

ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет  
им. Н.Г. Чернышевского”

*На правах рукописи*

Максименко Владимир Александрович

ЭВОЛЮЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ  
В ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМАХ  
ЭЛЕКТРОННОЙ ПРИРОДЫ

01.04.03 – Радиофизика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель  
д. ф.-м. н., профессор  
А.А. Короновский

Саратов — 2015

# Содержание

<b>Содержание</b>	<b>2</b>
<b>Введение</b>	<b>4</b>
Актуальность исследуемой проблемы . . . . .	4
Цель диссертационной работы . . . . .	10
Научная новизна . . . . .	10
Личный вклад . . . . .	11
Практическая значимость . . . . .	11
Основные научные положения и результаты, выносимые на защиту . . . . .	12
Структура и объём работы . . . . .	13
Достоверность полученных результатов . . . . .	16
Апробация результатов и публикации . . . . .	17
<b>1 Анализ нестационарных режимов транспорта заряда в пространственно-распределенной системе, характеризующейся нелинейной зависимостью скорости носителей заряда от напряженности электрического поля</b>	<b>20</b>
1.1 Алгоритм расчёта спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределенной системы . . . . .	21
1.2 Анализ автономной динамики распределённой системы . . . . .	24
1.3 Анализ неавтономной динамики распределённой системы . . . . .	35
1.4 Анализ динамики пространственно-распределенной системы, связанной с системой с конечномерным фазовым пространством . . . . .	46
1.5 Выводы к первой главе . . . . .	53
<b>2 Пространственно-временная динамика набора возмущений неоднородного по пространству стационарного состояния пространственно-распределённых систем</b>	<b>55</b>
2.1 Приближённая аналитическая оценка устойчивости стационарного состояния . . . . .	57
2.2 Анализ динамики набора возмущений стационарного состояния распределенной системы . . . . .	65
2.3 Численный анализ динамики малого возмущения стационарного состояния . . . . .	74
2.4 Выводы ко второй главе . . . . .	78

<b>3</b>	<b>Анализ динамических режимов в эталонных пространственно-распределенных системах пучково-плазменной и электронно-волновой природы</b>	<b>79</b>
3.1	Анализ динамики ЛОВ с поперечным полем – эталонной модели электронно-волновой среды . . . . .	80
3.2	Анализ динамики диода-Пирса – эталонной модели пучково-плазменной системы . . . . .	84
3.3	Анализ связанных распределенных пучково-плазменных систем . . . . .	90
3.4	Вопрос выбора состояния пространственно-распределенной системы для расчета спектра показателей Ляпунова . . . . .	96
3.5	Выводы по третьей главе . . . . .	100
	<b>Заключение</b>	<b>102</b>
	<b>Благодарности</b>	<b>106</b>

# Введение

## Актуальность исследуемой проблемы

Настоящая диссертационная работа посвящена анализу динамических режимов, реализующихся в пространственно-распределенных системах электронной природы и включает в себя исследование устойчивости стационарного состояния распределенных систем, анализ нестационарных режимов пространственно-временной динамики (периодических, квазипериодических, хаотических и гиперхаотических), реализующихся в автономных системах и системах под внешнем воздействием, а также изучение установления синхронных режимов в распределенных системах, связанных однонаправленно и взаимно.

Анализ поведения реальных систем и процессов зачастую подразумевает построение их нелинейных математических моделей. При этом, в зависимости от особенностей исследуемого объекта и специфики поставленной задачи, подобные математические модели могут быть довольно разнообразны (графы, дискретные отображения [1], системы с непрерывным временем [2]). Динамические переменные, входящие в математическую модель, определяют *состояние* исследуемой системы, а математический аппарат модели является оператором эволюции, определяющим изменение этого состояния с течением времени.

Системы с непрерывным временем являются одними из наиболее распространённых моделей, описывающих процессы, протекающие в реальных системах различной природы [3]. Оператор эволюции таких систем имеет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), а состояние системы представляется вектором  $(x_1(t^*), \dots, x_N(t^*))^T$  в  $N$ -мерном фазовом пространстве, координаты которого соответствуют в каждый момент времени  $t^*$  значениям динамических переменных.

Наряду с динамическими системами, состояние которых характеризуется набором чисел, для описания весьма широкого класса реальных объектов, необходимо использовать функции, поскольку состояние рассматриваемой системы может эволюционировать во времени в разных пространственных точках системы по-разному [4]. В частности, состояние систем, описывающих приборы и устройства СВЧ-электроники, часто задаётся пространственными распределениями напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$ , объёмной плотности носителей заряда  $\rho$ , потенциала  $\varphi$  и т.д. [5,6]. Подобные динамические системы являются пространственно-распределёнными, их состояние определяется в бесконечномерном фазовом пространстве, а оператор эволюции представляется в виде систем дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений.

В зависимости от значений управляющих параметров, пространственно-распределённые системы могут демонстрировать различные типы динамики — от стационарных состояний и периодических колебаний, характеризующихся, соответственно, стационарными и периодическими во времени пространственно-временными состояниями, до квазипериодических, хаотических и гиперхаотических режимов, которым соответствует сложная пространственно-временная эволюция состояний системы.

Учитывая тот факт, что пространственно-распределённые системы являются моделями для широкого круга различных сложных радиofизических объектов (например, реальных приборов СВЧ-электроники), изучение возможности реализации в них сложных динамических режимов и управления ими представляет большой интерес для современной радиofизики, а полученные результаты могут найти свое применение в задачах разработки систем радиолокации, связи, скрытой передачи информации и т.п [7–10].

В то же самое время, изучение сложного поведения и закономерностей (включая анализ устойчивости динамических режимов), наблюдаемых в пространственно-распределённых системах, является нетривиальной задачей. Это связано с тем, что для анализа распределённых систем, как правило, используются методы и подходы, разработанные для динамических систем конечной размерности с сосредоточенными параметрами. Непосредственное применение таких методов не всегда учитывает особенности, связанные с пространственно-распределённой природой исследуемых систем и в целом ряде случаев приводит к неполным или некорректным результатам. Таким

образом, возникает необходимость разработки специальных методов анализа устойчивости динамических режимов в пространственно-распределённых системах.

Среди инструментов, применяемых как для анализа устойчивости стационарного состояния систем, так и для количественной оценки сложных хаотических режимов, наиболее известным и широко используемым является расчет спектра показателей Ляпунова. Данный инструмент активно используется для изучения сложной динамики систем со сосредоточенными параметрами, являющихся предметом изучения в различных областях науки, таких как физика [11], молекулярная динамика [12], астрономия [13], медицина [14], экономика [15] и др.

Одним из наиболее значимых приложений показателей Ляпунова является их использование для обнаружения качественных изменений в динамике системы при варьировании управляющих параметров (например, для обнаружения перехода от хаотического режима к гиперхаосу [16], для выявления наличия гиперболического аттрактора [11,17], для детектирования обобщённой синхронизации [18,19] или индуцированной шумом синхронизации [20–22]).

Динамика диссипативной системы с непрерывным временем с малым числом степеней свободы, размерность фазового пространства которой равна  $N$ , может быть охарактеризована с помощью спектра показателей Ляпунова  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ . В том случае, если динамическая система демонстрирует хаотическое поведение, один или несколько старших показателей Ляпунова оказываются положительными, и по их количеству хаотические режимы классифицируют как “хаос”, когда только самый старший показатель Ляпунова  $\lambda_1$  является положительным, или “гиперхаос”, когда поведение системы характеризуется несколькими положительными показателями Ляпунова. Существуют также младшие отрицательные показатели Ляпунова, характеризующие направления в фазовом пространстве, по которым осуществляется сближение фазовых траекторий. При этом один показатель Ляпунова всегда равен нулю, он отвечает за возмущения вдоль траектории в фазовом пространстве системы.

Наличие в спектре нулевого показателя Ляпунова играет важную роль в определённых физических приложениях. Так, например, для детерминированного периодического осциллятора этот показатель является наибольшим по величине. Следовательно, в таких системах, управляемых внешним сигналом (детерминированным или случай-

ным), старший показатель Ляпунова (который является нулевым в автономном случае) может стать отрицательным, что приведет к синхронизации. Показано также, что в связанных хаотических осцилляторах переход нулевого показателя Ляпунова в область отрицательных значений тесно связан с установлением режима фазовой синхронизации (см. [23, 24]). Наконец, нулевой показатель Ляпунова может обозначать наличие специфического режима в динамике системы, такого как неполная индуцированная шумом синхронизация [25].

Для систем с малым числом степеней свободы, демонстрирующих режимы сложной динамики, аналитически найти значения показателей Ляпунова удастся исключительно редко. Как правило, для их нахождения приходится использовать численные методы, в основе которых лежит рассмотрение эволюции соответствующего числа векторов возмущения вдоль рассматриваемой траектории в фазовом пространстве. При этом, если не предпринимать специальных мер, то в каждом векторе возмущения будет представлена составляющая с максимальным показателем Ляпунова, которая будет доминировать на больших временах, и корректно оценить остальные показатели не удастся.

В настоящее время для нахождения полного спектра показателей Ляпунова для систем с малым числом степеней свободы используется численный метод, основанный на применении алгоритма Бенеттина, включающий процедуру периодической ортогонализации и нормировки возмущений [26]. Ортогонализация возмущений, в свою очередь, основана на процедуре Грама-Шмидта [2] построения ортонормированной системы.

Прямое применение этого метода для анализа пространственно-временной динамики возможно только для систем, которые естественным образом дискретизованы в пространстве [27–29], например к массивам связанных осцилляторов или отображениям. В остальных случаях, прямое применение численных методов расчёта показателей Ляпунова, разработанных для систем с конечной размерностью фазового пространства, к непрерывным пространственно-распределённым системам является довольно проблематичным [29] и ненадежным [27, 30]. Основной причиной этого является то, что возмущение состояния распределённой системы определяется в фазовом пространстве не вектором, как в случае сосредоточенных систем, а с помощью набора функций, которые зависят от пространственных координат, что требует модификации процедур

ортогонализации и нормализации, необходимых для расчёта спектра показателей Ляпунова [16, 25, 28, 31, 32].

В настоящее время попытки применения показателей Ляпунова для анализа динамики пространственно-распределённых систем, как правило, сводятся в конечном итоге, к использованию тех же самых способов расчёта, что и для систем со сосредоточенными параметрами.

В частности, широко используется вычисление старшего показателя по временной реализации, представляющей собой сигнал, регистрируемый в одной из точек пространства распределённой системы (см., например, [33]). Подобный подход применяется также для анализа систем со сосредоточенными параметрами [34]. Однако, такой способ расчёта не является эффективным и имеет серьезные ограничения. Анализ, основанный на значении старшего показателя Ляпунова, не позволяет диагностировать квазипериодические и гиперхаотические колебательные режимы, а также установление синхронных режимов динамики связанных распределённых систем. Кроме того, результат может сильно зависеть от выбора точки пространства.

При расчете по временной реализации значений следующих в спектре показателей Ляпунова возникает проблема, связанная с тем, что каждый последующий показатель Ляпунова определяется все с меньшей точностью. Использование нелинейных разложений с большим числом слагаемых улучшает качество определения показателей Ляпунова [35, 36] по сравнению с линейным случаем, однако, при этом возникает ряд особенностей, таких как (1) требование малого уровня шума в системе, (2) существование предела по числу определяемых показателей Ляпунова по временному ряду конечной длины и (3) возникновение ложных значений показателей Ляпунова. Кроме того, данный подход является достаточно сложным и требует дополнительных вычислений и расчета характеристик, таких как фрактальная размерность аттрактора и вектора Ляпунова. Таким образом, оценка значений спектра показателей Ляпунова по временному ряду является нетривиальной и весьма сложной задачей.

Для оценки значения как одного старшего [37], так и нескольких старших показателей [16, 38] Ляпунова распределенной системы в ряде случаев используют методы, основанные на рассмотрении поведения изначально близких состояний системы  $Y_0(x, t)$  и  $Y_0(x, t) + \tilde{Y}(x, t)$  и отслеживании при этом динамики изначально малого отклонения



$\tilde{Y}(x, t_0)$  во времени. Однако, как и в случае систем с малым числом степеней свободы, величина  $\tilde{Y}(x, t_0)$  должна быть малой по сравнению с характерными масштабами неоднородности распределения векторного поля в фазовом пространстве [2].

Помимо сложностей, связанных с описанием эволюции возмущений состояния системы, при расчете спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределённых систем проблемы могут возникать при построении набора ортогональных состояний. В ряде работ для расчёта нескольких старших показателей Ляпунова для распределённых систем используется алгоритм Бенеттина [26]. Однако, при этом, исследуемая пространственно-распределённая система заменяется дискретной моделью, которая рассматривается как конечномерная динамическая система с очень большой размерностью [39]. Подобная искусственная дискретизация успешно применяется для расчета спектра показателей Ляпунова систем с запаздыванием, которые также характеризуются бесконечномерным фазовым пространством [40]. При использовании данного подхода в остальных случаях возникает целый ряд особенностей, связанных с большой размерностью фазового пространства такой дискретизованной системы. Кроме того, метод не учитывает особенностей, связанных с пространственно-распределённой природой исходной системы.

Таким образом, при расчёте спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределённых систем возникает целый ряд сложностей, решение которых представляет большой интерес для различных отраслей современной науки, и, прежде всего, учитывая специфику объектов изучения, для радиофизики. В частности, большой интерес представляет изучение сложной динамики пространственно-распределённых систем, являющихся моделями реальных устройств СВЧ-электроники, при помощи спектра показателей Ляпунова, включая анализ устойчивости стационарного состояния, переход от периодических колебательных режимов к хаотическим и гиперхаотическим, а также диагностику установления синхронных режимов в связанных распределённых системах.

## Цель диссертационной работы

Целью настоящей диссертационной работы является изучение эволюции динамических режимов пространственно-распределенных нелинейных систем электронной природы, включая анализ устойчивости неоднородного в пространстве стационарного состояния пространственно-распределённых систем, описывающих коллективную динамику носителей заряда в рамках гидродинамического приближения, а также изучение режимов нестационарной пространственно-временной динамики (периодических, квазипериодических, хаотических, гиперхаотических режимов) данных систем при помощи спектра показателей Ляпунова.

## Научная новизна

Научная новизна результатов, изложенных в диссертационной работе, заключается, главным образом, в обнаружении закономерностей эволюции динамических режимов в пространственно-распределенных системах электронной природы, включая переход от стационарных состояний к нестационарным режимам пространственно-временной динамики (периодическим, квазипериодическим, хаотическим и гиперхаотическим (в случае автономной и неавтономной динамики систем)), а также установление синхронных режимов в пространственно-распределённых системах, связанных однонаправленно и взаимно.

В диссертационной работе впервые рассмотрены следующие вопросы:

- Исследована пространственно-временная динамика набора возмущений стационарного неоднородного по пространству состояния модельной распределённой системы, описываемой в рамках гидродинамического приближения, где нелинейная зависимость скорости движения носителей заряда от напряжённости электрического поля содержит падающий участок и описывается формулой Эсаки-Тсу, и рассчитаны закономерности изменения их собственных частот и коэффициентов нарастания/затухания при приближения значения управляющего параметра к критической величине, соответствующей возникновению неустойчивости.

- Предложен метод расчёта спектра показателей Ляпунова для систем, состояние которых определяется набором динамических переменных, включающим в себя величины, зависящие как только от времени, так и от времени и пространственной координаты.
- Рассмотрен вопрос о выборе опорного состояния системы, необходимого для расчёта спектра показателей Ляпунова и сформулировано правило, согласно которому, в силу особенностей конкретной математической модели, возможно исключение из состояния некоторых динамических переменных.
- При помощи спектра показателей Ляпунова проведена диагностика установления режима обобщённой хаотической синхронизации в пространственно-распределённых пучково-плазменных системах (диодах Пирса), связанных односторонне и взаимно.
- С использованием спектра показателей Ляпунова проведена диагностика колебательных режимов в пространственно-распределённой системе электронной природы, в которой нелинейная зависимость скорости движения носителей заряда от напряжённости электрического поля содержит падающий участок и описывается формулой Эсаки-Тсу, связанной с системой с малым числом степеней свободы.

## **Личный вклад**

Основу диссертации составляют результаты, полученные лично соискателем. Им выполнены все численные и аналитические расчёты. Постановка задач, разработка методов их решения, объяснение и интерпретация результатов были осуществлены либо лично автором, либо совместно с научным руководителем.

## **Практическая значимость**

Научная значимость результатов, полученных в рамках настоящей диссертационной работы, обусловлена решением важной фундаментальной проблемы радиофизики и нелинейной динамики, связанной с изучением эволюции динамических режимов в

пространственно-распределенных системах электронной природы. Практическая значимость работы связана, главным образом, с возможностью использования полученных результатов и разработанных подходов для анализа широкого класса систем, являющихся моделями реальных пучково-плазменных, электронно-волновых и твердотельных устройств СВЧ-электроники, что может найти широкое применение при изучении сложных режимов пространственно-временной динамики, реализующихся в реальных приборах, где исследуемые системы подвергаются влиянию внешних электромагнитных полей, резонансных контуров и волноведущих систем. Кроме того, применение спектра показателей Ляпунова для анализа синхронных режимов в связанных распределенных системах представляет большой интерес в контексте разработки систем скрытой передачи информации, основанных на принципах динамического хаоса.

## **Основные научные положения и результаты, выносимые на защиту**

1. В пространственно-распределённой активной среде, где нелинейная зависимость скорости движения носителей заряда от напряжённости электрического поля описывается формулой Эсаки-Тсу, при малых значениях приложенного напряжения реализуется близкое к однородному по пространству стационарное состояние, которому соответствует спектр близких по значениям показателей Ляпунова. При увеличении значения приложенного напряжения состояние системы становится отличным от однородного и значения показателей Ляпунова в спектре начинают различаться. При этом, как в стационарном состоянии, так и в режиме генерации, в спектре показателей Ляпунова остаются попарно одинаковые значения, что связано с существованием возмущений, характеризующихся одинаковыми коэффициентами затухания/нарастания и частотами с противоположным знаком, но одинаковой абсолютной величиной.
2. При внешней периодической модуляции значения приложенного напряжения, в пространственно-распределённой системе, в случае, когда зависимость скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля имеет падающий участок, в зависимости от частоты модуляции в системе возможна реализация квази-

периодического режима, характеризующегося модуляцией скорости возникающих в ней нестационарных электронных структур, и хаотическая, соответствующая структурам, появляющимся в разные моменты времени и движущимся с различными скоростями.

3. В пространственно-распределённой системе, где зависимость скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля описывается соотношением Эсаки-Тсу, а закон инжекции носителей заряда определяется характеристикой эмиттера, существуют стационарные состояния, характеризующиеся одинаковым распределением электрического поля, которые могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми, в зависимости от величины дифференциальной проводимости эмиттера.
4. В случае, когда пространственно-распределённая система связана с конечномерной подсистемой, для расчета спектра показателей Ляпунова в опорное состояние необходимо включить все величины (кроме тех, которые могут быть выражены через остальные с помощью функциональных соотношений, а также операторов интегрирования и дифференцирования по пространственной координате), определив при этом динамику зависящих только от времени величин во всех точках рассматриваемой пространственно-распределённой системы.

## Структура и объём работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Она содержит 121 страницу текста, включая 42 иллюстрации. Список литературы содержит 126 наименований.

**Введение** диссертационной работы отражает актуальность выбранной темы исследования, содержит цель работы, описание научной новизны и практической значимости полученных результатов, положения и результаты, выносимые на защиту, а также сведения об апробации результатов.

В **Первой главе** диссертационной работы предлагается метод расчёта спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределённых систем электронной природы, основанный на непрерывном в пространстве описании состояния системы и его возмущений. Апробация метода проводится на примере одномерной модели распределён-

ной системы, содержащей носители зарядов, основанной на самосогласованной системе уравнений непрерывности и Пуассона и использовании нелинейной зависимости скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля, содержащей падающий участок и описывающейся формулой Эсаки-Тсу.

В режиме автономной динамики системы проводится анализ поведения спектра показателей Ляпунова при изменении бифуркационного параметра, на основании которого исследуется устойчивость стационарного состояния системы и возможность реализации в ней сложных режимов нестационарной пространственно-временной динамики.

Помимо автономной динамики системы в данной главе рассматриваются динамические режимы, наблюдающиеся в исследуемой распределённой системе под влиянием внешних факторов. В качестве внешних факторов рассматривается влияние внешнего магнитного поля, учитывающееся в данной модели при помощи модифицированной зависимости скорости носителей заряда, и периодическая модуляция значения приложенного к системе напряжения. При помощи спектра показателей Ляпунова в данном случае проводится анализ динамических режимов, наблюдающихся в системе при изменении частоты внешнего периодического воздействия. Вместе с рассмотрением спектра показателей Ляпунова в ряде случаев исследуются временные ряды и пространственно-временные зависимости, соответствующие динамике состояния системы.

В заключение данной главы рассматривается вопрос о расчёте спектра показателей Ляпунова для систем, состояние которых описывается как динамическими переменными, зависящими только от времени  $X_i(t)$ , так и переменными, зависящими и от времени, и пространственной координаты,  $Y_j(x, t)$ . В рамках данной главы предлагается метод расчёта спектра показателей Ляпунова для таких систем и проводится его апробация на примере анализа взаимодействия пространственно-распределённой системы электронной природы с внешним RLC-контуром. При помощи спектра показателей Ляпунова проводится анализ различных динамических режимов, наблюдающихся в данной системе при варьировании параметров контура.

**Вторая глава** диссертационной работы посвящена рассмотрению пространственно-временной динамики возмущений неоднородного по пространству стационарного состояния модельной распределённой системы, описанной в **первой главе**, и выявлению нелинейно-динамических закономерностей в поведении набора возмущений при при-

ближении значения управляющего параметра к точке бифуркации, соответствующей возникновению неустойчивости.

В рамках данной главы предлагается метод приближённой аналитической оценки коэффициента затухания возмущения опорного состояния исследуемой системы и сформулированы условия, при котором данная оценка остаётся справедливой. Помимо приближённой оценки величины коэффициента затухания возмущения, в работе предлагается метод анализа пространственно-временной динамики всего набора возмущений стационарного состояния, не требующий использования численного моделирования временной динамики системы и её возмущений. В данной главе демонстрируется эффективность применения данного подхода для вычисления коэффициентов затухания/нарастания, собственных частот и пространственных профилей возмущений для различных значений управляющего параметра. При этом, рассматриваются значения управляющего параметра, соответствующие как стационарному состоянию исследуемой системы, так и случаю нестационарной динамики. Для случая нестационарного поведения проведено сопоставление характеристик возмущений с характеристиками колебаний, реализующихся в системе, и обсуждается их взаимосвязь. На основании рассмотрения динамики малых возмущений в рамках данной главы проводится анализ устойчивости стационарного состояния исследуемой пространственно-распределенной системы в зависимости от типа характеристики, определяющей закон инжекции носителей заряда.

В заключительной части второй главы обсуждаются результаты численного анализа поведения возмущений стационарного состояния и проводится сопоставление результатов анализа динамики возмущений со значениями спектра показателей Ляпунова, рассчитанными для данной системы в **первой главе**.

**Третья глава** диссертации посвящена описанию результатов, полученных с помощью предложенного метода расчёта спектра показателей Ляпунова для анализа сложных режимов нестационарной пространственно-временной динамики эталонных распределённых систем электронной природы. В качестве примеров в диссертационной работе рассмотрены диод Пирса в гидродинамическом приближении и лампа обратной волны с поперечным полем, являющиеся математическими моделями реальных устройств электроники СВЧ [5, 6].

В рамках данной главы описано применение метода расчета спектра показателей Ляпунова для случая автономной динамики исследуемых распределённых систем. Рассмотрены различные динамические режимы, наблюдающиеся в рассматриваемых системах при изменении значений управляющих параметров, включающие в себя как возникновение неустойчивости, так и переход к хаотической и гиперхаотической динамике.

Помимо автономной динамики пространственно-распределённых систем в рамках третьей главы настоящей диссертационной работы изучены также динамические режимы, реализующиеся в связанных пространственно-распределённых системах при варьировании параметра связи. Для этих целей были рассмотрены связанные пучково-плазменные системы, находящиеся в режиме хаотической генерации. Для случая однонаправленной и взаимной связи были рассчитаны и проанализированы спектры показателей Ляпунова.

В заключение третьей главы рассмотрен вопрос выбора набора величин, входящих в состояние пространственно-распределённой системы, для эффективного расчета спектра показателей Ляпунова и сформулировано правило выбора величин, характеризующих данное состояние. Разработанная концепция применена для расчёта спектра показателей Ляпунова для рассматриваемых эталонных систем электронной природы.

В **Заключении** подведены итоги диссертационной работы, сформулированы основные результаты и намечены направления возможных дальнейших исследований в данном направлении.

## Достоверность полученных результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается тем, что математические методы, разработанные в рамках исследования, так же, как аналитические и численные методы, использованные в нём, базируются на известных ранее законах нелинейной динамики и радиофизики и апробированных математических и численных алгоритмах. Достоверность полученных результатов подтверждается их непротиворечивостью и соответствием их общепризнанным и опубликованным ранее данным. Полученные



в работе результаты не противоречат результатам, опубликованным в работах других авторов.

## Апробация результатов и публикации

Настоящая диссертационная работа выполнена на кафедре физики открытых систем факультета нелинейных процессов и в ОФНС НИИ ЕН федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”.

Материалы диссертационной работы использовались при выполнении научно-исследовательских работ по грантам:

- “Хаотическая синхронизация пространственно-распределённых систем (эталонные модели теории волн, устройства СВЧ и ТГц электроники)”, грант Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных — кандидатов наук МК-672.2012.2, 2012-2013, научный руководитель — к.ф.-м.н., доцент О.И. Москаленко.
- “Основы теории нелинейных и нестационарных фундаментальных явлений в новых вакуумных и твердотельных устройствах терагерцового диапазона и их экспериментальное моделирование на более низких частотах”, грант Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-1430.2012.2, 2012-2013, научный руководитель — чл.-корр. РАН, профессор Д.И. Трубецков.
- “Методы интегрированных технологий, основанные на подходах нелинейной динамики, для изучения процессов в сложных системах (наноустройства для генерации субтерагерцового и терагерцового излучения и их использование в информационно-телекоммуникационных системах, в медицинских и исследовательских целях для анализа биологических и когнитивных процессов)”, Федеральная целевая программа “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы” в рамках мероприятия 1.1 “Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров”, соглашение

№ 14.В37.21.0059, 2012-2013, научный руководитель — д.ф.-м.н., профессор А.Е. Храмов.

- “Исследование полупроводниковой наноструктуры и возможности её применения в информационных системах в терагерцовом диапазоне”, Федеральная целевая программа “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы” в рамках мероприятия 1.5 “Проведение научных исследований коллективами под руководством приглашенных исследователей”, соглашение № 14.В37.21.1207, 2012-2013, научный руководитель — к.ф.-м.н., с.н.с. А.Г. Баланов.
- “Нелинейная динамика и хаос в системе встречных электронных потоков с виртуальными катодами”, Российский фонд фундаментальных исследований (12-02-31035 мол\_а), научный руководитель — к.ф.-м.н., Р.А. Филатов.
- “Анализ нелинейных физических процессов в мощных электронных СВЧ приборах гигагерцового и терагерцового диапазона (лазеры на свободных электронах, гиросприборы, виркаторы)”, Российский фонд фундаментальных исследований (13-02-90406 Укр\_ф\_а), научный руководитель — д.ф.-м.н., профессор А.А. Короновский.
- “Усиление, генерация и обработка сигналов субтерагерцового и терагерцового диапазонов в перспективных пучково-плазменных системах и полупроводниковых наноструктурах”, Российский научный фонд, конкурс 2014 года “Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований отдельными научными группами”, научный руководитель — д.ф.-м.н., профессор А.Е. Храмов.

Результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, неоднократно докладывались на различных научных конференциях и семинарах и отражены в тезисах докладов 20-й Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии” (Севастополь, Украина, 2010) [41, 42], 22-й Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии” (Севастополь, Украина, 2012) [43], 23-й Международной Крымской конференции “СВЧ-техника

и телекоммуникационные технологии” (Севастополь, Украина, 2013) [44, 45], 24-й Международной Крымской конференции “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии” (Севастополь, Россия, 2014) [46, 47], XIII Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн” (Москва, Россия, 2011) [48], XIII Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах” (Москва, Россия, 2012) [49, 50], XIV Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн” (Москва, Россия, 2013) [51, 52], XIV Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах” (Москва, Россия, 2014) [53], IX Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” (Саратов, Россия, 2010) [54], X Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” (Саратов, Россия, 2013) [55, 56], XU Международной зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике (Саратов, Россия, 2012) [57, 58], Международной Научно-Технической Конференции, приуроченной к 50-летию МРТИ-БГУИР (Минск, Беларусь, 2014) [59] (всего 19 опубликованных тезисов докладов).

Результаты работы опубликованы в отечественных и зарубежных рецензируемых научных журналах, таких как “Physical Review Letters” [60], “Physical Review B” [61], “Applied Physics Letters” [62], “Europhysics Letters” [63], “Physics of Plasmas” [64], “Physics of Wave Phenomena” [65], “Письма в Журнал Технической Физики” [66], “Вестник Тамбовского государственного университета” [67], “Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика” [68–70], “Известия РАН. Серия физическая” [71–75], (всего 16 статей в журналах, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание учёной степени доктора и кандидата наук). По материалам диссертации получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [76, 77].

Исследования, вошедшие в диссертационную работу, были поддержаны стипендиальной программой Фонда некоммерческих программ Династия для студентов физиков (2012), грантом Фонда некоммерческих программ “Династия” для аспирантов и молодых учёных без степени (2014) стипендиальной программой Президента РФ для молодых учёных, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики (2015).

# Глава 1

## Анализ нестационарных режимов транспорта заряда в пространственно-распределенной системе, характеризующейся нелинейной зависимостью скорости носителей заряда от напряженности электрического поля

[60–63, 67, 70, 74, 75]

В настоящей главе описан алгоритм расчёта спектра показателей Ляпунова для нелинейных динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством (прежде всего, для пространственно-распределенных систем) и проводится его апробация на примере модельных систем. Раздел 1.1 содержит описание предлагаемого метода, включая модифицированную процедуру ортогонализации и нормировки Грама-Шмидта для построения набора линейно-независимых пространственных возмущений. В разделе 1.2

проведена апробация метода на примере модельной нелинейной активной распределённой среде, содержащей носители заряда. Данный раздел содержит описание используемой модели и результаты анализа автономной динамики системы при варьировании управляющего параметра. Раздел 1.3 посвящён расчёту и последующему применению спектра показателей Ляпунова для анализа неавтономной динамики системы при изменении параметров внешнего воздействия. В разделе 1.4 рассматривается возможность расчета и применения спектра показателей Ляпунова для анализа системы, состояние которой определяется набором динамических переменных, часть из которых зависит только от времени, в то время как остальные зависят как от времени, так и от пространственной координаты. Выводы по второй главе приведены в разделе 1.5.

## 1.1 Алгоритм расчёта спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределённой системы

Предлагаемый в настоящей диссертационной работе метод расчёта спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределённых систем является следующим.

Пусть состояние анализируемой пространственно-распределённой системы определяется функцией  $\mathbf{U}(x, t)$  (в общем случае, векторной), зависящей от времени  $t$  и пространственной координаты  $x^1$ . Эволюция данного состояния определяется оператором

$$\hat{L}(\mathbf{U}(x, t)) = 0, \tag{1.1}$$

который для пространственно-распределённых систем, как правило, имеет вид системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Учитывая тот факт, что для пространственно-распределённых систем число показателей Ляпунова оказывается бесконечным, при вычислении спектра показателей Ляпунова, очевидно, приходится ограничиваться расчётом первых  $N$  старших показателей. В этом случае  $\mathbf{U}(x, t)$  выступает в качестве опорного состояния, относительно которого

---

<sup>1</sup>В целом ряде случаев выбор набора величин, характеризующих поведение системы, в качестве состояния, используемого для расчета показателей Ляпунова, является нетривиальной задачей. Более того, неудачное определение состояния системы может приводить к некорректным результатам. Более подробно данный вопрос рассмотрен в разделе 3.4 настоящей диссертационной работы

рассматривается поведение  $N$  малых возмущений, которые тоже являются состояниями.

Для вычисления первых  $N$  старших показателей Ляпунова в рассмотрение вводится набор возмущений  $\mathbf{V}_i(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , удовлетворяющих в начальный момент времени условию ортогональности

$$(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  — скалярное произведение состояний. В том случае, когда состояние системы определяется набором из  $N$  динамических переменных

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (X_1(x, t) \dots X_N(x, t))^T, \\ \mathbf{V} &= (Y_1(x, t) \dots Y_N(x, t))^T, \end{aligned} \quad (1.3)$$

скалярное произведение в каждый момент времени имеет вид

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \sum_{i=1}^N \int_0^1 (X_i(x)Y_i(x))dx. \quad (1.4)$$

Важно отметить, что в случае, когда в роли состояния выступает действительная или комплексная функция (как в случаях, рассмотренных в работах [78] или [16]), не возникает проблем с определением скалярного произведения. В то же самое время, если состояние системы определяется каким-либо иным образом (что может оказаться необходимым в целом ряде физических задач), то и определение скалярного произведения в этом случае также должно быть определено по-иному. При этом, как и в случае выбора состояния, неправильное определение скалярного произведения состояний системы также может приводить к некорректным результатам.

Дополнительно к условию ортогональности (1.2) все возмущения  $\mathbf{V}_i(x, t)$  должны также удовлетворять условию нормировки

$$\|\mathbf{V}_i(x, 0)\| = 1. \quad (1.5)$$

Набор возмущений  $\mathbf{V}_i(x, t)$ , удовлетворяющих условиям (1.2) и (1.5) может быть получен с помощью процедуры ортогонализации Грама–Шмидта

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_i = \frac{\tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0)}{\|\tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0)\|} = \frac{\tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0)}{\sqrt{(\tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0), \tilde{\mathbf{V}}_i(x, 0))}} \\ \tilde{\mathbf{V}}_1(x, 0) = \varphi_1(x) \\ \tilde{\mathbf{V}}_{i+1}(x, 0) = \varphi_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^i (\mathbf{V}_k, \varphi_{i+1}) \mathbf{V}_k(x, 0), \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \end{array} \right. \quad (1.6)$$

где  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)$  — набор линейно независимых произвольных состояний, определенных на длине  $L$  рассматриваемой системы.

