью фазы и амплитуды, можно записать следующее приближенное выражение для стационарного распределения динамических



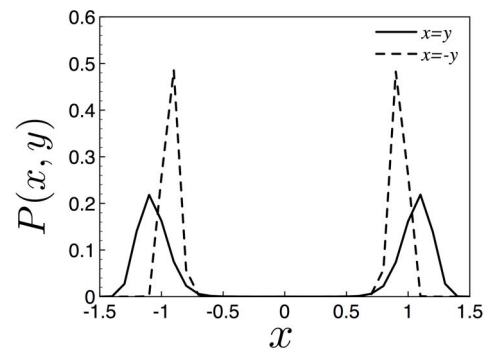
(a)



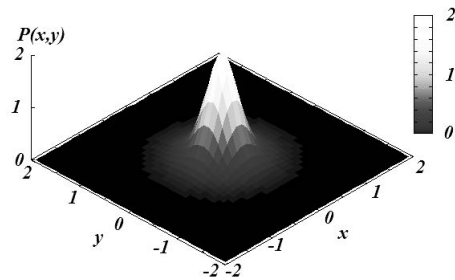
(б)



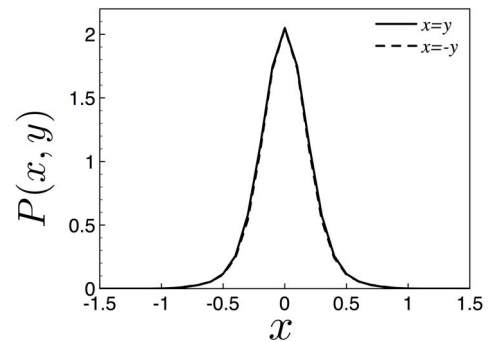
(в)



(г)



(д)



(e)

Рис. 1.19. Вероятностные распределения системы (1.18) и соответствующие сечения $x = y$ и $x = -y$. а,б: $\gamma = 1, \varepsilon = -0.1, D = 0.01$; в,г: $\gamma = 1, \varepsilon = 0.01, D = 0.01$; д,е: $\gamma = 1, \varepsilon = -0.17, D = 0.01$.

переменных:

$$P(x, y) = C \exp \left\{ -\frac{1}{48D} (x^2 + y^2) \left((x^2 + y^2)^2 - 3\gamma(x^2 + y^2) - 24\epsilon \right) \right\}, \quad (1.19)$$

где C – нормировочная константа. Распределение (1.19) демонстрирует две стохастические бифуркации, не зависящие от интенсивности шума. При $\epsilon < -\gamma/8$ функция $P(x, y)$ имеет единственный максимум в начале координат (рис.1.19,е). При $\epsilon = -\gamma/8$ происходит стохастическая бифуркация, соответствующая седло-узловой бифуркации циклов в детерминированной системе. Она состоит в образовании кратера и "канавки", которые располагаются строго в точках соответствующих предельных циклов $x^2 + y^2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8\epsilon}$ (рис.1.19,а). Субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа имеет место при $\epsilon = 0$: радиус "канавки" обращается в ноль, и в начале координат вместо максимума образуется гладкий минимум. Таким образом, при $\epsilon > 0$ вероятностное распределение приобретает форму аксиально-симметричного кратера с гладким минимумом в центре (рис.1.19,в). Приближенное выражение (1.19) не дает возможности наблюдать бифуркационные интервалы и зависимость бифуркаций от уровня шума. К сожалению, выражения типа (1.7) для генератора с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа получить пока не удалось. По этой причине особенно важно провести детальное сопоставление стохастических бифуркаций в системе (1.18) методами численного моделирования и физических экспериментов.

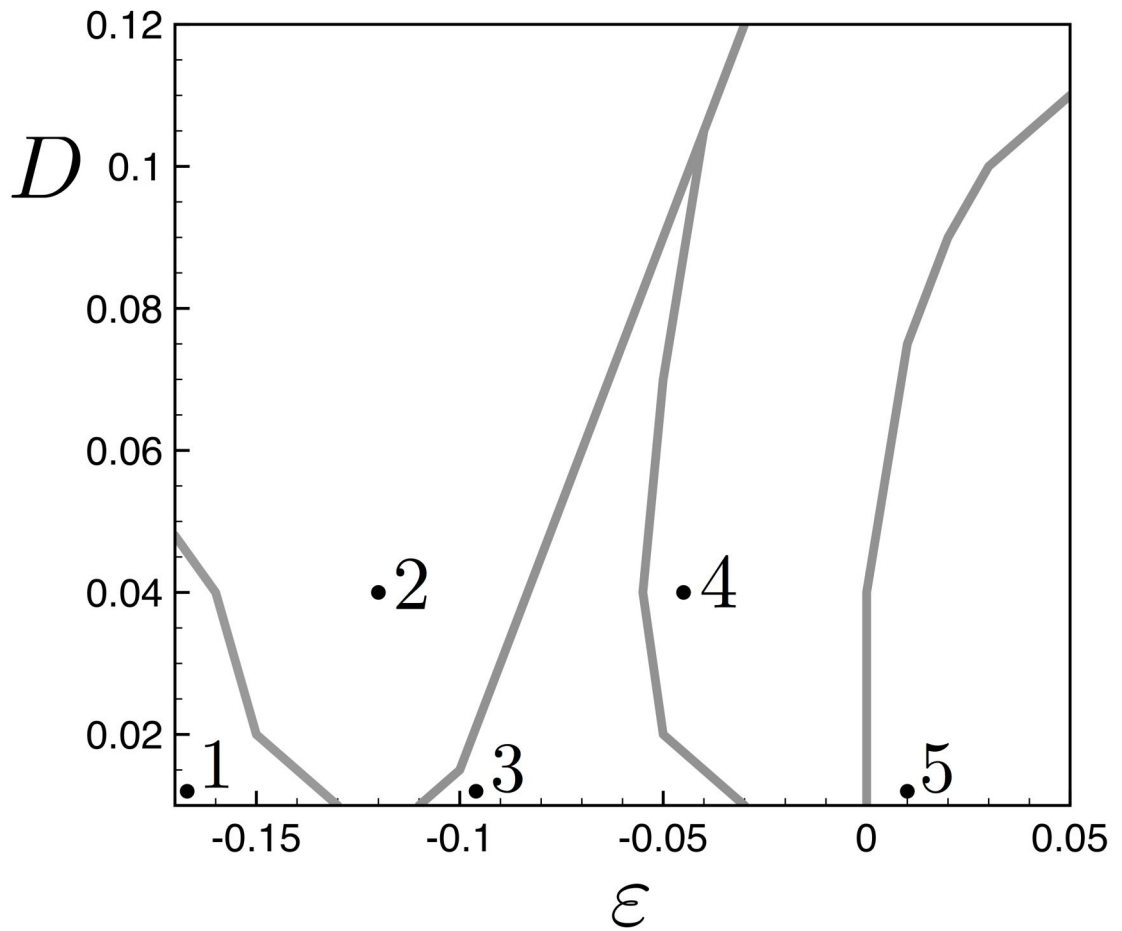
Так же, как и в случае субкритической бифуркации, в целях более точной диагностики перестроек плотности вероятности применялось построение характерных сечений поверхности $P(x, y)$ плоскостями $x = y$ и $x = -y$ (рис.1.19,б,г,е).

В ходе численных экспериментов исследовалась эволюция вероятностного распределения на плоскости параметров ϵ , D при фиксированном значении параметра $\gamma = 1$. Полученная карта режимов представлена на рис.1.20.

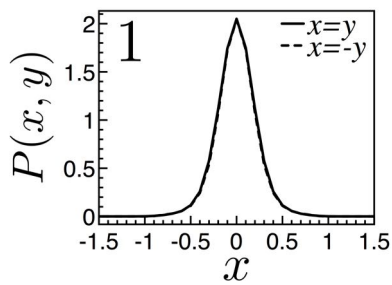
Интенсивность шума на приведенной диаграмме ограничена снизу значением $D = 0.01$. Это значение нельзя считать малым, однако при меньшем шуме не удастся с уверенностью получить границы различных областей при $\varepsilon < 0$, поскольку стационарное вероятностное распределение характеризуется очень длительным временем установления и практически не достижимо при численном моделировании.

Из рис.1.20 становится ясен сценарий субкритической стохастической бифуркации Андронова-Хопфа и касательной стохастической бифуркации. Бифуркациям, как и в предыдущем случае, соответствует не одна точка при изменении параметра ε , а некий бифуркационный интервал, в пределах которого происходит соответствующая перестройка формы распределения. Последовательность преобразований плотности вероятности при бифуркациях в (1.18) проиллюстрирована на рис.1.21. Стохастическая субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа при увеличении параметра ε протекает следующим образом. До бифуркации распределение имеет форму замкнутого кратера с пиком посередине и в обоих характерных сечениях поверхности $P(x, y)$ можно видеть центральный максимум, два минимума и два максимума по бокам (рис.1.21а). На левой границе бифуркационного интервала в сечении $x = y$ центральный максимум и два минимума сливаются и исчезают. В пределах бифуркационного интервала сечения плотности вероятности выглядят в соответствии с рис.1.21б. Т.е. в этой области существует замкнутый кратер, но не существует замкнутой "канавки" внутри кратера, а в начале координат поверхность $P(x, y)$ имеет форму седла. Правая граница бифуркационного интервала соответствует слиянию и исчезновению центрального максимума и боковых минимумов в сечении $x = -y$, после чего распределение принимает форму кратера с минимумом в начале координат (рис.1.21в).

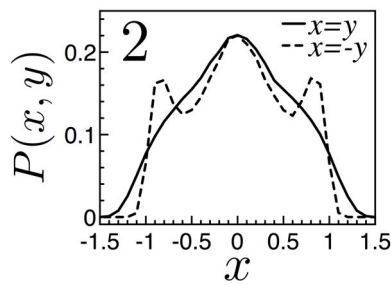
Стохастическая бифуркация, соответствующая седло-узловой бифуркации циклов, также характеризуется бифуркационным интервалом. До бифур-



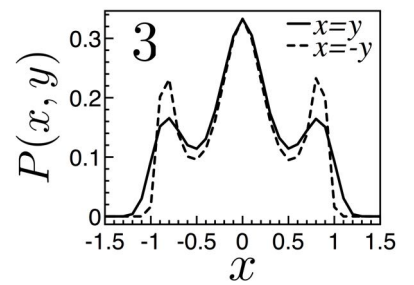
(a)



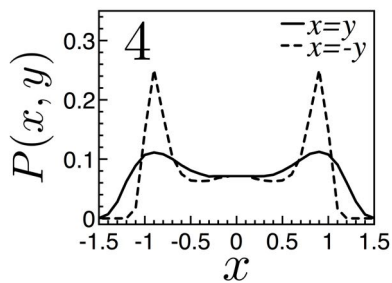
(б)



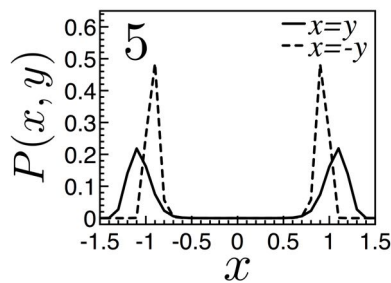
(в)



(г)



(д)



(е)

Рис. 1.20. Карта режимов системы (1.18), полученная в численном эксперименте; б, в, г, д, е) - соответствующие сечения в отмеченных точках.

кации плотность вероятности имеет единственный максимум в нуле, который можно видеть в обоих характерных сечениях (рис.1.21г). Левая граница бифуркационного интервала соответствует возникновению в сечении $x = -y$ двух пар максимумов и минимумов с двух сторон от центрального максимума (рис.1.21,д). Т.е. в пределах бифуркационного интервала существует максимум распределения в нуле и еще два максимума, располагающиеся на прямой $x = -y$. На правой границе интервала боковые максимумы и минимумы возникают в сечении $x = y$ (рис.1.21е), что соответствует образованию замкнутого кратера и "канавки".

Наличие бифуркационных интервалов существенно усложняет карту режимов системы при сильном аддитивном шуме. Кроме того, границы бифуркационных интервалов имеют достаточно сложную форму. При достаточно сильном шуме наблюдается объединение левой границы бифуркационного интервала субкритической бифуркации Андронова-Хопфа с правой границей интервала седло-узловой бифуркации.

Было проведено физическое моделирование влияния аддитивного шума на бифуркации в системе (1.18). Схема аналоговой модели исследуемой системы приведена на рис.1.22. Уравнения схемы в физических переменных имеют вид:

$$\begin{cases} R_0 C \dot{x} = y, \\ R_0 C \dot{y} = (U_1 + U_2 x^2 - x^4)y - x + \xi(t). \end{cases} \quad (1.20)$$

Здесь x, y – напряжения, снимаемые с соответствующих выходов установки, $U_{1,2}$ – напряжения, которые задают значения параметров ε и γ ($\varepsilon = U_1$ и $\gamma = U_2$). Параметры схемы подбирались таким образом, чтобы имело место количественное совпадение безразмерных переменных x и $y = \dot{x}$ в (1.18) и соответствующих величин в (1.20). Масштаб времени в (1.20) задается параметрами $R_0 = 10$ кОм и $C = 10$ нФ. $\xi(t)$ – случайный сигнал, создаваемый

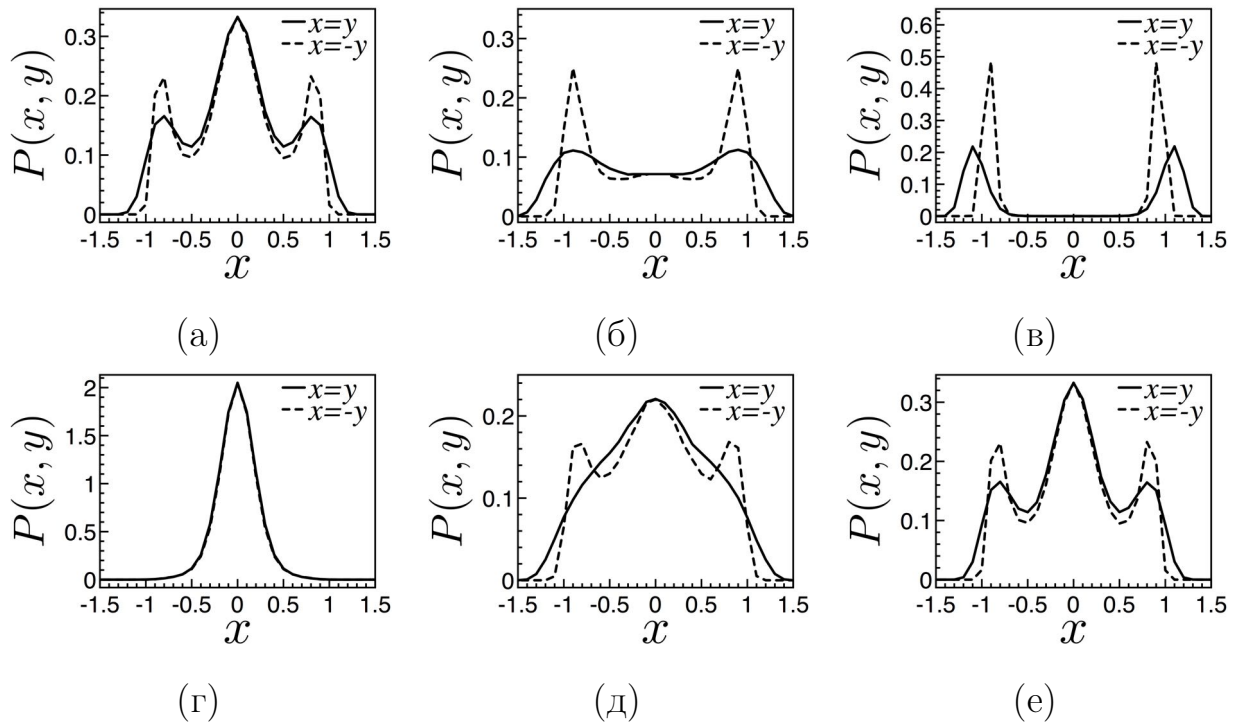


Рис. 1.21. Иллюстрация к бифуркационным переходам, соответствующим стохастической бифуркации в системе (1.18): субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа (а,б,в) и седло-узловая бифуркация циклов (г,д,е). На рисунке изображены сечения: $x = y$ и $x = -y$ (результат численного моделирования).

генератором шума. Интенсивность шума D , соответствующая математической модели, определялась по измеренной экспериментально интенсивности \tilde{D} шумового сигнала с учетом временного масштаба: $D = \tilde{D}/R_0C$.

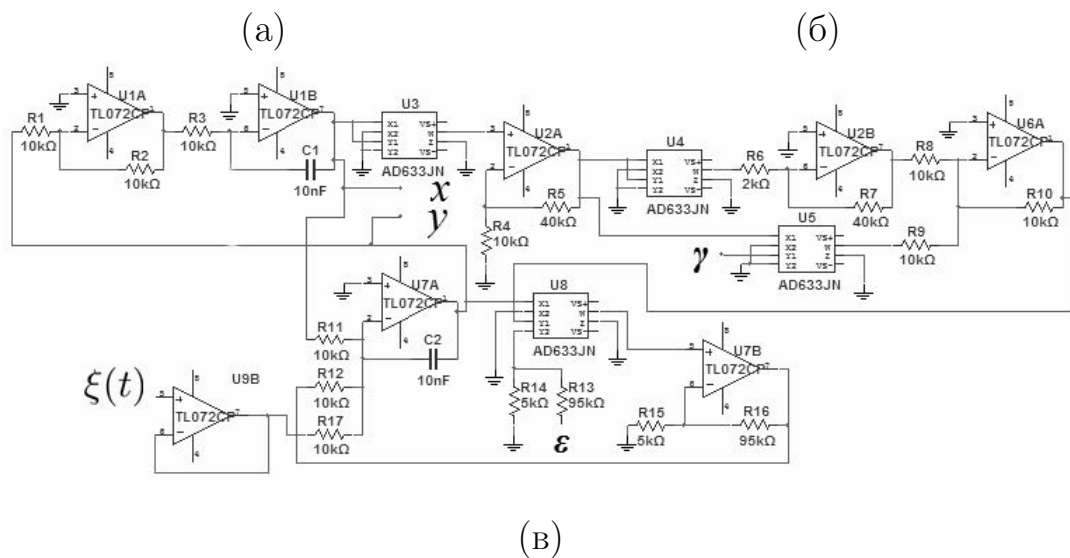
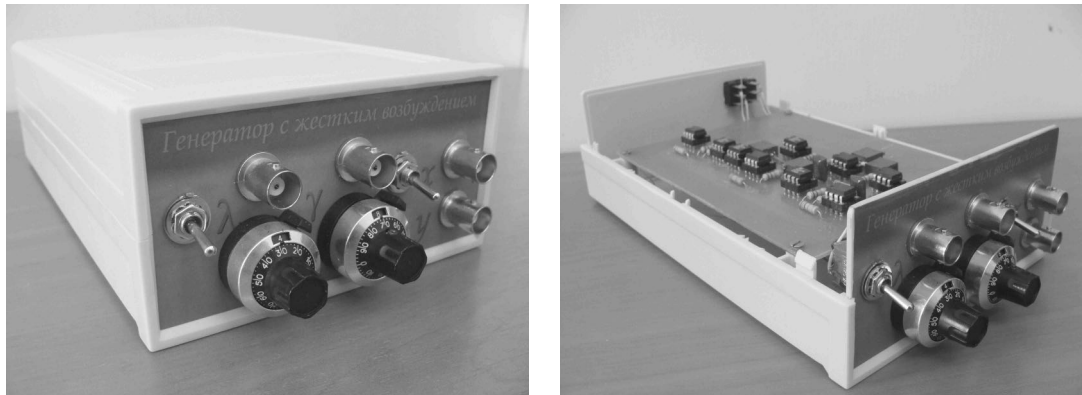


Рис. 1.22. Внешний вид (а,б) и принципиальная схема (в) экспериментальной установки (аналоговая модель системы (1.18) с аддитивным шумом)

Полученная в результате физических экспериментов бифуркационная диаграмма генератора с жестким возбуждением приведена на рис.1.23. Она находится в хорошем соответствии с результатами компьютерного моделирования. По тем же причинам, что и при численном моделировании, диаграмма приводится для $D > 0.02$. Экспериментально наблюдаются те же бифуркационные сценарии, которые были получены при численном моделировании и проиллюстрированы на рис.1.21.

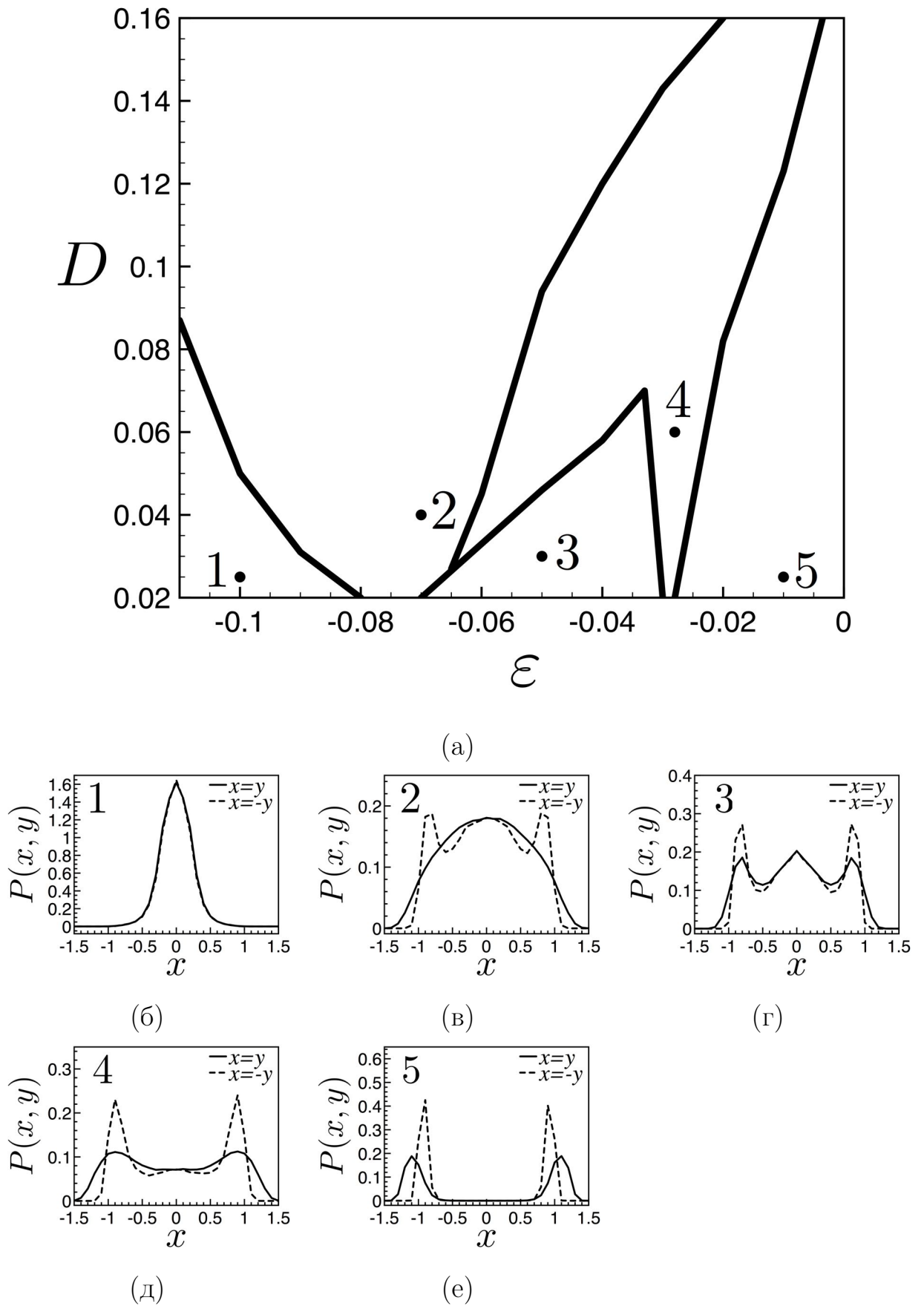


Рис. 1.23. Карта режимов системы (1.20), полученная в физическом эксперименте; б,в,г,д,е) - соответствующие сечения в отмеченных точках.

