

ФГБОУ ВПО «САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

На правах рукописи

Аржанухина Дарья Сергеевна

**РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С
ДИНАМИКОЙ, ОПИСЫВАЕМОЙ
ОТОБРАЖЕНИЯМИ НА ТОРЕ**

01.04.03 – Радиофизика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Кузнецов С.П.

Саратов 2014

Оглавление

Введение.....	5
Глава 1. Отображения с гиперболическим хаосом.....	15
1.1. Введение.....	15
1.2. Диссипативный вариант отображения «кот Арнольда».....	16
1.2.1. Модифицированное отображение «кот Арнольда» и его динамика.....	16
1.2.2. Анализ свойств ляпуновских сумм.....	23
1.2.3. Анализ сжатия в фазовом пространстве.....	25
1.2.4. Бифуркационная структура плоскости параметров при больших амплитудах возмущения.....	28
Выводы к главе 1.....	32
Глава 2. Системы связанных осцилляторов с динамикой, описываемой гиперболическим отображением на торе.....	33
2.1. Введение.....	33
2.2. Система трех неавтономных осцилляторов с динамикой, описываемой отображением «кот Арнольда».....	35
2.2.1. Консервативное отображение с гиперболической динамикой «кот Арнольда» и отображение Фибоначчи.....	35
2.2.2. Построение модели, описывающей систему трёх связанных неавтономных осцилляторов.....	36
2.2.3. Численное исследование системы. Анализ динамики фаз. Анализ спектра показателей Ляпунова.....	37
2.2.4. Анализ системы на основе связанных осцилляторов ван дер Поля методом медленно меняющихся комплексных амплитуд.....	47
2.3. Система трех неавтономных осцилляторов с динамикой, описываемой модифицированным отображением Фибоначчи с гиперболическим DA- аттрактором.....	54
2.3.1. Модифицированное отображение Фибоначчи.....	54
2.3.2. Основные уравнения и механизм функционирования модели.....	58

2.3.3. Численное исследование системы. Анализ динамики фаз. Анализ спектра показателей Ляпунова.....	59
2.3.4. Анализ системы на основе связанных осцилляторов ван дер Поля методом медленно меняющихся комплексных амплитуд.....	66
Выводы к главе 2.....	72
Глава 3. Радиофизическая реализация систем с гиперболическим хаосом...	74
3.1. Введение.....	74
3.2. Схема электронного устройства с динамикой, соответствующей отображению «кот Арнольда».....	75
3.3. Схема электронного устройства с динамикой, соответствующей модифицированному отображению Фибоначчи.....	83
Выводы к главе.....	89
Глава 4. Системы с запаздывающей обратной связью с поведением фаз, описываемым отображением с гиперболической динамикой.....	90
4.1. Введение.....	90
4.2. Автономная система с запаздыванием, динамика фаз которой описываемой отображением «кот Арнольда».....	92
4.2.1. Основные уравнения и принцип функционирования системы.....	92
4.2.2. Численное моделирование динамики системы.....	96
4.3. Автономная система с запаздыванием с аттрактором типа Смейла-Вильямса.....	103
4.3.1. Основные уравнения модели автономной системы с аттрактором Смейла- Вильямса.....	103
4.3.2. Численное моделирование автономной системы с запаздыванием с аттрактором Смейла – Вильямса.....	104

4.4. Автономная система с запаздыванием с динамикой фаз, описываемой отображением Фибоначчи с DA-модификацией.....	110
4.4.1. Основные уравнения модели автономной системы с динамикой фаз, описываемой отображением Фибоначчи с DA-модификацией.....	110
4.4.2. Численный анализ динамики системы.....	111
Выводы к главе 4.....	117
Заключение.....	118
Благодарности.....	121
Список литературы.....	122
Публикации по теме диссертации.....	127

Введение

Актуальность темы исследования

В соответствии с базовыми принципами теории колебаний и нелинейной динамики, среди систем с хаотическим поведением наиболее значимыми с практической точки зрения и в качестве предмета теоретического анализа следовало бы признать системы, в которых хаос характеризуется свойством структурной устойчивости [1-10]. Характеристики такого хаоса нечувствительны к вариации параметров и функций, фигурирующих в определении оператора эволюции. На уровне абстрактных моделей такие системы введены и изучаются в рамках так называемой гиперболической теории, разработку которой надо признать одним из выдающихся достижений математической теории динамических систем XX века. В силу присущей структурной устойчивости и наличия глубокого и полного теоретического описания, физическая реализация систем с гиперболическим хаосом может представлять интерес для приложений, в том числе в радиотехнике и электронике (скрытая коммуникация, генерация случайных чисел, шумовая локация [11-14]).

Специальный класс систем со структурно устойчивым хаосом образуют системы Аносова, у которых все фазовое пространство представляет собой гиперболическое инвариантное множество, составленное из траекторий седлового типа, причем типичная траектория посещает плотное во всем фазовом пространстве множество точек. Системы Аносова могут быть как консервативными (например, отображение Аносова, которое также называют отображением «кот Арнольда»), так и диссипативными, у которых гиперболическая хаотическая динамика имеет место на вложенном в фазовое пространство притягивающем инвариантном множестве, представляющем собой однородно гиперболический аттрактор. Аттрактор гиперболический, если для него выполнен ряд условий, основным из которых является то, что

все траектории, принадлежащие аттрактору, седловые. Хаотическая природа динамики на таких аттракторах математически строго обоснована.

Примером такого аттрактора может служить гиперболический DA-аттрактор. Этот тип однородно гиперболических аттракторов введен в рассмотрение Смейлом для отображений на торе, полученных определенной модификацией отображений Аносова [15,16]. (Собственно аббревиатура DA означает “Derived from Anosov”.)

Степень разработанности темы исследования

В большинстве реальных физических систем и модельных дифференциальных уравнений, демонстрирующих хаотическую динамику, реализуются аттракторы, не являющиеся гиперболическими. Такие аттракторы, как правило, не обладают структурной устойчивостью. Наиболее известные примеры негиперболических аттракторов это аттрактор Лоренца [17] (квазигиперболический аттрактор), аттрактор Эно [18] (квазиаттрактор) и другие.

Системы с гиперболическими аттракторами первоначально были представлены лишь абстрактными математическими моделями, построенными на основе геометрических конструкций, такими как соленоид Смейла - Вильямса и аттрактор Плыкина [1-10]. Однако, в последнее время появились работы, где указана возможность присутствия гиперболических аттракторов в системах, допускающих физическую реализацию [19-30]. Например, в статье [22] исследуется система с аттрактором Смейла – Вильямса, составленная из двух связанных осцилляторов ван дер Поля с модуляцией параметров и попеременной передачей возбуждения между подсистемами. В работе [23] обсуждается возможность существования гиперболического аттрактора типа Плыкина в модели нейрона Хиндмарша – Роуза. В работе [24] предложена электронная схема, динамика которой в установившемся режиме ассоциируется с аттрактором типа Плыкина. В статье [25] исследуется система четырех связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля с динамикой, соответствующей

гиперболическому отображению «кот Арнольда». В статье [27] предложена система на основе неавтономного осциллятора ван дер Поля с запаздыванием, в которой реализуется аттрактор Смейла - Вильямса

Что же касается DA-аттракторов, то они рассматривались исключительно для искусственно сконструированных отображений, а примеров систем с аттракторами этого типа, допускающих физическую реализацию, в литературе представлено не было. В настоящей диссертационной работе предлагается физическая система с динамикой, соответствующей отображению с гиперболической хаотической динамикой «кот Арнольда», которая затем подвергается модификации, приводящей к возникновению DA-аттрактора. Таким образом, впервые вводится в рассмотрение физически реализуемая система с гиперболическим DA-аттрактором.

Рассмотренные в настоящей работе системы открывают интересные возможности для конкретного исследования перехода от динамики Аносова к DA-аттракторам в контексте физических систем, что способствует наполнению содержанием абстрактных представлений математической теории. С практической точки зрения, эти системы могут представлять интерес как генераторы структурно устойчивого хаоса с хорошо определенными и допускающими детальный математический анализ свойствами.

Цели и задачи работы

Целью настоящей работы является построение систем с гиперболическим хаосом (в том числе систем с DA-аттрактором), допускающих физическую реализацию, а также исследование разработанных моделей в численном эксперименте и их радиофизическая реализация; указание возможности перехода в таких системах от одного типа однородно гиперболического аттрактора к другому.

Были решены следующие задачи:

- 1) Исследование отображения с гиперболическим DA-аттрактором, полученным в результате введения в консервативную систему с гиперболическим хаосом «кот Арнольда» диссипативной добавки.
- 2) Построение и исследование системы на основе трех неавтономных осцилляторов ван дер Поля с попеременным возбуждением, динамика фаз которой определяется гиперболическим отображением на торе. Осуществление перехода в разработанной модели от динамики Аносова к поведению на гиперболическом DA-аттракторе.
- 3) Реализация в виде радиофизической схемы предложенной модели на основе трех попеременно возбуждающихся осцилляторов, демонстрирующей гиперболический хаос.
- 4) Разработка и исследование автономной системы, построенной на основе логистического уравнения с запаздыванием. Осуществление перехода в полученной модели от динамики Аносова к поведению на хаотическом аттракторе Смейла-Вильямса.

Научная новизна

В работе впервые введена в рассмотрение система с гиперболическим DA-аттрактором, допускающая физическую реализацию, а также рассмотрена возможность перехода от систем с динамикой Аносова к системам с другими типами однородно гиперболических аттракторов.

Введена в рассмотрение и исследована система трех неавтономных осцилляторов ван дер Поля с динамикой фаз, соответствующей отображению Аносова («кот Арнольда»). Осуществлена модификация исходной модели, приводящая к появлению в отображении Пуанкаре системы гиперболического DA-аттрактора.

Проведено схемотехническое моделирование систем с динамикой фаз, описываемой отображением «кот Арнольда» и модифицированным отображением Фибоначчи (система с DA-аттрактором).

Введена в рассмотрение и исследована в численном эксперименте автономная система, построенная на основе дифференциального логистического уравнения с запаздыванием с динамикой фаз, описываемой отображением Аносова. Рассмотрен частный случай исходной модели, позволяющий перейти к системе с аттрактором Смейла – Вильямса в отображении Пуанкаре.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы заключается в указании способов построения систем с гиперболическим DA-аттрактором, допускающим физическую реализацию, поскольку до выполнения настоящей работы DA – аттракторы рассматривались исключительно для искусственно сконструированных отображений. Также в работе осуществляется переход от динамики Аносова к DA-аттрактору и аттрактору Смейла – Вильямса.

С практической точки зрения, такие системы могут представлять интерес как генераторы структурно устойчивого хаоса, поскольку генерируемый хаос будет нечувствителен к искажениям в канале передачи, техническим флуктуациям и шумам, неидентичности параметров передатчика и приемника и т.д.

Методология и методы исследования

В ходе выполнения работы был использован ряд численных методов, так же был использован приближенный метод теории нелинейных колебаний для вывода укороченных уравнений (метод медленно меняющихся амплитуд).

Для анализа динамики исследуемых систем были применены такие методы, как построение временных реализаций, фазовых портретов аттракторов, бифуркационных диаграмм, расчет показателей Ляпунова.

Для исследования плоскости параметров диссипативного отображения «кот Арнольда» использовались карты динамических режимов, карты показателей Ляпунова, были построены бассейны притяжения аттракторов, а

также был проведен анализ сжатия в фазовом пространстве, основанный на вычислении значения определителя матрицы Якоби в точках фазовой плоскости с достаточно малым шагом.

Для численного решения дифференциальных уравнений использовался метод Рунге – Кутты четвертого порядка, для расчета показателей Ляпунова применялся алгоритм Бенеттина.

Для схемотехнического моделирования систем использовался программный пакет «Multisim 10.0». С его помощью были получены осциллограммы, фазовые портреты, спектры предложенных схем.

Положения, выносимые на защиту

- 1) Гиперболический DA-аттрактор можно реализовать путем модификации консервативного отображения с хаотической гиперболической динамикой «кот Арнольда» путем добавления диссипативных членов, представленных гладкими функциями.
- 2) Грубый гиперболический хаос, соответствующий динамике в отображении Пуанкаре, описываемой на аттракторе гиперболическим отображением Аносова, реализуется в системе, на основе трех связанных неавтономных осцилляторов с попеременным возбуждением. При определенной модификации этой системы возможно осуществление перехода от динамики Аносова к хаотическому поведению, ассоциирующемуся с гиперболическим DA-аттрактором.
- 3) Динамика, соответствующая гиперболическому хаосу в отображении «кот Арнольда», отображении Фибоначчи, отображении с DA-аттрактором, допускает радиofизическую реализацию в виде схем, построенных на основе трех связанных автоколебательных элементов с попеременным возбуждением.

4) Гиперболический хаос реализуется в автономной системе, построенной на основе логистического уравнения с запаздыванием, содержащей две петли обратной связи с разными временами задержки. При выбранных соответствующим образом не равных друг другу временах задержки оказывается возможным обеспечить динамику фаз высокочастотного заполнения последовательно генерируемых цугов колебаний, соответствующую отображению Аносова, тогда как в случае их равенства, хаотическая динамика определяется растягивающим отображением окружности.

Достоверность результатов

Достоверность результатов работы определяется использованием в расчетах известных, апробированных численных методов, соответствием качественного описания результатам численного моделирования и результатам моделирования с помощью программного пакета «Multisim 10.0».

Личный вклад соискателя

Постановка задач и обсуждение результатов проводились совместно с научным руководителем и соавторами совместных работ. Автором выполнено программирование, проведение численных расчетов, осуществление схемотехнического моделирования схем и обработка данных.

Публикации и апробация

Основные результаты диссертационной работы были представлены в виде докладов на следующих научных конференциях: V, VI, VII и VIII Всероссийских конференциях молодых ученых «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2010 - 2013 гг.), школах-конференциях «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (2009–2012 гг.).

Частично результаты диссертации получены в процессе выполнения работ, поддержанных грантами РФФИ № 12-02-00342, № 14-02-31162.

По результатам диссертации опубликовано 11 работ, из них, 5 статей [A1-

A5] в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК и 6 тезисов докладов [A6-A11].

Структура и объем работы.

Работа содержит 128 страниц, из них 43 страницы иллюстраций и 7 страниц список литературы из 62 наименований.

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, и заключения.

Во введении обсуждается актуальность и степень разработанности темы исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

В первой главе исследуется отображение, представляющее собой модификацию консервативного отображения с гиперболической хаотической динамикой «кот Арнольда», полученное в результате введения в исходную систему диссипативной добавки [A4, A8–A11]. В данной системе, при малых значениях амплитуды введенного возмущения, реализуется гиперболический хаос, и в определенном диапазоне имеет место гиперболический хаотический аттрактор с поперечной канторовой структурой (DA-аттрактор), разрушающийся при дальнейшем увеличении возмущения.

Во второй главе представлены системы, построенные на основе связанных осцилляторов ван дер Поля, динамика фаз которых описывается отображениями с гиперболической хаотической динамикой [A2, A3, A7].

В первом разделе второй главы исследуется система трех связанных неавтономных автоколебательных элементов, в которой поведение фаз осцилляторов за период изменения коэффициентов в уравнениях соответствует отображению Аносова, демонстрирующему хаотическую динамику [A3]. Результаты численного исследования позволяют заключить, что аттрактор отображения Пуанкаре можно рассматривать, по крайней мере, в грубом приближении, как располагающийся в шестимерном фазовом

пространстве на двумерном торе, динамика на котором представляет собой гиперболический хаос, характерный для систем Аносова.

Во втором разделе второй главы рассматривается система трех связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля, в которой поведение фаз осцилляторов за характерный период приближенно описывается отображением Фибоначчи с модификацией типа «хирургии Смейла», приводящей к возникновению DA-аттрактора (“Derived from Anosov”) [A2]. Согласно численным результатам, аттрактор стробоскопического отображения представляет собой объект, локализованный вблизи двумерного тора в шестимерном фазовом пространстве системы.

В третьей главе приводятся схемы электронных устройств на основе связанных осцилляторов ван дер Поля, соответствующих рассмотренным во второй главе системам с гиперболическим хаосом [A1, A6]. Поведение фаз осцилляторов за период модуляции для первой системы соответствует отображению Аносова, демонстрирующему хаотическую динамику, а для второй – отображению Фибоначчи с модификацией, приводящей к возникновению гиперболического DA-аттрактора.

В четвертой главе рассматривается автономная система, построенная на основе модификации логистического дифференциального уравнения с запаздыванием и генерирующая последовательные цуги колебаний с фазой, трансформирующейся в соответствии с хаотическим отображением того или иного вида [A5]. Система содержит две петли обратной связи, характеризующиеся двумя, вообще говоря, разными временами задержки. В случае их равенства, хаотическая динамика определяется аттрактором Смейла-Вильямса, который соответствует двукратно растягивающему отображению окружности для фазы несущего сигнала цугов колебаний. С другой стороны, при выбранных соответствующим образом временах задержки динамика фаз соответствует отображению Фибоначчи на торе. Таким образом, на аттракторе осуществляется динамика типа Аносова. В обоих случаях аттракторы проявляются грубость (отсутствие окон

регулярности окон при изменении параметров) и, предположительно, относятся к классу структурно устойчивых гиперболических аттракторов.

В заключении сформулированы выводы и приведены основные результаты, полученные в диссертационной работе.

Глава 1. Отображения с гиперболическим хаосом

1.1. Введение

В связи с возможностью наблюдения гиперболических аттракторов в реальных системах, динамика которых зависит от управляющих параметров, становится актуальным вопрос о путях (сценариях) возникновения (разрушения) гиперболических аттракторов при изменении параметров. Такого рода исследования удобно проводить с использованием моделей с дискретным временем в виде отображений [10, 31-34]. Одним из способов получить отображение, имеющее гиперболический аттрактор, является введение диссипации в консервативное отображение, демонстрирующее гиперболический хаос, посредством модификации, предложенной Смейлом. Конкретный вид отображения, полученного добавлением записанного в аналитической форме возмущения в известное отображение «кот Арнольда», указан, в частности, в работе [19].

Настоящая глава посвящена исследованию диссипативной модификации консервативного отображения «кот Арнольда». Рассматриваемая модель, помимо присутствия гиперболического аттрактора, демонстрирует достаточно сложную динамику после его разрушения.

В первом разделе главы вводится в рассмотрение модифицированное отображение «кот Арнольда» и исследуется его динамика. Во втором разделе проводится анализ свойств ляпуновских сумм, который позволяет выделить области в пространстве параметров системы соответствующие гиперболическому и негиперболическому хаосу. В третьем разделе главы производится анализ сжатия в фазовом пространстве системы, что также позволяет выявить при каких значениях параметров аттрактор является гиперболическим, а при каких уже нет. В четвертом разделе исследуется

плоскость параметров при больших значениях амплитуды введенного возмущения, когда гиперболический хаос уже разрушен.

1.2. Диссипативный вариант отображения «кот Арнольда»

1.2.1. Модифицированное отображение «кот Арнольда» и его динамика

Примером консервативной системы, демонстрирующей гиперболический хаос, является отображение «кот Арнольда» [10, 31, 32, 35], которое может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + y_n \pmod{1}, \\y_{n+1} &= x_n + 2y_n \pmod{1}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Название связано с тем, что для иллюстрации этого отображения В.И. Арнольд использовал в своих лекциях и книгах изображение кота. Пространством состояний системы служит поверхность тора, на которой переменные $2\pi x$ и $2\pi y$ задают координаты по параллели и меридиану. Для графических построений часто используют развертку тора, представляющую собой единичный квадрат. Первый шаг действия отображения состоит в линейном растягивающем преобразовании координат, а второй – в переносе элементов картинки, удалившихся за рамки единичного квадрата, обратно в него. После достаточного числа итераций картина представляет собой набор узких чередующихся черных и белых полос. (**рис.1.1**). Таким образом, отображение «кот Арнольда» обладает свойством перемешивания. Отображение (1.1) относится к классу так называемых систем Аносова: задаваемая им динамика является хаотической, причем типичная траектория покрывает плотно поверхность тора, выступающего в качестве фазового пространства системы.

Отметим, что отображение имеет в начале координат неустойчивую неподвижную точку седлового типа, поведение в окрестности которой качественно представлено на **рис.1.2** слева. Для того чтобы модельная

система имела аттрактор, Смейл предложил модифицировать отображение локально в окрестности точки седла так, чтобы динамика соответствовала диаграмме на **рис. 1.2** справа. При этом в модифицированном отображении неподвижная точка, имевшая ранее тип седла, становится отталкивающей вдоль устойчивого направления, превращаясь в неустойчивый узел, а в ее окрестности возникают две новые седловые точки. Аттрактор в полученной модели – гиперболический, и Смейл называет его DA-аттрактором («Derived from Anosov») [15]. Возмущение, посредством которого из отображения (1) получается отображение с DA-аттрактором, можно задать в аналитической форме, как предложено в работе [19], путем прибавления к правым частям уравнений диссипативной добавки определенного вида, величина которой характеризуется некоторым параметром ε .

Вводимая добавка выбирается следующим образом. Отображение «кот Арнольда» можно представить в виде двух отображений, соответствующих полушагу дискретного времени. Если

$$x_{n+1/2} = x_n + y_n \pmod{1}, y_{n+1/2} = y_n \pmod{1}$$

и

(1.2)

$$x_{n+1} = x_{n+1/2} \pmod{1}, y_{n+1} = x_{n+1/2} + y_{n+1/2} \pmod{1}$$

тогда на полном шаге получается (1.1). В первое уравнение на первом полушаге вводится добавка в виде гладкой функции, зависящей от x . При $x=0$ эта функция должна обращаться в нуль, чтобы в модифицированном отображении неподвижная точка находилась в начале координат, так же, она должна быть нечетной и иметь период 1. После разложения в ряд Фурье учитываются два первых слагаемых, причем амплитуды выбираются таким образом, чтобы вблизи точки $x=0$ с точностью до второго порядка добавка обращалась в нуль.

На втором полушаге вводится добавка в виде такой же функции от y . Комбинируя оба полушага, получаем

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + y_n + \varepsilon(\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi x_n) / 2\pi \pmod{1}, \\
 y_{n+1} &= x_n + 2y_n + \varepsilon(\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi x_n + \sin 2\pi y_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi y_n) / 2\pi \pmod{1}.
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Диаграмма, показанная на **рис. 1.2** слева, отвечает случаю $\varepsilon = 0$, а диаграмма справа – некоторой подходящим образом заданной величине $\varepsilon > 0$.

При нулевом и малом значении амплитуды возмущения динамика на всей поверхности тора на качественном уровне соответствует отображению «кот Арнольда», но при ненулевых ε в распределении инвариантной меры становится заметной его неоднородность. Затем, в некотором интервале по параметру ε реализуется гиперболический DA-аттрактор. При дальнейшем увеличении параметра ε гиперболический аттрактор разрушается; при этом может возникать негиперболический хаос, а также различные периодические режимы динамики.

На **рис. 1.3** приведены графики зависимости показателей Ляпунова от амплитуды возмущения ε , бифуркационное дерево отображения (1.3) на плоскости (x, ε) , построенное для множества начальных условий (x, y) , (условия выбирались на квадратной решетке размером 10 на 10 точек с шагом 0.001) и соответствующее ему бифуркационное дерево в пространстве (x, y, ε) .

При небольших значениях амплитуды возмущения в системе реализуется гиперболический хаос, который разрушается при дальнейшем увеличении амплитуды возмущения. Подтверждением присутствия в данной области именно гиперболического хаоса может являться примерно постоянное значение старшего показателя Ляпунова и отсутствие окон периодичности. Затем возникают регулярные режимы, которые переходят в квазипериодические и затем в хаотические.

С целью снятия возможного вырождения, отображение (1.3) целесообразно модифицировать путем введения еще одного аддитивного параметра μ , что приводит к системе (1.4):

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + y_n + \mu + \varepsilon(\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi x_n) / 2\pi \pmod{1}, \\
 y_{n+1} &= x_n + 2y_n + \varepsilon(\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi x_n + \sin 2\pi y_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi y_n) / 2\pi \pmod{1}.
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

На **рис.1.4** приведены карта динамических режимов отображения (1.4) на плоскости параметров (ε, μ) и аттракторы в различных ее точках. На карте режимов разными цветами обозначены области существования устойчивых циклов различных периодов. Как можно видеть, в системе реализуются аттракторы разных типов: гиперболический хаотический аттрактор, периодические аттракторы, аттракторы, возникающие после каскада бифуркаций удвоения периода, квазипериодические аттракторы и аттракторы, возникающие вследствие разрушения инвариантной кривой.

Видно, что помимо разрушения гиперболического хаотического аттрактора исследуемые отображения демонстрируют весьма нетривиальную динамику в областях значительных амплитуд возмущения, отвечающих существованию периодических режимов.

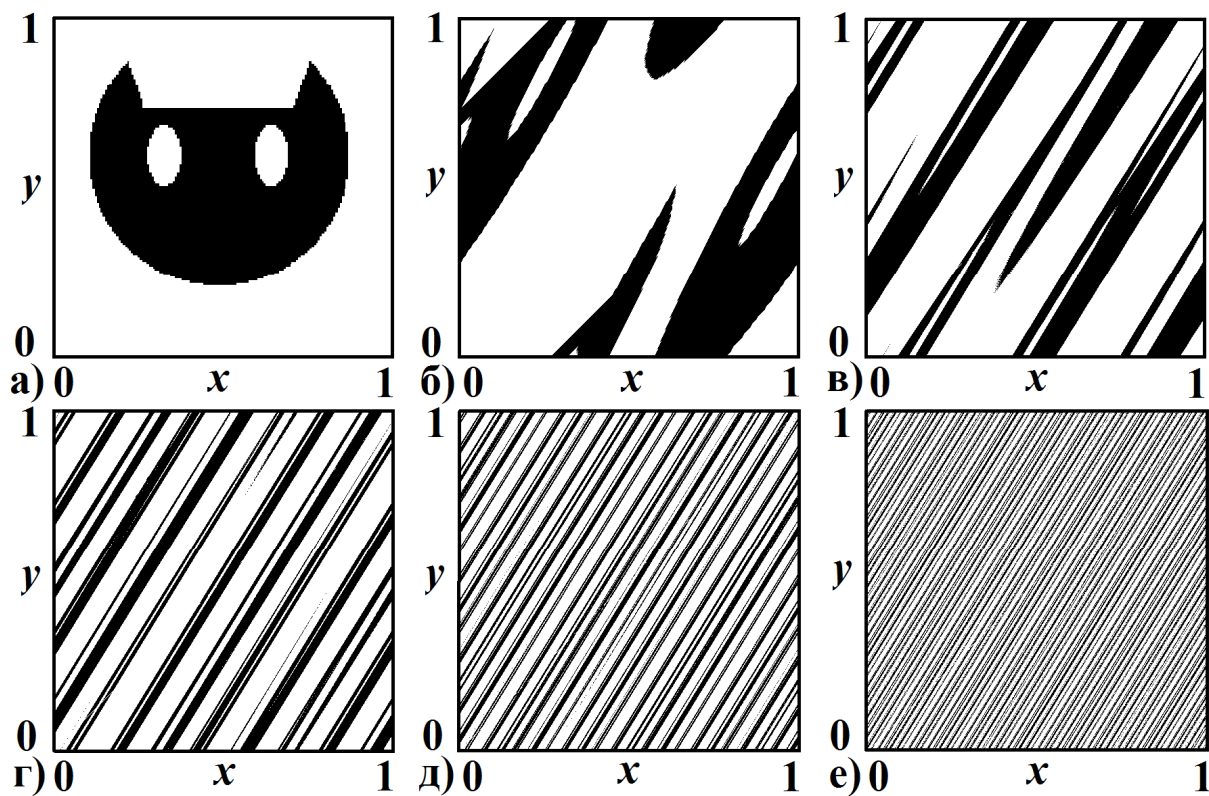


Рис.1.1. Действие отображения “кот Арнольда” на исходную область при числе итераций: (а) $n=0$; (б) $n=1$; (в) $n=2$; (г) $n=3$; (д) $n=4$; (е) $n=5$.

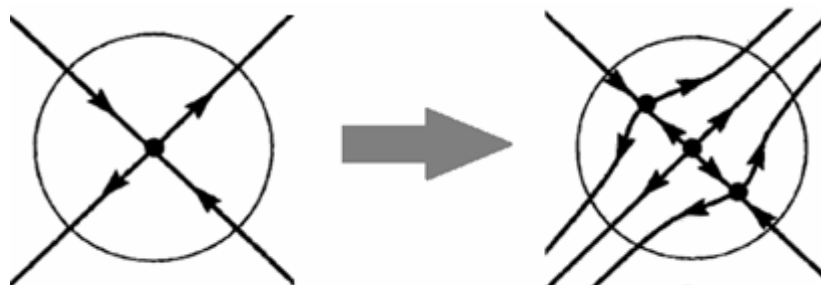


Рис.1.2. Иллюстрация модификации отображения в окрестности неподвижной точки (рисунок из статьи [19]).

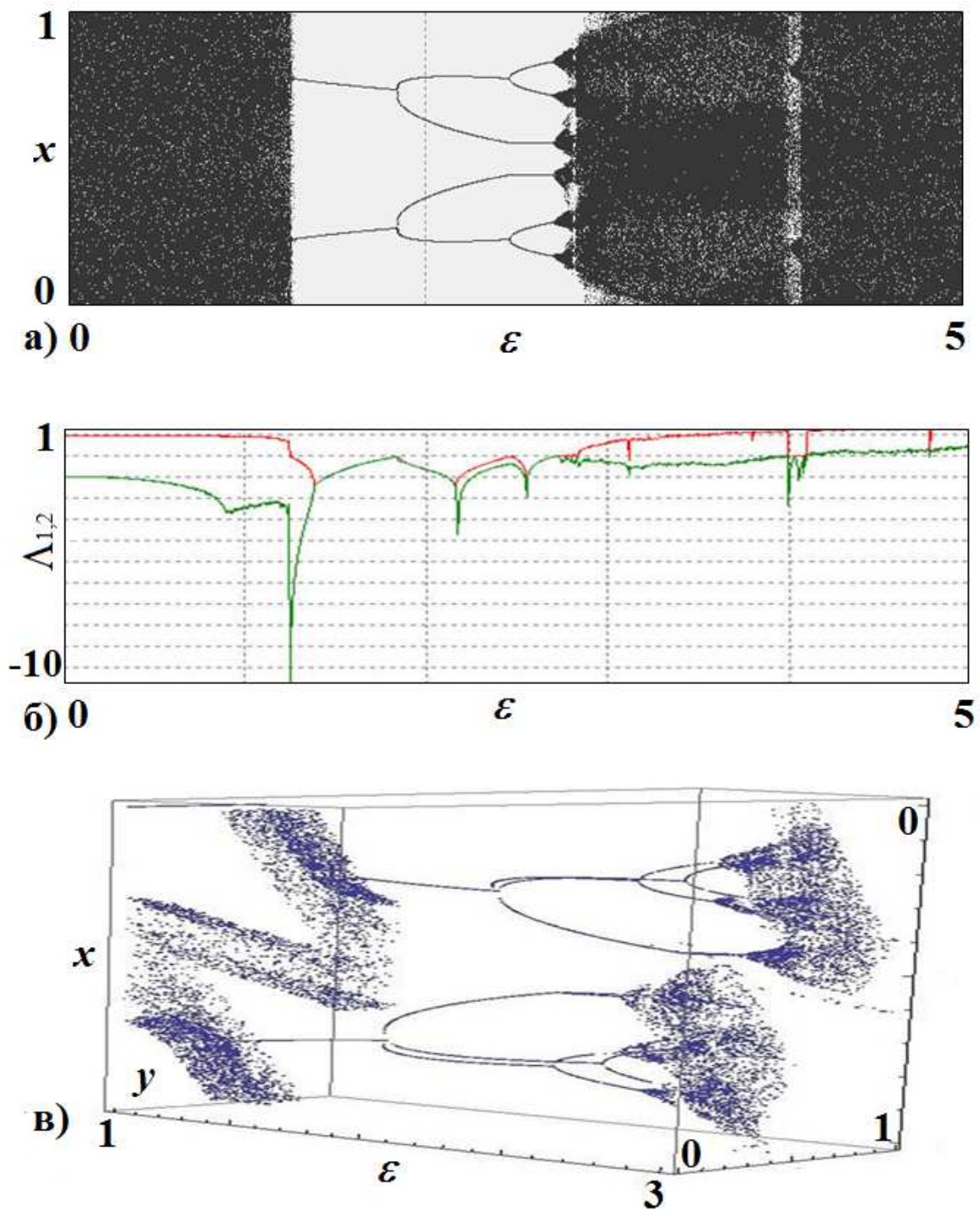


Рис.1.3. Бифуркационное дерево на плоскости (x, ε) (а), графики зависимости показателей Ляпунова от параметра ε (б) и бифуркационное дерево в пространстве (x, y, ε) отображения (1.3).

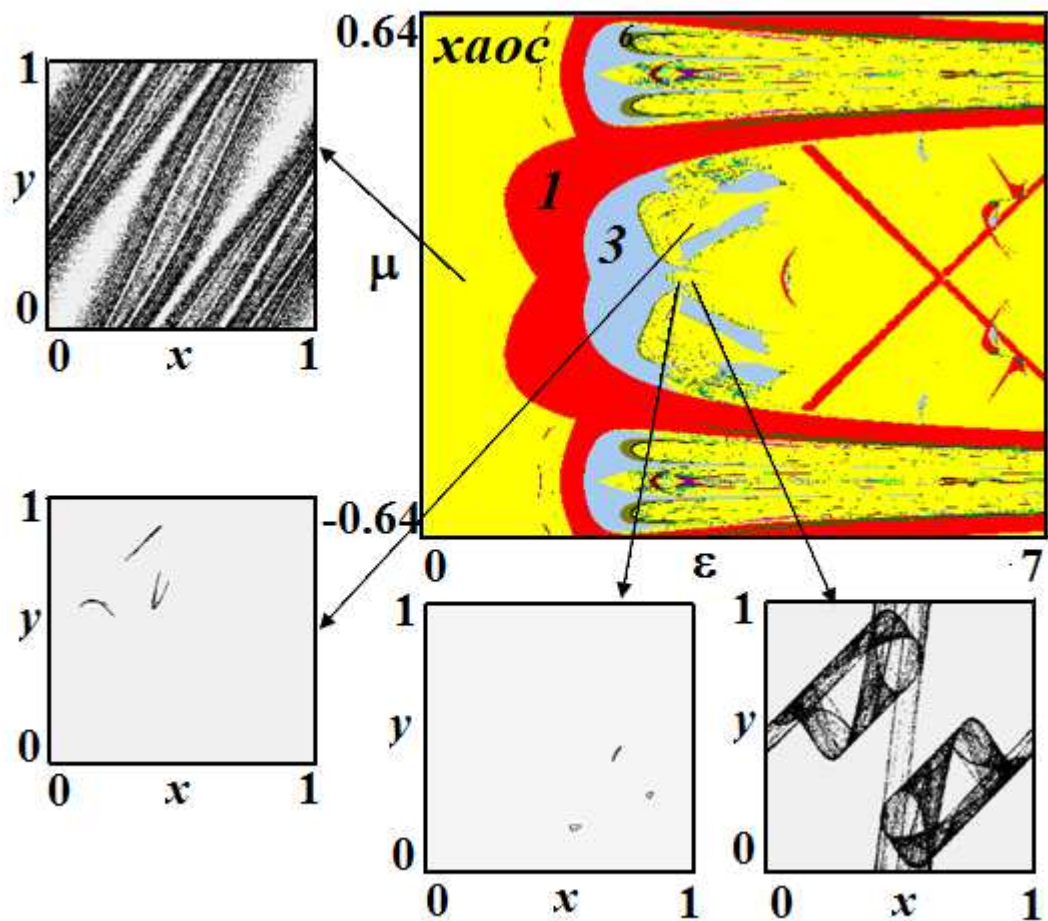


Рис.1.4. Карта динамических режимов на плоскости параметров (ϵ, μ) и аттракторы отображения в различных точках для отображения (1.4)

1.2.2. Анализ свойств ляпуновских сумм

Для исследования хаотической динамики целесообразно использовать карты старшего показателя Ляпунова. На **рис.1.5** приведена такая карта для отображения (1.4) на плоскости параметров (ε, μ) и аттракторы в различных точках хаотической области. Оттенками серого обозначены области с регулярным режимом (отрицательный показатель Ляпунова), белый цвет отвечает квазипериодической динамике (нулевой показатель Ляпунова). Областям, обозначенным синим и красным цветом, соответствует хаотическая динамика (положительный показатель Ляпунова).

Для выяснения структуры областей хаотической динамики используется следующий прием. Чтобы получить в данной точке плоскости параметров показатель Ляпунова, производится, как обычно, вычисление суммы логарифмов отношений, характеризующих изменение нормы вектора возмущения на одной итерации. При проведении расчетов наибольшего показателя Ляпунова отслеживаем, являются ли все члены ляпуновской суммы положительными, или встречаются также и отрицательные величины. В первом случае пиксель на карте отмечается красным цветом, а в противном случае – синим. Преобладание красного цвета свидетельствует о преимущественно гиперболической природе хаотической динамики в данной области.

На карте старшего показателя Ляпунова можно выделить области однородного красного и синего цвета, а так же область неоднородного красного цвета с синими вкраплениями. Визуально можно определить, что в однородной красной области аттрактор не имеет разрывов и локальных уплотнений и может считаться гиперболическим, а в однородной синей - негиперболическим. Неоднородная область является переходной, здесь можно видеть образование перегибов и уплотнений в структуре аттрактора.