Для вычисления спектра показателей Ляпунова пространственно-распределенной системы необходимо рассматривать эволюцию во времени как состояния  $\mathbf{U}(x, t)$  исследуемой системы, так и всех возмущений  $\mathbf{V}_i(x, t)$ . Эволюция состояния  $\tilde{\mathbf{U}}(x, t)$  определяется соотношением (1.1), в то время как эволюция возмущений  $\mathbf{V}_i(x, t)$  будет определяться оператором эволюции

$$\partial \hat{L}(\mathbf{U}(x, t), \mathbf{V}_i(x, t)) = 0, \quad (1.7)$$

который получается при помощи линеаризации оператора (1.1) в окрестности состояния  $\mathbf{U}(x, t)$ .

По истечении интервала времени длительностью  $T$  полученный набор возмущений  $\mathbf{V}_i(x, T)$  необходимо снова подвергать процедуре ортогонализации и нормализации по Граму–Шмидту, при этом в качестве набора функций  $\varphi_i(x)$  выступает рассматриваемое множество возмущений  $\mathbf{V}_i(x, T)$ , иными словами,

$$\varphi_i(x) = \mathbf{V}_i(x, T). \quad (1.8)$$

Описанная последовательность действий повторяется достаточно большое число раз  $M$ , при этом по ходу вычислений подсчитываются суммы

$$S_i = \sum_{j=1}^M \ln \|\tilde{\mathbf{V}}_i(x, jT)\|, \quad (1.9)$$

в которых используются возмущения до перенормировки, но после ортогонализации. Оценка значений показателей Ляпунова для пространственно-распределённых систем определяется как

$$\Lambda_i = \frac{S_i}{MT}. \quad (1.10)$$

## 1.2 Анализ автономной динамики распределённой системы

Для апробации предлагаемого метода расчёта и доказательства его эффективности рассмотрим эталонную модель пространственно-распределённой активной среды, которая описывается при помощи самосогласованной системы дифференциальных уравнений: уравнения непрерывности (1.11) и уравнения Пуассона (1.12).

Подобная математическая модель широко применяется для исследования транспорта заряда в пространственно-распределённых системах, являющихся эталонными моделями различных пучково-плазменных и твердотельных устройств СВЧ электроники [79–87]. В рамках данной модели пространственно-временная динамика объёмной плотности (концентрации) носителей заряда  $n'(x', t')$  обуславливает изменение во времени пространственного распределения напряжённости электрического поля  $F'(x', t')$  (здесь и далее штрихи около переменных обозначают размерные величины, тогда как переменные без штрихов соответствуют безразмерным величинам, которые, в основном, и используются в диссертационной работе):

$$\frac{\partial n'}{\partial t'} = -\frac{1}{e'} \frac{\partial J'}{\partial x'}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial F'}{\partial x'} = \frac{e'}{\epsilon'_0 \epsilon'_r} (n' - n'_0). \quad (1.12)$$

Система уравнений (1.11) - (1.12) является универсальной для широкого класса распределённых активных сред с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon'_r$  и равновесной концентраций носителей заряда  $n'_0$ .

Для вычисления значения плотности тока  $J'(x', t')$  в данной модели, в случае, когда движение носителей заряда, обусловленное диффузией, незначительно, используется дрейфовое приближение [84, 88]

$$J'(x', t') = e' n'(x', t') v'_d(F'(x', t')). \quad (1.13)$$

Здесь  $v'_d(F'(x', t'))$  соответствует зависимости скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля. Вид данной зависимости определяет макроскопические свойства пространственно-распределённой системы и зависит от её характеристик, включающих зонную структуру, плотность плазмы (в случае анализа пучково-



плазменных приборов), рассеяние носителей заряда и другие нелинейные эффекты, связанные с особенностями строения вещества.

В устройствах СВЧ-электроники данная зависимость, как правило линейная, что связано с большой длиной свободного пробега носителей заряда [5, 6]. В твердотельных устройствах, зависимость  $v'_d(F')$  может иметь как линейный характер, соответствующий движению электронов через омические области (теория Друде), так и нелинейный, наблюдающийся в полупроводниковых гетероструктурах [89–93].

Большой фундаментальный и практический интерес представляют системы, в которых величина скорости носителей заряда зависит от напряжённости электрического поля немонотонно, иными словами, когда наблюдается отрицательная дифференциальная проводимость [84, 94–98].

Следует отметить, что наличие отрицательной дифференциальной проводимости может быть обусловлено различными факторами, среди которых — особенности зонной структуры, рассеяние носителей заряда, Блоховские колебания электронов и др. [88, 99]. Однако, в рамках рассматриваемой модели влияние данных факторов не учитывается и не рассматривается, а используется только нелинейная зависимость  $v'_d(F')$ .

В диссертационной работе использована зависимость  $v'_d(F')$ , содержащая участок отрицательной дифференциальной проводимости и описывающаяся при помощи соотношения Эсаки-Тсу [100]

$$v'_d(F'(x', t')) = \alpha' \frac{\mu' F'(x', t')}{1 + (\mu' F'(x', t'))^2}, \quad (1.14)$$

где значения  $\alpha' = 5.6 \times 10^4$  м/с и  $\mu' = 3.15 \times 10^{-6}$  м/В соответствуют параметрам среды [101].

Для удобства все исследования в диссертационной работе осуществлялись в безразмерных переменных. Записанные выше уравнения в данном случае имеют вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\beta \frac{\partial J}{\partial x} \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \nu(n - 1). \quad (1.16)$$

$$J(x, t) = n(x, t)v_d(F(x, t)) \quad (1.17)$$

$$v_d(F(x, t)) = \frac{F(x, t)}{1 + (F(x, t))^2}, \quad (1.18)$$

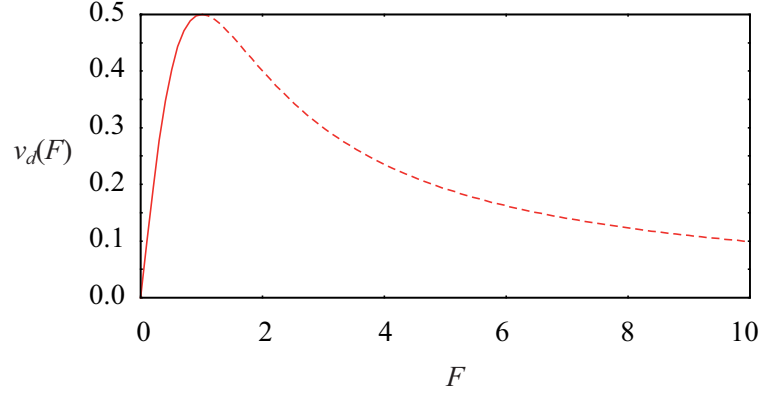


Рис. 1.1: Зависимость скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля (1.18), построенная в безразмерных переменных

где  $\beta = 0.03$  и  $\nu = 15$  — безразмерные параметры, характеризующие исследуемую пространственно-распределённую систему, содержащую носителя заряда.

На рисунке 1.1 изображена зависимость безразмерной скорости носителей заряда  $v_d$  от безразмерной напряжённости электрического поля  $F$ , которая использовалась при вычислениях. Видно, что с увеличением напряжённости электрического поля скорость носителей заряда возрастает и при  $F = F_m = 1$  достигает максимума. Дальнейшее увеличение напряжения приводит к уменьшению скорости носителей заряда и, соответственно, к образованию участка отрицательной дифференциальной проводимости (штриховая линия на рисунке 1.1). Подобный характер зависимости  $v_d(F)$  может быть причиной возникновения нестационарных режимов динамики рассматриваемой распределённой системы, обусловленных группировкой носителей заряда.

Рассмотренные уравнения (1.15), (1.16), (1.17), (1.18) представляют собой оператор эволюции исследуемой распределённой системы. Состояние системы, при этом, определяется в каждый момент времени пространственными распределениями концентрации носителей заряда  $n(x)$ , напряжённости электрического поля  $F(x)$  и плотности тока  $J(x)$ .

Уравнения (1.15), (1.16), (1.17), (1.18) дополняются граничными условиями

$$J(0, t) = sF(0, t), \tag{1.19}$$

$$V = \int F(x) dx, \tag{1.20}$$

соответствующими движению носителей заряда на входе в систему (в данном случае рассматривается омическое граничное условие, где  $s$  — проводимость) и разности потен-

циалов, приложенной к ее границам. В рассматриваемой модели разность потенциалов является постоянной величиной и рассматривается в качестве управляющего параметра.

Для анализа динамики распределённых систем, как правило, используется численное моделирование. В данной диссертационной работе для проведения численного интегрирования пространство, в котором определено состояние исследуемой системы разбивается на  $N$  слоев шириной  $\Delta x$ .

Обозначив концентрацию электронов в слое с порядковым номером  $m$  как  $n_m$ , уравнение, описывающее эволюцию объёмной плотности носителей заряда в слое  $m$  может быть представлено в виде дискретного аналога уравнения (1.15) [84, 102].

$$\Delta x \frac{dn_m}{dt} = \beta(J_{m-1} - J_m), \quad m = 1 \dots N, \quad (1.21)$$

где  $J_{m-1}$  и  $J_m$  – плотности тока, протекающего через левую и правую границу  $m$ -го слоя, соответственно. Плотность тока  $J_m$  определяется как

$$J_m = n_m v_d(F_m), \quad (1.22)$$

где  $v_d(F_m)$  описывает скорость электрона в зависимости от величины электрического поля  $F_m$  в слое  $m$  [101].

Для каждого слоя  $m$  справедливо дискретное представление уравнение Пуассона

$$F_{m+1} = \nu(n_m - 1) + F_m, \quad m = 1 \dots N. \quad (1.23)$$

Падение напряжения  $V$  в данной конечно-разностной модели определяется с помощью соотношения (1.20), в котором интеграл заменяется суммированием по всем  $N$  слоям дискретизованной модели

$$V = \frac{\Delta x}{2} \sum_{m=1}^N (F_m + F_{m+1}). \quad (1.24)$$

Результаты численного моделирования поведения рассматриваемой модельной пространственно-распределенной системы с нелинейной зависимостью скорости носителей заряда, полученные для различных значений управляющего параметра  $V$ , приведены на рисунке 1.2. Рисунки 1.2, *a*, *б*, *в* иллюстрируют распределение напряжённости электрического поля (1.2, *a*), распределение концентрации носителей заряда

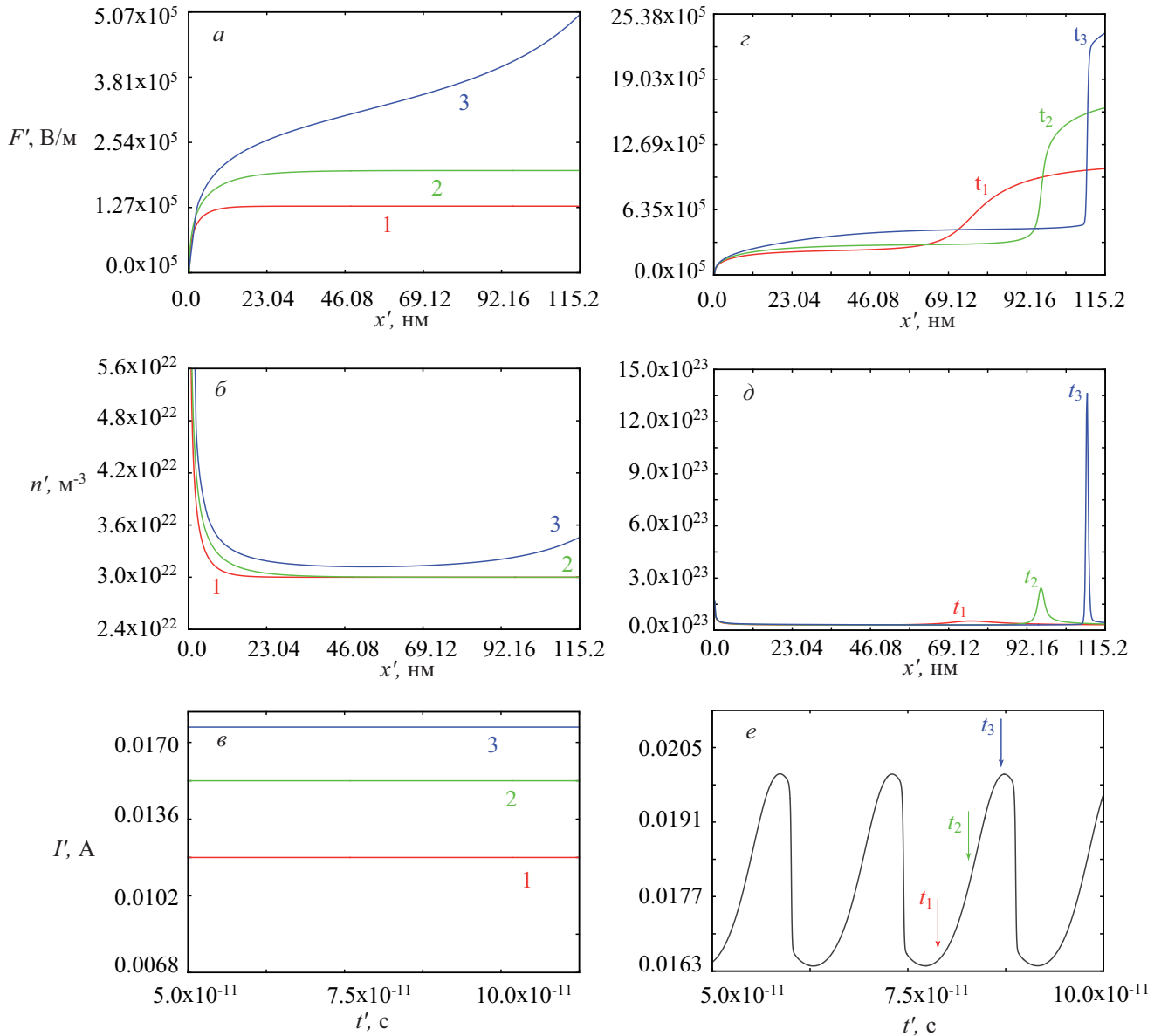


Рис. 1.2: Стационарные во времени распределения электрического поля (а), концентрации носителей заряда (б) и силы тока (в) для различных значений напряжения на структуре (кривая 1 —  $V = 0.401$ , кривая 2 —  $V = 0.603$ , кривая 3 —  $V = 1.028$ ). Пространственные распределения электрического поля (г) и концентрации носителей заряда (д) в момент зарождения домена  $t_1$ , его роста по мере движения к коллектору структуры  $t_2$  и в момент достижения коллектора  $t_3$  в режиме генерации СВЧ — колебаний. (е) Зависимость от времени силы тока, текущего через систему, для этого случая.

(1.2, б) и зависимость силы тока от времени (1.2, в). Кривые 1, 2, 3 получены при различных значениях приложенного напряжения (кривая 1 —  $V = 0.401$ , кривая 2 —  $V = 0.603$ , кривая 3 —  $V = 1.028$ ). Согласно рисунку (1.2, в) состояние системы в данном случае является стационарным.

На рисунках 1.2, г, д, е продемонстрирован колебательный режим. Кривые на рисунках (1.2, г, д) соответствуют распределениям напряжённости электрического поля и концентрации носителей заряда в различные моменты времени, соответствующие одному периоду колебаний тока. Видно, что распределение концентрации носителей заряда в данном случае характеризуется образованием области повышенной концентрации носителей заряда, при этом, данная область не является стационарной. С течением времени формирующаяся пространственно-временная структура движется вдоль распределённой системы и увеличивается в размере (1.2, г). Подобная динамика концентрации носителей заряда обуславливает нестационарную пространственно-временную динамику распределения напряжённости электрического поля (1.2, г).

Рассмотренная модель является подходящим объектом для исследования различных режимов (стационарных и нестационарных) пространственно-временной динамики и бифуркационных переходов между ними. Для расчёта показателей Ляпунова рассматриваемой модельной пространственно-распределённой системы с нелинейной характеристикой зависимости скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля определим опорное состояние исследуемой пространственно-распределённой системы как

$$\mathbf{U}(x, t) = (F(x, t), J(x, t), n(x, t))^T. \quad (1.25)$$

В качестве оператора, определяющего пространственно-временную динамику, в данном случае выступает система дифференциальных уравнений (1.15), (1.16) (1.17) (1.18) с граничными условиями (1.19) (1.20).

В качестве возмущения состояния исследуемой системы (1.25) рассмотрим величину

$$\mathbf{V}(x, t) = (\tilde{F}(x, t), \tilde{J}(x, t), \tilde{n}(x, t))^T. \quad (1.26)$$

Эволюция данного возмущения будет определяться согласно оператору

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} &= -\beta \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}, \\
\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} &= \nu \tilde{n} \\
\tilde{J} &= \tilde{n} v_d(F) + n \frac{dv_d(F)}{dF} \tilde{F} \\
\tilde{J}(0, t) &= s \tilde{F}(0, t) \\
\int \tilde{F}(x) dx &= 0,
\end{aligned} \tag{1.27}$$

полученному при помощи линеаризации уравнений исходной модели в окрестности опорного состояния. Следует отметить, что для расчёта показателей Ляпунова, динамика возмущения часто моделируется при помощи рассмотрения соседних фазовых траекторий, порождённых копиями исследуемой динамической системы, и оценки изменения расстояния между ними в фазовом пространстве [16]. Данный способ является простым с точки зрения реализации, однако, он оказывается справедливым только до тех пор, пока динамика возмущения описывается линейным оператором эволюции, что определить в численном моделировании весьма нетривиально. С учётом этого, использование линеаризованного оператора для описания эволюции возмущений оказывается предпочтительнее.

Для численного моделирования пространственно-временной динамики системы будем использовать конечно-разностную модель, описанную выше. Динамика возмущений будет моделироваться численно при помощи конечно-разностных аналогов уравнений линеаризованного оператора (1.27)

$$\begin{aligned}
\Delta x \frac{\partial \tilde{n}_m}{\partial t} &= -\beta \left( \tilde{J}_m - \tilde{J}_{m-1} \right), \\
\tilde{F}_{m+1} &= \nu \tilde{n}_m + \tilde{F}_m, \\
\tilde{J}_m &= \tilde{n}_m v_d(F_m) + n_m \frac{dv_d(F_m)}{dF} \tilde{F}_m, \\
\frac{\Delta x}{2} \sum_{m=1}^N \tilde{F}_m + \tilde{F}_{m+1} &= 0, \\
\tilde{J}_0 &= s \tilde{F}_0.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

В контексте апробации предложенного метода расчёта, вычислим старший показатель Ляпунова для случая, когда состояние системы является стационарным, а также для случая периодической нестационарной динамики. Для этого будем отслеживать

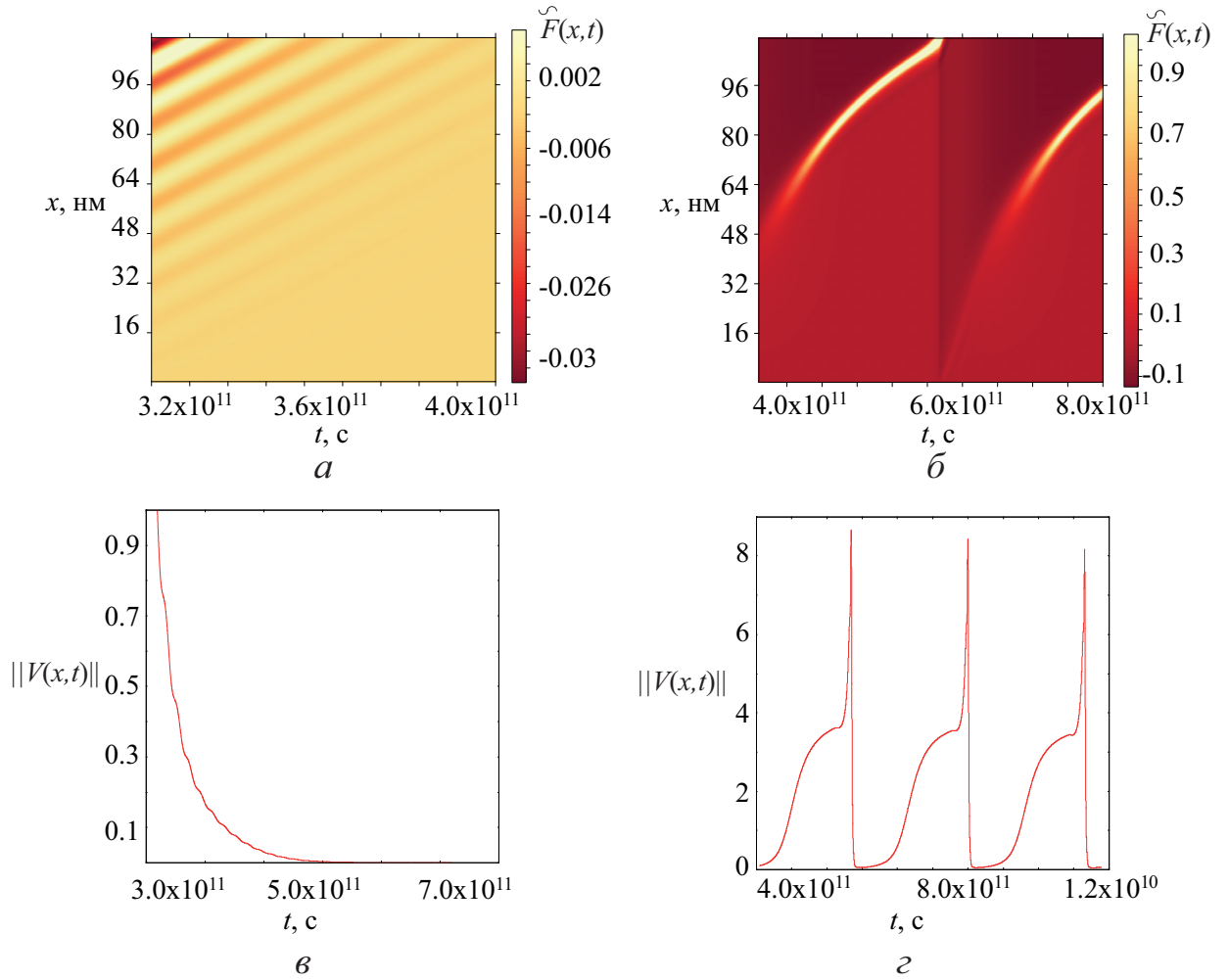


Рис. 1.3: пространственно-временная зависимость возмущения напряжённости электрического поля  $\tilde{F}(x, t)$  в случае стационарной (*a*) и нестационарной (*б*) динамики системы. Зависимости от времени нормы (*в, г*) возмущения (1.29) для этих случаев изменение нормы основного (первого) возмущения с течением времени.

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{(\mathbf{V}, \mathbf{V})}, \quad (1.29)$$

где  $\sqrt{(\mathbf{V}, \mathbf{V})}$  — скалярное произведение, которое в данном случае определяется как

$$(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \int_0^1 (\tilde{F}(x, t)\tilde{F}(x, t) + \tilde{J}(x, t)\tilde{J}(x, t) + \tilde{n}(x, t)\tilde{n}(x, t))dx. \quad (1.30)$$

На рисунке 1.3 представлены результаты численного интегрирования динамики возмущения для случая стационарной (*a*) и нестационарной (*б*) динамики опорного состояния системы. Видно, что в стационарном режиме возмущение затухает с течением времени. Зависимость от времени нормы данного возмущения приведена на рисунке

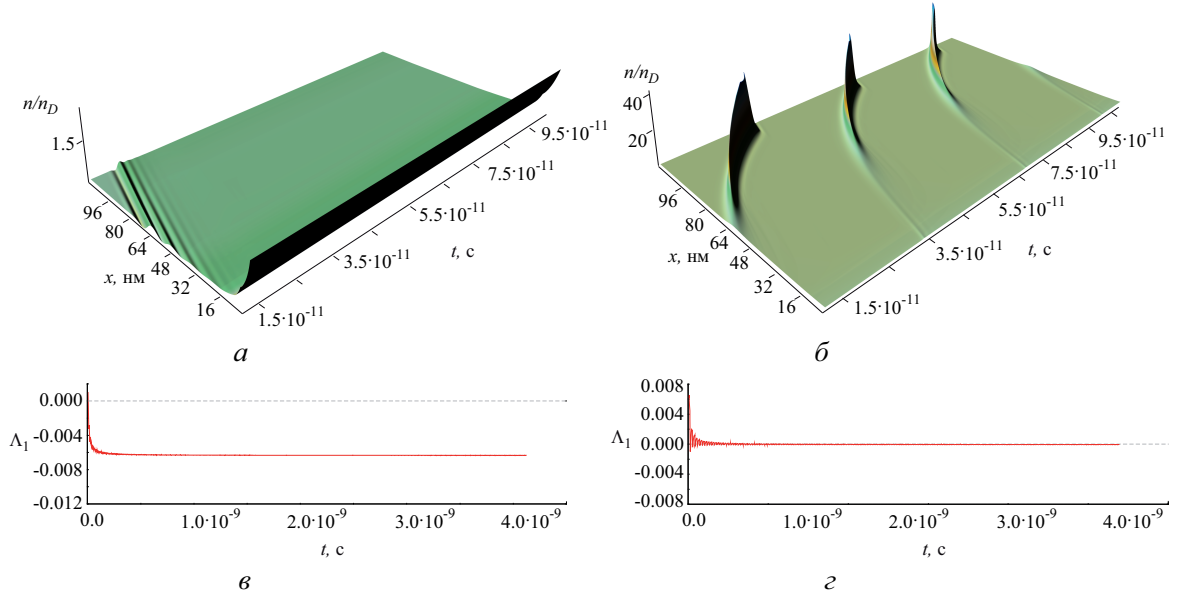


Рис. 1.4: Пространственно-временные зависимости напряжённости электрического поля  $F(x, t)$  в стационарном ( $a$ ) и нестационарном ( $b$ ) режиме. Зависимости значений старшего показателя Ляпунова, определенного на конечном интервале времени, от длительности этого интервала ( $v, z$ ) для этих случаев

1.3,  $v$ . Норма возмущения в данном случае уменьшается во времени по экспоненциальному закону. В режиме генерации, согласно рисунку ( $z$ ) норма возмущения эволюционирует по периодическому закону с частотой, определяемой периодической динамикой опорного состояния. При этом она является ограниченной во времени, что, очевидно, соответствует нулевому значению показателя Ляпунова.

Для численной оценки показателя Ляпунова в этом случае воспользуемся соотношениями (1.9) и (1.10). Результаты вычисления старшего показателя Ляпунова для значений управляющего параметра, соответствующих случаям, приведенным на рисунке 1.3, представлены на рисунке 1.4. Из рисунка видно, что в случае, когда состояние системы не меняется с течением времени (1.4,  $a$ ), показатель Ляпунова имеет отрицательное значение (1.4,  $v$ ). В случае нестационарной динамики системы (1.4,  $b$ ) показатель Ляпунова оказывается равным нулю (1.4,  $z$ ).

Старший показатель Ляпунова активно используется для анализа устойчивости стационарного состояния системы, что, в свою очередь, важно для оценки значения управляющих параметров, соответствующих переходу от стационарных во времени к неста-



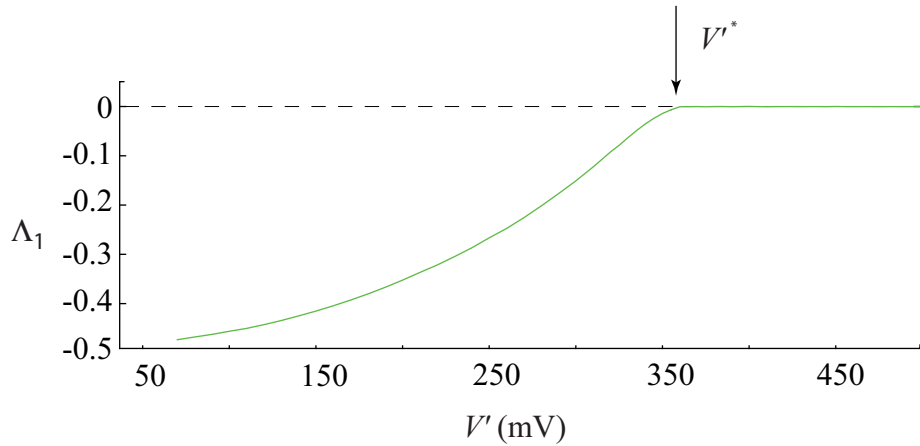


Рис. 1.5: Зависимость старшего показателя Ляпунова от управляющего параметра (значения приложенного напряжения), рассчитанная при помощи предложенного подхода. Стрелкой показано критическое значение напряжения, соответствующее возникновению периодических колебаний в системе.

ционарным динамическим режимам. С учётом этого, для проверки корректности полученных результатов численного расчёта старшего показателя Ляпунова для модельной пространственно-распределенной системы рассмотрим зависимость старшего показателя Ляпунова от величины приложенного к системе напряжения. Данная зависимость представлена на рисунке 1.5. Из рисунка видно, что значение показателя Ляпунова возрастает с увеличением значения напряжения, приложенного к системе и становится равным нулю в случае, когда стационарное состояние системы становится неустойчивым. Поведение старшего показателя Ляпунова хорошо согласуется с результатами численного моделирования пространственно-временной динамики рассматриваемой системы с распределенными параметрами. Критическое значение напряжения  $V'^*$ , найденное численно, показано на рисунке 1.5 стрелкой.

Результаты, представленные на рисунке 1.5 (вместе с результатами, изложенными в главе 2 диссертационной работы), свидетельствуют о корректности численного расчёта показателя Ляпунова и об эффективности его использования для анализа устойчивости режимов, реализующихся в пространственно-распределённых системах.

Для проведения дальнейшего анализа рассмотрим процедуру расчёта спектра показателей Ляпунова, описанную в разделе 1.1. Для этого введем в рассмотрение набор

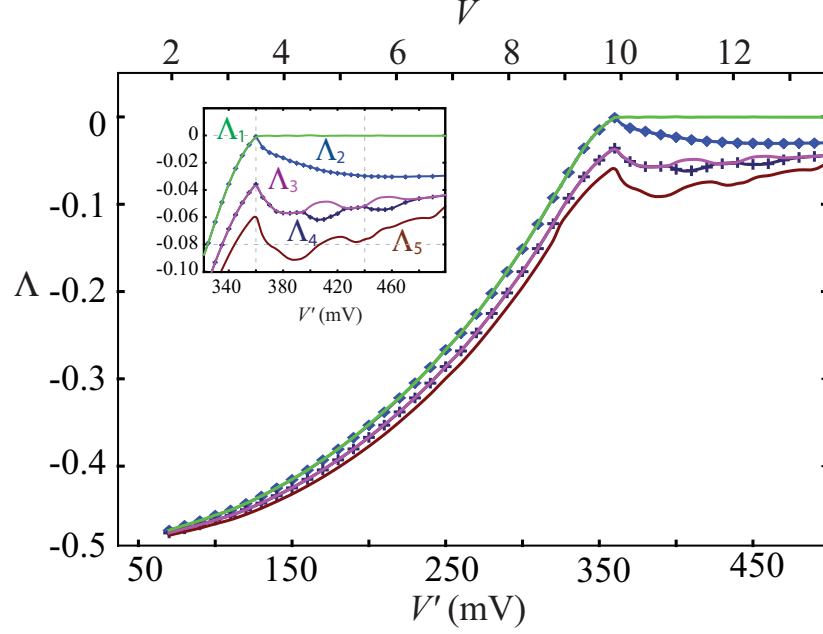


Рис. 1.6: Зависимость пяти старших показателей Ляпунова от значения приложенного напряжения  $V'$

возмущений  $\mathbf{V}_i, i = 1 \dots 6$ , где

$$\mathbf{V}_i(x, t) = (\tilde{F}_i(x, t), \tilde{J}_i(x, t), \tilde{n}_i(x, t))^T. \quad (1.31)$$

Применяя процедуру ортогонализации и нормировки (1.6), рассчитаем спектр показателей Ляпунова для исследуемой модельной системы при дальнейшем увеличении управляющего параметра  $V'$ . Полученный спектр показателей Ляпунова представлен на рисунке 1.6. Зависимости, соответствующие показателям Ляпунова, отмечены как  $\Lambda_1 \dots \Lambda_5$ . Видно, что при достижении значением приложенного напряжения критической величины, в спектре появляется нулевой показатель Ляпунова. В этот момент второй показатель Ляпунова также становится нулевым. Подобная ситуация соответствует возникновению бифуркации в системе и наблюдается также в системах со сосредоточенными параметрами. Остальные показатели в спектре являются отрицательными и соответствуют направлениям в бесконечномерном фазовом пространстве, вдоль которых происходит сближение “траекторий”. Следует отметить, что увеличение приложенного напряжения не приводит к усложнению динамики системы. Об этом свидетельствует наличие в спектре нулевого старшего и отрицательных второго и последующих показателей Ляпунова в широком диапазоне значений управляющего параметра.

Таким образом, видно, что в исследуемой системе в случае автономной динамики возможна реализация только периодического режима. Для рассмотрения более сложных динамических режимов и изучения возможности применения показателей Ляпунова для их классификации в следующем разделе будет рассмотрена неавтономная динамика системы.

### 1.3 Анализ неавтономной динамики распределённой системы

Согласно результатам исследования нестационарной динамики системы, представленным в предыдущем разделе настоящего диссертационного исследования, в рассматриваемой пространственно-распределённой системе в случае автономной динамики возможна реализация только периодических режимов.

В настоящем разделе будут рассмотрены модификации рассматриваемой модели, включающие использование более сложного вида нелинейной функции  $v_d(F)$  и наличие периодического внешнего воздействия.

Для начала рассмотрим ситуацию, когда внешнее воздействие отсутствует, а зависимость скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля  $v_d(F)$  имеет более сложный вид. Используемая зависимость  $v_d(F)$  представлена на рисунке 1.7, *a* штриховой линией. Для сопоставления на графике представлена зависимость  $v_d(F)$ , определяемая формулой Эсаку-Тсу (1.18). Из рисунка видно, что принципиальным отличием между данными зависимостями является наличие дополнительного пика и, соответственно, дополнительного участка отрицательной дифференциальной проводимости. Подобный характер зависимости  $v_d(F)$  может быть обусловлен циклотронными резонансами, наблюдающимися при воздействии магнитных полей на коллективную динамику носителей заряда. В данном случае была использована зависимость  $v_d(F)$ , рассчитанная и рассмотренная в работе [103].