Таким образом, физические эксперименты подтверждают наличие бифуркационного интервала у субкритической бифуркации Андронова-Хопфа и у стохастического аналога седло-узловой бифуркации циклов. Существование бифуркационных интервалов представляется характерной особенностью стохастических бифуркаций в системе с аддитивным белым шумом, обладающей свойствами ангармоничности.

Рассмотрим теперь генератор с жестким возбуждением, находящийся под действием независимых источников аддитивного и мультипликативного белого гауссова шума. В этом случае стохастические уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = ((\varepsilon + \sqrt{2D}n_2(t)) + \gamma x^2 - x^4)y - x + \sqrt{2D_1}n_1(t), \\ \gamma > 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Здесь, как и ранее, D_1 и D – интенсивности аддитивного и мультипликативного источников, соответственно.

Схема экспериментальной установки для исследования влияния мультипликативного шума на генератор с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа аналогична приведенной на рис.1.22 с заменой аддитивного источника внешнего шума на шумовую модуляцию напряжения U_0 , задающего параметр ε . Уравнения аналоговой модели, соответствующей (1.21)), имеют вид:

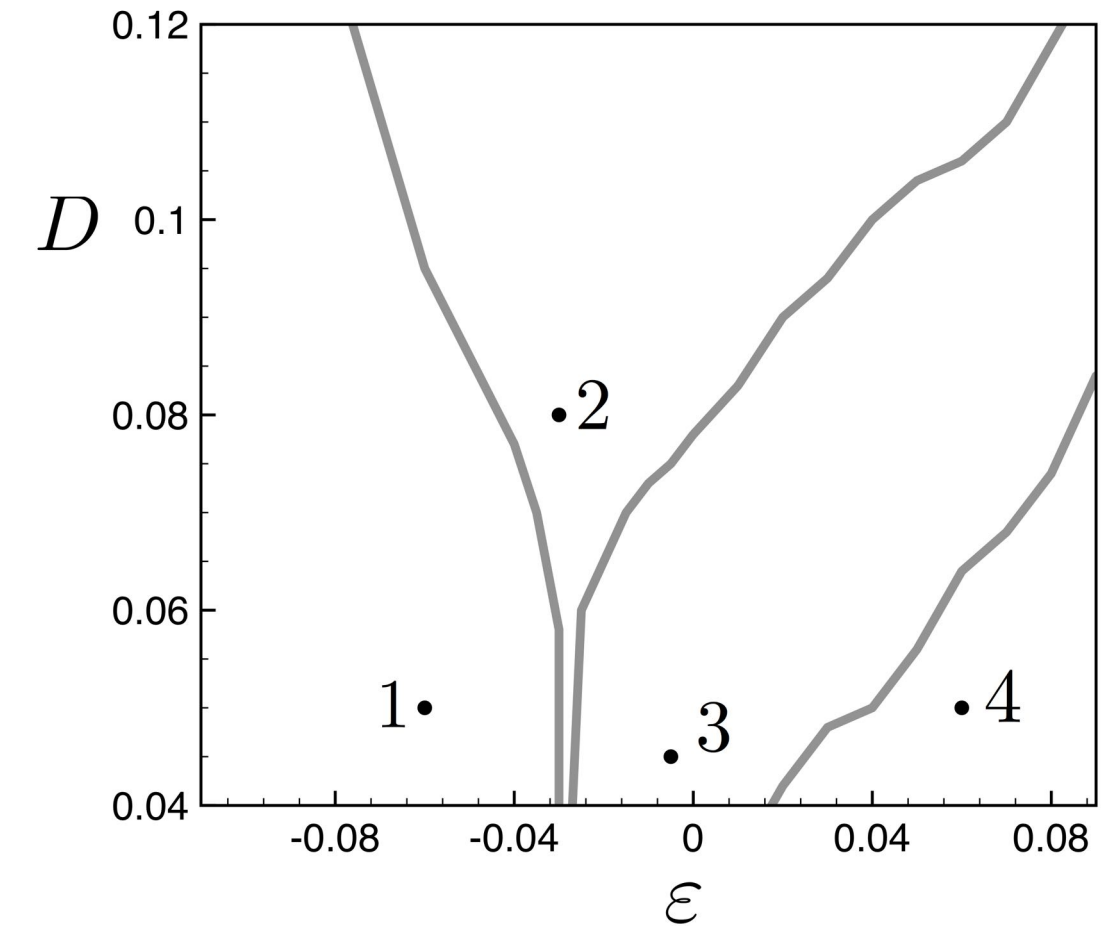
$$\begin{cases} R_0 C \dot{x} = y, \\ R_0 C \dot{y} = ((U_0 + \xi(t)) + U_1 x^2 - x^4)y - x + \chi(t). \end{cases} \quad (1.22)$$

где $\chi(t)$ - совокупный аддитивный шум, присутствующий в экспериментальной установке. В квазигармоническом приближении вместо (1.10) получаем

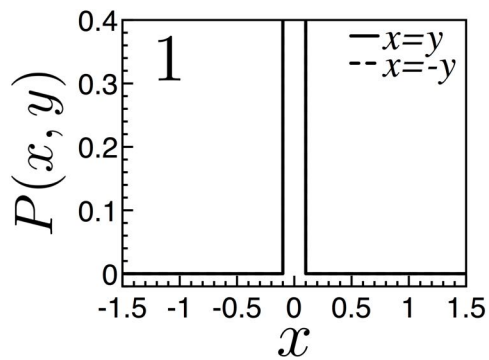
$$P(x, y) = C (D(x^2 + y^2) + 4D_1)^\alpha \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{8D} \left[x^2 + y^2 - 4\gamma - \frac{8D_1}{D} \right] \right\} \quad (1.23)$$

В присутствии аддитивного шума (пусть даже и очень слабого) из выражения (1.23) следуют две стохастические бифуркации не зависящие от интенсивности мультипликативного шума D . Это седло-узловая бифуркация циклов при $\varepsilon = -\gamma/8$ и субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа при $\varepsilon = 0$. Стохастическая седло-узловая бифуркация циклов приводит к рождению замкнутых кратера и "канавки" вокруг центрального максимума в распределении $P(x, y)$, а стохастическая субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, как и при одном аддитивном шуме, соответствует слиянию "канавки" с центральным максимумом. Однако численные и физические эксперименты дают более сложную картину перестроек $P(x, y)$ при вариации параметров ε и D (см. рис.1.24 и рис.1.25).

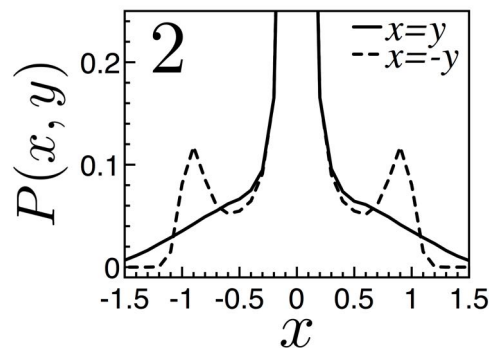
Фрагменты карт режимов, как в численном эксперименте (рис.1.24), так и в физическом эксперименте (рис.1.25) удалось построить только в области достаточно сильной интенсивности параметрического шума, поскольку при малом шуме не удавалось получить стационарного распределения. Можно отметить хорошее качественное соответствие численных и экспериментальных результатов. В обоих случаях стохастическая субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, проявляющаяся в исчезновении центрального максимума распределения, носит запаздывающий характер. Кроме того, полученные результаты показывают наличие бифуркационного интервала у седло-узловой бифуркации. В то же время бифуркационного интервала при бифуркации Андронова-Хопфа выявлено не было.



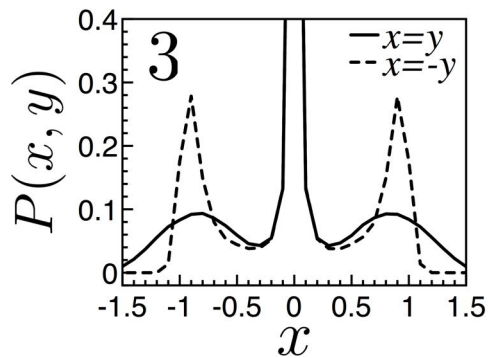
(a)



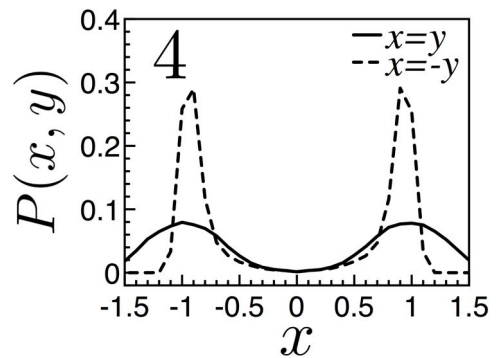
(б)



(в)

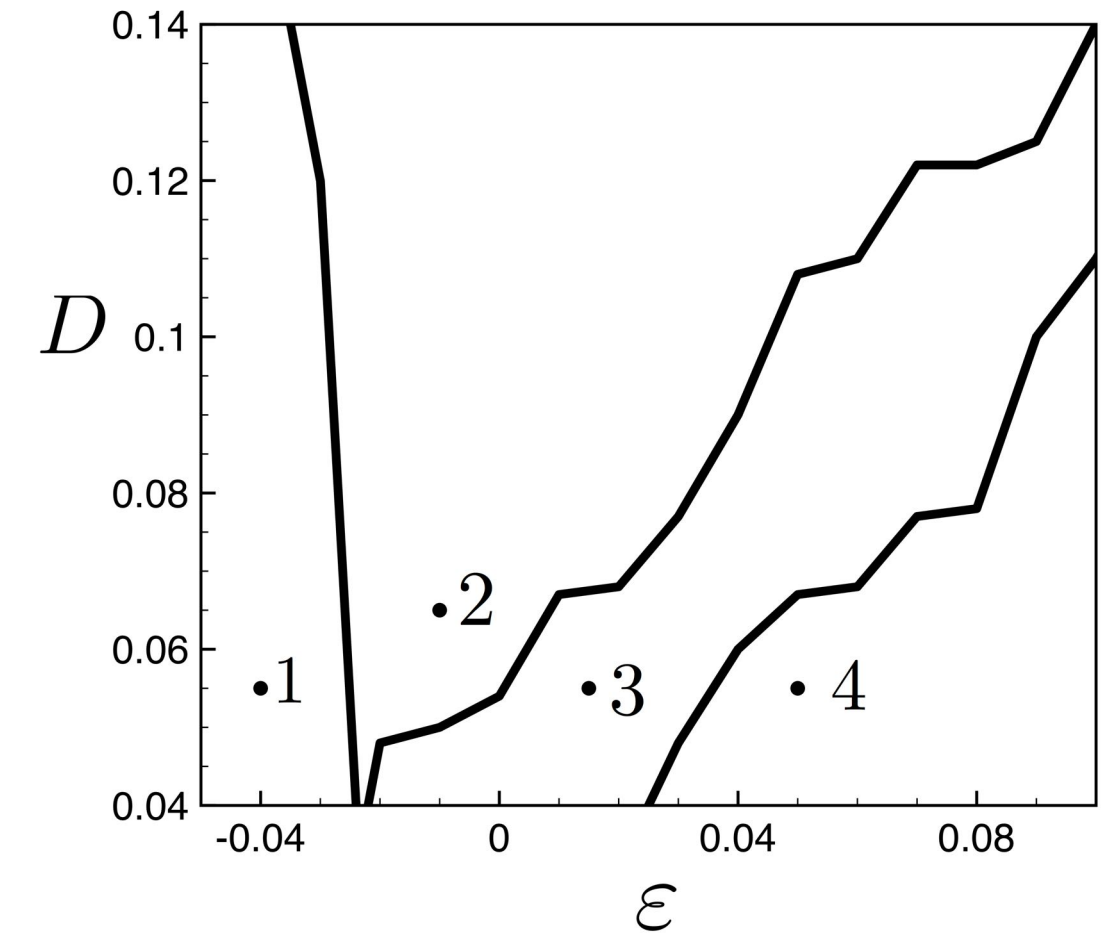


(г)

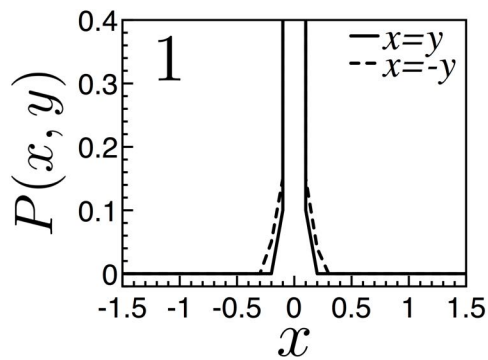


(д)

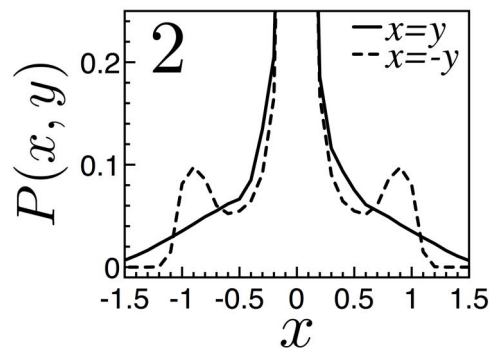
Рис. 1.24. Карта режимов, полученная численно для системы (1.21) ($D_1 = 0.0001$, $\gamma = 1.0$)



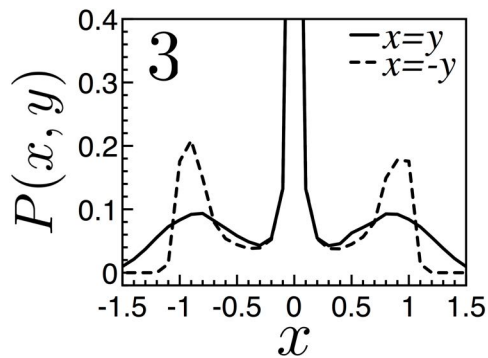
(a)



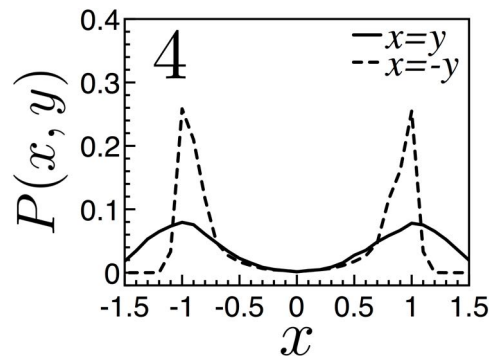
(б)



(в)



(г)



(д)

Рис. 1.25. Экспериментально полученная карта режимов для системы (1.22)

1.6. Выводы по первой главе

В работе экспериментально исследовано влияния шума на субкритическую и суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа и установлен характер эволюции вероятностного распределения с увеличением интенсивности шума в генераторе Ван дер Поля с мягким возбуждением, генераторе Анищенко-Астахова, брюсселяторе, генераторе Ван дер Поля с жестким возбуждением в случае аддитивного шума и при шумовой модуляции параметра генерации. Физические эксперименты с использованием аналоговых схем сопоставлялись с результатами компьютерного моделирования.

В случае аддитивного шума для генератора Ван дер Поля с мягким возбуждением эксперименты подтвердили теоретические выводы о существовании бифуркационного интервала при суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа, изложенные в [32]. Верхняя граница бифуркационного интервала при увеличении параметра $\varepsilon > 0$ соответствует переходу от "двугорбого" распределения $P(x, y)$ к распределению в форме замкнутого кратера. В случае генератора Анищенко-Астахова с полутора степенями свободы характер перестроек $P(x, y)$ является иным. При увеличении шума происходит разрушение только одной из стенок кратера, в результате чего возникает распределение с одним максимумом. Двугорбая форма распределения не наблюдается. В этом случае шум просто приводит к запаздыванию бифуркации, которая смещается в сторону увеличения параметра генерации. Запаздывание стохастической суперкритической бифуркации наблюдалось также в экспериментах с параметрическим шумом. В этом случае бифуркационный интервал отсутствует также и для генератора Ван дер Поля с мягким возбуждением. При увеличении параметра генерации стохастическая бифуркация в генераторе Ван дер Поля с мягким возбуждением при параметрическом шуме заключается в переходе от распределения с одним максимумом в точке

равновесия к распределению в форме кратера. Если увеличивать шум при фиксированном параметре генерации, то напротив, кратер в распределении сжимается и исчезает. В генераторе Анищенко – Астахова наблюдается более сложная эволюция распределения $P(x, y)$. Имеется область значений m и D , в которой в распределении наблюдается одновременно наличие замкнутого кратера и пика в точке равновесия в центре кратера.

Исследование двух случаев параметрического шума в брюсселяторе позволило установить влияние шума на суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа в системе в случае шумовой модуляции двух различных параметров. В первом случае источник шума входит в уравнения системы как мультипликативный, во втором - как аддитивный. Стохастическая бифуркация в брюсселяторе, управляемая параметром B , происходит по совершенно одинаковому сценарию независимо от того, какой из двух параметров системы модулируется шумом. Этот вывод является довольно неожиданным, если учесть, что в одном случае шум оказывался мультипликативным, а в другом - аддитивным. Как численное исследование, так и физический эксперимент показывают наличие бифуркационного интервала для управляющего параметра, в пределах которого реализуется переход от распределения, характерного для зашумленного состояния равновесия, к распределению, соответствующему зашумленным автоколебаниям. Поскольку результаты, полученные для брюсселятора при белом мультипликативном шуме, полностью аналогичны результатам, известным для узкополосного мультипликативного шума [55], можно сделать вывод о том, что спектральный состав шума в данном случае не имеет существенного значения. Существование бифуркационного интервала в брюсселяторе при параметрическом шуме, строго говоря, не позволяет определить характер смещения бифуркации Андронова-Хопфа. Действительно, как численное моделирование, так и физические эксперименты показывают, что увеличение интенсивности шума в области генерации приводит к раз-

рушению кратерообразной формы распределения, соответствующей режиму автоколебаний. Однако, наблюдаемый эффект может быть связан не со смещением бифуркационного интервала, а с увеличением его ширины. В целом стохастическая бифуркация Андронова-Хопфа в брюсселяторе существенно отличается от аналогичной бифуркации в осцилляторе Ван дер Поля, где, в случае параметрической шумовой модуляции, бифуркационный интервал возникает только при очень большой интенсивности шума, а также от бифуркации в осцилляторе Хопфа [62], в котором бифуркационный интервал не возможен в принципе. В этих системах при параметрическом шуме в строгом смысле имеет место запаздывание бифуркации Андронова-Хопфа. Установленный в проведенных экспериментах запаздывающий характер суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа при действии мультипликативного шума находится в соответствии с теоретическими заключениями, приводимыми в [54, 58], а также с экспериментальными результатами, изложенными в [55]. Кроме того, в [62, 63] аналогичные результаты, касающиеся запаздывания бифуркации Андронова-Хопфа, были получены при строгом теоретическом рассмотрении гармонического осциллятора Хопфа с параметрическим белым шумом.

В генераторе с жестким возбуждением аддитивный шум порождает бифуркационный интервал при субкритической бифуркации Андронова-Хопфа. Бифуркационный интервал возникает также у седло-узловой бифуркации циклов, имеющей место в генераторе с жестким возбуждением. Запаздывающий характер субкритической бифуркации Андронова-Хопфа в генераторе с белым гауссовым мультипликативным шумом был показан в численных и физических экспериментах. Из вышеизложенного можно сделать вывод об общем характере эффекта "запаздывания" стохастических бифуркаций в системах с мультипликативным шумом.

Во всех рассмотренных системах рост уровня шума в системе, находя-

щейся в режиме генерации приводит к исчезновению (разрушению или "стягиванию") замкнутого кратера в распределении, соответствующего зашумленному предельному циклу. В этом смысле можно говорить о разрушении (или подавлении) автоколебаний шумовым воздействием.

Глава 2

Управление когерентным резонансом с помощью запаздывающей обратной связи

Введение

Целью исследований, результаты которых представлены во второй главе диссертационной работы, является изучение возможности управления характеристиками когерентного резонанса при наличии запаздывающей обратной связи как в возбудимых системах (на примере осциллятора ФитцХью-Нагумо), так и в невозбудимых системах (на примере генератора Ван дер Поля с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа), а также выявление общих черт и принципиальных различий в наблюдаемых эффектах для двух указанных типов систем. С этой целью было проведено экспериментальное исследование влияния дополнительной цепи запаздывающей обратной связи на эффект когерентного резонанса в возбудимом осцилляторе ФитцХью-Нагумо и экспериментально оценены возможности управления характеристиками стохастических колебаний в режиме когерентного резонанса с помощью вариации параметров запаздывающей обратной связи. Результаты экспериментов сопоставляются с результатами работ [79, 80], в которых данная задача была рассмотрена численно. Также был проведен теоретический анализ генератора Ван дер Поля с жестким возбуждением с запаздывающей обратной связью, проведены численные и физические эксперименты по выявлению особенностей влияния запаздывающей обратной связи на эффект когерентного резонанса в данной системе.

2.1. Экспериментальное исследование влияния запаздывающей обратной связи на когерентный резонанс в системе ФитцХью-Нагумо

Осциллятор ФитцХью-Нагумо является упрощенной моделью нейрона [68,69] и широко используется в нелинейной динамике и биофизике в качестве простейшего примера возбудимой системы. Помимо возбудимого режима, осциллятор ФитцХью-Нагумо в зависимости от значений параметров, может находиться в бистабильном режиме с двумя устойчивыми точками равновесия или демонстрировать автоколебания. Уравнения осциллятора могут быть записаны в виде:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = x - \frac{1}{3}x^3 - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + a + \eta(t), \quad (2.1)$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$ - безразмерные вещественные динамические переменные, t - безразмерное время, a, ε - параметры системы. Во второе уравнение добавлен аддитивный шум $\eta(t)$. В случае белого шума можно представить $\eta(t) = \sqrt{2D}n(t)$, где $n(t)$ - нормированный источник гауссова белого шума ($\langle n(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$, скобки $\langle \dots \rangle$ означают статистическое усреднение, $\delta(\dots)$ - функция Дирака), D - константа, задающая интенсивность белого шума. В случае цветного низкочастотного шума случайный процесс $\eta(t)$ может быть задан как процесс Орнштейна-Уленбека: $\tau_c \frac{d\eta}{dt} = -\eta + \sqrt{2D\tau_c}n(t)$, где τ_c - параметр, определяющий время корреляции цветного шума $\eta(t)$. Дисперсия процесса $\eta(t)$ равна единице. Возбудимый режим наблюдается в области единственной устойчивой точки равновесия вблизи линии бифуркации Андронова-Хопфа при условии малости параметра ε . Именно в этом случае осциллятор (2.1) при воздействии шума демонстрирует широко известный эффект когерентного резонанса [25, 26].