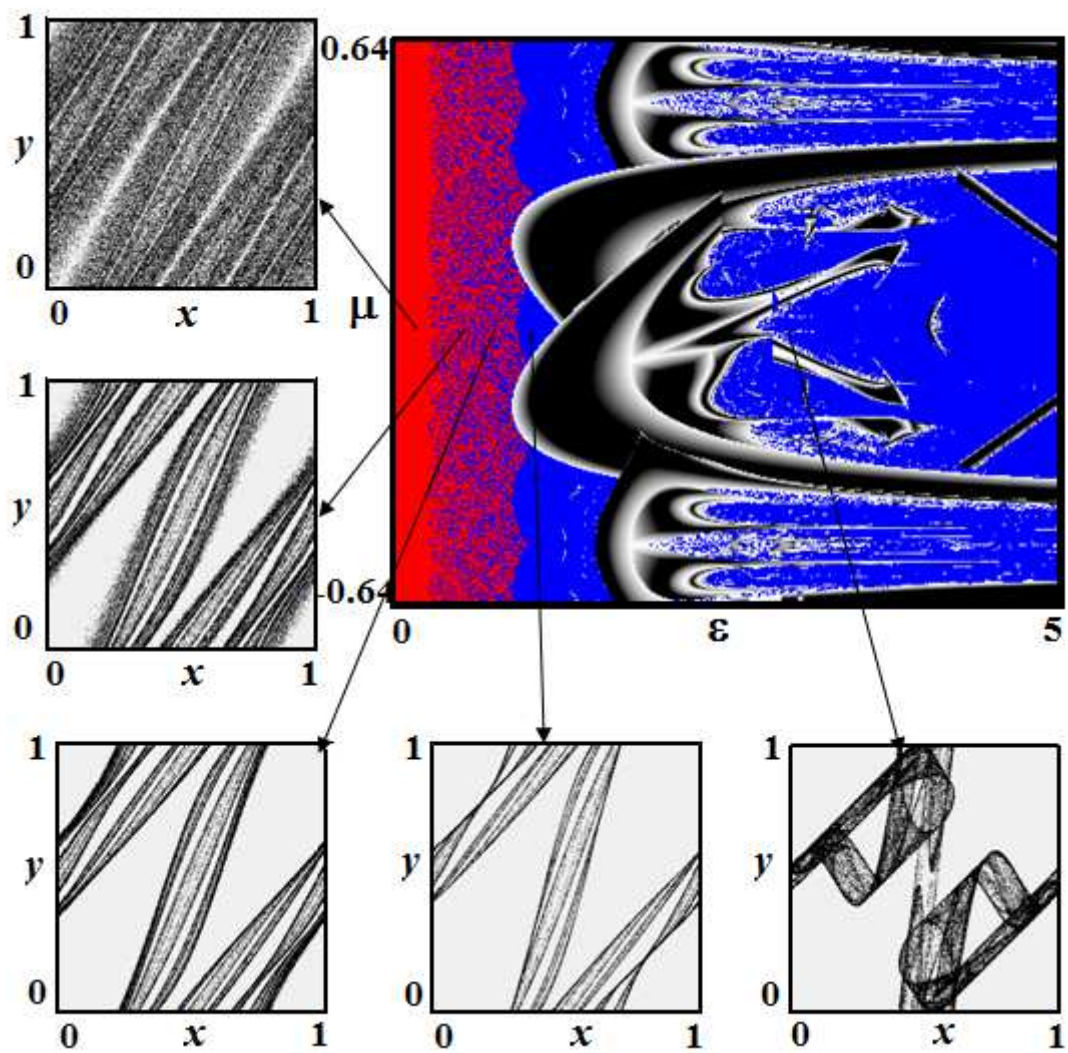


Рис.1.5. Карта старшего показателя Ляпунова отображения (1.4) на плоскости параметров (ϵ, μ) и аттракторы отображения в различных точках.

1.2.3. Анализ сжатия в фазовом пространстве

Помимо вычисления показателя Ляпунова, можно непосредственно определить области в пространстве состояний, где имеет место сжатие и растяжение фазового объема. Для этого необходимо вычислить значение определителя матрицы Якоби отображения в точках фазовой плоскости с достаточно малым шагом.

Хорошо известно, если якобиан двумерного отображения не обращается в нуль, то существует обратное ему отображение, следовательно, итерации можно проводить, как в прямом времени, так и в обратном. Если же определитель Якоби обращается в нуль, то отображение теряет обратимость и аттрактор в данном случае не является гиперболическим. Единичный якобиан соответствует сохранению фазового объема и консервативной динамике.

На **рис. 1.6** показан вид диаграмм на фазовой плоскости отображения (1.4), раскрашенных в соответствии с результатами вычисления определителя Якоби. Белый цвет соответствует якобиану равному нулю, синий цвет соответствует отрицательному якобиану меньше -1 , зеленый - отрицательному якобиану больше -1 , розовый соответствует положительному якобиану, который меньше 1 , красный – единичному якобиану, а желтый отвечает якобиану больше единицы.

Как можно видеть, при малых значениях ε якобиан положителен во всем единичном квадрате; это свидетельствует о том, что отображение является обратимым. Момент потери обратимости отвечает тому, что значение якобиана достигает нуля. Для отображения (1.4) это происходит при $\varepsilon \approx 0.8$. При этом значении на плоскости появляются четыре белые точки, с ростом амплитуды возмущения их площадь увеличивается и затем эти четыре области сливаются в одну. На карте показателя Ляпунова значению ε , при котором отображение теряет обратимость, соответствует неоднородная область, а ситуации слияния четырех областей с нулевым якобианом соответствует граница однородной синей и неоднородной областей. При

дальнейшем увеличении ε на плоскости (x,y) появляются области, соответствующие отрицательному якобиану. Так же можно видеть небольшую область в центре единичного квадрата, отвечающую якобиану равному единице. Это свидетельствует о том, что вблизи начала координат динамика возмущенного отображения довольно близка к исходной системе. Она исчезает при достаточно большом значении ε .

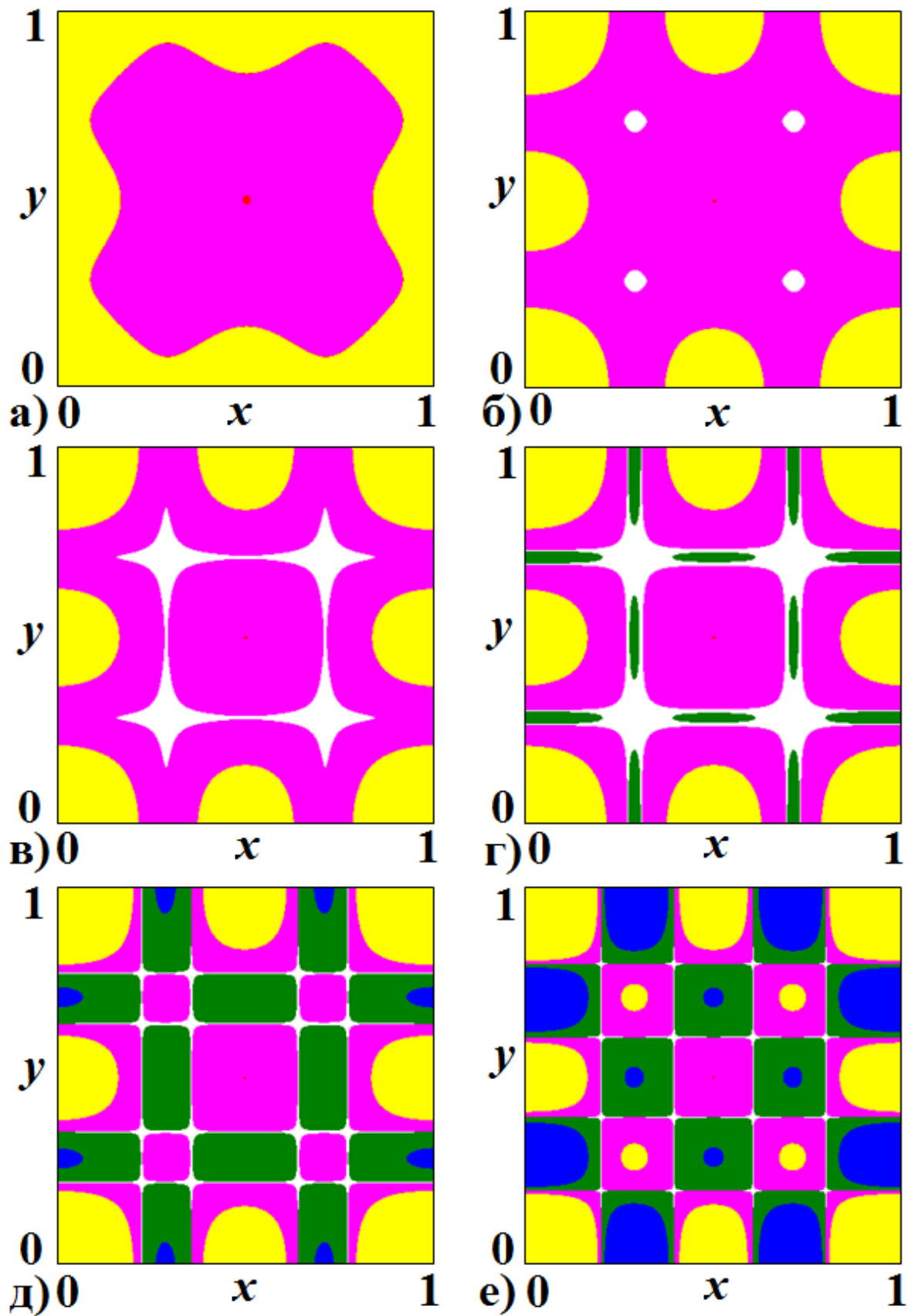


Рис.1.6. Карты на плоскости (x, y) для отображения (1.4) при значениях ϵ : (а) $\epsilon = 0.135$, (б) $\epsilon = 0.820$, (в) $\epsilon = 0.880$, (г) $\epsilon = 0.934$, (д) $\epsilon = 1.273$, (е) $\epsilon = 1.842$.

1.2.4. Бифуркационная структура плоскости параметров при больших амплитудах возмущения

Будем исследовать динамику отображения при достаточно больших значениях ε , когда гиперболический хаос уже разрушен.

Плоскость параметров (ε, μ) отображения (1.4) может быть разделена на две области, демонстрирующие разную динамику: вблизи линии $\mu = -0.5$ при достаточно большом значении амплитуды возмущения наблюдается возникновение квазипериодической динамики и системы языков синхронизации и вблизи линии $\mu = 0$ образование некоторой бифуркационной структуры.

Рассмотрим плоскость параметров отображения (1.4) более подробно. На **рис.1.7** приведен увеличенный фрагмент карты динамических режимов вблизи линии $\mu = -0.5$ и аттракторы в различных ее точках. Видно, что при увеличении амплитуды возмущения из цикла периода один возникает цикл периода три, а затем появляется инвариантная кривая, видоизменяющаяся с ростом параметра, и дальнейший переход к хаосу происходит в результате ее разрушения. Так же можно наблюдать классическую систему языков синхронизации, опирающихся на линию $\mu = -0.5$; среди которых некоторые (например, периодов 4,5 и 7) имеют форму, несколько отличающуюся от классической, в частности, опираются на основание конечной ширины. Область периода три имеет также нетипичный вид. Вместе с тем внутри нее есть типичные для языков синхронизации удвоения периода, поэтому можно сделать предположение, что область периода три так же является языком синхронизации.

Таким образом, устройство плоскости параметров в окрестности линии $\mu = -0.5$ довольно типично для систем с квазипериодической динамикой, а область устойчивого 3-цикла в этом случае может быть интерпретирована как язык синхронизации с числом вращения 1:3.

Вблизи линии $\mu = 0$ при значении амплитуды возмущения порядка единицы происходит образование некоторой бифуркационной структуры, которая представляет собой, как видно из **рис.1.8.б**, два сосуществующих листа, напоминающих структуру crossroad area [36]. Можно видеть, что наложение этих двух листов является причиной мультистабильности в данной системе. При небольшом значении амплитуды возмущения в системе сосуществуют две неподвижные точки (**рис.1.8.в**). При увеличении амплитуды возмущения на каждом листе происходит бифуркация утроения, в результате чего можно видеть сосуществование аттрактора периода три и неподвижной точки (**рис.1.8.г**), это происходит в результате того, что на одном листе произошло утроение, а на втором данному значению ε соответствует область периода один. Далее и на втором листе происходит утроение и можно наблюдать сосуществование двух аттракторов периода три (**рис.1.8.д**).

На карте старшего показателя Ляпунова можно видеть две белые линии, образующие опирающийся на линию утроения периода «клюв». При пересечении этой линии, из одного аттрактора периода три рождаются два (**рис.1.8.е**), поэтому можно сделать вывод, что эта линия соответствует бифуркации типа «вилка». Такая линия находится и на втором листе, в результате их пересечения в системе сосуществуют четыре аттрактора периода три (**рис.1.8.ж**).

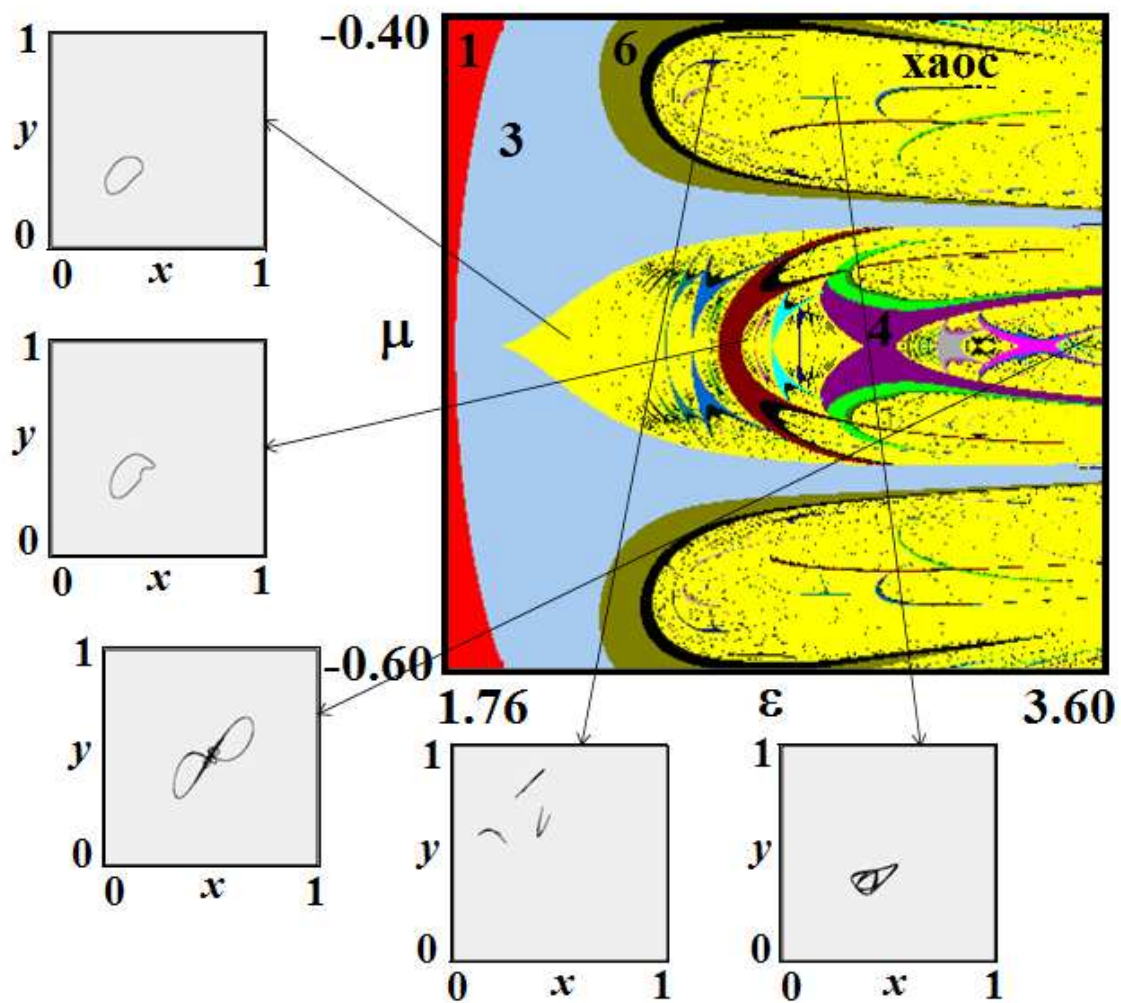


Рис.1.7. Увеличенный фрагмент карты динамических режимов отображения (1.4) на плоскости параметров (ε, μ) и аттракторы отображения в различных точках.

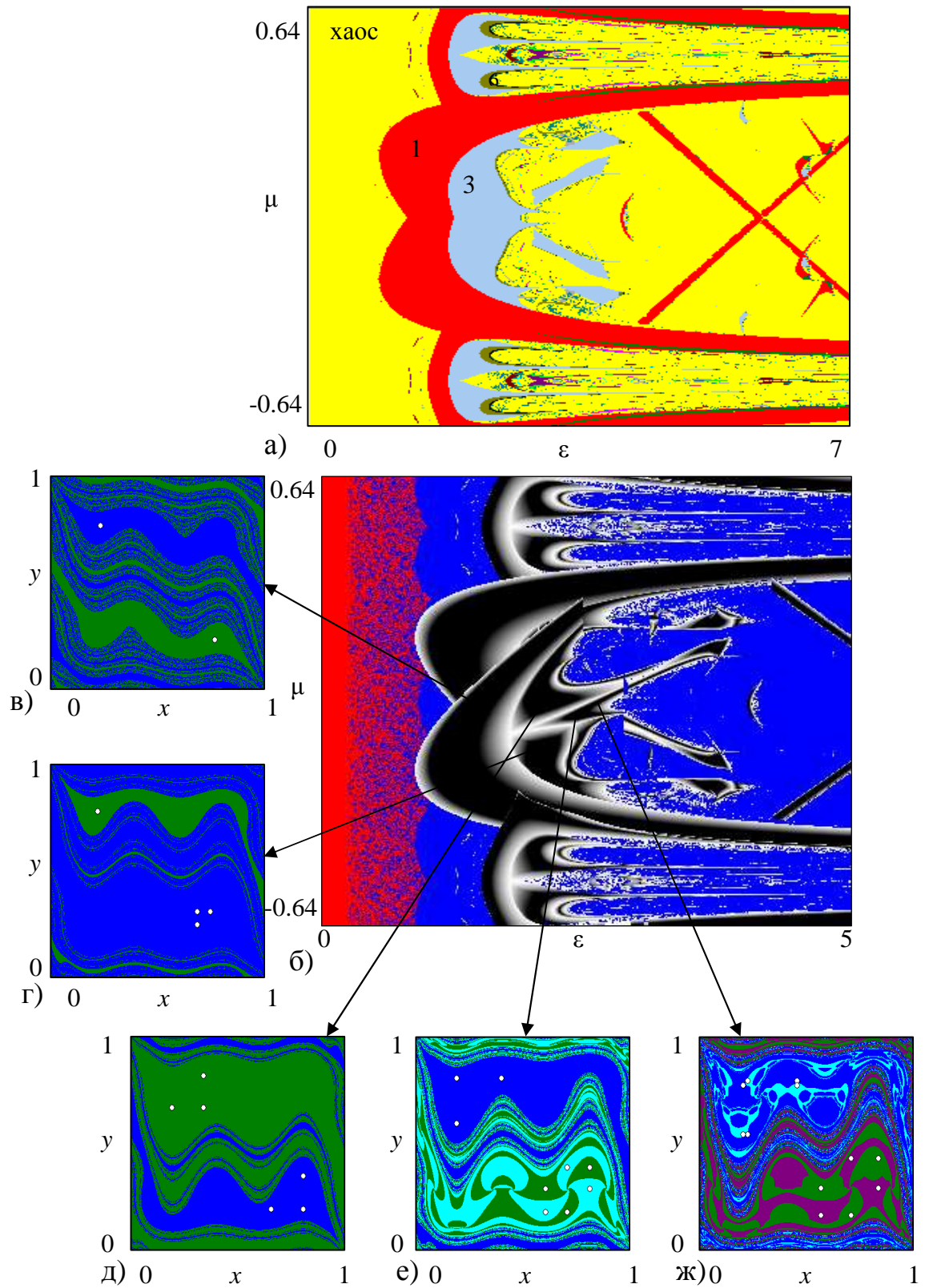


Рис.1.8. Карта динамических режимов (а), карта старшего показателя Ляпунова отображения (1.4) на плоскости параметров (ϵ , μ) и бассейны притяжения аттракторов отображения в различных точках (б).

Выводы к главе 1

Введено в рассмотрение модифицированное отображение «кот Арнольда», в котором реализуется гиперболический DA- аттрактор.

Для исследования процесса разрушения гиперболического аттрактора использовались карты динамических режимов, карты старшего показателя Ляпунова, проводился анализ сжатия в фазовом пространстве.

Обнаружено, что гиперболический аттрактор исчезает при увеличении амплитуды возмущения жестким образом, а на его месте возникают две устойчивые неподвижные точки, затем происходит их утроение. При больших значениях амплитуды возмущения возможно, либо возникновение квазипериодической динамики, сопровождающейся переходом к хаосу через ее разрушение, и системы языков синхронизации, либо образование сложной бифуркационной структуры, включающей в себя две линии бифуркации «вилка», образующие опирающийся на линии утроения периода «клюв», и переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоений периода на базе цикла периода три.

Глава 2. Системы связанных осцилляторов с динамикой, описываемой гиперболическим отображением на торе

2.1. Введение

Один из подходов к построению физических систем, в которых мог бы присутствовать гиперболический аттрактор, основан на рассмотрении связанных осцилляторов с попеременным возбуждением, динамика фаз которых за характерный временной период описывалась бы гиперболическим отображением Аносова на торе [25,26]. В первом разделе настоящей главы будет рассмотрена система трех связанных осцилляторов ван дер Поля, где реализуется этот принцип, и динамика фаз определяется отображением Фибоначчи. Эта система проще, чем система, предложенная в работе [25], и имеет меньшую размерность фазового пространства, поскольку содержит в качестве элементов не четыре, а три осциллятора. С другой стороны, в отличие от автономной системы трех осцилляторов, рассмотренной в работе [26], здесь осуществлен резонансный механизм передачи возбуждения между осцилляторами, что снимает некоторые ограничения, затрудняющие возможность реализации на этой основе генераторов хаоса в области высоких частот.

Вводятся в рассмотрение модельные дифференциальные уравнения, описывающие динамику системы. Также проводится их численное исследование, результаты которого позволяют заключить, что поведение фаз осцилляторов за период изменения коэффициентов в уравнениях соответствует отображению Аносова, демонстрирующему хаотическую динамику. Предложенная модель будет отправной точкой для построения во втором разделе главы системы с DA-аттрактором.

Во втором разделе настоящей главы, сначала строится определенное конкретное отображение, в котором реализуется DA-аттрактор, а затем рассматривается система трех неавтономных связанных осцилляторов ван дер Поля, в которой динамика фаз за характерный период приближенно описывается таким отображением. Представлены численные результаты исследования динамики системы, свидетельствующие в пользу предположения о гиперболической природе наблюдаемого аттрактора.

2.2. Система трех неавтономных осцилляторов с динамикой, описываемой отображением «кот Арнольда»

2.2.1. Консервативное отображение с гиперболической динамикой «кот Арнольда» и отображение Фибоначчи

Простейший пример системы Аносова с дискретным временем – это отображение, заданное на торе, где определены циклические координаты X и Y :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + Y_n \pmod{1}, \\ Y_{n+1} &= X_n + 2Y_n \pmod{1}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Его называют также отображением «кот Арнольда», поскольку Арнольд для наглядного пояснения использовал графическую иллюстрацию действия этого отображения на область в виде головы кота [10, 31, 32, 35]. Более подробно динамика данного отображения уже была рассмотрена в первой главе настоящей работы.

Отображение (2.1) связано с отображением Фибоначчи на множестве действительных чисел, принадлежащих единичному интервалу:

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \varphi_{k-1} \pmod{1}. \quad (2.2)$$

В самом деле, если для пары $(\varphi_{k-1}, \varphi_k)$ ввести обозначение (X_k, Y_k) , то для этих переменных за два шага получим в точности отображение (2.1):

$$\begin{aligned} (X_{k+2}, Y_{k+2}) &= (\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}) = (\varphi_k + \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1} + \varphi_k) = \\ &= (\varphi_k + \varphi_{k-1}, \varphi_k + \varphi_{k-1} + \varphi_k) = (X_k + Y_k, X_k + 2Y_k). \end{aligned} \quad (2.3)$$

К классу отображений Аносова принадлежит, разумеется, и отображение, получаемое за три шага отображения Фибоначчи. В переменных $(X_k, Y_k) = (\varphi_{k-1}, \varphi_k)$ оно записывается, как нетрудно проверить, в виде

$$\begin{aligned} X_{k+3} &= X_k + 2Y_k \pmod{1}, \\ Y_{k+3} &= 2X_k + 3Y_k \pmod{1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2.2. Построение модели, описывающей систему трёх связанных неавтономных осцилляторов

Рассмотрим систему трех поочередно возбуждающихся осцилляторов, которая описывается дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x &= [B + A\cos(2\pi t/T) - x^2] \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{d(yz)}{dt} \cos \omega_0 t, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2y &= [B + A\cos 2\pi(t/T - 1/3) - y^2] \frac{dy}{dt} + \varepsilon \frac{d(xz)}{dt} \cos \omega_0 t, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2z &= [B + A\cos 2\pi(t/T - 2/3) - z^2] \frac{dz}{dt} + \varepsilon \frac{d(xy)}{dt} \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь x , y и z – обобщенные координаты первого, второго и третьего осцилляторов, ω_0 – их собственная частота и частота вспомогательного сигнала, присутствующего в виде множителя при последнем члене каждого уравнения. Параметр A характеризует глубину модуляции параметра, ответственного за бифуркацию Андронова-Хопфа, а B – постоянную составляющую, выбор которой определяет, какую часть периода осцилляторы проводят выше и ниже порога возбуждения, T – период модуляции, ε – параметр связи. Примем, что треть периода модуляции содержит целое число периодов вспомогательного сигнала, т.е. число $\omega_0 T / 6\pi$ целое.

Модуляция параметров осуществляется таким образом, что каждый из осцилляторов пребывает в возбужденном состоянии приблизительно одну третью часть периода. В силу того, что модуляция сдвинута по фазе, осцилляторы возбуждаются по очереди: $\dots \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$, и возбуждение передается в циклической последовательности каждому следующему осциллятору от двух его партнеров.

Предположим, что в момент, предшествующий возбуждению осциллятора z , его партнеры имели фазы φ_x и φ_y , т.е. $x \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$,

$y \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_y)$. Воздействие осцилляторов x и y на осциллятор z описывается в уравнении членом, содержащим производную

$$\begin{aligned} \frac{d(xy)}{dt} &\sim \sin(\omega_0 t + \varphi_x) \cos(\omega_0 t + \varphi_y) + \cos(\omega_0 t + \varphi_x) \sin(\omega_0 t + \varphi_y) \\ &= \sin(2\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y) \end{aligned} \quad (2.6)$$

откуда при умножении на функцию $\cos \omega_0 t$ получается

$$\sin(2\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} \sin(\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y) + \frac{1}{2} \sin(3\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y) \quad (2.7)$$

Резонансное воздействие на осциллятор z определяется первым слагаемым в этом выражении, а вторым слагаемым в грубом приближении можно пренебречь. Отсюда можно заключить, что при возбуждении этот осциллятор получит фазу колебаний, определяемую с точностью до константы соотношением

$$\varphi'_z = \varphi_x + \varphi_y \pmod{2\pi} \quad (2.8)$$

где штрихом отмечена величина фазы, относящейся к новой стадии возбуждения осциллятора z . Таким образом, за один шаг передачи возбуждения для фаз имеет место отображение Фибоначчи. (То обстоятельство, что переменная определена на интервале 2π вместо единичного интервала в отображении (2.2) не принципиально.) На следующих этапах функционирования системы точно так же происходит передача фазы от второго и третьего осциллятора к первому, и затем от третьего и первого ко второму. За полный период модуляции получаются следующие соотношения для фаз:

$$\begin{aligned} \varphi'_z &= \varphi_x + \varphi_y, \\ \varphi'_x &= \varphi_y + \varphi'_z = \varphi_x + 2\varphi_y, \\ \varphi'_y &= \varphi'_z + \varphi'_x = 2\varphi_x + 3\varphi_y. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для вектора, составленного из величин φ_x и φ_y , преобразование за полный период соответствует отображению (2.4):

$$\begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Значения показателей Ляпунова для отображения (2.10) можно получить, как логарифмы собственных чисел матрицы, которые определяются из уравнения $\mu^2 - 4\mu - 1 = 0$ и составляют $\mu_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$. Соответственно, один показатель Ляпунова положительный, что указывает на наличие хаоса, а второй отрицательный $\Lambda_2 = \log |\mu_2| = -1.4436\dots$, равный первому по абсолютной величине. То обстоятельство, что сумма показателей нулевая, говорит о консервативной природе динамики, заданной отображением (2.10).

Более аккуратное и формальное описание динамики системы (2.5) в терминах стробоскопического отображения Пуанкаре подразумевает рассмотрение трансформации шестимерного вектора состояния $\mathbf{x}_n = (x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z})_{t=nT}$ за период: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)$. В шестимерном пространстве этого отображения аттрактору будет соответствовать, по крайней мере, приближенно, двумерный объект в виде тора, динамика на котором изображающих точек, описываемая в терминах циклических координат на торе, следует гиперболическому отображению (2.10). По остальным направлениям фазового пространства, как можно полагать, имеет место сжатие, обеспечивающее приближение траекторий к притягивающему множеству.

2.2.3. Численное исследование системы. Анализ динамики фаз.

Анализ спектра показателей Ляпунова

Численное моделирование динамики системы подтверждает, что в достаточно широкой области параметров она функционирует в соответствии с описанной выше качественной картиной. На **рис.2.1** приводятся типичные образцы временных зависимостей в установившемся режиме, полученные в результате решения уравнений (2.5) на компьютере конечно-разностным методом при задании параметров $A = 3$, $B = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_0 = 2\pi$, $T = 12$. Как можно видеть, каждый осциллятор генерирует последовательность цугов

колебаний, следующих друг за другом через интервал времени T . Однако сигнал в целом неперiodический: фаза высокочастотного заполнения относительно огибающей хаотически меняется от одного периода активности к другому. Чтобы подчеркнуть этот момент, на рисунке приводится результат наложения нескольких последовательных участков реализации.

На **рис.2.2.** приведены фазовые портреты аттрактора в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость обобщенная координата – обобщенная скорость трех осцилляторов. Последовательность моментов времени, для которых построено сечение $t_n=nT$ соответствует стадии активности осциллятора x , амплитуда которого самая большая, амплитуда осциллятора z меньше, а для осциллятора y самая малая. На портрете аттрактора на фазовой плоскости осциллятора y лучше всего различима структура в виде проекции вложенного в шестимерное пространство состояний отображения Пуанкаре двумерного тора, по которому в процессе динамики перемещается изображающая точка.

Фазы колебаний трех осцилляторов можно определить, используя соотношения:

$$\varphi_x = \arg(x + i\dot{x}/\omega_0), \varphi_y = \arg(y + i\dot{y}/\omega_0), \varphi_z = \arg(z + i\dot{z}/\omega_0). \quad (2.11)$$

На **рис. 2.3.** представлен график, иллюстрирующий приблизительное выполнение соотношение фаз (2.8) при передаче возбуждения третьему осциллятору от его партнеров. По вертикальной оси представлена фаза третьего осциллятора, определенная в момент времени $t = nT$. По горизонтальной оси отложена сумма фаз первого осциллятора в момент $t = (n - \frac{2}{3})T$ и второго осциллятора в момент $t = (n - \frac{1}{3})T$. Как можно видеть из графика, точки располагаются вдоль диагонали, т.е. выражение (2.8) достаточно хорошо описывает трансформацию фаз при возбуждении очередного осциллятора системы (2.5).

Другой способ продемонстрировать соответствие динамики фаз отображению «кот Арнольда» состоит в том, чтобы представить действие

отображения для фаз на плоскости с использованием традиционного изображения области в виде головы кота, преобразование которой определяется на основе результатов численного решения дифференциальных уравнений. В системе (2.5), как видно из приведенного выше анализа, отображение для фаз за треть периода модуляции соответствует отображению Фибоначчи, а за две трети – отображению «кот Арнольда». За полный же период модуляции поведение фаз описывается отображением (2.10). Графическое построение производится следующим образом. Выполняется численное интегрирование уравнений (2.5) и накапливается массив значений фаз, вычисляемых через каждую треть периода модуляции для осциллятора, находящегося в данный момент в стадии активности. Взяв пару соседних чисел из этого массива, определяем, попадает ли точка с такими координатами на плоскости двух переменных в область в виде головы кота. Если да, то она отображается на графике, а пары, отвечающие моментам времени через период и через два периода модуляции, отображаются на двух следующих диаграммах, приведенных на **рис. 2.4 (а)**. Если точка не попадает в заданную область, она игнорируется, и для продолжения построения берется следующая пара чисел, и так далее. Полученные картинки можно сравнить с теми, которые тем же методом получают для отображения (2.10) и показаны на **рис.2.4 (б)**.

Чтобы получить свидетельство присутствия хаоса на количественном уровне, обратимся к расчету показателей Ляпунова. Для этого используем стандартную методику Бенеттина [10, 32, 37]. Проводится совместное решение уравнений (2.5) и шести комплектов уравнений в вариациях

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} + \omega_0^2 \tilde{x} &= [B + A \cos(2\pi/T) - x^2] \frac{d\tilde{x}}{dt} - 2x\tilde{x} \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{d(\tilde{y}z + y\tilde{z})}{dt} \cos \omega_0 t, \\
 \frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} + \omega_0^2 \tilde{y} &= [B + A \cos 2\pi(t/T - 1/3) - y^2] \frac{d\tilde{y}}{dt} - 2y\tilde{y} \frac{dy}{dt} + \varepsilon \frac{d(\tilde{x}z + x\tilde{z})}{dt} \cos \omega_0 t, \\
 \frac{d^2 \tilde{z}}{dt^2} + \omega_0^2 \tilde{z} &= [B + A \cos 2\pi(t/T - 2/3) - z^2] \frac{d\tilde{z}}{dt} - 2z\tilde{z} \frac{dz}{dt} + \varepsilon \frac{d(\tilde{x}y + x\tilde{y})}{dt} \cos \omega_0 t.
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Каждый раз после определенного числа шагов разностной схемы при решении уравнений выполняется ортогонализация Грама – Шмидта и нормализация для векторов возмущения $\{\tilde{x}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{z}\}$. Показатели Ляпунова определяются как средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов от норм векторов возмущения (после ортогонализации, но перед нормализацией). Полный спектр показателей Ляпунова для аттрактора, реализующегося при значениях параметров $A = 3$, $B = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_0 = 2\pi$, $T = 12$, согласно результатам расчетов, следующий:

$$\Lambda_1 = 1.444, \Lambda_2 = -1.552, \Lambda_3 = -5.247, \Lambda_4 = -7.058, \Lambda_5 = -21.75, \Lambda_6 = -27.16.$$

Величины двух старших показателей Ляпунова близки к значениям, рассчитанным аналитически для системы (2.10), при этом они близки по модулю и их сумма приблизительно равна нулю. Остальные показатели – большие по модулю отрицательные числа, что соответствует сильному сжатию фазового объема по оставшимся четырем из шести направлений в пространстве состояний. Это указывает на существование в шестимерном фазовом пространстве некоторого объекта, представляющего собой, по крайней мере, в грубом приближении двумерный тор, динамика на котором соответствует действию гиперболического отображения Аносова.¹ На **рис. 2.5.** этот аттрактор показан в проекции из шестимерного пространства состояний отображения Пуанкаре на плоскость. Сжатие по четырем направлениям в пространстве состояний обеспечивает сходимость фазовых траекторий к данному объекту.

На **рис. 2.6.** приведены графики показателей Ляпунова для системы (2.5) в зависимости от периода модуляции T (диаграмма (а)), а так же от

¹ Поскольку отображение Аносова на торе обладает структурной устойчивостью, а динамика на аттракторе системы (4), описываемая посредством стробоскопического отображения, к ней близка, как следует из вычислений, то можно полагать, что динамика на аттракторе в топологическом смысле соответствует отображению Аносова. Однако замена переменных на аттракторе для перехода от естественных переменных модели (4) к отображению (9), очевидно, гладкой не будет. На это обстоятельство указывает отличие двух старших показателей Ляпунова от значений, соответствующих отображению (9), которое явно выходит за пределы численной погрешности. (В самом деле, показатели Ляпунова определяются на основе линеаризованных уравнений в вариациях, вывод которых подразумевает использование операции дифференцирования, и если замена переменных дается не дифференцируемой функцией, то совпадения показателей Ляпунова ожидать не приходится.)

параметров A (диаграмма (б)) и B (диаграмма (в)) при фиксированных остальных параметрах. Как можно видеть, в достаточно широком диапазоне изменения параметров два старших показателя Ляпунова остаются примерно постоянными. Это обстоятельство наряду с отсутствием окон периодичности в рассматриваемой области параметров свидетельствует в пользу предположения о гиперболической природе аттрактора в данной системе.