Для расчёта показателей Ляпунова необходим линеаризованный оператор эволюции (2.12), для нахождения которого вместе с зависимостью скорости носителей заряда  $v_d(F)$  необходимо рассматривать также производную  $dv_d(F)/dF$ . Данная зависимость, полученная при помощи численного дифференцирования  $v_d(F)$ , представлена на ри-

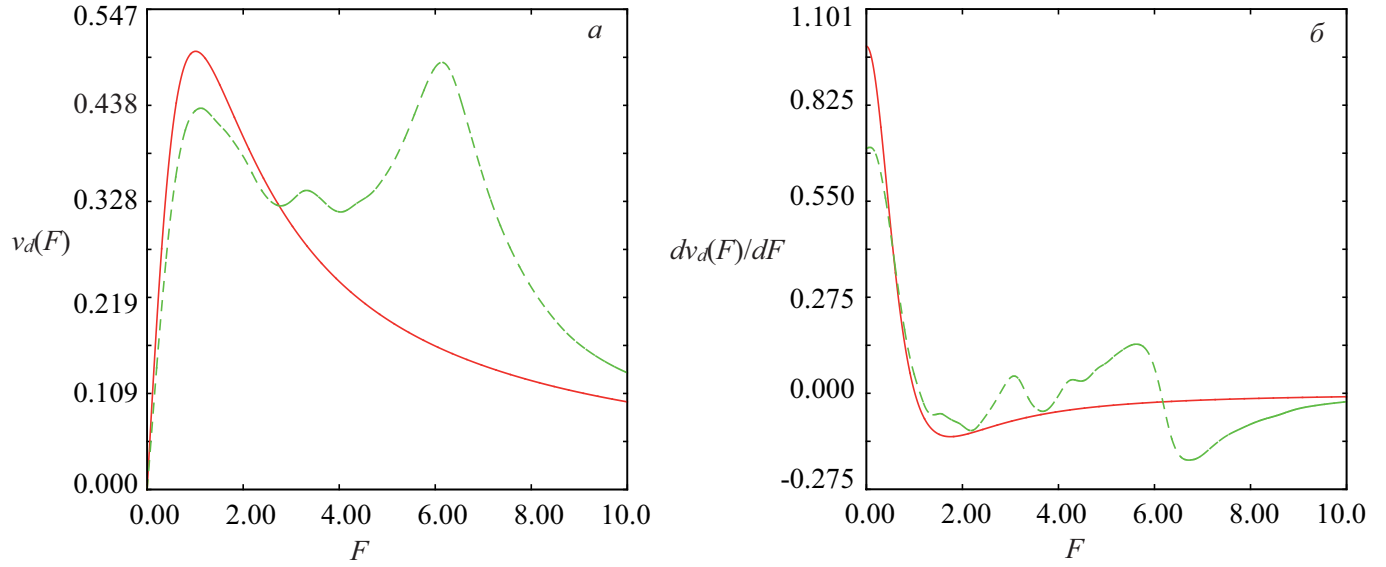


Рис. 1.7: (а) зависимости  $v_d(F)$ , и их (б) производные  $dv_d(F)/dF$  для случая автономной динамики носителей заряда (сплошная линия) и модифицированной зависимости  $v_d(F)$ , содержащей дополнительный участок отрицательной дифференциальной проводимости (штриховая линия)

сунке 1.7, б (штриховая линия). Сплошной линией показана зависимость  $dv_d(F)/dF$ , соответствующая зависимости скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля, вычисленной при помощи соотношения (1.18). Можно предположить, что коллективная динамика носителей заряда, описываемая при помощи зависимости (1.7, а), содержащей дополнительный участок отрицательной дифференциальной проводимости, обеспечит возникновение более сложных колебательных режимов в исследуемой пространственно-распределённой системе, включая режимы динамического хаоса.

Для проверки этого предположения в настоящей главе были рассчитаны пять старших показателей Ляпунова для данного случая в широком диапазоне значений приложенной разности потенциалов  $V'$ .

Полученные зависимости представлены на рисунке 1.8. Из рисунка видно, что, по сравнению со случаем, рассмотренным в предыдущем разделе, неустойчивость возникает при бóльших значениях напряжения. Однако, при увеличении напряжения состояние системы также характеризуется старшим нулевым показателем Ляпунова, что свидетельствует о периодической пространственно-временной динамике.

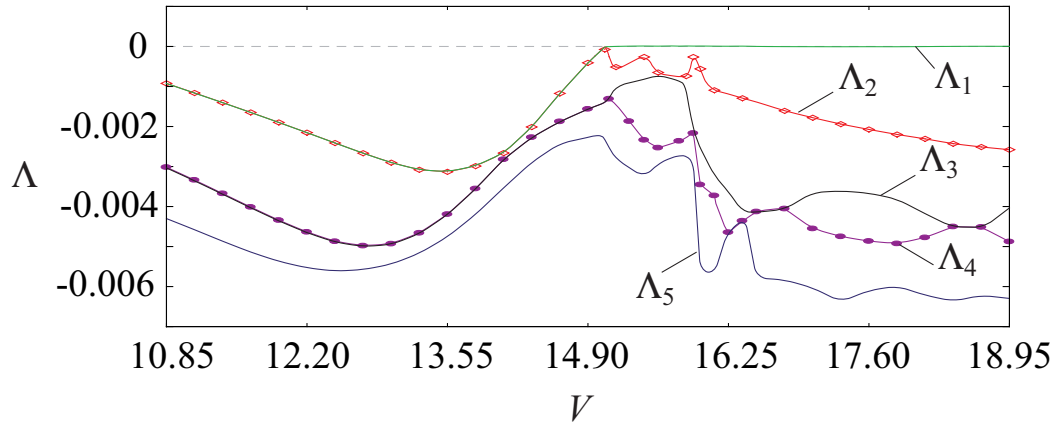


Рис. 1.8: Зависимости пяти старших показателей Ляпунова от приложенного напряжения в случае, когда зависимость скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля имеет вид, представленный на рисунке (1.7, а)

Таким образом, показано, что рассмотренная нелинейная зависимость скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля (рис. 1.7), характеризующаяся несколькими участками отрицательной дифференциальной проводимости, не приводит к усложнению режимов пространственно-временной динамики исследуемой распределённой системы.

На основании полученных результатов можно говорить об эффективности предложенного метода расчёта спектра показателей Ляпунова для анализа динамики пространственно-распределённых систем, описываемых при помощи системы уравнений непрерывности и Пуассона в совокупности с нелинейной зависимостью скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля.

Для дальнейшего рассмотрения в рамках настоящего раздела будем использовать зависимость, представленную на рисунке (рис. 1.7). При этом, также введем в рассмотрение периодическое внешнее воздействие

$$V(t) = V_0 + \Delta V_0 \cos(\omega_e t) \quad (1.32)$$

Можно предположить, что влияние внешнего воздействия (1.32) в совокупности с нелинейной зависимостью скорости носителей заряда от напряженности электрического поля приведет к усложнению характера колебательной динамики в рассматриваемой пространственно-распределенной системе.

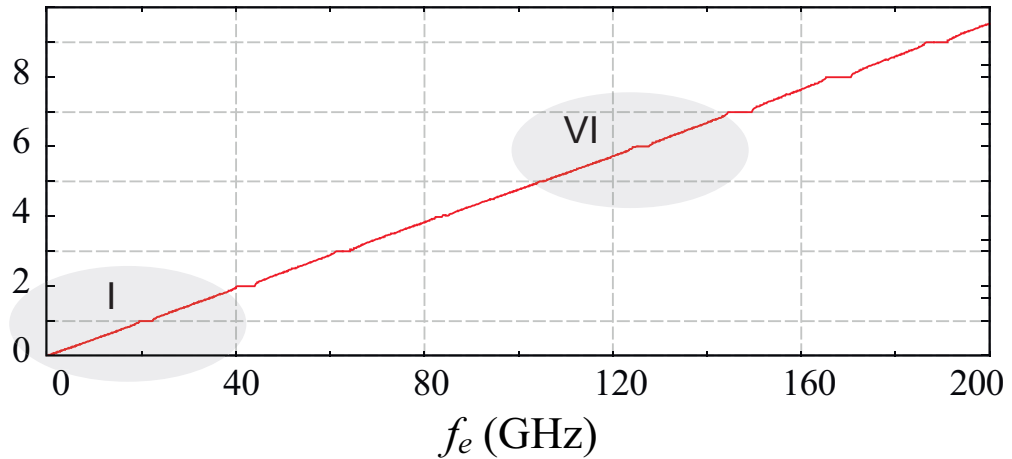


Рис. 1.9: зависимость числа вращения  $\rho$  от частоты внешнего воздействия. области I и VI соответствуют окрестностям первого и шестого языка синхронизации

В качестве управляющего параметра такой системы рассмотрим частоту внешнего воздействия  $\omega_e$ . На рисунке 1.9 представлена зависимость числа вращения, характеризующего отношение частоты внешнего воздействия и частоты колебаний в системе, от величины управляющего параметра (так называемая “чертова лестница”). “Ступеньки” на зависимости  $\rho(f_e)$  соответствуют режимам синхронизации колебаний в исследуемой пространственно-распределённой системе внешним периодическим воздействием.

Для дальнейшего исследования ограничимся рассмотрением первой и шестой областей синхронизации (данные области показаны серым цветом на рисунке 1.9). Для данных случаев построим и проанализируем зависимость нескольких старших показателей Ляпунова от частоты внешнего воздействия<sup>2</sup>.

На рисунке 1.10 изображены зависимости трех старших показателей Ляпунова ( $a$ ) и числа вращения ( $b$ ) от частоты внешнего воздействия, соответствующие области I. Видно, что области синхронизации соответствует наличие отрицательного старшего условного показателя Ляпунова. Кроме того, существуют области параметров, характеризующиеся нулевым и положительным значением старшего условного показателя.

Аналогичные зависимости для области VI представлены на рисунке 1.11. В данном случае области, характеризующиеся отрицательным и нулевым старшем условным по-

<sup>2</sup>Следует отметить, что в данном случае показатели Ляпунова являются условными. В полном спектре показателей Ляпунова должны также присутствовать показатели, соответствующие внешнему воздействию

казателем Ляпунова, также наблюдаются, а вот характеризующиеся положительным значением — отсутствуют.

Таким образом, спектры показателей Ляпунова, полученные для исследуемой пространственно-распределённой системы под внешним периодическим воздействием, свидетельствуют о наличии трёх качественно различных динамических режимов. С позиций анализа спектра показателей Ляпунова, полученные режимы могут быть охарактеризованы как

- квазипериодический режим, которому соответствует наличие нулевого старшего условного показателя Ляпунова;
- хаотический режим, которому соответствует наличие положительного старшего условного показателя Ляпунова;
- периодически режим, которому соответствует наличие отрицательного старшего условного показателя Ляпунова.

Для исследования типов динамики системы, соответствующих этим случаям, рассмотрим более подробно область I (рисунок 1.12), которая содержит значения управляющего параметра, соответствующие всем наблюдаемым типам динамики. Диапазон изменения значений управляющего параметра, составляющий рассмотренную область, показан серым цветом на рисунке 1.10. Для детального рассмотрения выберем значения частоты внешнего воздействия  $f'_{e1}$ ,  $f'_{e2}$ ,  $f'_{e3}$ , соответствующие качественно-различным режимам колебаний. Данные значения показаны стрелками на рисунке 1.12. Рассмотрим динамические режимы, реализующиеся в данных случаях, более подробно.

В случае, когда параметры внешнего воздействия  $V_0 = 16.691$ ,  $\Delta V_0 = 2.736$  и  $\omega_e = 3.299 \times 10^{-2}$  ( $V'_0 = 610$  мВ,  $\Delta V'_0 = 100$  мВ и  $f'_{e1} = \omega'_e/2\pi = 21.0$  ГГц) (стрелка 1 на рисунке 1.12), величина  $I(t)$  эволюционирует во времени по периодическому закону (рисунок 1.13 а), и представляется в пространстве, восстановленным по методу задержек Таккенса [104], в виде предельного цикла (рисунок 1.13 б). Периодическим колебаниям тока соответствует периодическая пространственно-временная эволюция концентрации носителей заряда  $n(x, t)$  (рисунок 1.13 в).

При небольшом изменении частоты внешнего воздействия характер зависимости  $I(t)$  существенно меняется. К примеру, если частота внешнего воздействия увеличит-

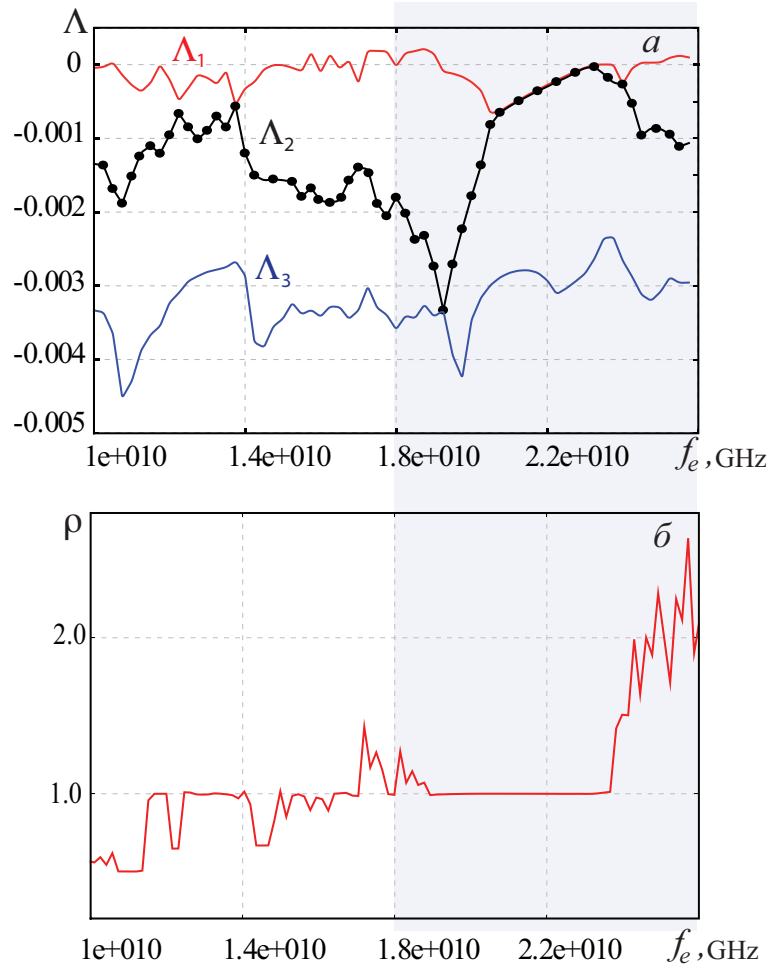


Рис. 1.10: (а) Зависимость значений трех условных показателей Ляпунова и (б) числа вращения от значений частоты внешнего воздействия, соответствующих первому “языку синхронизации”

ся до  $\omega_e = 3.691 \times 10^{-2}$  ( $f'_{e2} = 23.5$  ГГц) (стрелка 2 на рисунке 1.12), можно видеть, что огибающая колебаний тока начинает меняться по периодическому закону (рисунок 1.14 а), что соответствует квазипериодической динамике системы (рисунок 1.14 б). Пространственно-временная зависимость колебаний концентрации носителей заряда  $n(x, t)$  для этого случая показана на рисунке 1.14 в, где квазипериодический характер проявляется в модуляции скорости движения областей повышенной концентрации носителей заряда (доменов).

При дальнейшем увеличении частоты внешнего воздействия до  $\omega_e = 2.906 \times 10^{-2}$  ( $f'_{e3} = 18.5$  ГГц) (стрелка 3 на рисунке 1.12), наблюдается нерегулярный характер колебаний величины  $I(t)$  (рисунок 1.15 а). На рисунке 1.15 б, изображена проекция ат-



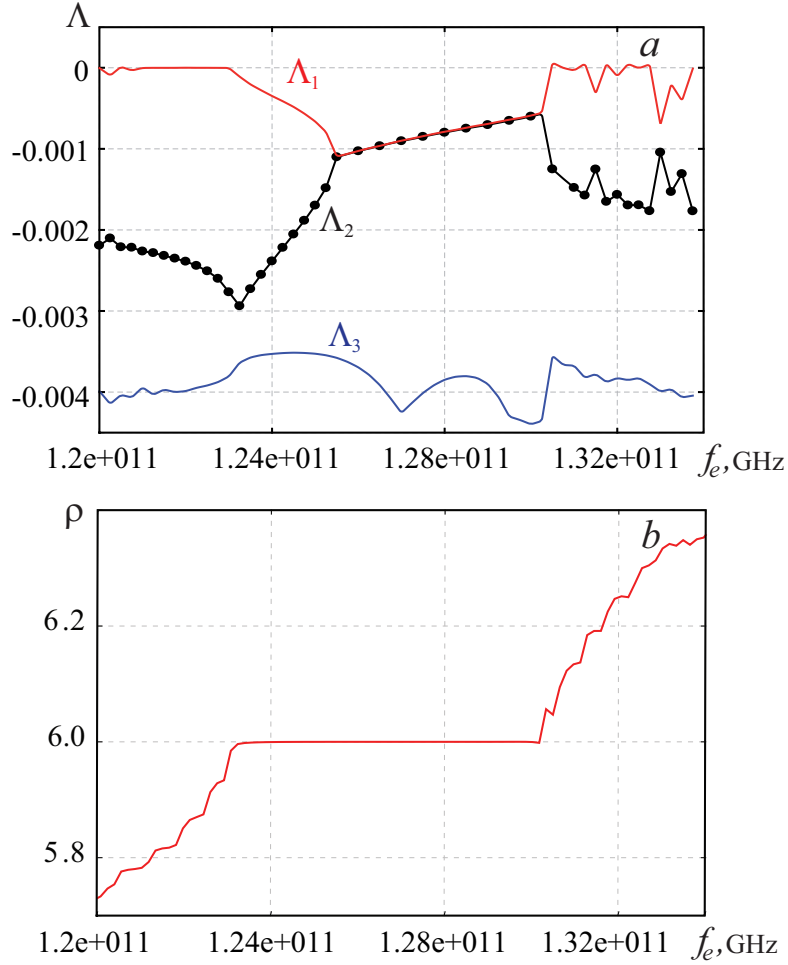


Рис. 1.11: (а) Зависимость значений трех условных показателей Ляпунова и (б) числа вращения от значений частоты внешнего воздействия, соответствующих шестому “языку синхронизации”

трактора для данного случая ( $I'(t'), I(t' + \Delta t')$ ), которая соответствует хаотическому режиму. Пространственно-временная зависимость колебаний плотности заряда также нерегулярна (рисунок 1.15 в). Видно, что различные пространственно-временные структуры, соответствующие высокой концентрации носителей заряда, появляются и исчезают случайным образом и имеют разные скорости. Анализ представленных зависимостей показывает, что наблюдаемый режим транспорта заряда является хаотическим.

Таким образом, детектирование возникновения сложных режимов транспорта заряда в исследуемой системе и их классификация были успешно выполнены при помощи спектра показателей Ляпунова. Анализ исследуемой модели распределённой системы представляет большой интерес для радиофизики, поскольку рассмотренная модель

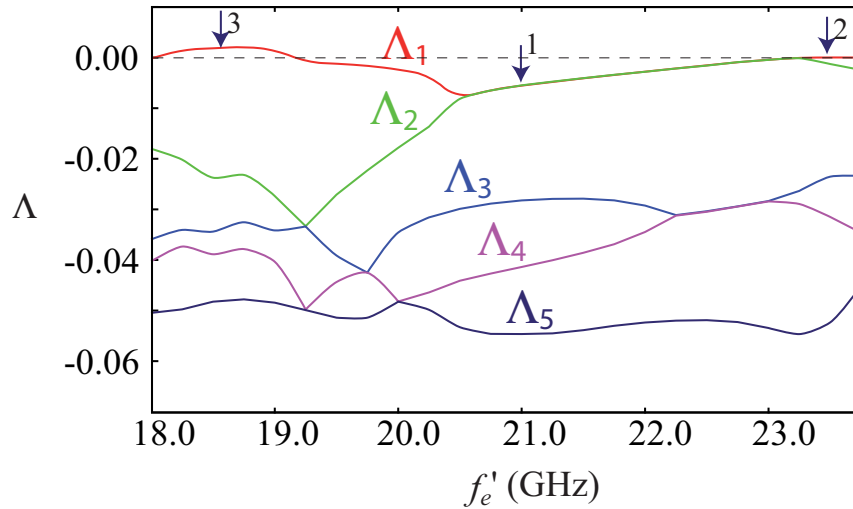


Рис. 1.12: Зависимость значений пяти условных показателей Ляпунова от частоты внешнего воздействия (области первого “языка синхронизации”). стрелками показаны значения управляющего параметра, соответствующие отрицательному (1), нулевому (2) и положительному значению старшего показателя Ляпунова

пространственно-распределённой системы, находящейся под внешним периодическим воздействием, может также рассматриваться как упрощённая эталонная модель, описывающая взаимодействие распределённой системы электронно-волновой природы с внешней резонансной системой.

В тоже самое время, задачи, связанные с анализом взаимодействия распределённых систем с внешними контурами широко распространены в современной физике и, как правило, не ограничиваются рассмотрением однонаправленного влияния внешней силы на динамику системы. В данном случае возникает проблема расчёта спектра показателей Ляпунова для динамических систем, включающих в себя одновременно пространственно-распределённую активную среду и подсистему со сосредоточенными параметрами. Данный вопрос подробно рассмотрен в следующем разделе настоящей диссертационной работы.

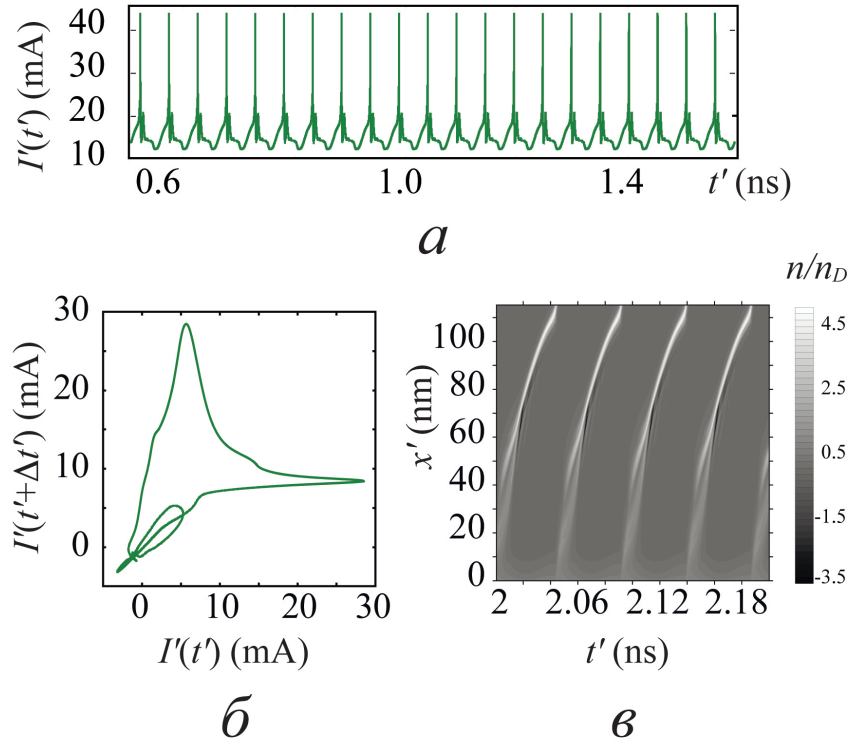


Рис. 1.13: Зависимость от времени силы тока, текущего через пространственно-распределённую систему (*a*), фазовый портрет колебаний тока, построенный по методу Такенса (*б*), и пространственно-временная зависимость концентрации носителей заряда, соответствующие периодическому режиму, реализующемуся при  $V'_0 = 610$  мВ,  $\Delta V'_0 = 100$  мВ и  $f'_{e1} = \omega'_e/2\pi = 21.0$  ГГц

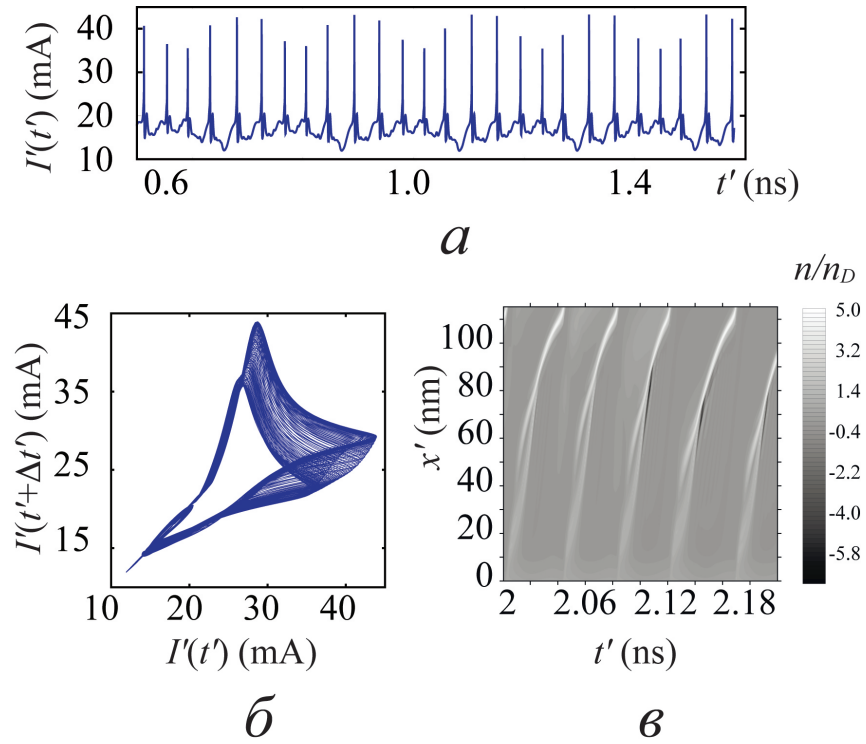


Рис. 1.14: Зависимость от времени силы тока, текущего через пространственно-распределённую систему (*a*), фазовый портрет колебаний тока, построенный по методу Таккенса (*б*), и пространственно-временная зависимость концентрации носителей заряда, соответствующие квазипериодическому режиму, реализующемуся при  $V'_0 = 610$  мВ,  $\Delta V'_0 = 100$  мВ и  $f'_{e2} = 23.5$  ГГц

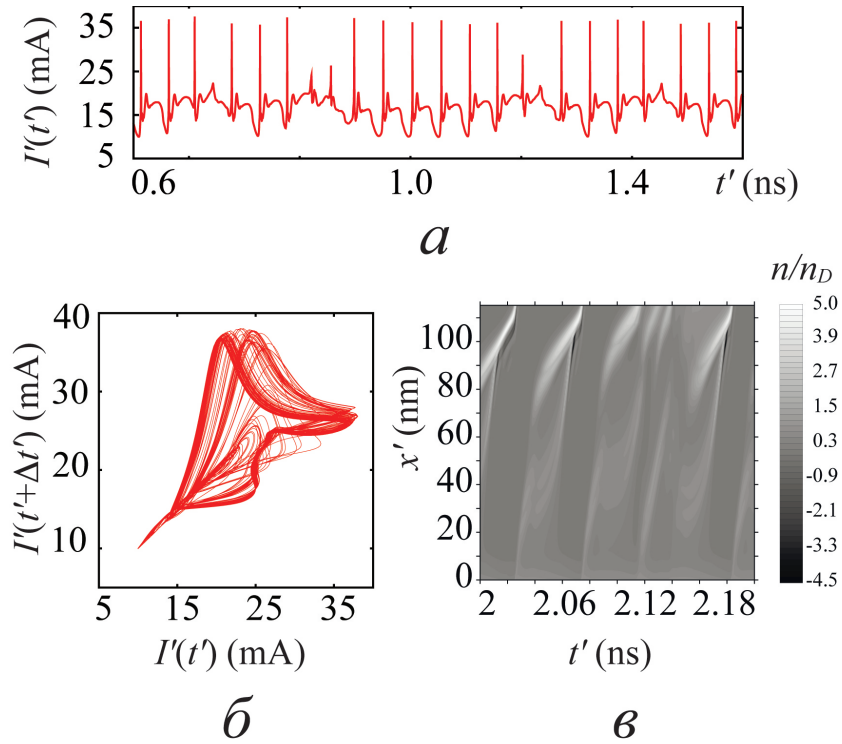


Рис. 1.15: Зависимость от времени силы тока, текущего через пространственно-распределённую систему (*a*), фазовый портрет колебаний тока, построенный по методу Таккенса (*б*), и пространственно-временная зависимость концентрации носителей заряда, соответствующие хаотическому режиму, реализующемуся при  $V'_0 = 610$  мВ,  $\Delta V'_0 = 100$  мВ и  $f'_{\text{ез}} = 18.5$  ГГц

## 1.4 Анализ динамики пространственно-распределенной системы, связанной с системой с конечномерным фазовым пространством

Динамические системы, описываемые при помощи переменных, зависящих как только от времени  $X_i(t)$ , так и от времени и пространственной координаты  $Y_j(x, t)$ , являются математическими моделями широкого класса реальных систем, являющихся предметом изучения современной физики. В частности, взаимодействие между распределённой и конечномерной системами встречается при построении математических моделей различных природных и технических объектов. В частности, к таким задачам относится, например, моделирование динамики биологических жидкостей самосогласованно с динамикой макроскопических параметров, определяющих состояние организма [105, 106]. В радиофизике задачи о взаимодействии распределённых и конечномерных систем могут возникать при рассмотрении динамики пространственно-распределённых моделей устройств СВЧ-электроники, взаимодействующих с внешними резонаторами, волноводными системами и т.п. [60].

Учитывая результаты, приведённые в предыдущем разделе, свидетельствующие об усложнении динамических режимов в распределённой системе под действием внешнего воздействия, можно предположить, что взаимодействие данной распределённой системы с конечномерным внешним резонансным контуром приведет к возникновению хаотической (или даже гиперхаотической) динамики. В данной ситуации разработка метода расчета показателей Ляпунова и применение его для количественной оценки сложности возникающих режимов представляется актуальной и интересной задачей.

В рамках настоящей диссертационной работы расчёт спектра показателей Ляпунова рассмотрен на примере динамической системы, представляющей собой колебательный RLC-контур, содержащий в качестве нелинейного элемента пространственно-распределённую систему. Схематически исследуемая модель представлена на рисунке 1.16. В данном случае нелинейная вольт-амперная характеристика  $I(V_{TED})$  (*в*) пространственно-распределённого элемента (*б*) является его макроскопической характеристикой, определяющей его взаимодействие с колебательным контуром (*а*).

Динамика исследуемого RLC-контура может быть описана при помощи уравнений Кирхгофа, которые в данном случае имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\frac{dV_1}{dt} &= \frac{I(V_{TED}) - I_1}{C}, \\ \frac{dI_1}{dt} &= \frac{V_1 + RI_1}{L}, \\ V_{TED} &= V_0 - V_1.\end{aligned}\tag{1.33}$$

Данная система может рассматриваться как достаточно общая модель для анализа устройства СВЧ-электроники, взаимодействующего с резонатором, собственная частота которого  $f_Q$  и добротность  $Q$  определяются как  $f_Q = 1/(2\pi\sqrt{LC})$  и  $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$ , соответственно. Следует отметить, что взаимодействие пространственно-распределённой системы с колебательным контуром оказывает влияние на пространственно-временную динамику заряда в распределённой активной среде, что в свою очередь, обуславливает изменение зависимости  $I(V_{TED})$ .

Для моделирования пространственно-распределённой системы воспользуемся моделью, описанной ранее в разделе 1.2 диссертационной работы, где  $V_{TED} = \int F(x)dx$ , а  $I = J'A'$ , где  $A' = 5 \times 10^{-10} \text{ м}^2$  — площадь поперечного сечения распределённой системы.

Для расчёта спектра показателей Ляпунова при помощи метода, предложенного в настоящей диссертационной работе, определим состояние исследуемой системы в бесконечномерном фазовом пространстве. Отметим, что состояние данной системы определяется набором величин

$$\Phi_1(x, t), \Phi_2(x, t), \dots, \Phi_{N-1}(x, t), \Phi_N(x, t), x \in [0, L],\tag{1.34}$$

зависящих от координаты  $x$  и времени  $t$  (определяющих состояние пространственно-распределённой системы), и зависящих только от времени

$$\Theta_1(t), \Theta_2(t), \dots, \Theta_{M-1}(t), \Theta_M(t),\tag{1.35}$$

которые характеризуют конечномерную подсистему (состояние контура).

Учитывая выражения (1.34) и (1.35), определим состояние рассматриваемой системы как

$$\mathbf{U}(x, t) = (\Phi_1(x, t), \dots, \Phi_N(x, t), \Psi_1(x, t), \dots, \Psi_M(x, t))^T,\tag{1.36}$$

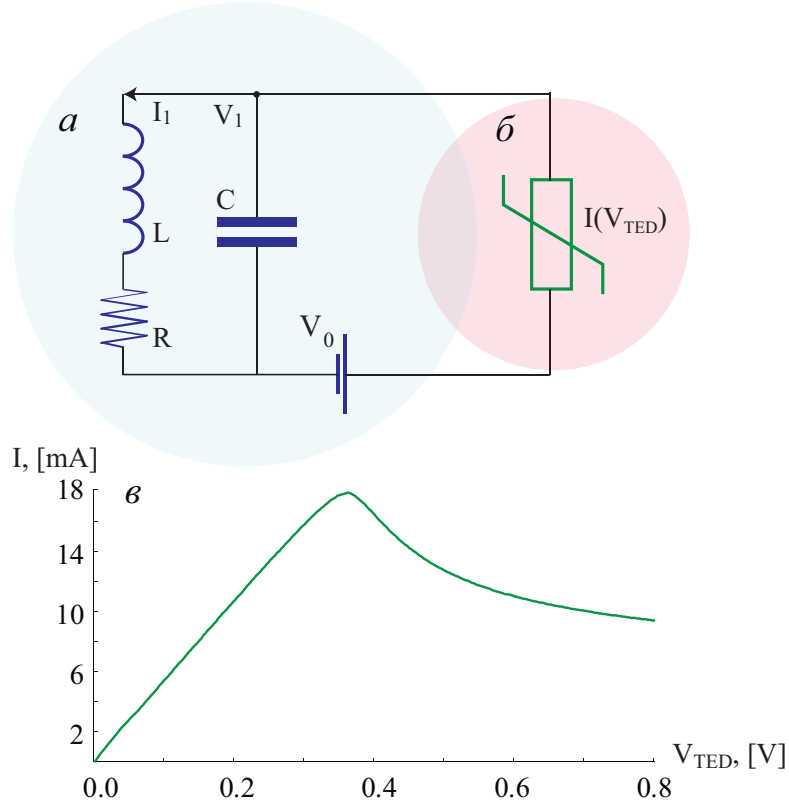


Рис. 1.16: Схематическая иллюстрация колебательного контура (а), содержащего пространственно-распределённый нелинейный элемент (б) и вольтамперная характеристика (в) распределённой системы

где

$$\Psi_i(x, t) = \Theta_i(t), x \in [0, L]. \quad (1.37)$$

При этом, пространственно-временная эволюция данного состояния будет определяться оператором

$$\hat{L}(\mathbf{U}(x, t) = 0, \quad (1.38)$$

который представляется в виде самосогласованной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.33) и уравнений в частных производных (1.15), (1.16) (1.17) (1.18).

