Н.Ю. Агафонова

МАТЕМАТИКА. Часть 2.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие для студентов дневного отделения факультета нано- и биомедицинских технологий

Саратов, 2016 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Настоящее учебное пособие по предмету «Математика. Часть 2. Теория вероятностей и математическая статистика», составлено в соответствии с учебным планом подготовки бакалавров, реализуемых факультетом нано- и биомедицинских технологий.

Пособие содержит задачи и краткие теоретические сведения по основным разделам теории вероятностей и математической статистики в объеме, необходимом для их решения. Выбор разделов был обусловлен спецификой преподавания данного предмета на факультете нано-и биомедицинских технологий, а именно тем, что учебным планом предусмотрено только 17 часов практических занятий. По этой причине возникла необходимость в компактном задачнике, содержащем все темы учебного плана. В связи с этими обстоятельствами пособие имеет структуру, соответствующую семинарам: выделены разделы для работы в аудитории и самостоятельной работы.

Как правило, задачи из раздела для самостоятельной работы идентичны задачам из раздела для работы на семинаре и направлены на закрепление полученных знаний. Однако каждый раздел содержит и более сложные задачи. Глава, посвященная математической статистике, построена по другому принципу, и содержит варианты для самостоятельной работы в силу того, что задачи по статистике требуют большого количества вычислений и проводить их в аудитории нецелесообразно.

Сборник задач составлен в соответствии с изложением материала в [8] и [9].

Глава 1. Классическое и геометрическое определения вероятности

Будем говорить, что произведен *стохастический эксперимент*, если результат этого эксперимента нельзя указать заранее. При этом известно множество возможных результатов эксперимента, и это множество не изменяется при повторных экспериментах. Кроме того, стохастический эксперимент допускает возможность многократного повторения.

Определение. Элементарным исходом эксперимента ω называется результат, которым завершился стохастический эксперимент.

Множество элементарных исходов эксперимента обозначается Ω. Записывают $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$.

Определение. Случайным событием A называется любое подмножество множества элементарных исходов эксперимента Ω, т.е. $A \subset \Omega$, $A = \{\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_k}\}$, где $i_1, ..., i_k$ – некоторая перестановка индексов элементов множества Ω.

Классическое определение вероятности

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ – конечное множество равновозможных исходов, а $A = \{\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_k}\}$–некоторое событие. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{k}{n}, \tag{1.1}$$

где k – количество исходов, благоприятствующих событию A, а n – общее количество исходов эксперимента.

Задача А (урновая модель)

В урне находится a белых и b черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.

Решение.

Стохастический эксперимент состоит в извлечении одного шара из урны, следовательно, элементарный исход эксперимента можно определить как «извлечен один шар».

Для указания множества Ω необходимо перечислить все мыслимые в данном эксперименте исходы. Для рассматриваемого эксперимента можно записать: $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_a, \omega_{a+1}, ..., \omega_{a+b}\}$. Тогда событие $A = \{\omega_1, ..., \omega_a\}$.

Таким образом, $n = a + b$, $k = a$, и вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

Некоторые сведения из комбинаторики.

При нахождении вероятностей в схеме классического определения используются элементы комбинаторики. Приведем некоторые необходимые определения.

Определение. (Правило умножения) Пусть имеются конечные множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ некоторых элементов. Тогда пару элементов (x_i, y_j) можно выбрать $n * m$ способами.

Т.е. в результате эксперимента выбирается обязательно по одному элементу из каждого множества.

Определение. (Правило сложения) Пусть имеются конечные непересекающиеся множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ некоторых элементов. Тогда элемент z_k из множества $Z = \{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m\}$ можно выбрать $n + m$ способами.

Т.е. в результате эксперимента выбирается всего один элемент из любого множества.

Пусть имеется конечное множество $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ некоторых элементов.

Определение. Сочетанием из n элементов множества X по k называется любое подмножество $\{x_{i_1}, ..., x_{i_k}\}$, содержащее k элементов, то есть сочетания представляют собой подмножества, различающиеся только составом элементов.

Число всех сочетаний C_n^k (из n элементов по k) вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.2}$$

Пример. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$ – множество букв латинского алфавита. Составим сочетания из 4 по 3. Получаем: $\{(a,b,c),\ (a,b,d),\ (a,c,d),\ (b,c,d)\}$.

Определение. Размещением из n элементов множества X по k элементам (из n элементов по k) называется любой упорядоченный набор $(x_{i_1}, ..., x_{i_k})$ элементов множества X.

Таким образом, размещения представляют собой такие подмножества, в которых различают не только состав, но и порядок следования элементов.

Число всех размещений A_n^k (из n элементов по k) определяется формулой:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1). \qquad (1.3)$$

Пример. Пусть по-прежнему $X = \{a, b, c, d\}$ – множество букв латинского алфавита. Составим теперь размещения из 4 по 3. Получаем: $\{(a,b,c),\ (a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a), \ldots\ldots (d,c,b)\}$. Всего 24 размещения.

Определение. Перестановкой из n элементов по n называется размещение A_n^n (другими словами, n элементов по n местам).