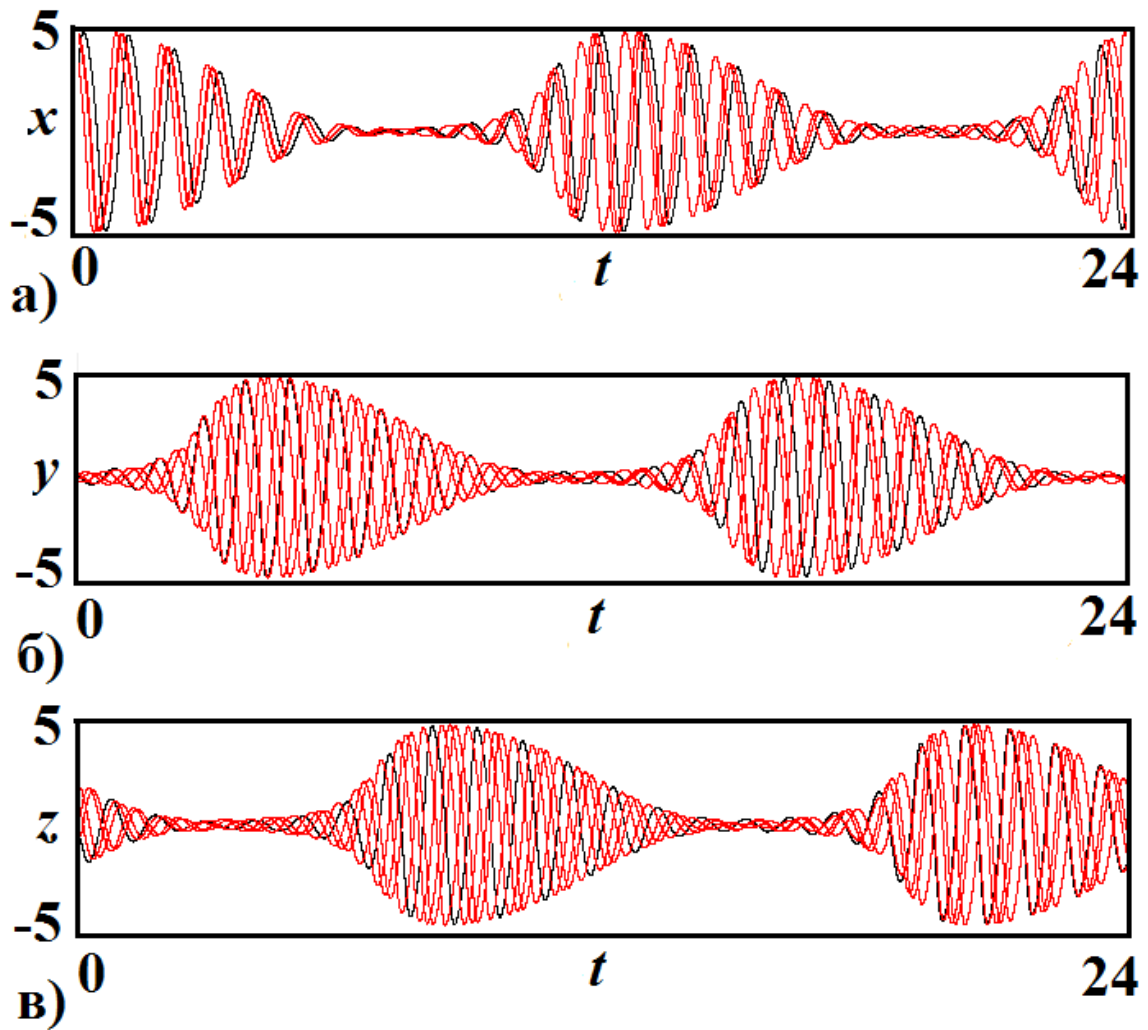


Рис.2.1. Зависимости переменных x , y и z от времени, полученные при численном решении уравнений (2.5). Представлен результат наложения нескольких временных реализаций, чтобы сделать наглядной хаотическую природу наблюдаемого режима динамики.

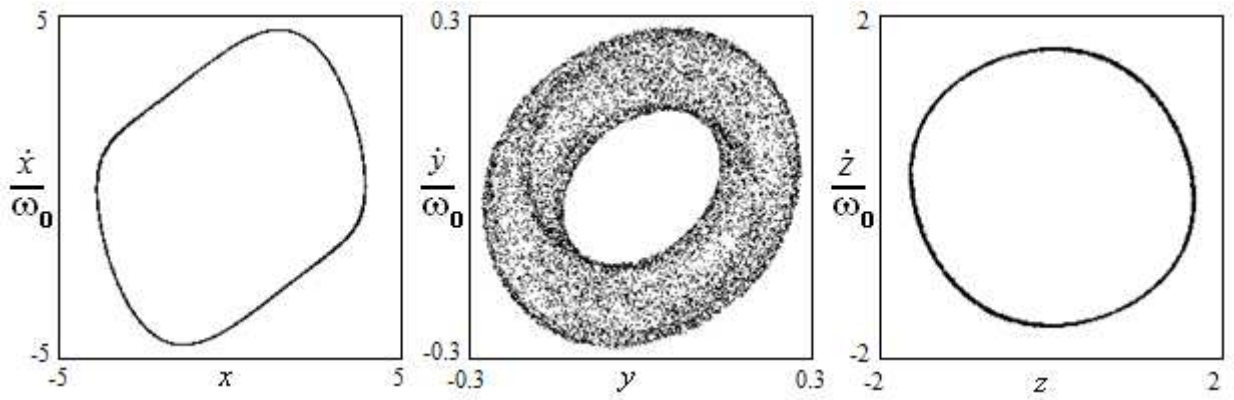


Рис.2.2. Фазовые портреты аттрактора в стробоскопическом сечении, отвечающем моментам времени $t_n = nT$ в проекции на плоскости (x, \dot{x}) , (y, \dot{y}) и (z, \dot{z}) .

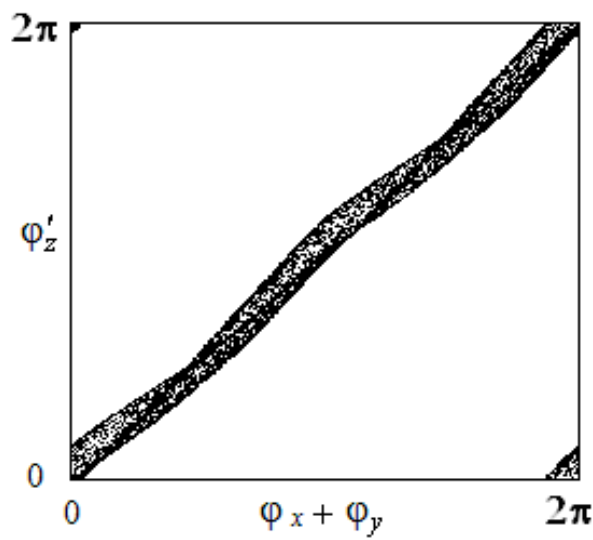


Рис.2.3. График, иллюстрирующий соотношение фаз при передаче возбуждения третьему осцилятору от его партнеров.

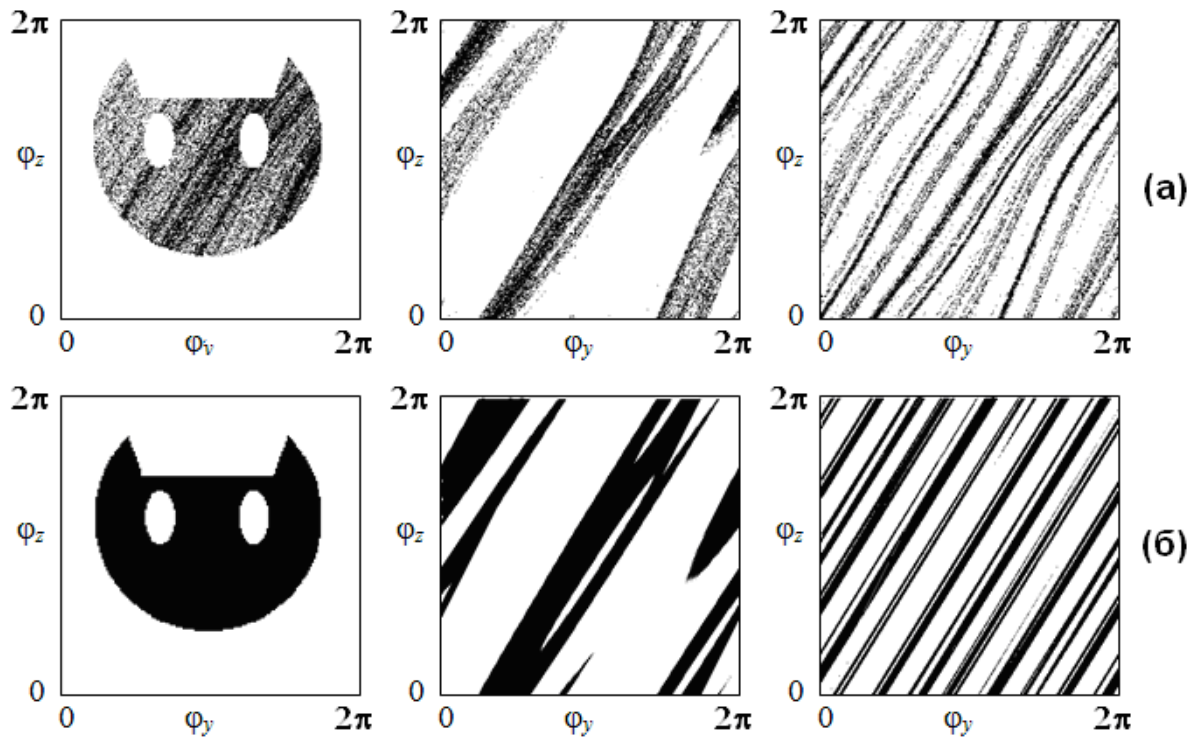


Рис.2.4. Иллюстрация действия отображения (2.9) (а) и действия отображения, описывающего динамику фаз, полученного на основе результатов численного решения дифференциальных уравнений (2.5) (б).

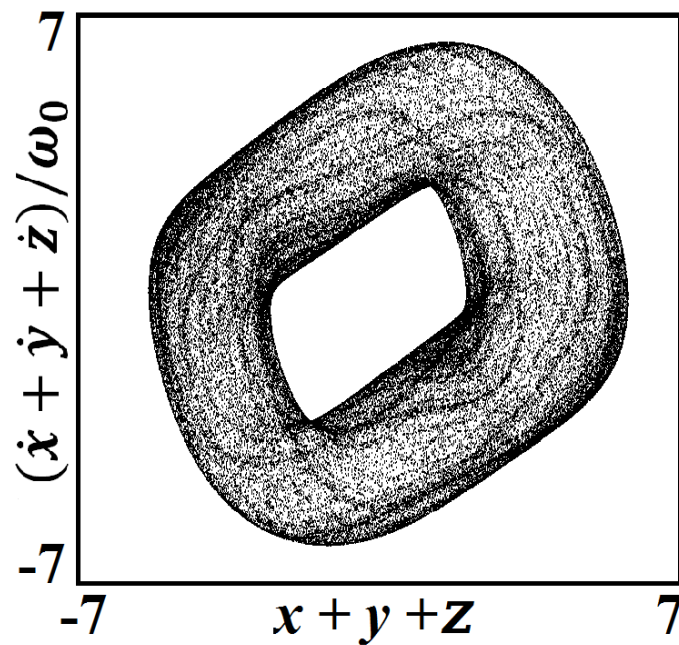


Рис.2.5. Фазовый портрет аттрактора системы (2.5) в проекции на плоскость (средняя координата – средняя скорость трех осцилляторов).

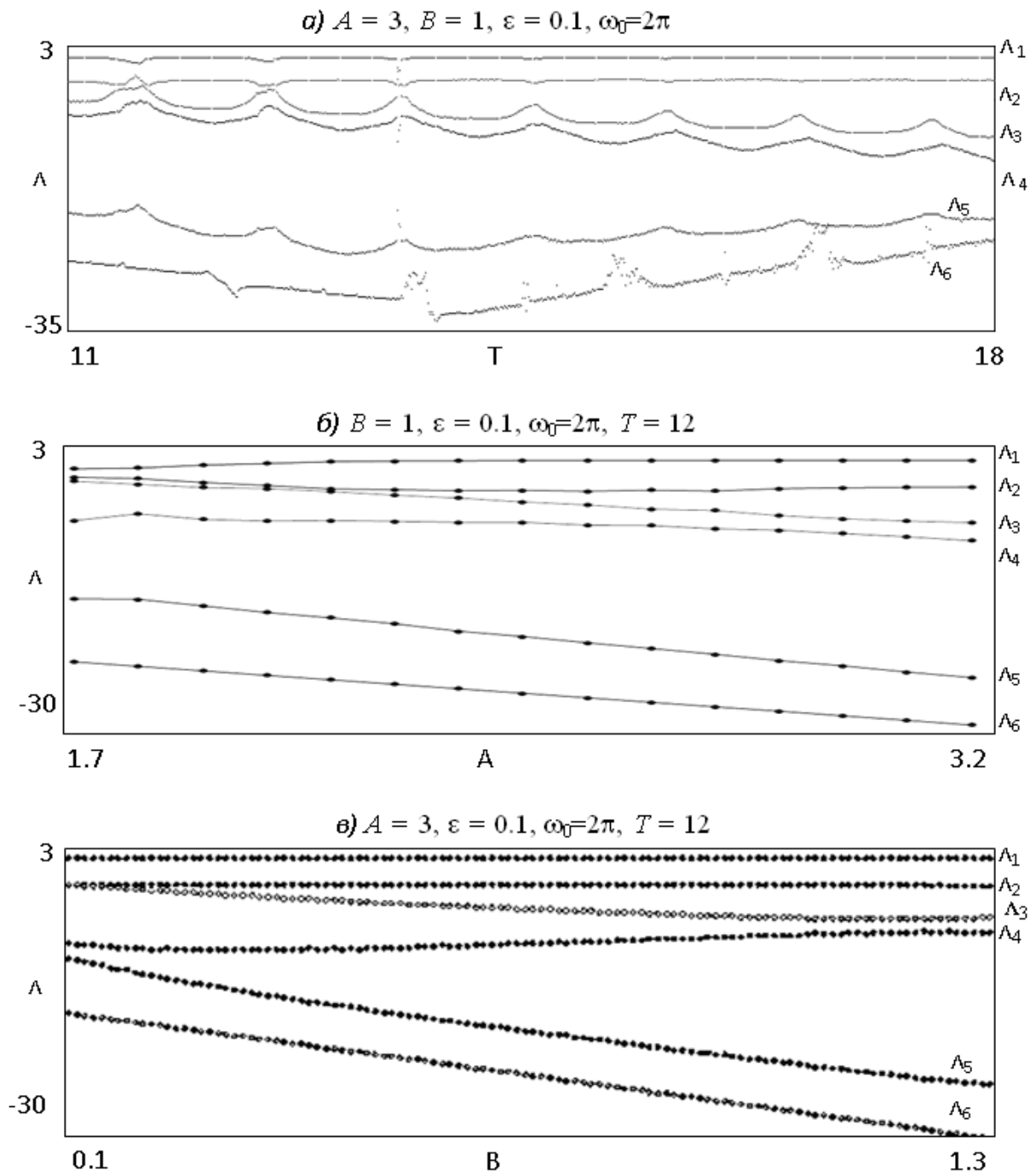


Рис.2.6. Графики показателей Ляпунова системы (2.5) в зависимости от параметров T , A и B . Остальные параметры указаны в надписи для каждой диаграммы.

2.2.4. Анализ системы на основе связанных осцилляторов ван дер Поля методом медленно меняющихся комплексных амплитуд

Перейдем от системы (2.5) к уравнениям для комплексных медленно меняющихся амплитуд [38-41]. Метод комплексных амплитуд применим в случае, когда период модуляции параметров системы и период вспомогательного сигнала намного больше периода высокочастотных колебаний, что является характерным для системы (2.5).

Будем искать решение в виде:

$$x = ae^{i\omega_0 t} + a^* e^{-i\omega_0 t}, y = be^{i\omega_0 t} + b^* e^{-i\omega_0 t}, z = ce^{i\omega_0 t} + c^* e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.13)$$

где a, b, c – комплексные медленно меняющиеся амплитуды. Условием совместимости этих выражений служат соотношения:

$$\dot{a}e^{i\omega_0 t} + \dot{a}^* e^{-i\omega_0 t} = 0, \dot{b}e^{i\omega_0 t} + \dot{b}^* e^{-i\omega_0 t} = 0, \dot{c}e^{i\omega_0 t} + \dot{c}^* e^{-i\omega_0 t} = 0. \quad (2.14)$$

Тогда можно записать:

$$\dot{x} = i\omega_0(ae^{i\omega_0 t} - a^* e^{-i\omega_0 t}), \dot{y} = i\omega_0(be^{i\omega_0 t} - b^* e^{-i\omega_0 t}), \dot{z} = i\omega_0(ce^{i\omega_0 t} - c^* e^{-i\omega_0 t}), \quad (2.15)$$

$$\ddot{x} = 2i\omega_0 \dot{a}e^{i\omega_0 t} - \omega_0^2(ae^{i\omega_0 t} + a^* e^{-i\omega_0 t}), \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(yz)}{dt} &= i\omega_0[(be^{i\omega_0 t} - b^* e^{-i\omega_0 t})(ce^{i\omega_0 t} + c^* e^{-i\omega_0 t}) + \\ &+ (be^{i\omega_0 t} + b^* e^{-i\omega_0 t})(ce^{i\omega_0 t} - c^* e^{-i\omega_0 t})] = 2i\omega_0(bce^{2i\omega_0 t} - b^* c^* e^{-2i\omega_0 t}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Подстановка выражений для x, y и z в первое уравнение (2.5) дает:

$$\begin{aligned} 2i\omega_0 \dot{a}e^{i\omega_0 t} &= [B + A \cos(2\pi/T) - a^2 e^{2i\omega_0 t} - 2|a|^2 - a^{*2} e^{-2i\omega_0 t}]i\omega_0(ae^{i\omega_0 t} - a^* e^{-i\omega_0 t}) \\ &+ \varepsilon \left[2i\omega_0(bce^{2i\omega_0 t} - b^* c^* e^{-2i\omega_0 t}) \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2}[B + A \cos(2\pi/T) - a^2 e^{2i\omega_0 t} - 2|a|^2 - a^{*2} e^{-2i\omega_0 t}](a - a^* e^{-2i\omega_0 t}) \\ &+ \frac{1}{2}\varepsilon[(bce^{2i\omega_0 t} - b^* c^* e^{-2i\omega_0 t})(1 + e^{-2i\omega_0 t})] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Затем уравнение умножается на экспоненту $e^{-i\omega_0 t}$, после чего проводится усреднение по периоду быстрых колебаний. Записывая аналогичные уравнения для остальных двух осцилляторов, окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= \frac{1}{2}[B + A\cos(2\pi/T) - |a|^2]a + \frac{1}{2}\varepsilon bc \\
\dot{b} &= \frac{1}{2}[B + A\cos 2\pi(t/T - 1/3) - |b|^2]b + \frac{1}{2}\varepsilon ca \\
\dot{c} &= \frac{1}{2}[B + A\cos 2\pi(t/T - 2/3) - |c|^2]c + \frac{1}{2}\varepsilon ab
\end{aligned}
\tag{2.20}$$

Метод комплексных медленно меняющихся амплитуд является приближенным, и служит для сокращения числа параметров исходных уравнений. Однако, поскольку система (2.5), как предполагается, демонстрирует гиперболический хаос и является структурно устойчивой, то следует ожидать, что характер поведения системы (2.20) на качественном уровне будет соответствовать динамике уравнений (2.5). Укороченные уравнения (2.20) можно также рассматривать как самостоятельную систему, демонстрирующую, как будет показано далее, гиперболический хаос.

Обратимся к результатам численного решения системы (2.20) при значениях параметров $A = 3$, $B = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_0 = 2\pi$, $T = 12$. На **рис. 2.7.** представлены временные реализации для амплитуд (**рис. 2.7.(а)**) и фаз (**рис. 2.7. (б)**) комплексных переменных a , b и c . Вид зависимостей амплитуд от времени представляет собой огибающую для графиков колебаний осцилляторов системы (2.5) (**рис. 2.1.**). Портрет аттрактора системы (2.20) в сечении Пуанкаре представлен на **рис. 2.8.** На **рис. 2.9.** показан портрет аттрактора в стробоскопическом сечении на плоскости, комплексной переменной, усредненной по трем осцилляторам. На **рис. 2.10.** показан график, отражающий стробоскопическую динамику фаз. Фазы φ_n определяются в моменты времени $t = nT/3$, т.е. на каждой трети периода модуляции, в циклическом порядке, как $\arg a$, $\arg b$ и $\arg c$, и представляются на графике в координатах $(\varphi_{n+1}, \varphi_{n-1} + \varphi_n)$. Как можно видеть из графика, точки располагаются вдоль диагонали, таким образом, можно сделать вывод, что поведение фаз с хорошей точностью описывается отображением (2.2). Также можно продемонстрировать соответствие динамики фаз отображению «кот Арнольда» при помощи плоскости с изображением головы кота, аналогично тому, как это было сделано для системы (2.5). На рис. приведены соответствующие картинки, полученные путем численного решения

уравнений (**рис.2 11.(а)**) (2.20) и итерированием отображения (2.4) (**рис. 2.11.(б)**).

Полный спектр показателей Ляпунова для аттрактора, реализующегося при значениях параметров $A = 3$, $B = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_0=2\pi$, $T= 12$, рассчитанный численно для системы (2.20) по методу Бенеттина [10, 32, 37] на основе решения уравнений (2.20), дополненных комплектом шести уравнений в вариациях, следующий:

$$\Lambda_1 = 1.452, \Lambda_2 = -1.622, \Lambda_3 = -5.200, \Lambda_4 = -7.276, \Lambda_5 = -21.45, \Lambda_6 = -27.00.$$

Как можно видеть спектр показателей Ляпунова находится в хорошем соответствии со спектром, полученным для системы (2.5), что подтверждает сделанное ранее предположение о соответствии на качественном уровне динамики систем (2.5) и (2.20).

На **рис.2.12.** приведены графики показателей Ляпунова для системы (2.20) в зависимости от параметров A (диаграмма (а)) и B (диаграмма (б)) и ε (диаграмма (в)) при фиксированных остальных параметрах. Как можно видеть, старший показатель Ляпунова положительный и сохраняет примерно постоянное значение в достаточно широком интервале изменения параметров, что подтверждает предположение о хаотической гиперболической динамике системы.

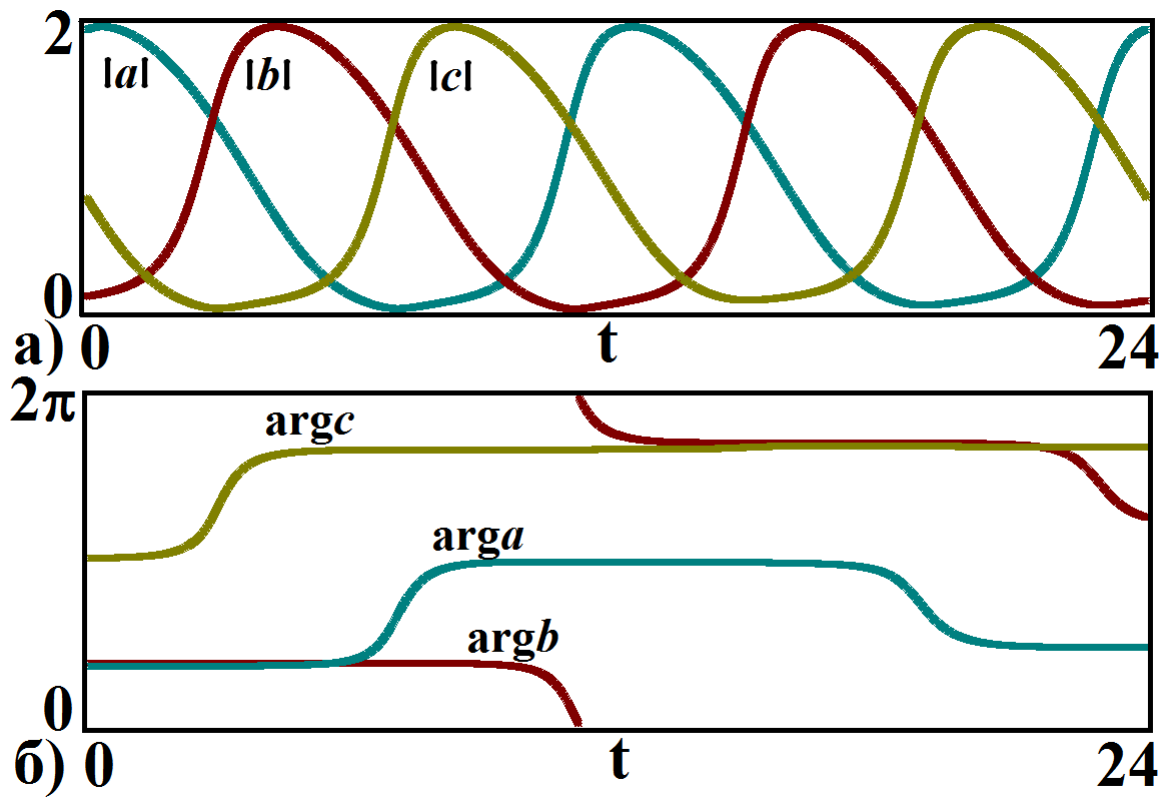


Рис.2.7. Графики зависимости от времени амплитуд (а) и фаз (б) комплексных переменных системы (2.20).

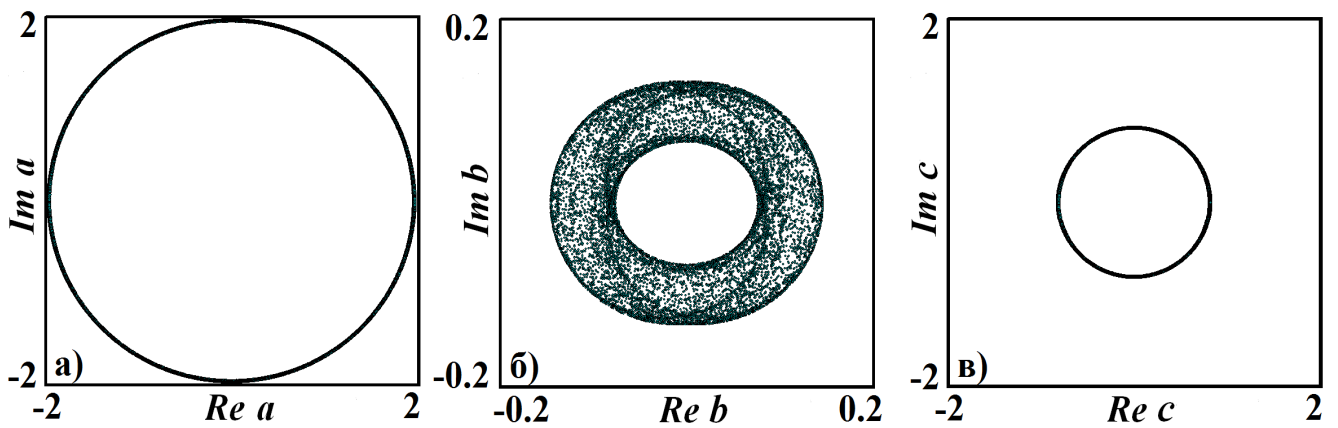


Рис.2.8. Фазовые портреты аттрактора в стробоскопическом сечении системы (2.20).

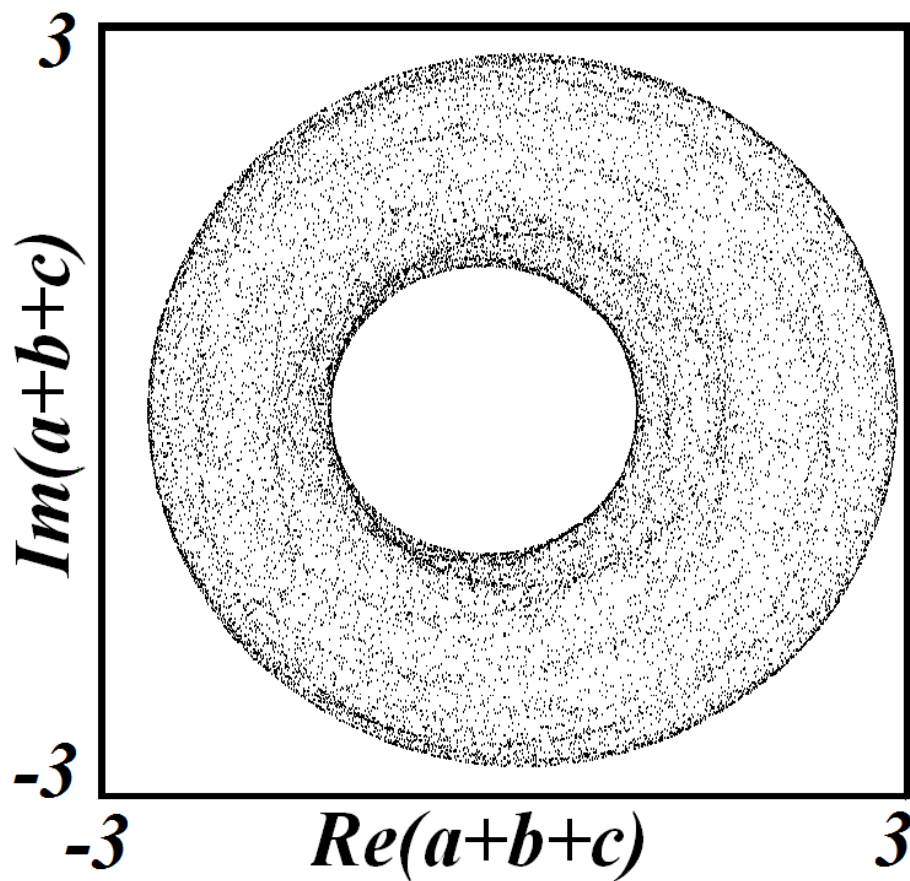


Рис.2.9. Фазовый портрет аттрактора системы (2.20) в стробоскопическом сечении на плоскости, комплексной переменной, усредненной по трем осцилляторам.

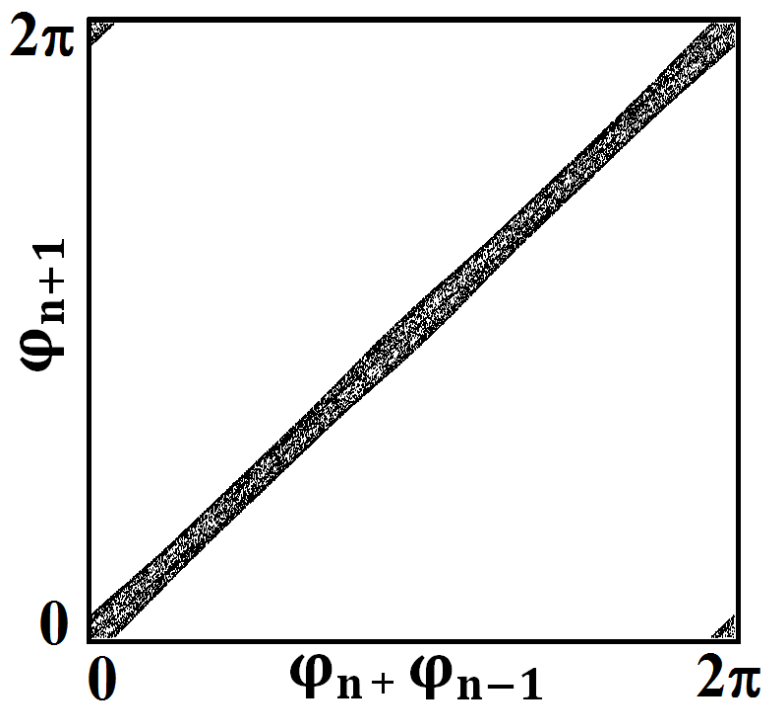


Рис.2.10. График, иллюстрирующий соотношение фаз для системы (2.20).

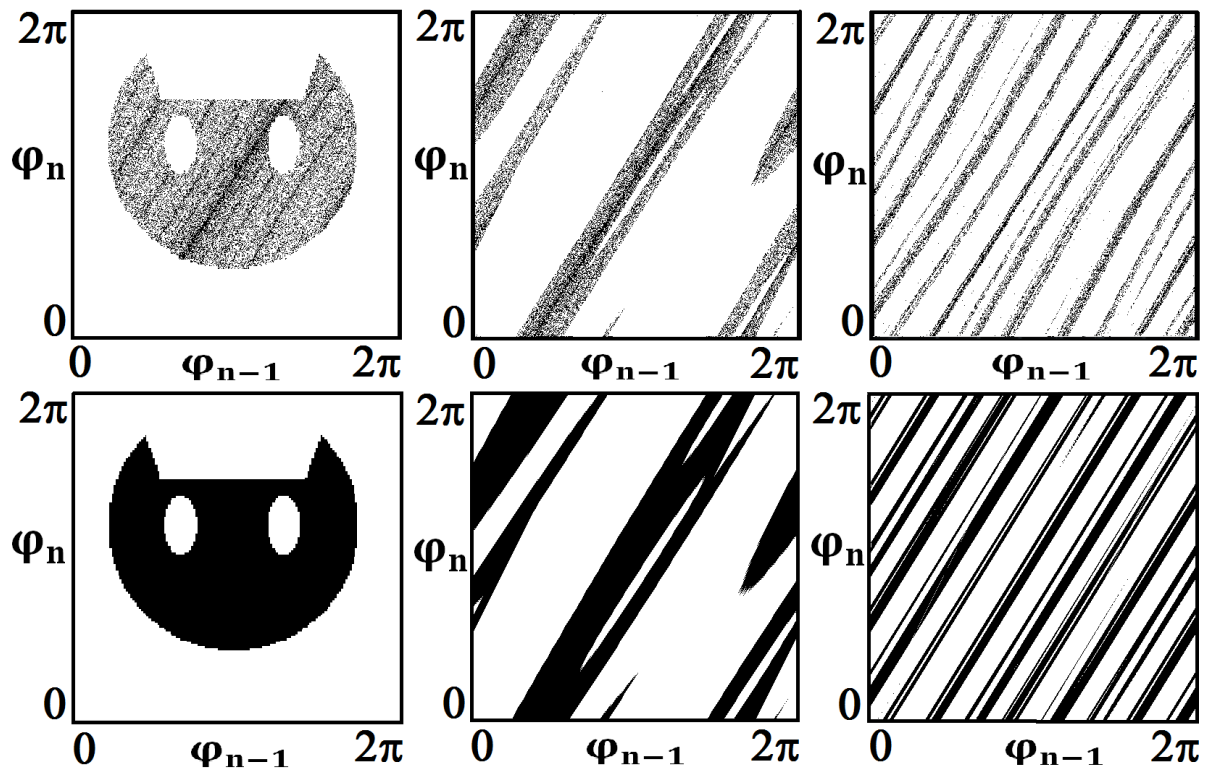


Рис.2.10. Иллюстрация действия отображения (2.9) (а) и действия отображения, описывающего динамику фаз, полученного на основе результатов численного решения дифференциальных уравнений (2.20) (б).

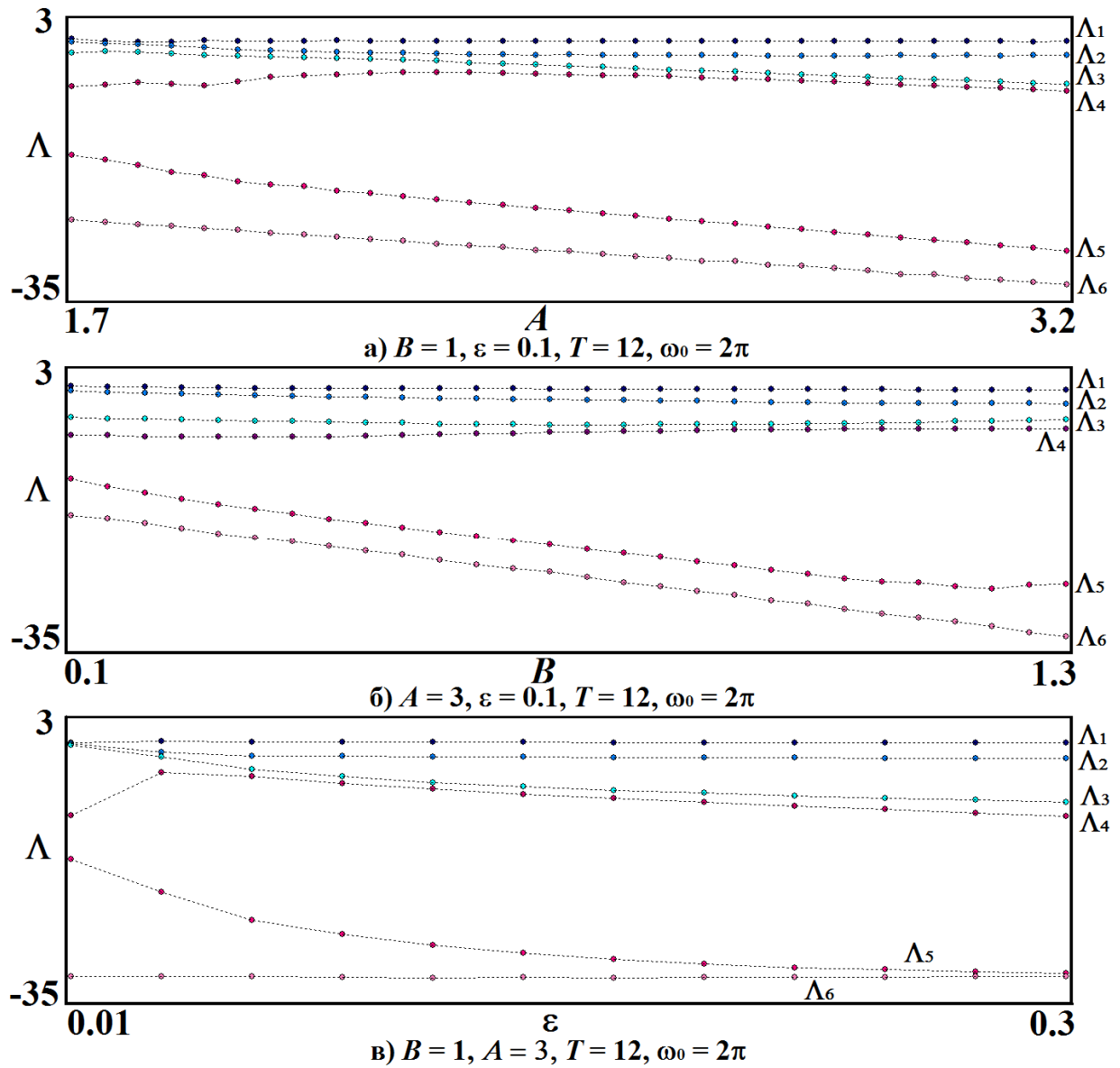


Рис.2.11. Графики показателей Ляпунова системы (2.20) в зависимости от параметров A, B и ε . Остальные параметры указаны в надписи для каждой диаграммы.