Набор возмущений данного стационарного состояния, необходимый для расчёта спектра показателей Ляпунова, в свою очередь, будет иметь вид

$$\mathbf{V}_i(x, t) = (\tilde{\phi}_1^i(x, t), \dots, \tilde{\phi}_N^i(x, t), \tilde{\psi}_1^i(x, t), \dots, \tilde{\psi}_M^i(x, t))^T, i = \overline{1, K} \quad (1.39)$$



Для описания эволюции возмущения (1.39) используется оператор, содержащий линеаризованные уравнения Кирхгофа (1.33) и гидродинамики (1.15), (1.16) (1.17) (1.18).

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{V}_i}{dt} &= \frac{\tilde{I}(\tilde{V}_{TED}) - \tilde{I}_i}{C} \\
\frac{d\tilde{I}_i}{dt} &= \frac{\tilde{V}_i - R\tilde{I}_i}{L} \\
\tilde{V}_{TED} &= -\tilde{V}_i \\
\frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial t} &= -\beta \frac{\partial \tilde{J}_i}{\partial x} \\
\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial x} &= \nu \tilde{n}_i \\
\tilde{J}_i &= e\tilde{n}_i v_d(F) + en \frac{dv_d(F)}{dF} \tilde{F}_i \\
\int_0^L \tilde{F}_i dx &= \tilde{V}_{TED},
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Сравнивая полученный оператор эволюции, с оператором (1.27), соответствующим случаям, рассмотренным ранее (раздел 1.2) в настоящей диссертационной работе, следует отметить, что в последнем уравнении системы интеграл от возмущения напряжённости электрического поля, взятый на длине распределённой системы, не равен нулю. Данное уравнение отображает обратную связь между пространственно-временной динамикой распределённой системы и динамикой колебательного контура.

Интегрируя уравнения, описывающие динамику основного состояния системы, вместе с системой (1.40) и выполняя процедуру ортогонализации Грама-Шмидта, был рассчитан спектр из трех старших показателей Ляпунова для данной системы в зависимости от значения параметра  $V_0$ . Результат расчета приведен на рисунке 1.17.

Критическое значение параметра  $V_{crit}$ , при котором динамика системы становится нестационарной, показано стрелкой. Видно, что возникновению нестационарной динамики соответствует обращение в ноль старшего показателя Ляпунова. При этом, непо-

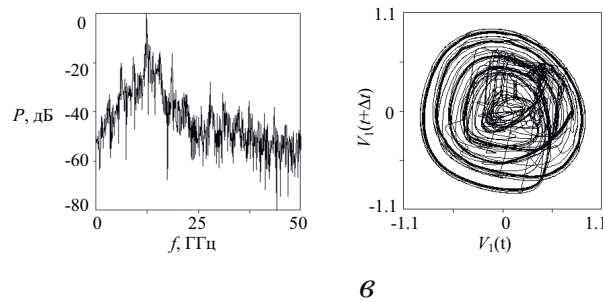
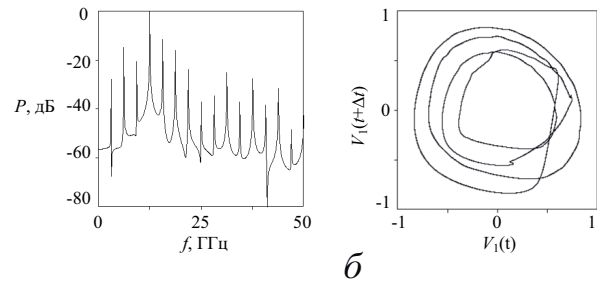
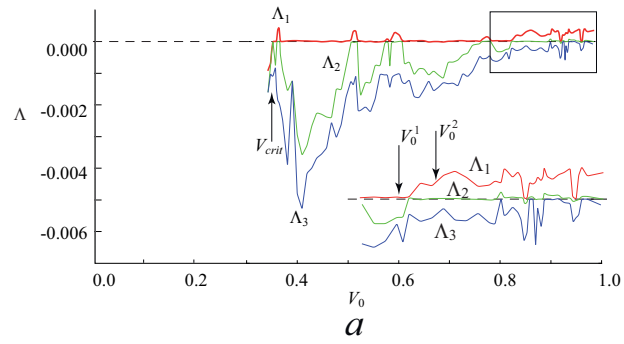


Рис. 1.17: Спектр показателей Ляпунова (*а*) в зависимости от значения управляющего параметра  $V_0$  (область хаотической динамики показана подробно на врезке), спектры мощности и фазовые портреты колебаний напряжения в контуре, соответствующие периодической (*б*) ( $V_0^1 = 0.82$ ) и хаотической (*в*) ( $V_0^2 = 0.83$ ) динамике.

средственно в момент бифуркации, второй показатель также становится нулевым, тогда как третий показатель Ляпунова остаётся отрицательным. Наличие нулевого старшего показателя Ляпунова в спектре и отрицательные значения второго и более младших показателей свидетельствуют о периодической динамике. Для иллюстрации периодического режима на рисунке 1.17, (*б*) продемонстрированы спектр мощности и фазовый портрет колебаний напряжения в контуре, соответствующие значению управляющего параметра  $V_0^1 = 0.82$ , при котором старший показатель имеет нулевое значение, а второй показатель — отрицательное.

При изменении параметра  $V_0$  наблюдается усложнение динамики системы, которое при определенных значениях параметра  $V_0$ , характеризуется появлением в спектре показателей Ляпунова положительного значения. В частности, при значениях  $V_0 > 0.823$  в спектре показателей Ляпунова появляется положительный старший показатель (при этом второй показатель Ляпунова становится равным нулю). Подобное поведение показателей Ляпунова свидетельствует о реализации в системе хаотического режима колебаний. На рисунке 1.17, (в) представлены спектр мощности и фазовый портрет хаотических колебаний напряжения, реализующихся при  $V_0^2 = 0.83$ .

Представляется интересным более детально рассмотреть динамику системы, в особенности, пространственно-временную динамику заряда в распределенной системе в случаях периодического и хаотического режимов. Результаты такого рассмотрения представлены на рисунке 1.18.

На рисунке 1.18, (а, б, в) изображен режим, который, с точки зрения спектра показателей Ляпунова, был определен как периодический. Зависимость показателей Ляпунова, определенных на конечном интервале времени, от длины этого интервала для этого случая продемонстрирована на рисунке 1.18, (а). Видно, что значения показателей достигают конечной точности при последовательном применении большого числа итераций Грамма-Шмидта. При этом, старший показатель Ляпунова оказывается равным нулю. Подобный режим характеризуется периодическим характером коллективного транспорта заряда в распределённой системе (б) и периодическими колебаниями напряжения в контуре ((в)).

На рисунке 1.18, (г, д, е) представлен хаотический режим, тогда как на рисунке 1.18, (г) показана зависимость показателей Ляпунова, определенных на конечном интервале времени, от длины этого интервала. Видно, что старший показатель Ляпунова оказывается положительным, а второй — равным нулю. Подобный режим характеризуется нерегулярным характером коллективного транспорта заряда (д) и хаотическими колебаниями напряжения в контуре ((е)).

Следует отметить, что характер динамики, наблюдающейся в пространственно-распределенной системе, взаимодействующей с колебательным контуром, отлично согласуется с полученными спектрами показателей Ляпунова. При помощи показателей Ляпунова показано, что влияние внешнего контура, моделируемого при помощи конеч-

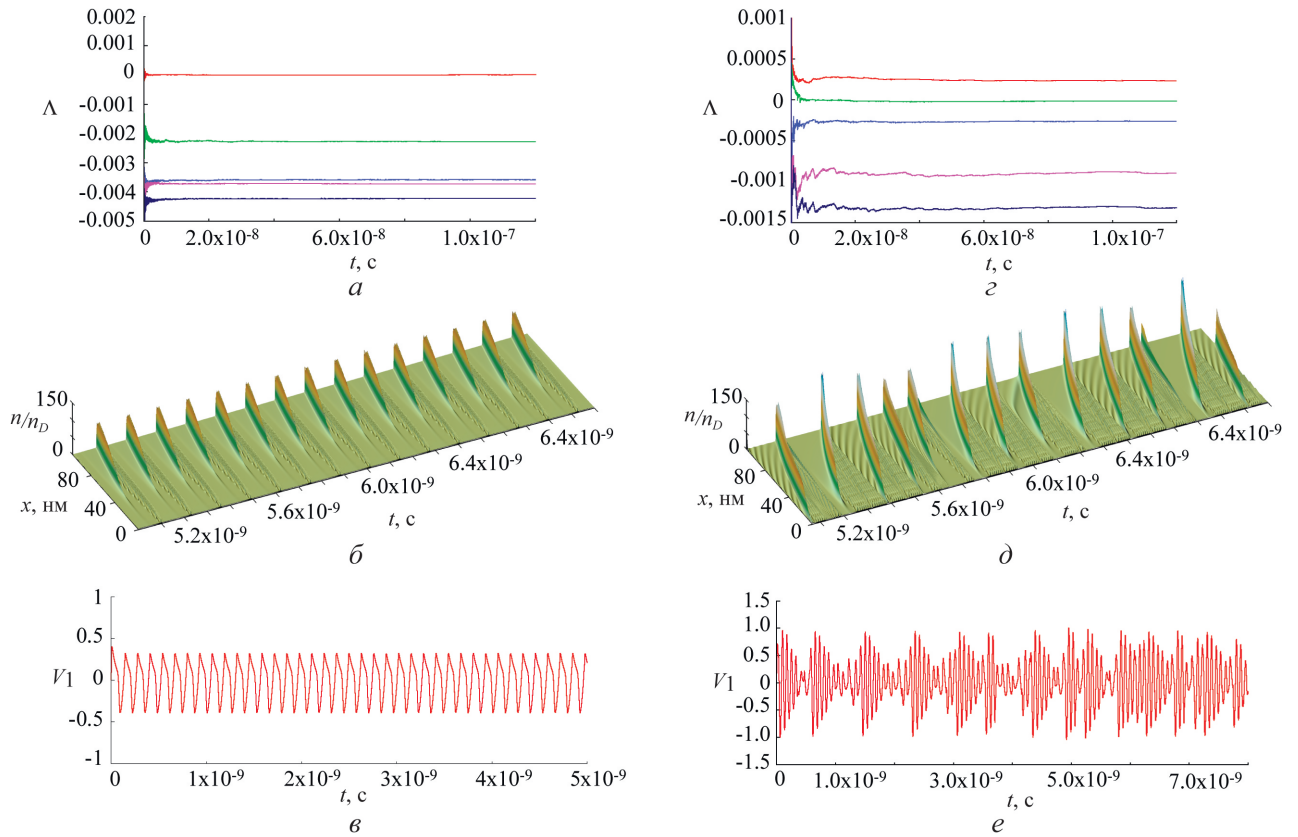


Рис. 1.18: Зависимости показателей Ляпунова, определенных на конечном интервале времени, от длины этого интервала, соответствующие периодической (а) и хаотической (z) динамике системы, пространственно-временные зависимости концентрации носителей заряда (б, д) и временные реализации колебаний напряжения в контуре (в, z) для этих случаев

номерной системы с сосредоточенными параметрами, приводит к усложнению динамики этой системы. В частности, на рисунке 1.19 проиллюстрировано влияние параметров контура на динамику рассматриваемой системы. В качестве основного параметра в данном случае выбрана собственная частота колебательного контура  $f_Q$ . Видно, что варьирование параметров RLC-контура приводит к качественным изменениям в динамике системы. Основываясь на рассмотрении полученного, для данного случая, спектра показателей Ляпунова можно видеть, что колебательные режимы в исследуемой системе, в зависимости от параметра внешнего контура, могут носить как регулярный, так и хаотический характер.

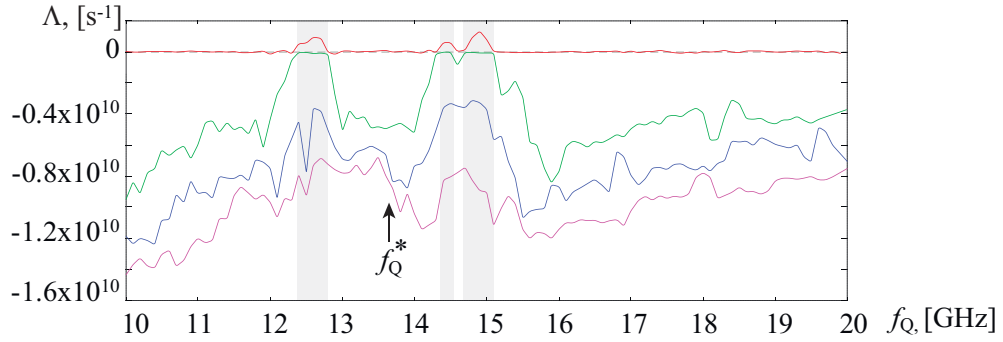


Рис. 1.19: Спектр показателей Ляпунова, для исследуемой распределенной системы, связанной с RLC-контуром, в зависимости от параметра  $f_Q$ , характеризующего колебательный контур. Области хаотической динамики показаны затемнением. Стрелкой показано значение, соответствующие RLC-контур, рассмотренному подробно в этом разделе

## 1.5 Выводы к первой главе

В данной главе рассмотрен метод расчета спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем, основанный на непрерывном в пространстве описании состояния системы и ее возмущений. Эффективность применения предложенного подхода продемонстрирована на примере эталонной модели пространственно-распределенной системы, описывающей в рамках гидродинамического подхода коллективную динамику носителей заряда в приложенном электрическом поле. В результате применения метода было показано, что в случае автономной динамики системы под действием приложенного электрического поля в системе возможна реализация только периодических колебаний. В тоже время, влияние внешнего периодического воздействия вместе с приложенным магнитным и электрическим полями оказывает существенное влияние на динамику данной системы. При помощи показателей Ляпунова было показано, что в зависимости от частоты внешнего воздействия динамика системы может быть периодической, квазипериодической и хаотической.

Был рассмотрен вопрос о расчете спектра показателей Ляпунова для систем, описывающих взаимодействие между распределенной активной средой и конечномерной динамической системой со сосредоточенными параметрами. Показано, что состояние таких систем, включающее в себя как динамические переменные, зависящие только от

времени  $X_i(t)$ , так и от времени и пространственной координаты  $Y_i(x, t)$  может быть описано в бесконечномерном фазовом пространстве, что дает возможность применения разработанного метода расчета показателей Ляпунова. В качестве конкретного примера в работе была рассмотрена модельная распределенная система электронной природы, связанная с внешним RLC-контуром. При помощи спектра показателей Ляпунова было показано, что варьирование параметров контура приводит к возникновению хаотической пространственно-временной динамики распределенной системы, что не реализуемо ни в случае автономной динамики системы, ни при периодическом внешнем воздействии, рассмотренном в данной работе.

## Глава 2

# Пространственно-временная динамика набора возмущений неоднородного по пространству стационарного состояния пространственно-распределённых СИСТЕМ

[65, 69, 72]

Изучение устойчивости стационарного состояния динамических систем, также как и разработка методов диагностики режимов нестационарной динамики главным образом основаны на рассмотрении поведения малых возмущений состояния системы. Известно, что в случае, когда состояние системы является стационарным, любое возмущение затухает с течением времени, для периодического во времени колебательного режима существует незатухающее возмущение, соответствующее в случае систем с малым числом степеней свободы движению изображающей точки вдоль предельного цикла в фазовом пространстве. Хаотическая динамика, в свою очередь, обязательно характеризуется наличием возмущения, амплитуда которого со временем нарастает.

Для динамических систем, состояние которых определено в  $N$ -мерном фазовом пространстве, возмущение представляет собой  $N$ -мерный вектор. При этом, показатели

Ляпунова соответствуют коэффициентам  $\Lambda_i$  зависимости  $X_i \sim e^{\Lambda_i t}$ , описывающей изменение длин  $X_i$  каждого из  $N$  ортогональных собственных векторов.

В случае, когда состояние системы характеризуется набором функций, зависящих от пространственной координаты  $x$ , возмущение больше не является вектором, и наряду с его временной динамикой необходимо рассматривать его эволюцию в пространстве. При этом, интерес представляет анализ пространственных распределений, соответствующих ортогональному набору возмущений состояния распределённой системы и вывод закономерностей, определяющих их эволюцию.

В настоящей главе диссертационной работы рассматривается неоднородное по пространству стационарное состояние пространственно-распределённых систем<sup>1</sup>. При этом, основное внимание уделяется исследованию основных принципов и закономерностей, определяющих динамику малых возмущений данного состояния при переходе от стационарного режима к нестационарной пространственно-временной динамике. В качестве объекта для исследования используется модельная пространственно-распределённая система, описываемая в рамках гидродинамического приближения (1.15)-(1.18), рассмотренная в первой главе настоящей диссертационной работы. В разделе 2.1 рассматривается приближённая аналитическая оценка коэффициента затухания возмущения стационарного состояния. В разделе 2.2 предлагается метод анализа динамики всего набора возмущений стационарного состояния без использования численного моделирования динамики системы, позволяющий вычислить их коэффициенты нарастания/затухания и описать пространственные распределения в каждый момент времени. В рамках данного раздела результаты, полученные при анализе динамики малых возмущений, используются для анализа устойчивости стационарного состояния пространственно-распределённой системы (1.15)-(1.18). Раздел 2.3 посвящён анализу поведения возмущения стационарного состояния в рамках численного моделирования.

---

<sup>1</sup>В стационарном режиме, когда состояние системы не меняется с течением времени, возмущение эволюционирует как во времени, так и в пространстве. При этом, в отличие от нестационарной динамики, для стационарного состояния, в ряде случаев, возможно аналитическое описание его динамики.



## 2.1 Приближённая аналитическая оценка устойчивости стационарного состояния

Рассмотрим модельную распределённую систему (1.15)-(1.18), описанную подробно в первой главе настоящего диссертационного исследования. Согласно результатам численного расчёта и анализа полученного спектра показателей Ляпунова, в данной системе в случае автономной динамики возможна реализация стационарного во времени состояния, соответствующего значениям управляющего параметра  $V < V^*$ , где  $V^*$  — критическое значение параметра, соответствующее развитию пространственно-временной неустойчивости. Как было показано выше, состояние исследуемой пространственно-распределённой системы в каждый момент времени определяется пространственными распределениями  $n(x)$ ,  $F(x)$ ,  $J(x)$ , определяющими распределения концентрации носителей заряда, напряжённости электрического поля и плотности тока, соответственно. В стационарном состоянии данные распределения не меняются с течением времени, следовательно

$$\frac{\partial n}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial x} = 0. \quad (2.1)$$

Подставляя выражения (2.1) в уравнения (1.15), (1.17), описывающие динамику системы, можно получим

$$nv_d(F) = J_0 = \text{const}. \quad (2.2)$$

Таким образом, стационарному состоянию анализируемой системы соответствуют распределения  $F_0(x)$ ,  $n_0(x)$ , такие, что распределение плотности тока в пространстве оказывается однородным  $J_0(x) = J_0$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ . На рисунке 2.1 изображена зависимость величины силы тока  $J_0$  от значения управляющего параметра  $V$  (вольт-амперная характеристика рассматриваемой распределённой системы). Стационарному состоянию соответствует сплошная линия, нестационарному — штриховая. Величины  $J_0^*$  и  $V^*$  определяют критическую плотность тока и падение напряжения, соответствующие развитию пространственно-временной неустойчивости. Из рисунка видно, что в стационарном состоянии между величиной плотности тока и значением приложенного напряжения установлено взаимно-однозначное соответствие. Следовательно, величина  $J_0$  может играть роль управляющего параметра.

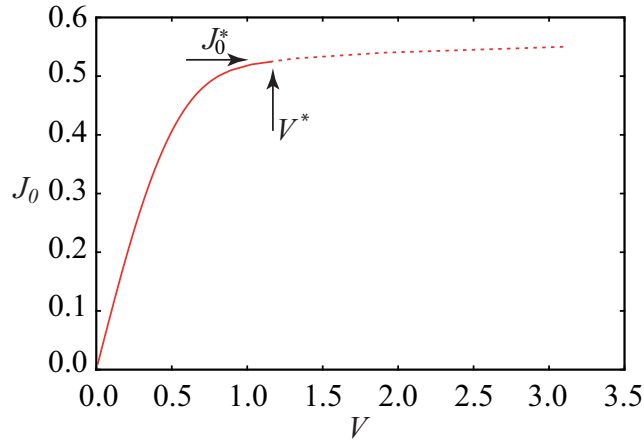


Рис. 2.1: Зависимость величины силы тока  $J_0$  от значения управляющего параметра  $V$ . Стационарному состоянию соответствует сплошная линия, нестационарному — штриховая. Величины  $J_0^*$  и  $V^*$  определяют критическую плотность тока и падение напряжения, соответствующие развитию неустойчивости.

Рассмотрим теперь тип распределений напряжённости электрического поля и концентрации носителей заряда в исследуемой системе при различных значениях управляющего параметра, соответствующих стационарному состоянию. Данные распределения представлены на рисунке 2.2 для трех различных значений приложенного напряжения:  $V = 0.4$  (кривая 1),  $V = 0.6$  (кривая 2),  $V = 1.0$  (кривая 3). Рисунок 2.2, *а* соответствует распределениям напряжённости электрического поля, 2.2, *б* — концентрации носителей заряда. Из рисунка видно, что при небольших значениях управляющего параметра величина напряжённости электрического поля  $F(x)$  достигает наибольшего значения с увеличением пространственной координаты и далее остаётся постоянной. Концентрация носителей заряда, в свою очередь, имеет максимальное значение в области  $x = 0$ , которое быстро уменьшается при увеличении пространственной координаты  $x$  до некоторого значения, оставаясь далее постоянной на большей части длины системы.

С учётом обнаруженных закономерностей, введем в рассмотрение бесконечно длинную структуру. Напряжённость поля в бесконечно удалённой точке системы в таком случае будет определяться как

$$f = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x). \quad (2.3)$$

Для дальнейшего рассмотрения разложим зависимость  $v_a(F)$  в ряд Тейлора вблизи точки  $F = f$ . Ограничиваясь рассмотрением линейного слагаемого, получим зависи-

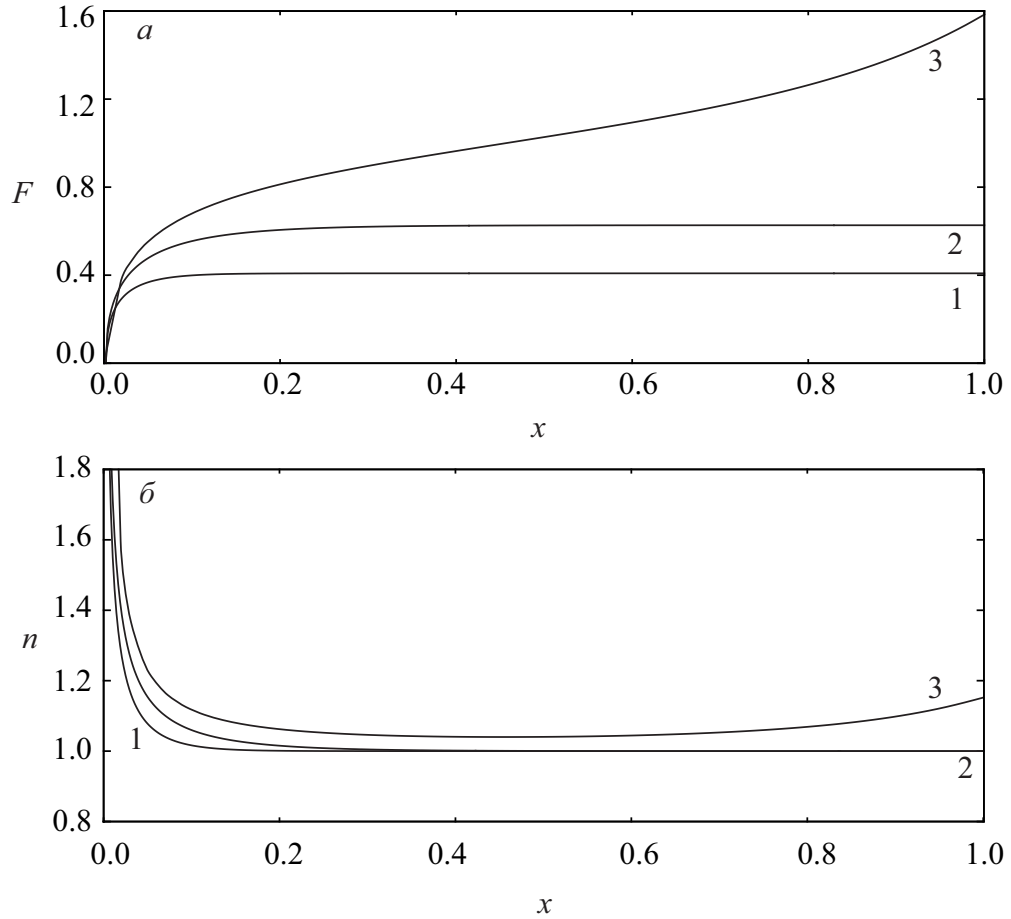


Рис. 2.2: Распределения напряжённости электрического поля  $F(x)$  (а) и концентрации носителей заряда  $n(x)$  (б), соответствующие значениям управляющего параметра  $V = 0.4$  (кривая 1),  $V = 0.6$  (кривая 2),  $V = 1.0$  (кривая 3)

мость

$$v_d(F) \approx a_0 + a_1(F - f) + O((F - f)^2), \quad (2.4)$$

$$a_0 = \frac{f}{1 + f^2} \quad a_1 = \frac{1 - f^2}{(1 + f^2)^2}.$$

С учётом соотношения (2.4), уравнение Пуассона (1.16) запишется следующим образом:

$$\frac{dF}{dx} \approx \nu \left( \frac{J_0}{a_0 + a_1(F - f)} - 1 \right), \quad (2.5)$$

где  $J_0$  определяет плотность тока. Полученное дифференциальное уравнение (2.5) может быть проинтегрировано аналитически. В результате интегрирования получим аналитическое соотношение, описывающее распределение напряжённости электрического

поля  $F(x)$

$$F(x) = \frac{1}{a_1} \left[ a_1 f + J_0 - a_0 + J_0 W \left( \frac{1}{J_0} \exp \left( -1 + \frac{a_0 - a_1(f + \nu x) + a_1 C}{J_0} \right) \right) \right], \quad (2.6)$$

где  $W(z)$  —  $W$  - функция Ламберта, значение  $J_0$  может быть найдено с учётом условия (1.19)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = f + \frac{J_0 - a_0}{a_1} = f, \quad (2.7)$$

как  $J_0 = a_0$ . Константа интегрирования  $C$  может быть найдена из граничного условия (1.19) как

$$C = \frac{a_0}{s} + \frac{a_0}{a_1} \log \left( \frac{a_1(a_0 - sf)}{s} \right). \quad (2.8)$$

Учитывая соотношения (2.7) и (2.8) получим окончательный вид зависимости (2.6)

$$F(x) = f + f \frac{1 + f^2}{1 - f^2} \times \\ \times W \left( \frac{(f^2 - 1)(s - 1 + sf^2)}{(f^2 + 1)^2 s} \exp \left( \frac{(f^2 - 1)(s\nu x + sf^3 + s\nu x f^2 + f(s - 1))}{(f^2 + 1)^2 s f} \right) \right), \quad (2.9)$$

описывающей распределение напряжённости электрического поля в стационарном состоянии исследуемой системы. Следует отметить, что вид зависимости  $F(x)$  определяется значением  $f$ , которое, в свою очередь, зависит от управляющего параметра  $V$ .

На рисунке 2.3, а проведено сопоставление зависимости  $F(x)$ , рассчитанной по формуле (2.9) (сплошные линии на графике) с зависимостью, полученной численно (точки) при различных значениях напряжения  $V$ , приложенного к структуре (кривая 1 —  $V = 0.315$ , кривая 2 —  $V = 0.409$ , кривая 3 —  $V = 0.529$ , кривая 4 —  $V = 0.699$ ). Видно, что зависимости совпадают тем лучше, чем меньше оказывается значение приложенного напряжения (кривые 1 и 2 на рисунке 2.3, а). При этом, как видно из рисунка, величина напряжённости электрического поля быстро возрастает при увеличении пространственной координаты  $x$  и остается постоянной на большей части длины системы. Таким образом, соотношение (2.3) выполняется достаточно хорошо. В то же самое время, при увеличении значения  $V$  функция  $F(x)$  монотонно возрастает на всей длине системы и условие (2.3) не выполняется. Потеря точности связана также с тем, что

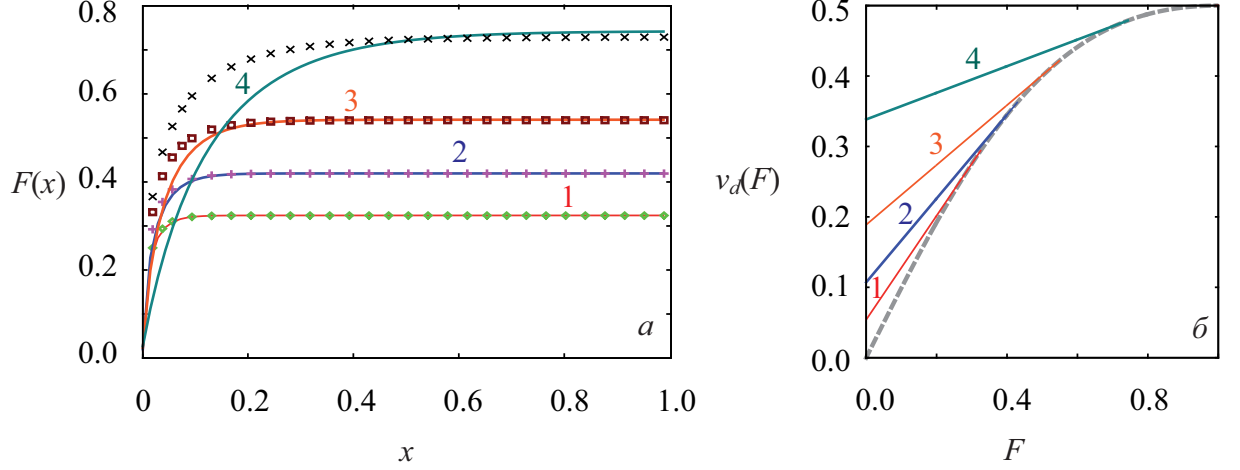


Рис. 2.3: (а) пространственные распределения напряжённости электрического поля для различных значений разности потенциалов на границах системы (кривая 1 —  $V = 0.315$ , кривая 2 —  $V = 0.409$ , кривая 3 —  $V = 0.529$ , кривая 4 —  $V = 0.699$ ). Точками показаны значения, полученные численно, сплошными линиями — значения, рассчитанные с помощью соотношения (2.9). (б) участок зависимости  $v_d(F)$  (штриховая линия) и аппроксимации, используемые при расчёте зависимости  $F(x)$  в линейной теории

используемая линейная аппроксимация зависимости  $v_d(F)$  гораздо лучше совпадает с реальной зависимостью при малых значениях приложенного напряжения. На рисунке 2.3, б изображен участок зависимости  $v_d(F)$  (штриховая линия) и линейные аппроксимации, соответствующие различным значениям напряжения (кривая 1 —  $V = 0.315$ , кривая 2 —  $V = 0.409$ , кривая 3 —  $V = 0.529$ , кривая 4 —  $V = 0.699$ ).

Полученная зависимость  $F(x)$  позволяет с помощью выражения (1.12) получить выражение для концентрации носителей зарядов  $n(x)$ , полностью описав таким образом состояние исследуемой системы.

$$n(x) = 1 + \frac{1}{\nu} \frac{\partial F}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$n(x) = \left( 1 + W \left( \frac{(f^2 - 1)(f^2 s + s - 1)}{(f^2 + 1)^2 s} \exp \left( \frac{f(f^2 - 1)(f^2 s + s - 1) + s x \nu (f^4 - 1)}{(f^2 + 1)^2 s f} \right) \right) \right)^{-1}. \quad (2.11)$$

Для анализа устойчивости стационарного состояния системы традиционно вводятся в рассмотрение возмущения. В данном случае рассмотрим пространственные распреде-

ления  $\tilde{n}(x, t)$ ,  $\tilde{F}(x, t)$ ,  $\tilde{J}(x, t)$ , которые являются возмущениями концентрации носителей заряда, напряженности электрического поля и плотности тока, соответственно.

В стационарном режиме, когда состояние системы не меняется с течением времени, возмущения эволюционируют как во времени, так и в пространстве. Закон эволюции возмущений определяется линеаризованным оператором

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial t} &= -\beta \frac{\partial \tilde{J}_i}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial x} &= \nu \tilde{n}_i, \\ \tilde{J}_i &= \tilde{n}_i v_d(F) + n \frac{dv_d(F)}{dF} \tilde{F}_i.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Система уравнений (2.12) может быть переписана в виде дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} = -v_d(f) \beta \frac{\partial \tilde{n}}{\partial x} - \frac{dv_d(f)}{dF} \beta \nu \tilde{n}\tag{2.13}$$

относительно возмущения концентрации носителей заряда. В данном уравнении было использовано предположение об однородности распределения электрического поля в системе  $F(x) = f, \forall x \in [0, 1]$ . Согласно результатам аналитического описания стационарного состояния системы, данное предположение справедливо при малых значениях управляющего параметра, однако может быть использовано для приближённой оценки значения показателя Ляпунова.

Для оценки значения показателя Ляпунова найдем решение полученного уравнения (2.13) в виде плоской волны  $\tilde{n} \approx \exp[j(\omega t + kx)]$ , где  $j = \sqrt{-1}$ . Рассмотрим получившееся дисперсионное соотношение

$$\omega = -v_d(f) \beta k + j \frac{dv_d(f)}{dF} \beta \nu.\tag{2.14}$$

С учётом выражения (2.14), значение показателя Ляпунова может быть найдено как

$$\Lambda = -\frac{\ln \|\tilde{n}(x, t)\|}{t} = -\frac{dv_d(f)}{dF} \beta \nu.\tag{2.15}$$

Учитывая зависимость значения напряжённости электрического поля  $f$  от управляющего параметра  $V^2$ , на рисунке 2.4 показана зависимость значения показателя Ляпунова от величины приложенного напряжения. Затемнённой областью показаны значения напряжения, соответствующие нестационарной динамике, критическое значение

<sup>2</sup>В рассмотренном приближении  $V = Lf$ , где  $L = 1$ .