Управление когерентным резонансом в осцилляторе ФитцХью-Нагумо исследовалось численно в работах [79, 80] (соответственно при белом и цветном шуме). В качестве модели рассматривался осциллятор (2.1), дополненный запаздывающей обратной связью:

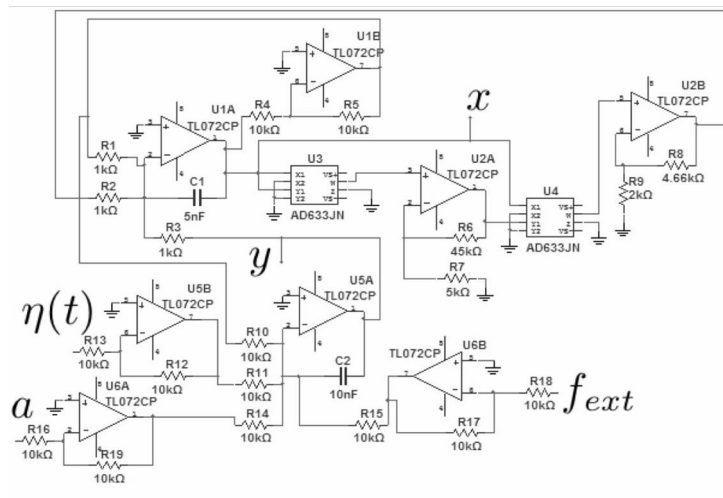
$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = x - \frac{1}{3}x^3 - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + a + \eta(t) + K[y(t - \tau) - y(t)]. \end{cases} \quad (2.2)$$

где K - коэффициент запаздывающей связи, τ - время запаздывания. Однако представленные в статьях результаты численного моделирования не были воспроизведены в физических экспериментах.

Для проведения экспериментов была создана экспериментальная установка, представляющая собой аналоговую модель осциллятора ФитцХью-Нагумо. Схема аналоговой модели и внешний вид установки представлены на рис.2.1. Также было создано электронное устройство, реализующее запаздывающую обратную связь. Данная реализация запаздывающей обратной связи была спроектирована на базе микроконтроллера ATMEGA16. Схема и внешний вид установки представлены на рис. 2.2. Запаздывание осуществляется по следующему принципу. К входному напряжению $x(t) \in [-2.5 \text{ В} : 2.5 \text{ В}]$ прибавляется постоянное смещение 2.5 В. Сигнал $x(t) + 2.5 \in [0 \text{ В} : 5 \text{ В}]$ поступает на вход аналого-цифрового преобразователя U3 (MCP3201), который подключен к микроконтроллеру ATMEGA16 посредством SPI интерфейса. Непосредственно в микроконтроллере осуществляется процесс запаздывания - на выходной порт микроконтроллера поступает 8-битный цифровой сигнал $x(t - \tau) + 2.5 \text{ В}$, который преобразуется обратно в аналоговый вид посредством цифро-аналогового преобразователя (R2R-матрица резисторов). Далее из полученного сигнала вычитается напряжение 2.5 В, и на выходе имеем аналоговый сигнал $x(t - \tau)$. Прибавление и вычитание сигнала 2.5 В объясняется тем, что АЦП MCP3201 работает с сигналами в диапазоне от 0 до 5 В. Время

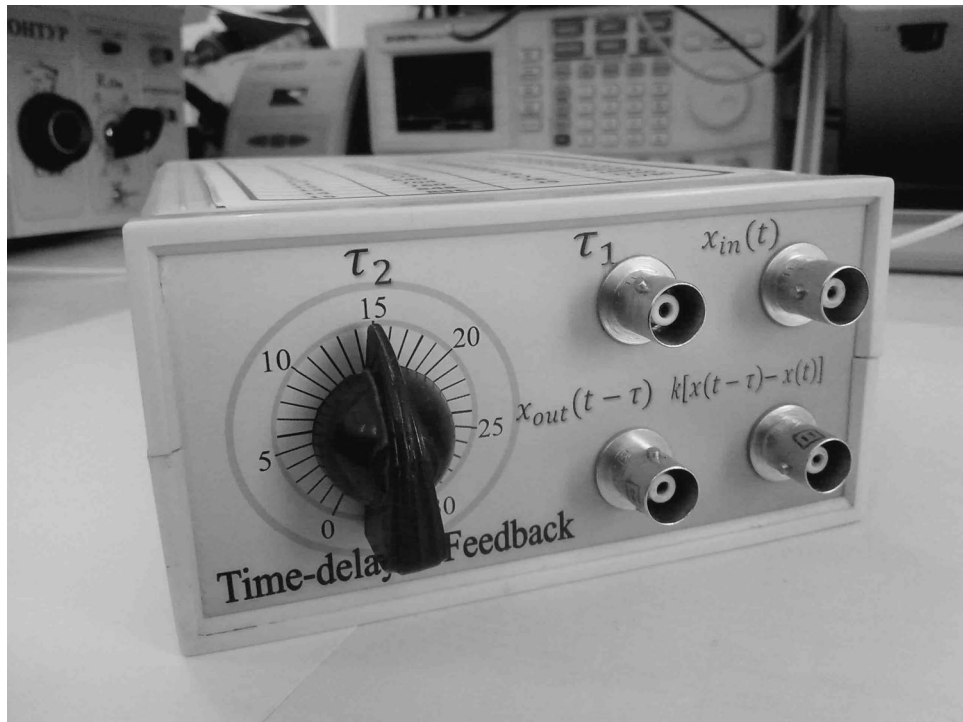


(a)

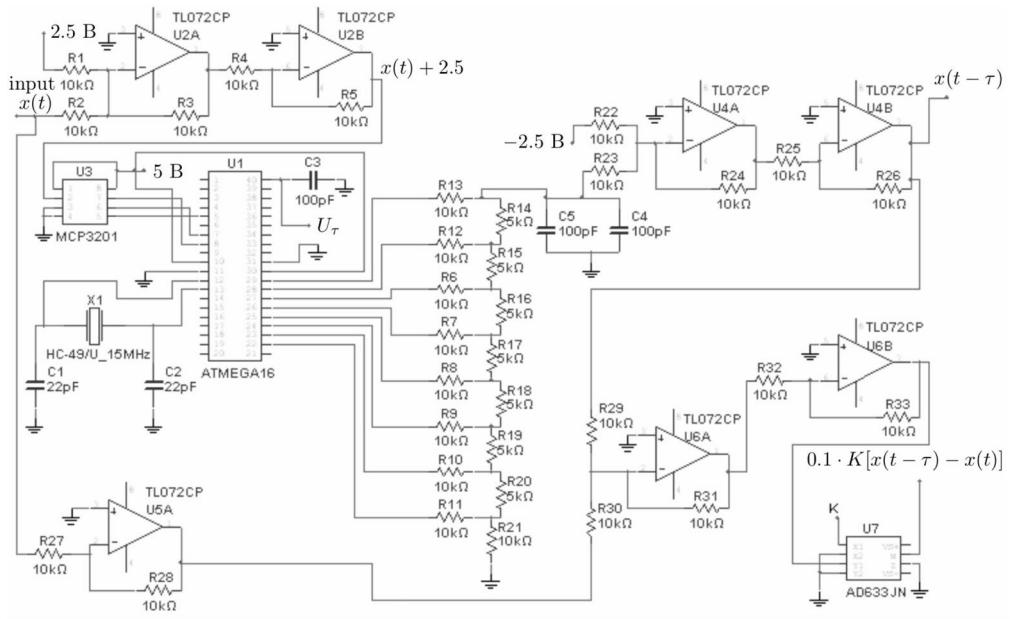


(б)

Рис. 2.1. Внешний вид (а) и принципиальная схема (б) экспериментальной установки (аналоговая модель системы (2.1))



(a)



(б)

Рис. 2.2. Внешний вид (а) и принципиальная схема (б) электронной реализации запаздывающей обратной связи

запаздывания определяется напряжением $U_\tau \in [0 : 5 \text{ В}]$, которое поступает на вход внутреннего АЦП микроконтроллера. Это позволяет менять время запаздывания в реальном времени при проведении экспериментов.

Работа экспериментальной установки при наличии запаздывающей обратной связи описывается уравнениями в физических переменных, аналогичными уравнениям (2.2):

$$\begin{cases} R_0 C \varepsilon \frac{dx}{dt} = x - \frac{1}{3} x^3 - y, \\ R_0 C \frac{dy}{dt} = x + a + \eta(t) + K[y(t - \tau) - y(t)], \\ R_0 C \tau_c \frac{d\eta}{dt} = -\eta + \sqrt{\tau_c} \sqrt{2\tilde{D}} n(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь x и y - напряжения, снимаемые с соответствующих выходов установки. Параметры схемы подбирались таким образом, чтобы обеспечить количественное совпадение безразмерных переменных в (2.2) и соответствующих величин в (2.3). Величины $R_0 = 10 \text{ кОм}$, $C = 10 \text{ нФ}$ определяют масштаб времени в реальном эксперименте. Случайное слагаемое $\eta(t)$, входящее во второе уравнение системы (2.3), описывает цветной шум с временем корреляции τ_c и единичной дисперсией. Оно формировалось с помощью преобразования сигнала $\xi(t)$, создаваемого генератором шума Г2-59. Как и в предыдущих исследованиях, полагаем, что $\xi(t) = \sqrt{2\tilde{D}} n(t)$, где $n(t)$ - нормированный источник с единичной спектральной плотностью мощности. Безразмерная интенсивность шумового сигнала D , соответствующая математической модели, есть $D = \tilde{D}/R_0 C$.

В ходе экспериментов со схемы снимался сигнал $x(t)$, который оцифровывался с помощью АЦП NI PCI-6133. Шаг по времени при получении данных составлял $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$, шаг квантования сигнала - $\Delta x = 2 \cdot 10^{-3} \text{ В}$. Данные поступали на компьютер и подвергались статистической обработке. Рассчитывались такие статистические характеристики колебаний, как время

корреляции t_{cor} и нормированная девиация интерспайкового интервала R_T .

Корреляционная функция стохастических колебаний $x(t)$ рассчитывалась по временному ряду данных в предположении эргодичности и стационарности. Соответственно, усреднение по ансамблю реализаций заменялось усреднением по времени:

$$\Psi_x(\Theta) = \langle x(t)x(t + \Theta) \rangle - \langle x(t) \rangle^2. \quad (2.4)$$

Время корреляции определялось в виде

$$t_{cor} = \frac{1}{\Psi_x(0)} \int_0^{\infty} |\Psi_x(\Theta)| d\Theta. \quad (2.5)$$

Полученное время корреляции близко к значению, определяемому по ширине спектрального пика на уровне половинной мощности как $t_{cor} = \frac{4}{\pi\Delta\omega}$, где $\Delta\omega$ - ширина уровня, равного половине пиковой спектральной плотности мощности.

Термин «интерспайковый интервал» пришел из биофизики и означает время между последовательными состояниями возбуждения (спайками). Он рассчитывался как время T_i между последовательными (j -м и $j + 1$ -м) достижениями переменной $x(t)$ некоторого заданного уровня x_m при одном и том же знаке производной $x(t)$. Нормированная девиация интерспайкового интервала R_T определяется следующим образом:

$$R = \frac{\sqrt{\langle T_i^2 \rangle - \langle T_i \rangle^2}}{\langle T_i \rangle}. \quad (2.6)$$

В первую очередь рассмотрим влияние характеристик шума на эффект когерентного резонанса в системе (2.3) при отсутствии запаздывания. Для этого положим время запаздывания $\tau = 0$, интенсивность шума $D = 0.0625$, параметры $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$ и пронаблюдаем за эволюцией времени кор-

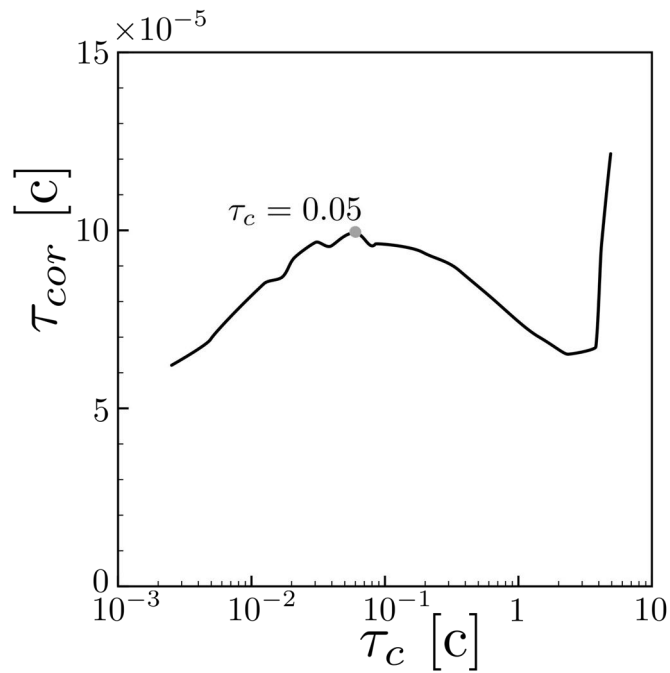
реляции t_{cor} и девиации R_T . На рис. 2.3а приведена экспериментально полученная зависимость времени корреляции стохастических колебаний t_{cor} от времени корреляции шума τ_c . При значении времени корреляции шума $\tau_c = 0.05 \pm 0.005$ наблюдается единственный максимум времени корреляции колебаний.

График зависимости нормированной девиации R_T от τ_c приведен на рис.2.3б. При $\tau_c = 0.05 \pm 0.005$ величина R_T достигает минимума, что свидетельствует о наибольшей степени упорядоченности колебаний в этом случае.

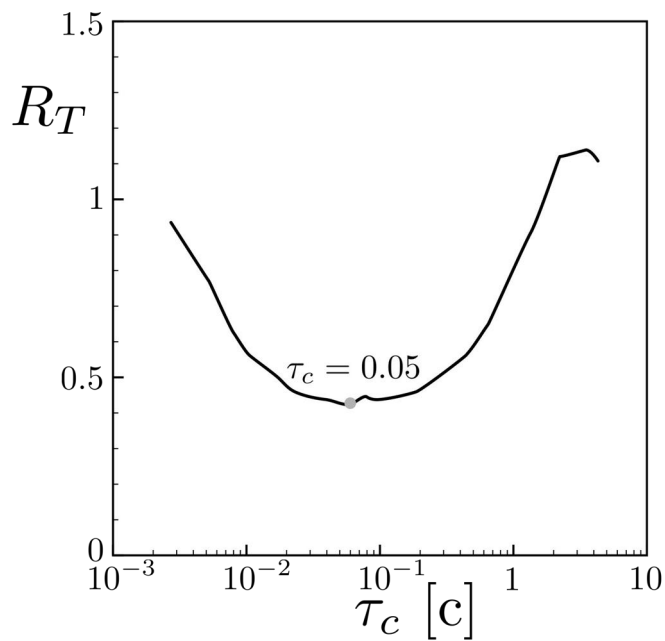
Полученные экспериментальные результаты свидетельствуют о существовании оптимального значения времени корреляции цветного шума τ_c при постоянной дисперсии $\langle \eta^2(t) \rangle = 1\text{В}^2$. Для данного значения τ_c стохастические колебания наиболее когерентны. Экспериментально полученные зависимости, представленные на рис.2.3, полностью согласуются с численными результатами, приведенными в [80].

Теперь исследуем возможности управления характеристиками колебаний с помощью сигнала запаздывающей обратной связи. Будем менять время запаздывания в режиме наиболее когерентных колебаний и пронаблюдаем за изменением времени корреляции t_{cor} . Полученная зависимость t_{cor} от времени запаздывания представлена на рис. 2.4а. Зависимость носит немонотонный характер. Можно четко различить, по крайней мере, три максимума времени корреляции колебаний. Точки 1, 2, 3 на графике отмечают соответственно значение времени корреляции, полученное для осциллятора без запаздывающей обратной связи в оптимальном режиме (т.е. при τ_c , соответствующему максимально регулярному поведению), значение главного минимума и значение главного максимума. При этом почти при любом времени запаздывания, кроме окрестности точки 2, значение t_{cor} больше, чем в точке 1 (отсутствие запаздывающей обратной связи).

Таким образом, экспериментально был подтвержден результат, обнару-

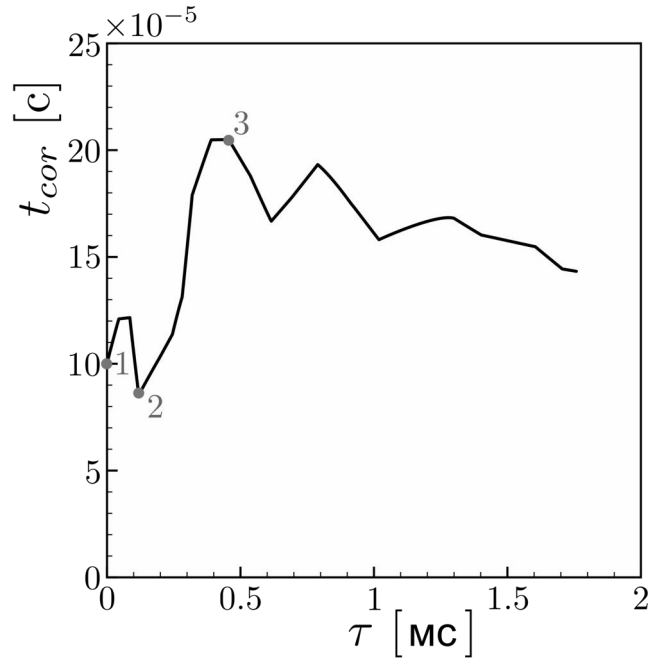


(a)

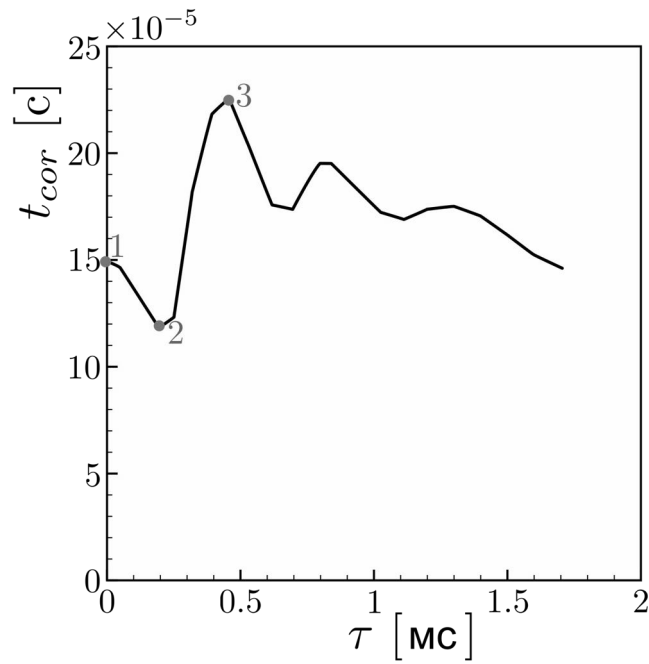


(б)

Рис. 2.3. (а) Зависимость времени корреляции колебаний в системе (2.3) от времени корреляции шума при отсутствии сигнала запаздывающей обратной связи. (б) Зависимость нормированной девиации интерспайковых интервалов в осцилляторе (2.3) от времени корреляции шума при отсутствии сигнала запаздывающей обратной связи. Переменные, имеющие размерность времени, приводятся в секундах. Значения параметров: $D = 0.0625$, $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$.



(а)



(б)

Рис. 2.4. (а) Зависимость времени корреляции колебаний возбужденного осциллятора (2.3) с цветным шумом от времени запаздывания в цепочке запаздывающей обратной связи. Значения параметров $\tau_c = 0.05$, $K = 0.5$, $D = 0.0625$, $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$; (б) Зависимость времени корреляции колебаний возбужденного осциллятора (2.3) с белым шумом $\eta(t) = \sqrt{2D}n(t)$ от времени запаздывания в цепочке запаздывающей обратной связи. Значения параметров $K = 0.5$, $D = 0.04$, $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$

женный при численном моделировании осциллятора ФицХью-Нагумо с цветным шумом и запаздывающей обратной связью [80]. Степенью когерентности индуцированных шумом стохастических колебаний возбудимого осциллятора можно управлять с помощью запаздывающей обратной связи, меняя время запаздывания. Спектральные характеристики шумового воздействия в данном случае не играют принципиальной роли. На рис. 2.4б представлена аналогичная зависимость для осциллятора ФитцХью-Нагумо с запаздывающей обратной связью и белым шумом, полученная экспериментально. Численно аналогичный эффект ранее был получен и для белого шума [79]. Данные, приведенные в [79], позволяют связать механизм управления характеристиками когерентного резонанса с влиянием параметров запаздывающей обратной связи на собственные значения устойчивой точки равновесия в осцилляторе без шума. Как показали расчеты, приведенные в [79], максимумы времени корреляции индуцированных шумом колебаний совпадают с минимумами модуля вещественной части старшего (наименьшего по модулю) собственного значения устойчивого равновесия в осцилляторе без шума.

2.2. Влияние запаздывающей обратной связи на генератор с жестким возбуждением. Анализ в квазигармоническом приближении.