2.3. Система трех неавтономных осцилляторов с динамикой, описываемой модифицированным отображением Фибоначчи с гиперболическим DA-аттрактором

2.3.1. Модифицированное отображение Фибоначчи

Процедуру, имеющую результатом построение DA-аттрактора, можно применить к отображению Фибоначчи, причем модификацию удастся выполнить с использованием гладких функций. Следуя работе [19], для этого добавим к правой части отображения слагаемое $f(\varphi_{n-1})$, вид которого выбирается из следующих соображений. Поскольку речь идет об отображении на торе, функция должна иметь период 2π . Чтобы сохранялась неподвижная точка в начале координат, будем полагать функцию нечетной. Учитывая в разложении в ряд Фурье только два первых слагаемых, выберем коэффициенты так, чтобы вблизи точки $\varphi=0$ добавка обращалась в нуль с точностью до второго порядка малости. Это приводит к функции вида $f(\varphi) = \varepsilon(\sin \varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)$, где ε характеризует относительную величину добавки. На рис.2 (а) показан портрет аттрактора отображения

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1} + f(\varphi_{n-1}) \pmod{2\pi} \quad (2.21)$$

при $\varepsilon=0.7$ в единичном квадрате на плоскости переменных $(\varphi_{n-1}, \varphi_n)$, на котором хорошо прослеживается характерная поперечная канторова структура.

Рассмотрим теперь систему, состояние которой определяется комплексной переменной z , причем преобразование состояния за шаг дискретного времени таково, что модуль остается постоянным, а аргумент $\varphi = \arg z$ изменяется в соответствии с отображением (2.21). Для этого полагаем

$$z_{n+1} = \frac{z_n z_{n-1} \exp if(\arg z_{n-1})}{|z_n z_{n-1}|}. \quad (2.22)$$

Воспользуемся разложением функции $\exp(if(\varphi))$ в ряд Фурье, что эквивалентно разложению правой части (2.22) по степеням z и z^* . При $\varepsilon=0.7$ имеем:

$$e^{if(\varphi)} \cong 0.055e^{-3i\varphi} - 0.094e^{-2i\varphi} - 0.377e^{-i\varphi} + 0.854 + 0.261e^{i\varphi} + 0.209e^{2i\varphi} + 0.058e^{3i\varphi}, \quad (2.23)$$

или

$$z_{n+1} = z_n z_{n-1} (0.055z_{n-1}^{*3} - 0.094z_{n-1}^{*2} - 0.377z_{n-1}^* + 0.854 + 0.261z_{n-1} + 0.209z_{n-1}^2 + 0.058z_{n-1}^3) / |z_{n+1}| \quad (2.24)$$

Отклонение отображения (2.24) от формы (2.22) невелико и, как показывают численные расчеты, не приводит к изменению структуры аттрактора. Это имеет в качестве фундаментальной основы присущее гиперболическому аттрактору свойство структурной устойчивости. Учитывая данный момент, можно попробовать оставить в разложении (2.24) вообще всего лишь два члена с самыми большими коэффициентами, в результате чего получается очень простое отображение

$$z_{n+1} = z_n (z_{n-1} + \kappa) / |z_n (z_{n-1} + \kappa)|, \quad (2.25)$$

где $\kappa = -0.441$. Хотя характер динамики при этом нарушается, его удастся восстановить, увеличивая параметр κ . На **рис. 2.12. (б)** показан аттрактор для отображения (2.25) при $\kappa = -0.65$, вид которого находится в качественном соответствии с аттрактором отображения (2.21) на **рис. 2.12. (а)**.

Как нетрудно заметить, отображение (2.25) можно представить в виде (2.21), но с другой функцией $f(\varphi)$. В самом деле, записывая

$$e^{i\varphi_{n+1}} = e^{i(\varphi_n + \varphi_{n-1})} (1 + \kappa e^{-i\varphi_{n-1}}) \quad (2.26)$$

получаем

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1} - \arctg \frac{\kappa \sin \varphi_{n-1}}{1 + \kappa \cos \varphi_{n-1}} \pmod{2\pi}. \quad (2.27)$$

На **рис.2.13.** приведены для сравнения графики функций $f(\varphi) = \varepsilon(\sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi)$ при $\varepsilon=0.7$ (сплошная кривая) и $f(\varphi) = -\operatorname{arctg}[\kappa \sin \varphi / (1 + \kappa \cos \varphi)]$ при $\kappa=-0.65$ (пунктирная кривая).

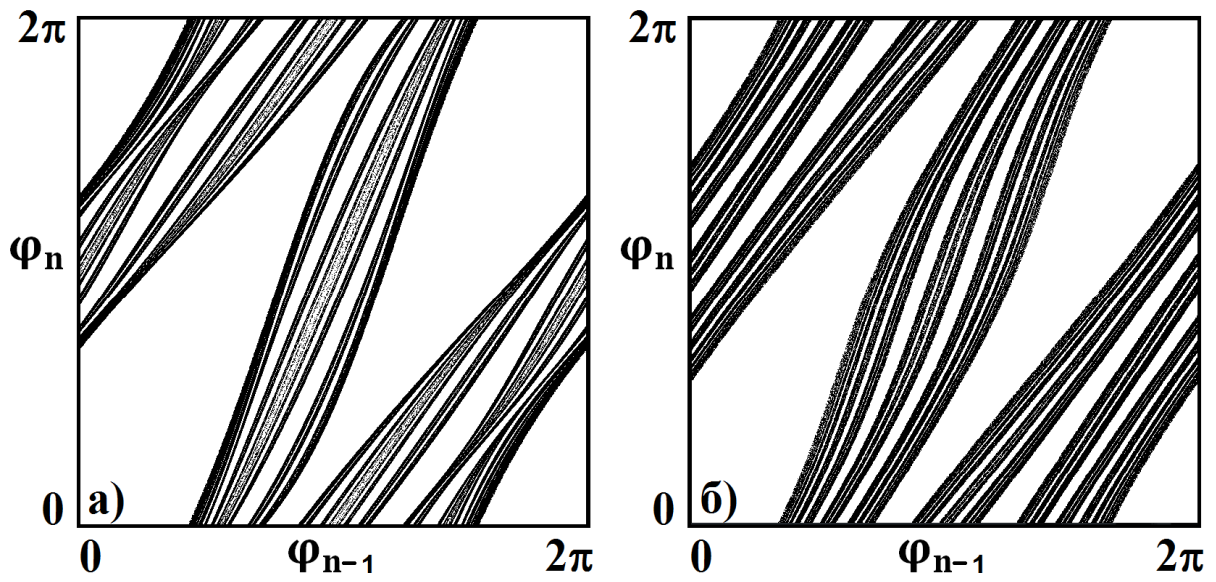


Рис.2.12. Портрет аттрактора отображения (3) при $\varepsilon=0.7$ (2.21) и отображения (2.25) при $\kappa=-0.65$.

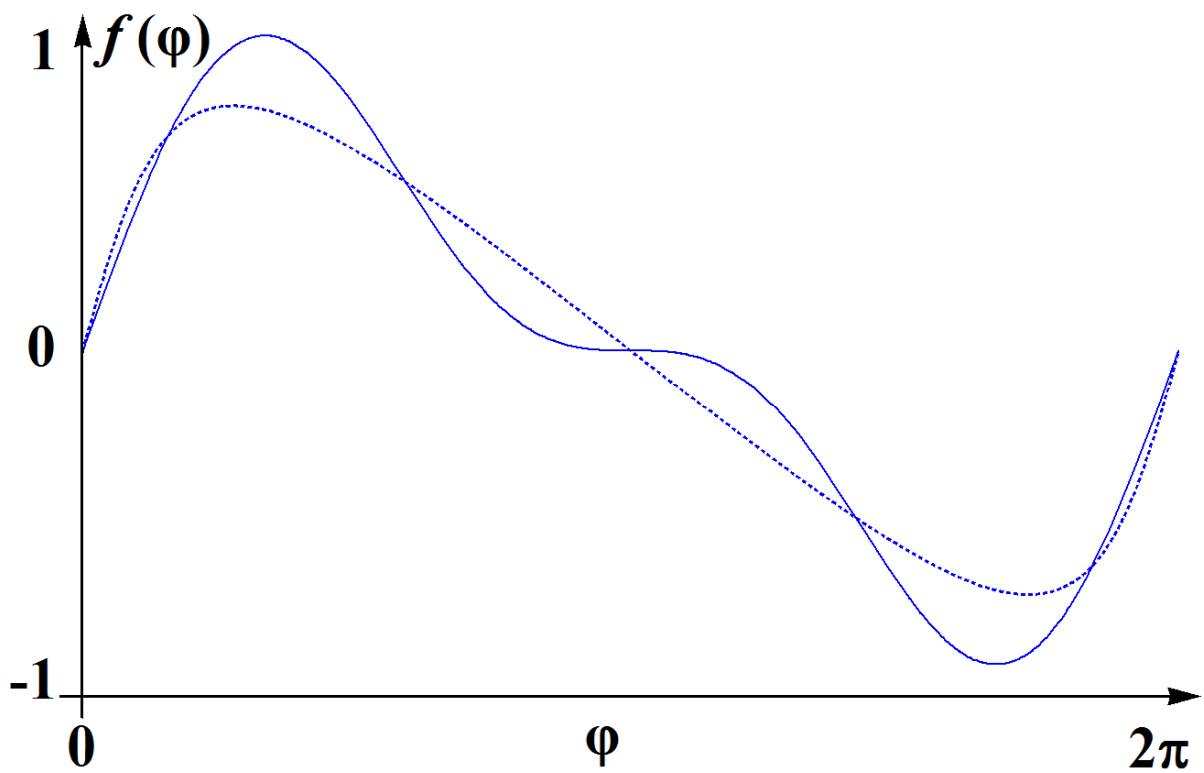


Рис.2.13. Графики функций, используемых при модификации отображения Фибоначчи для получения DA-аттрактора.

2.3.2. Основные уравнения и механизм функционирования модели

Сконструируем систему, состоящую из трех автоколебательных элементов, в которой фазы колебаний описывались бы отображением Фибоначчи с DA модификацией аналогичного вида, как в отображении (2.27). Модель задается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x &= [B + A \cos(2\pi t/T) - x^2] \frac{dx}{dt} + \varepsilon \left[\frac{d(yz)}{dt} \cos \omega_0 t + \alpha \frac{dz}{dt} \right] \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y &= [B + A \cos 2\pi(t/T - 1/3) - y^2] \frac{dy}{dt} + \varepsilon \left[\frac{d(xz)}{dt} \cos \omega_0 t + \alpha \frac{dx}{dt} \right] \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z &= [B + A \cos 2\pi(t/T - 2/3) - z^2] \frac{dz}{dt} + \varepsilon \left[\frac{d(xy)}{dt} \cos \omega_0 t + \alpha \frac{dy}{dt} \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Здесь x , y и z динамические переменные (обобщенные координаты), относящиеся к первому, второму и третьему осцилляторам, ω_0 – их собственная частота, равная частоте вспомогательного сигнала, присутствующего в виде множителя при последнем члене каждого уравнения. Параметр A характеризует глубину модуляции бифуркационного параметра, а B – постоянную составляющую, выбор которой определяет, какую часть периода осцилляторы проводят выше и ниже порога возбуждения, ε – параметр связи, T – период модуляции. Дополнительный параметр связи α , как будет видно из дальнейшего, отвечает за DA-модификацию.

Модуляция параметров осуществляется таким образом, что каждый из осцилляторов находится в возбужденном состоянии приблизительно одну третью часть периода. Благодаря фазовому сдвигу, осцилляторы возбуждаются по очереди: $\dots \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$, и за один период модуляции возбуждение передается следующему осциллятору от двух его партнеров в циклическом порядке.

Предположим, что второй и третий осциллятор совершают колебания фазы которых φ_y и φ_z , т.е. $y \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_y)$, $z \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_z)$. Передача возбуждения от них первому осциллятору осуществляется через слагаемое в первом уравнении

$$\begin{aligned} \left(\frac{d(yz)}{dt} \cos \omega_0 t + \alpha \frac{dz}{dt} \right) &\sim -\sin(2\omega_0 t + \varphi_y + \varphi_z) \cos \omega_0 t - \alpha \sin(\omega_0 t + \varphi_z) \\ &= -\frac{1}{2} \sin(\omega_0 t + \varphi_y + \varphi_z) - \alpha \sin(\omega_0 t + \varphi_z) + \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

где многоточием обозначен нерезонансный член на третьей гармонике.

Правую часть (2.29) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t + \varphi_y + \varphi_z) + 2\alpha \sin(\omega_0 t + \varphi_z) &= \text{Im} \left[(e^{i(\varphi_y + \varphi_z)} + 2\alpha e^{i\varphi_z}) e^{i\omega_0 t} \right] \\ &= \text{Im} \left[e^{i(\varphi_y + \varphi_z)} (1 + 2\alpha e^{-i\varphi_y}) e^{i\omega_0 t} \right] \sim \text{Im} \left[e^{i(\varphi_y + \varphi_z + f(\varphi_y))} e^{i\omega_0 t} \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

где

$$f(\varphi) = \arg(1 + 2\alpha e^{-i\varphi}) = -\arctg \frac{2\alpha \sin \varphi}{1 + 2\alpha \cos \varphi} \quad (2.31)$$

Таким образом, фаза возбуждаемых колебаний первого осциллятора будет определяться соотношением

$$\varphi_x = \varphi_z + \varphi_y + f(\varphi_y) \pmod{2\pi}, \quad (2.32)$$

то есть за один шаг передачи возбуждения для фаз имеет место соотношение, совпадающее при $\alpha = \kappa/2$ с отображением (2.27). На следующих стадиях передачи возбуждения изменение фаз дается циклической перестановкой ($x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow \dots$) в формуле (2.32).

2.3.3. Численное исследование системы. Анализ динамики фаз.

Анализ спектра показателей Ляпунова

Результаты численного решения системы (2.28) методом Рунге-Кутты четвертого порядка подтверждают, что динамика системы согласуется с приведенными выше качественными рассуждениями, так что можно сделать заключение о присутствии ДА-аттрактора в фазовом пространстве соответствующего стробоскопического отображения.

На **рис. 2.14.** приводятся временные зависимости для динамических переменных x, y, z , при значениях параметров $A=2.2, B=1, \varepsilon=0.05, \omega_0=2\pi, T=30, \alpha=-0.45$. Как можно видеть, каждый осциллятор генерирует последовательность цугов колебаний, следующих друг за другом через интервал времени T . На каждом графике представлено наложение нескольких реализаций, позволяющее продемонстрировать присутствие хаоса в данной

системе: фаза высокочастотного заполнения относительно огибающей хаотически меняется от одного периода активности к другому.

На **рис. 2.15.** представлены фазовые портреты аттрактора в стробоскопическом сечении, построенном в моменты времени $t_n = nT$ в проекции на плоскость обобщенная координата – обобщенная скорость для трех осцилляторов при тех же значениях параметров. Как можно видеть, при указанном выборе положения стробоскопического сечения, амплитуда осциллятора x самая большая, амплитуда осциллятора z меньше, а для осциллятора y самая малая.

На **рис. 2.16. (а)** представлен график, отражающий стробоскопическую динамику фаз при значениях параметров, приведенных выше. Фазы φ_n определяются в моменты времени $t = nT/3$, т.е. на каждой трети периода модуляции, в циклическом порядке соотношениями

$$\varphi_x = \arg(x + i\dot{x}/\omega_0), \varphi_y = \arg(y + i\dot{y}/\omega_0), \varphi_z = \arg(z + i\dot{z}/\omega_0) \quad (2.33)$$

и представляются на графике в координатах $(\varphi_{n-1}, \varphi_n)$. На диаграммах можно наблюдать поперечную канторову структуру, соответствующую DA-аттрактору, как на **рис. 2.12.** Подобную структуру можно видеть также на фазовом портрете аттрактора в стробоскопическом сечении (**рис. 2.16. (б)**). Таким образом, можно сделать предположение, что аттрактор системы располагается, по крайней мере, в некотором приближении, на вложенном в шестимерное фазовое пространство двумерном торе, динамика на котором определяется отображением Фибоначчи с DA модификацией (2.32).

Для того, чтобы количественно подтвердить присутствие хаоса были рассчитаны показатели Ляпунова. Для этого использовался стандартный алгоритм Бенеттина [10, 32, 37]. Проводилось совместное решение уравнений (2.28) и шести комплектов уравнений в вариациях

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \omega_0^2\tilde{x} &= [B + A\cos(2\pi/T) - x^2] \frac{d\tilde{x}}{dt} - 2x\tilde{x} \frac{dx}{dt} + \varepsilon \left[\frac{d(\tilde{y}z + y\tilde{z})}{dt} \cos \omega_0 t + \alpha \frac{d\tilde{z}}{dt} \right], \\
\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + \omega_0^2\tilde{y} &= [B + A\cos 2\pi(t/T - 1/3) - y^2] \frac{d\tilde{y}}{dt} - 2y\tilde{y} \frac{dy}{dt} + \varepsilon \left[\frac{d(\tilde{x}z + x\tilde{z})}{dt} \cos \omega_0 t + \alpha \frac{d\tilde{x}}{dt} \right], \\
\frac{d^2\tilde{z}}{dt^2} + \omega_0^2\tilde{z} &= [B + A\cos 2\pi(t/T - 2/3) - z^2] \frac{d\tilde{z}}{dt} - 2z\tilde{z} \frac{dz}{dt} + \varepsilon \left[\frac{d(\tilde{x}y + x\tilde{y})}{dt} \cos \omega_0 t + \alpha \frac{d\tilde{y}}{dt} \right].
\end{aligned}
\tag{2.34}$$

Каждый раз после определенного числа шагов разностной схемы при решении уравнений выполнялась ортогонализация Грама – Шмидта и нормализация для векторов возмущения $\{\tilde{x}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{z}\}$. Показатели Ляпунова определяются при этом как средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов от норм векторов возмущения (после ортогонализации, но перед нормализацией). Полный спектр показателей Ляпунова рассчитанный численно для аттрактора стробоскопического отображения Пуанкаре при значениях параметров $A=2.2$, $B=1$, $\varepsilon=0.05$, $\omega_0=2\pi$, $T=30$, $\alpha=-0.45$ приводится ниже:

$$\Lambda_1 = 1.439, \Lambda_2 = -1.841, \Lambda_3 = -9.890, \Lambda_4 = -11.560, \Lambda_5 = -21.050, \Lambda_6 = -30.122.$$

Значения двух старших показателей Ляпунова являются близкими по модулю и противоположными по знаку величинами. Остальные показатели даются большими по модулю отрицательными числами, что соответствует сильному сжатию фазового объема по четырем из шести направлений в фазовом пространстве. Как можно полагать, в шестимерном пространстве состояний системы (2.28) аттрактор располагается, по крайней мере, в грубом приближении, на двумерном торе, динамика на котором описывается модифицированным отображением Фибоначчи, а сжатие по оставшимся четырем направлениям соответствует тому, что траектории в фазовом пространстве сходятся к данному объекту. На **рис. 2.16. (б)** аттрактор показан в проекции из шестимерного пространства состояний отображения Пуанкаре на плоскость.

На **рис. 2.17.** приведены графики показателей Ляпунова для системы (2.28) в зависимости от параметров A (диаграмма (а)), α (диаграмма (б)) и ε (диаграмма (в)) при фиксированных остальных параметрах. Как можно

видеть, значения двух старших показателей остаются примерно постоянными в широком интервале изменения параметра, что так же может рассматриваться как свидетельство в пользу присутствия в данной области гиперболического хаоса.

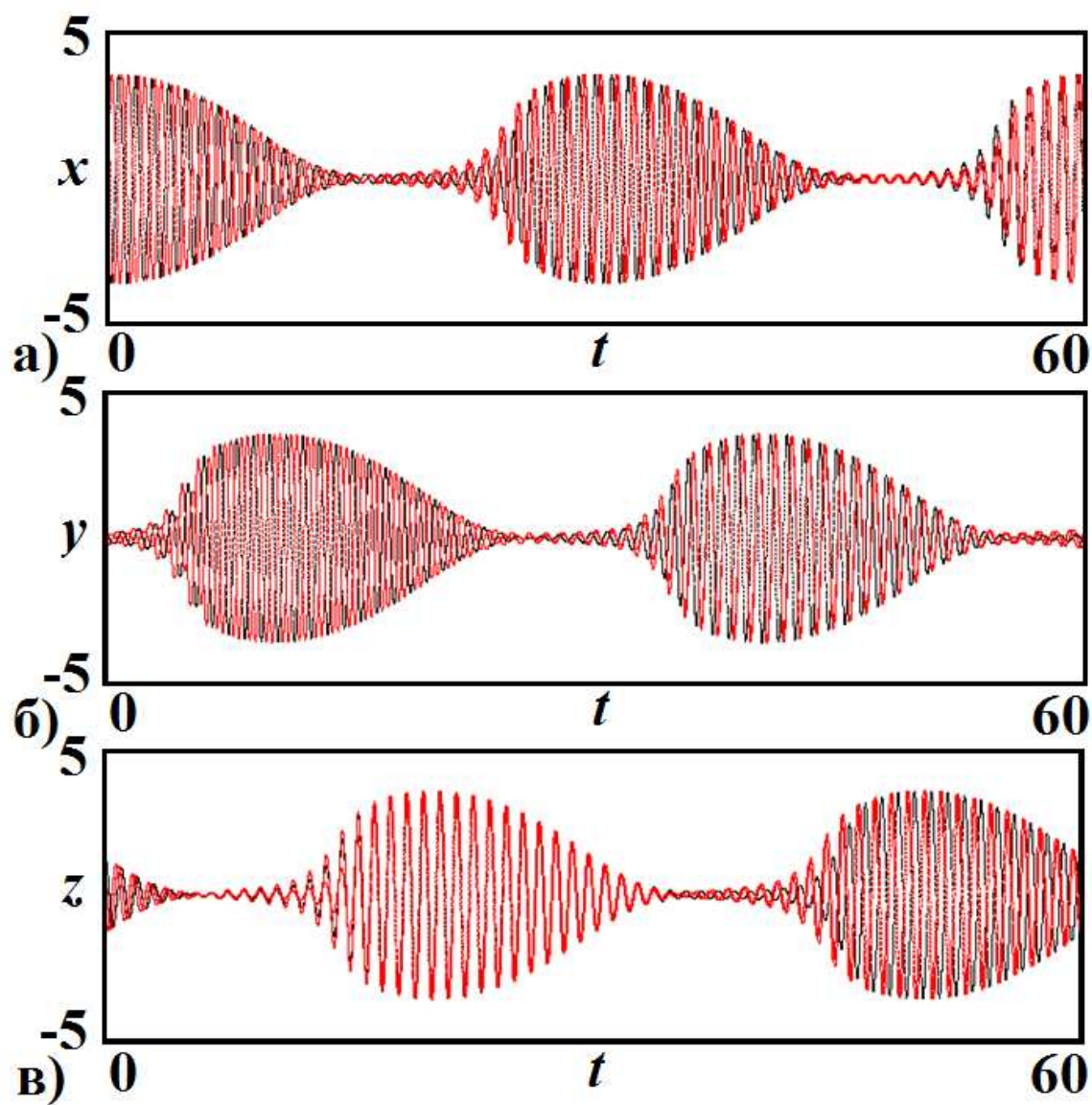


Рис.2.14. Результат наложения нескольких временных реализаций для переменных x , y , z системы (2.28).

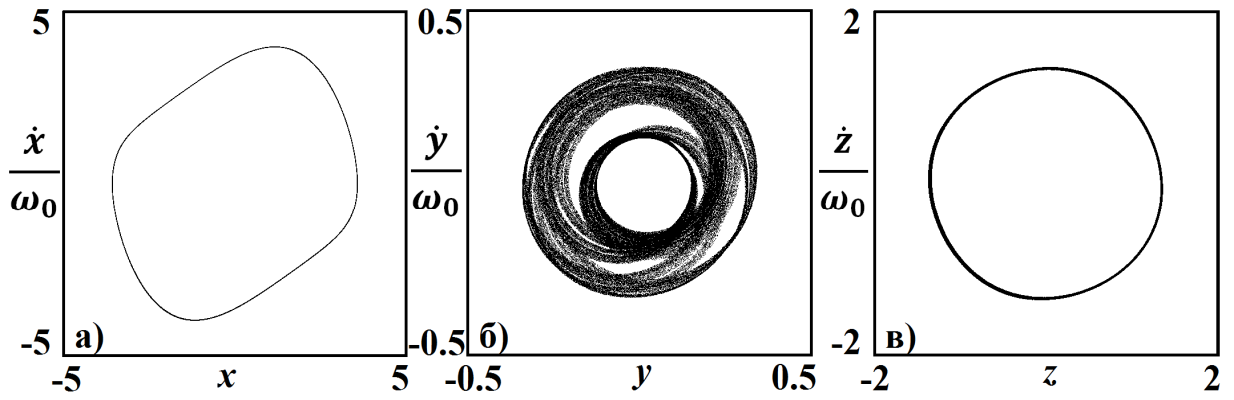


Рис.2.15. Фазовые портреты аттракторов в стробоскопическом сечении в проекции на плоскости (\dot{x}, x) (а), (\dot{y}, y) (б), (\dot{z}, z) (в).

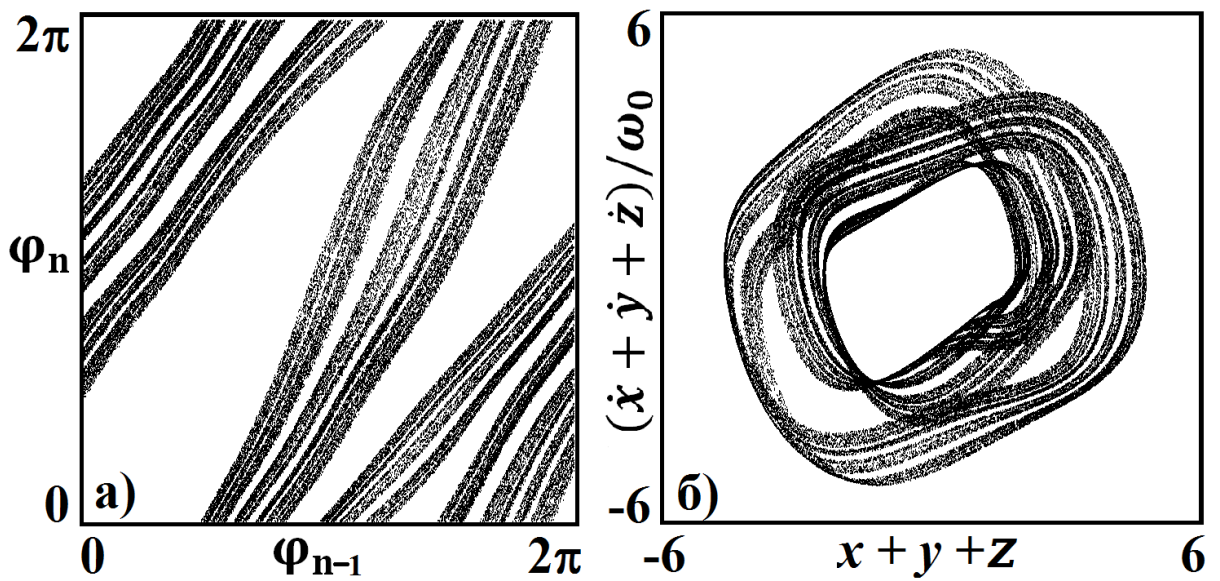


Рис.2.16. График для отображения фазы (а) и фазовый портрет (б) системы (2.28) в проекции на плоскость средняя координата – средняя скорость трех осцилляторов.

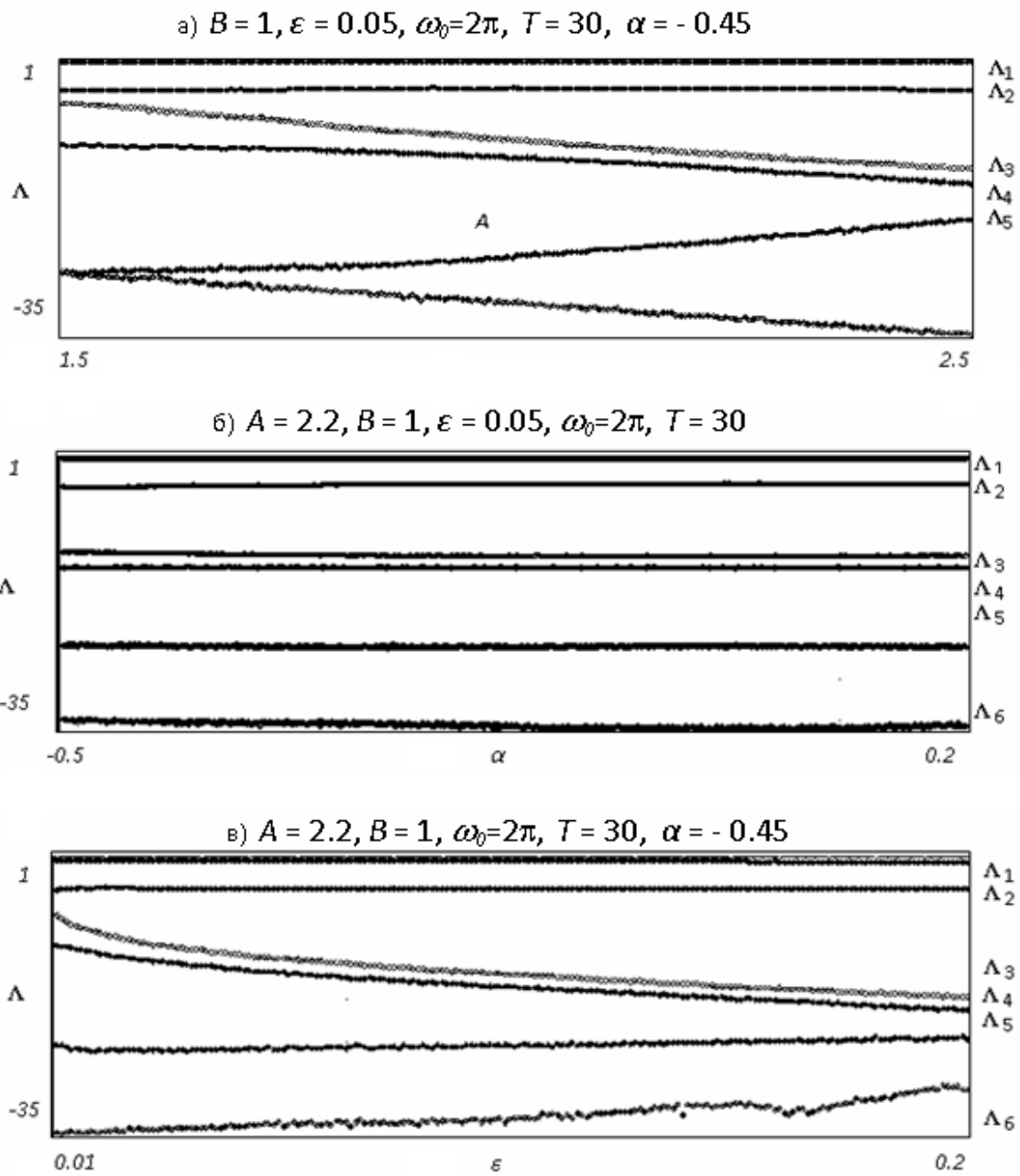


Рис.2.17. Графики показателей Ляпунова системы (2.28) в зависимости от параметров A , α и ε . Остальные параметры указаны в надписи для каждой диаграммы.

2.3.4. Анализ системы на основе связанных осцилляторов ван дер Поля методом медленно меняющихся комплексных амплитуд

От уравнений (2.28) можно перейти к описанию в рамках метода медленных амплитуд, как это было сделано ранее для системы (2.5). Для этого введем комплексные переменные a, b, c так, что

$$x = ae^{i\omega_0 t} + a^* e^{-i\omega_0 t}, \quad y = be^{i\omega_0 t} + b^* e^{-i\omega_0 t}, \quad z = ce^{i\omega_0 t} + c^* e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.35)$$

Условием совместимости этих выражений служат соотношения:

$$\dot{a}e^{i\omega_0 t} + \dot{a}^* e^{-i\omega_0 t} = 0, \quad \dot{b}e^{i\omega_0 t} + \dot{b}^* e^{-i\omega_0 t} = 0, \quad \dot{c}e^{i\omega_0 t} + \dot{c}^* e^{-i\omega_0 t} = 0. \quad (2.36)$$

Тогда можно записать:

$$\dot{x} = i\omega_0 (ae^{i\omega_0 t} - a^* e^{-i\omega_0 t}), \quad \dot{y} = i\omega_0 (be^{i\omega_0 t} - b^* e^{-i\omega_0 t}), \quad \dot{z} = i\omega_0 (ce^{i\omega_0 t} - c^* e^{-i\omega_0 t}), \quad (2.37)$$

$$\ddot{x} = 2i\omega_0 \dot{a}e^{i\omega_0 t} - \omega_0^2 (ae^{i\omega_0 t} + a^* e^{-i\omega_0 t}), \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(yz)}{dt} &= i\omega_0 [(be^{i\omega_0 t} - b^* e^{-i\omega_0 t})(ce^{i\omega_0 t} + c^* e^{-i\omega_0 t}) + \\ &+ (be^{i\omega_0 t} + b^* e^{-i\omega_0 t})(ce^{i\omega_0 t} - c^* e^{-i\omega_0 t})] = 2i\omega_0 (bce^{2i\omega_0 t} - b^* c^* e^{-2i\omega_0 t}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Подстановка выражений в новых переменных в первое уравнение (2.28) дает:

$$\begin{aligned} 2i\omega_0 \dot{a}e^{i\omega_0 t} &= [B + A \cos(2\pi t/T) - a^2 e^{2i\omega_0 t} - 2|a|^2 - a^{*2} e^{-2i\omega_0 t}] i\omega_0 (ae^{i\omega_0 t} - a^* e^{-i\omega_0 t}) \\ &+ \varepsilon \left[2i\omega_0 (bce^{2i\omega_0 t} - b^* c^* e^{-2i\omega_0 t}) \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} + \alpha i\omega_0 (ce^{i\omega_0 t} - c^* e^{-i\omega_0 t}) \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2} [B + A \cos(2\pi t/T) - a^2 e^{2i\omega_0 t} - 2|a|^2 - a^{*2} e^{-2i\omega_0 t}] (a - a^* e^{-2i\omega_0 t}) \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon [(bce^{2i\omega_0 t} - b^* c^* e^{-2i\omega_0 t})(1 + e^{-2i\omega_0 t}) + \alpha (c - c^* e^{-2i\omega_0 t})] \end{aligned} \quad (2.41)$$

Затем уравнение умножается на экспоненту $e^{-i\omega_0 t}$ и проводится усреднение по периоду внешнего воздействия. Записывая аналогичные уравнения для остальных двух осцилляторов, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2} [B + A \cos(2\pi t/T) - |a|^2] a + \frac{1}{2} \varepsilon (b + \alpha) c \\ \dot{b} &= \frac{1}{2} [B + A \cos 2\pi(t/T - 1/3) - |b|^2] b + \frac{1}{2} \varepsilon (c + \alpha) a \\ \dot{c} &= \frac{1}{2} [B + A \cos 2\pi(t/T - 2/3) - |c|^2] c + \frac{1}{2} \varepsilon (a + \alpha) b \end{aligned} \quad (2.42)$$

Укороченные уравнения (2.42) можно рассматривать как приближенное описание системы (2.28), а можно и как самостоятельную систему. Поскольку аттрактор системы (2.28), как предполагается, гиперболический, то следует ожидать, что динамика уравнений (2.42) на качественном уровне будет соответствовать поведению системы (2.28), и в фазовом пространстве системы (2.42) будет также присутствовать гиперболический аттрактор.

Обратимся к результатам численного решения системы (2.42) при значениях параметров $A = 2.2$, $B = 1$, $\varepsilon = 0.05$, $\omega_0 = 2\pi$, $T = 30$, $\alpha = -0.45$. На **рис. 2.18.** представлены временные реализации для амплитуд (**рис. 2.18.(а)**) и фаз (**рис. 2.18.(б)**) комплексных переменных a , b и c . Сравнивая **рис. 2.14.** и **рис. 2.18.**, можно видеть, что вид зависимостей амплитуд от времени представляет собой огибающую для графиков колебаний осцилляторов системы (2.28). Для фаз, как можно заметить, характерны случайные скачки, что подтверждает предположение о хаотической природе системы. Портрет аттрактора системы (2.42) в сечении Пуанкаре представлен на **рис. 2.19.** Отображение, описывающее поведение фаз колебаний получают аналогичным образом, как для системы (2.28), т.е. фазы в циклическом порядке на каждой трети периода модуляции определяются, как $\arg a$, $\arg b$ и $\arg c$ и представляются на графике в координатах $(\varphi_{n-1}, \varphi_n)$. Соответствующие диаграммы приведены на **рис. 2.20.(а)**, где хорошо видна структура, характерная для DA-аттрактора. На **рис. 2.20.(б)** представлен портрет аттрактора в стробоскопическом сечении на плоскости, комплексной переменной, усредненной по трем осцилляторам.

Полный спектр показателей Ляпунова для аттрактора, реализующегося при значениях параметров $A = 3$, $B = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_0 = 2\pi$, $T = 12$, рассчитанный численно для системы (2.42) по методу Бенеттина [10, 32, 37] на основе решения уравнений (2.42), дополненных комплектом шести уравнений в вариациях, следующий:

$$\Lambda_1 = 1.453, \Lambda_2 = -1.826, \Lambda_3 = -10.309, \Lambda_4 = -11.361, \Lambda_5 = -21.319, \Lambda_6 = -32.144.$$

Спектр показателей Ляпунова находится в хорошем соответствии со спектром, полученным для системы (2.28).

На **рис. 2.21** приведены графики показателей Ляпунова для системы (4) в зависимости от параметров A (диаграмма (а)) и B (диаграмма (б)) и α (диаграмма (в)) при фиксированных остальных параметрах. Как можно видеть, старший показатель Ляпунова положительный и примерно постоянный в достаточно широком диапазоне изменения параметров, что подтверждает предположение о присутствии в фазовом пространстве системы (2.42) гиперболического аттрактора.