Число всех перестановок P_n вычисляется по формуле:

$$P_n = n! \qquad (1.4)$$

Таким образом, в образовании сочетания или размещения используется только часть элементов множества, а в образовании перестановки используются все элементы множества. Заметим, что здесь приведены примеры наборов элементов, образованные по схеме «без возвращения», что означает, что каждый элемент участвует в отборе только один раз. Если это не так, следует использовать другие способы вычисления количества наборов [9].

Вернемся к задаче A, и изменим условия проведения эксперимента.

В урне находится a белых и b черных шаров. Из урны вынимают одновременно два шара. Найти вероятность того, что оба шара – белого цвета.

Решение.

Стохастический эксперимент состоит в одновременном извлечении двух шаров из урны, следовательно, элементарный исход эксперимента можно определить как «извлечена пара шаров».

Для указания множества Ω снова необходимо перечислить все мыслимые в данном эксперименте исходы. Однако порядок извлечения шаров внутри этой пары установить невозможно, т.е. имеет место сочетание элементов множества шаров.

Для рассматриваемого эксперимента можно записать: $\Omega = \{\omega_i, \quad i = 1, \ldots, n\}$, где ω_i означает «извлечена пара шаров» Тогда событие $A = \{\omega_i, \quad i = 1, \ldots, k\}$, где ω_i означает «извлечена пара белых шаров»

Таким образом, $n = C_{a+b}^2$, $k = C_a^2$, и вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{C_a^2}{C_{a+b}^2} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Если в этой задаче формулировку «из урны вынимают одновременно два шара» заменить на «из урны вынимают последовательно (или друг за другом) два шара», то в этом случае имеет место размещение элементов множества шаров, и количество элементарных исходов определяется как $n = A_{a+b}^2 = (a+b)(a+b-1)$, а количество благоприятных событию A исходов как $k = A_a^2 = a(a-1)$. Заметим, что численное значение вероятности будет таким же, как и предыдущем случае.

1.1.Классическое определение вероятности

1. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу вытащенный кубик будет иметь: 1) одну окрашенную грань; 2) не более двух окрашенных граней; 3) не менее одной окрашенной грани.
2. Из чисел 3, -5, 2, 1, -2, -4 наугад выбираются три числа. Какова вероятность того, что их сумма положительна.
3. Три математических и семь художественных книг расставлены на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что все книги по математике будут стоять рядом?
4. Вытаскиваются две карты из колоды в 36 карт. Какова вероятность того, что одна из них туз, а другая - пиковой масти?
5. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Вытаскиваются два шара. Какова вероятность, что хотя бы один из них белый?
6. В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже вошли пять человек. Каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что: 1) все выйдут на разных этажах; 2) все выйдут на 5 этаже; 3) все выйдут одновременно.
7. В карточке «Спортлото» 49 номеров. Какова вероятность угадать 4 номера из 6? Не менее четырех?
8. Ящик содержит 90 годных и 10 бракованных деталей. Найти вероятность того, что среди 10 вынутых из ящика деталей нет бракованных.

Геометрическая вероятность

В случае, когда множество Ω элементарных исходов эксперимента представляет собой некоторое подмножество в пространстве R^n, $n = 1,2,3$ вероятность события A определяют по формуле

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \tag{1.5}$$

где $\mu(A)$- мера множества A в пространстве R^n. Под мерой множества в пространстве R^1 понимают длину промежутка, в R^2 – площадь фигуры, в R^3– объем тела.

9. В окружность вписан правильный треугольник. Какова вероятность того, что точка, случайно брошенная в круг, попадет в треугольник?
10. В квадрат вписан круг. Найти вероятность того, что точка, случайно брошенная в квадрат, попадет в круг.
11. Две трети отрезка окрашены в зеленый цвет, а оставшаяся треть – в красный. Какова вероятность того, что при случайном разломе зеленая часть сохранится полностью?
12. Кусок проволоки длиною 20 см. согнули в случайно выбранной точке под прямым углом. Затем на большей части куска сделали еще два изгиба так, что в итоге получился прямоугольник. Какова вероятность того, что его площадь не превосходит 21 см^2?

1.2. Задачи для самостоятельного решения

1. В книге 300 страниц. Какова вероятность того, что номер наудачу открытой страницы будет кратен 7?
2. В урне содержится 3 белых, 2 черных и 5 красных шаров. Из урны наудачу извлекается один шар. Какова вероятность того, что а) выбранный шар окажется красным? б) не будет черным?
3. В коробке содержится $\boldsymbol{N}$ изделий, среди которых $\boldsymbol{M}$ бракованных. Из урны извлекается $\boldsymbol{k}$ изделий. Какова вероятность, что среди них будет $\boldsymbol{l}$ бракованных?
4. Стадо из 20 голов (10 овец и 10 коз) делится пополам случайным образом. Какова вероятность того, что в каждой половине будет одинаковое число овец?
5. Из колоды в 52 карты извлекаются одна за другой две карты. Чему равна вероятность того, что первая карта туз, а вторая – валет? Что одна из этих карт туз, а другая – валет?