Рассмотрим модель генератора с жестким возбуждением с запаздывающей обратной связью:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - [\varepsilon + \mu x^2 - x^4] \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = K [x(t - \tau) - x(t)] \quad (2.7)$$

Будем полагать, что система (2.7) представляет собой квазигармонический осциллятор. В этом случае решение можно искать в виде гармонической функции в комплексном представлении с медленно меняющимися во времени

амплитудой и фазой, а именно:

$$x(t) = \text{Re} \{A(t)\exp(i\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} \{A\exp(i\omega_0 t) + A^*\exp(-i\omega_0 t)\} \quad (2.8)$$

где $A(t) = A\exp(i\omega_0 t)$ - искомая комплексная функция, $A^*(t) = A^*\exp(-i\omega_0 t)$ - комплексно сопряженная функция. Теперь вычислим первую производную по времени от $x(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{dA}{dt} \exp(i\omega_0 t) + Ai\omega_0 \exp(i\omega_0 t) + \frac{dA^*}{dt} \exp(-i\omega_0 t) - \right. \\ &\quad \left. - i\omega_0 A^* \exp(-i\omega_0 t) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dA}{dt} + i\omega_0 A \right) \exp(i\omega_0 t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{dA^*}{dt} - i\omega_0 A^* \right) \exp(-i\omega_0 t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поскольку мы предполагаем амплитуды медленно меняющимися, то $\left| \frac{dA}{dt} \right| \ll \omega_0 A$ и $\left| \frac{dA^*}{dt} \right| \ll \omega_0 A^*$, тогда члены $\frac{dA}{dt}$ и $\frac{dA^*}{dt}$ можно исключить из (2.9). В итоге, для $\frac{dx}{dt}$ получаем следующее выражение:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \{i\omega_0 A \exp(i\omega_0 t) - i\omega_0 A^* \exp(-i\omega_0 t)\} \quad (2.10)$$

Теперь вычислим вторую производную по времени от $x(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dA}{dt} + i\omega_0 A \right) \exp(i\omega_0 t) + \left(\frac{dA^*}{dt} - i\omega_0 A^* \right) \exp(-i\omega_0 t) \right\} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d^2 A}{dt^2} + i\omega_0 \frac{dA}{dt} \right) \exp(i\omega_0 t) + i\omega_0 \left(\frac{dA}{dt} + i\omega_0 A \right) \exp(i\omega_0 t) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d^2 A^*}{dt^2} - i\omega_0 \frac{dA^*}{dt} \right) \exp(-i\omega_0 t) - i\omega_0 \left(\frac{dA^*}{dt} - i\omega_0 A^* \right) \exp(-i\omega_0 t) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 A}{dt^2} + 2i\omega_0 \frac{dA}{dt} - \omega_0^2 A \right) \exp(i\omega_0 t) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 A^*}{dt^2} - 2i\omega_0 \frac{dA^*}{dt} - \omega_0^2 A^* \right) \exp(-i\omega_0 t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

В силу медленных изменений амплитуды имеем $\frac{d^2 A}{dt^2} \sim \Omega^2 \ll \omega_0 \Omega$ и $\frac{d^2 A^*}{dt^2} \sim \Omega^2 \ll \omega_0 \Omega$ (где Ω - частота изменения амплитуд A и A^*). Поэтому члены

$\frac{d^2 A}{dt^2} \exp(i\omega_0 t)$ и $\frac{d^2 A^*}{dt^2} \exp(-i\omega_0 t)$ можно исключить из вывода (2.11). В конечном счете получаем вторую производную от $x(t)$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(2i\omega_0 \frac{dA}{dt} - \omega_0^2 A \right) \exp(i\omega_0 t) - \left(2i\omega_0 \frac{dA^*}{dt} + \omega_0^2 A^* \right) \exp(-i\omega_0 t) \right\}. \quad (2.12)$$

Далее рассмотрим член, содержащий запаздывание:

$x(t - \tau) = \frac{1}{2} \{ A(t - \tau) \exp(i\omega_0(t - \tau)) + A^*(t - \tau) \exp(-i\omega_0(t - \tau)) \}$. При медленно меняющихся амплитудах для малых τ можно пренебречь изменениями амплитуды за время запаздывания: $A(t - \tau) \approx A(t)$. С учетом этого имеем:

$$x(t - \tau) = \frac{1}{2} \{ A \exp(i\omega_0(t - \tau)) + A^* \exp(-i\omega_0(t - \tau)) \} \quad (2.13)$$

Далее получим значение $K[x(t - \tau) - x(t)]$:

$$\begin{aligned} K [x(t - \tau) - x(t)] &= \frac{1}{2} K [A \exp(i\omega_0 t) \exp(-i\omega_0 \tau) + A^* \exp(-i\omega_0 t) \exp(i\omega_0 \tau) - \\ &- A \exp(i\omega_0 t) - A^* \exp(-i\omega_0 t)] = \frac{1}{2} K [A(\exp(-i\omega_0 \tau) - 1) \exp(i\omega_0 t) + \\ &+ A^*(\exp(i\omega_0 \tau) - 1) \exp(-i\omega_0 t)] = \frac{1}{2} K [A \exp(i\omega_0 t) (\cos(-\omega_0 \tau) + \\ &+ i \sin(-\omega_0 \tau) - 1) + A^* \exp(-i\omega_0 t) (\cos(\omega_0 \tau) + i \sin(\omega_0 \tau) - 1)] = \\ &= \frac{1}{2} K [A \exp(i\omega_0 t) (\cos(\omega_0 \tau) - i \sin(\omega_0 \tau) - 1) + \\ &+ A^* \exp(-i\omega_0 t) (\cos(\omega_0 \tau) + i \sin(\omega_0 \tau) - 1)]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Далее несложно получить значения $x^2(t)$, $x^4(t)$, а также $x^2 \frac{dx}{dt}$, $x^4 \frac{dx}{dt}$:

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \frac{1}{4} (A^2 \exp(2i\omega_0 t) + A^{*2} \exp(-2i\omega_0 t) + 2|A|^2), \\
 x^4 &= \frac{1}{16} (A^4 \exp(4i\omega_0 t) + A^{*4} \exp(-4i\omega_0 t) + 6|A|^4 + \\
 &\quad + 4A^{*2}|A|^2 \exp(-2i\omega_0 t) + 4A^2|A|^2 \exp(2i\omega_0 t)), \\
 x^2 \frac{dx}{dt} &= \frac{i\omega_0 |A|^2}{8} (A \exp(i\omega_0 t) - A^* \exp(-i\omega_0 t)), \\
 x^4 \frac{dx}{dt} &= \frac{i\omega_0 |A|^4}{16} (A \exp(i\omega_0 t) - A^* \exp(-i\omega_0 t)).
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Подставив выражения (2.10)-(2.15) в уравнение (2.7), получим укороченные уравнения для величины A :

$$\begin{aligned}
 \frac{dA}{dt} &= \frac{\varepsilon A}{2} + \frac{1}{8} \mu A^2 A^* - \frac{1}{16} A^3 (A^*)^2 + \\
 &\quad + \frac{KA}{2\omega_0} (i(1 - \cos(\omega_0 \tau)) - \sin(\omega_0 \tau))
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Представив комплексную величину $A(t)$ в полярных координатах: $A(t) = \rho(t) \exp(i\phi(t))$, перепишем (2.16) в виде системы уравнений для амплитуды и фазы:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\varepsilon \rho}{2} + \frac{\mu \rho^3}{8} - \frac{\rho^5}{16} - \frac{K\rho}{2\omega_0} \sin(\omega_0 \tau), \\ \frac{d\phi}{dt} = \frac{K}{2\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 \tau)). \end{cases} \tag{2.17}$$

Из системы (2.17) видно, что в рассматриваемом приближении уравнение для амплитуды и уравнение для фазы полностью разделены: первое не зависит от фазы, второе не зависит от амплитуды. При фиксированных значениях параметров фаза $\phi(t)$ линейно растет во времени. Таким образом, задача о существовании периодических движений, их устойчивости и возможных бифуркациях в генераторе (2.7) в квазигармоническом приближении сводится к изучению амплитудного уравнения системы (2.17), из которого получаем три состояния равновесия:

$$\rho_1 = 0, \quad (2.18)$$

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}}, \quad (2.19)$$

$$\rho_3 = \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}}, \quad (2.20)$$

где $\alpha = 2\mu$, $\beta = 8 \left(\varepsilon - \frac{K}{\omega_0} \sin(\omega_0\tau) \right)$.

Далее несложно получить собственные значения λ для состояний равновесия ρ , взяв производную $\frac{d}{d\rho}$ от правой части первого уравнения (2.17):

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{K}{2\omega_0} \sin(\omega_0\tau) + \frac{3\mu}{8}\rho^2 - \frac{5}{16}\rho^4 \quad (2.21)$$

Проанализировав области существования решений $\rho_{1,2,3}$, а также устойчивость этих решений, приходим к следующим выводам: При $-\infty < \varepsilon < -\frac{\mu^2}{8} + \frac{K}{\omega_0} \sin(\omega_0\tau)$ (значения параметров μ, ω_0, K, τ фиксированы) уравнение для амплитуд (2.17) имеет единственное устойчивое решение ρ_1 , которое соответствует устойчивой неподвижной точке в начале координат в фазовом пространстве исходной системы (2.7). В точке $\varepsilon = -\frac{\mu^2}{8} + \frac{K}{\omega_0} \sin(\omega_0\tau)$ происходит седло-узловая бифуркация предельных циклов, в результате которой рождаются устойчивый и неустойчивый предельные циклы. С ростом параметра ε при достижении значения $\varepsilon = \frac{K}{\omega_0} \sin(\omega_0\tau)$ неустойчивый предельный цикл "влипает" в устойчивую неподвижную точку, которая теряет устойчивость. Реализуется субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа. Таким образом, запаздывающая обратная связь модулирует бифуркационное значение параметра ε . Численные и физические эксперименты полностью подтвердили результаты теоретического анализа (см. рис. 2.5).

2.3. Управление когерентным резонансом с помощью запаздывающей обратной связи в генераторе с жестким возбуждением. Численное моделирование и физический эксперимент

Добавим в систему (2.7) источник белого гауссова шума, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\varepsilon + \mu x^2 - x^4)y - x + K[x(t - \tau) - x(t)] + \sqrt{2D}n(t). \end{cases} \quad (2.22)$$

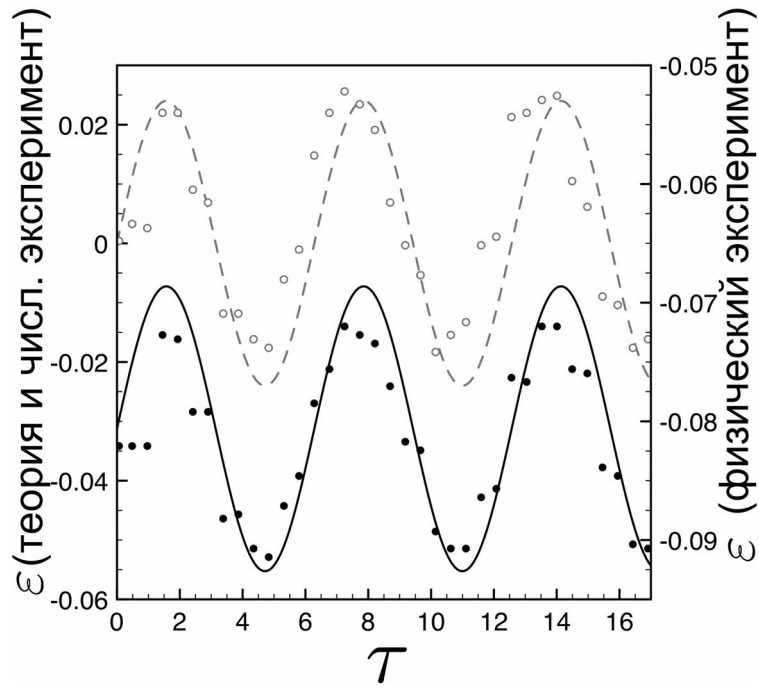
Помимо численного моделирования проводились физические эксперименты, для чего использовалась экспериментальная установка, описанная в первой главе (раздел 1.5). К экспериментальной установке было подключено устройство, реализующее запаздывающую обратную связь (описание установки см. в разделе 2.1). Уравнения, описывающие работу экспериментальной установки в физических переменных имеют вид:

$$\begin{cases} R_0 C \dot{x} = y, \\ R_0 C \dot{y} = (U_1 + U_2 x^2 - x^4)y - x + K[x(t - \tau) - x(t)] + \xi(t), \end{cases} \quad (2.23)$$

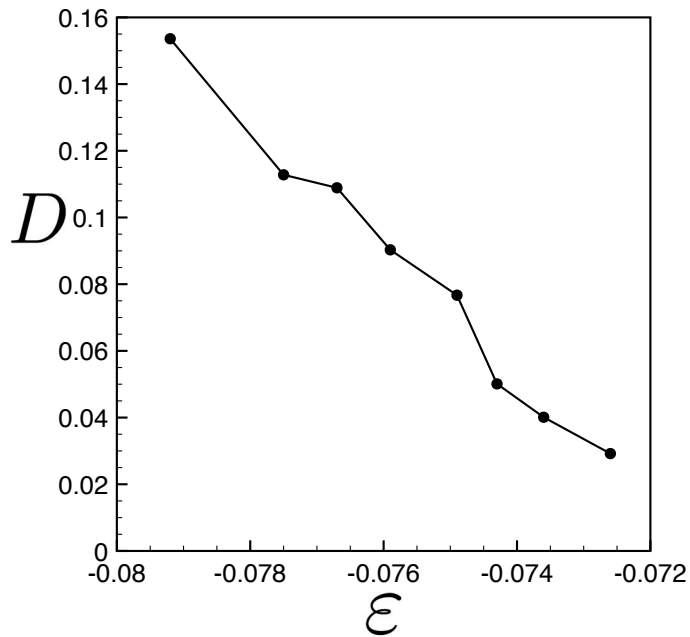
где U_1, U_2 определяют значения управляющих параметров ε и μ соответственно. Сигнал $\xi(t)$ предполагаем белым гауссовым шумом, интенсивность шума которого, D , соответствующая математической модели, определялась также, как и в предыдущих исследованиях.

Из теоретического анализа системы (2.7) при отсутствии шума было выявлено, что запаздывающая обратная связь может сдвигать точку бифуркации в обоих направления, что может стать причиной смены динамического режима. Данный факт был подтвержден экспериментально (см. рис. 2.5а). Известно как интервал между рабочей точкой и точкой бифуркации седло-

узловой бифуркации влияет на оптимальную интенсивность шума для когерентного резонанса: чем больше дистанция между рабочей точкой и точкой седло-узловой бифуркации, тем большая интенсивность шума необходима для достижения когерентного резонанса (рис. 2.5б). Таким образом, подстраивая время запаздывания, мы можем управлять когерентным резонансом. В недавних работах была показана связь между когерентным резонансом и стохастическими Р-бифуркациями [64, 72]. Экспериментальное наблюдение Р-бифуркаций в электронной установке было представлено в работе [71]. Было показано экспериментально, что бимодальное распределение плотности вероятности соответствует наиболее выраженному когерентному резонансу [72]. В представленной диссертационной работе эволюция вероятностного распределения будет рассмотрена в рамках изучения влияния запаздывания на когерентный резонанс. Система (2.22) с нулевым запаздыванием вводилась в режим когерентного резонанса, выбиралась интенсивность шума, соответствующая наиболее когерентным колебаниям, коэффициент запаздывающей обратной связи также фиксировался $K = 0.024$. При численном моделировании системы (2.22) распределение амплитуды рассчитывалось как распределение плотности вероятности $P(a)$, где $a = \sqrt{x^2 + y^2}$. При проведении физических экспериментов распределение амплитуды рассчитывалось таким же образом по экспериментально измеренным реализациям $x(t)$ и $y(t)$. Была исследована эволюция вероятностного распределения при вариации времени запаздывания. Результаты экспериментов (рис. 2.6а) и численного моделирования (рис. 2.6б) находятся в хорошем соответствии. Была выявлена следующая закономерность. При $\tau = T/4$, где $T = 2\pi/\omega_0$, распределение $P(a)$ является унимодальным. Это означает, что траектория испытывает флуктуации в фазовом пространстве в окрестности устойчивого фокуса, и когерентный резонанс отсутствует. При $\tau = 3T/4$ распределение имеет хорошо выраженную бимодальную форму, которая свидетельствует о появлении индуцированных



(a)



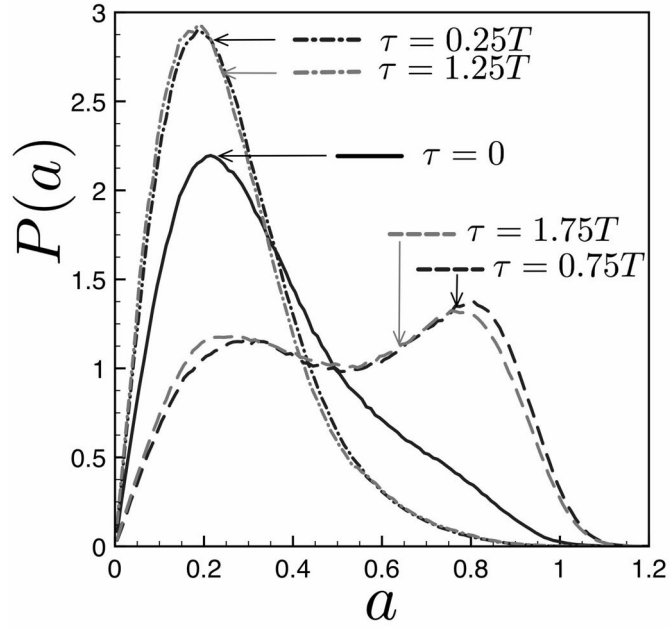
(б)

Рис. 2.5. (а) Модуляция бифуркационного параметра ε при вариации значений параметра τ : результат теоретического анализа в квазигармоническом приближении системы (2.7) и данные физического эксперимента (система (2.23)). Бифуркация Андронова-Хопфа ($\varepsilon(\tau = 0) = 0$) представлена пунктирной линией (теоретический расчет) и незаполненными кружками (физический эксперимент). Седло-узловая бифуркация предельных циклов ($\varepsilon(\tau = 0) = -0.03125$) соответствует сплошной линии (теоретический расчет) и заполненным кружкам (физический эксперимент). Значения параметров: $K = 0.024, D = 0, \mu = 0.5, \omega_0 = 1$; (б) Зависимость оптимальной интенсивности шума при вариации параметра ε (результаты физических экспериментов). Значения параметров: $K = 0, \mu = 0.5, \omega_0 = 1$.

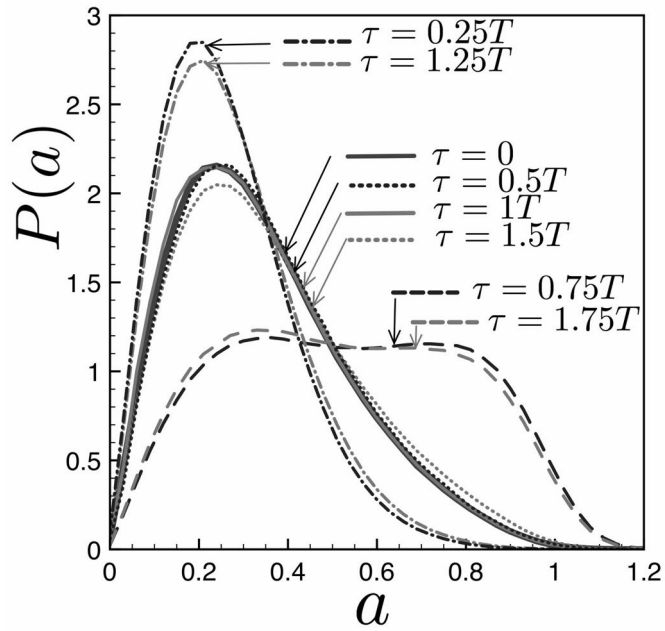
шумом колебаний с большой амплитудой. Максимум распределения вблизи нуля соответствует движениям вблизи устойчивого фокуса. Второй максимум соответствует амплитуде индуцированных шумом осцилляций в окрестности предельного цикла. Подобные перестроения вероятностного распределения повторяются с периодом T . Для времени запаздывания $\tau = 0, T/2, T, 3T/2$ распределение существенным образом не меняется и остается унимодальным. Таким образом, при времени запаздывания равном определенному числу полупериодов собственных колебаний в детерминированной системе, система с шумом ведет себя подобно системе без запаздывания.

Также в целях выявления особенностей влияния запаздывающей обратной связи на эффект когерентного резонанса была рассмотрена зависимость времени корреляции от времени запаздывания. Расчет времени корреляции осуществлялся согласно формуле (2.5). Зависимость, полученная в численном моделировании, находится в хорошем соответствии с результатами эксперимента (см. рис. 2.7а). Полученная зависимость имеет ярко выраженные минимумы при $\tau = (\frac{1}{4} + n)T$, $n \in N$, соответствующие унимодальному распределению. Максимумы соответствуют бимодальному распределению амплитуды и наблюдаются при $\tau = (\frac{3}{4} + n)T$, $n \in N$.

Особенности когерентного резонанса при наличии запаздывания выявляются также при рассмотрении зависимости времени корреляции от интенсивности шума. Как и в работе [81], численно было получено семейство кривых $t_{cor}(D)$ для различного времени запаздывания (2.7 б). При нулевом запаздывании данная зависимость имеет максимум при оптимальной интенсивности шума. Выбрав время запаздывания $\tau = (\frac{3}{4} + n)T$, $n \in N$, можно сделать данный эффект более ярко выраженным. Для $\tau = (\frac{1}{4} + n)T$, $n \in N$ явно выраженный максимум отсутствует, когерентный резонанс ослабляется. Зависимость времени корреляции от интенсивности шума также показала, что при $\tau = \frac{n}{2}T$, $n \in N$ влияние запаздывающей обратной связи крайне мало.

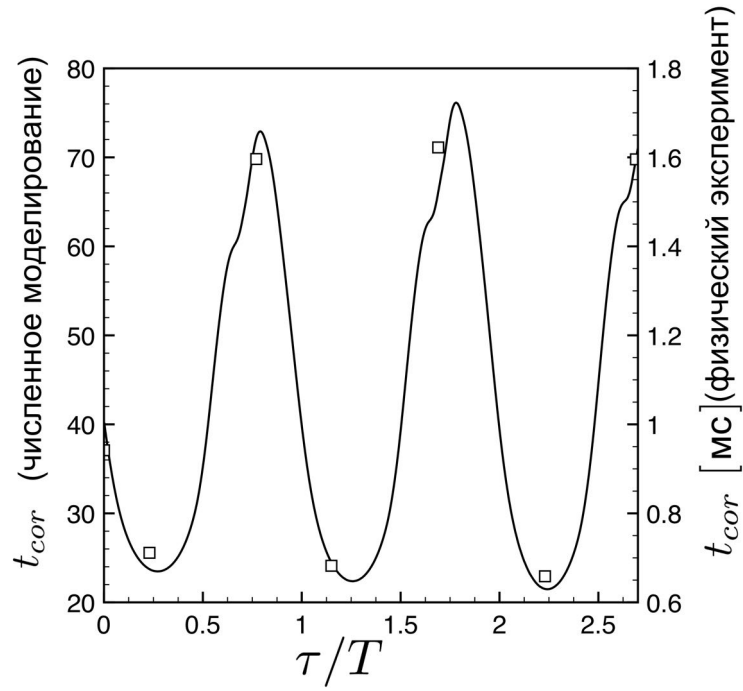


(a)

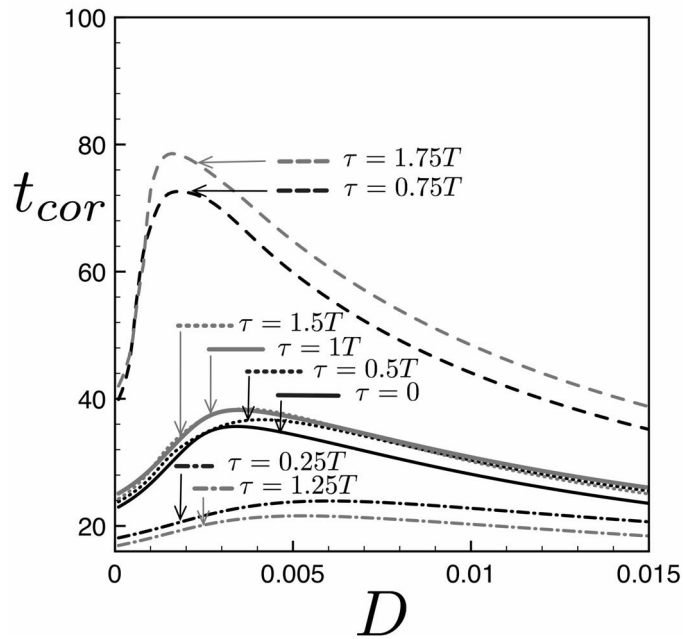


(б)

Рис. 2.6. (а) Система (2.23). Экспериментально полученные вероятностные распределения амплитуды $P(a)$ для различных значений времени запаздывания. Значения параметров: $K = 0.024, D = 0.01, \mu = 0.5, \varepsilon = -0.093, \omega_0 = 1, T = 2\pi$; (б) Вероятностные распределения амплитуды $P(a)$ для различных значений времени запаздывания, полученные при численном моделировании системы (2.22). Значения параметров: $K = 0.024, D = 0.003, \mu = 0.5, \varepsilon = -0.06, \omega_0 = 1, T = 2\pi$.



(a)



(б)

Рис. 2.7. (а) Зависимость времени корреляции колебаний $x(t)$ системы (2.22) (сплошная линия) Значения параметров: $K = 0.024$, $D = 0.003$, $\mu = 0.5$, $\varepsilon = -0.06$, $\omega_0 = 1$, $T = 2\pi$; Экспериментально полученные квадратные точки - аналогичная зависимость для системы (2.23) при $K = 0.024$, $D = 0.01$, $\mu = 0.5$, $\varepsilon = -0.093$, $\omega_0 = 1$, $T = 2\pi$. (б) Зависимость времени корреляции колебаний $x(t)$ системы (2.22) от интенсивности шума при различном времени запаздывания τ . Значения параметров: $K = 0.024$, $\mu = 0.5$, $\varepsilon = -0.06$, $\omega_0 = 1$, $T = 2\pi$.