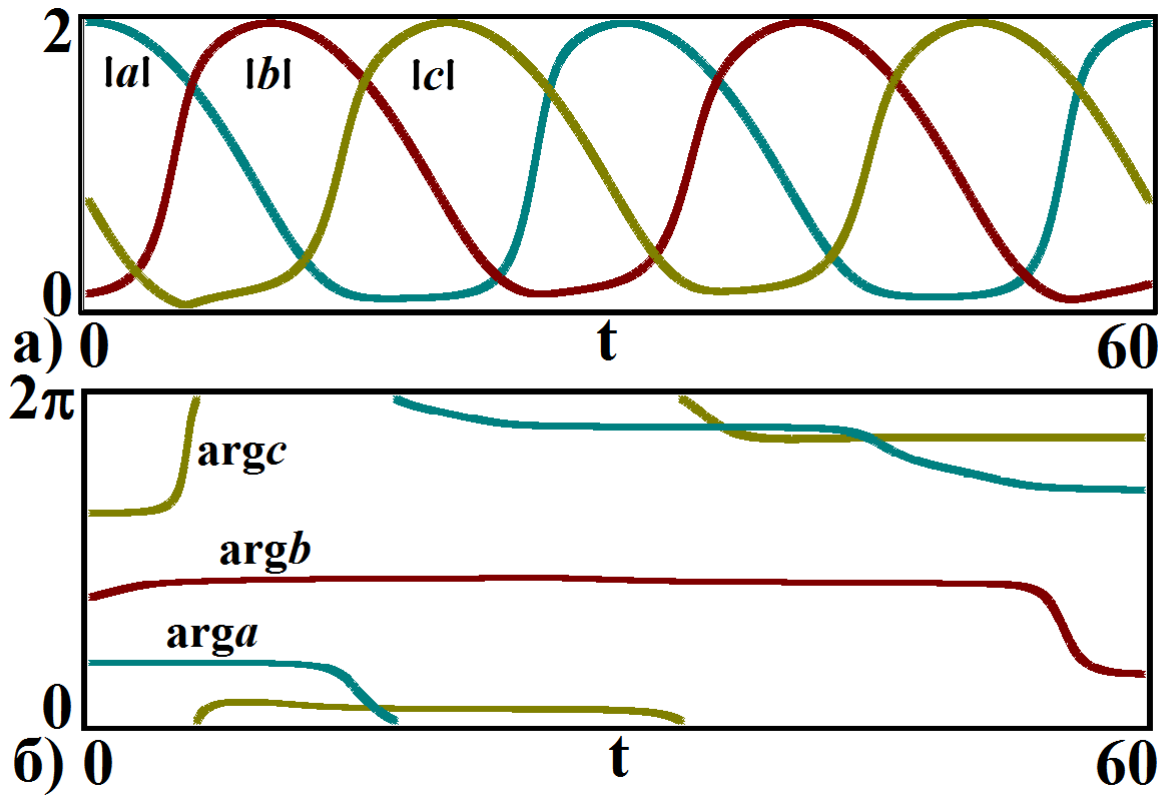


Рис.2.18. Графики зависимости от времени амплитуд (а) и фаз (б) комплексных переменных системы (2.42).

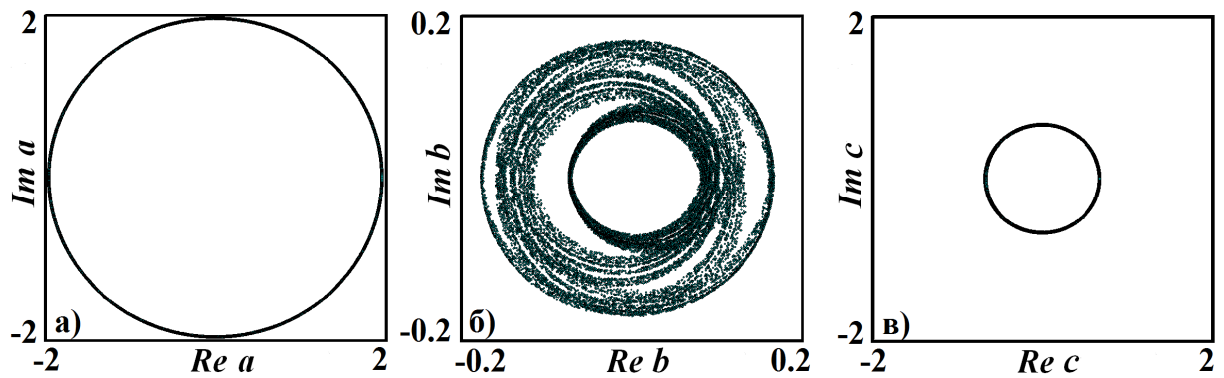


Рис.2.19. Фазовые портреты аттрактора в стробоскопическом сечении системы (2.42).

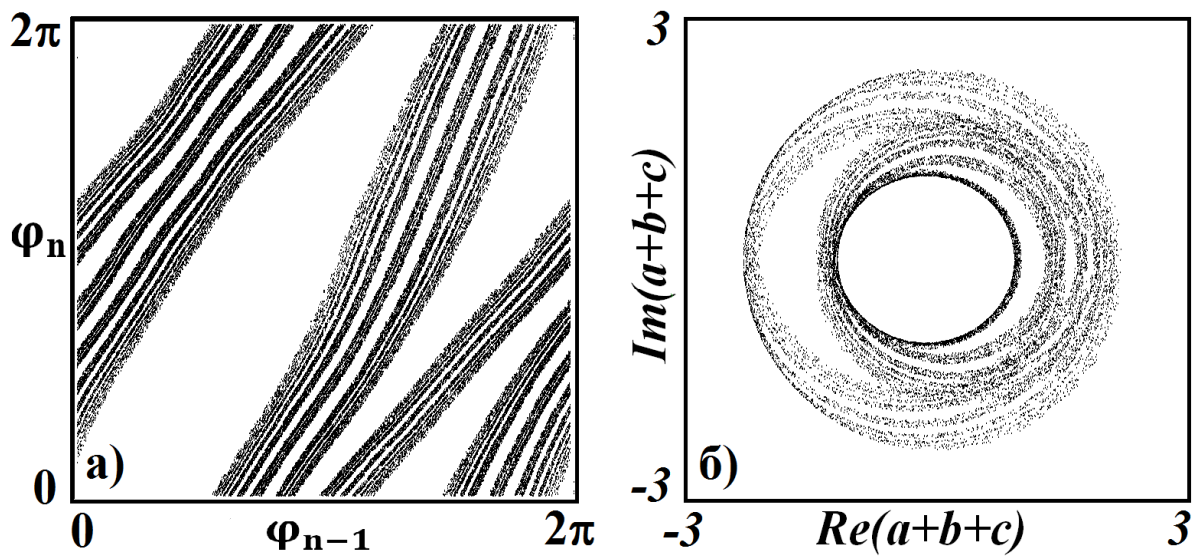


Рис.2.20. График для отображения фазы (а) и фазовый портрет (б) системы (2.42) в проекции на плоскость средняя координата – средняя скорость трех осцилляторов.

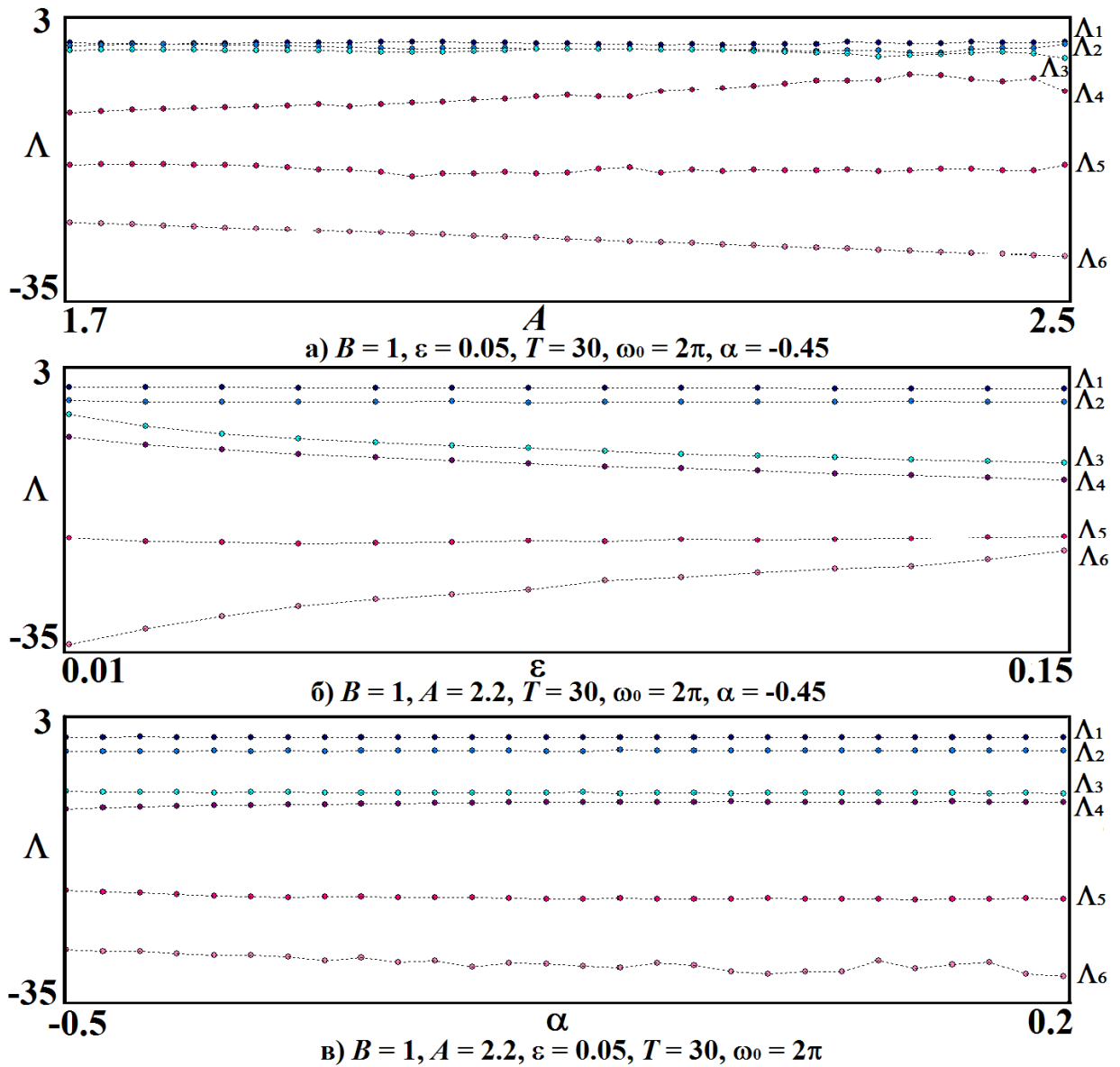


Рис.2.21. Графики показателей Ляпунова системы (2.42) в зависимости от параметров A , ε и α . Остальные параметры указаны в надписи для каждой диаграммы.

Выводы к главе 2

Введены в рассмотрение и исследованы две неавтономные системы трех связанных поочередно возбуждающихся осцилляторов ван дер Поля.

Каждая система генерирует последовательность цугов колебаний, следующих друг за другом с периодом модуляции, фаза высокочастотного заполнения при этом хаотически меняется относительно огибающей от одного периода активности к другому.

Для первой системы показано, что при динамике на аттракторе поведение фаз пары осцилляторов, входящих в систему, описывается двумерным отображением, соответствующим гиперболическому отображению Аносова («кот Арнольда»). Аттрактор системы, вложенный в шестимерное фазовое пространство отображения Пуанкаре, представляет собой объект, приблизительно соответствующий двумерному тору, на котором осуществляется динамика, характерная для систем Аносова, в то время как по остальным размерностям в фазовом пространстве имеет место сжатие, обеспечивающее приближение траекторий к аттрактору.

Вторая система представляет собой модификацию первой системы, в которой вместо динамики Аносова на торе реализуется однородно гиперболический аттрактор, типа предложенного Смейлом DA-аттрактора. Поведение фаз такой системы в некотором приближении описывается модифицированным отображением Фибоначчи, которое получается в результате введения диссипативной добавки, приводящей к возникновению DA-аттрактора.

Так же для обеих систем были получены уравнения для комплексных медленно меняющихся амплитуд. На качественном уровне отображения, описывающие динамику фаз таких систем, отвечают отображению Аносова и модифицированному отображению Фибоначчи, соответственно.

Как уже было отмечено, важным свойством гиперболических аттракторов, позволяющим варьировать систему, сохраняя тип аттрактора, является структурная устойчивость. Это свойство дает перспективы для

применения такого рода устройств, например, как генераторов хаоса, которые могут использоваться, в частности, в информационно-коммуникационных системах.

Глава 3. Радиофизическая реализация систем с гиперболическим хаосом

3.1. Введение

Поскольку системы, рассмотренные во второй главе настоящей диссертационной работы, допускают физическую реализацию, интересным и важным представляется вопрос о возможности их радиофизической реализации в виде электронных устройств. Так, например, в работах [24, 42] были предложены схемы радиотехнических устройств, представляющих собой неавтономные системы с гиперболическими аттракторами Смейла - Вильямса и Плыкина в стробоскопическом сечении.

В настоящей главе рассматриваются схемы, соответствующие системам с гиперболическим хаосом на основе связанных осцилляторов ван дер Поля, рассмотренным в предыдущей главе, выполненные с использованием средств схемотехнического моделирования (программный пакет Multisim)[43, 44] .

В первом разделе главы приводится схема электронного устройства, демонстрирующего гиперболический хаос. Данная схема соответствует системе на основе трех осцилляторов ван дер Поля, которые благодаря модуляции бифуркационного параметра и фазовому сдвигу, возбуждаются попеременно. Как будет показано, динамика фаз осцилляторов такой системы за период модуляции параметра, ответственного за возбуждение колебаний, описывается отображением Фибоначчи.

Второй раздел посвящен исследованию схемы электронного устройства аналогичной предыдущей, но несколько видоизмененной, что приводит к соответствию динамики фаз такой системы отображению Фибоначчи с DA модификацией.

3.2. Схема электронного устройства с динамикой, соответствующей отображению «кот Арнольда»

Схема электронного устройства, обеспечивающего динамику, соответствующую уравнениям связанных осцилляторов (2.5), была сконструирована с помощью программного пакета «Multisim 10.0» (рис. 3.1). Схема, составлена из трех осцилляторов ван дер Поля на основе колебательных контуров, каждый из которых образован катушкой индуктивности $L=1.7$ мГн и емкостью $C=4$ нФ. Таким образом, собственная частота каждого осциллятора составляет примерно 60 кГц. В каждый осциллятор введено отрицательное сопротивление (при помощи операционных усилителей $U1$, $U2$, $U3$) и нелинейная проводимость (при помощи трех пар полупроводниковых диодов с противоположными направлениями пропускания тока $D1$ и $D2$, $D3$ и $D4$, $D5$ и $D6$) [45, 46]. Для модуляции параметра, ответственного за возникновение автоколебаний, сигнал на частоте 4 кГц от источника трехфазного тока $V1$ подается на затворы полевых транзисторов $Q1$, $Q2$ и $Q3$, в результате чего их проводимость в цепи сток-исток меняется с соответствующим периодом. Передача возбуждения осциллятору z происходит от осцилляторов x и y , сигналы которых перемножаются множителем $A7$, затем дифференцируются схемой на операционном усилителе $U7$ и умножаются на вспомогательный сигнал постоянной амплитуды и частоты 60 кГц от источника переменного напряжения $V3$. Аналогичным образом возбуждение передается осциллятору y от осцилляторов x и z , и осциллятору x от осцилляторов y и z .

На рис. 3.2. показаны графики временной зависимости напряжения на конденсаторах и резисторах $C1$ и $R1$ (а), $C2$ и $R2$ (б), $C3$ и $R3$ (в), полученные при моделировании в среде Multisim с использованием двухлучевого осциллографа. Как можно видеть, осцилляторы возбуждаются

поочередно, причем каждый из них генерирует последовательность цугов колебаний, следующих друг за другом с периодом модуляции $T = 0,25$ мс.

Для того чтобы продемонстрировать соответствие динамики фаз системы отображению (2.2), данные, полученные при моделировании в среде Multisim, записываются в файл с помощью приложения Grapher. Для каждого осциллятора создается свой файл с данными. Затем файлы обрабатываются внешней программой. Сначала выбираются значения напряжений на резисторе и конденсаторе U_R и U_C для первого осциллятора соответствующие моменту времени $t = (n - \frac{2}{3})T$, для второго осциллятора моменту времени $t = (n - \frac{1}{3})T$ и для третьего осциллятора моменту времени $t = nT$. Затем полученные временные ряды для напряжений нормируются так, чтобы сумма квадратов элементов была для них одинакова. После чего для каждой пары величин U_C^n, U_R^n , относящихся к одному и тому же моменту времени фазы определяются соотношением $\varphi_n = \arg(U_C^n + iU_R^n)$, и приводятся к интервалу от 0 до 2π .

На **рис. 3.3.** представлен график, для полученных таким образом значений фаз. По вертикальной оси представлена фаза третьего осциллятора, определенная для полного периода модуляции. По горизонтальной оси отложена сумма фазы первого осциллятора, определенной для первой трети периода, и фазы второго осциллятора, определенной для второй трети периода. Точки на графике располагаются вдоль диагонали, подтверждая тот факт, что выражение (2.2) достаточно хорошо описывает преобразование фаз при возбуждении очередного осциллятора системы.

На **рис. 3.4.(а)** показан портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора, полученный при помощи двухлучевого осциллографа, подключенного таким образом, что перемещение луча по горизонтали и вертикали определяется входными напряжениями U_C и U_R . На **рис. 3.4.(б)** представлен портрет аттрактора в стробоскопическом сечении, полученный при использовании записанных в файл значений напряжений на

конденсаторе и резисторе для первого осциллятора, обработанных тем же способом, что и для определения значений фаз, и представленных в координатах U_C, U_R .

Другой вариант демонстрации соответствия динамики фаз в схеме отображению «кот Арнольда» состоит в том, чтобы представить полученные данные на плоскости с изображением головы кота. В системе (2.5) отображение для фаз за треть периода модуляции соответствует отображению Фибоначчи, за две трети – отображению «кот Арнольда», а за полный период модуляции - отображению (2.4). Графическое построение производится следующим образом. Для пары значений фаз (φ_z, φ_y) , вычисленных способом, описанным выше, определяем, попадает ли точка с такими координатами на плоскости (z, y) в область в виде головы кота. Если да, то она отображается на графике, а пары, отвечающие моментам времени через период и через два периода модуляции, отображаются на двух следующих диаграммах. Если же точка не попадает в указанную область, на диаграмме она не отмечается, а для дальнейшего построения берется следующая пара чисел, и так далее. На **рис. 3.5.** приведены картинки, полученные таким методом, а так же полученные непосредственно для отображения (2.4).

На **рис. 3.6.** показаны спектры колебаний трех осцилляторов, полученные при моделировании в среде Multisim с использованием анализатора спектра. Для каждого осциллятора спектр сплошной, что подтверждает хаотическую природу системы, и сосредоточен вблизи собственной частоты 60 кГц.

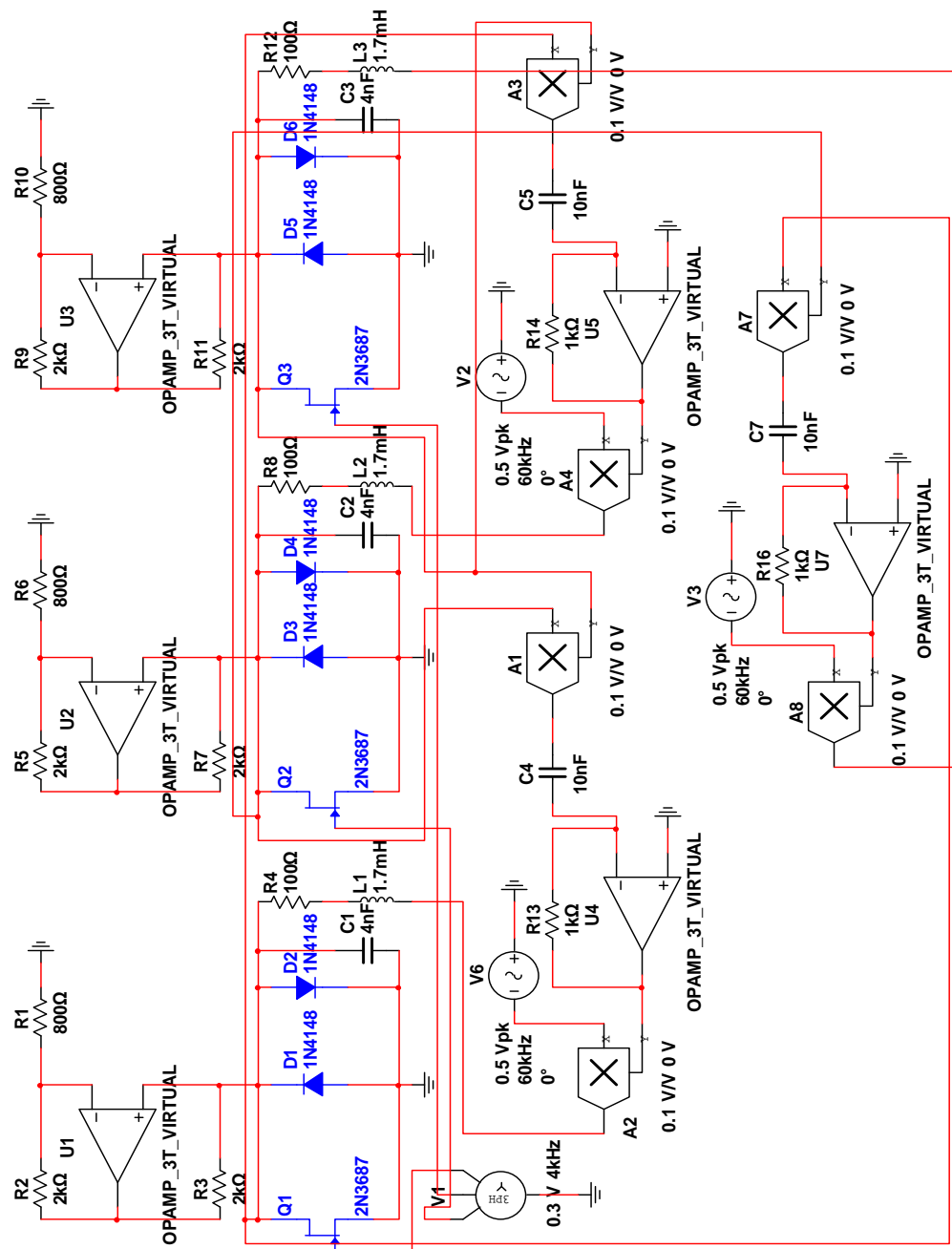


Рис.3.1. Принципиальная схема устройства с динамикой фаз, описываемой отображением «кот Арнольда».

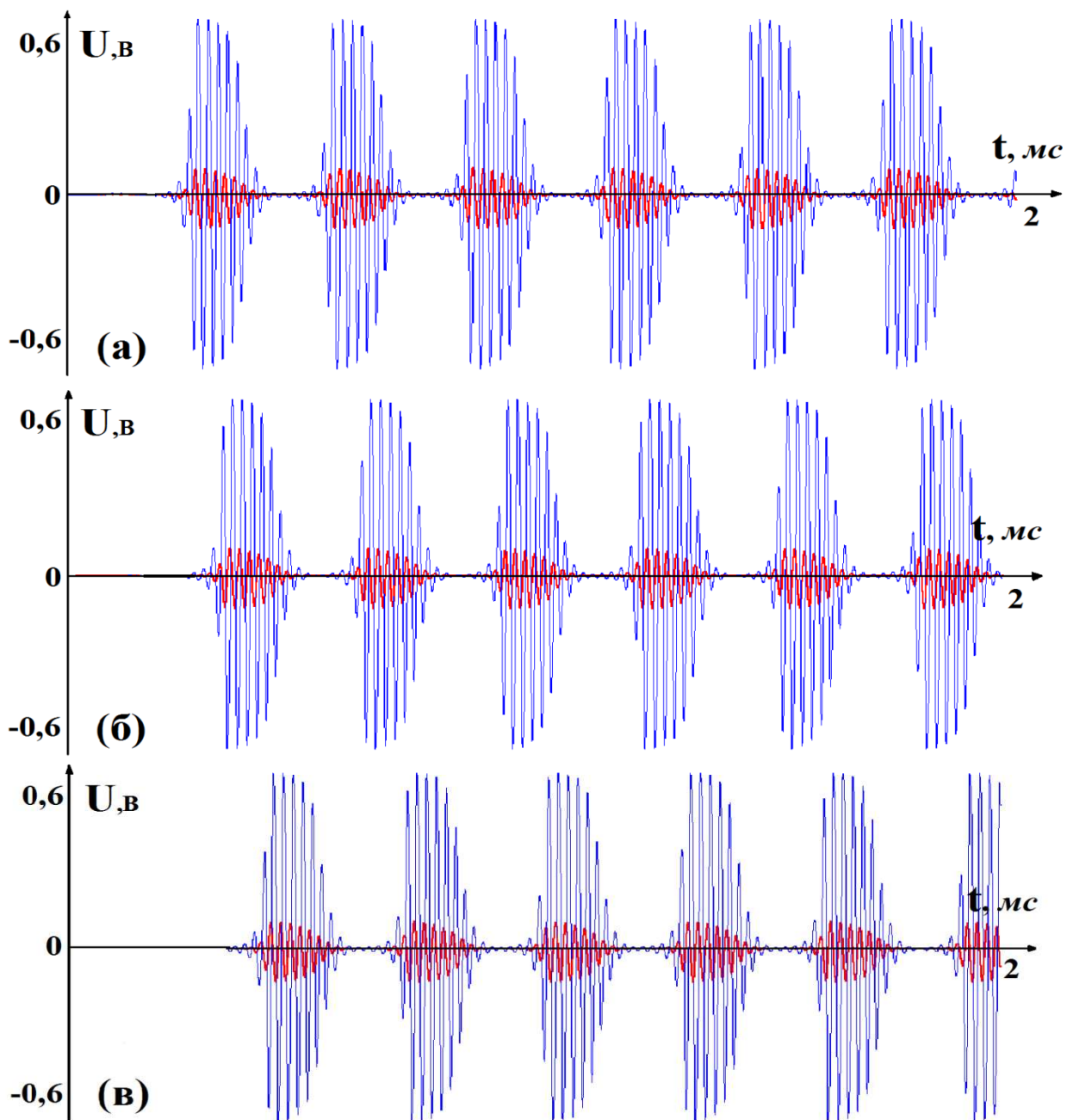


Рис. 3.2. Реализации напряжения на конденсаторах (синяя кривая) и резисторах (красная кривая) C1 и R1 (а), C2 и R2 (б), C3 и R3 (в).

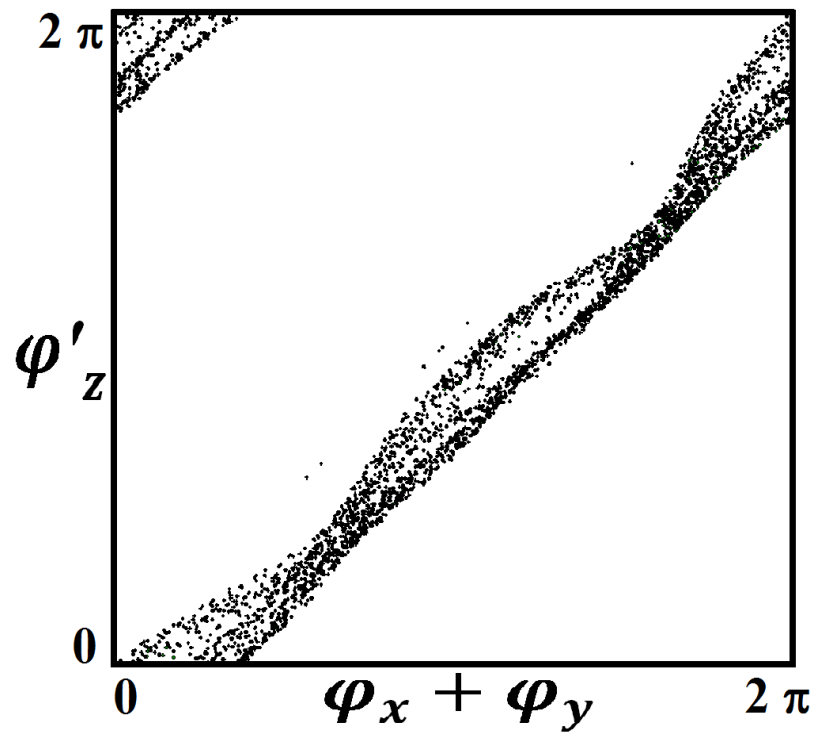


Рис.3.3. График, иллюстрирующий соотношение фаз при передаче возбуждения третьему осцилятору от его партнеров.

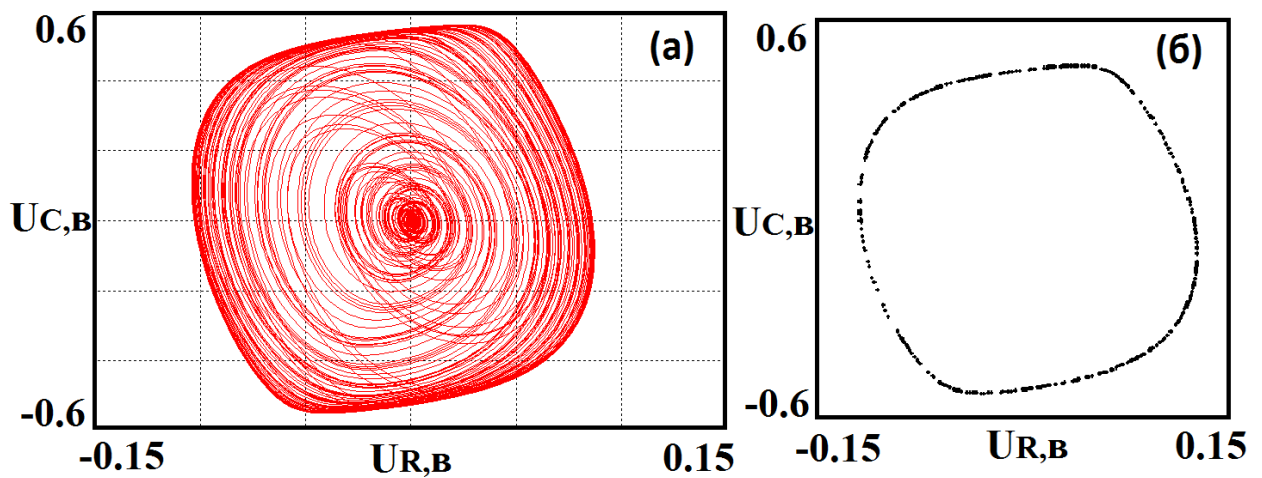


Рис.3.4. Портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость первого осцилятора (а) и в стробоскопическом сечении (б). По горизонтальной и вертикальной оси отложены, соответственно, напряжение на резисторе R1 на конденсаторе C1.

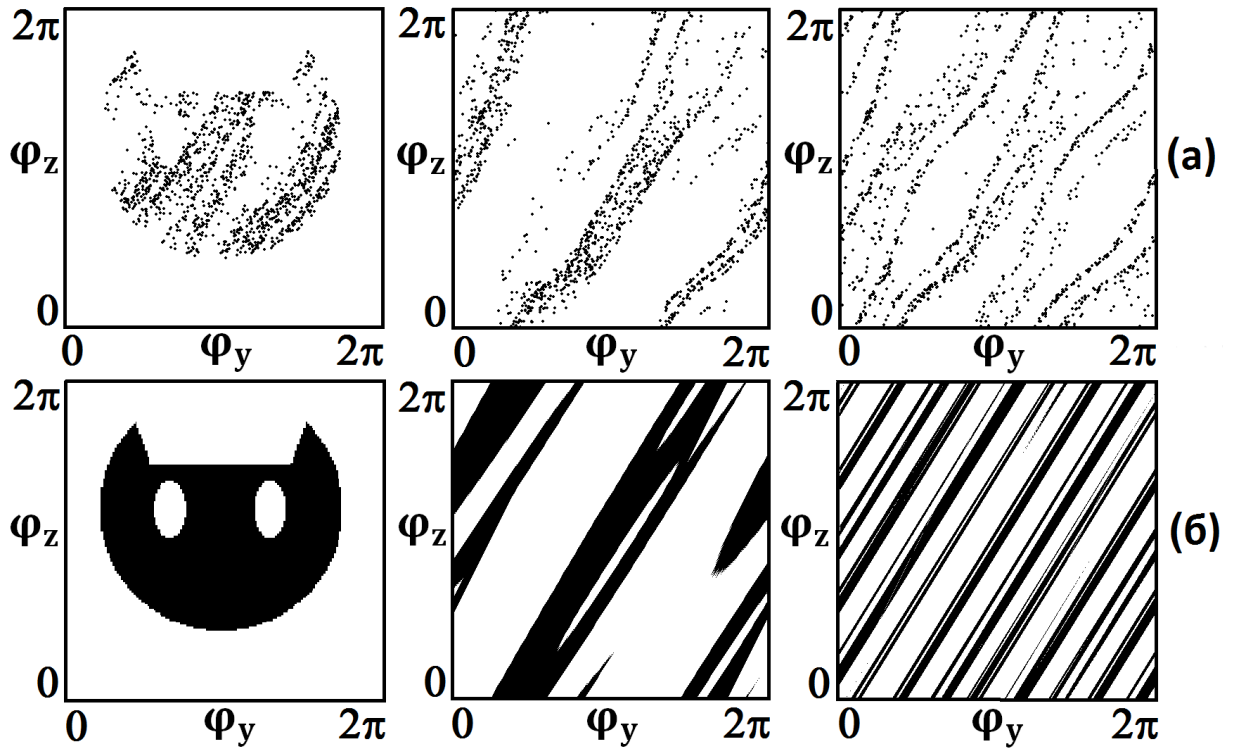


Рис.3.5. Иллюстрация и действия отображения, описывающего динамику фаз, полученного на основе результатов моделирования в программной среде Multisim (а) и действия отображения (2.10) (б).

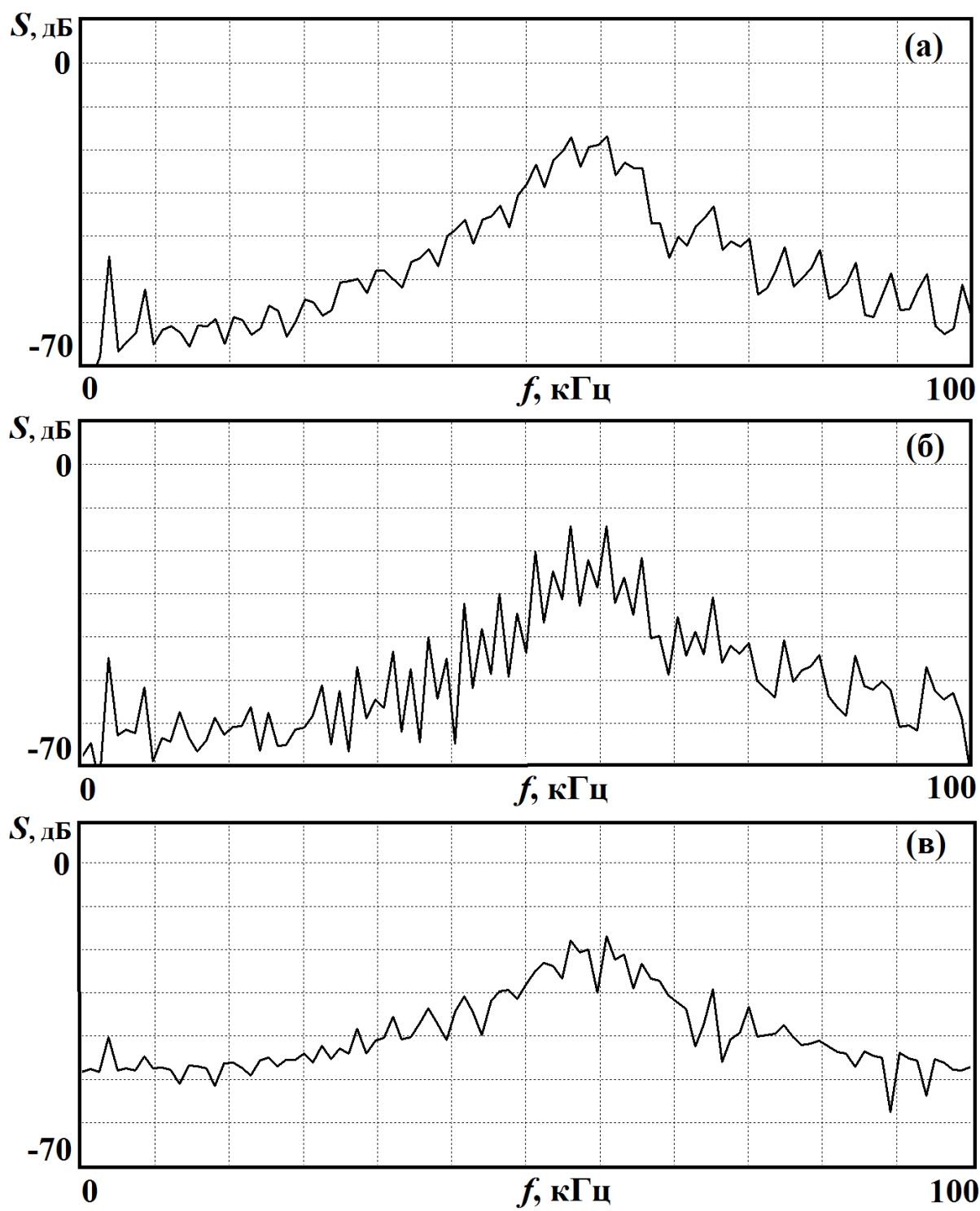


Рис.2.6. Спектры колебаний напряжения на конденсаторах С1 (а), С2 (б) и С3 (в).