6. Из урны, содержащей 19 белых и 1 черный шар, вытаскивается 5 шаров. Какова вероятность того, что в урне остались только белые шары?
7. Из 10 урн, содержащих по 19 белых и 1 черному шару каждая, извлекается по одному шару. Какова вероятность, что хотя бы один шар черный?
8. Найти вероятность того, что сумма двух наудачу взятых чисел из отрезка *[-1,1]* больше нуля, а произведение отрицательно.
9. Мячик диаметром 10 см. бросают в садовую решетку, сделанную из вертикальных прутьев толщиной в 4 см. Найти вероятность того, что мячик пролетит сквозь решетку, если расстояние между осями прутьев 40 см.
10. Петя, Маша и ещё n человек садятся в ряд. Какова вероятность того, что между Петей и Машей будет сидеть ровно r человек?
11. За круглым столом короля Артура сидят 12 рыцарей. Каждый из них враждует со своими соседями по столу. Какова вероятность выбрать 5 рыцарей для освобождения заколдованной принцессы так, чтобы среди выбранных не было врагов?

Глава 2. Условная вероятность. Теоремы умножения и сложения вероятностей

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, где Ω – множество элементарных исходов эксперимента, $\mathcal{F}$ – σ–алгебра событий, P – вероятностная мера. Пусть $B \in \mathcal{F}$ – некоторое событие, вероятность которого $P(B) > 0$.

Определение. Условной вероятностью события A при условии, что наступило событие B, называют число $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0. \tag{2.1}$$

Определение. События A и B называются независимыми, если выполняется равенство $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Теорема. События A и B независимы тогда и только тогда, когда справедливо соотношение $P(A|B) = P(A)$, при $P(B) > 0$.

Теорема (умножения вероятностей). Пусть $A, B \in \mathcal{F}$ –события вероятностного пространства, причем $P(B) > 0$. Тогда

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B). \qquad (2.2)$$

Пусть $A_1, A_2, A_3 \in F$ –события вероятностного пространства, причем $P(A_1) > 0$ и $P(A_1 \cap A_2) > 0$. Тогда

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2). \qquad (2.3)$$

Теорема *(сложения вероятностей).* Пусть $A, B \in F$ –события вероятностного пространства. Тогда

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \qquad (2.4)$$

2.1.1 Операции над событиями. Независимость событий

1. Опыт состоит в подбрасывании двух монет. Рассматриваются следующие события:
   - A - появление герба на первой монете;
   - B - появление цифры на первой монете;
   - C - появление герба на второй монете;
   - D - появление цифры на второй монете;
   - E - появление хотя бы одного герба;
   - F - появление хотя бы одной цифры;
   - G - появление одного герба и одной цифры;
   - H - непоявление ни одного герба;
   - K - появление двух гербов.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события:

1) $A \cup C$; 2) $A \cap C$; 3) $E \cap F$; 4) $G \cup F$; 5) $G \cap F$; 6) $B \cap D$; 7) $E \cup K$.

2. По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события A_i - попадание при i-м выстреле ($i = 1,2,3$). Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_i и $\overline{A_i}$ следующие события:
   - A - все три попадания;
   - B - все три промаха;
   - C - хотя бы одно попадание;
   - D - хотя бы один промах;
   - E - не меньше двух попаданий;
   - F - не больше одного попадания;
   - G - попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.
3. Опыт состоит в последовательном подбрасывании двух монет. Рассматриваются события:
   - A - появление герба на первой монете;
   - D - появление хотя бы одного герба;

E - появление хотя бы одной цифры;

F - появление герба на второй монете.

Определить, зависимы или независимы пары событий:

1) A и E; 2) A и F; 3) D и E; 4) D и F.

Определить условные и безусловные вероятности событий в каждой паре.

4. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассматриваются события:

   A - появление туза;

   B - появление карты красной масти;

   C - появление бубнового туза;

   D - появление десятки.

   Зависимы или независимы попарно следующие события:

1) A и B; 2) A и C; 3) B и C; 4) B и D; 5) C и D.

2.1.2. Условная вероятность

5. Студент пришел на экзамен, зная 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что он ответит на три последовательно заданных ему вопроса.
6. В общежитии проживает 10% студентов университета. 75% студентов, проживающих в общежитии, увлекается спортом, среди них 46% юношей. Какова вероятность встретить в студенческом городке юношу, увлекающегося спортом и живущего в общежитии?
7. У человека имеется N ключей, из которых только один подходит к двери. Он последовательно испытывает их. Процесс испытания может закончиться при 1, 2, …., N испытаниях. Показать, что каждый из этих исходов имеет вероятность 1/N.

2.1.3. Теоремы умножения и сложения вероятностей

8. Два охотника пошли на охоту, увидели медведя и одновременно выстрелили. Медведь убит, но в шкуре одна дыра, то есть попал только один из охотников. У первого вероятность попадания 0.8, у второго – 0.4. Шкуру продали за 70 рублей. Как поделить деньги между охотниками?
9. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0.7, а для второго —

0.8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.

10. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при трех выстрелах равна 0.973. Какова вероятность попадания при одном выстреле?
11. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали 1-й и 2-й элементы, если вероятности отказов соответственно равны p_1=0.2, p_2=0.4, p_3=0.3.