2.4. Выводы по второй главе

Проведенные исследования показали возможность управления характеристиками когерентного резонанса, как для осциллятора ФитцХью-Нагумо, являющегося классической моделью возбудимого осциллятора, так и в генераторе с жестким возбуждением, который не относится к классу возбудимых осцилляторов. Было показано, что в обоих случаях степень когерентности индуцированных шумом колебаний, оцениваемая по времени корреляции, немонотонным образом меняется при изменении времени запаздывания дополнительной цепи запаздывающей обратной связи и при некоторых значениях времени запаздывания значительно превосходит когерентность колебаний в системе без запаздывающей обратной связи. Результаты экспериментальных исследований влияния запаздывающей обратной связи на эффект КР находятся в хорошем соответствии с аналитическими результатами и данными численного моделирования. Механизм влияния запаздывающей обратной связи на степень когерентности колебаний в генераторе с жестким возбуждением был выявлен теоретически. Он связан со сдвигом бифуркационных значений управляющего параметра при изменении характеристик запаздывающей обратной связи. Теоретические результаты находятся в хорошем соответствии с результатами численного моделирования и физических экспериментов. Механизм управления когерентным резонансом в возбудимых осцилляторах типа осциллятора ФицХью - Нагумо является несколько иным [79]. В проведенных экспериментах с моделью возбудимого осциллятора было установлено отсутствие влияния времени запаздывания на бифуркационные значения управляющих параметров.

Глава 3

Индукцированные шумом эффекты в двухъямном осцилляторе с нелинейным трением

Введение

Классическим примером стохастического бистабильного осциллятора является нелинейный осциллятор с одной степенью свободы и постоянным трением [84, 85, 96, 121], задаваемый дифференциальным уравнением вида:

$$\ddot{y} + \gamma\dot{y} + \frac{dU(y)}{dy} = \sqrt{2\gamma D}n(t), \quad (3.1)$$

где γ - постоянный коэффициент диссипации, $U(y)$ - потенциальная функция, $n(t)$ - нормированный источник шума ($\langle n(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$, скобки $\langle \dots \rangle$ означают статистическое усреднение, $\delta(\tau)$ - функция Дирака), D - интенсивность шума. Если функция $U(y)$ характеризуется двумя минимумами и максимумом (двухъямный потенциал), то осциллятор (3.1) представляет собой бистабильный осциллятор, совершающий под действием шума случайные переключения из одной потенциальной ямы в другую (осциллятор Крамерса [84, 85]).

Для осциллятора (3.1) с конечным трением ($\gamma \neq \infty$) скорость $\dot{y}(t)$ представляет собой диффузионный процесс с непрерывными во времени реализациями. Соответственно, реализации $y(t)$ являются гладкими функциями (с непрерывной производной). В этом случае для характеристики средней частоты колебаний удобно использовать частоту Райса [96, 121, 122]. Она определяется как $\omega_R = 2\pi M/T$, где M - число переходов переменной y через ноль

в одном направлении за время наблюдения $T \rightarrow \infty$. Для осциллятора (3.1) с $\gamma = 1$ частота Райса удовлетворяет следующему соотношению [96, 121]:

$$\omega_R = \frac{\sqrt{2\pi D} \exp\left(-\frac{U(0)}{D}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{U(y)}{D}\right) dy} \quad (3.2)$$

В бистабильных осцилляторах типа (3.1) с ростом интенсивности шума частота Райса монотонно растет [121]. При этом не наблюдается качественных изменений формы вероятностного распределения $P(y, \dot{y})$, т.е. отсутствуют стохастические бифуркации Р- типа (феноменологические бифуркации) [13, 15], хотя, при малой диссипации, возможна стохастическая бифуркация D-типа, связанная с возникновением экспоненциальной неустойчивости стохастических траекторий [15, 33]. Модель (3.1) не исчерпывает всех свойств бистабильных осцилляторов. Так, существенно иным может оказаться поведение бистабильных осцилляторов с переменной диссипацией.

В рамках третьей главы диссертации предложен и исследован стохастический бистабильный осциллятор, качественно отличный от осциллятора (3.1), который, в зависимости от значений управляющих параметров, может демонстрировать более сложное и разнообразное поведение. Показано, что поведение стохастических бистабильных осцилляторов с одной степенью свободы в общем случае не сводится к явлениям, наблюдаемым в классической модели (3.1), а может быть значительно многообразнее и сложнее. Было обнаружено, что изменение интенсивности шума в предложенном осцилляторе приводит к стохастическим бифуркациям Р-типа. Следствием этого является немонотонный характер зависимости частоты Райса от интенсивности шума.

В третьей главе приведены результаты численного и экспериментального исследования динамики исследуемой системы. Проводится сопоставление результатов с теоретическими соотношениями, справедливыми для осцилля-

тора (3.1), для чего вводятся эффективные характеристики предлагаемой бистабильной модели.

3.1. Исследуемая модель

Рассмотрим схему параллельного контура, представленную на рис.3.1а. Контур содержит два, в общем случае, нелинейных элемента (N1, N2) с вольт-амперными характеристиками S и N типа, задаваемыми некоторыми функциями $i_{N1} = F(U)$, $U_{N2} = G(i)$ (U - напряжение, i - ток), и источник шумового тока $i_{noise}(t)$, который будем полагать белым и гауссовым. С помощью первого закона Кирхгофа получаем следующую систему уравнений для напряжения U между обкладками конденсатора C и тока i через катушку L :

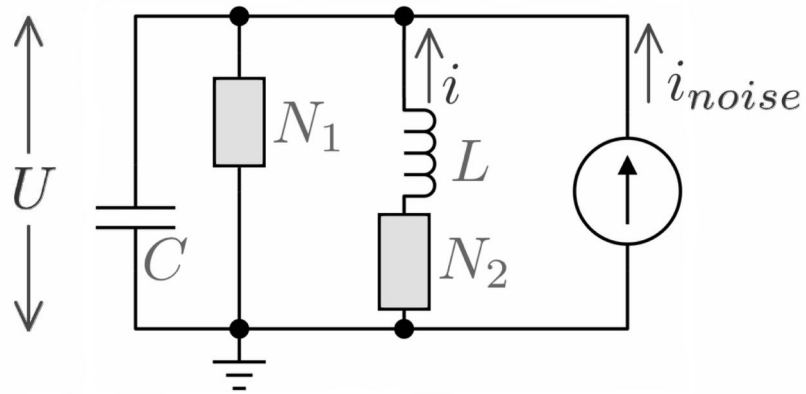
$$\begin{cases} C \frac{dU}{dt'} + i_{N1} + i + i_{noise}(t') = 0, \\ U = L \frac{di}{dt'} + U_{N2}. \end{cases} \quad (3.3)$$

В безразмерных переменных $x = U/U_0$ и $y = i/i_0$ ($U_0 = 1$ В, $i_0 = 1$ А) и безразмерном времени $t = (V_0/(i_0L))t'$ система (3.3) примет вид:

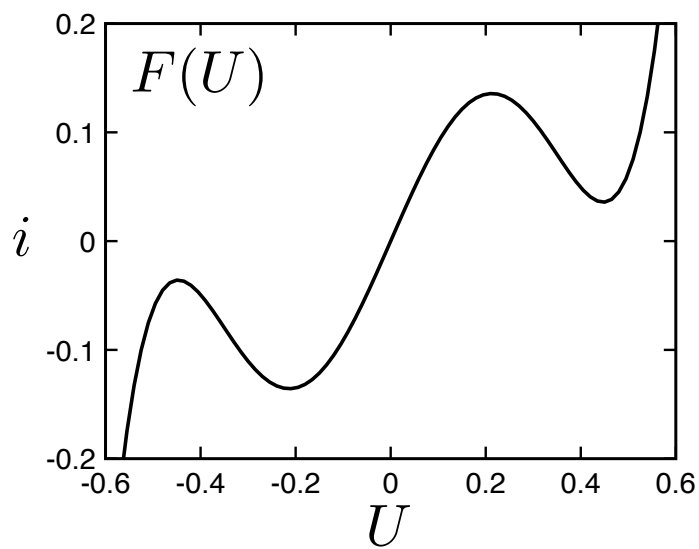
$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = -y - F(x) - \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y} = x - G(y), \end{cases} \quad (3.4)$$

где $\varepsilon = (C/L)U_0^2/i_0$. Первое уравнение содержит источник аддитивного белого гауссова шума с интенсивностью D : $\langle n(t) \rangle = 0$, $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle = 2D\delta(\tau)$. Выбор функций $F(x)$ и $G(y)$ позволяет получить широкий спектр динамических режимов, от режимов, аналогичных поведению осциллятора (3.1) с двухъямным потенциалом до динамики возбудимого осциллятора и бистабильных автоколебаний.

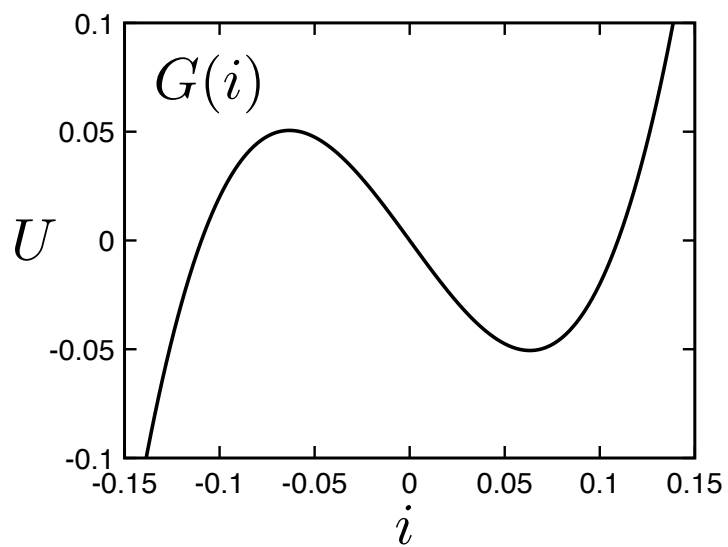
Положим $G(y) = -ay + by^3$, $F(x) = c_1x$, при $a, b, c_1 > 0$, тогда в осцилляторной форме получаем уравнение:



(a)



(б)



(в)

Рис. 3.1. (а) Модель исследуемой системы; (б),(в) Вольт-амперные характеристики элементов N_1 ($i = F(U)$) и N_2 ($U = G(i)$), соответствующие системе (3.6).

$$\ddot{y} + ((3by^2 - a)\varepsilon + c_1)\frac{\dot{y}}{\varepsilon} + (1 - c_1a + c_1by^2)\frac{y}{\varepsilon} = -\frac{\sqrt{2D}}{\varepsilon}n(t). \quad (3.5)$$

При достаточно малом ε влиянием слагаемых $(3by^2 - a)$ на диссипацию можно пренебречь. В этом случае осциллятор (3.5) аналогичен бистабильному осциллятору (3.1). Проведенные исследования не выявили качественных отличий в системах (3.1) и (3.5) при малых ε .

Теперь положим элемент N1 нелинейным, выберем функцию $F(x)$ в виде: $F(x) = c_1x - c_3x^3 + c_5x^5$, и зафиксируем значения параметров $c_1 = 1, c_3 = 9, c_5 = 22$. Известен ряд электронных элементов и устройств, имеющих вольт-амперную характеристику вида $i = F(U)$ (соответствующий вид функций $i = F(U)$ и $U = G(i)$ представлены на рис.3.1б,в). К примеру, подобный двухполюсник можно получить на основе лямбда-диода [123]. При такой конфигурации исследуемая система будет описываться уравнениями:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = -y - c_1x + c_3x^3 - c_5x^5 - \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y} = x + ay - by^3. \end{cases} \quad (3.6)$$

Система (3.6) может быть рассмотрена в новых переменных $y, v = \dot{y} = x + ay - by^3$. В этом случае:

$$\begin{cases} \dot{y} = v, \\ \varepsilon\dot{v} = -y - c_1(v - ay + by^3) + c_3(v - ay + by^3)^3 - \\ - c_5(v - ay + by^3)^5 + \varepsilon av - 3\varepsilon by^2v - \sqrt{2D}n(t). \end{cases} \quad (3.7)$$

В осцилляторной форме имеем:

$$\ddot{y} + q_1(y, \dot{y})\dot{y} + \frac{1}{\varepsilon}q_2(y) = -\sqrt{2D}n(t), \quad (3.8)$$

где функция $q_2(y)$ определяет форму потенциала, а $q_1(y, \dot{y})$ есть нелинейное трение. Эти функции задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
q_1(y, \dot{y}) &= -a + 3by^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left(c_1 - c_3 \sum_{n=1}^3 \frac{3!}{n!(3-n)!} \dot{y}^{n-1} (by^2 - a)^{3-n} y^{3-n} + \right. \\
&+ c_5 \sum_{n=1}^5 \frac{5!}{n!(5-n)!} \dot{y}^{n-1} (by^2 - a)^{5-n} y^{5-n} \left. \right), \\
q_2(y) &= y + c_1(by^2 - a)y - c_3(by^2 - a)^3 y^3 + c_5(by^2 - a)^5 y^5.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Важно отметить, что для рассматриваемого осциллятора коэффициент трения зависит не только от переменной y , но и от скорости \dot{y} . Эта зависимость является причиной качественного отличия поведения осциллятора (3.6) от (3.1) и (3.5).

3.2. Численное исследование индуцированных шумом эффектов

Рассмотрим с использованием численного моделирования поведение исследуемой системы в координатах $y, v = \dot{y}$ (система (3.7)) при $D > 0$. Выбор переменных объясняется следующими факторами: рассмотрение фазового пространства координата-скорость $(y, v = \dot{y})$ облегчает сравнительный анализ исследуемой системы с системой (3.1). Также изучение структуры фазового пространства (y, \dot{y}) позволило выявить причины индуцированных шумом эффектов в исследуемой системе, которые будут описаны ниже. В численном эксперименте система (3.7) интегрировалась методом Гюна (с учетом случайных воздействий) с шагом $\Delta t = 0.0001$, а затем полученные временные ряды подвергались дальнейшей обработке. При малом шуме (рис. 3.2а, фрагмент 1) система (3.7) демонстрирует типичное для бистабильных систем поведение. Наблюдаются индуцированные шумом колебания вблизи устойчивых состояний равновесия с редкими переключениями между ними. Вероятностное распределение $P(y, v)$ (рис. 3.2б, фрагмент 1) имеет характерную форму с двумя пиками. Однако, с ростом шума наблюдается смещение максимумов

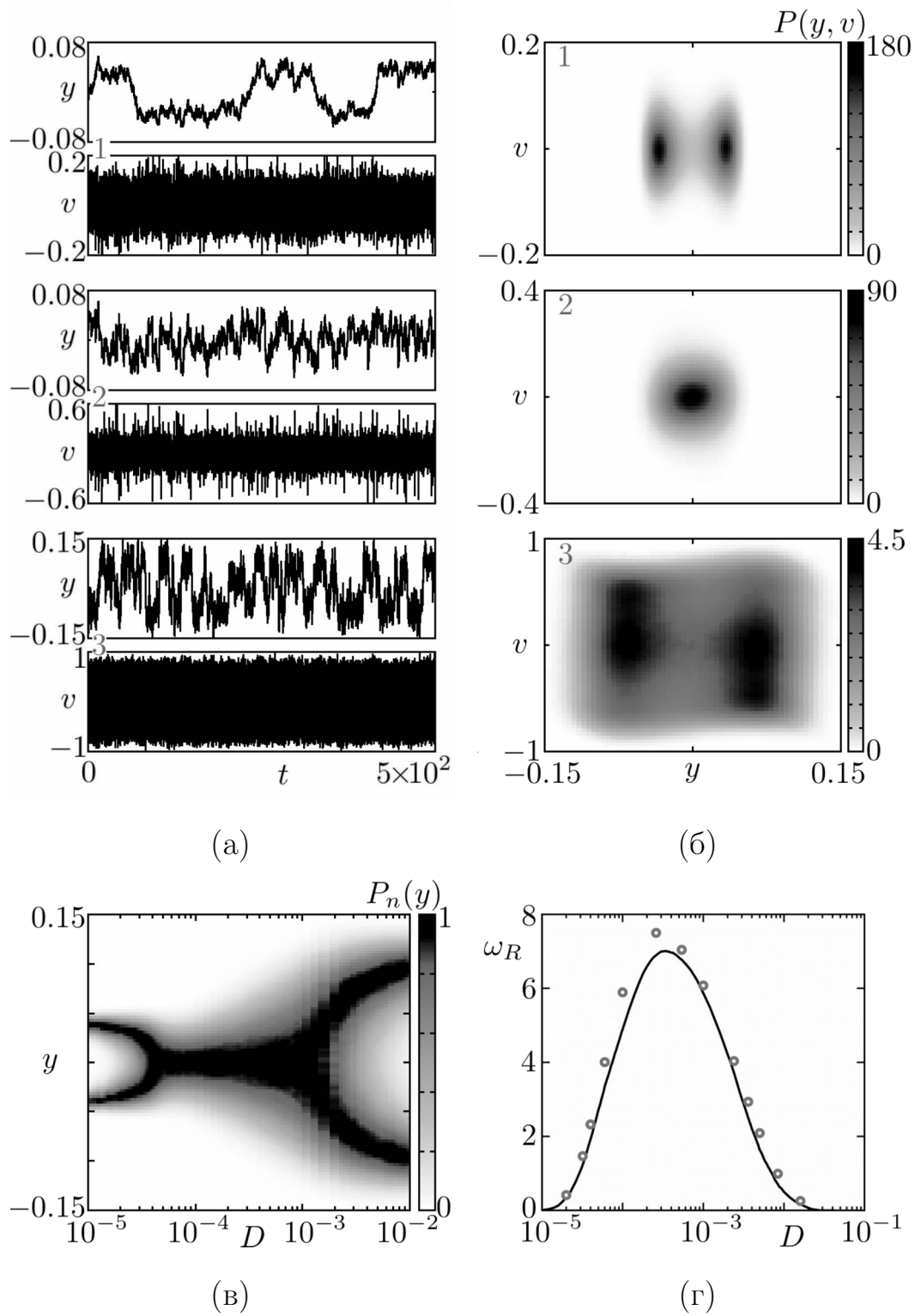


Рис. 3.2. Система (3.7): Фрагменты временных реализаций $y(t)$ и $v(t)$ (а) и вероятностные распределения $P(y, v)$ (б) для различной интенсивности шума: 1) $D = 2 \times 10^{-5}$, 2) $D = 6 \times 10^{-5}$, 3) $D = 2.4 \times 10^{-3}$; (в) Эволюция вероятностного распределения нормированной плотности вероятности $P_n(y) = P(y)/P_{max}(y)$ с ростом шума. Зависимость частоты Райса ω_R от интенсивности шума D : полученная при численном моделировании по временным реализациям переменной $y(t)$ (сплошная линия) и рассчитанная по формуле (3.2) в некоторых точках (серые круги). Значения параметров: $\varepsilon = 0.01, c_1 = 1, c_3 = 9, c_5 = 22, a = 1.2, b = 100$.

к началу координат, в результате чего происходит стохастическая Р-бифуркация: два пика сливаются в один максимум в начале координат (рис. 3.2а,б, фрагмент 2), исследуемая система перестает демонстрировать бистабильное поведение. При дальнейшем увеличении интенсивности шума D наблюдается процесс расщепления пика в начале координат и формирования распределения плотности вероятности с двумя пиками (рис. 3.2а,б, фрагмент 3), характерного для бистабильных систем. Система (3.7) снова проявляет свойство бистабильности. Эволюция вероятностного распределения $P(y)$ с ростом шума (рис. 3.2в) также отражает эффект индуцированных шумом разрушения и восстановления бистабильности с ростом шума.

Стохастические бифуркации приводят к принципиально иной зависимости частоты Райса от интенсивности шума, которая не наблюдается в осцилляторах типа (3.1). Частота Райса определяется как частота, с которой переменная y пересекает нулевое значение при положительной скорости. Функция $y(t)$ является гладкой, что определяет выбор переменной y для вычисления частоты Райса. На рис.3.2г приведена полученная по результатам численного моделирования зависимость частоты Райса ω_R от интенсивности шума D для осциллятора (3.7) - частота Райса сначала растет с ростом шума, а затем, достигнув максимума, уменьшается до значений, близких к нулю. Следствием стохастических бифуркаций также является немонотонный характер зависимости дисперсии колебаний $y(t)$, σ_y^2 от интенсивности шума (рис. 3.3). Первоначально наблюдается снижение дисперсии с ростом шума, которое затем сменяется ростом дисперсии. Как результат, существует оптимальная интенсивность шума, при которой дисперсия колебаний $y(t)$ минимальна.

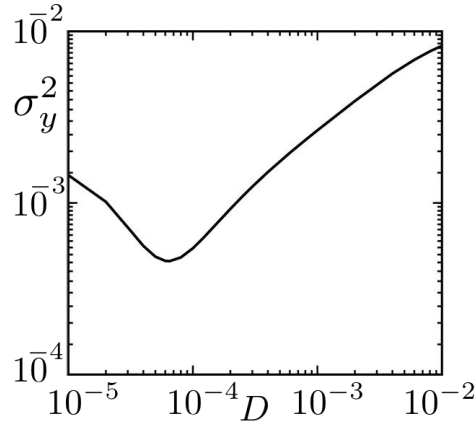


Рис. 3.3. Система (3.7). Зависимость дисперсии колебаний $y(t)$ от интенсивности шума. Значения параметров: $\varepsilon = 0.01$, $c_1 = 1$, $c_3 = 9$, $c_5 = 22$, $a = 1.2$, $b = 100$.

3.3. Эффективный потенциал как способ описания наблюдаемых эффектов

Изменения поведения системы (3.7) с ростом шума можно описать с помощью, эффективной интенсивности шума D_{eff} , и эффективного потенциала U_{eff} . Такая возможность обусловлена тем, что совместное стационарное распределение переменных y и \dot{y} в осцилляторе (3.7) может быть представлено в виде, аналогичном распределению, полученному теоретически для осциллятора (3.1) [84, 96, 121]. Оно имеет вид:

$$P(y, \dot{y}) = K \exp \left(-\frac{1}{D_{eff}} \left(\frac{\dot{y}^2}{2} + U_{eff}(y) \right) \right) \quad (3.10)$$

где K – нормировочная константа. Фактически, осциллятор (3.7) при таком подходе рассматривается как осциллятор (3.1) с потенциалом $U_{eff}(y)$, форма которого меняется с ростом шума. Параметры эффективного потенциала $U_{eff}(y)$ определяются на основании аппроксимации вероятностного распределения переменной y , полученных экспериментально при заданном уровне шума. Эффективная интенсивность шума D_{eff} определяется как дисперсия скорости \dot{y} . Метод определения D_{eff} основывается на следующих соображениях. Выражение (3.10) предполагает, что в осцилляторе (3.1) распределение

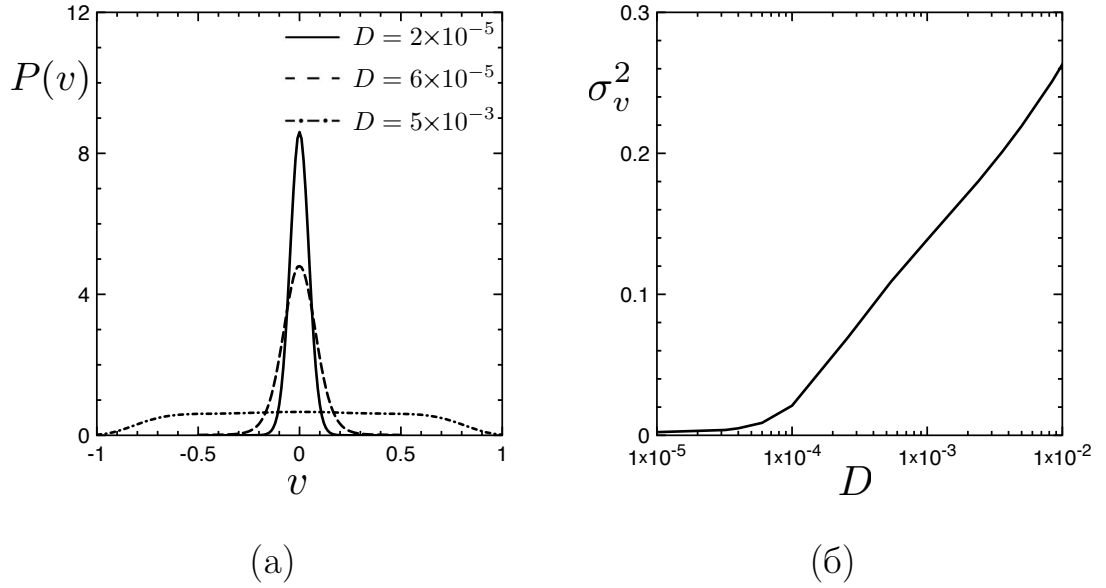


Рис. 3.4. Система (3.7): (а) Вероятностные распределения $P(v)$ при различной интенсивности шума. (б) Зависимость дисперсии колебаний скорости $v(t)$: σ_v^2 от интенсивности шума. Значения параметров: $\varepsilon = 0.01$, $c_1 = 1$, $c_3 = 9$, $c_5 = 22$, $a = 1.2$, $b = 100$.