3.3. Схема электронного устройства с динамикой, соответствующей модифицированному отображению Фибоначчи

Рассмотрим схему электронного устройства, составленного на основе связанных осцилляторов ван дер Поля, с динамикой, соответствующей уравнениям (2.28) (рис. 3.7.). В основе схемы три осциллятора, каждый из которых состоит из колебательного контура ($L=1.7$ мГн, $C=4$ нФ), в который введены отрицательное сопротивление с использованием операционного усилителя (U_1 , U_2 , U_3 , соответственно, для первого, второго и третьего осцилляторов) и нелинейная проводимость при помощи пары полупроводниковых диодов с противоположными направлениями пропускания тока (D_1 и D_2 , D_3 и D_4 , D_5 и D_6). При этом собственная частота каждого осциллятора составляет примерно 60 кГц. Основные отличия этой схемы от аналогичной схемы, приведенной в разделе 3.2., заключаются в том, что сигнал от источника трехфазного тока, подаваемый на затворы полевых транзисторов, имеет частоту 2 кГц, а так же в схему вводятся дополнительные элементы, обеспечивающие поведение фаз, соответствующее динамике на гиперболическом аттракторе.

Передача возбуждения осциллятору x происходит от осцилляторов y и z , сигналы которых перемножаются множителем A_1 , затем дифференцируются схемой на операционном усилителе U_4 , конденсаторе C_4 и резисторе R_{13} , и умножаются на вспомогательный сигнал постоянной амплитуды и частоты 60 кГц от источника переменного напряжения V_3 , после чего полученный сигнал суммируется с сигналом от осциллятора z , подвергнутого преобразованию посредством дифференциатора на конденсаторе C_8 , резисторе R_{17} и операционном усилителе U_8 . Аналогичным образом возбуждение передается осциллятору y от осцилляторов x и z , и осциллятору z от осцилляторов x и y .

На **рис. 3.8.** показаны графики реализаций напряжений на конденсаторах и резисторах C1 и R1 (а), C2 и R2 (б), C3 и R3 (в), полученные при моделировании в среде Multisim. Как можно видеть, осцилляторы возбуждаются поочередно, и фаза высокочастотного заполнения относительно огибающей хаотически меняется от одного периода активности к другому.

Для того чтобы продемонстрировать присутствие в системе гиперболического аттрактора, данные записываются в файл и обрабатываются внешней программой так же, как это было сделано в предыдущем разделе настоящей главы. На **рис. 3.9.(а)** показан график зависимости значений фаз φ_n от φ_{n-1} , на котором можно наблюдать структуру на качественном уровне соответствующую гиперболическому DA аттрактору. Для сравнения на **рис. 3.9.(б)** приведен портрет аттрактора отображения (2.32).

На **рис. 3.10.(а)** представлен портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора, полученный при подключении двухлучевого осциллографа, так что отклонение луча по горизонтали и вертикали определяется входными напряжениями на конденсаторе и резисторе. На **рис. 3.10.(б)** показан портрет аттрактора в стробоскопическом сечении, полученный при использовании записанных в файл значений напряжений на конденсаторе и резисторе для первого осциллятора, обработанных внешней программой и представленных в координатах U_C, U_R .

На **рис. 3.11.** приводятся спектры сигналов, генерируемых тремя осцилляторами, построенные с помощью анализатора спектра в логарифмическом масштабе. Спектры сосредоточены в окрестности собственной частоты каждого осциллятора 60 кГц. В низкочастотной области спектра присутствуют дискретные компоненты на частоте 2 кГц, что объясняется периодической модуляцией параметров с этой частотой.

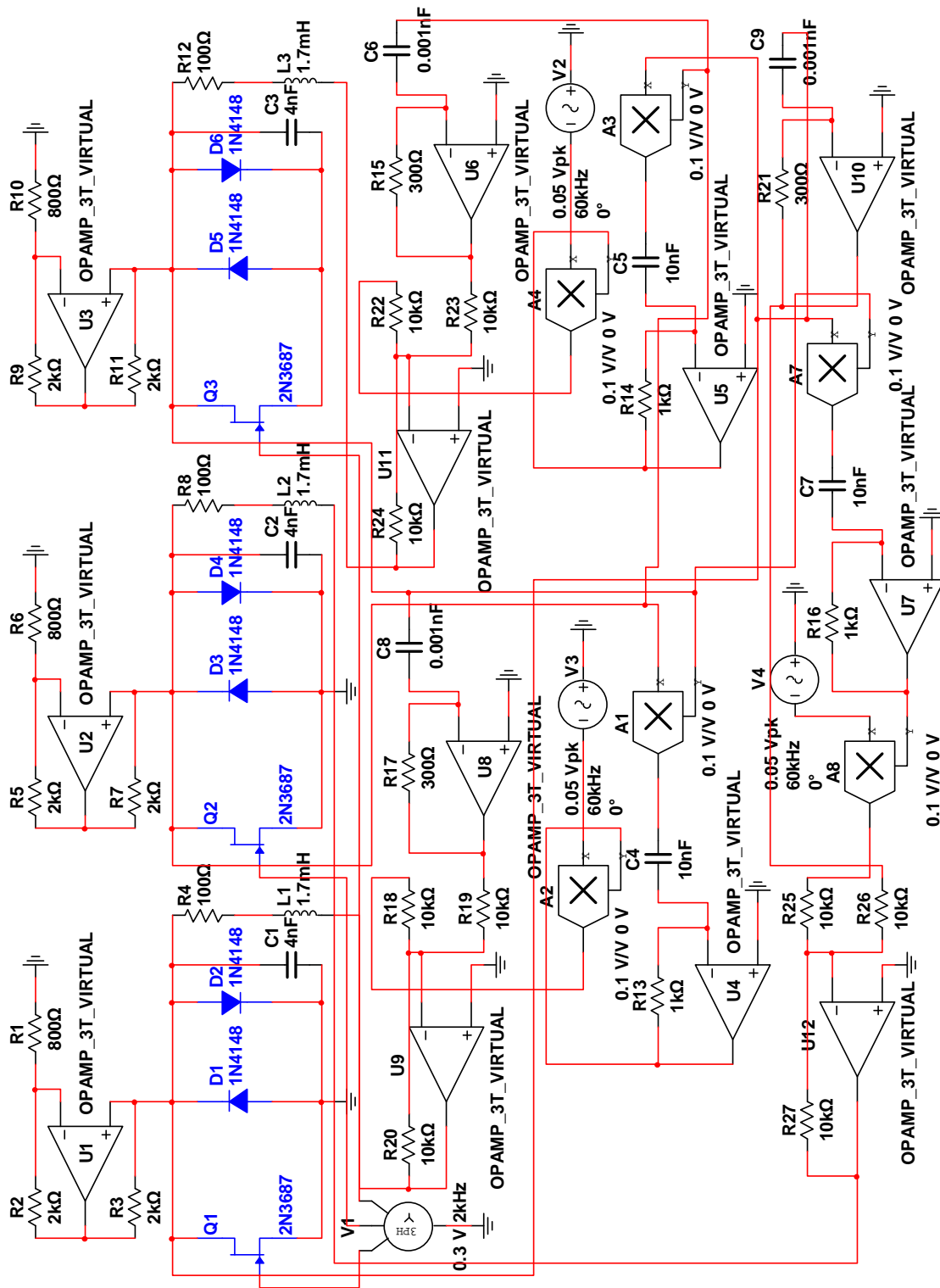


Рис.3.7. Принципиальная схема устройства с динамикой фаз, описываемой модифицированным отображением Фибоначчи.

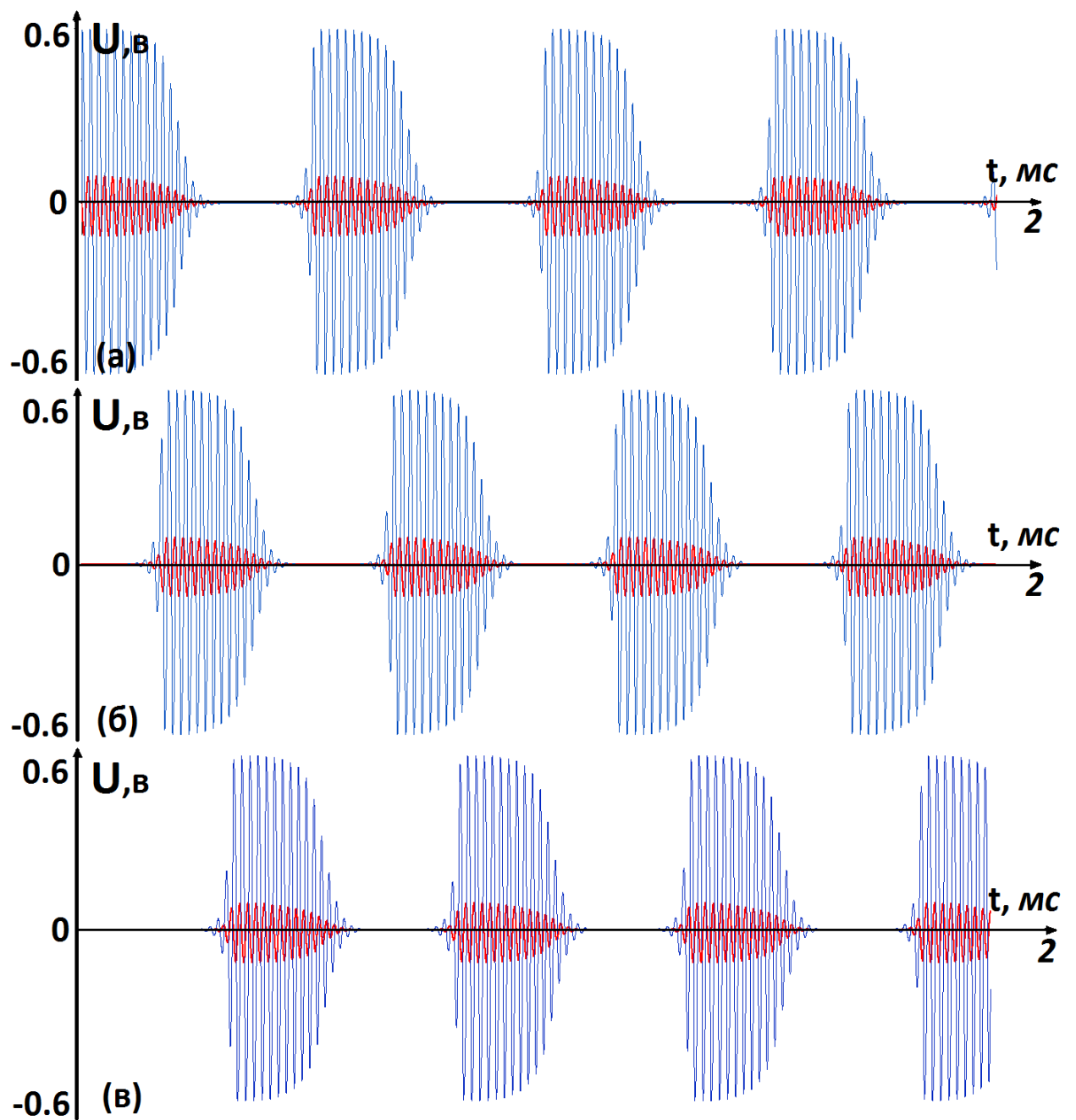


Рис.3.8. Реализации напряжения на конденсаторах (синяя кривая) и резисторах (красная кривая) C1 и R1 (а), C2 и R2 (б), C3 и R3 (в).

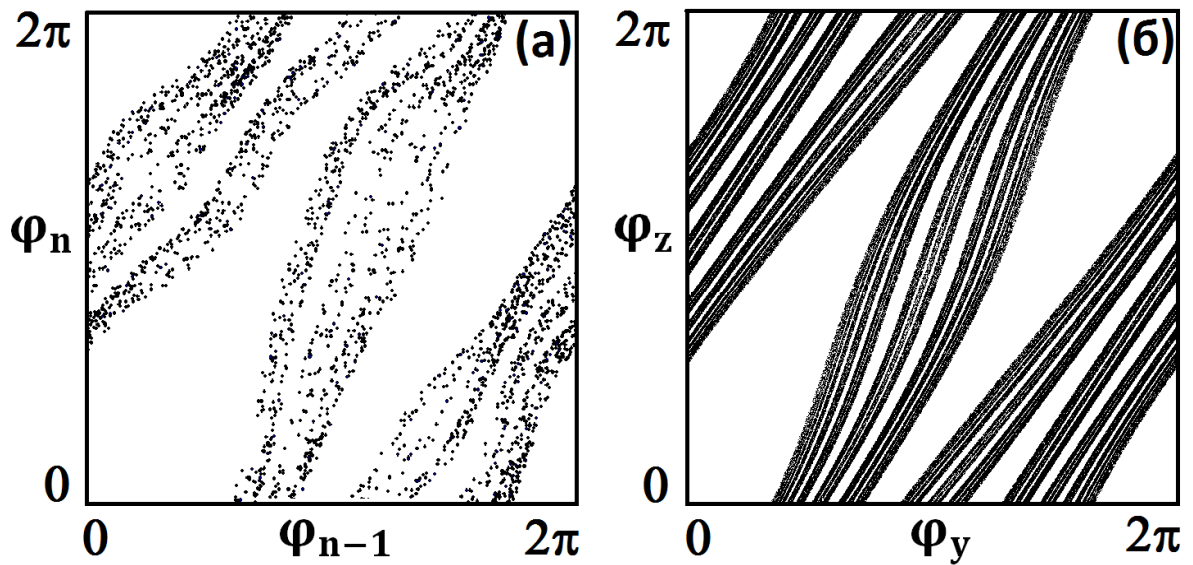


Рис.3.9. График для отображения фазы, полученный на основе результатов моделирования в программной среде Multisim (а) и фазовый портрет аттрактора отображения (2.32) (б).

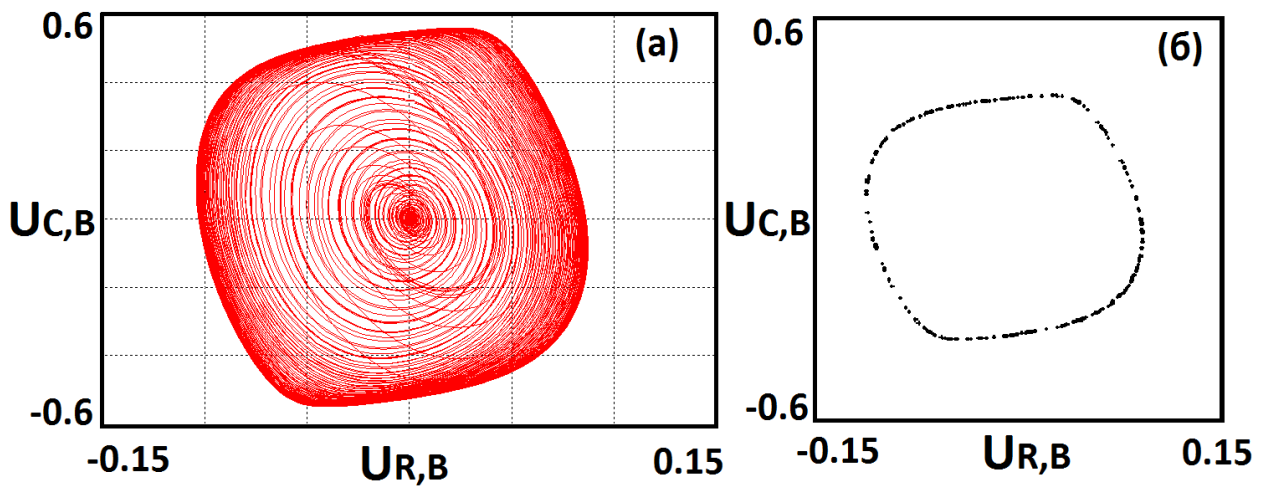


Рис.3.10. Портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора (а) и в стробоскопическом сечении (б). По горизонтальной и вертикальной оси отложены, соответственно, напряжение на резисторе R1 и на конденсаторе C1.

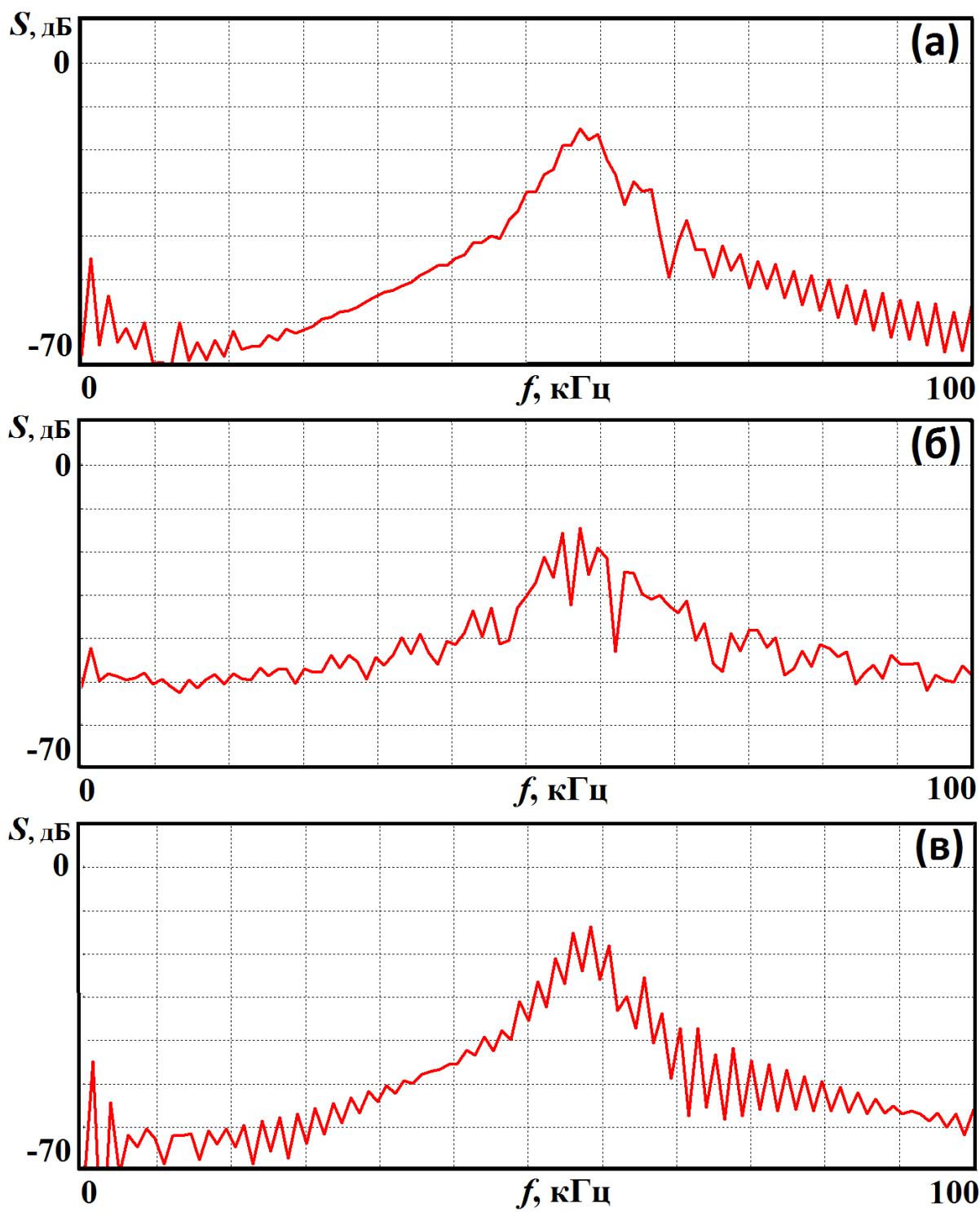


Рис.3.11. Спектры колебаний напряжения на конденсаторах C1 (а), C2 (б) и C3 (в).

3.4. Выводы к главе 3

В настоящей главе представлены схемы электронных устройств, представляющих собой неавтономные системы с гиперболическим хаосом, сконструированных с помощью программного пакета «Multisim 10.0», соответствующие уравнениям, рассмотренным в предыдущей главе.

Схемы, составлены из трех осцилляторов ван дер Поля на основе колебательных контуров, к которым добавляются элементы (источники переменного напряжения, элементы отрицательного сопротивления и т.п.), обеспечивающие поведение, соответствующее динамике модельных уравнений. Каждая система при этом генерирует последовательность цугов колебаний, следующих друг за другом с периодом модуляции, фаза высокочастотного заполнения которых меняется случайным образом относительно огибающей, подтверждая предположение о хаотической динамике систем.

Во втором разделе главы рассматривается схема электронного устройства, для которой поведение фаз описывается отображением «кот Арнольда». Для схемы, представленной в третьем разделе, динамика фаз соответствует, как было показано, поведению на гиперболическом DA аттракторе.

Благодаря свойству структурной устойчивости, позволяющему варьировать систему, сохраняя тип динамики, генераторы хаоса представляют интерес с практической точки зрения и могут использоваться для передачи и кодирования информации, генерации случайных чисел, криптографических схем.

Глава 4. Системы с запаздывающей обратной связью с поведением фаз, описываемым отображением с гиперболической динамикой

4.1. Введение

В ряде работ рассматриваются системы с гиперболическим хаосом, допускающие физическую реализацию [19, 21, 22, 25, 26]. Основой таких систем служат два и более поочередно возбуждающихся осциллятора, динамика фаз которых за определенный временной период описывается отображением с хаотической гиперболической динамикой, например растягивающим отображением окружности [22] или отображением Аносова на торе [25]. Этот принцип реализуется в системах, рассмотренных во второй главе настоящей диссертационной работы, для которых поведение фаз соответствует отображению «кот Арнольда» и отображению Фибоначчи с ДА – модификацией. Альтернативный способ построения систем с гиперболическими аттракторами заключается в рассмотрении одного осциллятора, пребывающего поочередно в стадиях активности и затухания. При этом передача возбуждения от одной стадии активности к другой осуществляется через цепь обратной запаздывающей связи [27-30]. Такие системы, с точки зрения физической реализации, могут быть проще, чем системы, построенные на основе поочередно возбуждающихся осцилляторов. Однако с математической точки зрения системы с запаздывающей обратной связью оказываются достаточно сложными, поскольку присутствие запаздывания подразумевает бесконечную размерность фазового пространства [47, 49].

Большинство примеров систем с запаздывающей обратной связью представляют собой неавтономные системы под периодическим внешним

воздействием [27-29]. Исключение составляет автономная система с аттрактором типа Смейла - Вильямса, которая рассматривается в работе [30]. На основе данной модели в настоящей главе диссертационной работы будет построена и исследована в численном эксперименте автономная система, содержащая две цепи запаздывающей обратной связи с разными временами задержки и демонстрирующая различные типы однородно гиперболических аттракторов.

Во втором разделе главы вводится в рассмотрение автономная система, построенная на основе логистического уравнения с запаздыванием, поведение фаз которой соответствует отображению Фибоначчи. Третий раздел посвящен исследованию частного случая данной системы, что приводит к подчинению динамики фаз растягивающему отображению окружности. В четвертом разделе рассматривается модификация исходной системы, приводящая к соответствию динамики фаз отображению Фибоначчи с DA модификацией.

4.2. Автономная система с запаздыванием, динамика фаз которой описываемой отображением «кот Арнольда»

4.2.1. Основные уравнения и принцип функционирования системы

Рассмотрим логистическое уравнение с запаздыванием, предложенное в биологии популяций [50].

$$\dot{r} = \mu[1 - r(t - \tau_1)]r(t). \quad (4.1)$$

Здесь численность популяции характеризуется положительной переменной r , эволюционирующей во времени и нормированной таким образом, что насыщение возникает при $r = 1$. Положительный параметр μ представляет собой показатель рождаемости, τ_1 – время задержки, характеризующее запаздывание эффекта насыщения. Согласно работе [50], при условии $\tau_1 < \pi/2\mu$ система имеет устойчивое стационарное состояние $r = 1$, а для $\tau_1 > \pi/2\mu$ в системе возникают автоколебания. При больших значениях τ_1 колебания выглядят как периодическая последовательность импульсов (**рис. 4.1.(а)**). Оценка для минимального уровня популяции между импульсами может быть выражена в виде $r_{\min} \cong \mu \exp(-e^{\mu\tau_1} + 2\mu\tau_1 - 1)$, то есть затухает по закону двойной экспоненты с ростом τ_1 .

Будем рассматривать переменную r как квадрат амплитуды некоторого колебательного процесса с частотой ω_0 . Для этого положим $r = x^2 + y^2$ и потребуем, чтобы новые переменные удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_0 y + \frac{1}{2}\mu(1 - x^2(t - \tau_1) - y^2(t - \tau_1))x, \\ \dot{y} &= \omega_0 x + \frac{1}{2}\mu(1 - x^2(t - \tau_1) - y^2(t - \tau_1))y. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Решения уравнений (4.2) вместо одиночных импульсов демонстрируют последовательность цугов колебаний для переменных x и y , в то время как огибающая эволюционирует точно в соответствии с (4.1) (**рис. 4.1.(б)**).

Теперь добавим слагаемые пропорциональные $x(t-\tau_1)x(t-\tau_2) - y(t-\tau_1)y(t-\tau_2)$ и $x(t-\tau_1)y(t-\tau_2) + x(t-\tau_2)y(t-\tau_1)$, с малым коэффициентом ε в первое и второе уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_0 y + \frac{1}{2}\mu(1-x^2(t-\tau_1)-y^2(t-\tau_1))x + \varepsilon[x(t-\tau_1)x(t-\tau_2) - y(t-\tau_1)y(t-\tau_2)], \\ \dot{y} &= \omega_0 x + \frac{1}{2}\mu(1-x^2(t-\tau_1)-y^2(t-\tau_1))y + \varepsilon[x(t-\tau_1)y(t-\tau_2) + x(t-\tau_2)y(t-\tau_1)], \end{aligned} \quad (4.3)$$

где мы всегда предполагаем, что задержка удовлетворяет неравенству $\tau_2 \geq \tau_1$. Теперь в случае генерации импульсов с достаточно низким уровнем минимальной амплитуды между ними эти добавочные слагаемые будут стимулировать формирование каждого следующего цуга колебаний. Благодаря этому, фаза колебаний для нового импульса будет определяться через фазы предыдущих импульсов некоторым отображением, что будет более подробно обсуждаться далее. В присутствии такой инициации колебаний характерный период пульсаций будет меньше по сравнению с исходной системой (4.2).

Формально, системы с запаздыванием являются бесконечномерными. К тому же, мгновенное состояние системы определяется функциями $x(t)$ и $y(t)$, определенными на временном интервале длины τ_2 . Для того, чтобы начать решение уравнений (4.3) начальные условия должны быть выбраны как некоторые функции $x(t)$ и $y(t)$ на интервале времени $[-\tau_2, 0]$. В процессе численного интегрирования они задаются массивом с выбором шага равным шагу схемы интегрирования, затем элементы массивов, вычисленные на более поздних стадиях, шаг за шагом заменяются вновь полученными значениями x и y .

В остальном схема интегрирования аналогична схемам, используемым для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. При произвольных начальных условиях вычисления выполняются достаточно долгое время и затем, после точного выхода на аттрактор, начинается процесс обработки данных, включающий построение временных зависимостей динамических переменных, построение портретов аттракторов, расчет показателей Ляпунова и т.д.

Рассмотрим динамику уравнений (4.3) более подробно. Выберем параметры τ_1 и τ_2 таким образом, чтобы сигналы, стимулирующие возбуждение $n+1$ -го импульса колебаний, были испущены на двух предыдущих стадиях активности: n -ой (время задержки τ_1) и $(n-1)$ -ой (время задержки τ_2).

Предположим, что на двух предыдущих периодах активности колебания имели фазы φ_n и φ_{n-1} , а именно $x(t - \tau_1) \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_n)$, $y(t - \tau_1) \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_n)$, $x(t - \tau_2) \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_{n-1})$, $y(t - \tau_2) \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_{n-1})$. Тогда добавочные слагаемые в правых частях уравнений выражаются как:

$$\begin{aligned} x(t - \tau_1)x(t - \tau_2) - y(t - \tau_1)y(t - \tau_2) &\sim \cos(2\omega_0 t + \varphi_n + \varphi_{n-1}), \\ x(t - \tau_1)y(t - \tau_2) + x(t - \tau_2)y(t - \tau_1) &\sim \sin(2\omega_0 t + \varphi_n + \varphi_{n-1}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Следовательно, на следующей $(n+1)$ -ой стадии активности фаза будет определяться (с точностью до константы) отображением Фибоначчи

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1} + \text{const} \pmod{2\pi}. \quad (4.5)$$

Таким образом, для бесконечномерного отображения Пуанкаре настоящей системы аттрактор представляет собой объект геометрически близкий к двумерному тору, на котором дискретная динамика угловых переменных подчиняется отображению (4.5), относящемуся к классу отображений Аносова. Благодаря структурной устойчивости динамики Аносова, можно предположить, что на аттракторе в бесконечномерном пространстве состояний отображения Пуанкаре природа динамики остается той же; по другим направлениям наблюдается сжатие фазового объема, что соответствует приближению орбит к аттрактору. Таким образом, аттрактор в фазовом пространстве потоковой системы (4.3) отвечает надстройке этого объекта и в автономной системе существует дополнительное нейтральное направление, ассоциирующееся с нулевым показателем Ляпунова.

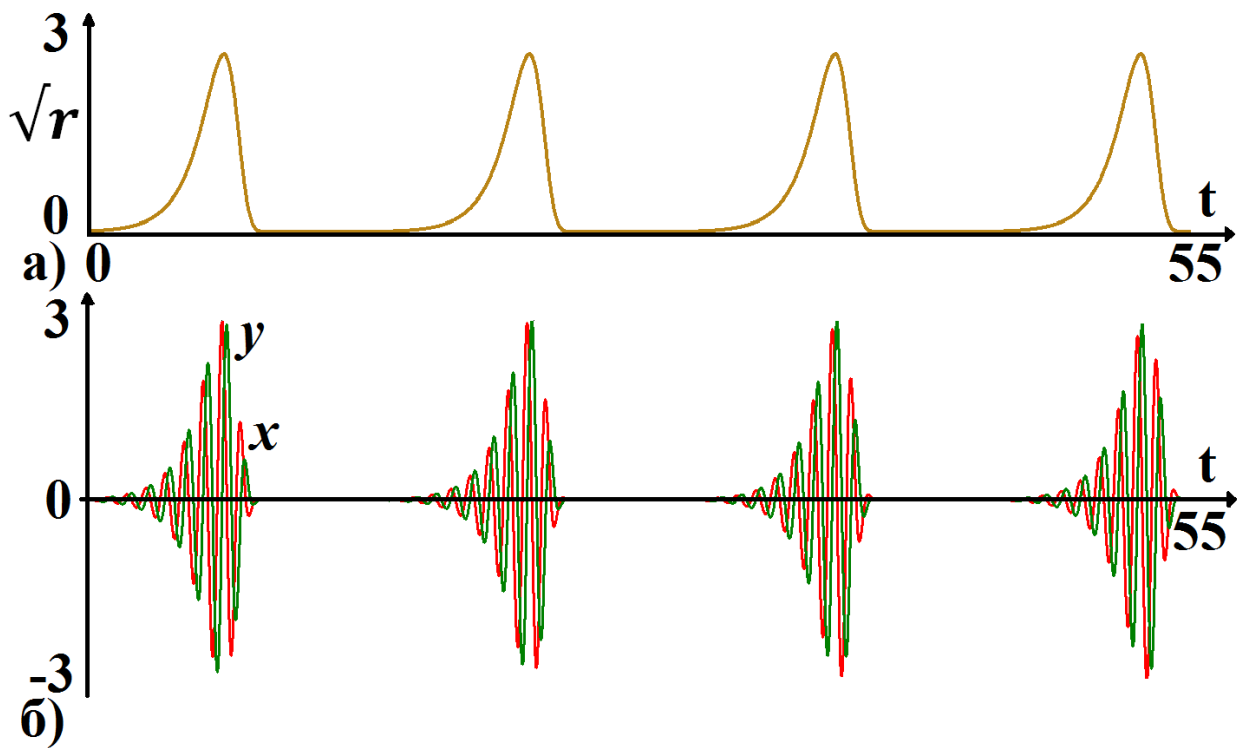


Рис.4.1. Самоподдерживающиеся пульсации в логистическом уравнении с запаздыванием (4.1) при $\mu=1.6$, $\tau_1=2$ (а) и цуги колебаний, генерируемые системой (4.2) при $\omega_0=2\pi$ (б).
Период пульсаций составляет примерно $T \approx 16$.

4.2.2. Численное моделирование динамики системы

На **рис. 4.2.** приведены временные реализации, полученные в результате численного решения уравнений (4.3) методом Рунге-Кутты четвертого порядка, модифицированным применительно к системам с запаздыванием при задании параметров $\mu = 1.6$, $\varepsilon = 0.02$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 14$.

Процесс выглядит как последовательность цугов колебаний, для которых фазы высокочастотного заполнения изменяются случайным образом от одной стадии активности к следующей. Средний период следования импульсов приблизительно составляет $T \approx 10.85$.

На **рис. 4.3.** и **рис. 4.4.** показаны двумерная и трехмерная проекции аттрактора из бесконечномерного фазового пространства системы (4.3) на плоскость переменных (x, y) и (x, y, ρ) , где $\rho = \sqrt{x^2(t - \tau) + y^2(t - \tau)}$.

Рис. 4.5.(а) иллюстрирует соответствие динамики фаз отображению Фибоначчи. Фазы φ_n определяются в момент достижения максимальной амплитуды в каждом цуге колебаний соотношением $\varphi = \arg(x - iy)$, а затем данные представляются в координатах $(\varphi_n + \varphi_{n-1}, \varphi_{n+1})$. На диаграмме можно видеть, что точки располагаются на линиях параллельных биссектрисе. (Хотя полосы выглядят расширенными, это не нарушает ожидаемой топологической природы отображения). На **рис. 4.5. (б)** показана трехмерная диаграмма для фаз в координатах $(\varphi_{n+1}, \varphi_n, \varphi_{n-1})$, которая визуалью соответствует отображению Фибоначчи.

Другой способ проиллюстрировать соответствие поведения фаз динамике Аносова заключается в том, чтобы представить действие отображения для фаз на плоскости с изображением области в виде головы кота.

Для каждой пары значений фаз φ_n и φ_{n-1} , вычисленных на n и $n-1$ стадиях активности, определяем, попадает ли точка с такими координатами на плоскости $(\varphi_{n-1}, \varphi_n)$ в область в виде головы кота. Если да, то она отображается на графике, а на двух следующих диаграммах отмечаются пары

точек через время $3T$ и $6T$. Если же точка не попадает в указанную область, на диаграмме она не отмечается, а для дальнейшего построения берется следующая пара чисел, и так далее. На **рис. 4.6 (а)** приведены картинка, полученные таким методом, которые можно сравнить с диаграммой полученной непосредственно трехкратной итерацией Фибоначчи (**рис. 4.6.(б)**).

Для того, что бы рассчитать показатели Ляпунова используем стандартную методику Бенеттина, модифицированную применительно к системам с запаздыванием [49, 51]. Проводится совместное решение уравнений (4.3) и комплекта уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} = & -\omega_0 \tilde{y} + \frac{1}{2} \mu (1 - x^2(t - \tau_1) - y^2(t - \tau_1)) \tilde{x} - \mu x(x(t - \tau_1) \tilde{x}(t - \tau_1) + y(t - \tau_1) \tilde{y}(t - \tau_1)) + \\ & + \varepsilon [x(t - \tau_1) \tilde{x}(t - \tau_2) + x(t - \tau_2) \tilde{x}(t - \tau_1) - y(t - \tau_1) \tilde{y}(t - \tau_2) - y(t - \tau_2) \tilde{y}(t - \tau_1)], \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}} = & \omega_0 \tilde{x} + \frac{1}{2} \mu (1 - x^2(t - \tau_1) - y^2(t - \tau_1)) \tilde{y} - \mu y(x(t - \tau_1) \tilde{x}(t - \tau_1) + y(t - \tau_1) \tilde{y}(t - \tau_1)) + \\ & + \varepsilon [y(t - \tau_2) \tilde{x}(t - \tau_1) + y(t - \tau_2) \tilde{x}(t - \tau_2) + x(t - \tau_2) \tilde{y}(t - \tau_1) + x(t - \tau_1) \tilde{y}(t - \tau_2)]. \end{aligned}$$

Формально, количество показателей Ляпунова для системы с запаздыванием бесконечно, но мы ограничимся их конечным числом. Чтобы рассчитать M наибольших показателя, производится численное решение набора M комплектов уравнений формы (4.6). В процессе вычисления, набор векторов возмущения задается массивом переменных \tilde{x} и \tilde{y} , выбранных на интервале длины τ_2 , с шагом по времени равным шагу схемы интегрирования для системы уравнений с запаздыванием. Скалярное произведение векторов, используемых для нормализации и ортогонализации Грама- Шмидта, необходимых в алгоритме Бенеттина, определяется как сумма произведений пар элементов относящихся к одному и другому массиву.

Удобно использовать нормализацию показателей Ляпунова λ_i на средний период повторения пульсаций T , а именно предположить $\Lambda = \lambda T$.

Согласно результатам вычислений при значениях параметров $\mu = 1.6$, $\varepsilon = 0.02$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 14$ четыре наибольших показателя Ляпунова:

$$\Lambda_1 = 0.4851, \quad \Lambda_2 = 0.0003, \quad \Lambda_3 = -0.4691, \quad \Lambda_4 = -0.5404 \dots$$

Первый и третий показатели Ляпунова являются близкими по модулю и противоположными по знаку величинами. Их значения можно сравнить со значениями показателей Ляпунова, полученных для отображения Фибоначчи $\Lambda = \pm \ln(1 + \sqrt{5})/2 = \pm 0.4812\dots$. Второй показатель в пределах ошибки вычисления оказывается нулевым. Четвертый и последующие показатели Ляпунова большие по модулю отрицательные числа.

На **рис. 4.7.** представлены графики зависимости показателей Ляпунова от параметра связи ε (**рис. 4.7.(а)**), параметра μ (**рис. 4.7.(б)**) и времени задержки τ_1 (**рис. 4.7.(в)**) при фиксированных остальных параметрах. Как можно видеть, в достаточно широком интервале параметров старший показатель Ляпунова остается примерно постоянным и среди отрицательных показателей есть один близкий по абсолютной величине к положительному показателю. Это указывает на сохранение динамики Аносова на аттракторе.