2.2. Задачи для самостоятельной работы

1. В отделе работают семь мужчин и три женщины. По табельным номерам отобраны три человека. Какова вероятность того, что отобранные лица окажутся мужчинами?
2. На обувной фабрике в отдельных цехах производятся подметки, каблуки и верхи ботинок. Дефектными оказываются 1% каблуков, 4% подметок и 5% верхов. Каблуки, верхи и подметки случайно комбинируются в цехе, где шьют ботинки. Какой процент ботинок будет испорчен?
3. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0.8, вторым стрелком – 0.7, третьим стрелком – 0.6. Найти вероятность поражения цели: а) двумя пулями; б) не менее чем двумя пулями.
4. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 4/5, 3/4, 2/3. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.
5. В урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8, 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одинакового цвета?
6. В урне лежат 5 черных шаров, 4 красных шара и 3 белых шара. Последовательно вынимаются 3 шара, причем каждый шар возвращается в урну перед тем, как вынимать следующий. Найти вероятность того, что первый шар окажется черным, второй – красным, и третий – белым.

Глава 3. Формула полной вероятности и формула Байеса

***Теорема** (формула полной вероятности).* Пусть события $A_1,...,A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, т.е. удовлетворяют условиям:

1) $\forall i = 1,...,n \quad P(A_i) > 0$;

2) $\forall i \neq j \quad A_i \bigcap A_j = \emptyset$;

3) $A_1 \bigcup ... \bigcup A_i \bigcup ... \bigcup A_n = \Omega$.

Пусть A – событие, для которого при любом $i = 1,...,n$ известны условные вероятности $P(A|A_i) \geq 0$. Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(A|A_i)\,. \tag{3.1}$$

Теорема *(формула Байеса).* Пусть события $A_1,...,A_n$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, известны $P(A|H_i)$ и вероятность $P(A) > 0$. Тогда имеет место равенство

$$P(A_i|A) = \frac{P(A_i) \cdot P(A|A_i)}{P(A)}, \ \forall \quad i = 1,...,n. \tag{3.2}$$

Замечание. События A_i называют гипотезами. Вероятности $P(A_i)$ считаются известными до того, как решается вопрос о вычислении $P(A)$, поэтому их называют априорными вероятностями гипотез. Вероятности $P(A_i|A)$ вычисляются после проведения эксперимента и называются апостериорными вероятностями гипотез.

3.1 Формула полной вероятности и формула Байеса

1. В тире имеются пять ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 и 0.9. а) Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу. б) Произведенный выстрел оказался успешным. Найти вероятность того, что выстрел был сделан из четвертого ружья.
2. В трех урнах находится по 8 черных и 2 белых шара в каждой, а в двух других – по 6 черных и 4 белых в каждой. Наугад выбирается одна из этих пяти урн, а из нее берутся два шара. Какова вероятность, что оба шара белого цвета.

3. Три оператора радиолокационной установки проводят соответственно 25%, 35% и 40% всех измерений, допуская при этом 5%, 4% и 2% ошибок соответственно. Случайно выбранное измерение оказалось ошибочным. Найти вероятность того, что оно было выполнено третьим оператором.
4. Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.
5. Имеется три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой партии, второй и третьей партиях соответственно равны 20, 15, 10. Из наудачу взятой партии извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращается в эту же партию и вторично из нее извлекается деталь, которая снова оказалась стандартной. Найти вероятность того, что детали извлекались из третьей партии.
6. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно 0.3, 0.5 и 0.2. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для первой кассы – 0,5, для второй – 0.8, для третьей – 0.4. Пассажир направился в одну из касс и приобрел билет. Какова вероятность того, что это была вторая касса?
7. В сосуд, содержащий N шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда белый шар, если все предположения о первоначальном количестве белых шаров в сосуде равновозможны?

3.2 Задачи для самостоятельной работы

1. Предположим, что 5 мужчин из 100 и 25 женщин из 10000 являются дальтониками. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? (считать, что мужчин и женщин одинаковое количество).
2. Прибор может работать в двух режимах: нормальном и ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора, ненормальный – в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равно 0.1; в

ненормальном – 0.7. Найти вероятность выхода прибора из строя за время t.

3. На трех дочерей – Юлю, Марину и Лену – в семье возложена обязанность мыть посуду. Поскольку Юля старшая, ей приходиться выполнять 40 % всей работы. Остальные 60 % работы приходятся поровну на Марину и Лену. Вероятность разбить что–нибудь из посуды (в течение одного мытья) для Юли, Марины и Лены равны соответственно: 0.02, 0.03, 0.05. Родители не знают, кто дежурил вечером, но они слышали звон разбитой посуды. Какова вероятность того, что посуду мыла: Юля; Марина; Лена?
4. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых, во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух наудачу взяли один шар. Найти вероятность того, что из двух шаров будет выбран белый.
5. Известно, что 96% выпускаемых заводом изделий отвечает стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0.98 и нестандартную с вероятностью 0.05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, отвечает стандарту.
6. В урне имеется N шаров, причем цвет каждого из них с равной вероятностью может быть белым или черным. Извлекаются последовательно K шаров, причем каждый раз после извлечения шар возвращается в урну. Какова вероятность того, что в урне содержатся только белые шары, если черные шары не извлекались?
7. Имеются три партии по 20 деталей каждая. В одной находятся две бракованных детали, в другой – четыре, в третьей – шесть. Извлеченные случайным образом из какой-то партии две детали оказались бракованными. Какова вероятность, что это была первая, вторая, третья партии?
8. Пусть некоторое насекомое с вероятностью $(\lambda^k / k!)e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$ кладёт k яиц, а вероятность развития насекомого из яйца равна p. Найти вероятность того, что у насекомого будет: а) потомство; б) будет только один потомок.