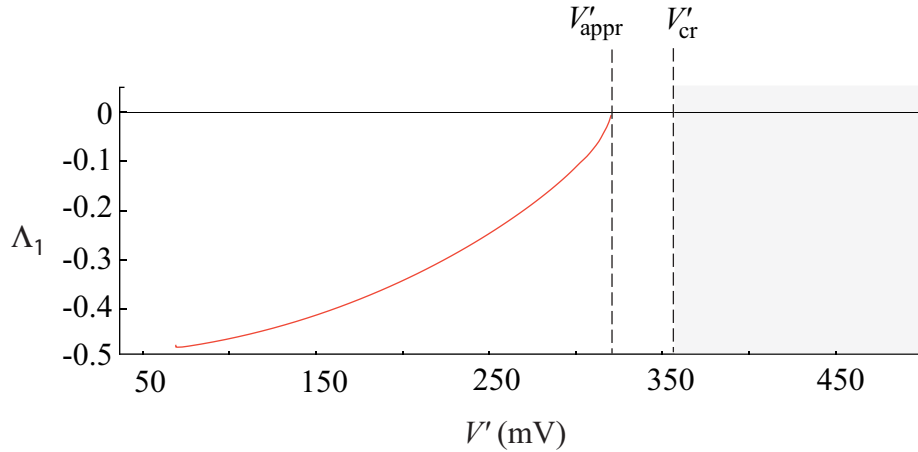


Рис. 2.4: Зависимость от времени значения старшего показателя Ляпунова, вычисленного аналитически по приближённой формуле (2.15), от величины приложенного напряжения. Величина  $V'_{appr}$  соответствует значению управляющего параметра, при котором показатель Ляпунова становится равным нулю. Величина  $V'_{cr}$  — критическому значению управляющего параметра, соответствующему развитию неустойчивости, определенному при помощи численного моделирования динамики системы

напряжения, соответствующие развитию неустойчивости, обозначено, как  $V'_{cr}$  (данное критическое значение было определено численно). Видно, что с увеличением значения управляющего параметра значение показателя Ляпунова увеличивается и достигает нуля при значении напряжения  $V'_{appr} = 320$  мВ. Полученное при помощи анализа показателя Ляпунова критическое значение напряжения достаточно хорошо согласуется с результатом численного интегрирования  $V'_{cr} = 360$  мВ. Несоответствие значений связано с использованием линейной аппроксимации зависимости дрейфовой скорости от напряжённости электрического поля и предположения об однородности распределения электрического поля в системе. Данные приближения, оказывающиеся справедливыми при малых значениях управляющего параметра, теряют точность при его приближении к критической величине.

Следует отметить, что полученное соотношение (2.15) не зависит от параметров  $\omega$  и  $k$ , характеризующих возмущение, и, следовательно, описывает коэффициент затухания любого возмущения стационарного состояния данной системы. Полученный результат хорошо согласуется со спектром показателей Ляпунова, рассчитанных в первой главе настоящего диссертационного исследования.

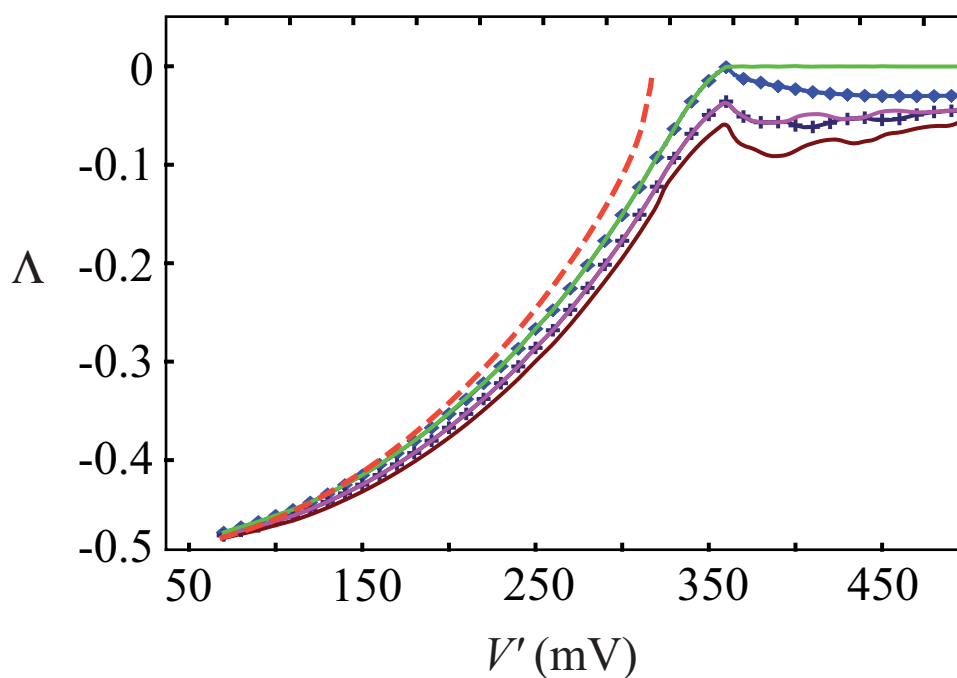


Рис. 2.5: Зависимость значения показателя Ляпунова от управляющего параметра, вычисленная аналитически при помощи соотношения (2.15) (штриховая линия), сопоставленная со значением спектра показателей Ляпунова, рассчитанных численно в первой главе диссертационной работы

На рисунке 2.5 приведено сопоставление результатов аналитической оценки значений показателей Ляпунова с результатом численного расчёта. Зависимость, рассчитанная при помощи соотношения (2.15), показана штриховой линией.

Видно, что при достаточно малых ( $V' < 150$  мВ) значениях управляющего параметра значения показателей Ляпунова, рассчитанные при помощи предложенного в первой главе численного метода, почти совпадают друг с другом и хорошо согласуются с результатами аналитической оценки. При приближении значения  $V'$  к бифуркационному значения показателей Ляпунова начинают все больше различаться (хотя и остаются близкими) и полученная приближённая зависимость (2.15) становится неточной в силу невыполнения введённых выше предположений.

Детальный анализ рисунка 2.5 показывает также, что в предгенерационном режиме значения показателей Ляпунова попарно совпадают вплоть до возникновения в системе генерации. Данный эффект не находит объяснения в рамках рассмотренной при-



ближённной аналитической теории и требует более точного анализа динамики набора возмущений.

## 2.2 Анализ динамики набора возмущений стационарного состояния распределенной системы

Для анализа динамики набора возмущений стационарного состояния системы, по аналогии с предыдущем разделом, рассмотрим опорное состояние (2.1), (2.2).

Выражая концентрацию носителей заряда через плотность тока, уравнение Пуассона может быть переписано в виде

$$\frac{dF_0}{dx} = \nu \left( \frac{J_0(1 + F_0^2)}{F_0} - 1 \right), J_0 = \text{const.} \quad (2.16)$$

Полученное соотношение определяет стационарное распределение напряжённости электрического поля в системе для заданного значения плотности тока  $J_0$ , поскольку плотность тока, согласно результатам, полученным в предыдущем разделе, оказывается не зависящей от пространственной координаты и может играть роль управляющего параметра.

Используя величину  $J_0$  в качестве управляющего параметра, рассмотрим возмущённое состояние  $(F_0 + \tilde{F}, n_0 + \tilde{n})$ , где  $F_0, n_0$  — опорное стационарное состояние,  $\tilde{F} < F_0, \tilde{n} < n_0$  — малые возмущения, пространственно-временная эволюция которых описывается линеаризованными уравнениями непрерывности

$$\frac{\partial(n_0 + \tilde{n})}{\partial t} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} ((n_0 + \tilde{n})(v_d(F_0) + v'_d(F_0)\tilde{F})) \quad (2.17)$$

и Пуассона

$$\frac{\partial(F_0 + \tilde{F})}{\partial x} = \nu(n_0 + \tilde{n} - 1). \quad (2.18)$$

Упрощая уравнения (2.17) и (2.18) и выражая  $\tilde{F}$  через  $\tilde{n}$ , получим выражение

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial t \partial x} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( 1 + \frac{dF_0}{dx} \right) v'_d(F_0) \tilde{F} + v_d(F_0) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.19)$$

описывающее пространственно-временную эволюцию возмущения напряженности электрического поля заданного стационарного состояния  $F_0(x)$ .

Для дальнейшего рассмотрения будем использовать подстановку  $\tilde{F}(x, t) = \check{F}(x)e^{\sigma t}$ , где  $\sigma = \lambda + j\omega$ ,  $j = \sqrt{-1}$ . В результате, уравнение (2.19) может быть переписано в виде обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего пространственное распределение возмущения напряженности электрического поля

$$A(F_0(x))\frac{d^2\check{F}}{dx^2} + B(\sigma, F_0(x))\frac{d\check{F}}{dx} + C(F_0(x))\check{F} = 0, \quad (2.20)$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  определяются при помощи соотношений

$$\begin{aligned} A(F_0(x)) &= v_d(F_0), \\ B(\sigma, F_0(x)) &= \frac{\sigma}{\beta} + v'_d(F_0)\frac{dF_0}{dx} + \left(1 + \frac{dF_0}{dx}\right)v'_d(F_0), \\ C(F_0(x)) &= \frac{d^2F_0}{dx^2}v'_d(F_0) + \left(1 + \frac{dF_0}{dx}\right)v''_d(F_0)\frac{dF_0}{dx}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Уравнение (2.20) дополняется граничными условиями, определяющими значения функций  $\check{F}(x)$  и  $d\check{F}/dx$  на левой границе системы ( $x = x_0$ ). Значение  $\check{F}(x_0)$  может быть задано случайно, а  $d\check{F}/dx$  должно быть вычислено при помощи линеаризованных уравнений (1.19) и (1.17) как

$$s\check{F}_e = \check{n}(x_0)v_d(F_e) + n_0(x_0)\frac{dv_d(F)}{dF}(F_e)\check{F}_e, \quad (2.22)$$

где  $F_e = F_0(x_0)$ ,  $\check{F}_e = \check{F}(x_0)$ ,  $n_0(x_0)$  и  $\check{n}(x_0)$  могут быть выражены из уравнения Пуассона и его линеаризованного аналога как

$$n_0(x_0) = \frac{1}{\nu}\frac{\partial F_0}{\partial x}(x_0) + 1 \quad (2.23)$$

и

$$\check{n}(x_0) = \frac{1}{\nu}\frac{\partial \check{F}}{\partial x}(x_0), \quad (2.24)$$

соответственно.

С учётом полученных соотношений (2.23) и (2.24), граничное условие (2.22) может быть представлено в виде

$$\frac{d\check{F}}{dx}(x_0) = \frac{\nu}{v_d(F_e)} \left[ s - v'_d(F_e) - \frac{v'_d(F_e)}{\nu}\frac{\partial F_0}{\partial x}(x_0) \right] \check{F}(x_0). \quad (2.25)$$

Таким образом, полученные выражения (2.20) и (2.21) вместе с граничным условием (2.25) определяют решение  $\check{F}(x)$  для заданного значения коэффициента  $\sigma$  и заданного стационарного распределения  $F_0(x)$ , описываемого при помощи соотношения (2.16).

Учитывая граничное условие (1.20), соответствующее постоянной разности потенциалов, приложенной к системе, рассматриваемое возмущение электрического поля должно удовлетворять условию  $\check{U}_{SL} = 0$ , где

$$\check{U}_{SL} = \int_0^1 \check{F}(x) dx. \quad (2.26)$$

Следовательно, для нахождения всего набора возмущений стационарного состояния исследуемой системы, характеризующегося значением плотности тока  $J_0$ , необходимо рассматривать уравнение

$$\check{U}_{SL}(\omega, \lambda, J_0) = 0 \quad (2.27)$$

и искать его корни на плоскости  $(\omega, \lambda)$ .

На рисунке 2.6 приведены зависимости  $\check{U}_{SL}(\omega, \lambda)$  для трёх различных значений плотности тока  $J_0$ : (a)  $J_0 = 0.52$ , (b)  $J_0 = 0.5286$ , (c)  $J_0 = 0.545$ . Видно, что функция  $\check{U}_{SL}(\omega, \lambda)$  обращается в ноль при определённых значениях  $\omega$  и  $\lambda$ , которые соответствуют частотам и коэффициентам затухания возмущений стационарного состояния.

Анализ рисунка 2.6 свидетельствует о том, что в рассматриваемой системе существуют пары возмущений, характеризующиеся одинаковым значением коэффициента нарастания/затухания и частотами с противоположными знаками, но одинаковой абсолютной величиной. На рисунке 2.6, a проиллюстрирован случай, когда значение плотности тока  $J_0$  оказывается меньше критического<sup>3</sup>. При этом, все возмущения характеризуются отрицательными коэффициентами  $\lambda$ .

Увеличение управляющего параметра до критического значения приводит к появлению возмущений, характеризующихся нулевым коэффициентом нарастания/затухания (см. рисунок 2.6, б). В случае, когда значение  $J_0$  превышает критическое значение, в системе появляются возмущения, характеризующиеся положительным значением  $\lambda$  (см. рисунок 2.6, в).

Следует отметить, что в случае малых значений приложенного напряжения и малых значений  $\lambda$ , коэффициент затухания не зависит от порядкового номера возмущения. По-

---

<sup>3</sup>Критическое значение плотности тока  $J_0^* = 0.5286$  соответствует приложенному напряжению, при котором в системе развивается неустойчивость

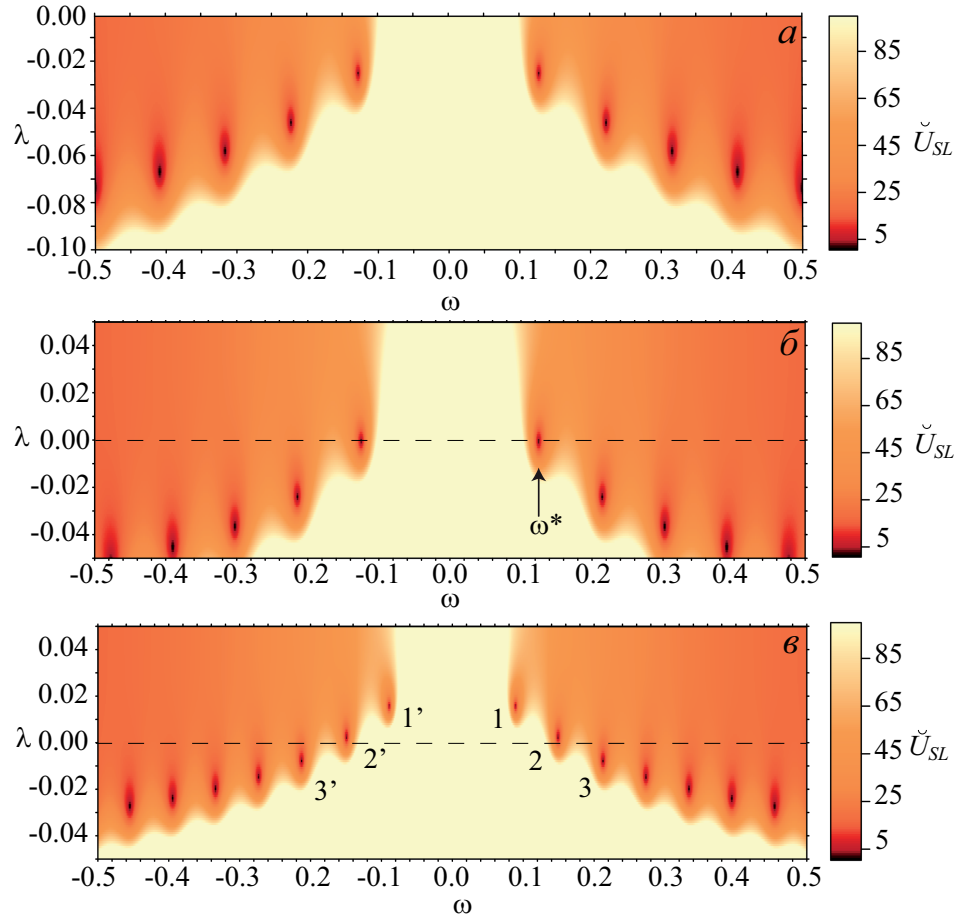


Рис. 2.6: Значения функции  $\check{U}_{SL}(\omega, \lambda, J_0)$  в зависимости от коэффициента нарастания/затухания  $\lambda$  и частоты  $\omega$  для различных значений плотности тока (а)  $J_0 = 0.52$ , (б)  $J_0 = 0.5286$ , (в)  $J_0 = 0.545$ . Штриховая линия соответствует случаю  $\lambda = 0$ .

лученный результат хорошо согласуется с аналитической оценкой старшего показателя Ляпунова, описанной в предыдущем разделе.

Подставляя соответствующие пары значений  $(\omega, \lambda)$  в уравнение (2.20) можно получить пространственные распределения соответствующих возмущений.

На рисунке 2.7 представлены пространственные распределения первых трёх возмущений напряжённости электрического поля для случая  $J_0 = 0.555$ . Порядковый номер возмущений был определен из условия  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ .

Используя разработанный подход, в настоящей диссертационной работе были вычислены зависимости коэффициентов затухания  $\lambda$ , соответствующие первым шести возмущениям  $(\omega_1, \lambda_1)$ ,  $(-\omega_1, \lambda_1)$ ,  $\dots$ ,  $(\omega_3, \lambda_3)$ ,  $(-\omega_3, \lambda_3)$ , от значения разности потенци-

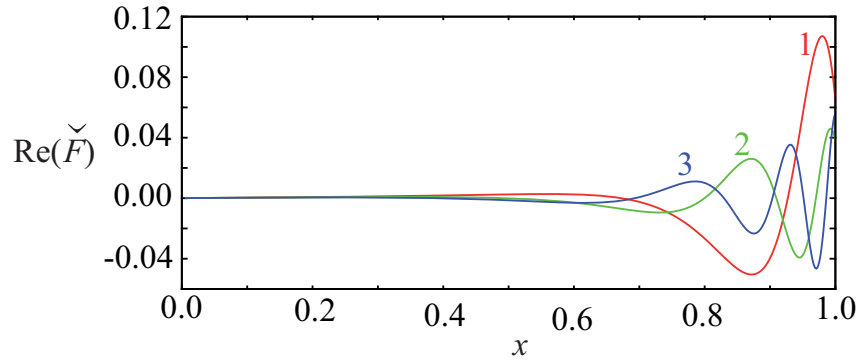


Рис. 2.7: Пространственные распределения возмущения напряжённости электрического поля, соответствующие стационарному состоянию системы. Кривые 1, 2, 3 соответствуют первому, второму и третьему возмущениям, соответственно.

алов, приложенной к системе в предгенерационном режиме<sup>4</sup>. Полученные зависимости представлены на рисунке 2.8. Для сопоставления на данном рисунке приведены зависимости шести старших показателей Ляпунова, рассчитанные численно при помощи метода, предложенного в первой главе данной диссертационной работы. Видно, что полученные значения коэффициентов  $\lambda$ , характеризующие возмущения стационарного состояния рассмотренной системы, соответствуют значениям показателей Ляпунова, рассчитанных при помощи алгоритма Бенеттина. При этом, попарное равенство значений показателей Ляпунова объясняется существованием в данной системе возмущений, характеризующихся комплексносопряженными коэффициентами распространения (одинаковым коэффициентом затухания и частотами с противоположными знаками, но одинаковой абсолютной величиной).

Согласно рисунку 2.6, в, разработанный подход позволяет анализировать поведение возмущения при значениях управляющего параметра, превышающих критическое. На рисунке 2.9 представлены зависимости (а) коэффициента нарастания  $\lambda$  и (б) частоты ( $\omega > 0$ ) возмущений от плотности тока  $J_0$  ( $J_0 > J_0^*$ ). На рисунке 2.9, б также показана зависимость частоты колебаний опорного состояния системы (точки), рассчитанная численно. Видно, что собственная частота колебаний первого возмущения точно соответствует частоте колебаний опорного состояния системы в момент возникновения генерации и остаётся близкой к ней при дальнейшем увеличении управляющего пара-

<sup>4</sup>Для сопоставления с результатами, полученными ранее в настоящей работе, в данном случае был осуществлен переход к управляющему параметру  $V$  при помощи соотношений (2.16) и (1.20)

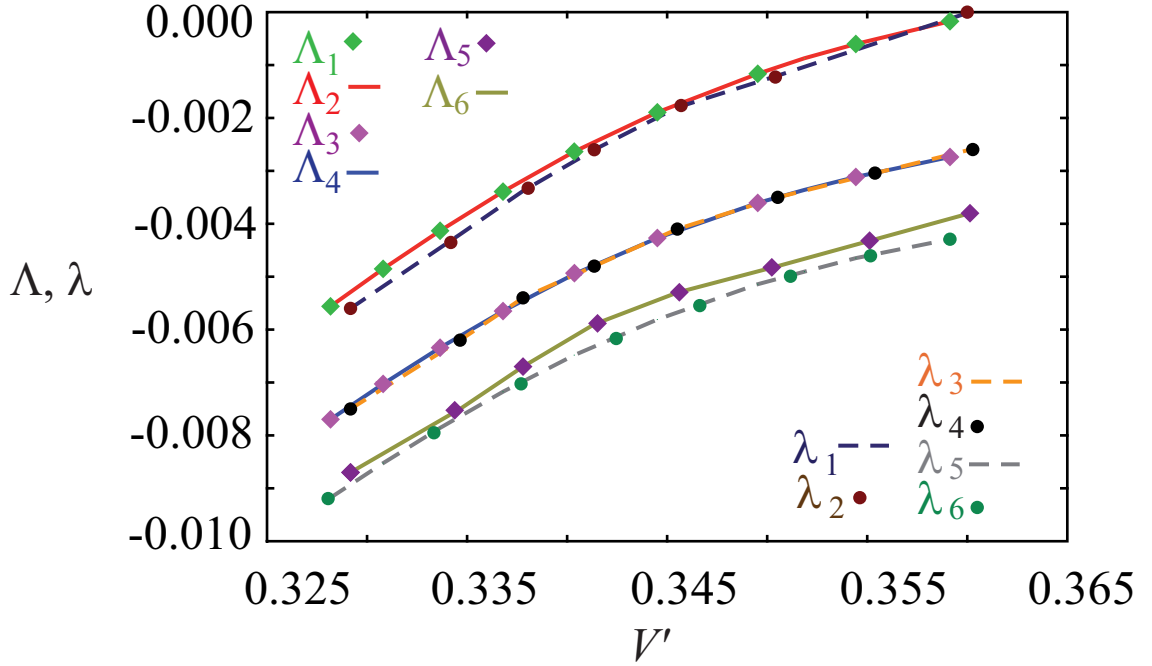


Рис. 2.8: Значения коэффициентов затухания ( $\lambda_1 \dots \lambda_6$ ) соответствующие первым шести возмущениям, частоты которых лежат как в положительной, так и в отрицательной областях ( $\omega_1, -\omega_1 \dots \omega_3, -\omega_3$ ), ( $\Lambda_1 \dots \Lambda_6$ ) — значения шести старших показателей Ляпунова, рассчитанных при помощи метода, предложенного в первой главе диссертационной работы.

метра. Полученный результат позволяет судить о том, что в периодическом режиме временная динамика первого возмущения тесно связана с динамикой опорного состояния системы.

Очевидно, что полученные в рамках данного раздела результаты анализа динамики возмущений могут быть использованы для анализа устойчивости неоднородного в пространстве состояния распределенной системы и, учитывая связь между динамикой возмущений и динамикой опорного состояния, — для изучения влияния различных параметров на частоту возникающих в системе колебаний тока.

Рассмотрим более подробно уравнения (2.20) и (2.21) вместе с граничным условием (2.25). Из уравнений следует, что пространственно-временная динамика возмущений определяется типом стационарного распределения электрического поля  $F_0(x)$  и величиной  $s$ , соответствующей проводимости контакта (1.19). В случае, когда характеристика

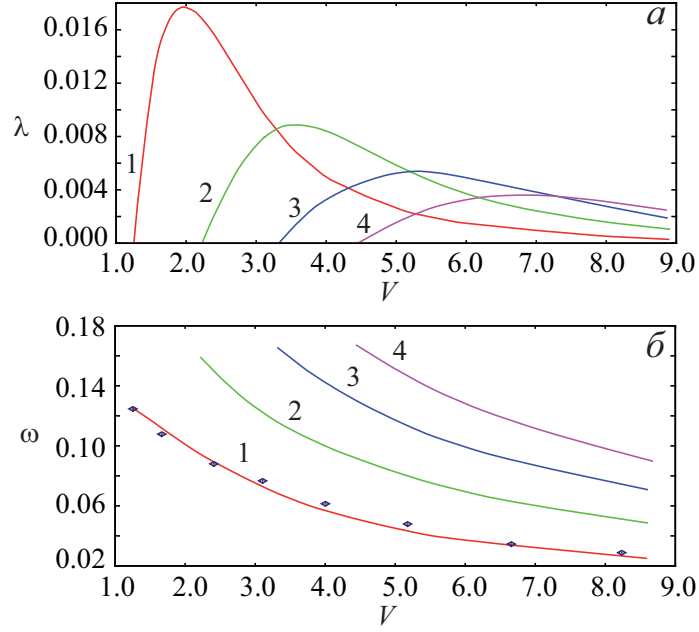


Рис. 2.9: Зависимость (а) коэффициента нарастания  $\lambda$  и (б) частоты ( $\omega > 0$ ) первых четырех возмущений от плотности тока  $J_0$  в режиме генерации

эмиттера задается при помощи функционального соотношения

$$J_0 = R(F_e), \quad (2.28)$$

где  $F_e$  — напряженность поля на эмиттере,  $J_0$  — плотность тока, граничное условие (2.25) переписется в виде

$$\frac{d\check{F}}{dx}(x_0) = \frac{\nu}{v_d(F_e)} \left[ \frac{dR}{dF}(F_e) - v'_d(F_e) - \frac{v'_d(F_e)}{\nu} \frac{\partial F_0}{\partial x}(x_0) \right] \check{F}(x_0). \quad (2.29)$$

Учитывая тот факт, что одинаковое соотношение между параметрами  $F_e$  и  $J_0$  может достигаться при различных типах зависимости (2.28), можно предположить, что эволюция возмущений одного стационарного распределения  $F_0$  может быть различна в зависимости от значения производной функции (2.28) в точке  $F_e$ . Для проверки этого предположения на рисунке 2.10, (а) рассмотрены характеристики эмиттеров, для которых  $dR/dF(F_e) = 0.5$  (1),  $dR/dF(F_e) = 0.3$  (2),  $dR/dF(F_e) = 0.1$  (3),  $dR/dF(F_e) = 0.0$  (4). Данные зависимости пересекаются в точке  $(F_e^*, J_0^*)$ . В этом случае пространственное распределение электрического поля для всех рассматриваемых эмиттеров одинаковое (тип распределения показан на врезке). На рисунке 2.10, (б) показаны коэффициен-

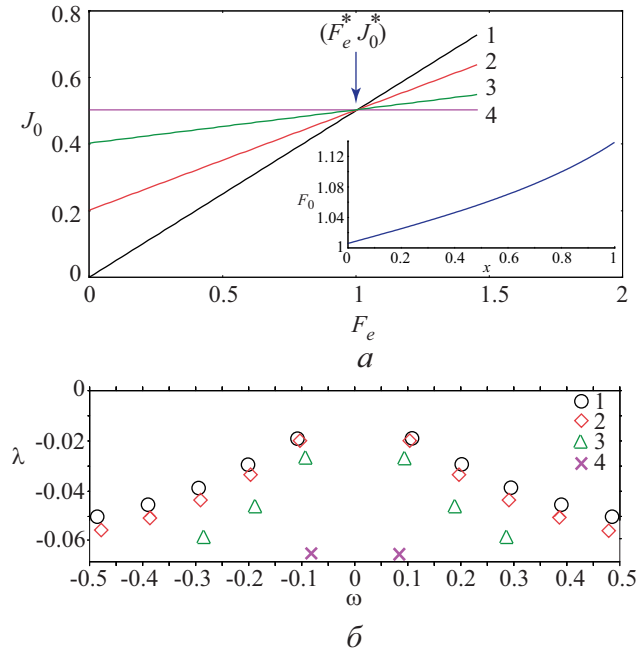


Рис. 2.10: (а) характеристики эмиттера (2.28), где  $dR/dF(F_e) = 0.5$  (1),  $dR/dF(F_e) = 0.3$  (2),  $dR/dF(F_e) = 0.1$  (3),  $dR/dF(F_e) = 0.0$  (4), (б) коэффициенты затухания  $\lambda$  и собственные частоты  $\omega$  возмущений стационарного состояния системы, соответствующие рассмотренным эмиттерам. На врезке показано пространственное распределение электрического поля  $F_0(x)$ , соответствующее значениям  $(F_e^*, J_0^*)$  (точка пересечения характеристик).

ты затухания  $\lambda$  и собственные частоты  $\omega$  возмущений стационарного состояния системы, соответствующие рассмотренным эмиттерам. Видно, что, не смотря на одинаковое распределение напряженности электрического поля, величины  $\lambda$  и  $\omega$ , соответствующие различным эмиттерам, различаются. Полученный результат свидетельствует о том, что стационарное состояние в данной системе, характеризующееся одинаковым пространственным распределением электрического поля, может быть как устойчивым, так и неустойчивым, в зависимости от типа характеристики эмиттера. На рисунке 2.11 изображены линии потери устойчивости для  $dR/dF(F_e) = 0.0$  (1) и  $dR/dF(F_e) = 0.5$  (2) на плоскости параметров  $(F_e, J_0)$  (а) и  $(V, J_0)$  (б). Видно, что существует область параметров (область, заключенная между кривыми 1 и 2), соответствующая состояниям системы, которые могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми.



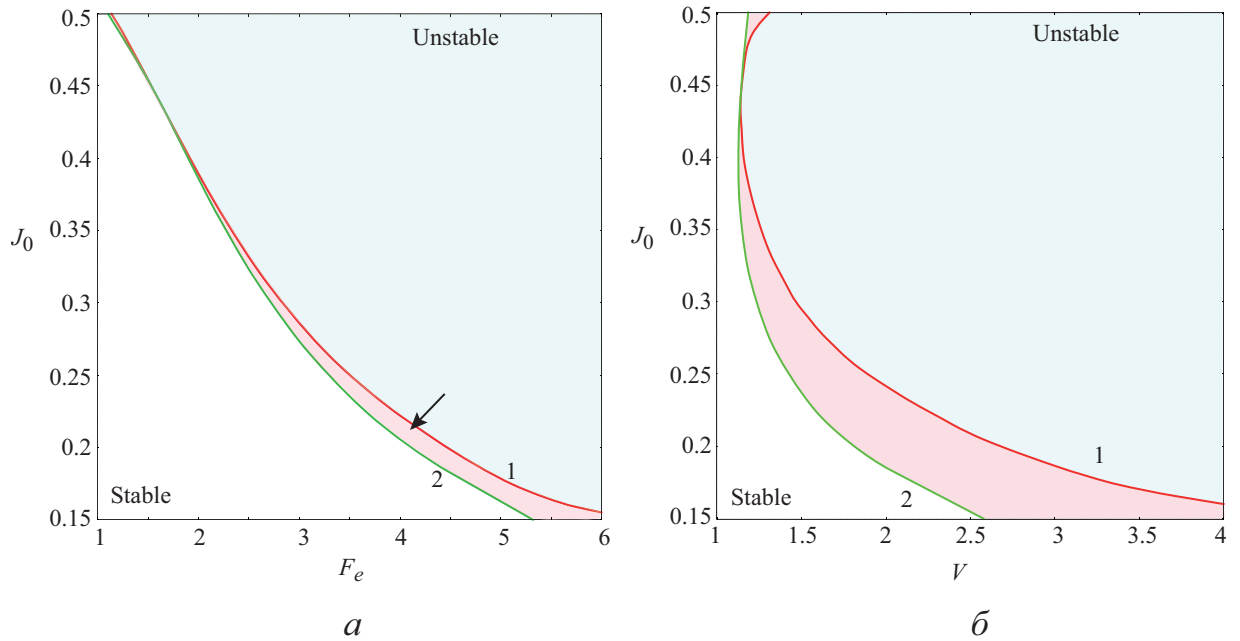


Рис. 2.11: Линия потери устойчивости в случае, когда  $dR/dF(F_e) = 0.0$  (1) и  $dR/dF(F_e) = 0.5$  (2) на плоскости параметров  $(F_e, J_0)$  (а) и  $(V, J_0)$  (б)

Результаты, полученные в рамках данного раздела находятся в хорошем согласовании с результатами аналитической оценки показателя Ляпунова, приведённой в разделе (2.1) и являются их дальнейшим развитием. В частности, полученные в ходе исследований, описанных в настоящем разделе, зависимости позволяют получить точные пространственные профили возмущений стационарного состояния и описать их эволюцию.

В результате сопоставления результатов анализа динамики набора возмущений стационарного состояния с результатом расчёта спектра показателей Ляпунова была подтверждена корректность метода, предложенного в первой главе диссертационной работы.

Кроме того, в рамках исследования динамики возмущений при значениях управляющего параметра, превышающих критическое, была обнаружена связь между частотой колебаний первого возмущения с частотой колебаний опорного состояния системы. Полученный результат имеет большое значение в контексте разработки методов, позволяющих оценивать не только значение управляющих параметров, соответствующих развитию неустойчивости, но и частоту возникающих колебательных режимов. Предложенные в данном разделе методы и полученные закономерности могут быть использованы для анализа широкого класса пространственно распределённых систем, опи-

сываемых при помощи системы уравнений непрерывности и Пуассона и характерной зависимости дрейфовой скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля.

Вместе с тем, для других моделей распределённых сред, вывод аналогичных закономерностей в рамках аналитической теории может оказаться проблематичным. В данном случае для разработки методов анализа, основанных на рассмотрении поведения набора возмущений, включая расчёт показателей Ляпунова, необходимо использовать численное моделирование.

## 2.3 Численный анализ динамики малого возмущения стационарного состояния

Наиболее простым способом численного анализа поведения возмущения опорного состояния системы является моделирование поведения (наряду с опорным) соседнего состояния  $U_1(x, t) = (n_0(x, t) + \tilde{n}(x, t), F_0(x, t) + \tilde{F}(x, t), J_0(x, t) + \tilde{J}(x, t))^T$  и отслеживание при этом динамики изначально малых отклонений  $\tilde{F}(x, t_0), \tilde{n}(x, t_0), \tilde{J}(x, t_0)$  во времени. Однако, данный подход справедлив только в том случае, когда расстояние между рассматриваемыми пространственно-временными состояниями остаётся малым, при этом в случае использования этих возмущения для расчета показателей Ляпунова необходима еще линейная динамика возмущений. Для систем с малым числом степеней свободы подобное возмущение должно быть малым по сравнению с характерными масштабами неоднородности распределения векторного поля в фазовом пространстве [2]. В большинстве случаев для описания эволюции возмущений отдаётся предпочтение использованию уравнений в вариациях, хотя вывод таких уравнений оказывается в ряде случаев достаточно сложной задачей.