скорости является гауссовым, причем дисперсия скорости σ_v^2 равна интенсивности шума D . Как показали расчеты, распределение $P(y)$ в системе (3.7) действительно является унимодальным (см. рис. 3.4а) и близким к гауссову в области слабых шумов. С ростом шума дисперсия скорости монотонно растет (см. рис. 3.4б). Для плотности вероятности переменной y из (3.10) следует выражение:

$$P(y) = \rho \exp(-U_{eff}/D_{eff}). \quad (3.11)$$

Эффективный потенциал задавался в виде $U_{eff} = -\alpha y^2 + \beta y^4$. Полученные по формуле значения $P(y)$ сопоставлялись с результатами физических экспериментов, и по методу наименьших квадратов определялись коэффициенты α , β и ρ (рис. 3.5 а,б,в). На рис. 3.5 г,д,е приведены кривые $U_{eff}(y)$, рассчитанные по соответствующим аппроксимациям вероятностного распределения $P(y)$ для различных значений D . Качественные перестройки формы эффективного потенциала соответствуют описанным ранее стохастическим бифуркациям. Максимумы плотности вероятности $P(y)$ совпадают с локаль-

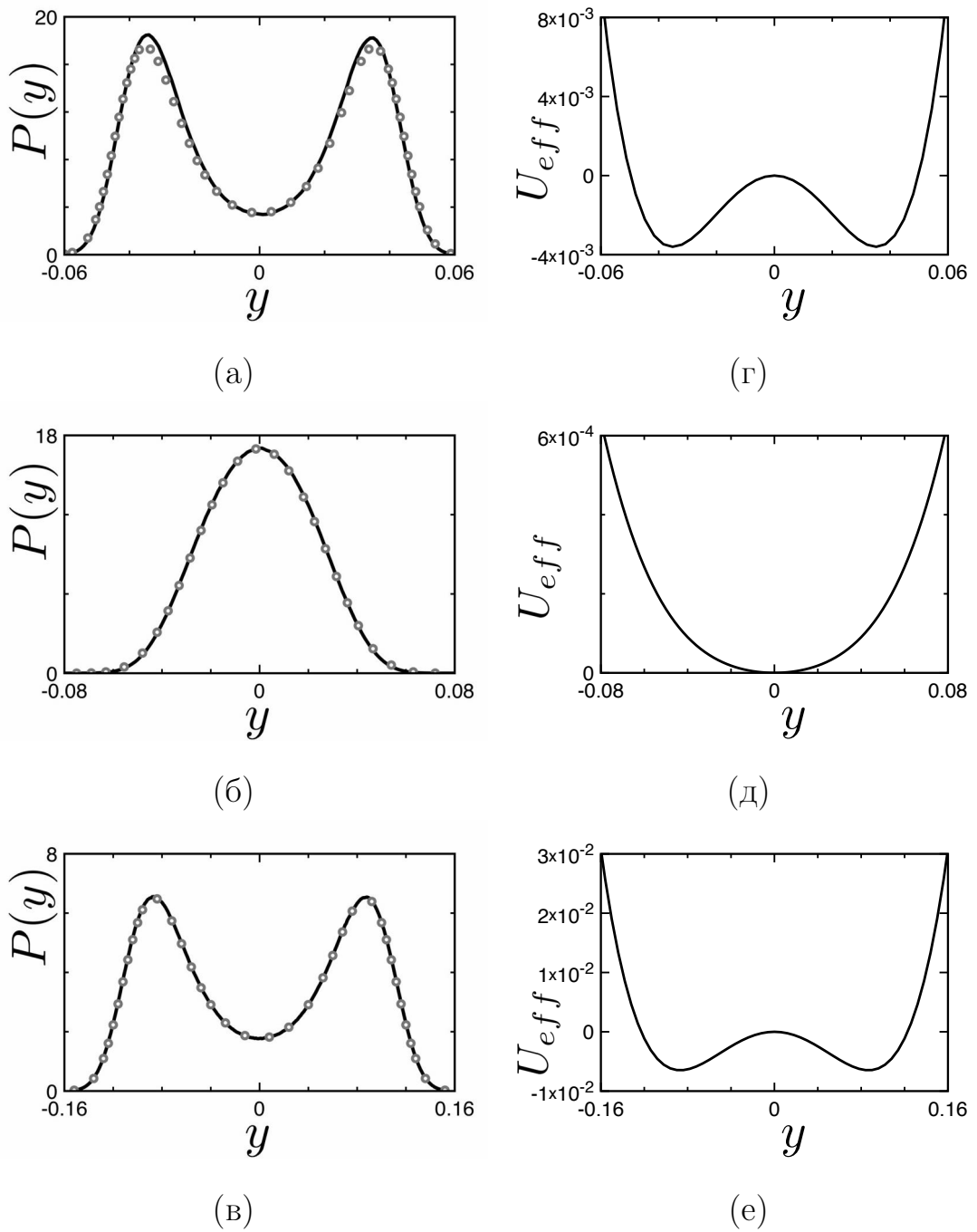


Рис. 3.5. Система (3.7): (а),(б),(в) Вероятностные распределения $P(y)$ (сплошная линия) и аппроксимация по формуле (3.11) (серые кружки) при различной интенсивности шума; (г),(д),(е) Эффективный потенциал, полученный по результатам аппроксимации вероятностного распределения. Значения параметров системы: $\varepsilon = 0.01, c_1 = 1, c_3 = 9, c_5 = 22, a = 1.2, b = 100$. Интенсивность шума $D = 2 \times 10^{-5}$ (а,г); $D = 6 \times 10^{-5}$ (б,д); $D = 5 \times 10^{-3}$ (в,е). Значения параметров: $\varepsilon = 0.01, c_1 = 1, c_3 = 9, c_5 = 22, a = 1.2, b = 100$.

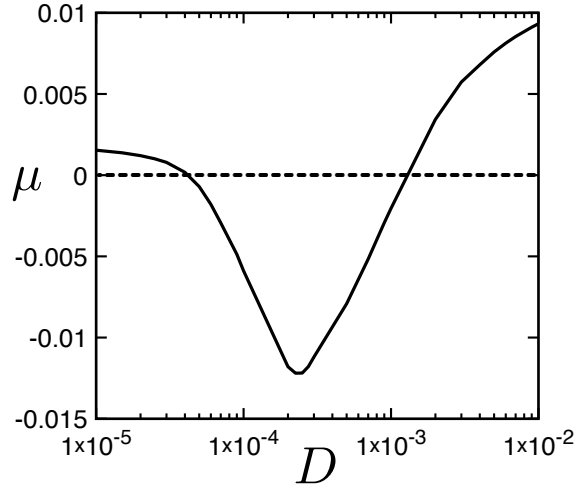


Рис. 3.6. Система (3.7): Зависимость значения эффективного бифуркационного параметра μ от интенсивности шума. Значения параметров: $\varepsilon = 0.01, c_1 = 1, c_3 = 9, c_5 = 22, a = 1.2, b = 100$.

ными минимумами эффективного потенциала. Частоту Райса можно вычислить по формуле (3.2) с соответствующей заменой $U \rightarrow U_{eff}$ и $D \rightarrow D_{eff}$. На рис.3.2г кружками отмечены значения частоты Райса, полученные для осциллятора (3.7) с использованием эффективных характеристик D_{eff} и U_{eff} и выражения (3.2). Стоит отметить, что распределение $P(v)$ является гауссовым только при малой интенсивности шума. Тем не менее, аппроксимация $P(v)$ гауссовым распределением позволяет достаточно точно определить частоту Райса.

Эффективный потенциал может быть представлен в виде $U_{eff}(y) = 4\beta(-\mu y^2/2 + y^4/4)$, где $\mu = \alpha/(2\beta)$. Качественные изменения формы эффективного потенциала при такой записи определяются значением эффективного параметра $\mu \equiv \mu(D)$. Таким образом, динамика исследуемой системы может быть описана с помощью нормальной формы бифуркации вил [124], $\dot{z} = \mu z - z^3$, которая бистабильна при $\mu > 0$ и моностабильна при $\mu < 0$ (бифуркация вил происходит при $\mu = 0$). На рис. 3.6 представлена зависимость эффективного бифуркационного параметра от интенсивности шума

$\mu(D)$. Значения интенсивности шума D , при которых эффективный параметр μ переходит через ноль соответствуют значениям, при которых наблюдается переход бистабильность-моностабильность-бистабильность на рис. 3.2в.

3.4. Структура фазового пространства исследуемой системы. Причины наблюдаемых явлений

Рассмотрим структуру фазового пространства исследуемой системы. Она представлена на рис. 3.7а. На фазовой плоскости имеем два устойчивых состояния равновесия и седловая точка в начале координат. Характерной особенностью исследуемой системы является структура нулклины $\dot{v} = 0$. Она состоит из симметричной кривой, проходящей через начало координат, и двух изолированных замкнутых кривых, наличие которых принципиальным образом определяет динамику системы.

Как было показано выше, при малом шуме (рис.3.7б,в) вероятностное распределение имеет характерную форму с двумя пиками в местах расположения неподвижных точек (точки пересечения нулклин). Однако, с ростом шума наблюдается движение максимумов к началу координат с последующим слиянием в один максимум в начале координат (рис.3.7г,д). Изменения в поведении системы можно объяснить следующим образом. С ростом шума вероятностное распределение $P(y, v)$ "расплывается" в первую очередь по вертикали. Это приводит ко все более частому приближению фазовой точки к изолированным замкнутым кривым нулклины $\dot{v} = 0$. Чем ближе фазовая точка приближается к замкнутым кривым (области очерчены пунктиром на рис.3.7г), тем сильнее фазовая точка затем отклоняется к началу координат, подобно траекториям на рис.3.7а. При определенной интенсивности шума влияние изолированных кривых нулклины $\dot{v} = 0$ максимально, чему соответствует распределение с одним пиком в начале координат. Дальнейший рост

интенсивности шума приводит ко все большему размыванию вероятностного распределения. Фазовая точка все чаще пролетает через изолированные замкнутые кривые нулклины $\dot{v} = 0$, попадая на которые она замедляется. Если фазовая точка "срывается" с изолированных кривых, то она с большей вероятностью (в силу больших чем раньше отклонений) попадет не в область седловой точки (как на рис. 3.7г,д), а сместится дальше и окажется в окрестности одного из устойчивых состояний равновесия. Таким образом, фазовая точка все реже оказывается вблизи начала координат, и все чаще вблизи изолированных замкнутых кривых $\dot{v} = 0$ слева и справа от начала координат. Как следствие, вероятностный пик в начале координат разделяется на два пика слева и справа.

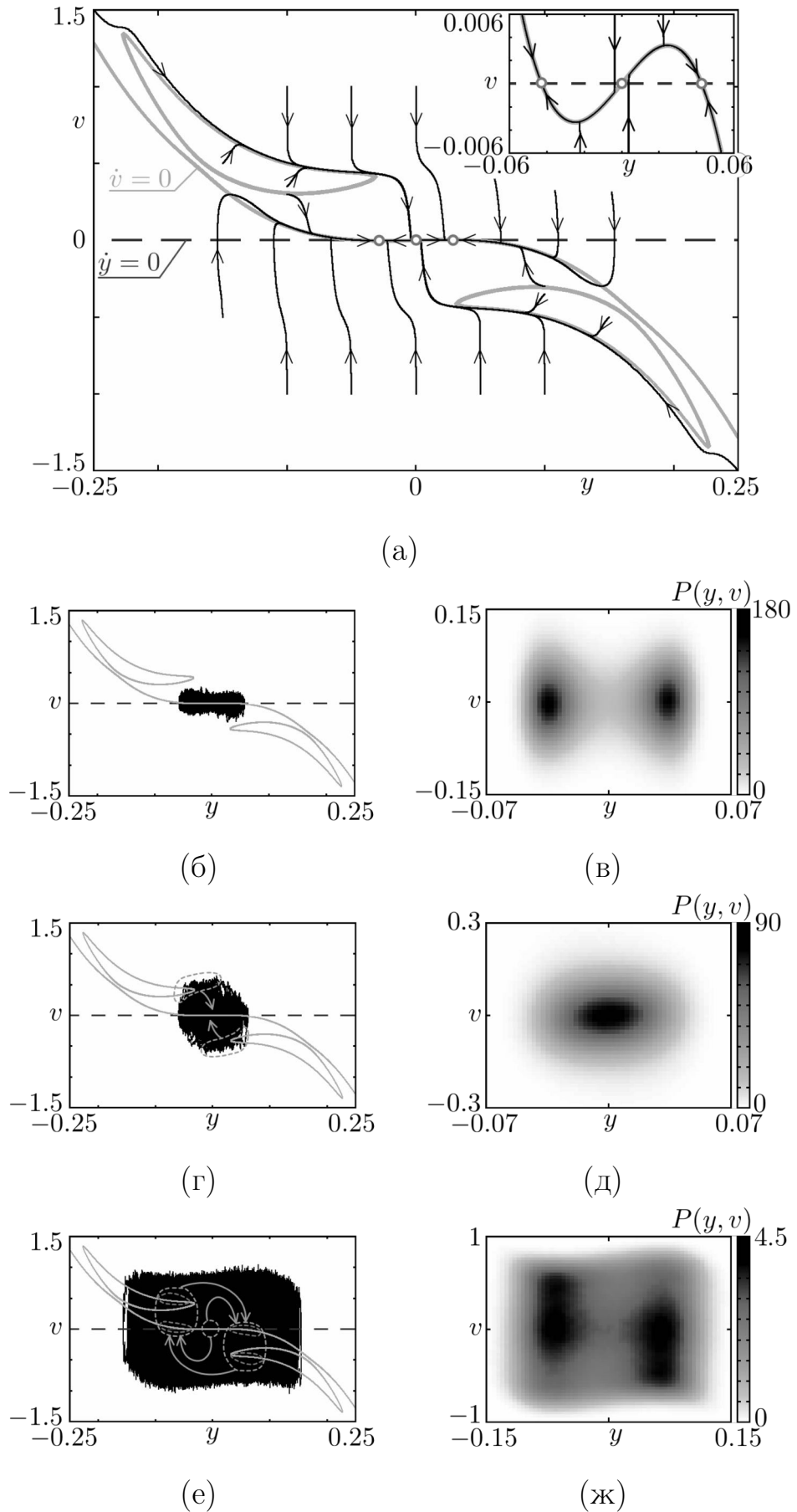


Рис. 3.7. Система (3.7): (а) Фазовое пространство; (б)-(ж) Фрагменты траекторий в фазовом пространстве и соответствующие вероятностные распределения. (б),(в) $D = 2 \times 10^{-5}$; (г),(д) $D = 6 \times 10^{-5}$; (е),(ж) $D = 2.4 \times 10^{-3}$. Значения параметров: $\varepsilon = 0.01, c_1 = 1, c_3 = 9, c_5 = 22, a = 1.2, b = 100$.

3.5. Физический эксперимент и его результаты

Система (3.6) была исследована экспериментально, для чего была создана установка (рис.3.8а), схема которой представлена на рис.3.8б. Как и в предыдущих исследованиях, при проектировании установки использовались принципы аналогового моделирования. Установка позволяет получать мгновенные значения переменных x_* , y_* (мгновенные значения напряжения на соответствующих выходах установки) а также значение мгновенной скорости v_* путем преобразования сигналов x_* и y_* : $v_* = \dot{y}_* = x_* + ay_* - by_*^3$. Временные реализации, снимаемые с соответствующих выходов установки (обозначены на схеме на рис.3.8а), обрабатывались на компьютере, для чего использовалась АЦП NI PCI-6133 (производство компании National Instruments). Уравнения, описывающие работу экспериментальной установки, имеют вид:

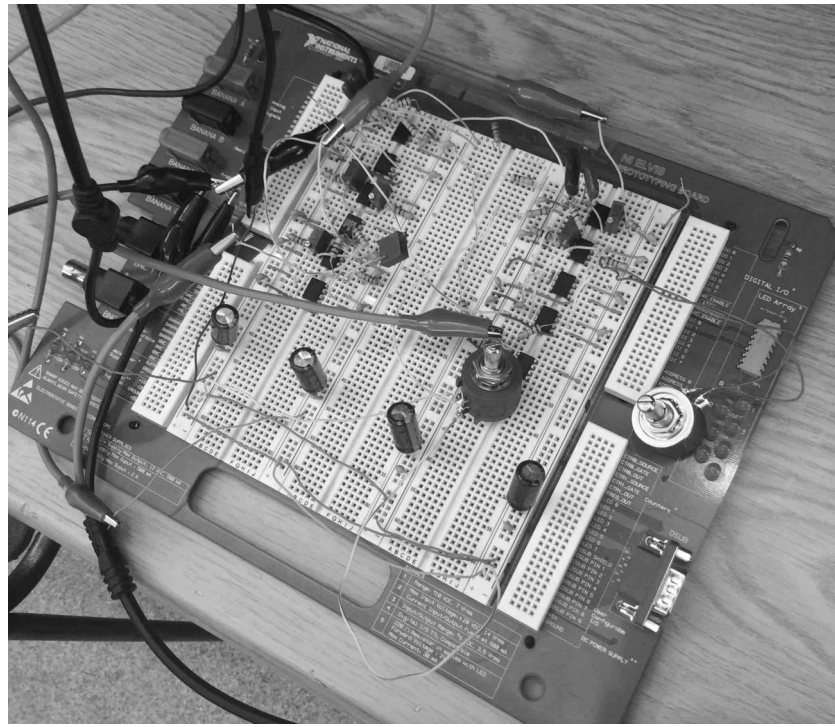
$$\begin{cases} R_x C_x \frac{dx_*}{dt_*} = -y_* - c_1 x_* + c_3 x_*^3 - \\ c_5 x_*^5 - \xi(t_*), \\ R_y C_y \dot{y}_* = x_* + ay_* - by_*^3, \end{cases} \quad (3.12)$$

где $C_x = 30$ нФ, $C_y = 300$ нФ, $R_x = 1$ кОм - значения сопротивлений при интеграторе А1 ($R_1 = R_2 = R_{13} = R_{20} = R_x = 1$ кОм), $R_y = 10$ кОм - значения сопротивлений при интеграторе А10 ($R_{14} = R_{19} = R_y = 10$ кОм), параметр a равен значению напряжения V_a на входе аналогового умножителя А14, $b = 10(1 + \frac{R_{17}}{R_{18}})$, $c_1 = 1$, $c_3 = 4(1 + \frac{R_5}{R_6})$, $c_5 = 0.4 \frac{R_7}{R_8}$, $\varepsilon = \frac{R_x C_x}{R_y C_y}$. Путем замены $t = t_*/R_0 C_0$, $x = x_*/U_0$, $y = y_*/U_0$, $v = v_*/U_0$, где $R_0 C_0 = R_y C_y = 3 \times 10^{-3}$ сек и $U_0 = 1$ В, уравнение (3.12) сводится к уравнению (3.6) для безразмерных переменных x и y или к уравнению (3.7) для безразмерных переменных y , v . Для удобства описания динамики системы (3.12) и сравнения с исследованной ранее математической моделью (3.7), поведение экспериментальной установки будет рассматриваться в безразмерных переменных y , v и безразмерном

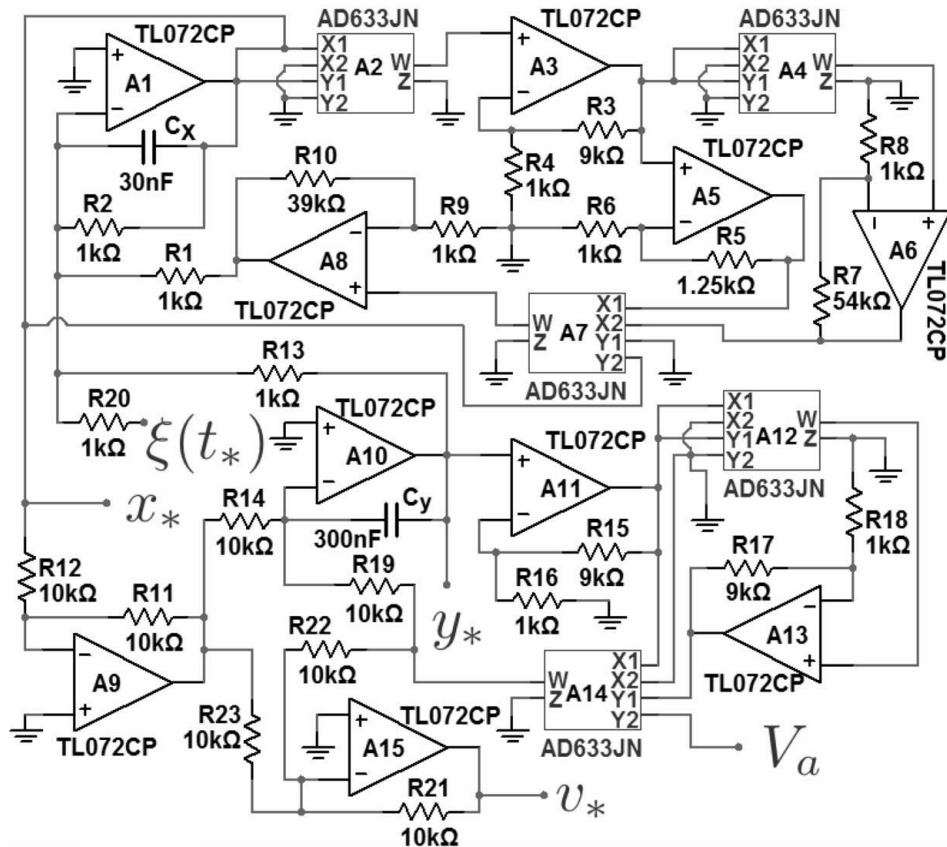
времени t .