Глава 4. Последовательности событий. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Рассмотрим некоторый стохастический эксперимент, который будем называть испытанием. Среди исходов этого испытания будем различать только два события A и $\overline{A}$, $A \cap \overline{A} = \Omega$. Если испытание заканчивается появлением события A, будем говорить, что наступил «успех», если же испытание заканчивается появлением события $\overline{A}$, то говорим, что наступил «неуспех». Обозначим вероятность «успеха» $P(A) = p$, вероятность «неуспеха» $P(\overline{A}) = q$. Очевидно, что $p + q = 1$.

Теперь рассмотрим эксперимент, состоящий в том, что проводится n независимых испытаний. Вероятность успеха не изменяется в зависимости от номера испытания.

Такая схема проведения эксперимента называется ***схемой независимых испытаний Бернулли.***

Рассмотрим случайную величину ξ – «количество успехов в n независимых испытаниях Бернулли». Множеством значений этой величины будет множество $\{0,1,....,n\}$. Обозначим вероятность того, что в n испытаниях появится ровно k «успехов» как $P_n(k) = P\{\xi = k\}$. Имеет место формула Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (4.1)$$

Теорема (Пуассон).

Если последовательность положительных чисел p_n такова, что $np \to \lambda < \infty$ при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^k p_n^k q_n^{n-k} = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $q_n = 1 - p_n$.

Из теоремы Пуассона следует, что если n велико и p мало, то

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np. \qquad (4.2)$$

Значения $\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ приведены в приложении 3.

Локальная теорема Муавра-Лапласа.

Если вероятность «успеха» $p,\ 0 < p < 1$, при одном испытании в n независимых испытаниях Бернулли не зависит от числа испытаний n, то для $0 \le k \le n$,

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \qquad (4.3)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, а $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\varphi(x)$ приведены в приложении 2.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Если вероятность «успеха» $p,\ 0 < p < 1$, при одном испытании в n независимых испытаниях Бернулли не зависит от числа испытаний n, то для любых целых $0 \le k_1 < k_2 \le n$

$$P_n\left(k_1 \le k < k_2\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a), \qquad (4.4)$$

где $b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},\ a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ приведены в приложении 1.

Теорема (Бернулли). Пусть вероятность «успеха» $p,\ 0 < p < 1$, при одном испытании в n независимых испытаниях Бернулли не зависит от числа испытаний n.

При достаточно большом n для любого k, $0 \le k \le n$ и любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (4.5)$$

Отношение $\mu_n(A) = \frac{k}{n}$ называется относительной частотой появления события A, (т.е. «успеха») при n независимых испытаниях.

Замечание. Теорема Пуассона используется обычно при $p \le 0.1$и $npq \le 9$. В случае, когда $npq > 9$, используют предельные теоремы Муавра-Лапласа (см.: Хельд А. Математическая статистика. М., ил. 1956. С. 585).

4.1 Формула Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли

1. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?
2. Вероятность некоторого изделия быть бракованным равна 0.005. Чему равна вероятность того, что среди 10000 наугад взятых изделий 40 бракованных?
3. Среди семян пшеницы 0.6% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружить: а) не менее 3 семян сорняков; б) не более 16 семян сорняков; в) ровно 6 семян сорняков?
4. Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 0.8 рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольный момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?
5. Вероятность появления некоторого события при одном опыте равна 0.3. С какой вероятностью можно утверждать, что частота этого события при 100 опытах будет лежать в пределах от 0.2 до 0.4.
6. При бросании монеты 4040 раз (опыт Бюффона), герб выпал 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона частота появления герба отклонится по абсолютной величине от вероятности появления герба при одном испытании не более чем в опыте Бюффона.
7. Среди семян пшеницы 0.9% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе тысячи семян обнаружить а) ровно 9 сорняков; б) не менее 9 и не более 15 сорняков?
8. Какова вероятность того, что при ста подбрасываниях монеты «орел» выпадет: а) 45 раз; б) не менее 45 и не более 60 раз?

4.2 Задачи для самостоятельной работы

1. Пусть вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 1/5. Производится 10 независимых выстрелов. а) Какова вероятность попадания в цель по меньшей мере дважды? б) Какова условная вероятность попадания в цель по меньшей мере дважды, если известно, что по крайней мере одно попадание произошло?
2. Среди коконов некоторых партии 20% цветных. Какова вероятность того, что среди 100 случайно отобранных из партии коконов 15 цветных? Не более 30 и не менее 15 цветных?