Для пространственно-распределенной системы, описываемой при помощи самосогласованной системы уравнений непрерывности (1.15) и Пуассона (1.16), линеаризованный оператор эволюции был получен в первой главе настоящего диссертационного исследования (см. раздел 1.2 диссертационной работы). В рамках данного раздела при помощи самосогласованного численного интегрирования уравнений, описывающих динамику опорного состояния исследуемой системы (1.21), (1.23), (1.24) и возмущений

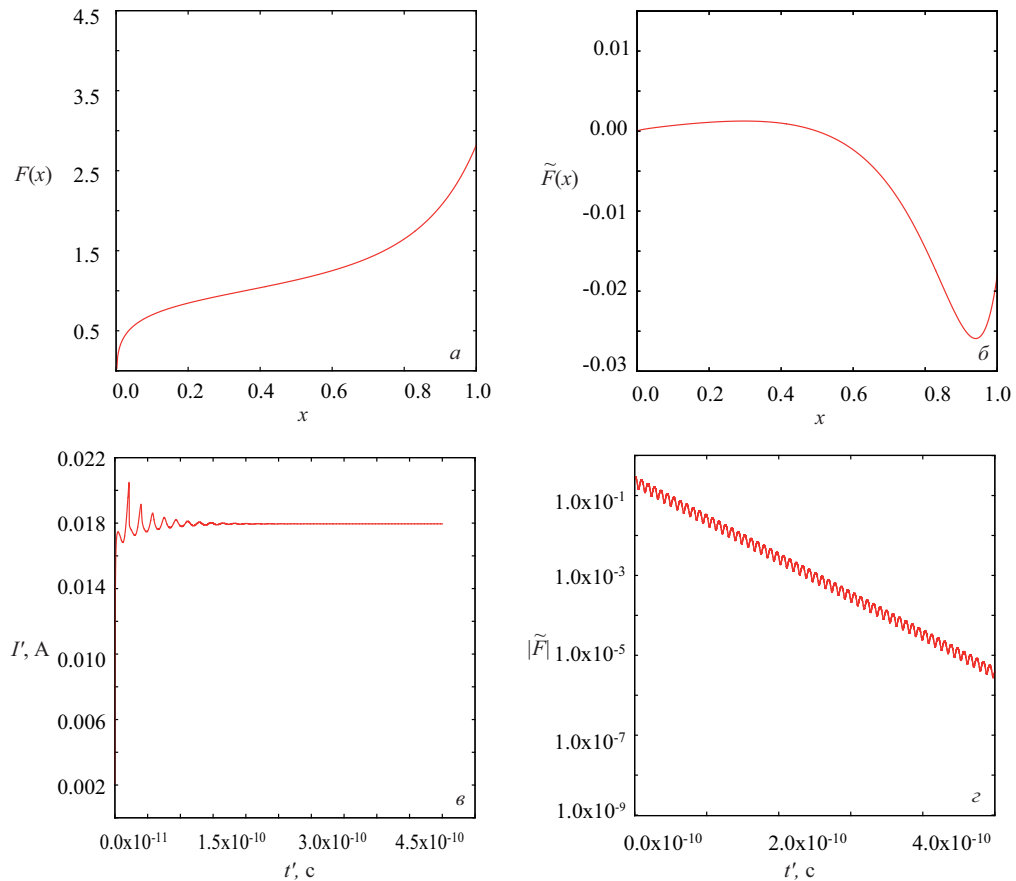


Рис. 2.12: (а) пространственные распределения напряженности электрического поля в рассматриваемой модельной системе  $F(x)$ , (б) пространственное распределения возмущения основного состояния  $\tilde{F}(x)$ , (в) зависимость от времени силы тока  $I'(t')$  и (г) модуля возмущения  $|\tilde{F}|$  (шкала  $|\tilde{F}|$  показана в логарифмическом масштабе).

(1.28), был проведен анализ поведения возмущения стационарного состояния и исследована связь между его динамикой и динамикой опорного состояния системы.

На рисунке 2.12 приведены результаты численного анализа для значения управляющего параметра  $V = 355$  мВ, оказывающегося меньше критической величины. Рисунок 2.12 а соответствует пространственному распределению напряженности электрического поля  $F(x)$ , построенному для заданного значения управляющего параметра в фиксированный момент времени. Согласно рисунку 2.12 б, сила тока, текущего через систему, после окончания переходного процесса не меняется с течением времени, а следовательно, состояние системы (2.12 а) является стационарным.

Для рассматриваемого значения приложенного напряжения на рисунке 2.12 в показано пространственное распределение возмущения  $\tilde{F}(x, t)$  для фиксированного момента

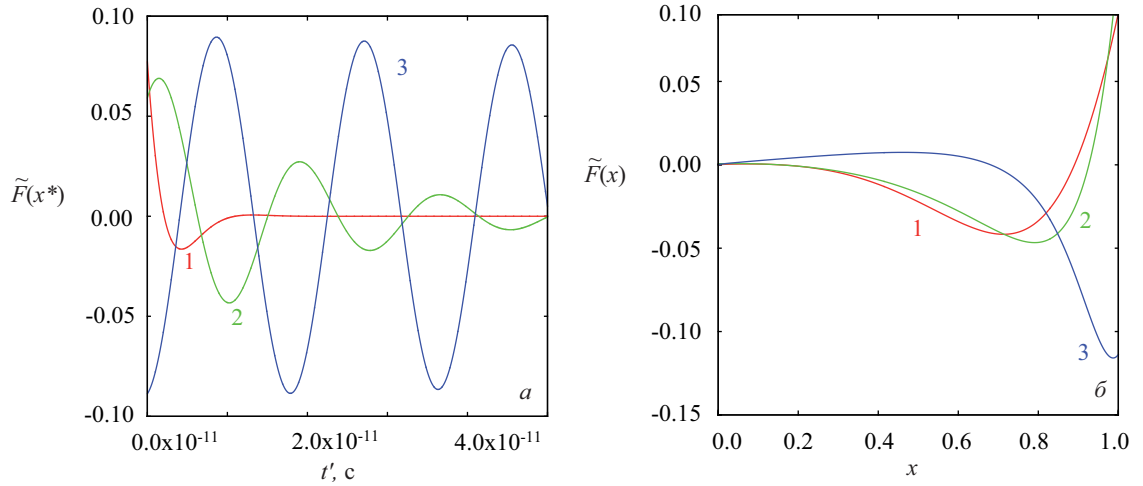


Рис. 2.13: (а) Зависимость от времени амплитуды колебания возмущений в фиксированной точке пространства  $F(x^*)$ ,  $x^* = 0.83$  и (б) моментальные пространственные распределения данных возмущений. кривые 1,2,3 соответствуют значению управляющего параметра  $V = 320$  мВ,  $V = 350$  мВ,  $V = 359$  мВ

времени. На рисунке 2.12 *г* изображена в логарифмическом масштабе зависимость модуля возмущения  $|\tilde{F}|$  от времени, где

$$|\tilde{F}| = \sqrt{\int_0^1 \tilde{F}^2(x) dx}. \quad (2.30)$$

Полученный результат свидетельствует о том, что возмущение эволюционирует согласно закону  $\tilde{F}(x, t) \approx e^{\lambda t}$ , где  $\lambda$  представляет собой коэффициент нарастания/затухания возмущения.

При увеличении напряжения, приложенного к системе, очевидно, что коэффициент затухания возмущения уменьшается и обращается в ноль при достижении величиной  $V$  критического значения. Подобная ситуация проиллюстрирована на рисунке 2.13 *а*, полученном в рамках численного моделирования. На данном рисунке изображены зависимости от времени амплитуды колебаний возмущения в фиксированной точке пространства  $x^* = 0.83$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям приложенного напряжения  $V = 320$  мВ,  $V = 350$  мВ и  $V = 359$  мВ, соответственно. Видно, что увеличение напряжения приводит к уменьшению абсолютной величины коэффициента  $\lambda$ . В частности, временная зависимость (3), полученная при значении напряжения

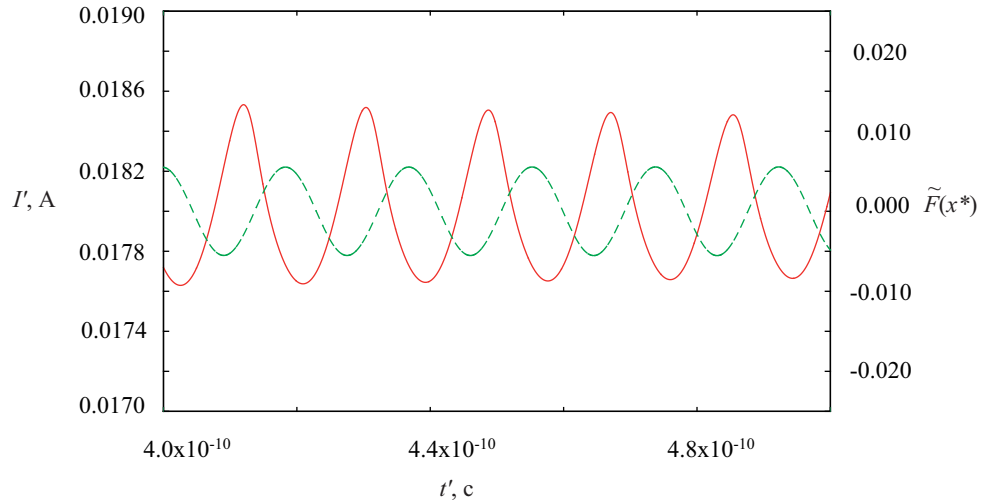


Рис. 2.14: Зависимость от времени величины плотности тока  $J_0$  и модуля возмущения  $\tilde{F}(x^*)$  в фиксированной точке пространства  $x^* = 0.83$  при значении управляющего параметра  $V = 359$  мВ

$V = 359$  мВ, практически не затухает, что свидетельствует о возникновении в системе периодических колебаний.

Учитывая результаты анализа динамики возмущения, представленные в разделе (2.2) настоящей диссертационной работы, можно предположить, что колебательная динамика возмущения, продемонстрированная на рисунке 2.13, обусловлена его собственной частотой  $\omega$ , которая в момент возникновения неустойчивости оказывается равной частоте колебаний опорного состояния. Для подтверждения данного предположения в рамках численного моделирования на рисунке 2.14 сопоставлена зависимость от времени плотности тока (сплошная линия), характеризующего состояние системы, и модуля возмущения  $\tilde{F}(x^*)$  напряженности электрического поля в фиксированной точке пространства  $x^* = 0.83$  при значении управляющего параметра  $V = 359$  мВ. Видно, что частоты колебаний рассмотренных величин совпадают.

Таким образом, в рамках данного раздела был проведен численный анализ пространственно-временной динамики возмущения стационарного состояния исследуемой системы и подтверждена связь между частотой колебаний первого возмущения и частотой колебаний состояния системы.

## 2.4 Выводы ко второй главе

Вторая глава диссертационной работы была посвящена аналитическому и численному исследованию поведения возмущений стационарного состояния пространственно-распределенной системы и выявлению закономерностей пространственно-временной динамики возмущений опорного состояния при приближении управляющего параметра к критическому (бифуркационному) значению, соответствующему возникновению неустойчивости.

На примере модельной пространственно-распределенной системы была продемонстрирована возможность аналитической оценки старшего показателя Ляпунова в случае, когда стационарное состояние исследуемой системы характеризуется близкими к однородному распределениями напряженности электрического поля и концентрации носителей заряда. Было показано, что при малых значениях управляющего параметра (напряжения, приложенного к рассматриваемой системе) все возмущения, существующие в исследуемой системе, характеризуются одинаковым коэффициентом затухания.

Помимо приближённой аналитической оценки старшего показателя Ляпунова в рамках данной главы был разработан метод, позволяющий описать пространственные распределения всего набора возмущений стационарного состояния и вычислить их собственные частоты колебаний и коэффициенты нарастания/затухания, не прибегая к численному интегрированию пространственно-временной динамики системы. В результате применения метода было показано, что в данной пространственно-распределенной системе существуют пары возмущений, характеризующиеся одинаковым значением коэффициента затухания и частотами с противоположными знаками, но одинаковой абсолютной величиной, и, таким образом, объяснено наличие попарно равных значений показателей Ляпунова.

В результате анализа поведения возмущений стационарного состояния исследуемой распределённой системы была обнаружена связь между частотой колебаний первого возмущения и частотой колебаний состояния системы в нестационарном режиме. Обнаруженная связь была также подтверждена в рамках численного моделирования динамики возмущений стационарного состояния исследуемой системы.

## Глава 3

# Анализ динамических режимов в эталонных пространственно-распределенных системах пучково-плазменной и электронно-волновой природы

[64, 66, 68, 71, 73]

В данной главе диссертационной работы в качестве объектов для исследования используются лампа обратной волны (ЛОВ), являющаяся базовой моделью, описывающей электронно-волновое взаимодействие [107–111], и диод Пирса — эталонная модель пучково-плазменной системы [6, 81, 112, 113]. Разделы 3.1 и 3.2 описывают расчет и применение показателей Ляпунова для анализа автономной динамики данных распределённых систем. В разделе 3.3 проиллюстрировано применение показателей Ляпунова для анализа связанных пространственно-распределенных систем на примере односторонне и взаимно связанных диодов Пирса, находящихся в режиме хаотической генерации. В заключении рассматривается вопрос выбора состояния пространственно-распределенных систем для расчета спектра показателей Ляпунова.

### 3.1 Анализ динамики ЛОВ с поперечным полем – эталонной модели электронно-волновой среды

Электронно-волновая система с обратной электромагнитной волной и кубической нелинейностью (ЛОВ с поперечным полем) [107–109] является простой моделью СВЧ-генератора с обратной волной [114–117]. Данная модель описывает резонансное взаимодействие электронного потока с обратной электромагнитной волной в замедляющей системе [5].

Изучение нестационарной динамики данной системы с помощью показателей Ляпунова является интересным из-за возможности реализации в ней сложных режимов [118–123]. В частности, наряду с хаотической динамикой, транспорт заряда в ЛОВ может демонстрировать гиперхаотический режим, которому соответствует наличие нескольких положительных показателей Ляпунова [16].

Пространственно-временная динамика ЛОВ описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных, записанных относительно безразмерных величин  $F(x, t)$  и  $I(x, t)$ , характеризующих распределение напряжённости электрического поля и силы тока в пространстве взаимодействия.

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial x} = -AI, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} + j | I |^2 I = -AF. \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1)–(3.2) дополняются граничными условиями

$$F(L, t) = 0, \quad I(1, t) = 0. \quad (3.3)$$

Данные уравнения представляют собой универсальную математическую модель, подходящую для описания процессов транспорта заряда в широком классе реальных устройств СВЧ-электроники [117, 119, 122].

Нелинейная динамика системы ЛОВ с поперечным полем усложняется с увеличением ее единственного управляющего параметра  $A$ , который характеризует безразмерную длину системы. На рисунке 3.1 представлены временные реализации выходного поля  $F(x = 0, t)$ , соответствующие различным режимам динамики, наблюдающимся в исследуемой системе в зависимости от величины управляющего параметра. При значениях



параметра  $A < 1.8$  в системе реализуется стационарное состояние (рис. 3.1 *a*), которому соответствует неменяющееся во времени распределение  $F(x)$ .

При  $A > 1.8$  стационарное состояние теряет устойчивость и в системе возбуждается одночастотный режим автоколебаний (рис. 3.1 *б*). При дальнейшем увеличении параметра  $A$  динамика системы усложняется. Временная зависимость имеет вид последовательности мощных импульсов с мелкими осцилляциями между ними, возникающих в результате возникновения сложных пространственных распределений  $F(x, t)$  и  $I(x, t)$ , однако колебания остаются периодическими.

Наконец, при  $A > 4.0$  возбуждаются хаотические автоколебания. При этом размерность аттрактора в фазовом пространстве растет с увеличением параметра  $A$  и спектр процесса становится шире [6].

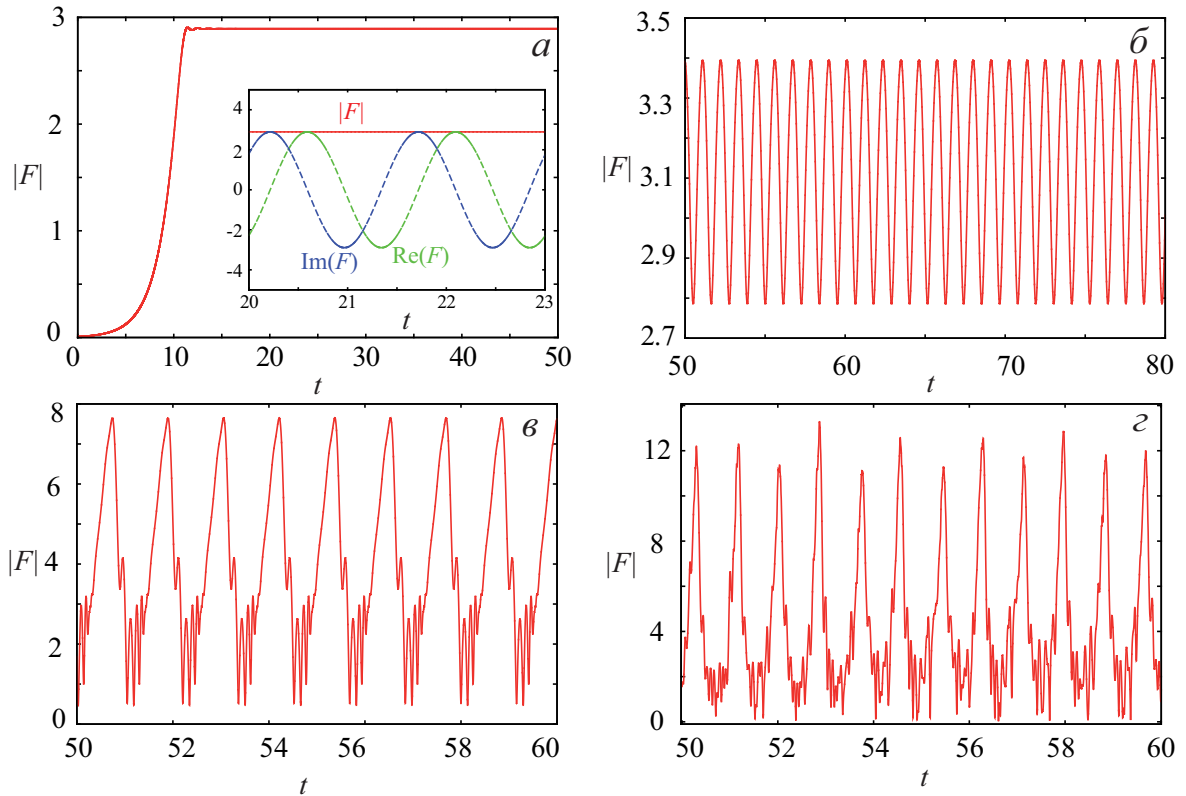


Рис. 3.1: Временные реализации выходного поля  $F(x = 0, t)$ , соответствующие стационарному состоянию  $A = 1.75$  (*a*), режиму периодических колебаний при значении параметра  $A = 1.83$  и  $A = 2.5$  (*б*), (*в*) и режиму хаотических автоколебаний  $A = 4.5$  (*г*)

Таким образом, ЛОВ с поперечным полем является весьма важным объектом для исследования как периодических, так и сложных хаотических режимов, таких как ги-

перхаос. При этом можно предположить, что спектр показателей Ляпунова данной системы может содержать больше двух положительных показателей.

Учитывая оператор эволюции (3.1)–(3.2), состояние исследуемой системы было определено как

$$\mathbf{U} = (F(x, t), I(x, t))^T. \quad (3.4)$$

Для нахождения данного состояния в каждый момент времени уравнения (3.1)–(3.2) численно интегрировались с использованием метода Лакса-Вендроффа и метода Рунги-Кутты третьего порядка, соответственно. При этом параметры пространственной и временной дискретизации в настоящей работе были выбраны как  $\Delta x = 0.004$  и  $\Delta t = 0.002$ .

Для расчета спектра показателей Ляпунова величина (3.4) играла роль опорного состояния, относительно которого рассматривалась эволюция малых возмущений

$$\mathbf{V}_i = (\xi_i^F(x, t), \xi_i^I(x, t))^T. \quad (3.5)$$

Для описания эволюции возмущений была проведена линеаризация оператора (3.1)–(3.2) в окрестности опорной траектории и получены уравнения

$$\frac{\partial \xi_i^F}{\partial t} - \frac{\partial \xi_i^F}{\partial x} = -A \xi_i^I, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \xi_i^I}{\partial x} + 2j |I|^2 \xi_i^{I*} + j I^2 \xi_i^I = -A \xi_i^F \quad (3.7)$$

с граничными условиями

$$F(L, t) + \xi_i^F(L, t) = 0, \quad I(1, t) + \xi_i^I(1, t) = 0. \quad (3.8)$$

Таким образом, решая уравнения (3.1)–(3.2) и (3.6)–(3.7), и применяя процедуру ортогонализации Грамма-Шмидта, значения Ляпуновских сумм и показателей Ляпунова были вычислены с помощью соотношений (1.9) и (1.10) соответственно.

На рисунке 3.2 показаны зависимости первых четырех и десятого показателя Ляпунова от величины управляющего параметра  $A$ , характеризующего степень возбуждения системы. Как показали результаты проведенных исследований, динамика ЛОВ с поперечным полем при рассматриваемых значениях управляющего параметра может характеризоваться несколькими положительными показателями Ляпунова [64]. Обнаружено, что в рассматриваемом диапазоне значений управляющего параметра может

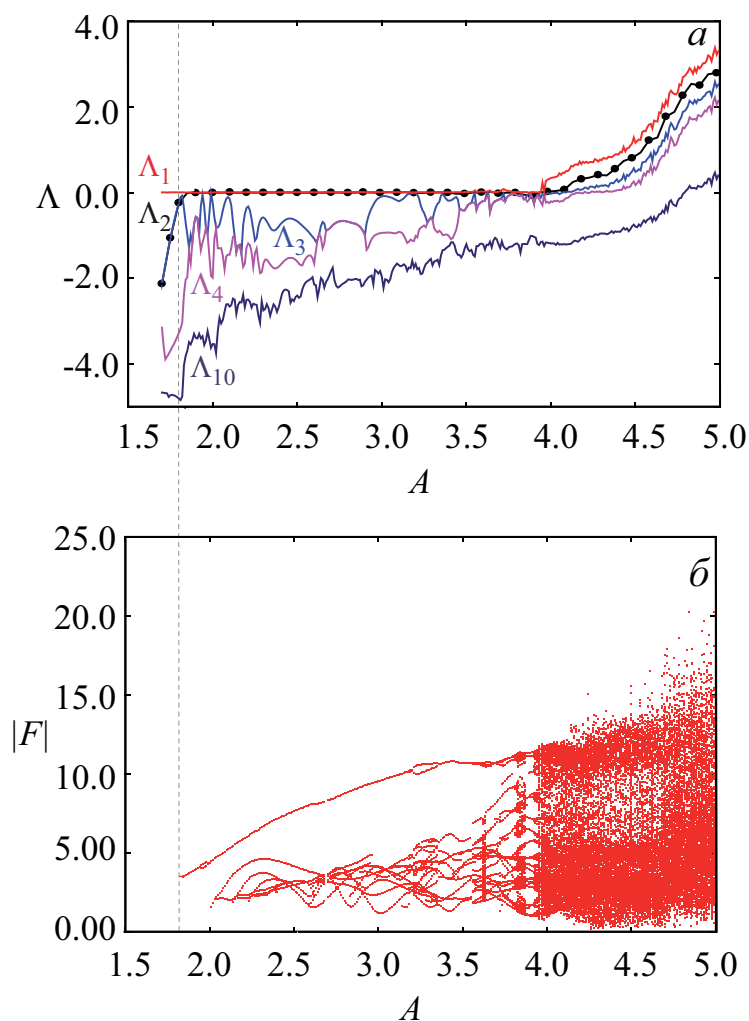


Рис. 3.2: (а) Зависимость первых четырёх и десятого показателей Ляпунова и (б) бифуркационная диаграмма колебаний абсолютной величины выходного поля в лампе обратной волны с поперечным полем от бифуркационного параметра  $A$

быть до десяти положительных показателей Ляпунова в спектре, однако представление всех десяти показателей на графике ухудшает визуальное восприятие результатов. Поэтому на рисунке 3.2 представлены зависимости только первых четырех показателей Ляпунова, достаточных для описания периодических режимов динамики, и десятого показателя, значение которого становится положительным при  $A \approx 4.75$ , указывая на сложность колебательного режима.

Для сопоставления значений показателей Ляпунова с режимами динамики системы на рисунке представлена также бифуркационная диаграмма колебаний модуля комплекснозначной величины выходного поля. Из рисунка видно, что значениям управля-

ющего параметра  $A < 1.83$  соответствует наличие старшего нулевого показателя Ляпунова, в то время как бифуркационная диаграмма в данной точке свидетельствует об отсутствии колебаний в системе. Данный эффект связан с тем, что, несмотря на постоянный во времени модуль комплекснозначной величины, действительная и мнимая части совершают противофазные колебания (рис. 3.1 *а*). При увеличении управляющего параметра стационарное состояние теряет устойчивость и в системе возникают периодические автоколебания (рис. 3.1 *б*). В спектре появляется второй нулевой показатель Ляпунова, отвечающий за сдвиг опорного состояния вдоль оси времени. Дальнейшее увеличение параметра  $A$  приводит к возникновению в системе хаотических автоколебаний (рис. 3.1 *г*). Следует отметить, что при достаточно больших значениях параметра  $A$  в системе возможен гиперхаотический режим колебаний, чему соответствует наличие нескольких положительных показателей Ляпунова. На рисунке 3.1 *г* приведена временная реализация выходного поля, соответствующая гиперхаотическому режиму.

Рисунок 3.2 иллюстрирует соответствие между полученными значениями спектра показателей Ляпунова и типом пространственно-временной динамики системы. При этом, помимо четкого детектирования переходов между качественно-различными типами динамики, в данном разделе показано, что в случае, когда состояние пространственно-распределенной системы определяется комплекснозначной величиной, спектр показателей Ляпунова в периодическом режиме может содержать два нулевых показателя, соответствующих колебаниям действительной и мнимой части комплекснозначной величины и ее модуля. Важно также отметить, что в спектре показателей Ляпунова при определенных значениях параметра  $A$  существуют пары одинаковых показателей, причина возникновения которых была описана во второй главе диссертационной работы.

## **3.2 Анализ динамики диода-Пирса – эталонной модели пучково-плазменной системы**

Диод Пирса является классической моделью физической электроники, которая позволяет при анализе некоторых режимов колебаний в электронном потоке ограничиться гидродинамическим описанием [6, 81, 112, 113]. Эта модель интересна тем, что, несмотря

на относительную простоту, она демонстрирует многие нелинейные явления, включая динамический хаос, классический сценарий перехода к хаотической динамике, перестройку хаотического аттрактора с изменением управляющего параметра, синхронизацию хаотических колебаний и др. Все это делает диод Пирса удобной базовой моделью пучково-плазменной системы для теоретического и численного анализа сложного поведения в потоках заряженных частиц со сверхкритическим током, для применения методов нелинейной динамики с целью анализа сложного поведения пространственно-распределенных автоколебательных систем, а также изучения методов управления сложными пространственно-временными колебаниями.

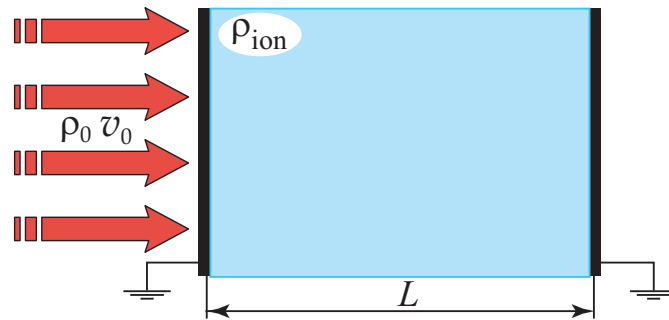


Рис. 3.3: Схематическое изображение диода Пирса

Схематически диод Пирса представляет из себя две бесконечных плоских параллельных сетки, пронизываемые моноэнергетическим на входе электронным потоком (рисунок 3.3). Сетки, ограничивающие систему, заземлены и находятся на расстояние  $L$  друг от друга. Плотность заряда  $\rho_0$  и скорость  $v_0$  на входе в систему поддерживаются постоянными. Пространство между сетками равномерно заполнено нейтрализующим фоном неподвижных ионов с плотностью заряда  $|\rho_i/\rho_0| = 1$ .

Динамика подобной системы определяется единственным управляющим параметром

$$\alpha = \frac{\omega_p L}{v_0} \quad (3.9)$$

называемым параметром Пирса ( $\omega_p$  – плазменная частота электронного пучка). При  $\alpha > \pi$  в системе развивается неустойчивость, приводящая к образованию виртуального катода, от которого часть электронного потока отражается обратно к плоскости инжекции. Вместе с тем, при величине  $\alpha \sim 3\pi$  возможно прохождение электронного потока через диодный промежуток без образования виртуального катода. В последнем

случае рост неустойчивости Пирса ограничивается нелинейностью в системе, и в диоде наблюдается режим полного прохождения потока, и существует возможность описания пролетного промежутка со сверхкритическим током в рамках гидродинамического подхода. В тех случаях, когда в электронном потоке присутствуют отражения частиц, применение подобного описания неправомерно, однако существует ряд задач, для которых гидродинамический подход является адекватным и оптимальным.

Динамика электронного потока в диоде Пирса в рамках гидродинамического приближения описывается самосогласованной системой уравнений движения, непрерывности и Пуассона относительно безразмерных переменных [124]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\alpha^2(\rho - 1), \quad (3.12)$$

с граничными условиями:

$$v(0, t) = 1, \quad \rho(0, t) = 1, \quad \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0. \quad (3.13)$$

В уравнениях (3.10)–(3.12) гидродинамической теории диода Пирса использованы безразмерные переменные потенциала поля пространственного заряда  $\varphi$ , плотности заряда  $\rho$ , скорость электронного потока  $v$ , пространственной координаты  $x$  и времени  $t$ , которые связаны с соответствующими размерными переменными соотношениями  $\varphi' = (v_0^2/\eta)\varphi$ ,  $\rho' = \rho_0\rho$ ,  $v' = v_0v$ ,  $x' = Lx$ ,  $t' = (L/v_0)t$ , где штрихом обозначены размерные величины,  $\eta$  – удельный заряд электрона.

Система уравнений (3.10) – (3.12) с граничными и начальными условиями (3.13) описывает динамику свободного диода Пирса и может быть решена с помощью численных методов в конечно-разностном представлении [5].

В настоящей работе уравнения непрерывности (3.11) и движения (3.12) решались с помощью схемы с разностями против потока, а уравнение Пуассона (3.10) – методом распространения вектора ошибки [125]. Основные параметры численной схемы, такие как шаг пространственной сетки  $\Delta x$  и шаг по времени  $\Delta t$ , были выбраны как  $\Delta x = 0.005$  и  $\Delta t = 0.003$ .

Для расчёта спектра показателей Ляпунова в качестве состояния диода Пирса использовалась вектор-функция

$$\mathbf{U} = (\rho(x, t), v(x, t), \varphi(x, t))^T, \quad (3.14)$$

Аналогично, возмущения  $\mathbf{V}_i$  данного состояния были определены как

$$\mathbf{V}_i = (\xi_i^\rho(x, t), \xi_i^v(x, t), \xi_i^\varphi(x, t))^T, \quad (3.15)$$

Пространственно-временная динамика набора возмущений описывалась при помощи оператора эволюции

$$\partial \hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V}_i) = 0, \quad (3.16)$$

полученного при помощи линеаризации уравнений (3.10), (3.11), (3.12) исходного оператора вблизи состояния  $\mathbf{U}(x, t)$ .

$$\frac{\partial^2 \xi_i^\varphi}{\partial x^2} = -\alpha^2 \xi_i^\rho,$$

$$\frac{\partial \xi_i^\rho}{\partial t} = -\xi_i^\rho \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial \xi_i^\rho}{\partial x} - \xi_i^v \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial \xi_i^v}{\partial x}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \xi_i^v}{\partial t} = -v \frac{\partial \xi_i^v}{\partial x} - \xi_i^v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \xi_i^\varphi}{\partial x}.$$

Соотношения, определяющие поведение возмущений на границах системы, были получены из условий

$$\begin{aligned} \rho(0, t) + \xi_i^\rho(0, t) &= 1, \\ v(0, t) + \xi_i^v(0, t) &= 1, \\ \varphi(0, t) + \xi_i^\varphi(0, t) &= 0, \\ \varphi(1, t) + \xi_i^\varphi(1, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

как

$$\begin{aligned} \xi_i^\rho(0, t) &= 0, \\ \xi_i^v(0, t) &= 0, \\ \xi_i^\varphi(0, t) &= 0, \\ \xi_i^\varphi(1, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

С учетом введенных в рассмотрение состояния  $\mathbf{U}$ , возмущений  $\mathbf{V}_i$ , оператора эволюции  $\hat{L}(\mathbf{U})$ , в качестве которого выступает система уравнений (3.10)–(3.12) с граничными и начальными условиями (3.13), и линеаризованного оператора  $\partial\hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ , определяемого соотношениями (3.17)–(3.31), спектр показателей Ляпунова для данной пространственно-распределенной системы был найден согласно методу, описанному в первой главе диссертационной работы.

Поведение рассматриваемой пространственно-распределенной системы со сверхкритическим током определяется, как было отмечено выше, всего одним безразмерным параметром — параметром Пирса  $\alpha$ . В рамках гидродинамического приближения в автономной модели диода Пирса в узкой области значений управляющего параметра  $\alpha$ , соответствующей динамике электронного потока без отражений, система демонстрирует хаотические колебания [5]. Возникновению хаотической динамики предшествует последовательность бифуркаций удвоения периода. При уменьшении параметра  $\alpha$  от  $2.88\pi$  до  $2.862\pi$  рассматриваемая модель демонстрирует переход от регулярной динамики к хаотической через каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся установлением слабохаотических колебаний с четко выраженным временным масштабом. С дальнейшим уменьшением величины управляющего параметра  $\alpha$  происходит перестройка хаотических колебаний в системе: колебания существенно усложняются, исчезает четко выраженный временной масштаб колебаний, усложняется спектральный состав колебаний электронного потока. Переход от регулярных к хаотическим режимам хорошо виден на бифуркационной диаграмме (рис. 3.4, б), построенной по временным реализациям колебаний плотности пространственного заряда в точке  $x = 0.2$  пространства взаимодействия.