Также на **рис. 4.7.** можно выявить существование двух различных ситуаций. А именно, в левой части диаграмм первый отрицательный показатель Ляпунова примерно равен по модулю положительному, а следующие отрицательные показатели меньше. По мере продвижения вправо происходит некоторый переход: четвертый показатель занимает место третьего, который в свою очередь начинает приближаться к нулю. После чего, очевидно, траектории в фазовом пространстве достигают аттрактора медленнее, чем происходит сближение и расхождение орбит на самом аттракторе. (По всей видимости, это предполагает разную природу аттракторов в этих двух ситуациях).

Также следует подчеркнуть, что гладкий характер зависимости показателей Ляпунова служит подтверждением гиперболической природы хаоса.

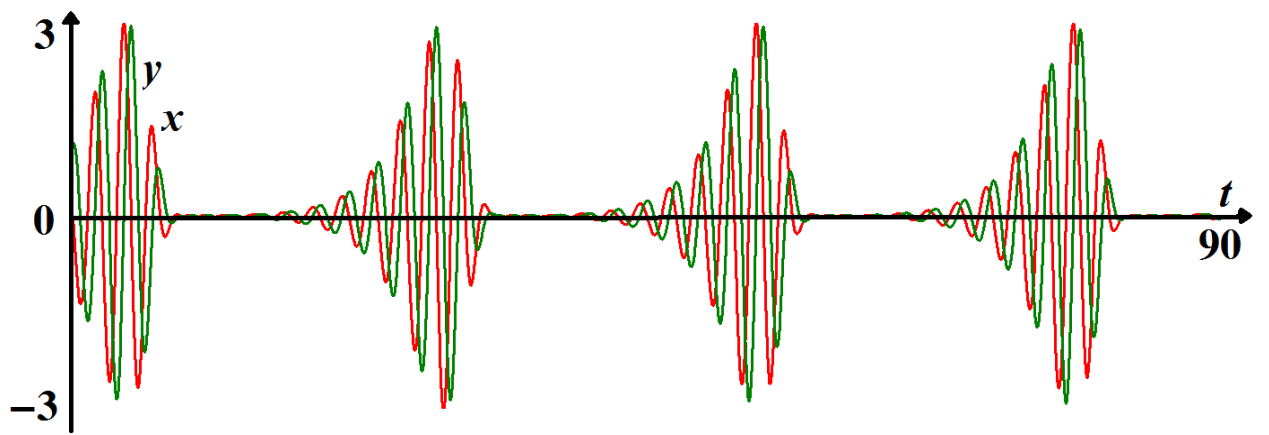


Рис.4.2. Колебания переменных x (красная кривая) и y (зеленая кривая) согласно результатам численного решения уравнения (4.3).

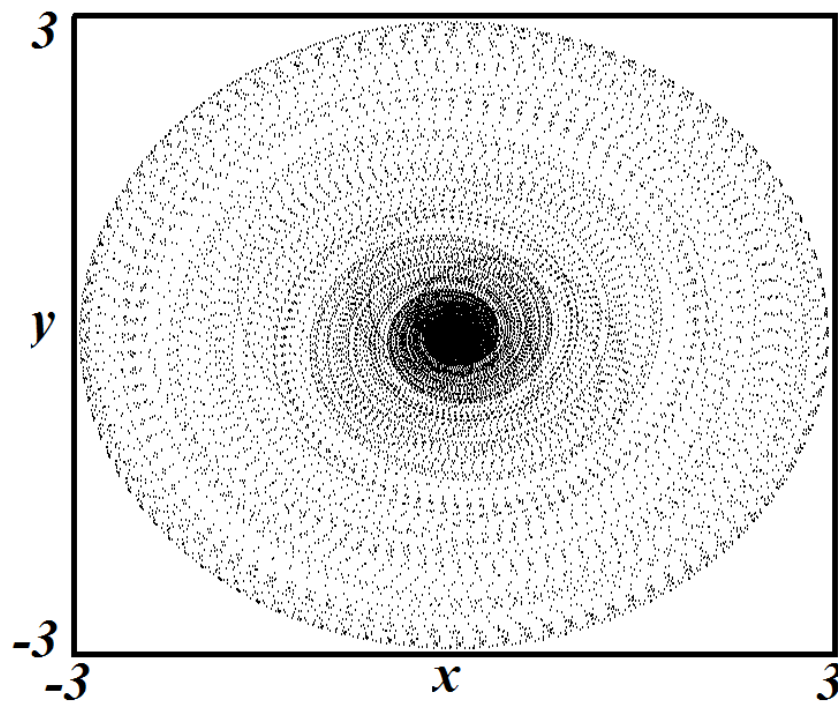


Рис.4.3. Двумерная проекция аттрактора системы (4.3) на плоскость (x, y) , при $\mu = 1.6$, $\varepsilon = 0.02$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 7\tau_1 = 14$.

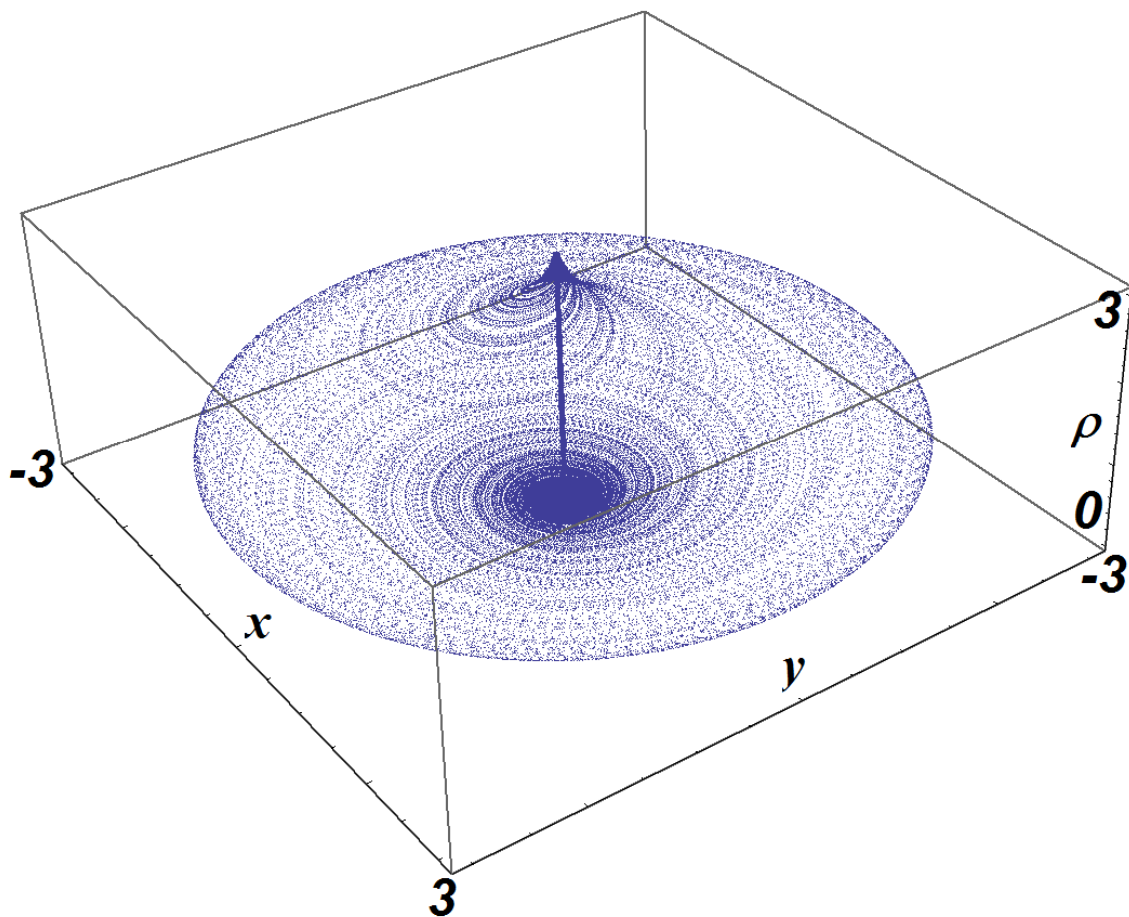


Рис.4.4. Портрет аттрактора в проекции из бесконечномерного фазового пространства модели (4.3) на плоскость (x, y, ρ) при $\mu = 1.6$, $\varepsilon = 0.02$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 7\tau_1 = 14$.

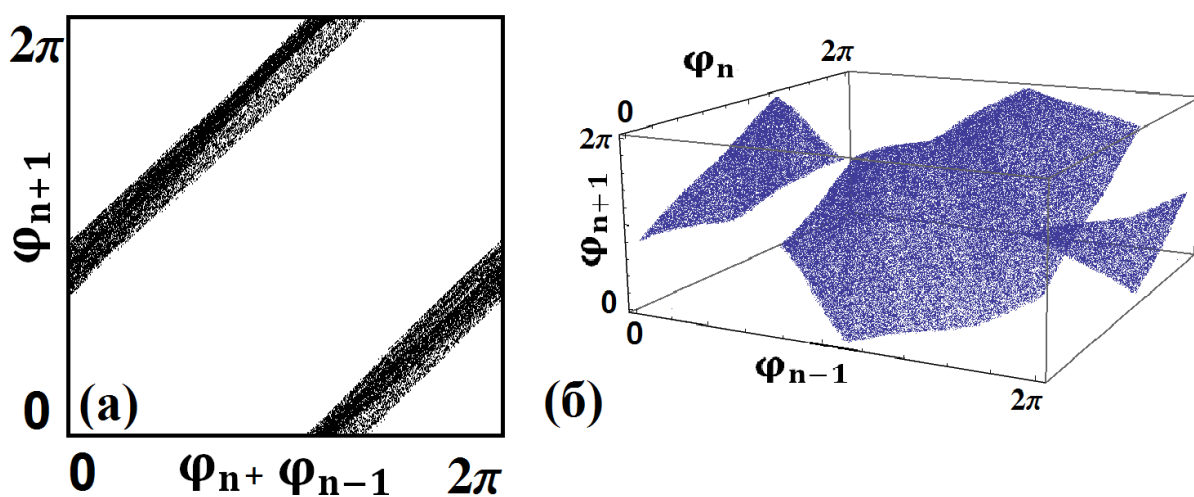


Рис.4.5. Диаграммы, иллюстрирующие динамику фаз системы (4.3) на последовательных стадиях активности.

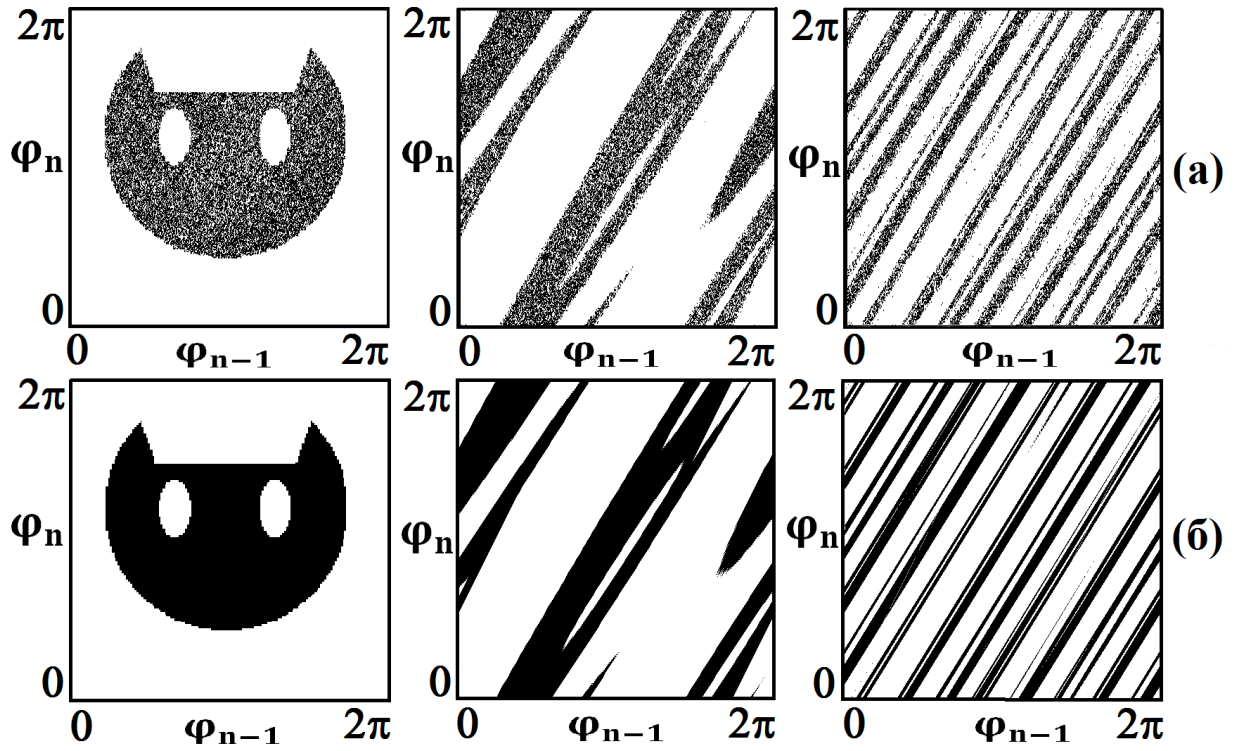


Рис.4.6. Иллюстрация и действия отображения, описывающего динамику фаз, полученного на основе результатов численного решения дифференциальных уравнений (4.3) (а) и действия трехкратной итерации отображения Фибоначчи (б).

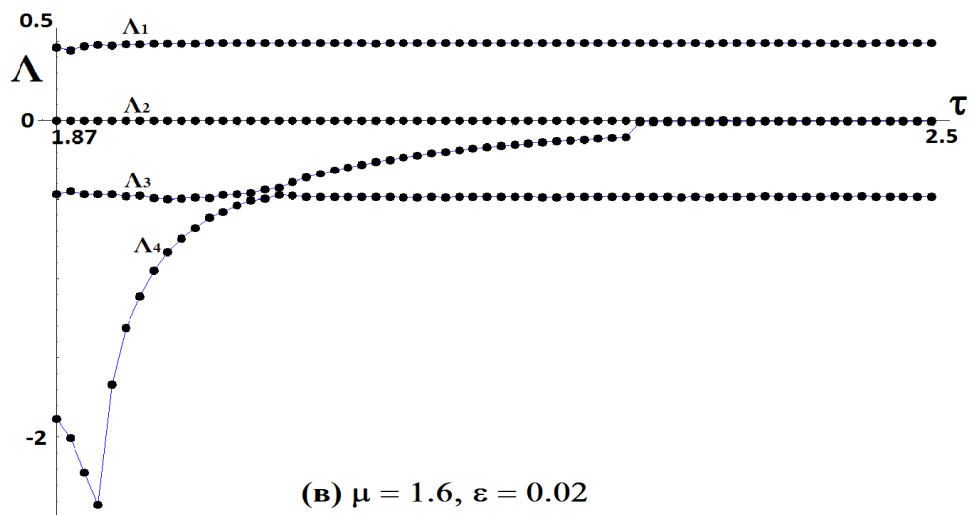
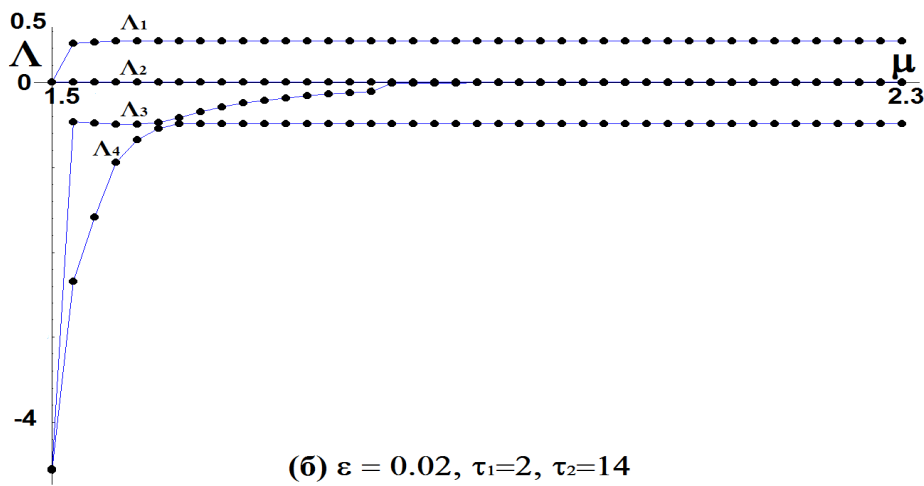
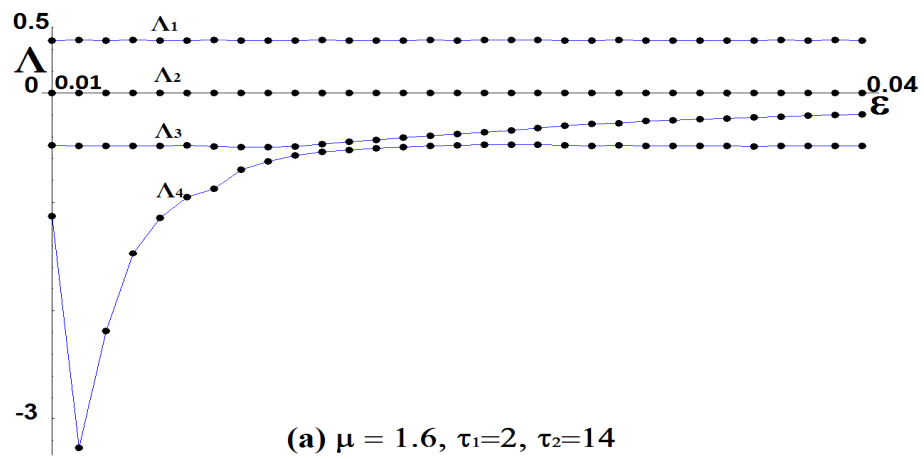


Рис.4.7. Графики показателей Ляпунова системы (4.3) в зависимости от параметров ε, μ и τ . Остальные параметры указаны в надписи для каждой диаграммы.

4.3. Автономная система с запаздыванием с аттрактором типа Смейла-Вильямса

4.3.1. Основные уравнения модели автономной системы с аттрактором Смейла- Вильямса

Рассмотрим простейший частный случай системы (4.3), а именно положим времена задержки равными: $\tau_2 = \tau_1 = \tau$. Это приводит к уравнениям вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega_0 y + \frac{1}{2} \mu (1 - x^2(t - \tau) - y^2(t - \tau))x + \varepsilon [x^2(t - \tau) - y^2(t - \tau)], \\ \dot{y} &= \omega_0 x + \frac{1}{2} \mu (1 - x^2(t - \tau) - y^2(t - \tau))y + 2\varepsilon x(t - \tau)y(t - \tau).\end{aligned}\quad (4.7)$$

Чтобы пояснить принцип функционирования системы предположим, что на текущей стадии активности переменные ведут себя, как $x \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$ и $y \sim \sin(\omega_0 t + \varphi)$, тогда дополнительные слагаемые выражаются в виде

$$\begin{aligned}x^2(t - \tau) - y^2(t - \tau) &\sim \cos^2(\omega_0 t + \varphi) - \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \cos(2\omega_0 t + 2\varphi), \\ 2x(t - \tau)y(t - \tau) &\sim 2\cos(\omega_0 t + \varphi)\sin(\omega_0 t + \varphi) = \sin(2\omega_0 t + 2\varphi).\end{aligned}\quad (4.8)$$

Эти соотношения определяют фактически стимулирующий сигнал, возбуждающий колебания непосредственно на следующей стадии активности. Фазовый сдвиг этого сигнала передается колебаниям, возникающим на этой стадии. Таким образом, фаза подвергается удвоению

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const}.\quad (4.9)$$

Соотношение (4.9) называется растягивающим отображением окружности или отображением Бернулли, которое является хаотическим и характеризуется показателем Ляпунова $\Lambda = \ln 2 \approx 0.693$.

Можно рассмотреть отображение Пуанкаре для системы с запаздыванием, которое будет соответствовать преобразованию состояния от одного импульса колебаний к другому. Аттрактором этого отображения, как предполагается, будет являться аттрактор типа соленоида Смейла - Вильямса, вложенный в бесконечномерное пространство состояний.

Действительно, фаза φ играет роль угловой переменной для соленоида Смейла – Вильямса, в то время как по другим направлениям будет происходить сжатие фазового объема. Соответственно, аттрактор исходной автономной системы с запаздыванием отвечает настройке соленоида Смейла – Вильямса в бесконечномерном пространстве состояний.

4.3.2. Численное моделирование автономной системы с запаздыванием с аттрактором Смейла - Вильямса

Обратимся к результатам численного исследования системы (4.8).

Рис. 4.8. демонстрирует временные реализации для переменных x и y , иллюстрирующие действие системы (4.8) при $\omega_0=2\pi$, $\mu=1.6$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau= 2$, $\varepsilon = 0.05$.

В соответствии с приведенными выше качественными предположениями, процесс выглядит как последовательность цугов колебаний. Заметим, что средний период их возникновения меньше, чем в моделях (4.1) и (4.2) и составляет $T \approx 10$. Несмотря на представление в виде почти периодических чередующихся стадий возбуждения и затухания колебаний, процесс на самом деле является хаотическим (в противоположность регулярному процессу, наблюдаемому на **рис. 4.1.(б)**). Хаос проявляет себя в изменении фаз на последующих стадиях активности. Более точный анализ показывает, что эти фазы приблизительно подчиняются отображению Бернулли. **Рис. 4.9.** иллюстрирует это при помощи диаграммы, полученной в результате численного моделирования. Фазы определялись в момент достижения максимума амплитуды на последовательных стадиях возбуждения, как $\varphi_n = \arg(x - iy)$ и отмечались на графике. Как можно видеть, отображение для фаз топологически эквивалентно, как и ожидалось, отображению Бернулли: один полный обход для про-образа φ_n соответствует двойному обходу для образа φ_{n+1} .

Рис. 4.10. и **рис. 4.11.** показывают двумерную и трехмерную проекцию аттрактора из бесконечномерного фазового пространства системы (4.8).

Для подсчета показателей Ляпунова использовался алгоритм, подобный описанному в предыдущем разделе. Он основывается на совместном численном решении уравнений (4.8) и уравнений в вариациях

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= -\omega_0 \tilde{y} + \frac{1}{2} \mu [1 - x^2(t - \tau) - y^2(t - \tau)] \tilde{x} - \mu x [x(t - \tau) \tilde{x}(t - \tau) + y(t - \tau) \tilde{y}(t - \tau)] \\ &\quad + 2\varepsilon [x(t - \tau) \tilde{x}(t - \tau) - y(t - \tau) \tilde{y}(t - \tau)], \\ \dot{\tilde{y}} &= \omega_0 \tilde{x} + \frac{1}{2} \mu [1 - x^2(t - \tau) - y^2(t - \tau)] \tilde{y} - \mu y [x(t - \tau) \tilde{x}(t - \tau) + y(t - \tau) \tilde{y}(t - \tau)] \\ &\quad + \varepsilon [y(t - \tau) \tilde{x}(t - \tau) + x(t - \tau) \tilde{y}(t - \tau)].\end{aligned}\tag{4.10}$$

Набор векторов возмущения при вычислении задается массивом переменных \tilde{x} и \tilde{y} , выбранных на интервале длины τ , с шагом по времени равным шагу интегрирования, используемому при численном решении уравнений. Четыре наибольших показателя Ляпунова, нормированные на средний период повторения пульсаций T при параметрах $\omega_0 = 2\pi$, $\mu = 1.6$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau = 2$, $\varepsilon = 0.05$ составляют:

$$\Lambda_1 = 0.6964, \Lambda_2 = 0.0000, \Lambda_3 = -12.129, \Lambda_4 = -15.538, \dots$$

Оценка размерности по Каплану – Йорке для аттрактора отображения Пуанкаре (соленоид Смейла - Вильямса) $D_{KY}^0 = 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_3| \approx 1.06$. Размерность аттрактора в бесконечномерном фазовом пространстве автономной системы составляет $D_{KY} = 2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2) / |\Lambda_3| \approx 1 + D_{KY}^0 \approx 2.06$.

Рис. 4.12. показывает график зависимости четырех показателей Ляпунова системы (4.8) от параметров ε , τ и μ . Как можно видеть, старший показатель Ляпунова остается почти постоянным в широком интервале изменения параметров и близким к ожидаемой величине $\ln 2 = 0.693 \dots$. Вторым показателем близок к нулю (с точностью до погрешности). Он интерпретируется, как связанный с возмущением инфинитезимального сдвига вдоль фазовой траектории, что характерно для автономных систем. Остальные показатели отрицательные.

Стоит отметить гладкий характер зависимости показателей Ляпунова от параметров, в частности, отсутствие провалов на графике Λ_1 , которые

обычно соответствуют окнам периодичности, характерным для негиперболических систем.

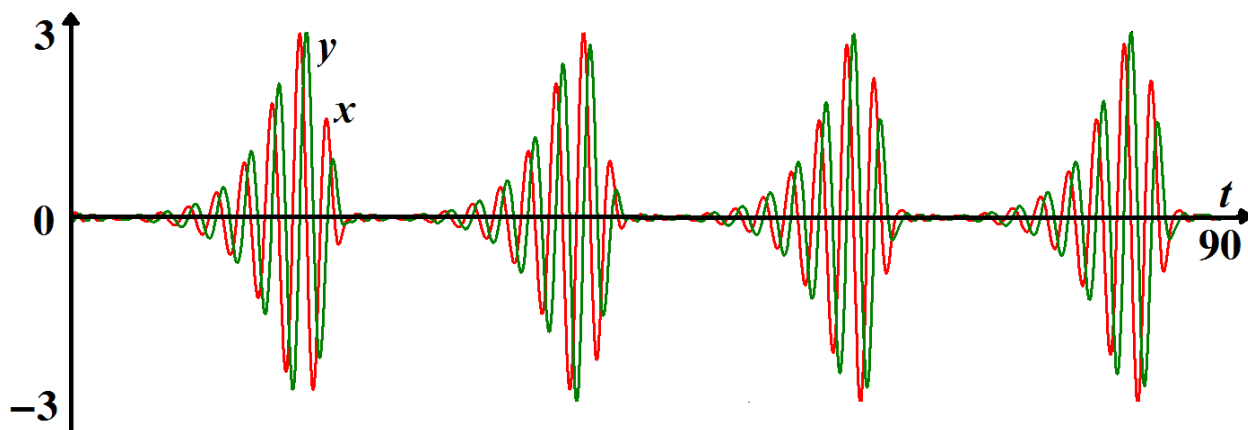


Рис.4.8. Колебания переменных x (красная кривая) и y (зеленая кривая) согласно результатам численного решения уравнения (4.7) при $\omega_0=2\pi$, $\mu=1.6$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau= 2$, $\varepsilon = 0.05$.

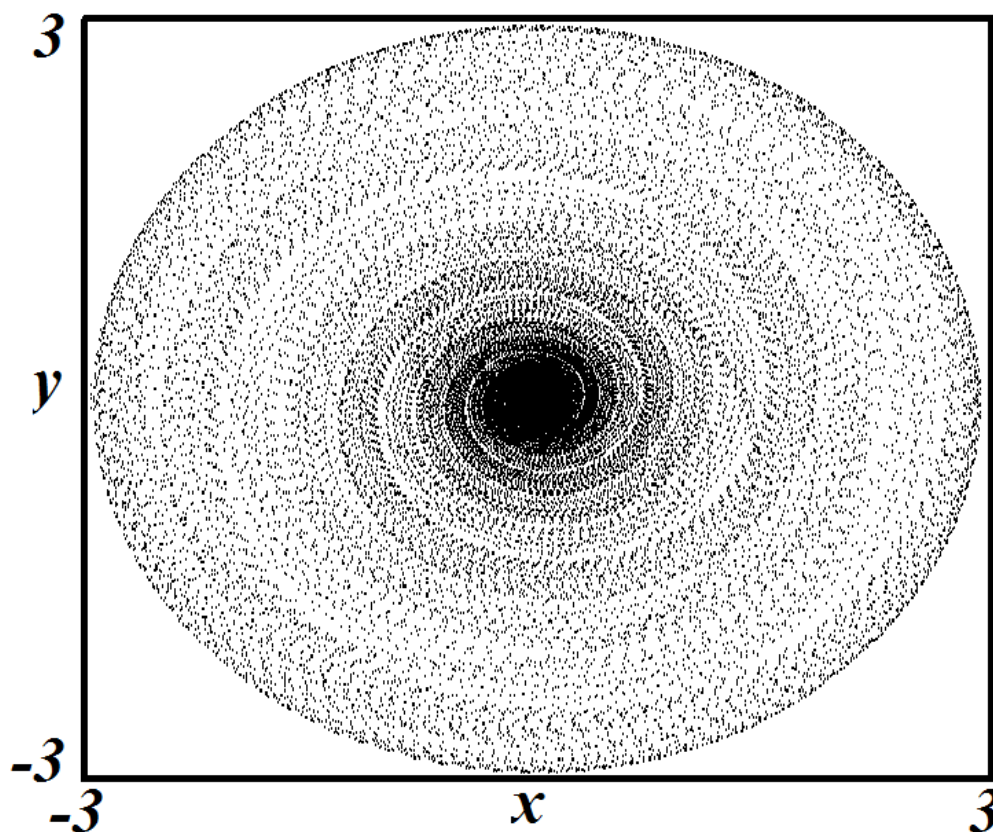


Рис.4.9. Проекция аттрактора системы (4.7) из бесконечномерного фазового пространства на плоскость переменных (x, y) при $\omega_0=2\pi$, $\mu=1.6$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau= 2$, $\varepsilon = 0.05$.

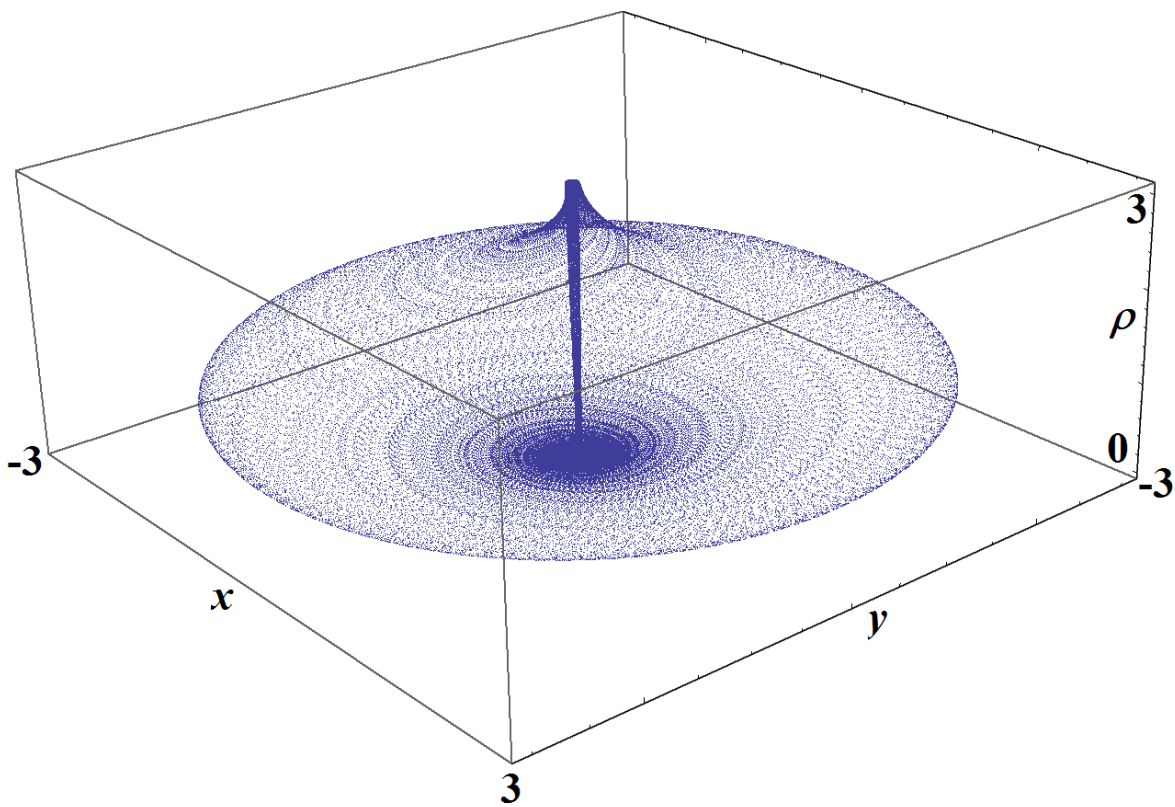


Рис.4.10. Портрет аттрактора в проекции из бесконечномерного фазового пространства модели (4.7).

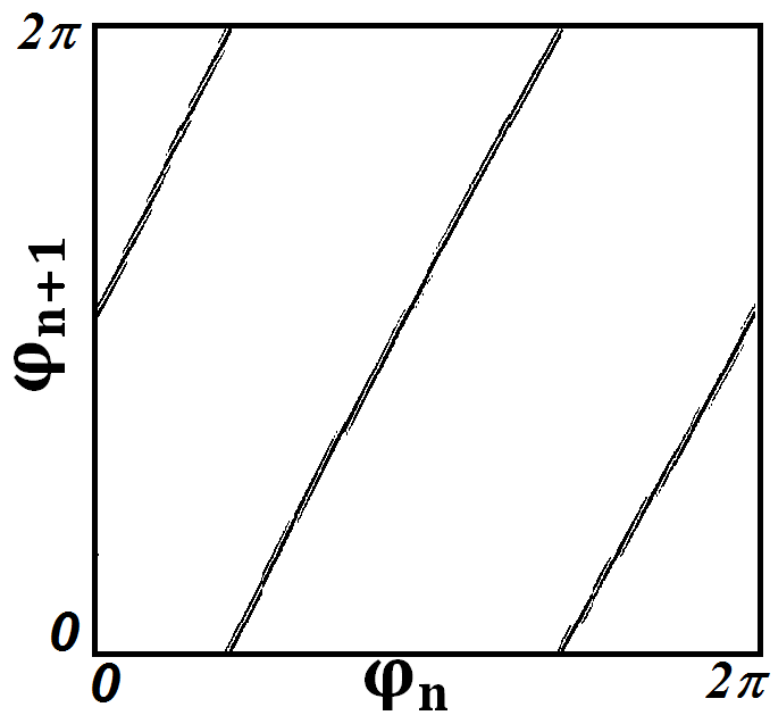


Рис.4.11. Диаграмма, иллюстрирующая трансформацию фаз на последовательных стадиях активности, построенная на основе результатов численного решения уравнений (4.7).

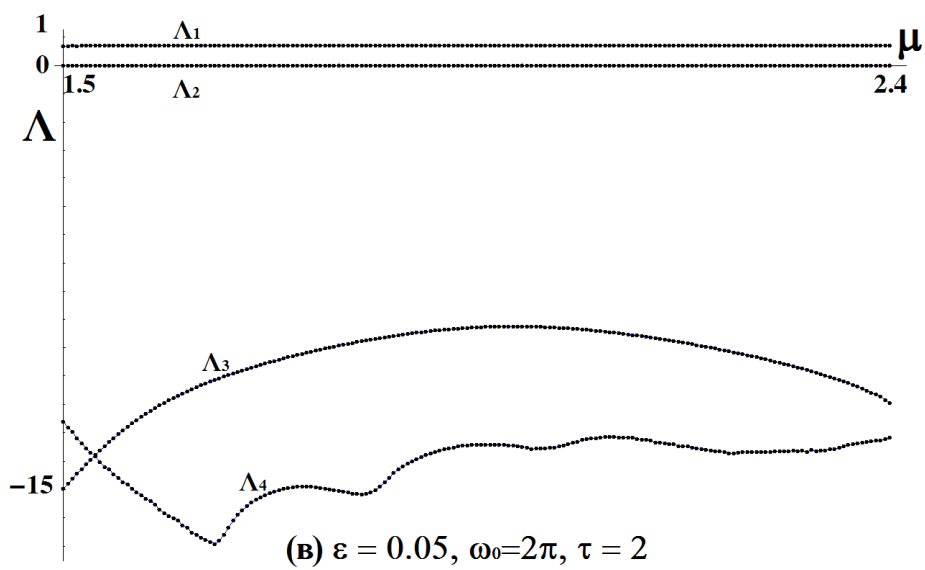
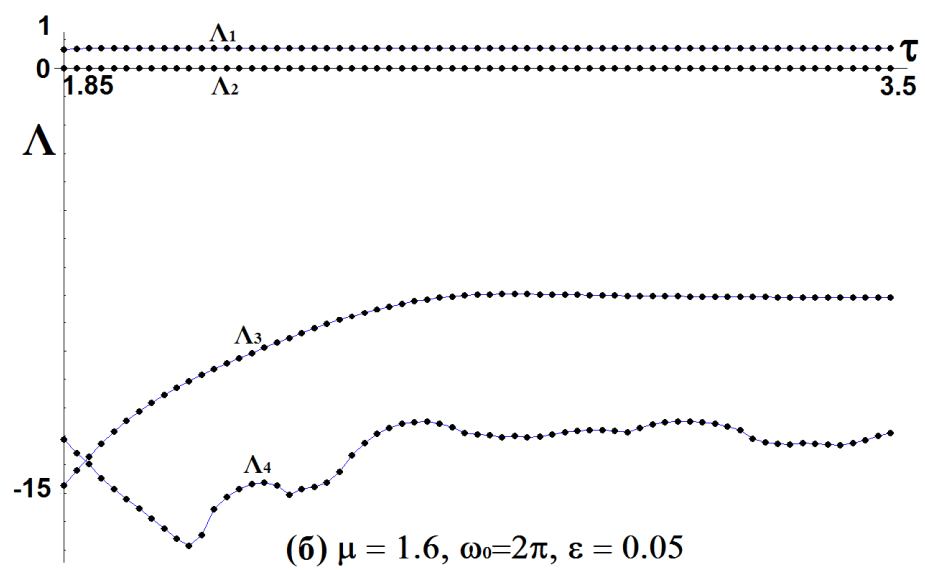
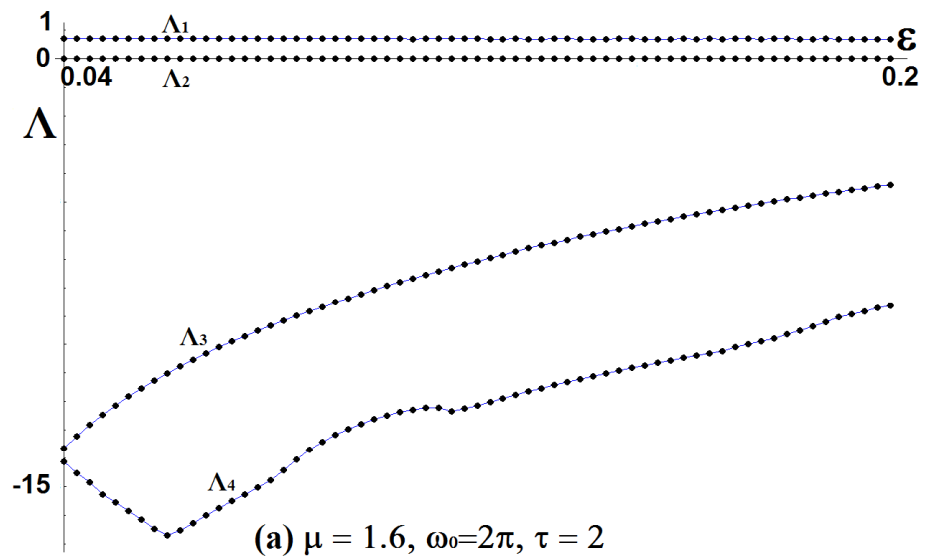


Рис.4.12. Графики показателей Ляпунова системы (4.7) в зависимости от параметров ε, μ и τ . Остальные параметры указаны в надписи для каждой диаграммы.