3. Вероятность того, что в течение рабочего дня в деканат с вопросом А обратится студент, равна 0.01. На факультете обучается 800 студентов. Какова вероятность того, что в течение дня в деканат обратятся 5 студентов?
4. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0.8. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы с вероятностью 0.9 можно было ожидать, что мишень будет поражена не менее 75 раз?
5. Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число выпадений «шестерки».
6. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,05. найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено количество бракованных изделий среди проверенных.
7. В первые классы должны быть принято 200 детей. Определить вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

Глава 5. Дискретные случайные величины и их характеристики

Пусть $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, $R=(-\infty,+\infty)$ –множество действительных чисел.

Определение. Случайной величиной называется действительная функция $\xi=\xi(\omega)$, ($\xi:\Omega\to R$) такая, что для каждого действительного x

$$\{\omega:\xi(\omega)<x\}\in\ \mathcal{F}.$$

Здесь $\mathcal{F}$ – σ-алгебра событий, то есть $\{\omega:\xi(\omega)<x\}$ – некоторое событие вероятностного пространства.

Определение. Функция

$$F(x)=P\{\omega:\xi(\omega)<x\} \tag{5.1}$$

называется функцией распределения вероятностей случайной величины ξ.

Свойства функции распределения вероятностей:

1. $0\le F(x)\le 1$ для любого $x\in R$;
2. $F(x)$ – неубывающая, непрерывная слева;
3. $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$;
4. $P\{a\le\xi<b\}=F(b)-F(a)$.

Определение. Случайные величины ξ и η называются независимыми, если при любых действительных x и y имеет место

$$P\{\omega:\xi(\omega)<x,\eta(\omega)<y\}=P\{\omega:\xi(\omega)<x\}\cdot P\{\omega:\eta(\omega)<y\}.$$

К основным числовым характеристикам случайных величин относят математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ называется число

$$M\xi=\sum_{k=0}^{\infty}x_k p_k, \tag{5.2}$$

(при условии, что ряд сходится). Здесь x_k–значения случайной величины ξ, $p_k=P\{\xi=k\}$ –вероятность, с которой случайная величина ξ принимает значение x_k.

Свойства математического ожидания.

1. Если $P\{\xi=C\}=1$, то $M\xi=C$. Иначе $MC=C$, где $C=const$.
2. $MC\xi=CM\xi$, где $C=const$.

3. $M(\xi \pm \eta) = M\xi \pm M\eta$.

4. Если случайные величины ξ и η независимы, то $M\xi\eta = M\xi M\eta$.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ^2 называется число

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 p_k \ , \tag{5.3}$$

(при условии, что ряд сходится).

Определение. Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2, \tag{5.4}$$

Свойства дисперсии.

0. $D\xi \geq 0$.

1. Если $P\{\xi = C\} = 1$, то $D\xi = 0$. Иначе $DC = 0$, где $C = const$.

2. $DC\xi = C^2 D\xi$, где $C = const$.

3. Если случайные величины ξ и η независимы, то

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta .$$

4. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины называют величину $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

5.1. Дискретные случайные величины

1. Опыт состоит из трех независимых бросаний монеты, при каждом из которых герб выпадает с вероятностью 0.5. Для случайного числа появления герба построить: а) ряд распределения; б) функцию распределения; в) вычислить числовые характеристики.
2. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения случайной величины ξ– числа стандартных деталей среди отобранных. Построить функцию распределения вероятностей и ее график. Вычислить числовые характеристики.
3. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать ряд распределения числа нестандартных деталей среди отобранных четырех.
4. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, причем $M\xi_1 = 3$, $M\xi_2 = 5$, $D\xi_1 = 1$, $D\xi_2 = 2$. Найти $M\eta$ и $D\eta$, если: а) $\eta = 3\xi_1 + \xi_2$;

б) $\eta = 2\xi_1 + \xi_2 - 2$ в) $\eta = a\xi_1 + b\xi_2 + c$, где a, b, c – постоянные величины.

5. Дан ряд распределения дискретной случайной величины ξ:

а)

ξ	-2	-1	0	1
p	0.1	0.3	0.2	0.4

б)

ξ	-3	1	3	4
p	0.3	0.2	0.1	0.4

Требуется: 1) записать функцию распределения вероятности величины ξ и построить ее график; 2) построить ряд распределения случайной величины $\eta = \xi^2$; 3) определить числовые характеристики случайной величины ξ.

6. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной законом распределения:

а)

ξ	3	5	7	9
p	0.4	0.3	0.2	0.1

б)

ξ	0	1	2
p	0.3	0.5	0.2

5.2. Задачи для самостоятельной работы.

1. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Построить функцию распределения вероятностей и ее график. Вычислить числовые характеристики.
2. Баскетболист бросает мяч в корзину. Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при двух бросках, если вероятность попадания равна 0.4. Построить функцию распределения вероятностей и ее график. Вычислить числовые характеристики.
3. После ответа студента по вопросам экзаменационного билета экзаменатор задаёт студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент не ответит на очередной вопрос. Вероятность того, что студент ответит на любой дополнительный вопрос, равна 0.9. Требуется: а) составить закон распределения случайной величины ξ - числа дополнительных вопросов; б) найти наивероятнейшее число заданных студенту дополнительных вопросов.
4. Дан ряд распределения дискретной случайной величины ξ:

а)

ξ	2	3	6	7
p	0.1	0.3	0.1	0.5

б)

ξ	-5	2	3	4
p	0.1	0.4	0.1	0.4

Требуется:

1) записать функцию распределения вероятности величины ξ и построить ее график;

2) построить ряд распределения случайной величины $\eta = \xi^2$;

3) найти $P(0 \le \xi < 2.5)$, $P(1 \le \xi^2 < 5)$;

4) определить числовые характеристики случайной величины ξ.

5. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ равны соответственно 2 и 5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины η: а) $\eta = 2\xi$; б) $\eta = 2\xi + 7$; в) $\eta = 3\xi + 1$; г) $\eta = 3\xi - 2$.
6. Задана функция распределения дискретной случайной величины ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0.25, & 1 < x \le 3, \\ 0.4, & 3 < x \le 4, \\ 0.8, & 4 < x \le 5 \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

а) Найти вероятность событий $\xi < 1$; $\xi = 2$; $2 < \xi \le 4$. б) Построить ряд распределения случайной величины ξ.

7. Задана функция распределения дискретной случайной величины ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 0.3, & 2 < x \le 3, \\ 0.5, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

а) Найти вероятность событий $1 \le \xi \le 3$; $2 < \xi \le 3$. б) Построить ряд распределения случайной величины ξ.

8. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до тех пор, пока один из них не промахнётся. Вероятность попадания для первого стрелка равна p_1, а для второго - p_2. Найти законы распределения количества выстрелов, произведенных каждым стрелком.

Глава 6. Непрерывные случайные величины и их характеристики

Определение. Случайная величина ξ называется абсолютно непрерывной, если существует такая неотрицательная функция $f(x)$, что при любом действительном x справедливо представление

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (6.1)$$

Определение. Функция $f(x)$ называется функцией плотности распределения вероятностей случайной величины ξ и обладает свойствами

1. При любом $x \in R$ $f(x) \geq 0$.
2. При почти всех $x \in R$ $f(x)=F'(x)$. (6.2)
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

Определение. Математическим ожиданием абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется число

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx, \qquad (6.3)$$

(при условии, что соответствующий интеграл существует).

Определение. Математическим ожиданием абсолютно непрерывной величины ξ^2 называется число

$$M\xi^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx. \qquad (6.4)$$

Все свойства функции распределения вероятностей, математического ожидания, определение и свойства дисперсии сохраняются.

Иногда для анализа поведения случайной величины используются такие характеристики, как мода и медиана.

Определение. Модой распределения случайной величины называется число Mo - точка максимума функции плотности.

Определение. Медианой распределения случайной величины называется число Me - точка, в которой достигается «середина» распределения, т.е. $F(Me)=0.5$ для абсолютно непрерывной случайной величины.

6.1. Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики

1. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ (x-2)^2, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что ξ примет значение в интервале:

а) $\left[1;\frac{5}{2}\right]$ б) $\left[\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right]$. Найти плотность вероятности ξ. Вычислить характеристики случайной величины.

2. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin(x), & 0<x\le \pi/2;\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$$

Найти плотность вероятности ξ. Вычислить характеристики случайной величины. (*Использовать:* $\int x\cdot\cos(x)dx=\cos(x)+x\cdot\sin(x)$, $\int x^2\cdot\cos(x)dx=2x\cos(x)+\left(x^2-2\right)\cdot\sin(x)$, *или интегрирование по частям.)*

3. Дана функция распределения вероятностей $F_\xi(x)$ случайной величины ξ, содержащей один или два неизвестных параметра (a и b):

а) $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ a(x^2-2x-3), & -1<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$ $(\alpha=0,\beta=2)$;

б) $F_\xi(x)=a+b\cdot arctg(x)$; $(\alpha=0,\beta=1)$.

Найти: 1) *a* и *b*; 2) плотность распределения вероятностей; 3) вероятность того, что при 3-х независимых наблюдениях случайная величина примет значения в промежутке $[\alpha,\beta]$ ровно один раз; не менее одного раза; 4) определите числовые характеристики. (*Использовать* $arctg'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} arctg(x)=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} arctg(x)=-\frac{\pi}{2}$*).*

4. Случайная величина ξ задана функцией плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin(x), & 0<x\le \pi/2;\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F_\xi(x)$. Вычислить характеристики случайной величины. (*Использовать:* $\int x\cdot\sin(x)dx=\sin(x)-x\cdot\cos(x)$, $\int x^2\cdot\sin(x)dx=2x\sin(x)-\left(x^2-2\right)\cdot\cos(x)$.*)*

5. Для непрерывной случайной величины с функцией плотности *f(x)* : определить значение параметра λ, построить функцию распределения, вычислить $M\xi$, $D\xi$, σ

а) $f(x)=\begin{cases}\lambda(x^3+x), \text{если} & x\in[0,2],\\ 0, \text{если} & x\notin[0,2]\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}\lambda(x^2-1), \text{если} & x\in[1,3],\\ 0, \text{если} & x\notin[1,3]\end{cases}$

6.2 Задачи для самостоятельной работы.

1. Случайная величина ξ задана функцией плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ x-1/2, & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F_\xi(x)$. Вычислить характеристики случайной величины.