Вместе с бифуркационной диаграммой на рисунке 3.4 показаны зависимости от управляющего параметра четырех старших показателей Ляпунова. Из приведенного рисунка отчетливо видно, что полученный спектр показателей Ляпунова позволяет четко диагностировать динамический режим, наблюдающийся в системе. В спектре показателей Ляпунова для всех значений управляющего параметра  $\alpha$  присутствует один нулевой показатель, который соответствует сдвигу опорного состояния вдоль оси времени. В области периодических колебаний  $\alpha \lesssim 2.862$  этот нулевой показатель Ляпунова является максимальным, что свидетельствует об отсутствии в системе хаотической



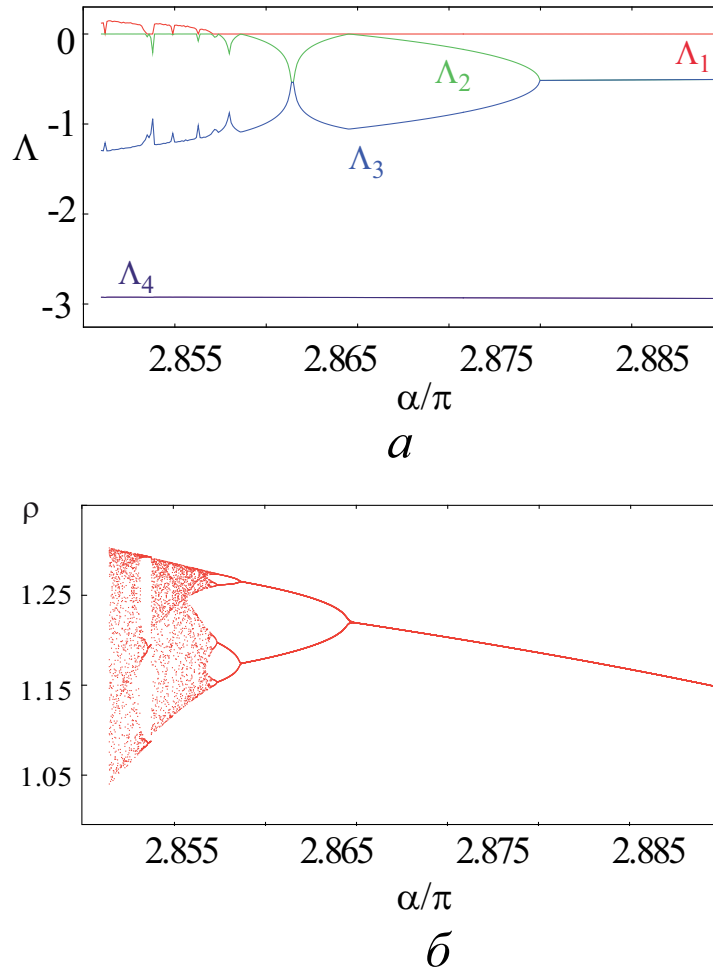


Рис. 3.4: (а) Зависимость четырех старших показателя Ляпунова и (б) бифуркационная диаграмма колебаний в автономном диоде Пирса при изменении параметра  $\alpha$

динамики. В то же самое время, видно, что в точках бифуркаций удвоения периода (например,  $\alpha \simeq 2.87$ ) второй показатель Ляпунова  $\Lambda_2$  также становится равным нулю, что свидетельствует о качественных изменениях, происходящих в поведении системы при изменении управляющего параметра.

При дальнейшем уменьшении параметра  $\alpha$  (см. рис. 3.4) старший показатель Ляпунова  $\Lambda_1$  становится положительным, что является свидетельством перехода к хаотическим колебаниям. Второй по величине показатель Ляпунова по-прежнему остается равным нулю ( $\Lambda_2 = 0$ ), а все остальные показатели являются отрицательными. В окнах периодичности, где реализуются периодические колебания, положительный показатель Ляпунова снова становится отрицательным, максимальное значение в этом случае имеет нулевой показатель Ляпунова.

Важно отметить, что в случае хаотических колебаний система характеризуется всего лишь одним положительным показателем Ляпунова, в отличие от ЛОВ с поперечным полем, рассмотренной ранее в данной главе диссертационной работы. Наличие только одного положительного показателя Ляпунова свидетельствует о том, что несмотря на пространственную распределенность системы, хаотические колебания, реализующиеся в ней, достаточно просты. По всей видимости, именно благодаря этому оказалось возможным построить конечномерную модель динамики электронного потока в диоде Пирса с помощью метода Галеркина [125], представляющую собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений [5].

Результаты, полученные в разделах 3.1 и 3.2 настоящей главы диссертационной работы позволяют судить о высокой эффективности использования показателей Ляпунова для анализа качественных изменений в динамике и количественной оценки сложности нерегулярных колебательных режимов в автономных распределенных системах электронной природы. Однако, область возможного применения спектра показателей Ляпунова не ограничивается только одной пространственно-распределенной системой. Показатели Ляпунова играют важную роль при изучении явления синхронизации, с их помощью можно диагностировать возникновение того или иного типа синхронного поведения связанных систем, демонстрирующих хаотическую динамику. Поэтому в следующем разделе будет рассмотрен спектр показателей Ляпунова для двух связанных пучково-плазменных систем со сверхкритическим током.

### **3.3 Анализ связанных распределенных пучково-плазменных систем**

В контексте использования спектра показателей Ляпунова для анализа связанных распределенных систем, рассмотрим однонаправленно связанные диоды Пирса, которые, как известно, могут демонстрировать различные режимы хаотической синхронизации [31], одним из которых является режим обобщенной хаотической синхронизации. Очевидно, что установление синхронного режима в этом случае должно найти свое отражение в поведении спектра пространственных показателей Ляпунова, характеризующих поведение связанных диодов Пирса [18, 31].

Безразмерные уравнения, описывающие поведение однонаправлено связанных пучково-плазменных систем, имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varphi^{1,2}}{\partial x^2} = -(\alpha^{1,2})^2 (\rho^{1,2} - 1), \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \rho^{1,2}}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho^{1,2} v^{1,2})}{\partial x}, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial v^{1,2}}{\partial t} = -v^{1,2} \frac{\partial v^{1,2}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^{1,2}}{\partial x}, \quad (3.22)$$

где верхние индексы “1” и “2” относятся к первой и второй пучково-плазменным системам, соответственно.

Связь между рассматриваемыми диодами Пирса вводится модификацией граничных условий на правой границе второй (ведомой) системы. Иными словами, если в случае автономной динамики рассматриваемых систем граничные условия для системы гидродинамических уравнений (3.20) – (3.22) имеют вид

$$v^{1,2}(0, t) = 1, \quad \rho^{1,2}(0, t) = 1, \quad \varphi^{1,2}(0, t) = 0, \quad (3.23)$$

то в случае связи, граничное условие, определяющее значение потенциала на границе ведомой системы является следующим

$$\varphi^2(1, t) = \varepsilon(\rho^2(x = 1, t) - \rho^1(x = 1, t)). \quad (3.24)$$

В данном случае первая “1” (ведущая) система находится в режиме автономных колебаний, воздействуя на вторую “2” (ведомую) систему.

В качестве состояния системы, состоящей из двух взаимодействующих диодов Пирса, используется вектор

$$\mathbf{U} = (\rho^1(x, t), v^1(x, t), \varphi^1(x, t), \rho^2(x, t), v^2(x, t), \varphi^2(x, t))^T, \quad (3.25)$$

а скалярное произведение состояний, в свою очередь, определяется как

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = & \int_0^1 (\rho_1^1(x, t) \rho_2^1(x, t) + v_1^1(x, t) v_2^1(x, t) + \varphi_1^1(x, t) \varphi_2^1(x, t)) dx + \\ & + \int_0^1 (+\rho_1^2(x, t) \rho_2^2(x, t) + v_1^2(x, t) v_2^2(x, t) + \varphi_1^2(x, t) \varphi_2^2(x, t)) dx, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где интегрирование осуществляется по всей длине рассматриваемой системы. Соотношения (3.20)–(3.22) с граничными условиями (3.23)–(3.30) выступют в качестве оператора эволюции (1.1) для двух однонаправлено связанных диодов Пирса.

По аналогии с (3.34), в качестве возмущений  $\mathbf{V}_i$  для двух связанных диодов Пирса выступают вектора

$$\mathbf{V}_i = (\xi_i^{1\rho}(x, t), \xi_i^{1v}(x, t), \xi_i^{1\varphi}(x, t), \xi_i^{2\rho}(x, t), \xi_i^{2v}(x, t), \xi_i^{2\varphi}(x, t))^T, \quad (3.27)$$

характеризующие малые отклонения от опорного состояния  $\mathbf{U}$ .

Для исследуемой системы двух однонаправлено связанных диодов Пирса (3.20)–(3.30) оператор  $\partial\hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V}_i)$ , определяющий эволюцию малых возмущений  $\mathbf{V}_i$  опорного состояния  $\mathbf{U}$ , записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_i^{1,2\varphi}}{\partial x^2} &= -(\alpha^{1,2})^2 \xi_i^{1,2\rho}, \\ \frac{\partial \xi_i^{1,2\rho}}{\partial t} &= -\xi_i^{1,2\rho} \frac{\partial v^{1,2}}{\partial x} - v^{1,2} \frac{\partial \xi_i^{1,2\rho}}{\partial x} - \xi_i^{1,2v} \frac{\partial \rho^{1,2}}{\partial x} - \rho^{1,2} \frac{\partial \xi_i^{1,2v}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \xi_i^{1,2v}}{\partial t} &= -v^{1,2} \frac{\partial \xi_i^{1,2v}}{\partial x} - \xi_i^{1,2v} \frac{\partial v^{1,2}}{\partial x} - \frac{\partial \xi_i^{1,2\varphi}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Граничные условия для малых отклонений  $\mathbf{V}_i$ , с учетом связи (3.24), имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_i^{1,2\rho}(0, t) &= 0, \\ \xi_i^{1,2v}(0, t)_i &= 0, \\ \xi_i^{1,2\varphi}(0, t) &= 0, \\ \xi_i^{1\varphi}(1, t) &= 0, \\ \xi_i^{2\varphi}(1, t) &= \varepsilon(\xi_i^{2\rho}(1, t) - \xi_i^{1\rho}(1, t)). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Таким образом, для двух однонаправлено связанных диодов Пирса расчет спектра пространственных показателей Ляпунова осуществляется точно также, как и в случае автономного диода Пирса, с тем лишь отличием, что состояние системы  $\mathbf{U}$ , малые возмущения  $\mathbf{V}_i$ , операция скалярного произведения  $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$  и операторы эволюции  $\hat{L}(\mathbf{U})$  и  $\partial\hat{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V}_i)$  теперь определены с учетом взаимодействия двух пространственно-распределенных систем.

Зависимость пяти старших показателей Ляпунова для двух однонаправлено связанных диодов Пирса (3.20)–(3.22) с граничными условиями (3.23)–(3.30) от величины

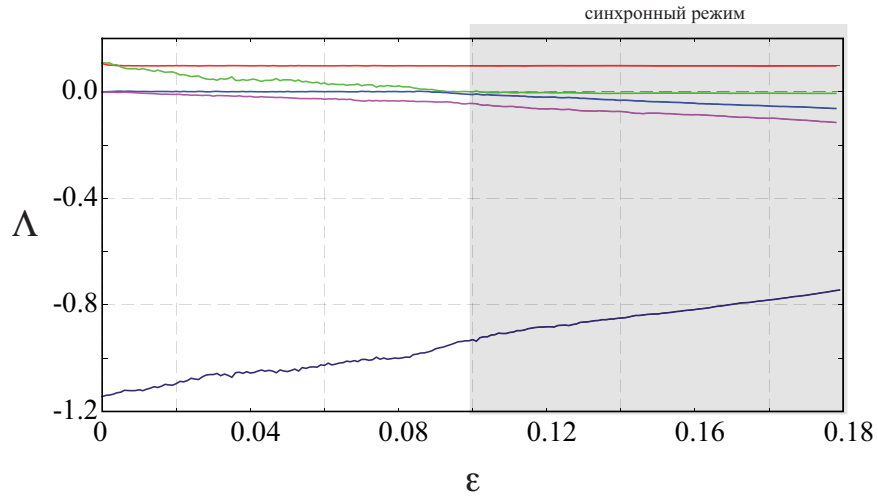


Рис. 3.5: Зависимость пяти старших показателя Ляпунова от параметра связи  $\varepsilon$  для двух однонаправлено связанных диодов Пирса

параметра связи  $\varepsilon$  показана на рис. 3.5. Выбор значений управляющих параметров  $\alpha^1 = 2.858$ ,  $\alpha^2 = 2.860$  обеспечивает хаотическую динамику каждого из диодов Пирса в автономном режиме.

Отчетливо видно, что при отсутствии связи между диодами ( $\varepsilon = 0$ ) два старших показателя Ляпунова положительны (что характеризует хаотическую динамику в каждом из диодов Пирса по отдельности), два являются нулевыми (эти показатели соответствуют возмущениям состояния систем вдоль оси времени), пятый показатель Ляпунова (и все последующие) оказываются отрицательными.

С увеличением параметра связи значения показателей Ляпунова начинают меняться. Из-за однонаправленного характера связи между рассматриваемыми диодами Пирса, в силу независимости поведения ведущей системы от состояния ведомого осциллятора, спектр показателей Ляпунова  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots$  может быть разделен на две части: показатели Ляпунова ведущей системы  $\Lambda_1^1 \geq \Lambda_2^1 \geq \dots$  и условные показатели Ляпунова  $\Lambda_1^2 \geq \Lambda_2^2 \geq \dots$ , характеризующие динамику ведомой.

Поскольку динамика ведущего диода Пирса совершенно не зависит от величины параметра связи  $\varepsilon$  и состояния второго диода Пирса, соответствующие этому диоду Пирса показатели Ляпунова не должны изменяться с увеличением интенсивности связи между рассматриваемыми системами. Что же касается ведомого диода Пирса, то его динамика изменяется с увеличением параметра связи (в частности, она может оказаться синхро-

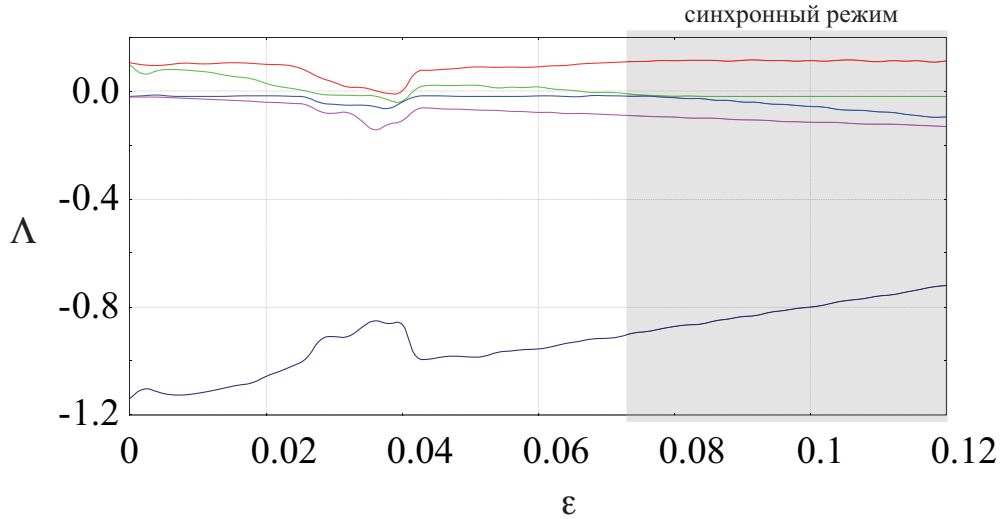


Рис. 3.6: Зависимость пяти старших показателя Ляпунова от параметра связи  $\varepsilon$  для двух диодов Пирса связанных взаимно

низованной сигналом с ведущего диода Пирса), и, соответственно, изменяются значения условных показателей Ляпунова, что отчетливо видно на рис. 3.5. По мере увеличения параметра связи сначала становится отрицательным второй условный показатель Ляпунова  $\Lambda_2^2$ , который при  $\varepsilon = 0$  отвечал за возмущения состояния второго диода Пирса вдоль оси времени и был равен нулю, а затем и старший условный показатель Ляпунова  $\Lambda_1^2$  при  $\varepsilon \approx 0.09$  переходит из области положительных значений в область отрицательных, что соответствует установлению режима обобщенной хаотической синхронизации в рассматриваемых диодах Пирса [31].

Наряду со случаем однонаправленной связи значительный интерес представляет изучение взаимосвязанных пучково-плазменных систем, для которых также применим расчет спектра показателей Ляпунова для диагностики режима обобщенной хаотической синхронизации.

В данном случае граничные условия, определяющие распределения потенциала, запишутся в виде

$$\begin{cases} \varphi^1(1, t) = \varepsilon(\rho^1(x = 1, t) - \rho^2(x = 1, t)), \\ \varphi^2(1, t) = \varepsilon(\rho^2(x = 1, t) - \rho^1(x = 1, t)). \end{cases} \quad (3.30)$$

Граничные условия, определяющие малые возмущения, необходимые для расчета показателей Ляпунова, будут следующими

$$\begin{aligned}
\xi_i^{1,2\rho}(0, t) &= 0, \\
\xi_i^{1,2v}(0, t)_i &= 0, \\
\xi_i^{1,2\varphi}(0, t) &= 0, \\
\xi_i^{1\varphi}(1, t) &= \varepsilon(\xi_i^{1\rho}(1, t) - \xi_i^{2\rho}(1, t)), \\
\xi_i^{2\varphi}(1, t) &= \varepsilon(\xi_i^{2\rho}(1, t) - \xi_i^{1\rho}(1, t)).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

В остальном методика расчёта спектра показателей Ляпунова для взаимосвязанных систем ничем не отличается от случая однонаправленной связи, рассмотренного ранее в данном разделе.

На рисунке 3.6 приведены зависимости пяти старших показателей Ляпунова от параметра  $\varepsilon$ , характеризующего силу связи между рассматриваемыми системами. Из рисунка видно, что при изменении величины  $\varepsilon$  два показателя Ляпунова меняются слабо: один показатель  $\Lambda_1$  всегда (за исключением окон периодичности) остаётся положительным, и всегда имеется один нулевой показатель Ляпунова  $\Lambda_3$  в спектре. В то же самое время, два показателя Ляпунова (изначально положительный  $\Lambda_2$  и изначально нулевой  $\Lambda_4$ ) зависят от параметра связи и при превышении величиной  $\varepsilon$  критического значения  $\varepsilon = 0.078$  становятся отрицательными. Пятый рассмотренный показатель Ляпунова оказывается всегда отрицательным, и, как следствие, его динамика (как и динамика всех последующих показателей спектра) оказывается несущественной с точки зрения изучения возникновения синхронного режима.

Можно предположить, что по аналогии со случаем однонаправленно связанных систем, переход положительного показателя Ляпунова в область отрицательных значений связан с возникновением режима обобщенной синхронизации во взаимно связанных распределенных системах. Для проверки данного предположения в работе [126] был использован метод “ближайших соседей”, при помощи которого было подтверждено возникновение режима обобщенной хаотической синхронизации при  $\varepsilon = 0.078$ .

Результаты, полученные в данном разделе диссертационной работы, демонстрируют эффективность применения расчета спектра показателей Ляпунова для диагностики установления синхронных режимов в распределенных пучково-плазменных системах. Можно с высокой степенью вероятности утверждать, что данный инструмент мо-

жет быть применен для анализа динамики связанных пространственно-распределённых систем различной природы. При этом, очевидной становится необходимость расчета нескольких старших показателей Ляпунова.

### 3.4 Вопрос выбора состояния пространственно-распределенной системы для расчета спектра показателей Ляпунова

Как уже отмечалось ранее, при анализе пространственно-распределенных систем выбор опорного состояния становится важным и зависит от специфики конкретной математической модели. В частности, вопрос выбора состояния играет важную роль при анализе взаимодействия распределенной динамической системы и конечномерной (раздел 1.4), а также при анализе связанных распределённых систем (раздел 3.3).

В исследованиях, описанных в предыдущих разделах настоящей диссертационной работы, расчет спектра показателей Ляпунова осуществлялся с использованием всех величин, характеризующих состояние системы для определения опорной траектории. Например, опорное состояние диода Пирса было определено как  $\mathbf{U} = (\varphi(x, t), \rho(x, t), v(x, t))^T$ , а ЛОВ с поперечным полем — как  $\mathbf{U} = (F(x, t), I(x, t))^T$ .

Однако, при анализе динамических систем, характеризующихся высокой степенью дискретизации, так же как и при анализе синхронных режимов в сетях, состоящих из большого числа распределенных систем, важной задачей становится исследование возможности исключения из опорного состояния некоторых величин. В настоящем разделе диссертационной работы данный вопрос будет рассмотрен на примере эталонных распределенных систем электронной природы.

В качестве первого примера рассмотрим диод Пирса (данная система была подробно исследована в разделе 3.2). При анализе уравнений, описывающих поведение диода Пирса, важно отметить, что пространственное распределение потенциала зависит только от распределения плотности заряда в каждый момент времени. Иными словами, динамический оператор эволюции (3.10)–(3.12), в принципе, можно переписать, исключив из рассмотрения потенциал  $\varphi(x, t)$ . Фактически, достаточно знать распределения



плотности заряда  $\rho(x, t)$  и скорости  $v(x, t)$ , чтобы однозначно характеризовать состояние системы, и, опираясь на оператор эволюции  $\hat{L}(\mathbf{U})$ , в качестве которого выступает система уравнений (3.10)–(3.12) с граничными и начальными условиями (3.13), вычислять аналогичные состояния в следующие моменты времени. С учетом этого, можно предположить, что для расчета спектра показателей Ляпунова в состояние достаточно включить плотность заряда  $\rho(x, t)$  и скорость электронов пучка  $v(x, t)$ <sup>1</sup>

$$\mathbf{U} = (\rho(x, t), v(x, t))^T. \quad (3.32)$$

Скалярное произведение состояний в этом случае будет определяться как

$$(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \int_0^1 \rho_1(x, t)\rho_2(x, t) + v_1(x, t)v_2(x, t) dx. \quad (3.33)$$

В качестве возмущений  $\mathbf{V}_i$  будут выступать вектора

$$\mathbf{V}_i = (\xi_i^\rho(x, t), \xi_i^v(x, t))^T, \quad (3.34)$$

характеризующие малые отклонения от опорного состояния  $\mathbf{U}$ , причем малое возмущение  $\xi_i^\varphi(x, t)$  потенциала  $\varphi(x, t)$  снова будет однозначно определяться распределением плотности заряда  $\rho(x, t)$  и его малым возмущением  $\xi_i^\rho(x, t)$ . Следует отметить, что ортогонализация и нормализация такого набора возмущений будет выполняться значительно быстрее, чем в случае, рассмотренном ранее в разделе 3.2.

На рисунке 3.7 приведены значения трех старших показателей Ляпунова, полученные в разделе 3.2 (сплошные линии) и значения, полученные при использовании (3.32) в качестве опорного состояния (точки). Как видно из рисунка, значения, полученные в том и в другом случаях отлично совпадают при всех значениях управляющего параметра.

Для подтверждения возможности сокращения количества величин, входящих в опорное состояние системы в качестве следующего примера рассмотрим ЛОВ с поперечным полем. В этом случае исключим распределение амплитуды тока  $I(x, t)$  из состояния системы в силу того, что оно может быть однозначно определено с помощью

---

<sup>1</sup>Потенциал  $\varphi(x, t)$ , входящий в уравнения, описывающие эволюцию рассматриваемой системы, не включен в состояние  $\mathbf{U}$ , поскольку он однозначно определяется через плотность заряда  $\rho(x, t)$  в силу уравнения Пуассона (3.12) и граничных условий (3.13)

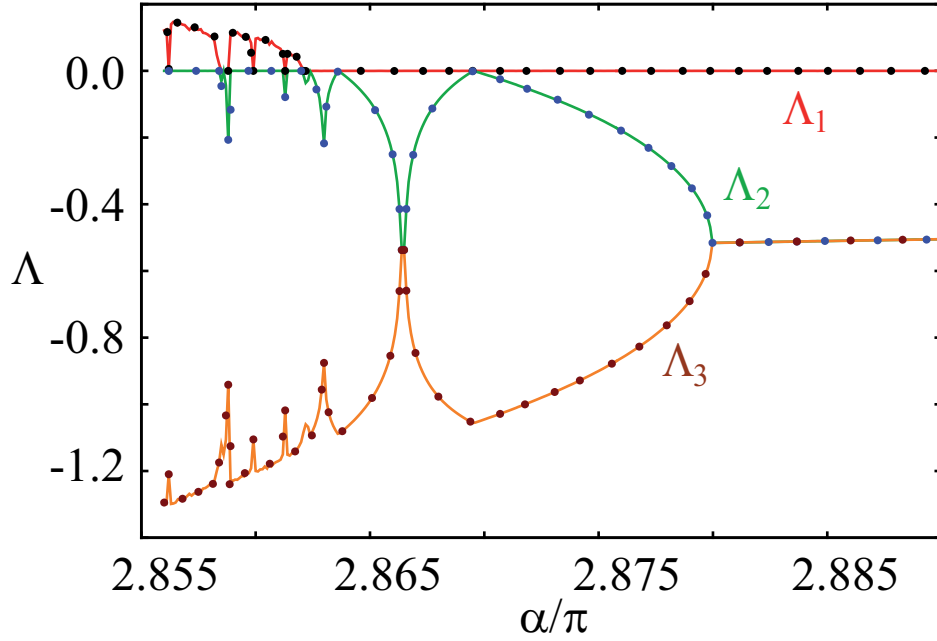


Рис. 3.7: Зависимость трех старших показателей Ляпунова для автономного диода Пирса в зависимости от управляющего параметра. Сплошными линиями показаны значения, полученные при учете в состоянии системы всех величин, точками — значения, полученные при исключении потенциала из состояния системы

распределения электрического поля  $F(x, t)$  при помощи уравнения (3.2). В результате, для расчета показателей Ляпунова используем состояние, включающее в себя только распределение амплитуды высокочастотного поля  $F(x, t)$

$$\mathbf{U} = (F(x, t)). \quad (3.35)$$

Соответственно, набор возмущений такого состояния имеет следующий вид

$$\mathbf{V}_i = (\xi_i^F(x, t)). \quad (3.36)$$

Полученные в этом случае значения показателей Ляпунова были сопоставлены со значениями, полученными в разделе (3.1). На рисунке 3.8 линиями показаны значения показателей Ляпунова, рассчитанные с использованием величины  $U = (F(x, t), I(x, t))^T$  в качестве опорного состояния. Точкам соответствуют значения, рассчитанные при исключении тока из состояния системы. Результаты, представленные на рисунке 3.8, показывают, что исключение тока из состояния системы не влияет на значения показателей Ляпунова.

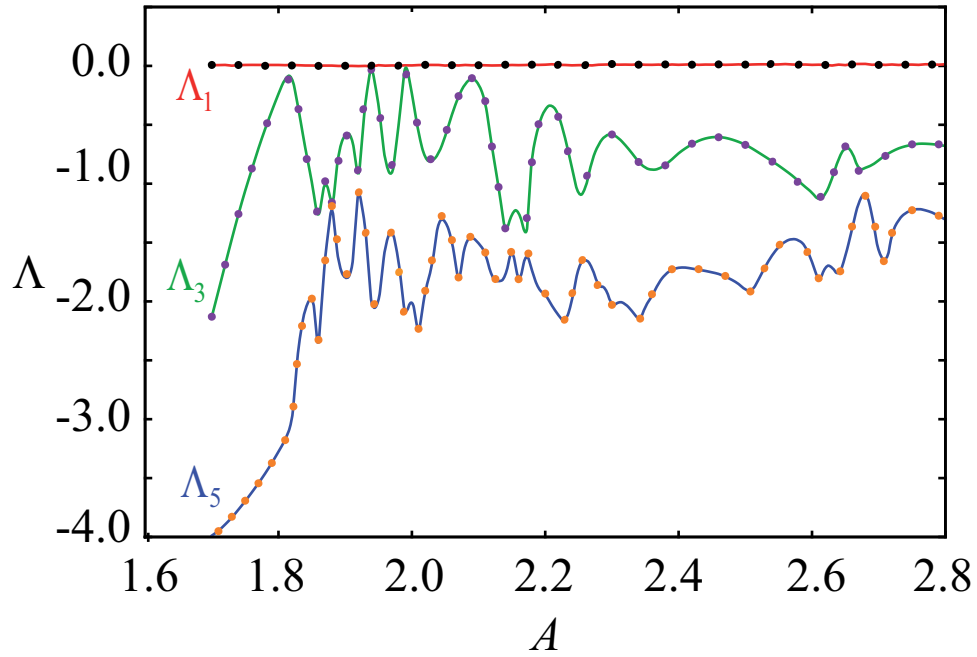


Рис. 3.8: Зависимость первого, третьего и пятого показателей Ляпунова для ЛОВ с поперечным полем от управляющего параметра. Сплошными линиями показаны значения, полученные при учете в состоянии системы всех величин, точками-значения, полученные при исключении тока из состояния системы

Таким образом, в данном разделе рассмотрен вопрос выбора опорного состояния пространственно-распределенной системы, необходимого для корректного расчета показателей Ляпунова. Показано, что для широкого класса систем возможно исключение из состояния некоторых величин, что позволяет упростить расчет и уменьшить затраты машинного времени при ортогонализации состояний. При этом, сокращение числа величин должно быть основано на особенностях уравнений оператора эволюции. Другими словами, из состояния системы возможно исключение только тех величин, распределения которых могут быть однозначно выражены через распределения других величин (входящих в состояние системы) при помощи соответствующих уравнений математической модели. Исключение же других величин, как правило, приводит к некорректным результатам.

Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим пример расчета спектра показателей Ляпунова для диода Пирса в случае, когда вместе с потенциалом  $\varphi(x, t)$  из состояния была исключена плотность заряда  $\rho(x, t)$ . Результат представлен на рисунке 3.9.

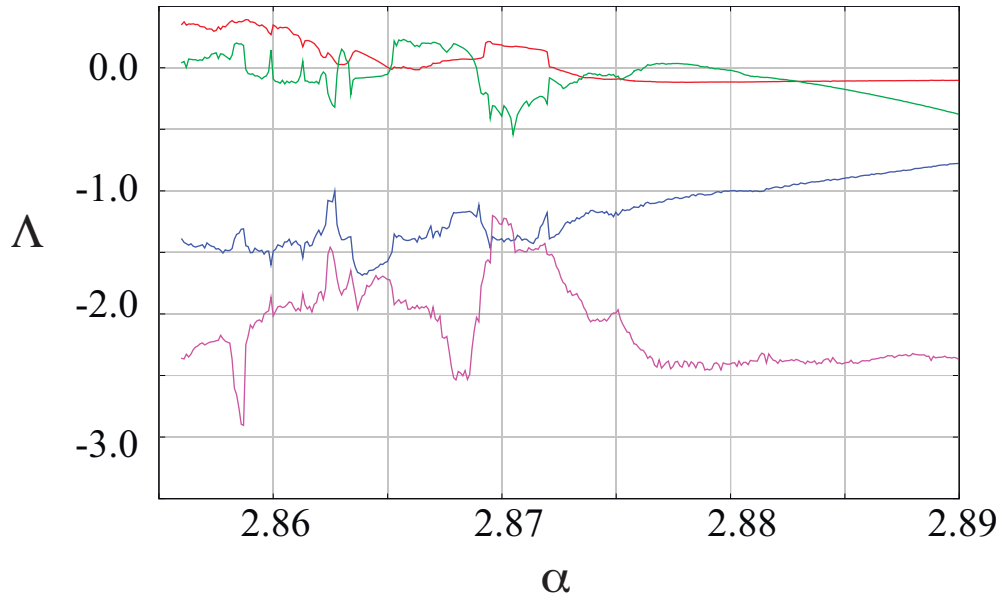


Рис. 3.9: Спектр показателей Ляпунова для диода Пирса, рассчитанный при использовании величины  $v(x, t)$  в качестве состояния системы

Некорректность данного расчета подтверждена главным образом отсутствием нулевого показателя Ляпунова в спектре потоковой динамической системы. Кроме того, наличие старшего положительного показателя Ляпунова не соответствует областям управляющего параметра, при которых, согласно результатам численного моделирования, реализуется хаотическая генерация.

### 3.5 Выводы по третьей главе

В настоящей главе диссертационной работы проиллюстрировано применение предложенного в первой главе метода расчета спектра показателей Ляпунова для анализа нестационарных режимов пространственно-временной динамики распределённых систем электронной природы. В качестве конкретных примеров были рассмотрены диод Пирса — эталонная модель пучково-плазменной системы и лампа обратной волны с поперечным полем — базовая модель электронно-волнового взаимодействия. При помощи показателей Ляпунова была рассмотрена автономная динамика данных систем и определены области, соответствующие периодическим и хаотическим режимам.

Помимо случая автономной динамики распределённых систем в рамках данного раздела были рассмотрены динамические режимы, реализующиеся в связанных

пучково-плазменных системах. Применение показателей Ляпунова в данном случае позволило детектировать режимы обобщенной хаотической синхронизации в исследуемых пространственно-распределённых системах в случае однонаправленной и взаимной связи.

В рамках данного раздела был также рассмотрен вопрос выбора опорного состояния системы, необходимого для расчета спектра показателей Ляпунова. При этом основное внимание было уделено выбору набора величин, входящих в состояние системы, для которого результат расчета является корректным. На основании рассмотрения оператора эволюции исследуемых систем было сформулировано предположение о возможности исключения некоторых величин из набора, определяющего состояние системы. Данное предположение было проверено на примере исследованных в диссертационной работе эталонных систем. На основании полученных результатов было сформулировано правило выбора необходимого набора величин, характеризующих состояние системы.

# Заключение

В настоящей диссертационной работе решена актуальная проблема радиофизики, связанная с разработкой метода расчета спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем и применением показателей Ляпунова для анализа сложных режимов, реализующихся в распределенных системах, являющихся эталонными моделями электронной природы. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Разработан метод расчета спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем, основанный на непрерывном в пространстве описании состояния системы и ее возмущений. Эффективность применения предложенного подхода продемонстрирована на примере эталонной модели пространственно-распределенной системы, описывающей в рамках гидродинамического подхода коллективную динамику носителей заряда в электрическом поле. В результате применения метода было показано, что в случае автономной динамики системы под действием приложенного электрического поля в системе возможна реализация только периодических колебаний. В тоже время, влияние внешнего периодического воздействия оказывает существенное влияние на динамику данной системы. При помощи расчета спектра показателей Ляпунова было доказано, что в зависимости от частоты внешнего воздействия динамика системы может быть периодической, квазипериодической и хаотической.
2. Рассмотрен вопрос о расчете спектра показателей Ляпунова для систем, описывающих взаимодействие между распределенной активной средой и конечномерной динамической системой со сосредоточенными параметрами. Показано, что состояние таких систем, включающее в себя как динамические переменные, зависящие

только от времени  $X_i(t)$ , так и от времени и пространственной координаты  $Y_i(x, t)$ , может быть описано в бесконечномерном фазовом пространстве, что дает возможность применения разработанного метода расчета показателей Ляпунова. В качестве конкретного примера в работе была рассмотрена модельная распределенная система электронной природы, связанная с внешним RLC-контуром. При помощи расчета спектра показателей Ляпунова было показано, что варьирование параметров контура приводит к возникновению хаотической пространственно-временной динамики распределенной системы.