Система (3.12) исследовалась при следующих значениях параметров: $\varepsilon = 0.01, a = 1.2, b = 100, c_1 = 1, c_3 = 9, c_5 = 22$. Она также содержит случайное слагаемое, которое описывает напряжение, создаваемое генератором шума: $\xi(t_*) = \sqrt{2\tilde{D}}n(t_*)$, где $n(t)$ – источник шума с гауссовым распределением и единичной спектральной плотностью. Как и ранее, интенсивность шума, соответствующая математической модели, определяется согласно формуле $D = \tilde{D}/R_0C_0$.

В физическом эксперименте наблюдались те же эффекты, что и при численном моделировании. При малом шуме (рис. 3.9а, фрагмент 1) система (3.12) демонстрирует бистабильное поведение. Вероятностное распределение $P(y, v)$ (рис. 3.9б, фрагмент 1) имеет характерную форму с двумя пиками. С ростом шума наблюдается смещение максимумов к началу координат, в результате чего два пика сливаются в один максимум в начале координат (рис. 3.9а,б, фрагмент 2). При дальнейшем увеличении интенсивности шума D наблюдается процесс расщепления пика в начале координат и формирования симметричного относительно начала координат распределения плотности вероятности с двумя пиками (рис. 3.9а,б, фрагмент 3), характерного для бистабильных систем. Также была получена эволюция нормированной плотности вероятности $P_n(y)$ с ростом шума (рис. 3.9в). В физическом эксперименте был зафиксирован немонотонный характер частоты Райса от интенсивности шума. Частота Райса определяется как частота, с которой переменная y пересекает нулевое значение в одном направлении. При подсчете частоты Райса регистрируемое в эксперименте число пересечений нулевого значения переменной $y(t_*)$ в единицу времени нормировалось на $1/R_0C_0$, чтобы получить частоту Райса с учетом разницы временных масштабов математической модели и экспериментальной установки. На рис. 3.9г приведена экспериментально полученная зависимости частоты Райса ω_R от интенсивно-



(a)



(б)

Рис. 3.8. Внешний вид (а) и принципиальная схема (б) экспериментальной установки (аналоговая модель системы (3.6)).

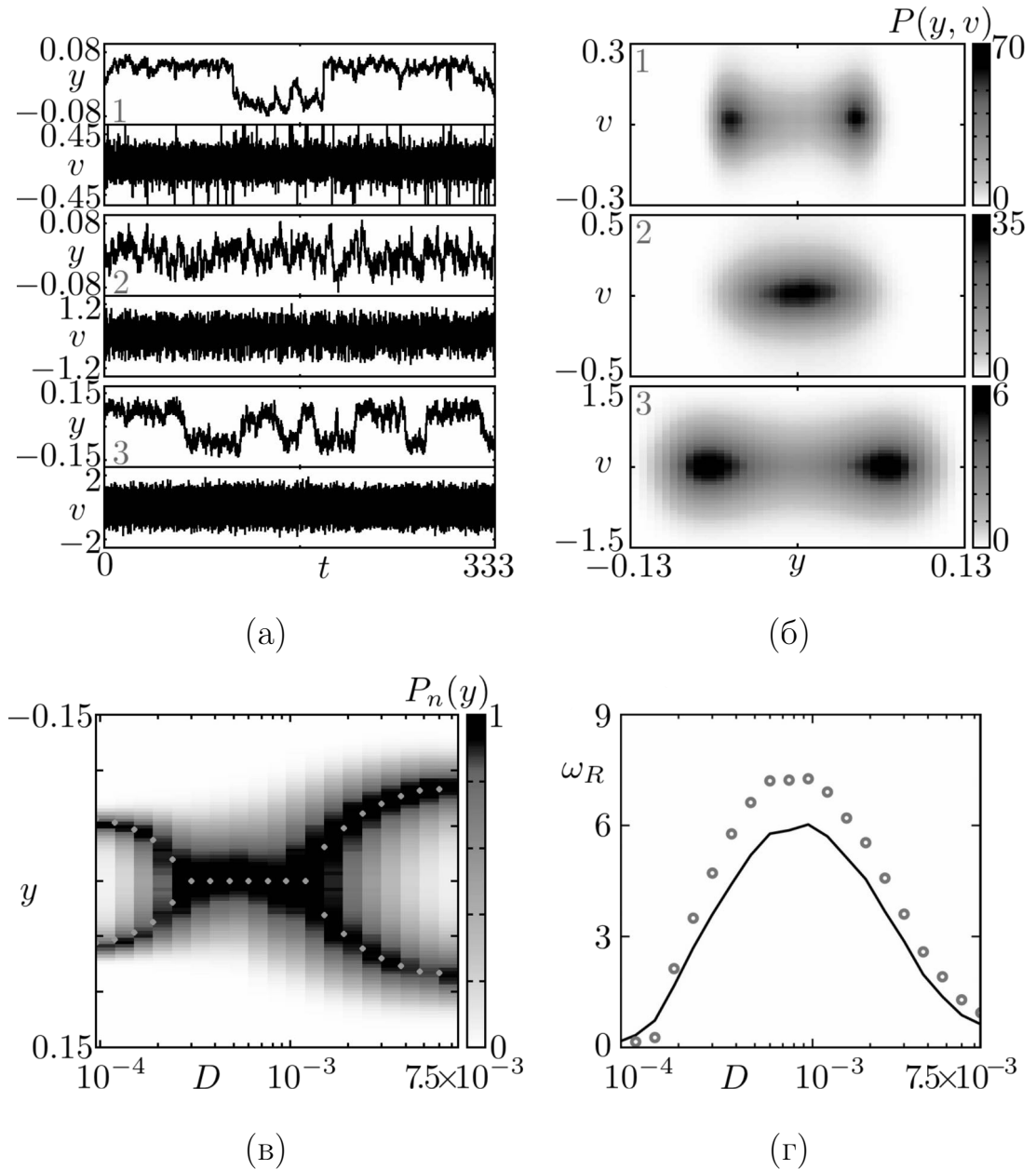


Рис. 3.9. Система (3.12): Фрагменты временных реализаций $y(t)$ и $v(t)$ (а) и вероятностные распределения (б) при различной интенсивности шума: 1) $D = 0.000151$, 2) $D = 0.000378$, 3) $D = 0.003004$; в) Эволюция нормированной плотности вероятности $P_n(y) = P(y)/P_{max}(y)$ с ростом интенсивности шума D . Точками отмечены локальные минимумы соответствующего эффективного потенциала, полученного по аппроксимации вероятностного распределения $P(y)$; г) Зависимость частоты Райса ω_R от интенсивности шума D , полученная экспериментально (сплошная линия), и рассчитанная по формуле (3.2) (серые круги). Значения параметров системы: $\varepsilon = 0.01$, $c_1 = 1$, $c_3 = 9$, $c_5 = 22$, $a = 1.2$, $b = 100$.

сти шума D для осциллятора (3.12). Также в ходе физических экспериментов был зафиксирован немонотонный характер дисперсии колебаний $y(t)$ с ростом шума (рис.3.10). Результаты физического эксперимента находятся в полном соответствии (на качественном уровне) с результатами численного моделирования. Количественные несоответствия можно объяснить наличием внешних и внутренних источников шума, токами утечки, особенностями работы реальных микросхем и другими факторами, имеющими место при работе с реальными устройствами. Поведение экспериментальной установки

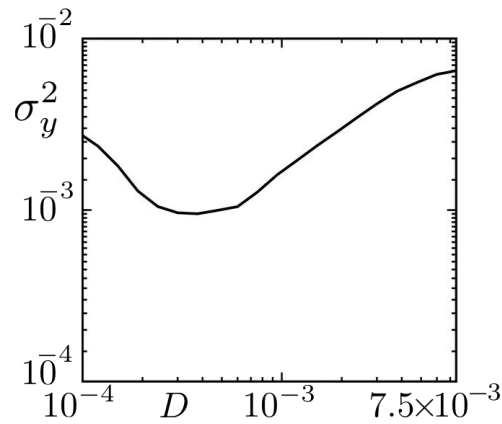


Рис. 3.10. Система (3.12). Зависимость дисперсии колебаний $y(t)$ от интенсивности шума. Значения параметров: $\varepsilon = 0.01$, $c_1 = 1$, $c_3 = 9$, $c_5 = 22$, $a = 1.2$, $b = 100$.

с ростом шума также поддается описанию с помощью эффективной интенсивности шума D_{eff} и эффективного потенциала U_{eff} . Были проведены те же вычисления эффективных характеристик на основе аппроксимации вероятностного распределения $P(y)$ с помощью потенциала $U_{eff} = -\alpha y^2 + \beta y^4$, что и при численном моделировании (рис. 3.11 а,б,в). На рис. 3.11 г,д,е приведены кривые $U_{eff}(y)$, рассчитанные по соответствующим аппроксимациям вероятностного распределения $P(y)$ для различных значений D . На рис.3.9в точками отмечены локальные минимумы эффективного потенциала, рассчитанного с помощью аппроксимации вероятностных распределений $P(y)$ при различной интенсивности шума D - максимумы плотности вероятности $P(y)$

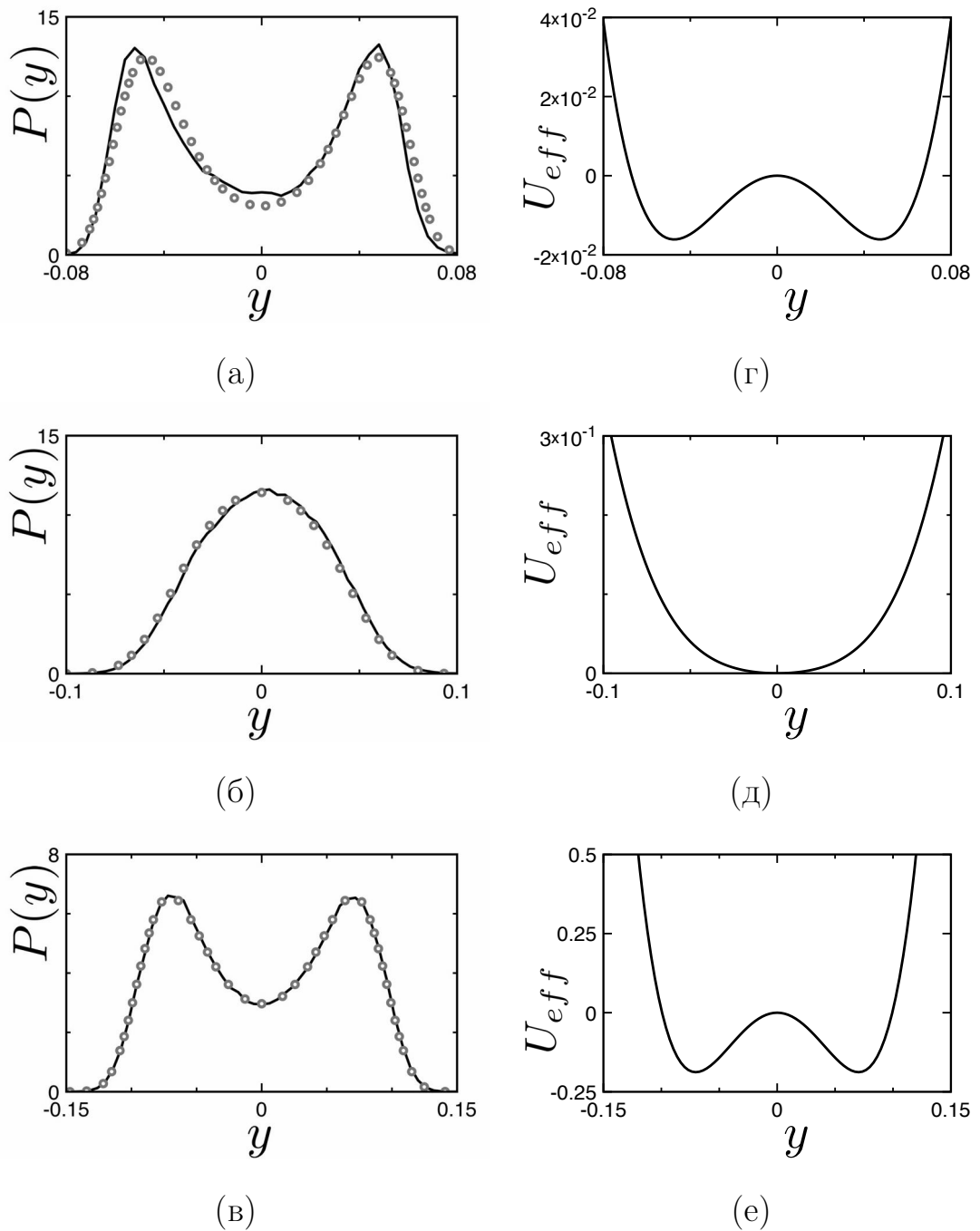


Рис. 3.11. Система (3.12). (а),(б),(в) Вероятностные распределения $P(y)$ (сплошная линия) и аппроксимация по формуле (3.11) (серые кружки) при различной интенсивности шума; (г),(д),(е) Эффективный потенциал, полученный по результатам аппроксимации вероятностного распределения. Значения параметров системы: $\varepsilon = 0.01, c_1 = 1, c_3 = 9, c_5 = 22, a = 1.2, b = 100$. Интенсивность шума $D = 0.000151$ (а,г); $D = 0.000378$ (б,д); $D = 0.003004$ (в,е).

практически полностью совпадают с локальными минимумами эффективного потенциала. На рис. 3.12 представлена зависимость эффективного бифуркационного параметра от интенсивности шума $\mu(D)$, полученная за счет представления эффективного потенциала в виде $U_{eff}(y) = 4\beta(-\mu y^2/2 + y^4/4)$, где $\mu = \alpha/(2\beta)$. Значения интенсивности шума D , при которых эффективный параметр μ переходит через ноль также соответствуют значениям, при которых наблюдается переход бистабильность-моностабильность-бистабильность на рис. 3.9в.

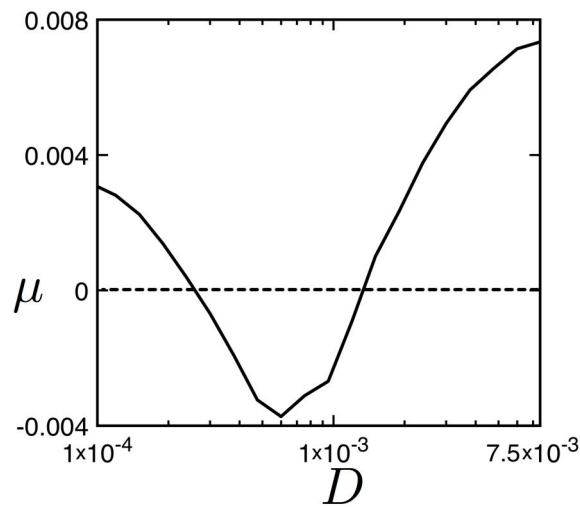


Рис. 3.12. Система (3.12): Зависимость значения эффективного бифуркационного параметра μ от интенсивности шума. Значения параметров: $\varepsilon = 0.01$, $c_1 = 1$, $c_3 = 9$, $c_5 = 22$, $a = 1.2$, $b = 100$.

3.6. Выводы по третьей главе

В рамках третьей главы диссертационной работы были получены следующие результаты. Была предложена универсальная модель бистабильного осциллятора с переменной нелинейной диссипацией, которая в зависимости от значений параметров может демонстрировать качественно различную реакцию на шумовое воздействие. В численном и физическом экспериментах

показано, что в определенном случае в бистабильном режиме имеют место стохастические бифуркации Р-типа. С ростом шума наблюдается переход от бистабильности к моностабильному поведению и обратно. Следствием этого является немонотонная зависимость средней частоты и дисперсии стохастических колебаний от интенсивности шума. Численное моделирование и детальное изучение фазового пространства позволили дать качественное объяснение наблюдаемых эффектов. Для описания поведения исследуемой системы в терминах классической теории были введены эффективные параметры: эффективная интенсивность шума и эффективный потенциал. Показано, что в исследуемой модели интенсивность шума играет роль управляющего параметра, качественным образом меняющего поведение системы. Результаты численных и физических экспериментов находятся в хорошем соответствии, что позволяет говорить об их достоверности.

Заключение

В рамках диссертационной работы были проведены экспериментальные исследования бифуркационных явлений в ряде систем, демонстрирующих мягкое и жесткое рождение автоколебаний, соответствующие суперкритической и субкритической бифуркации Андронова-Хопфа. Для рассматриваемых двух случаев бифуркации Андронова-Хопфа были выявлены общие черты наблюдаемых явлений как при наличии аддитивного, так и мультипликативного (параметрического шума). Проведенное экспериментальное исследование стохастических бифуркаций показало, что ангармоничность, присущая нелинейным системам и проявляющаяся при действии шума, значительно усложняет характер стохастических бифуркаций по сравнению с квазигармонической теорией.

Экспериментальные исследования когерентного резонанса в системах с запаздывающей обратной связью показали принципиальную возможность управления характеристиками индуцированных шумом колебаний при вариации параметров запаздывающей обратной связи, а также позволили сделать общий вывод об особенностях наблюдаемых явлений для возбудимых и невозбудимых систем. На примере генератора с жестким возбуждением экспериментальные данные были подкреплены результатами теоретического анализа.

Модель бистабильного осциллятора, предложенного и рассмотренного в рамках диссертационной работы, продемонстрировала ряд эффектов, наблюдаемых при наличии шума. Обнаруженные эффекты не свойственны классической модели бистабильного осциллятора Крамерса. Тем не менее, с помощью введения эффективных характеристик удалось описать полученные результаты на основе теоретических соотношений, справедливых для осциллятора Крамерса с конечным (постоянным) трением.

В итоге проведенных исследований были получены следующие основные результаты:

1. На примере генератора Ван дер Поля с мягким возбуждением, генератора Анищенко-Астахова и брюсселятора экспериментально было показано, что типичным эффектом влияния аддитивного шума на суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа в присутствии ангармоничности является существование бифуркационного интервала, соответствующего эволюционной перестройке формы вероятностного распределения динамических переменных при вариации управляющего параметра.
2. На примере генераторов Ван дер Поля и Анищенко-Астахова экспериментально показано, что изменение интенсивности мультипликативного шума позволяет управлять сдвигом суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа в сторону увеличения значений управляющего параметра, соответствующих бифуркации.
3. В численных и физических экспериментах было установлено, что характер стохастической суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа может сильно различаться для различных динамических систем. Так, в брюсселяторе и мультипликативный, и аддитивный шум приводят не только к запаздыванию бифуркации по параметру, но и к появлению бифуркационного интервала. В то же время, в генераторах Ван дер Поля и Анищенко-Астахова при мультипликативном шуме бифуркационный интервал не наблюдается. Кроме того, качественно различен вид вероятностного распределения, характерный для бифуркационного интервала в различных системах. В генераторе Ван дер Поля в бифуркационном интервале наблюдается распределение с двумя симметричными максимумами, а в генераторе Анищенко-Астахова и брюсселяторе би-

бифуркационному интервалу соответствует унимодальное распределение, постепенно трансформирующееся в распределение в форме замкнутого кратера.

4. В генераторе с жестким возбуждением были выявлены особенности влияния аддитивного и мультипликативного шума на субкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа, аналогичные влиянию шума на бифуркационные явления в генераторе Ван дер Поля с мягким возбуждением: аддитивный шум приводит к существованию бифуркационного интервала и сдвигу бифуркационных значений управляющего параметра в сторону больших значений, наличие мультипликативного шума приводит только к сдвигу бифуркационных значений параметров в сторону больших значений в генераторе. Для седло-узловой бифуркации в генераторе с жестким возбуждением как в случае аддитивного, так и мультипликативного шума был обнаружен бифуркационный интервал, а также сдвиг бифуркации в сторону больших бифуркационных значений параметров.
5. На примере генератора Ван дер Поля с жестким возбуждением и осциллятора ФитцХью-Нагумо было экспериментально показано, что характер влияния запаздывающей обратной связи на динамику возбудимых и невозбудимых систем имеет общий характер и позволяет управлять степенью регулярности колебаний в режиме когерентного резонанса. Для генератора Ван дер Поля показана связь данного эффекта со стохастическими бифуркациями.
6. Представлена модель бистабильного осциллятора, рассматриваемая как описывающая движение в бистабильном потенциальном поле при наличии нелинейной диссипации, зависящей от координаты и скорости.

Численно и экспериментально установлены особенности динамики системы в присутствии аддитивного шума, такие как индуцированные шумом переходы, связанные с исчезновением и повторным появлением бистабильности. Эти переходы приводят к немонотонной зависимости средней частоты колебаний от интенсивности шума.

Таким образом, поставленная цель диссертационной работы достигнута и основные задачи решены. В то же время, многие из рассмотренных проблем носят весьма сложный и разносторонний характер и требуют дальнейшего изучения. К таким проблемам можно отнести, например, индуцированные шумом эффекты в бистабильном осцилляторе, рассмотренном в третьей главе диссертационной работы, в режиме когерентного резонанса и в автоколебательном режиме. Рассмотрение данной системы при одновременном наличии внешнего периодического воздействия и шума также представляется интересной задачей. Данная работа может служить основой для таких исследований.

Список литературы

1. *Стратонович, Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике / Р. Л. Стратонович. — М.: Сов. Радио, 1961, 560 с.
2. *Рытов, С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Случайные процессы / С.М. Рытов. — М.: Наука, 1976, 484 с.
3. *Малахов, А.Н.* Флуктуации в автоколебательных системах / А.Н. Малахов. — М.: Наука, 1968, 660 с.
4. Защита от радиопомех, под ред. М.В. Максимова. — М.: Сов. Радио, 1976, 496 с.
5. *Харкевич, А.А.* Борьба с помехами / А.А. Харкевич. — М.: Наука, 1965, 276 с.
6. *Отт, Г.* Методы подавления шумов и помех в электронных системах / Г. Отт. — Пер. с англ. - М.: Мир, 1979, 318 с.
7. *Варакин, Л. Е.* Теория систем сигналов / Л. Е. Варакин. — М.: Сов. Радио, 1978, 375 с.
8. *Понтрягин, Л.С.* О статистическом рассмотрении динамических систем / Л.С. Понтрягин, А.А. Андронов, А.А. Витт // *ЖЭТФ*. — 1933. — Т. 3, № 3. — С. 165–180.
9. *Вентцель, А.Д.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений / А.Д. Вентцель, М.И. Фрейдлин. — М.: Наука, 1979, 424 с.
10. *Гардинер, К.В.* Стохастические методы в естественных науках / К.В. Гардинер. — М.: Мир, 1986, 528 с.
11. *Risken, H.* The Fokker-Plank Equation: Methods of solution and application. / H. Risken, T. Frank. Springer Series in Synergetics. — second edition edition. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.
12. *Ван Кампен, Н.Г.* Стохастические процессы в физике и химии /

- Н.Г. Ван Кампен. — М.: Высшая школа, 1990, 376 с.
13. *Horsthemke, W.* Noise-Induced Transitions / W. Horsthemke, R. Lefever. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2006.
 14. *Graham, R.* Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems: in *Fluctuations and Stochastic Phenomena in Condensed Matter* / R. Graham; Ed. by L. Garrido. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1986. — Vol. 268 of *Lecture Notes in Physics*.
 15. *Arnold, L.* Random dynamical systems / L. Arnold. — Springer, Berlin, 2003. — P. 590.
 16. *Кляцкин, В.И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами / В.И. Кляцкин. — М.: Наука, 1975, 240 с.
 17. *Ланда, П.С.* Шумоиндуцированные фазовые переходы в простых системах / П.С. Ланда, А.А. Зайкин // *ЖЭТФ*. — 1997. — Т. 111, № 1. — С. 358–364.
 18. *Benzi, R.* The mechanism of stochastic resonance / R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1981. — Vol. 14, no. 11. — Pp. 453–457.
 19. Stochastic resonance in climatic change / R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, A. Vulpiani // *Tellus*. — 1982. — Vol. 34, no. 1. — Pp. 10–16.
 20. *Benzi, R.* Stochastic resonance: from climate to biology / R. Benzi // *Nonlinear Processes Geophys.* — 2010. — Vol. 17, no. 5. — Pp. 431–441.
 21. *Gammaitoni, L.* Stochastic resonance in bistable systems / L. Gammaitoni, F. Marchesoni, E. Menichella-Saetta // *Phys. Rev. Lett.* — 1989. — Vol. 62, no. 4. — Pp. 349–352.
 22. Stochastic resonance / L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni // *Rev. Mod. Phys.* — 1998. — Vol. 70, no. 1. — Pp. 223–287.
 23. *Moss, F.* Stochastic resonance: From the Ice Ages to the Monkey Ear: in *Contemporary Problems in Statistical Physics* / F. Moss; Ed. by G.H. Weiss.

- Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, 1994.
24. Stochastic resonance: noise-enhanced order / V. S. Anishchenko, A. B. Neiman, F. Moss, L. Shimansky-Geier // *Physics-Uspeski*. — 1999. — Vol. 42, no. 1. — Pp. 7–36.
 25. Stochastic resonance without external periodic force / Hu Gang, T. Ditzinger, C.Z. Ning, H. Haken // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 71, no. 6. — Pp. 807–810.
 26. *Pikovsky, A.S.* Coherence resonance in a noise-driven excitable system / A.S. Pikovsky, J. Kurths // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78, no. 5. — Pp. 775–778.
 27. *Lindner, B.* Analytical approach to the stochastic FitzHugh-Nagumo system and coherence resonance / B. Lindner, L. Schimansky-Geier // *Phys. Rev. E*. — 1999. — Vol. 60, no. 6. — Pp. 7270–7276.
 28. *Neiman, A.* Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems / A. Neiman // *Phys. Rev. E*. — 1994. — Vol. 49, no. 4. — Pp. 3484–3487.
 29. *Shulgin, B.* Mean Switching Frequency Locking in Stochastic Bistable Systems Driven by a Periodic Force / B. Shulgin, A. Neiman, V. Anishchenko // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 75, no. 23. — Pp. 4157–4160.
 30. Interacting Coherence Resonance Oscillators / S.K. Han, T.G. Yim, D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 83, no. 9. — Pp. 1771–1774.
 31. *Анищенко, В.С.* Индуцированное шумом экспоненциальное разбегание фазовых траекторий в окрестности регулярных аттракторов / В.С. Анищенко, М.А. Сафонова // *Письма в ЖТФ*. — 1986. — Т. 12, № 12. — С. 740–744.
 32. Influence of noise on Duffing-van der Pol oscillators / W. Ebeling, H. Herzel,

- W. Richert, L. Schimansky-Geier // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*. — 1986. — Vol. 66, no. 3. — Pp. 141–146.
33. *Schimansky-Geier, L.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator / L. Schimansky-Geier, H. Herzel // *Journal of Statistical Physics*. — 1993. — Vol. 70, no. 1. — Pp. 141–147.
34. *Sánchez, E.* Analysis of synchronization of chaotic systems by noise: An experimental study / E. Sánchez, M.A. Matías, V. Pérez-Muñuzuri // *Phys Rev.E*. — 1997. — Vol. 56, no. 4. — Pp. 40–47.
35. *Gassman, F.* Noise-induced chaos-order transitions / F. Gassman // *Phys. Rev. E*. — 1997. — Vol. 55, no. 3. — Pp. 2215–2221.
36. *Короновский, А.А.* Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, единый тип поведения связанных хаотических систем / А.А. Короновский // *ДАН*. — 2006. — Т. 407, № 6. — С. 761–765.
37. *Neiman, A. B.* Synchronization of Noise-Induced Bursts in Noncoupled Sensory Neurons / A. B. Neiman, D. F. Russell // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 88, no. 13. — P. 138103.
38. *Goldobin, D.S.* Synchronization and desynchronization of self sustained oscillators by common noise / D.S. Goldobin, A. Pikovsky // *Phys. Rev. E*. — 2005. — Vol. 71, no. 4. — P. 045201.
39. *Андронов, А.А.* Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. — М.: Наука, 1959. 918 с.
40. *Bashkirtseva, I.* Stochastic sensitivity of the closed invariant curves for discrete-time systems / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // *Physica A*. — 2014. — Vol. 410. — Pp. 236–243.
41. *Bashkirtseva, I.* Stochastic sensitivity analysis of noise-induced suppression of firing and giant variability of spiking in a Hodgkin-Huxley neuron model / I. Bashkirtseva, A.B. Neiman, L. Ryashko // *Phys Rev.E*. — 2015. — Vol. 91, no. 5. — P. 052920.

42. *Ryashko, L.* Stochastic Sensitivity Analysis and Control for Ecological Model with the Allee Effect / L. Ryashko, I. Bashkirtseva // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. — 2015. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 130–140.
43. *Bashkirtseva, I.* Stochastic Sensitivity Analysis and Noise-Induced Chaos in 2D Logistic-Type Model / I. Bashkirtseva, E. Ekaterinchuk, L. Ryashko // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. — 2016. — Vol. 26, no. 4. — P. 1650053.
44. *Kabashima, S.* Observation of a noise-induced phase transition in a parametric oscillator / S. Kabashima, T. Kawakubo // *Phys. Lett. A*. — 1979. — Vol. 70, no. 5-6. — Pp. 375–376.
45. *Wiesenfeld, K.* Noisy precursors of nonlinear instabilities / K. Wiesenfeld // *J. Stat. Phys.* — 1985. — Vol. 38, no. 5. — Pp. 1071–1097.
46. *Sri Namachchivaya, N.* Stochastic bifurcation / N. Sri Namachchivaya // *Appl. Math. And. Computation*. — 1990. — Vol. 38, no. 2. — Pp. 101–159.
47. *Schenk-Hoppé, K.R.* Bifurcation scenarios of the noisy Duffing-Van der Pol oscillator / K.R. Schenk-Hoppé // *Nonlinear Dynamics*. — 1996. — Vol. 11, no. 3. — Pp. 255–274.
48. *Landa, P.S.* Noise-induced phase transitions in a pendulum with a randomly vibrating suspension axis / P.S. Landa, A.A. Zaikin // *Phys. Rev. E*. — 1996. — Vol. 54, no. 4. — Pp. 3535–3544.
49. *Crauel, H.* Additive noise destroys a pitchfork bifurcation / H. Crauel, F. Flandol // *Journal of Dynamics and Differential Equations*. — 1998. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 259–274.
50. *Ланда, П.С.* Возбуждение хаотических и стохастических колебаний в различных системах / П.С. Ланда // *Изв. вузов «ПНД»*. — 2009. — Т. 18, № 1. — С. 1–10.
51. *Вадивасова, Т.Е.* Индуцированные шумом бифуркации в бистабильном генераторе / Т.Е. Вадивасова, А.С. Захарова, В.С. Анищенко // *Изв. вузов «ПНД»*. — 2009. — Т. 17, № 2. — С. 114–122.

52. *Marsden, J.E.* The Hopf Bifurcation and Its Applications / J.E. Marsden, M. McCracken. — Springer-Verlag New York, 1976. — P. 424.
53. *Lefever, R.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to external multiplicative noise / R. Lefever, J.W. Turner // *Fluctuations and Sensitivity in Nonequilibrium Systems (edited by W. Horsthemke)*. — 1984. — Pp. 143–149.
54. *Lefever, R.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise / R. Lefever, J. W. Turner // *Phys. Rev. Lett.* — 1986. — Vol. 56, no. 16. — Pp. 1631–1634.
55. Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise / L. Fronzoni, R. Mannella, P. McClintock, F. Moss // *Phys. Rev. A.* — 1987. — Vol. 36, no. 2. — Pp. 834–841.
56. *Altares, V.* Stochastically forced Hopf bifurcation: Approximate Fokker-Planck equation in the limit of short correlation times / V. Altares, G. Nicolis // *Phys. Rev. A.* — 1988. — Vol. 37, no. 9. — Pp. 3630–3633.
57. *Arnold, L.* Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation: a Case Study / L. Arnold, N. Sri Namachshivaya, K. R. Schenk-Hoppé // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* — 1996. — Vol. 6, no. 11. — Pp. 1947–1975.
58. *Olarrea, J.* Stochastic Hopf bifurcation: The effect of colored noise on the bifurcational interval / J. Olarrea, F.J. de la Rubia // *Phys. Rev. E.* — 1996. — Vol. 53, no. 1. — Pp. 268–271.
59. *Schenk-Hoppé, K.R.* Stochastic Hopf bifurcation: An example / K.R. Schenk-Hoppé // *Int. J. Non-linear Mechanics.* — 1996. — Vol. 31, no. 5. — Pp. 685–692.
60. *Leung, H.K.* Stochastic Hopf bifurcation in a biased van der Pol model / H.K. Leung // *Physica A.* — 1998. — Vol. 254, no. 1-2. — Pp. 146–155.
61. *Arnold, L.* The stochastic brusselator: parametric noise destroys Hopf bifurcation / L. Arnold, G. Bleckert, K. R. Schenk-Hoppé // *Stochastic Dynamics edited by H. Crauel and M. Gundlach.* — 1999. — Pp. 71–92.

62. *Bashkirtseva, I.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, H. Schurz // *Chaos, Solitons, and Fractals*. — 2009. — Vol. 39, no. 1. — Pp. 72–82.
63. *Башкирцева, И.А.* Анализ индуцированных шумом бифуркаций в системе Хопфа / И.А. Башкирцева, Т.В. Перевалова, Л.Б. Ряшко // *Изв. вузов «ПНД»*. — 2010. — Т. 18, № 1. — С. 37–50.
64. Stochastic bifurcations and coherencelike resonance in a self-sustained bistable noisy oscillator / A. Zakharova, T. Vadivasova, V. Anishchenko et al. // *Phys. Rev. E*. — 2010. — Vol. 81, no. 1. — P. 011106.
65. Stochastic bifurcations in a bistable Duffing-Van der Pol oscillator with colored noise / Y. Xu, R. Gu, H. Zhang et al. // *Phys. Rev. E*. — 2011. — Vol. 83, no. 1. — P. 056215.
66. Effects of noise in excitable systems / B. Lindner, J. Garcia-Ojalvo, A. Neiman, L. Schimansky-Geier // *Effects of noise in excitable systems*. — 2004. — Vol. 392, no. 6. — Pp. 321–424.
67. *Izhikevich, E. M.* Neural excitability, spiking and bursting / E. M. Izhikevich // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. — 2000. — Vol. 10, no. 6. — Pp. 1711–1266.
68. *FitzHugh, R.A.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane / R.A. FitzHugh // *Biophys. J.* — 1961. — Vol. 1, no. 6. — Pp. 445–466.
69. *Nagumo, J.* An active pulse transmission line simulating nerve axon / J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // *Proceedings of the IRE*. — 1962. — Vol. 50, no. 10. — Pp. 2061–2070.
70. Coherence Resonance Near a Hopf Bifurcation / O. V. Ushakov, H.-J. Wünsche, F. Henneberger et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95, no. 12. — P. 123903.

71. Феоктистов, А.В. Когерентный резонанс и синхронизация стохастических автоколебаний в генераторе с жестким возбуждением / А.В. Феоктистов, В.С. Анищенко // *Нелинейная динамика*. — 2012. — Т. 8, № 5. — С. 897–911.
72. Coherence resonance and stochastic synchronization in a nonlinear circuit near a subcritical Hopf bifurcation / A. Zakharova, A. Feoktistov, T. Vadivasova, Eckehard Schöll // *Eur. Phys. J. Special Topics*. — 2013. — Vol. 222, no. 10. — Pp. 2481–2495.
73. Sethia, G. Coherence resonance in an excitable system with time delay / G. Sethia, J. Kurths, A. Sen // *Physics Letters A*. — 2007. — Vol. 364, no. 3. — Pp. 227–230.
74. Noise-Enhanced Phase Synchronization in Excitable Media / A. Neiman, L. Schimansky-Geier, A. Cornell-Bell, F. Moss // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 83, no. 23. — Pp. 4896–4899.
75. Hu, B. Phase synchronization in coupled nonidentical excitable systems and array-enhanced coherence resonance / B. Hu, C. Zhou // *Phys. Rev. E*. — 2000. — Vol. 61, no. 2. — Pp. R1001–R1004.
76. Synchronization of multi-frequency noise-induced oscillations / S. Astakhov, A. Feoktistov, V. Anishchenko, J. Kurths // *Chaos*. — 2011. — Vol. 21, no. 4. — P. 047513.
77. Aust, R. Delay control of coherence resonance in type-I excitable dynamics / R. Aust, P. Hövel, J. Hizanidis, E. Schöll // *Eur. Phys. J. Special Topics*. — 2010. — Vol. 187, no. 1. — Pp. 77–85.
78. Janson, N. B. Delayed Feedback as a Means of Control of Noise-Induced Motion / N. B. Janson, A. G. Balanov, E. Schöll // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93, no. 1. — P. 010601.
79. Increase of coherence in excitable systems by delayed feedback / T. Prager, H.P. Lerch, L. Schimansky-Geier, E. Schöll // *J. Phys. A: Math. Theor.* —

2007. — Vol. 40, no. 36. — Pp. 11045–11055.
80. *Brandstetter, S.* Interplay of time-delayed feedback control and temporally correlated noise in excitable systems / S. Brandstetter, M.A. Dahlem, E. Schöll // *Phil. Trans. R. Soc. A.* — 2010. — Vol. 368, no. 1911. — Pp. 391–421.
81. Modulating coherence resonance in non-excitable systems by time-delayed feedback / P. M. Geffert, A. Zakharova, A. Vüllings et al. // *Eur. Phys. J. B.* — 2014. — Vol. 87, no. 12. — Pp. 291–304.
82. *Escalera Santos, Gerardo J.* Regulating noise-induced spiking using feedback / Gerardo J. Escalera Santos, J. Escalona, P. Parmananda // *Phys. Rev. E.* — 2006. — Vol. 73, no. 4. — P. 042102.
83. *Gibbs, H. M.* Optical Bistability: Controlling Light with Light / H. M. Gibbs. — Academic Press, 1985.
84. *Hänggi, P.* Reaction-rate theory: fifty years after Kramers / P. Hänggi, P. Talkner, M. Borkovec // *Rev. Mod. Phys.* — 1990. — Vol. 62, no. 2. — Pp. 251–342.
85. *Kramers, H.* Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions / H. Kramers // *Physica.* — 1940. — Vol. 7, no. 4. — Pp. 284–304.
86. *Schlögl, F.* Chemical reaction models for non-equilibrium phase transitions / F. Schlögl // *Zeitschrift für Physik.* — 1972. — Vol. 253, no. 2. — Pp. 147–161.
87. *Goldbeter, A.* Biochemical Oscillations and Cellular Rhythms / A. Goldbeter. — Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
88. *Guidi, G.M.* Bistability in the Isocitrate Dehydrogenase Reaction: An Experimentally Based Theoretical Study / G.M. Guidi, M.-F. Carrier, A. Goldbeter // *Biophysical Journal.* — 1998. — Vol. 74, no. 3. — Pp. 1229–1240.

89. Multistability in the lactose utilization network of *Escherichia coli* / E.M. Ozbudak, M. Thattai, H.N. Lim et al. // *Nature*. — 2004. — Vol. 427, no. 6976. — Pp. 737–740.
90. *Shilnikov, A.* Mechanism of bistability: Tonic spiking and bursting in a neuron model / A. Shilnikov, R. L. Calabrese, G Cymbalyuk // *Phys. Rev. E*. — 2005. — Vol. 71, no. 5. — P. 056214.
91. *Smits, W.K.* Phenotypic variation in bacteria: the role of feedback regulation / W.K. Smits, O.P. Kuipers, Jan-Willem Veening // *Nature Reviews Microbiology*. — 2006. — Vol. 4, no. 4. — Pp. 259–271.
92. *May, R. M.* Thresholds and breakpoints in ecosystems with a multiplicity of stable states / R. M. May // *Nature*. — 1977. — Vol. 269, no. 5628. — Pp. 471–477.
93. *Guttal, V.* Impact of noise on bistable ecological systems / V. Guttal, C. Jayaprakash // *Ecological Modelling*. — 2007. — Vol. 201, no. 3. — Pp. 420–428.
94. *Nicolis, C.* Stochastic aspects of climatic transitions—response to a periodic forcing / C. Nicolis // *Tellus*. — 1982. — Vol. 34, no. 1. — Pp. 1–9.
95. *Анищенко, В.С.* Стохастический резонанс в бистабильной системе под воздействием хаотического сигнала / В.С. Анищенко, М.В. Ануфриева, Т.Е. Вадивасова // *Письма в ЖТФ*. — 2006. — Т. 32, № 20. — С. 12–17.
96. Oscillatory systems driven by noise: Frequency and phase synchronization / L. Callenbach, P. Hänggi, J. A. Freund, L. Schimansky-Geier // *Phys. Rev. E*. — 2002. — Vol. 65, no. 5. — P. 051110.
97. Analysis of noise-induced bimodality in a Michaelis–Menten single-step enzymatic cycle / D. Remondini, E. Giampieri, A. Bazzani et al. // *Physica A*. — 2013. — Vol. 392, no. 2. — Pp. 336–342.
98. *Biancalani, T.* Noise-Induced Bistable States and Their Mean Switching Time in Foraging Colonies / T. Biancalani, L. Dyson, A. J. McKane //

- Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Vol. 112, no. 3. — P. 038101.
99. Семенов, В.В. Экспериментальное исследование эволюции вероятностного распределения в автогенераторах с аддитивным шумом / В.В. Семенов, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко // *Письма в ЖТФ.* — 2013. — Т. 39, № 14. — С. 16–24.
100. Семенов, В.В. Экспериментальное исследование стохастической бифуркации Андронова-Хопфа в автогенераторах с аддитивным и параметрическим шумом / В.В. Семенов, К.В. Закорецкий, Т.Е. Вадивасова // *Нелинейная динамика.* — 2013. — Т. 9, № 3. — С. 421–434.
101. Семенов, В.В. Экспериментальное исследование разрушения автоколебаний под действием аддитивного источника шума / В.В. Семенов // *Изв. вузов «ПНД».* — 2013. — Т. 21, № 3. — С. 43–51.
102. Семенов, В.В. Экспериментальное исследование стохастических явлений в генераторе с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа / В.В. Семенов, А.С. Листов, Т.Е. Вадивасова // *Изв. вузов «ПНД».* — 2014. — Т. 22, № 5. — С. 43–57.
103. Купцова, А.А. Исследование стохастической бифуркации Андронова-Хопфа в автогенераторе методом численного моделирования / А.А. Купцова, В.В. Семенов, А.С. Листов // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика.* — 2014. — Т. 14, № 2. — С. 59–64.
104. Управление когерентным резонансом с помощью запаздывающей обратной связи. Натурный эксперимент / В.В. Семенов, Т.Е. Вадивасова, Е. Шёлль, А.С. Захарова // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика.* — 2015. — Т. 15, № 3. — С. 43–51.
105. Time-delayed feedback control of coherence resonance near subcritical Hopf bifurcation: Theory versus experiment / V. Semenov, A. Feoktistov, T. Vadivasova et al. // *Chaos.* — 2015. — Vol. 25, no. 3. — P. 033111.
106. Индуцированные шумом эффекты в модели бистабильного осциллятора

- с переменной диссипацией / В.В. Семенов, А.Б. Нейман, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко // *Изв. вузов «ПНД»*. — 2016. — Т. 24, № 1. — С. 5–15.
107. *Закорецкий, К.В.* Экспериментальное исследование влияния параметрического шума на бифуркацию Андронова-Хопфа в брюселляторе / К.В. Закорецкий, В.В. Семенов, Т.Е. Вадивасова // *Радиотехника и электроника*. — 2016. — Т. 61, № 9. — С. 1–10.
108. Noise-induced transitions in a double-well oscillator with nonlinear dissipation / V.V. Semenov, A.B. Neiman, T.E. Vadivasova, V. S. Anishchenko // *Phys. Rev. E*. — 2016. — Vol. 93, no. 5. — P. 052210.
109. Experimental Studies of Noise Effects in Nonlinear Oscillators: in *Nonlinear Dynamics and Complexity* / V. S. Anishchenko, T. E. Vadivasova, A. V. Feoktistov et al. — Springer International Publishing, Switzerland, 2014. — Pp. 261–290.
110. *Semenov, V. V.* Experimental research of stochastic Andronov-Hopf bifurcation in self-sustained oscillators with additive and parametric noise / V. V. Semenov // Сборник тезисов международной конференции "Динамика, бифуркации и странные аттракторы Нижний Новгород, Россия, 1-5 июля. — 2013. — P. 101.
111. *Semenov, V. V.* The effect of coherence resonance in different time-delayed systems / V. V. Semenov, A. V. Feoktistov, T. E. Vadivasova // International Symposium "Topical Problems of Nonlinear Wave Physics"(NWP-2014), Program and Abstracts, Nizhny Novgorod, Russia, 17-23 July. — 2014. — P. 27.
112. *Feoktistov, A.* Control of noise-induced oscillations in a Generalized Van der Pol oscillator / A. Feoktistov, V. Semenov // International Conference "Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems Book of

- abstracts, Saratov, Russia, 19-23 May. — 2014. — P. 18.
113. *Semenov, V. V.* Experimental studies of stochastic Andronov-Hopf bifurcation / V. V. Semenov, T. E. Vadivasova, A. S. Zakharova // International Conference "Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems Book of abstracts, Saratov, Russia, 19-23 May. — 2014. — P. 40.
114. *Никитин, Н.Н.* Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей / Н.Н. Никитин, В.Д. Разевиг // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* — 1978. — Т. 18, № 1. — С. 107–116.
115. *Mannella, R.* Integration of stochastic differential equations on a computer / R. Mannella // *Int. J. Mod. Phys. C.* — 2002. — Vol. 13, no. 9. — Pp. 1177–1194.
116. *Noise in Nonlinear Dynamical Systems: Vol. 3, Experiments and Simulations* / Ed. by F. Moss, P. V. E. McClintock. — Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
117. *Luchinsky, D.G.* Analogue studies of nonlinear systems / D.G. Luchinsky, P.V.E. McClintock, M.I. Dykman // *Rep. Prog. Phys.* — 1998. — Vol. 61, no. 8. — Pp. 889–997.
118. *Стратонович, Р. Л.* Нелинейная неравновесная термодинамика / Р. Л. Стратонович. — М.: Наука, 1985, 478 с.
119. *Анищенко, В.С.* Сложные колебания в простых системах. 2-е изд. / В.С. Анищенко. — М.: УРСС, 2009, 320 с.
120. *Glansdorff, P.* Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations / P Glansdorff, I Prigogine. — John Wiley, 1971. — P. 232.
121. *Freund, J.A.* Frequency and phase synchronization in stochastic systems / J.A. Freund, L. Schimansky-Geier, P. Hänggi // *Chaos.* — 2003. — Vol. 13, no. 1. — Pp. 225–238.

122. *Rice, S.O.* Mathematical Analysis of Random Noise / S.O. Rice // *Bell System Technical J.* — 1944/1945. — Vol. 23/24, no. 3/2. — Pp. 282–332/46–156.
123. The lambda diode: a versatile negative-resistance device / G. Kano, H. Iwasa, H. Tagaki, I. Teramoto // *Electronics.* — 1975. — Vol. 48, no. 13. — Pp. 105–108.
124. *Meunier, C.* Noise and Bifurcations / C. Meunier, A. Verga // *Journal of Statistical Physics.* — 1988. — Vol. 50, no. 1. — Pp. 345–375.