4.4. Автономная система с запаздыванием с динамикой фаз, описываемой отображением Фибоначчи с DA-модификацией

4.4.1. Основные уравнения модели автономной системы с динамикой фаз, описываемой отображением Фибоначчи с DA-модификацией

От системы (4.3) с динамикой Аносова можно попытаться перейти к системе с гиперболическим DA-аттрактором, подобно тому, как это было сделано в предыдущих главах. А именно модифицировать уравнения (4.3) таким образом, чтобы поведение фаз в некотором приближении описывалось модифицированным отображением Фибоначчи, вида (2.32), предложенного во втором разделе второй главы, которое получается в результате введения диссипативной добавки в отображение Фибоначчи. Для этого рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_0 y + \frac{1}{2} \mu (1 - x^2(t - \tau_1) - y^2(t - \tau_1))x + \varepsilon [x(t - \tau_1)x(t - \tau_2) - y(t - \tau_1)y(t - \tau_2)] + \alpha x(t - \tau_1), \\ \dot{y} &= \omega_0 x + \frac{1}{2} \mu (1 - x^2(t - \tau_1) - y^2(t - \tau_1))y + \varepsilon [x(t - \tau_1)y(t - \tau_2) + x(t - \tau_2)y(t - \tau_1)] + \alpha y(t - \tau_1). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Главное отличие настоящей модели от системы (4.3) состоит в ведении дополнительного слагаемого, которое, как будет показано далее, отвечает за DA-модификацию.

Предположим, что на двух предыдущих стадиях активности колебания имели фазы φ_n и φ_{n-1} , то есть $x(t - \tau_1) \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_n)$, $y(t - \tau_1) \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_n)$, $x(t - \tau_2) \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_{n-1})$, $y(t - \tau_2) \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_{n-1})$, тогда получим выражения дополнительных слагаемых в правых частях уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned} x(t - \tau_1)x(t - \tau_2) - y(t - \tau_1)y(t - \tau_2) + \alpha x(t - \tau_1) &\sim \cos(\omega_0 t + \varphi_n)\cos(\omega_0 t + \varphi_{n-1}) - \\ &- \sin(\omega_0 t + \varphi_n)\sin(\omega_0 t + \varphi_{n-1}) + \alpha \cos(\omega_0 t + \varphi_n) = \cos(2\omega_0 t + \varphi_n + \varphi_{n-1}) + \\ &+ \alpha \cos(\omega_0 t + \varphi_n) = \operatorname{Re}[e^{i(2\omega_0 t + \varphi_n + \varphi_{n-1})} + \alpha e^{i(\omega_0 t + \varphi_n)}] = \operatorname{Re}[e^{2i\omega_0 t} (e^{i(\varphi_n + \varphi_{n-1})} + \alpha e^{-i\omega_0 t + \varphi_n})] = \\ &\operatorname{Re}[e^{2i\omega_0 t} e^{i(\varphi_n + \varphi_{n-1})} (1 + \alpha e^{-i\omega_0 t - i\varphi_{n-1}})] = \operatorname{Re}[e^{2i\omega_0 t} e^{i(\varphi_n + \varphi_{n-1} + f(\varphi_{n-1}))}] \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
& x(t - \tau_1)y(t - \tau_2) + x(t - \tau_2)y(t - \tau_1) + \alpha y(t - \tau_1) \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_n) \sin(\omega_0 t + \varphi_{n-1}) + \\
& + \sin(\omega_0 t + \varphi_n) \cos(\omega_0 t + \varphi_{n-1}) + \alpha \sin(\omega_0 t + \varphi_n) = \sin(2\omega_0 t + \varphi_n + \varphi_{n-1}) + \\
& + \alpha \sin(\omega_0 t + \varphi_n) = \text{Im}[e^{i(2\omega_0 t + \varphi_n + \varphi_{n-1})} + \alpha e^{i(\omega_0 t + \varphi_n)}] = \text{Im}[e^{2i\omega_0 t} (e^{i(\varphi_n + \varphi_{n-1})} + \alpha e^{-i\omega_0 t + \varphi_n})] = \\
& \text{Im}[e^{2i\omega_0 t} e^{i(\varphi_n + \varphi_{n-1})} (1 + \alpha e^{-i\omega_0 t - i\varphi_{n-1}})] = \text{Im}[e^{2i\omega_0 t} e^{i(\varphi_n + \varphi_{n-1} + f(\varphi_{n-1}))}],
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\text{где } f(\varphi) = \arg(1 + 2\alpha e^{-i(\varphi + \omega_0 t)}) = -\text{arctg} \frac{\alpha \sin(\varphi + \omega_0 t)}{1 + \alpha \cos(\varphi + \omega_0 t)}. \tag{4.14}$$

Таким образом, фаза колебаний на $n+1$ стадии активности определяется соотношением:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1} + f(\varphi_{n-1}) \pmod{2\pi}. \tag{4.15}$$

Следовательно, поведение фаз системы (4.11) описывается модифицированным отображением Фибоначчи.

4.4.2. Численный анализ динамики системы

На **рис. 4.13.** представлены временные зависимости для динамических переменных x и y при значениях параметров $\mu = 1.6$, $\varepsilon = 0.02$, $\alpha = -0.0015$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 7\tau_1 = 14$. Как можно видеть, данные временные реализации представляют собой последовательность импульсов с высокочастотным заполнением. Период пульсаций, согласно численным расчетам, составляет примерно 10.88.

На **рис. 4.14.** приведена двумерная проекция аттрактора из бесконечномерного фазового пространства системы на плоскость (x, y) . На **рис. 4.15.** представлен портрет аттрактора в координатах (x, y, ρ) , спроецированный из бесконечномерного фазового пространства.

На **рис. 4.16.** приведена диаграмма, отражающая стробоскопическую динамику фаз. Фазы определяются так же, как это было сделано в предыдущих разделах и представляются в координатах $(\varphi_{n-1}, \varphi_n)$. На диаграммах можно наблюдать поперечную канторову структуру, визуально похожую на гиперболический DA аттрактор. Однако также можно видеть наложение и пересечение траекторий, что не соответствует гиперболическим аттракторам. Такую ситуацию можно объяснить бесконечной размерностью фазового пространства, которая приводит к более сложному поведению

траекторий. Таким образом, аттрактор отображения Пуанкаре системы (4.11) нельзя назвать DA-аттрактором в том виде, в каком он был предложен Смейлом. Однако, хаос в системе (4.11), как будет показано далее, является грубым.

Для расчета показателей Ляпунова использовался метод, описанный в первом и втором разделах настоящей главы, основанный на совместном решении уравнений (4.11) и комплекта уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} = & -\omega_0 \tilde{y} + \frac{1}{2} \mu (1 - x^2(t - \tau_1) - y^2(t - \tau_1)) \tilde{x} - \mu x(x(t - \tau_1) \tilde{x}(t - \tau_1) + y(t - \tau_1) \tilde{y}(t - \tau_1)) + \\ & + \varepsilon [x(t - \tau_1) \tilde{x}(t - \tau_2) + x(t - \tau_2) \tilde{x}(t - \tau_1) - y(t - \tau_1) \tilde{y}(t - \tau_2) - y(t - \tau_2) \tilde{y}(t - \tau_1)] + \alpha \tilde{x}(t - \tau_1), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}} = & \omega_0 \tilde{x} + \frac{1}{2} \mu (1 - x^2(t - \tau_1) - y^2(t - \tau_1)) \tilde{y} - \mu y(x(t - \tau_1) \tilde{x}(t - \tau_1) + y(t - \tau_1) \tilde{y}(t - \tau_1)) \\ & + \varepsilon [y(t - \tau_2) \tilde{x}(t - \tau_1) + y(t - \tau_2) \tilde{x}(t - \tau_2) + x(t - \tau_2) \tilde{y}(t - \tau_1) + x(t - \tau_1) \tilde{y}(t - \tau_2)] + \alpha \tilde{y}(t - \tau_1). \end{aligned}$$

Четыре старших показателя Ляпунова для стробоскопического отображения, рассчитанные численно для системы (4.11) при значениях параметров $\mu = 1.6$, $\varepsilon = 0.02$, $\alpha = -0.0015$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 6.9\tau_1 = 13.8$ равны:

$$\Lambda_1 = 0.4818, \Lambda_2 = 0.0004, \Lambda_3 = -0.6212, \Lambda_4 = -0.6918.$$

Как можно видеть первый показатель Ляпунова положительный, второй с точностью до погрешности вычислений является нулевым, остальные показатели отрицательные.

На **рис. 4.17.** приведены графики показателей Ляпунова для системы (4.11) в зависимости от параметров ε , μ , τ и α при фиксированных остальных параметрах.

Как можно видеть, в достаточно широком диапазоне изменения параметров старший показатель Ляпунова остается примерно постоянным, что может служить свидетельством присутствия в данной области гиперболического хаоса. Второй показатель также остается нулевым в широком интервале изменения параметра. Третий показатель Ляпунова при небольших значениях параметров остается примерно постоянным, близким по модулю и противоположным по знаку старшему показателю, затем при некотором значении параметра начинает увеличиваться и в итоге

практически достигает нулевого значения. В момент начала роста третьего показателя, четвертый показатель Ляпунова принимает почти постоянное значение противоположное по знаку и близкое по модулю величине старшего показателя Ляпунова. Таким образом, для зависимостей показателей Ляпунова от параметров ε , μ и τ наблюдается та же картина, что и для системы (4.3).

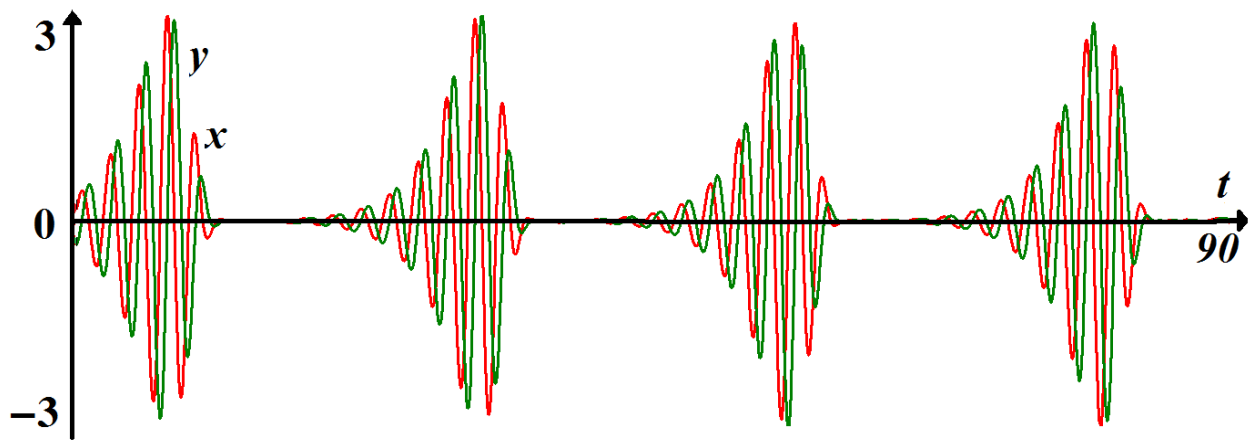


Рис.4.13. Колебания переменных x (черная кривая) и y (серая кривая) согласно результатам численного решения уравнения (4.11).

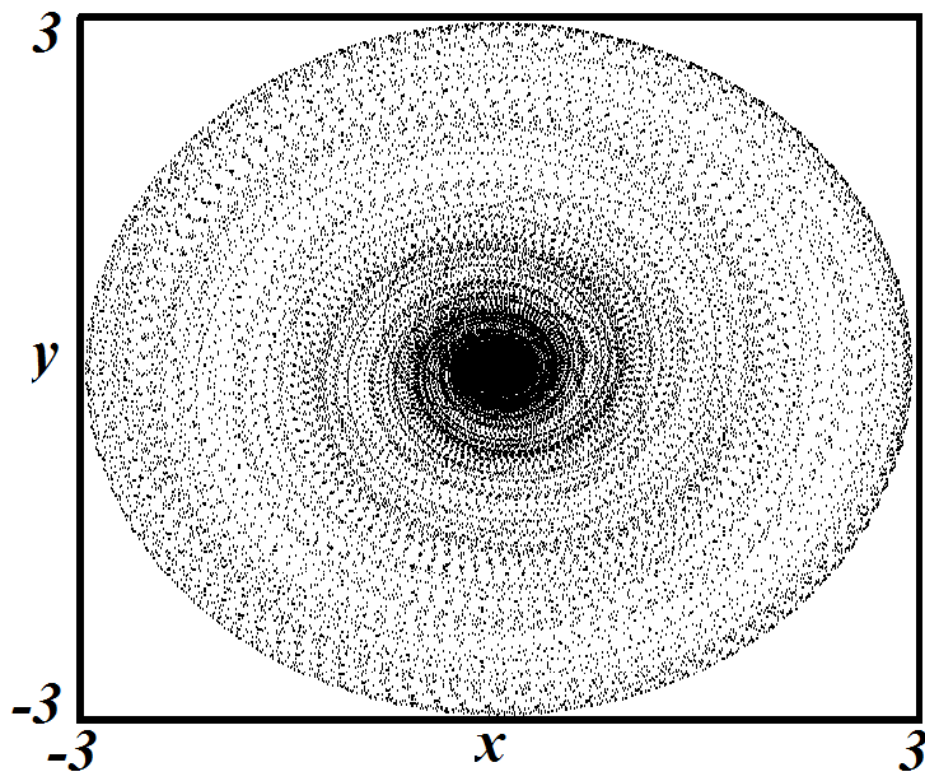


Рис.4.14. Двумерная проекция аттрактора на плоскость (x, y) , при $\mu = 1.6$, $\varepsilon = 0.02$, $\alpha = 0.0015$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 7\tau_1 = 14$.

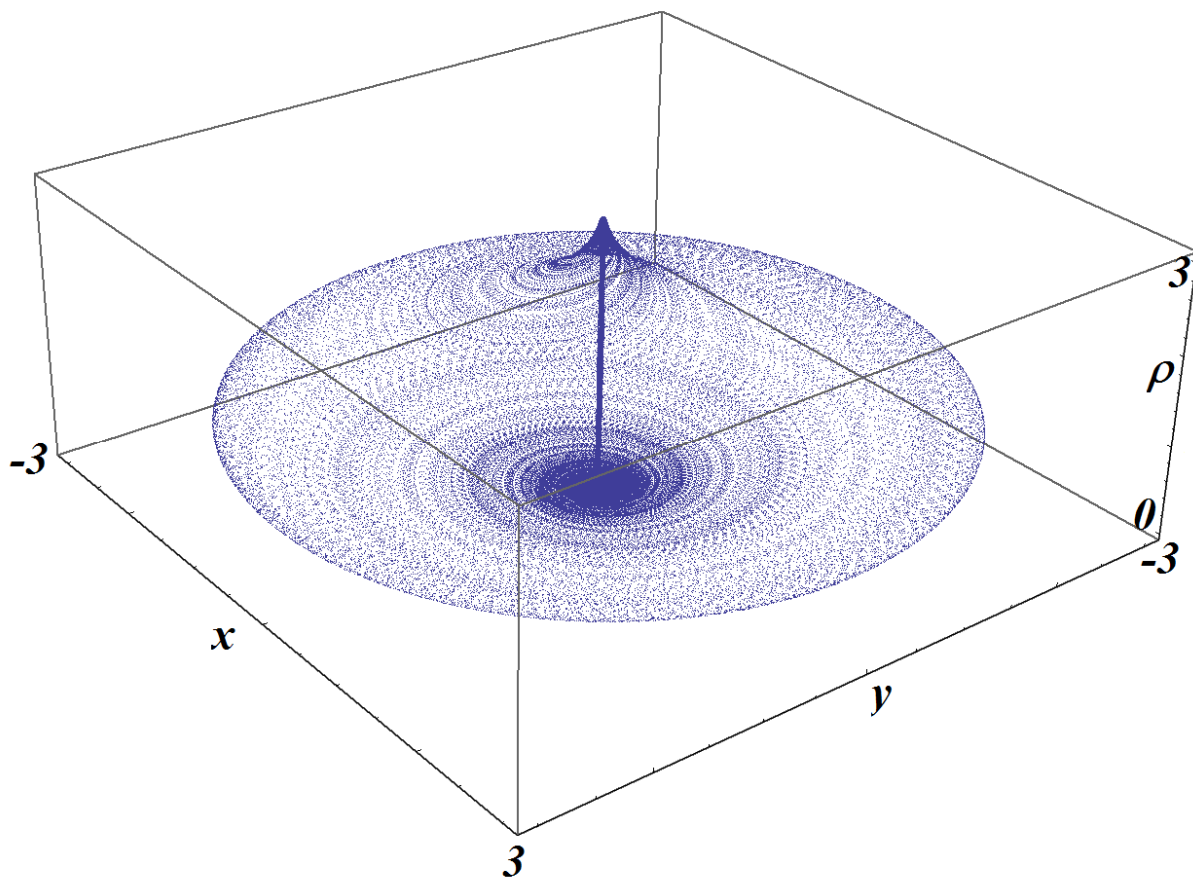


Рис.4.15. Портрет аттрактора в проекции из бесконечномерного фазового пространства модели (4.11) при $\mu = 1.6$, $\varepsilon = 0.02$, $\alpha = -0.0015$, $\omega_0 = 2\pi$, $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 7\tau_1 = 14$.

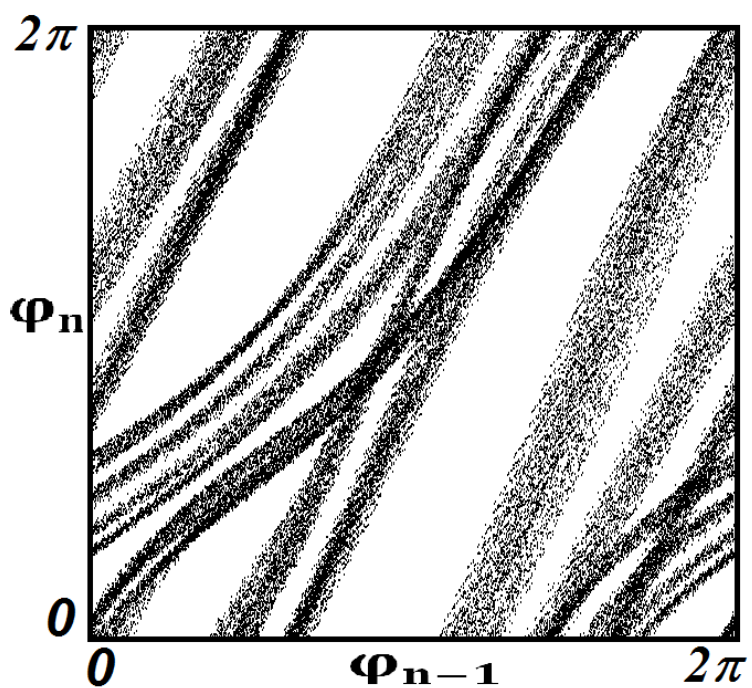


Рис.4.16. График, иллюстрирующий преобразование фаз, полученный на основе результатов численного решения уравнений (4.11).

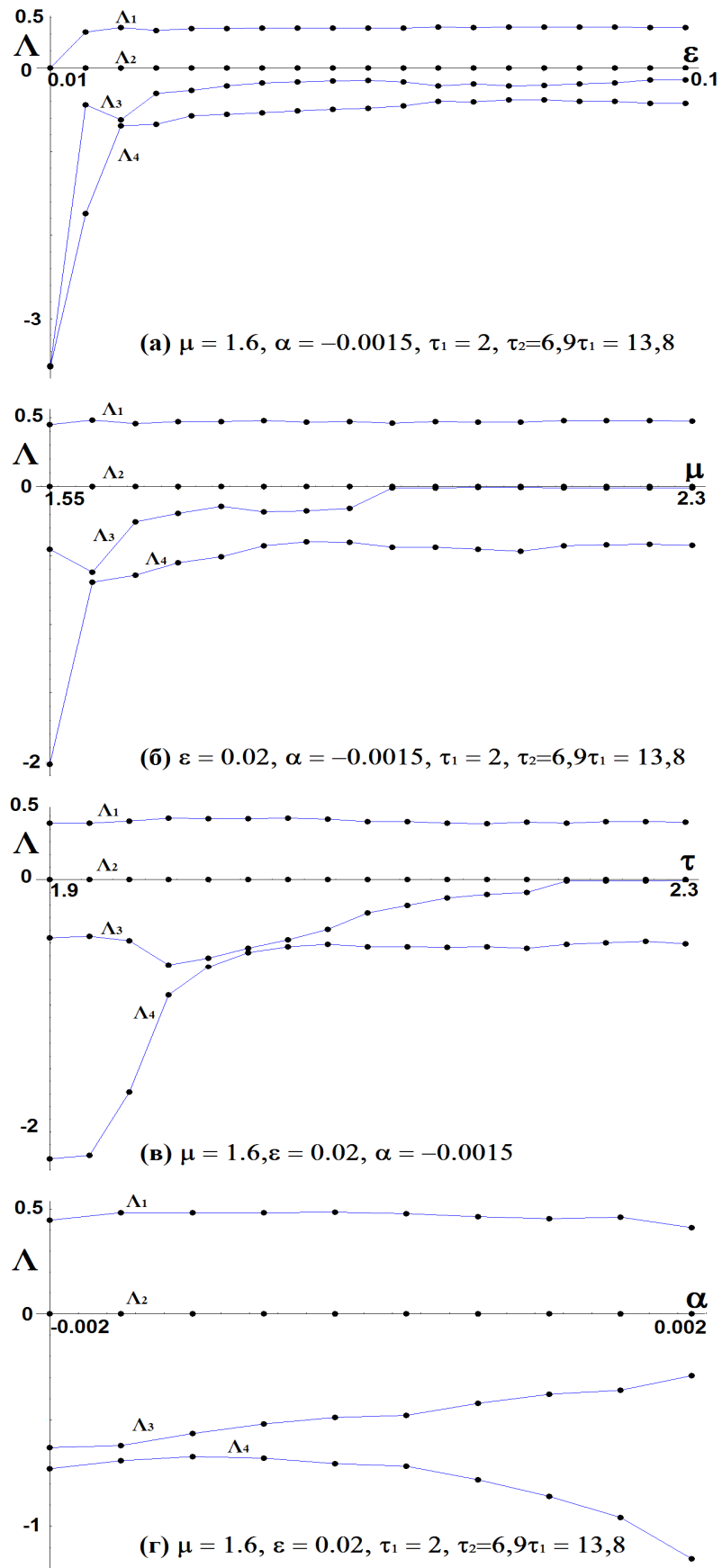


Рис.4.17. Графики показателей Ляпунова системы (4.11) в зависимости от параметров ε, μ, τ и α . Остальные параметры указаны в надписи для каждой диаграммы.

4.5. Выводы к главе 4

Введена в рассмотрение автономная система, построенная на основе логистического дифференциального уравнения с запаздыванием. Как было показано, динамика фаз такой системы, в зависимости от выбора двух параметров отвечающих времени задержки, соответствует растягивающему отображению окружности или отображению Аносова на торе. Так же была предложена модификация данной системы, для которой динамика фаз соответствует поведению на хаотическом аттракторе, по своей структуре близкому к гиперболическому DA аттрактору. В пользу предположения о структурной устойчивости хаотического аттрактора говорит положительный старший показатель Ляпунова, который остается примерно постоянным в достаточно широком диапазоне изменения параметров.

Подобные системы могут представлять интерес, как генераторы хаоса и оказаться более простыми с точки зрения физической реализации, в отличии, например, от систем с гиперболическим хаосом, построенных на основе связанных осцилляторов. Генераторы хаоса в свою очередь благодаря свойству структурной устойчивости могут использоваться для передачи и кодирования информации, генерации случайных чисел, в криптографических схемах.

Заключение

Среди систем с хаотической динамикой особый интерес представляют системы, в которых хаос характеризуется свойством структурной устойчивости (или грубости), позволяющим варьировать систему, сохраняя тип динамики. Генераторы хаоса, построенные на основе таких систем, представляют интерес с практической точки зрения, поскольку генерируемые хаотические колебания будут нечувствительны к искажениям в канале передачи, техническим флуктуациям и шумам, неидентичности параметров передатчика и приемника и т.д. Подобные устройства могут использоваться в криптографических системах, шумовой локации, для передачи и кодирования информации, генерации случайных чисел и т.д.

В диссертационной работе вводятся в рассмотрения системы со структурно устойчивым хаосом, построенные на основе связанных осцилляторов или с использованием цепей обратной запаздывающей связи, для которых характерно подчинение динамики фаз высокочастотного заполнения цугов колебаний отображению с гиперболической динамикой.

В первой главе рассматривается модельное отображение, представляющее собой модификацию консервативного отображения с гиперболической хаотической динамикой «кот Арнольда», полученную в результате введения в исходную систему диссипативной добавки. В фазовом пространстве модифицированного отображения «кот Арнольда» присутствует гиперболический DA аттрактор, который исчезает при увеличении амплитуды введенного возмущения жестким образом, а на его месте возникают две устойчивые неподвижные точки.

Во второй главе в первом разделе вводится система трех связанных осцилляторов ван дер Поля с попеременным возбуждением, для которой динамика фаз осцилляторов за период изменения коэффициентов в уравнениях соответствует отображению Аносова («кот Арнольда»),

демонстрирующему хаотическую динамику. Предложенная модель является отправной точкой для построения во втором разделе главы системы трех неавтономных связанных осцилляторов ван дер Поля с динамикой фаз, соответствующей поведению на гиперболическом DA-аттракторе.

Результаты численных расчетов показывают что, аттракторы предложенных систем в некотором приближении представляют собой двумерные торы, динамика на которых соответствует, в случае первой системы, динамике отображения Аносова, а для второй системы – поведению на гиперболическом DA-аттракторе.

В третьей главе представлены схемы электронных устройств, представляющих собой неавтономные системы с гиперболическим хаосом, сконструированных с помощью программного пакета «Multisim 10.0», соответствующие уравнениям, рассмотренным в предыдущей главе.

Схемы, составлены из трех осцилляторов ван дер Поля на основе колебательных контуров, к которым добавляются элементы (источники переменного напряжения, элементы отрицательного сопротивления и т.п.), обеспечивающие поведение, соответствующее динамике модельных уравнений.

Таким образом, отображение Аносова и его диссипативная модификация с гиперболическим DA-аттрактором допускают радиофизическую реализацию в виде электронной схемы, основанной на попеременном возбуждении трех связанных осцилляторов.

Более удобными, с точки зрения радиофизической реализации, в отличии, например, от систем с гиперболическим хаосом, построенных на основе связанных осцилляторов могут оказаться системы с обратной запаздывающей связью.

В четвертой главе вводится в рассмотрение автономная система, построенная на основе логистического дифференциального уравнения с запаздыванием. Результаты численных расчетов показывают что, динамика фаз такой системы, в зависимости от выбора двух параметров отвечающих

времени задержки, соответствует растягивающему отображению окружности или отображению Аносова на торе. Так же в главе предлагается модификация данной системы, для которой динамика фаз соответствует поведению на хаотическом аттракторе, по своей структуре близкому к гиперболическому DA аттрактору.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Сергею Петровичу Кузнецову за научное руководство и поддержку, к. ф.-м. н., доценту Алексею Владимировичу Савину, профессору д. ф.-м. н. Александру Петровичу Кузнецову, к. ф.-м. н. Ольге Борисовне Исаевой, к. ф.-м. н., доценту Михаилу Валерьевичу Позднякову за полезные замечания при обсуждении данной работы, а также всем сотрудникам базовой кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ и лаборатории нелинейной динамики СФИРЭ РАН.

Список литературы

- [1] Д.В. Аносов, С.Х. Арансон, В.З. Гринес, Р.В. Плыкин, Е.А. Сатаев, А.В. Сафонов, В.В. Солодов, А.Н. Старков, А.М. Степин, С.В. Шлячков. Динамические системы с гиперболическим поведением. Динамические системы – 9. Итоги науки и техники. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **66**. М.: ВИНТИ, 1991.
- [2] V. Afraimovich and S.-B. Hsu Lectures on chaotic dynamical systems. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol.28. American Mathematical Society, Providence RI, International Press, Somerville, MA, 2003.
- [3] Дж. Гукенхеймер, П. Холмс Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2002. 559 с.
- [4] R.L. Devaney An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. NY: Addison – Wesley, 1989.
- [5] S. Smale. Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc. (NS) **73**, 1967, 747-817.
- [6] R.F. Williams Expanding attractors. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., **43**, 1974, 169-203.
- [7] L. Shilnikov Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial // Int. J. of Bif. & Chaos. 1997. Vol. 7, 9. P. 1353.
- [8] В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: изд-во Саратов. ун-та, 1999.
- [9] Я.Г. Синай. Стохастичность динамических систем. В кн. Нелинейные волны, ред. А.В. Гапонов–Грехов. М.: Наука, 1979, с. 192-212.
- [10] С.П.Кузнецов. Динамический хаос, 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006, 356с.
- [11] А.С.Дмитриев, А.И. Панас. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. – 252с.

- [12] К.А. Лукин. Шумовая радиолокация миллиметрового диапазона. Радиофизика и электроника, **13**, 2008, 344-358.
- [13] Z. Elhadj, J.C. Sprott Robust Chaos and Its Applications. WS, Singapore, 2011.
- [14] S. Banerjee, J.A.Yorke, C. Grebogi. Robust Chaos. Phys. Rev. Lett. **80**, 1998, 3049-3052.
- [15] А.Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. М.: Изд. «Факториал», 1999, 768 с.
- [16] Y. Coudene Pictures of Hyperbolic Dynamical Systems. // Notices of the American Mathematical Society **53**(1), 2006, 8-13
- [17] E. N. Lorenz Deterministic Nonperiodic Flow // J. of the Atmospheric Sciences. 1963. V. 20. P. 130-141.
- [18] M. A. Henon Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor // Comm. Math. Phys. 1976. V. 50. P. 69.
- [19] С.П. Кузнецов. Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию. Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика, т.17, 2009, №4, 5-34.
- [20] С.П. Кузнецов Пример неавтономной системы с непрерывным временем, имеющей аттрактор типа Плыкина в отображении Пуанкаре. Нелинейная динамика, т.5, 2009, № 3, 403-424.
- [21] С.П. Кузнецов. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике. УФН, **181**, 2011, №2, 121-149.
- [22] С.П.Кузнецов, Е. П. Селезнев Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла – Вильямса. ЖЭТФ, т.129, 2006, вып. 2, 400-412.
- [23] V. Belykh, I. Belykh, E Mosekilde. Hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models. // International Journal of Bifurcation and Chaos, **15**, 2005, No. 11, 3567-3578.
- [24] S.P. Kuznetsov. Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM. CHAOS, **21**, 2011, 043105.

- [25] O.B. Isaeva, A.Yu. Jalnine, S.P. Kuznetsov. Arnold's cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators. *Phys. Rev. E* **74**, 2006, 046207
- [26] S.P. Kuznetsov, A. Pikovsky. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors. // *Physica* **D232**, 2007, 87-102.
- [27] С.П. Кузнецов, В.И. Пономаренко. О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла-Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием. *Письма в ЖТФ*, т.34, 2008, вып.18, 1-8.
- [28] S.P. Kuznetsov, A. Pikovsky. Hyperbolic chaos in the phase dynamics of a Q-switched oscillator with delayed nonlinear feedbacks. *Europhysics Letters* 2008; 84:10013.
- [29] A.S. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov. Parametric generation of robust chaos with time-delayed feedback and modulated pump source. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **18**, 2013, No 3, 728-734.
- [30] S.P. Kuznetsov and A. Pikovsky: Attractor of Smale - Williams type in an autonomous time-delay system. Preprint nlin. arXiv: 1011.5972, 2010.
- [31] П. Берже, И. Помо, К. Видаль Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991, 368с.
- [32] Г. Шустер Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988, 240с.
- [33] Ф. Мун Хаотические колебания. М.: Мир, 1990, 312с.
- [34] А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Л.В. Тюрюкина Введение в физику нелинейных отображений. Саратов: Изд-во "Научная книга", 2010. - 134 с.
- [35] В.И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978, 304 с.
- [36] J. Carcasses, C. Mira, M. Bosch, C. Simo, J.C. Tatjer «Crossroad area - spring area transition» (II) foliated parametric representation. *Int. J. Bif. & Chaos*, 1991, Vol.1, № 2, p.339-348.

- [37] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. *Meccanica* **15**, 1980, 9-30.
- [38] М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. Введение в теорию колебаний и волн, Наука, Москва (1984).
- [39] А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005.
- [40] А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. Теория колебаний. М.: Физматгаз, 1959, 913с.
- [41] П.С. Ланда Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980, 360с.
- [42] С.П. Кузнецов Схемы электронных устройств с гиперболическим хаосом и моделирование их динамики в программной среде MULTISIM. Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика, т.19, 2011, №5, 98-115.
- [43] М.Е. Хернитер Multisim 7: Современная система компьютерного моделирования и анализа схем электронных устройств. / Пер. с англ. Осипов А.И.– М.: Издательский дом ДМК-пресс, 2006.– 488с.
- [44] Ю.Н. Варзарев, В.В. Иванцов, Спиридонов Б.Г. Моделирование электронных схем в системе Multisim. Таганрог, изд-во ТТИ ЮФУ, 2008, 81с.
- [45] П. Хоровиц, У. Хилл Искусство схемотехники, т.1. М.: Мир, 1986, 510с.
- [46] П. Хоровиц, У. Хилл Искусство схемотехники, т.2. М.: Мир, 1986, 592с.
- [47] Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
- [48] С.П. Кузнецов. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью. Известия вузов – Радиофизика, **25**, 1982, №12, с.1410-1428.
- [49] J.D. Farmer. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica D*, **4**, 1982, 366-393.

- [50] A.C. Fowler An asymptotic analysis of the delayed logistic equation when the delay is large. *IMA Journal of Applied Mathematics*, **28**, 1982, 41-49.
- [51] А.А. Балякин, Н.М. Рыскин. Особенности расчете спектров показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью. *Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика*, **15**, 2007, №6, 3-21.

Публикации по теме диссертации

- [A1] Д.С. Аржанухина. Схемы электронных устройств с гиперболическим хаосом на основе связанных осцилляторов Ван дер Поля. Вестник СГТУ, 2013, № 3 (72), 20-30.
- [A2] Д.С. Аржанухина, С.П. Кузнецов. Система трех неавтономных осцилляторов с гиперболическим хаосом. Часть II. Модель с DA-аттрактором. Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика, 21, 2013, №2, 163-172.
- [A3] Д.С. Аржанухина, С.П. Кузнецов. Система трех неавтономных осцилляторов с гиперболическим хаосом. Часть I. Модель с динамикой на аттракторе, описываемой отображением на торе "кот Арнольда". Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика, 20, 2012, №6, 56-66.
- [A4] Д.С. Аржанухина. О сценариях разрушения гиперболического хаоса в модельных отображениях на торе с диссипативным возмущением. Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика, 20, 2012, №1, 117-123.
- [A5] D.S. Arzhanukhina, S.P. Kuznetsov. Robust chaos in autonomous time-delay system. Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика, **22**, 2014, №2, 37-50.
- [A6] Д.С. Аржанухина Генератор гиперболического хаоса на основе трех связанных осцилляторов ван дер Поля. Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: тезисы докладов VIII Всероссийской конференции молодых ученых. Саратов: изд-во СГУ, – 2013, с. 24-25.

- [A7] Д.С. Аржанухина Система трех неавтономных осцилляторов с динамикой фаз, соответствующей гиперболическому отображению на торе. Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: тезисы докладов VII Всероссийской конференции молодых ученых. Саратов: изд-во СГУ, – 2012, с. 13-14.
- [A8] Д.С. Аржанухина, М.В. Поздняков Сложная динамика и разрушение гиперболического хаоса в отображении «кот Арнольда» с диссипативным возмущением. Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика. Тезисы докладов VI Всероссийской конференции молодых учёных. 13 – 15 сентября 2011 г. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2011. С. 88 – 89.
- [A9] Д.С. Аржанухина, М.В. Поздняков Разрушение грубого хаоса в модельных системах, построенных на основе отображения «кот Арнольда». В сб.: Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2010: Материалы научной школы-конференции. Саратов, 6 октября, 24, 26 ноября 2010 г. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2011, с.57-60.
- [A10] Д.С. Аржанухина, М.В. Поздняков Исследование аттракторов в отображении «кот Арнольда» при введении диссипативных добавок. Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: Тезисы докладов V Всероссийской конференции молодых учёных. Саратов, 6 – 8 сентября 2010 г. Саратов: Изд-во Саратов. университета, 2010. С. 81 – 82.
- [A11] Аржанухина Д.С., Поздняков М.В. Динамика диссипативных модификаций отображения «кот Арнольда». В сб.: Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2009: Материалы научной школы-конференции. Саратов, 16 – 18 ноября 2009 г. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2010. С. 61 –64.