3. В работе рассмотрена динамика возмущений стационарного состояния модельной пространственно-распределенной системы. Показано, что в приближении однородного в пространстве стационарного состояния системы возможна аналитическая оценка величины старшего показателя Ляпунова. В работе было продемонстрировано, что данная оценка остается справедливой при малых значениях напряжения, приложенного к рассматриваемой системе. Кроме того, было обнаружено, что в данном случае все возмущения состояния данной системы характеризуются одинаковым коэффициентом затухания. Для точного описания динамики набора возмущений неоднородного по пространству стационарного состояния в диссертационной работе предложен метод, позволяющий вычислять коэффициенты затухания всех возмущений, их собственные частоты и, соответственно, пространственные профили в каждый момент времени, не используя при этом численное моделирование временной эволюции основного состояния и возмущений. При помощи данного подхода было обнаружено, что в стационарном состоянии в системе существуют пары возмущений, характеризующиеся одинаковым коэффициентом затухания и частотами с противоположными знаками, но одинаковой абсолютной величиной. Полученный результат позволил объяснить наличие попарно одинаковых показателей Ляпунова в спектре, рассчитанном для данной системы, при помощи алгоритма Бенеттина.

4. Предложенный метод анализа динамики набора возмущений позволил также проанализировать поведение возмущений при значениях управляющего параметра, превышающих критическое. При этом было обнаружено, что частота колебаний опорного состояния оказывается равной частоте колебаний первого возмущения в

момент возникновения неустойчивости и далее, при увеличении бифуркационного параметра, остается близкой к ней. Полученный результат был подтвержден в рамках численного анализа динамики возмущения при помощи интегрирования уравнений оператора эволюции, линеаризованных в окрестности опорного состояния.

5. На основании анализа динамики возмущений проведен анализ устойчивости неоднородного по пространству состояния пространственно-распределённой системы, описываемой в рамках гидродинамического приближения, где зависимость скорости носителей заряда от напряжённости электрического поля описывается соотношением Эсаки-Тсу, а закон инжекции носителей заряда определяется характеристикой  $J_0(F_e)$ , где  $J_0$  – плотность тока,  $F_e$  - напряжённость поля. Показано, что в данной системе устойчивость стационарного состояния при определённых значениях управляющего параметра (приложенного напряжения) определяется значением производной этой характеристики  $dJ_0(F_e)/dF$ . При данных значениях приложенного напряжения, стационарные состояния, характеризующееся одинаковыми распределениями напряжённости электрического поля и концентрации носителей заряда являются устойчивыми в случае, когда величина  $dJ_0(F_e)/dF$  оказывается меньше некоторой критической величины и неустойчивыми — при больших значениях производной  $dJ_0(F_e)/dF$ .
6. Был проведен анализ нестационарной динамики пространственно-распределенных систем, являющихся эталонными моделями, описывающими процессы, протекающие в приборах СВЧ-электроники. В качестве примеров были рассмотрены ЛОВ с поперечным полем и диод Пирса, являющиеся, соответственно, базовыми моделями для анализа резонансного электронно-волнового взаимодействия и распространения пучка заряженных частиц в плазме. В результате применения показателей Ляпунова для анализа автономной динамики данных систем было показано, что при изменении управляющего параметра в диоде Пирса и ЛОВ наблюдается переход к хаотической динамике, соответствующей появлению в спектре систем положительного показателя Ляпунова. При этом, в ЛОВ, при увеличении значения управляющего параметра происходит усложнение хаотической динамики, которая затем переходит в гиперхаотический режим, характеризую-



щийся несколькими положительными показателями Ляпунова. В диоде Пирса, в свою очередь, усложнение колебаний характеризуется только увеличением значения старшего показателя Ляпунова и переход второго и более младших показателей в область положительных значений не наблюдается.

7. Было рассмотрено поведение связанных пространственно-распределенных систем и изучены процессы возникновения в них режима хаотической синхронизации. В качестве примеров были рассмотрены пучково-плазменные системы, находящиеся в режиме хаотической генерации и связанные друг с другом как однонаправленно, так и взаимно. Для расчета спектра показателей Ляпунова, описывающего данное взаимодействие, была рассмотрена динамическая система, состояние которой включало в себя распределения всех величин, характеризующих каждую из взаимодействующих систем. При помощи показателей Ляпунова была рассмотрена динамика данных систем при увеличении силы связи между ними. Было показано, что как в случае однонаправленной, так и в случае взаимной связи, переход положительного показателя в область отрицательных значений связан с установлением режима обобщенной хаотической синхронизации в пространственно-распределенных системах.
8. Рассмотрен вопрос выбора опорного состояния системы, необходимого для расчета спектра показателей Ляпунова. При этом, основное внимание было уделено выбору набора величин, при котором результат расчета остается корректным. Показано, что для широкого класса систем возможно исключение из состояния некоторых величин, что позволяет упростить расчет спектра показателей Ляпунова и уменьшить затраты машинного времени при ортогонализации состояний. При этом было отмечено, что сокращение числа величин должно быть основано на особенностях уравнений оператора эволюции. Другими словами, из состояния системы возможно исключение только тех величин, пространственные распределения которых могут быть однозначно выражены через распределения других величин при помощи соответствующих уравнений математической модели. Исключение же других величин, как правило, приводит к некорректным результатам.

# Благодарности

В завершение настоящей диссертационной работы считаю своей приятной обязанностью поблагодарить всех, кто тем или иным образом помогал мне при выполнении диссертационной работы и оказывал поддержку.

Я хочу выразить искреннюю благодарность моему научному руководителю д. ф.-м. н., профессору Алексею Александровичу Короновскому за помощь и поддержку на протяжении всего времени подготовки настоящей работы.

Хочу поблагодарить д. ф.-м. н., профессора кафедры электроники, колебаний и волн Александра Евгеньевича Храмова за ценные обсуждения результатов анализа электронно-волновых и пучково-плазменных систем и вопросов, связанных с разработкой конечно-разностных моделей, доктора Александра Геннадьевича Баланова и доктора Кирилла Алексея, лекторов физического факультета Университета Лафборо (Великобритания), за предоставление экспериментальных результатов и ценные советы и замечания, связанные с разработкой моделей, основанных на нелинейной зависимости скорости носителей заряда от напряженности электрического поля, к. ф.-м. н., доцента кафедры физики открытых систем Москаленко Ольгу Игоревну за обсуждение результатов анализа синхронных режимов в распределённых системах, аспирантов кафедры электроники, колебаний и волн Владимира Владимировича Макарова — за обсуждения результатов, полученных на различных этапах работы по созданию математической и численной модели анализа взаимодействия распределенной и конечномерной систем и Никиту Сергеевича Фролова — за обсуждение вопроса использования гидродинамической модели для описания динамики возмущений состояния пучково-плазменных систем, а также коллективы кафедры физики открытых систем, на базе которой выполнялась диссертационная работа, и лаборатории №5 отделения физики нелинейных систем НИИ ЕН СГУ.

# Литература

- [1] O. V. Maslennikov and V. I. Nekorkin, Map-based approach to problems of spiking neural network dynamics, nonlinear systems and complexity ed., Nonlinear Systems and Complexity, vol. 8, ch. 5, 143, 2014.
- [2] С. П. Кузнецов, Динамический хаос, серия “Современная теория колебаний и волн”, М.: Физматлит, 2001 .
- [3] V. V. Klinshov, D. S. Shchapin, V. I. Nekorkin, Cross-frequency synchronization of oscillators with time-delayed coupling, PHYSICAL REVIEW E **90** (2014), 042923.
- [4] L. S. Revin, A. V. Chiginev, A. L. Pankratov, D. V. Masterov, A. E. Parafin, G. A. Luchinin, E. A. Matrozoza, L. S. Kuzmin, The effect of bias current asymmetry on the flux-flow steps in the grain boundary ybacuo long josephson junctions, Journal of Applied Physics **114** (2013), 243903.
- [5] Д. И. Трубецков А. Е. Храмов, Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1., М.: Физматлит, 2003 .
- [6] Д. И. Трубецков А. Е. Храмов, Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков Т. 2., М.: Физматлит, 2004 .
- [7] В. С. Анищенко, А. Н. Павлов, Н. Б. Янсон, Реконструкция динамических систем в приложении к решению задачи защиты информации, Журнал Технической Физики **68** (1998), No. 12, 1–8 .
- [8] V. S. Anishchenko A. N. Pavlov, Global reconstruction in application to multichannel communication, Phys. Rev. E **57** (1998), 2455–2457.

- [9] V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov, A. S. Karavaev, D. D. Kulminskiy, An experimental digital communication scheme based on chaotic time-delay system, *Nonlinear Dynamics* **74** (2013), 1013–1020.
- [10] M. D. Prokhorov V. I. Ponomarenko, Encryption and decryption of information in chaotic communication systems governed by delay-differential equations, *Chaos, Solutions and Fractals* **35** (2008), 871–877.
- [11] K. Thamilmaran, D. V. Senthilkumar, A. Venkatesan, M. Lakshmanan, Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced electronic circuit, *Phys. Rev. E* **74** (2006), 036205 .
- [12] T. E. Karakasidis, A. Fragkou, A. Liakopoulos, System dynamics revealed by recurrence quantification analysis: Application to molecular dynamics simulations, *Phys. Rev. E* **76** (2007), No. 2, 021120.
- [13] W. M. Macek Stefano Redaelli, Estimation of the entropy of the solar wind flow, *Phys. Rev. E* **62** (2000), No. 5, 6496–6504.
- [14] R. Porcher and G. Thomas, Estimating lyapunov exponents in biomedical time series, *Phys. Rev. E* **64** (2001), No. 1, 010902(R).
- [15] R. M. Düнки, Largest lyapunov-exponent estimation and selective prediction by means of simplex forecast algorithms, *Phys. Rev. E* **62** (2000), No. 5, 6505–6515.
- [16] S. P. Kuznetsov D. I. Trubetskov, Chaos and hyperchaos in a backward-wave oscillator, *Radiophysics and Quantum Electronics* **47** (2004), No. 5,6, 341–355.
- [17] S. P. Kuznetsov, Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the smale-williams type, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005), 144101.
- [18] K. Pyragas, Weak and strong synchronization of chaos, *Phys. Rev. E* **54** (1996), No. 5, R4508–R4511.
- [19] A. E. Hramov A. A. Koronovskii, Generalized synchronization: a modified system approach, *Phys. Rev. E* **71** (2005), No. 6, 067201.

- [20] D. S. Goldobin A. S. Pikovsky, Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise, *Phys. Rev. E* **71** (2005), No. 4, 045201(R).
- [21] D. S. Goldobin A. S. Pikovsky, Synchronization of self-sustained oscillators by common white noise, *Physica A* **351** (2005), 126–132.
- [22] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators?, *Phys. Lett. A* **354** (2006), No. 5–6, 423–427.
- [23] G. V. Osipov, B. Hu, C. S. Zhou, M. V. Ivanchenko, J. Kurths, Three types of transitions to phase synchronization in coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003), No. 2, 024101.
- [24] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997), No. 22, 4193–4196.
- [25] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, P. V. Popov, Incomplete noise-induced synchronization of spatially extended systems, *Phys. Rev. E* **77** (2008), No. 3, 036215.
- [26] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. P. I. Theory. P. II. Numerical application, *Meccanica* **15** (1980), 9–30.
- [27] Stefano Lepri, A. Politi, Alessandro Torcini, Entropy potential and Lyapunov exponents, *Chaos* **7** (1997), No. 4, 701–709.
- [28] H. L. Yang Gunter Radons, Lyapunov modes in extended systems, *Phil. Trans. R. Soc. A* **367** (2009), 3197–3212.
- [29] R. Carretero-Gonzalez, S. Orstavik, J. Huke, D. S. Broomhead, J. Stark, Scaling and interleaving of subsystem Lyapunov exponents for spatio-temporal systems, *Chaos* **9** (1999), No. 2, 466–482.
- [30] A. S. Pikovsky A. Politi, Dynamic localization of Lyapunov vectors in spacetime chaos, *Nonlinearity* **11** (1998), 1049.

- [31] R. A. Filatov, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, Chaotic synchronization in coupled spatially extended beam-plasma systems, *Phys. Lett. A* **358** (2006), 301–308.
- [32] A. A. Koronovskii, P. V. Popov, A. E. Hramov, Generalized chaotic synchronization in coupled ginzburg–landau equations, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **103** (2006), No. 4, 654–665.
- [33] А. А. Короновский, И. С. Ремпен, А. Е. Храмов, Исследование неустойчивых периодических пространственно-временных состояний в распределённой автоколебательной системе со сверхкритическим током, *Изв. РАН, сер. физич.* **67** (2003), No. 12, 1705–1708 .
- [34] A. Wolf, J. Swift, H. L. Swinney, J. Vastano, Determining lyapunov exponents from a time series, *Physica D* **16** (1985), 285.
- [35] P. Bryant, R. Brown, H. D.I. Abarbanel, Lyapunov exponents from observed time series, *Physical Review Letters* **65** (1990), No. 13, 1523–1526.
- [36] R. Brown, P. Bryant, H. D.I. Abarbanel, Computing the lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series, *Phys. Rev. A* **43** (1991), No. 6, 2787–2806.
- [37] Б. П. Безручко, Л. В. Булгакова, С. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков, Стохастические колебания и неустойчивость в лампе обратной волны, *Радиотехника и электроника* **28** (1983), No. 6, 1136 .
- [38] Е. В. Блохина, С. П. Кузнецов, А. Г. Рожнев, Высокая размерность хаотических аттракторов в гиротроне с нефиксированной структурой поля, *Письма в ЖТФ* **32** (2006), No. 8, 83 .
- [39] П. В. Кушцов, Вычисление показателей Ляпунова для распределенных систем: преимущества и недостатки численных методов, *Известия вузов. ПНД* **18** (2010), No. 5, 93 .
- [40] А. А. Балякин Н. М. Рыскин, Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью, *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* **15** (2007), No. 6, 3 .

- [41] А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, О возникновении обобщенной синхронизации во взаимно связанных пучково-плазменных системах, Сборник «СВЧ - техника и телекоммуникационные технологии», Материалы 20-й Международной Крымской конференции, September 2010, 895–896 .
- [42] А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Расчет пространственных показателей Ляпунова для моделей электронных систем, Сборник «СВЧ - техника и телекоммуникационные технологии», Материалы 20-й Международной Крымской конференции, September 2010, 906–907 .
- [43] А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Расчет показателей Ляпунова для систем СВЧ-электроники: выбор величин, входящих в состояние системы, Сборник «СВЧ - техника и телекоммуникационные технологии», Материалы 22-й Международной Крымской конференции, September 2012, 787 .
- [44] В. А. Максименко, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, А. Г. Баланов, К. Н. Алексеев, Анализ устойчивости стационарного состояния сильно связанной полупроводниковой сверхрешетки, Материалы конференции Международной 22-й Международной конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии», September 2013 .
- [45] Н. С. Фролов, А. А. Короновский, В. А. Максименко, К. Ильенко, А. Н. Опанасенко, Т. Ю. Яценко, А. Е. Храмов, Расчет спектра пространственных показателей Ляпунова для пучково-плазменных систем, описываемых в рамках метода крупных частиц, Материалы 23-й Международной конференции «СВЧ–техника и телекоммуникационные технологии», September 2013, 769 .
- [46] В. А. Максименко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, В. В. Макаров, О. И. Москаленко, К. Н. Алексеев, А. Г. Баланов, Влияние параметров эмиттера и коллектора на характеристики электронного транспорта в полупроводниковой сверхрешетке, материалы 24-й Международной Крымской конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии», September 2014, 823 .

- [47] В. В. Макаров, А. Е. Храмов, А. А. Короновский, В. А. Максименко, А. Г. Баланов, переход к хаосу в полупроводниковой сверхрешетке, связанной с внешним резонатором, материалы 24-й Международной Крымской конференции «СВЧ- техника и телекоммуникационные технологии», September 2014, 147 .
- [48] А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, К вопросу о выборе состояния пространственно-распределенной системы для расчета спектра показателей Ляпунова, Сборник трудов XIII Всероссийской школы-семинара «Физика и применение микроволн», МГУ, Мау 2011, 31–35 .
- [49] В. А. Максименко, А. Г. Баланов, К. Н. Алексеев, А. Е. Храмов, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, Переход к генерации в полупроводниковой сверхрешетке, Сборник трудов XIII Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах», МГУ, Мау 2012, 26 .
- [50] А. А. Короновский, А. Г. Баланов, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. О. Сельский, А. Е. Храмов, Влияние наклонного магнитного поля и температуры на поведение полупроводниковой сверхрешетки, Сборник трудов XIII Всероссийской школы- семинара «Волновые явления в неоднородных средах», МГУ, Мау 2012, 21–23 .
- [51] К. Н. Алексеев, А. Г. Баланов, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Показатели ляпунова для пространственно-распределенных систем, Сборник трудов XIV Всероссийской школы-семинара «Физика и применение микроволн», МГУ, Мау 2013, 4 .
- [52] В. А. Максименко, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, А. Г. Баланов, К. Н. Алексеев, Устойчивость стационарного состояния сильносвязанной полупроводниковой сверхрешетки, Сборник трудов XIV Всероссийской школы-семинара «Физика и применение микроволн», МГУ, Мау 2013, 3 .
- [53] В. А. Максименко, А. А. Короновский, В. В. Макаров, О. И. Москаленко, К. Н. Алексеев, А. Г. Баланов, А. Е. Храмов, Модель для исследования пространственно-временной динамики заряда в полупроводниковых сверхрешетках с омически-



ми контактами, Ученые записки физического факультета МГУ 4 (2014), 144321

- [54] А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Разработка и применение метода расчета показателей Ляпунова для пространственно распределенных систем электронной природы, Материалы IX Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», October 2010, 140–141 .
- [55] В. А. Максименко, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, А. Г. Баланов, К. Н. Алексеев, Критерий устойчивости стационарного состояния силь но связанной полупроводниковой структуры  $gaas-AigaAs$ , Материалы 10-й Международной школы-конференции «Хаотические автоколебания и образование структур», October 2013 .
- [56] Н. С. Фролов, А. А. Короновский, В. А. Максименко, А. Е. Храмов, Анализ сложной динамики распределенных систем электроники СВЧ, моделируемых в рамках  $\rho$ -метода, Материалы X Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», October 2013, 126 .
- [57] А. Г. Баланов, А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Расчет спектра показателей Ляпунова и анализ динамических режимов в полупроводниковой сверхрешетке, Материалы XV Международной зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике, February 2012, 34 .
- [58] O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, V. A. Maximenko, K. N. Alekseev, A. G. Balanov, Influence of titled magnetic field on synchronization of domains of charge in semiconductor superlattices, Материалы XV Международной зимней школы- семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике, February 2012, 22 .
- [59] В. А. Максименко, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, К. Н. Алексеев, А. Г. Баланов, Метод анализа устойчивости сильносвязанных полупроводниковых наноструктур, Труды Международной Научно- Технической Конференции, приуроченной к 50-летию МРТИ-БГУИР, 2014, 52 .

- [60] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, S. A. Kurkin, V. V. Makarov, M. B. Gaifullin, K. N. Alekseev, N. Alexeeva, M. T. Greenaway, T. M. Fromhold, A. Patane, Feodor V. Kusmartsev, V. A. Maximenko, O. I. Moskalenko, A. G. Balanov, Subterahertz chaos generation by coupling a superlattice to a linear resonator, *Phys.Rev.Lett.* **112** (2014), 116603.
- [61] A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, V. A. Maximenko, O. I. Moskalenko, K. N. Alekseev, M. T. Greenaway, T. M. Fromhold, A. G. Balanov, Lyapunov stability of charge transport in miniband semiconductor superlattices, *Phys. Rev. B* **88** (2013), 165304.
- [62] V. V. Makarov, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, K. N. Alekseev, V. A. Maksimenko, M. T. Greenaway, T. M. Fromhold, O. I. Moskalenko, A. G. Balanov, Sub-terahertz amplification in a semiconductor superlattice with moving charge domains, *Applied physics letters* **106** (2015), 043503–1–043503–4.
- [63] V. A. Maksimenko, V. V. Makarov, A. A. Koronovskii, K. N. Alekseev, A. G. Balanov, A. E. Hramov, The effect of collector doping on the high-frequency generation in strongly coupled semiconductor superlattice, *Europhysics Letters* **109** (2015), 47007–1–47007–4.
- [64] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, V. A. Maximenko, O. I. Moskalenko, Computation of the spectrum of spatial lyapunov exponents for the spatially extended beam-plasma systems and electron-wave devices, *Physics of Plasmas* **19** (2012), No. 8, 082302.
- [65] A. A. Koronovskii, V. A. Maximenko, O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, K. N. Alekseev, A. G. Balanov, Transition to microwave generation in semiconductor superlattice, *Physics of wave phenomena* **21** (2013), No. 1, 48–51.
- [66] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, V. A. Maximenko, A. E. Hramov, Appearance of generalized synchronization in mutually coupled beam–plasma systems, *Technical Physics Letters* **37** (2011), No. 7, 611–614.
- [67] А. Г. Баланов, А. А. Короновский, В. А. Максименко, А. О. Сельский, А. Е. Храмов, Безразмерные нелинейные уравнения для описания динамики полупроводниковой сверхрешетки в полуклассическом приближении, *Вестник ТГУ* **17** (2012), No. 4, 1118–1120 .

- [68] А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, К вопросу о расчете спектра пространственных ляпуновских экспонент в пространственно-распределенных пучково-плазменных системах, Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика **18** (2011), No. 2 .
- [69] К. Н. Алексеев, А. Г. Баланов, А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Эволюция возмущения опорного состояния полупроводниковой сверхрешетки вблизи порога генерации, Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика **20** (2012), No. 5, 165–178 .
- [70] В. В. Макаров, А. А. Короновский, С. А. Куркин, Ю. И. Левин, О. И. Москаленко, В. А. Максименко, А. Е. Храмов, Бифуркации и переходы к хаосу в системе “полупроводниковая сверхрешетка во внешнем резонаторе”, Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика **21** (2013), No. 5, 40–50 .
- [71] А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, К вопросу о выборе состояния пространственно-распределенной системы для расчета спектра показателей Ляпунова, Изв. РАН. Сер. физическая **75** (2011), No. 12, 1689–1692 .
- [72] К. Н. Алексеев, А. Г. Баланов, А. А. Короновский, В. А. Максименко, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Устойчивость стационарного состояния сильносвязанной полупроводниковой сверхрешетки, описываемой в рамках полуклассического подхода, Изв. РАН. Сер. физическая **77** (2013), No. 12, 1751–1754 .
- [73] Н. С. Фролов, В. А. Максименко, К. Ильенко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Применение спектра показателей Ляпунова для анализа динамики пучково-плазменных систем, моделируемых с помощью метода крупных частиц, Изв. РАН. Сер. физическая **78** (2014), No. 2, 237–240 .
- [74] V. A. Maksimenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, V. V. Makarov, O. I. Moskalenko, K. N. Alekseev, A. G. Balanov, Model for studying collective charge transport at the ohmic contacts of a tightly coupled semiconductor nanostructure, BRAS: Physics. **78** (2014), No. 12, 1285–1289.

- [75] V. V. Makarov, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, V. A. Maksimenko, K. N. Alekseev, A. G. Balanov, Transition to chaos and chaotic generation in a semiconductor superlattice coupled to an external resonator, *BRAS: Physics*. **78** (2014), No. 12, 1277–12890.
- [76] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, В. А. Максименко, Программа для расчета пространственных ляпуновских экспонент гидродинамической модели диода Пирса, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2012613430, ФГБОУ ВПО СГУ имени Чернышевского Н.Г., April 2012, Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 11.04.2012.
- [77] В. А. Максименко, А. Е. Храмов, А. А. Короновский, В. В. Макаров, Программа для моделирования электронного транспорта в полупроводниковой наноструктуре с омическими контактами (superlatticewithohmiccontactsimulation), Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2014617871, ФГБОУ ВПО СГТУ имени Гагарина Ю.А., August 2014, Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 05.08.2014.
- [78] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, Н. С. Фролов, А. Е. Храмов, К вопросу о спектре пространственных ляпуновских показателей нелинейной активной среды, описываемой комплексным уравнением Гинзбурга-Ландау, *Письма в ЖТФ* **36** (2010), No. 14, 19–25 .
- [79] H. Matsumoto, H. Yokoyama, D. Summers, Computer simulations of the chaotic dynamics of the Pierce beam–plasma system, *Phys.Plasmas* **3** (1996), No. 1, 177.
- [80] J. M. Finn, Diego del Castillo-Negrete, Daniel C. Barnes, Destabilization of the  $m = 1$  diocotron mode in non-neutral plasmas, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000), No. 11, 2401–2404.
- [81] T. Klinger, C. Schroder, D. Block, F. Greiner, A. Piel, G. Bonhomme, V. Naulin, Chaos control and taming of turbulence in plasma devices, *Phys.Plasmas* **8** (2001), No. 5, 1961–1968.
- [82] А. Е. Храмов, А. А. Короновский, I. S. Rempen, Controlling chaos in spatially extended beam-plasma system by the continuous delayed feedback, *Chaos* **16** (2006), No. 1, 013123.

- [83] A. Amann, J. Schlesner, A. Wacker, E. Schöll, Chaotic front dynamics in semiconductor superlattices, *Phys. Rev. B* **65** (2002), No. 19, 193313.
- [84] M. T. Greenaway, A. G. Balanov, E. Schöll, T. M. Fromhold, Controlling and enhancing terahertz collective electron dynamics in superlattices by chaos-assisted miniband transport, *Phys. Rev. B* **80** (2009), 205318.
- [85] A. E. Hramov I. S. Rempen, Investigation of the complex dynamics and regime control in Pierce diode with the delay feedback, *Int. J. Electronics* **91** (2004), No. 1, 1–12.
- [86] J. J. Brondijk, M. Spijkman, F. van Seijen, P. W.M. Blom, D. M. de Leeuw, Formation of inversion layers in organic field-effect transistors, *Phys. Rev. B* **85** (2012), No. 16, 165310.
- [87] Н. М. Рыскин, Численное моделирование клистрода на основе гидродинамических уравнений, *Изв. вузов. Радиофизика* **XL** (1997), No. 12, 1511 .
- [88] A. Wacker, Semiconductor superlattices: a model system for nonlinear transport, *Physics Reports* **357** (2002), 1–111.
- [89] E. Mosekilde, Rasmus Feldberg, Carsten Knudsen, Morten Hindsholm, Mode locking and spatiotemporal chaos in periodically driven Gunn diodes, *Phys. Rev. B* **41** (1990), No. 4, 2298–2306.
- [90] E. Mosekilde, J. S. Thomsen, Carsten Knudsen, Rasmus Feldberg, Phase diagrams for periodically driven Gunn diodes, *Physica D* **66** (2013), No. 1, 143–153.
- [91] H. Ito Y. Ueda, Emergence of a multidomain regime and spatiotemporal chaos in Gunn diodes under impact ionization conditions, *Phys. Lett. A* **280** (2001), No. 5, 312.
- [92] O. M. Bulashenko L. L. Bonilla, Chaos in resonant-tunneling superlattices, *Phys. Rev. B* **52** (1995), No. 11, 7849–7852.
- [93] O. M. Bulashenko, J. Garcia, L. L. Bonilla, Chaotic dynamics of electric-field domains in periodically driven superlattices, *Phys. Rev. B* **53** (1996), No. 15, 10008–10018.
- [94] P. H. Siegel, Thz technology, *IEEE trans. Microwave Theory Techniques* **50** (2002), No. 3, 910–928.

- [95] Alvaro, M., Carretero, M., Bonilla, L. L., Noise-enhanced spontaneous chaos in semiconductor superlattices at room temperature, *EPL* **107** (2014), No. 3, 37002.
- [96] A. G. Balanov, D. Fowler, A. Patane, L. Eaves, T. M. Fromhold, Bifurcations and chaos in semiconductor superlattices with a tilted magnetic field, *Phys. Rev. E* **77** (2008), No. 2, 026209.
- [97] C. Wang J. C. Cao, Current oscillation and chaotic dynamics in superlattices driven by crossed electric and magnetic fields, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **15** (2005), No. 1, 013111.
- [98] C. Wang, F. Wang, J. C. Cao, Terahertz radiation induced chaotic electron transport in semiconductor superlattices with a tilted magnetic field, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **24** (2014), No. 3, 033109.
- [99] A. Y. Shik, Superlattices-periodic semiconductor structures, *Sov. Phys. Semicond.* **8** (1975), 1195.
- [100] Leo Esaki R. Tsu, Superlattices and negative differential conductivity in semiconductors., *IBM Journal of Research and Development* **14** (1970), No. 1, 61–65.
- [101] T. M. Fromhold, A. Patane, S. Bujkiewicz, P. B. Wilkinson, D. Fowler, D. Sherwood, S. P. Stapleton, A. A. Krokhin, L. Eaves, M. Henini, N. S. Sankeshwar, F. W. Sheard, Chaotic electron diffusion through stochastic webs enhances current flow in superlattices, *Nature* **428** (2004), 726–730.
- [102] M. T. Greenaway, A. G. Balanov, D. Fowler, A. J. Kent, T. M. Fromhold, Using acoustic waves to induce high-frequency current oscillations in superlattices, *Phys. Rev. B* **81** (2010), 235313.
- [103] A. O. Selskii, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, O. I. Moskalenko, K. N. Alekseev, M. T. Greenaway, F. Wang, T. M. Fromhold, A. V. Shorokhov, N. N. Khvastunov, A. G. Balanov, Effect of temperature on resonant electron transport through stochastic conduction channels in superlattices, *Phys. Rev. B* **84** (2011), 235311.

- [104] F. Takens, Detecting strange attractors in dynamical systems and turbulence, Lectures Notes in Mathematics (D. Rand and L.-S. Young, eds.), N. Y.: Springer-Verlag, 1981, 366.
- [105] I. T. Gabe, Arterial blood flow by analogue solution of the navier-stokes equation, physics in medicine and biology **10** (1965), No. 2, 271–280.
- [106] K. DeVault, P. A. Gremaud, V. Novak, M. S. Olufsen, G. Vernieres, P. Zhao, Blood flow in the circle of willis: Modeling and calibration, Multiscale Modeling & Simulation **7** (2008), No. 2, 888–909.
- [107] С. П. Кузнецов А. П. Четвериков, К теории лампы обратной волны с поперечным полем, Радиотехника и электроника **23** (1978), No. 2, 385 .
- [108] С. П. Кузнецов Д. И. Трубецков, Нестационарные нелинейные явления при взаимодействии электронного потока, движущегося в скрещенных полях, с обратной электромагнитной волной, Изв. вузов. Радиофизика **20** (1977), No. 2, 300 .
- [109] С. П. Кузнецов А. П. Четвериков, Нестационарная нелинейная теория ультрарелятивистской ЛОВ на аномальном эффекте Доплера, Изв.вузов. Радиофизика **24** (1981), No. 1, 109 .
- [110] Н. М. Рыскин, В. Н. Титов, Д. И. Трубецков, Детали перехода к хаосу в системе электронный пучок — обратная электромагнитная волна, Доклады Академии Наук **358** (1998), 620 .
- [111] Н. М. Рыскин В. Н. Титов, Переход к развитому хаосу в цепочке двух однонаправленно-связанных ламп обратной волны, ЖТФ **73** (2003), No. 9, 90–94 .
- [112] B. B. Godfrey, Oscillatory nonlinear electron flow in Pierce diode, Phys. Fluids **30** (1987), 1553.
- [113] S. Kuhn A. Ender, Oscillatory nonlinear flow and coherent structures in Pierce-type diodes, J.Appl.Phys. **68** (1990), 732.

- [114] D. J. Sullivan, J. E. Walsh, E. A. Coutsiias, Virtual cathode oscillator (vircator) theory, granatstein, v.l. and alexeff, i. ed., High Power Microwave Sources, vol. 13, Artech House Microwave Library, 1987.
- [115] R. F. Soohoo, Microwave electronics, Addison-Wesley Longman, 1971.
- [116] Infrared and millimeter waves, k. button ed., Academic Press, New York, 1983.
- [117] K. L. Felch, B. G. Danly, H. R. Jory, K. E. Kreischer, W. Lawsom, B. Levush, R. J. Temkin, Characteristics and applications of fast-wave gyrodevices, Proceedings IEEE **87** (1999), No. 5, 752.
- [118] D. I. Trubetskov, E. S. Mchedlova, V. G. Anfinogentov, V. I. Ponomarenko, N. M. Ryskin, Nonlinear waves, chaos and patterns in microwave devices, Chaos **6** (1996), No. 3, 358.
- [119] B. P. Bezruchko, S. P. Kuznetsov, D. I. Trubetskov, JETP Lett. **29** (1979), 162.
- [120] N. S. Ginzburg, S. P. Kuznetsov, T. N. Fedoseeva, Radiophys. Quantum Electron **21** (1979), 728.
- [121] B. Levush, T. M. Antonsen, A. Bromborsky, W. R. Lou, Y. Carmel, Theory of relativistic backward wave oscillator with end reflections, IEEE Trans. Plasma Sci. **20** (1992), No. 3, 263.
- [122] G. S. Nusinovich, A. N. Vlasov, T. M. Antonsen, Nonstationary phenomena in tapered gyro-backward-wave oscillators, Phys.Rev.Lett. **87** (2001), No. 21, 218301.
- [123] V. Dronov, M. R. Hendrey, T. M. Antonsen, E. Ott, Communication with a chaotic traveling wave tube microwave generator, Chaos **14** (2004), No. 1, 30–37.
- [124] А. А. Короновский, Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов, Методы нелинейной динамики и хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. Т. 2. Нестационарные и хаотические процессы, М.: Физматлит, 2009 .
- [125] П. Роуч, Вычислительная гидродинамика, М.: Мир, 1980 .



- [126] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, В. А. Максименко, А. Е. Храмов, О возникновении обобщенной синхронизации в пучково-плазменных системах, связанных взаимно, Письма в ЖТФ **37** (2011), No. 13, 40–47 .