2. Случайная величина ξ имеет плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin(x)/2, & 0<x\le \pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Восстановить функцию распределения вероятностей случайной величины. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина ξ примет значение в интервале $(0,\pi/4)$.

3. Дана функция распределения вероятностей $F_\xi(x)$ случайной величины ξ, содержащей один или два неизвестных параметра (a и b):

а) $F_\xi(x)=\begin{cases} a+b, & x\le 0 \\ a+be^{-x}, & x>0 \end{cases}$ $\qquad (\alpha=1;\ \beta=3);$

б) $F_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \sin\pi x, & 0\le x\le a \\ 1, & x\ge a \end{cases}$ $\qquad (\alpha=0,\ \beta=1/4)$

Найти: 1) *a* и *b*; 2) плотность распределения вероятностей; 3) вероятность того, что при 3-х независимых наблюдениях случайная величина примет значения в промежутке $[\alpha,\beta]$ а) ровно один раз; б) не менее одного раза; 4) определите числовые характеристики. (*Использовать:* $\int x\cdot e^{-x}dx=-e^{-x}(x+1)$, $\int x^2\cdot e^{-x}dx=-e^{-x}(x^2+2x+2)$, $\int x\cdot\cos(x)dx=\cos(x)+x\cdot\sin(x)$, $\int x^2\cdot\cos(x)dx=2x\cos(x)+(x^2-2)\cdot\sin(x)$, *или интегрирование по частям.)*

4. Для непрерывной случайной величины с функцией плотности *f(x)* : определить значение параметра λ, построить функцию распределения, вычислить $M\xi$, $D\xi$, σ

а) $f(x)=\begin{cases} \lambda(x^2+x), \textit{если} & x\in[0,1], \\ 0, \textit{если} & x\notin[0,1] \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} \lambda x^2, \textit{если} & x\in[0,2], \\ 0, \textit{если} & x\notin[0,2] \end{cases}$

5. Для непрерывной случайной величины с функцией распределения F(x) записать функцию плотности, построить графики, вычислить *Mξ, Dξ, Mo, Me:*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \textit{если} & x\le 2, \\ \lambda(x-2)^2 & \textit{если} & 2<x\le 4, \\ 1 & \textit{если} & x>4. \end{cases}$$

6. Для непрерывной случайной величины с функцией распределения F(x) записать функцию плотности, построить графики, вычислить *Mξ, Dξ, Mo, Me:*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \textit{если} & x\le 1, \\ \lambda(x-1)^2 & \textit{если} & 1<x\le 3, \\ 1 & \textit{если} & x>3. \end{cases}$$

Глава 7. Вариационные ряды и их характеристики

Определение. Совокупность n независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется выборкой из распределения случайной величины ξ.

Определение. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - выборка из распределения с теоретической функцией распределения $F(x) = P\{\xi < x\}$, $\mu_n(x)$ - число элементов выборки, строго меньших x. Эмпирической функцией распределения (ЭФР) называется функция

$$\widetilde{F}_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{n}. \tag{7.1}$$

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - выборка из распределения случайной величины ξ, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – реализация этой выборки, т.е. наблюдавшиеся значения.

Определение. Выборочным средним называется величина

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{7.2}$$

Если данные представлены в виде точечного или интервального вариационного ряда, то для вычисления $\bar{x}$ используют формулу:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i, \tag{7.3}$$

где m – количество групп в точечном или интервалов в интервальном вариационных рядах, n_i – частота, т.е. количество элементов выборки, принадлежащих i-той группе или i-тому интервалу, x_i – варианта для точечного ряда и середина i-того интервала для интервального ряда.

Определение. Выборочной дисперсией (смещенной) называется величина

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \tag{7.4}$$

Она характеризует квадрат отклонения в среднем каждой величины выборки от выборочного среднего. Величина $s = \sqrt{s^2}$ называется среднеквадратическим отклонением величин выборки от выборочного среднего.

Определение. Выборочной дисперсией (несмещенной) называется величина

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 . \qquad (7.5)$$

Очевидно, что смещенная и несмещенная выборочные дисперсии связаны формулой

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}s^2 . \qquad (7.6)$$

Если данные представлены в виде точечного или интервального вариационного ряда, то для вычисления s^2 используют формулу:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 n_i , \qquad (7.7)$$

или

$$s^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i\right) - \left(\bar{x}\right)^2 , \qquad (7.8)$$

где m – количество групп в точечном или интервалов в интервальном вариационных рядах, n_i – частота, т.е. количество элементов выборки, принадлежащих i-той группе или i-тому интервалу, x_i – варианта для точечного ряда и середина i-того интервала для интервального ряда.

Интервальное оценивание

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ выборка из распределения случайной величины ξ с теоретической функцией распределения $F(x;\theta)$, где θ - неизвестный параметр.

Определение. Доверительным интервалом надежности γ называется интервал $\left(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2\right)$, который накрывает неизвестное значение параметра θ с вероятностью, не меньшей γ, т.е.

$$P\left\{\theta \in \left(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2\right)\right\} \geq \gamma . \qquad (7.9)$$

Вероятность γ называется также доверительной вероятностью, или надежностью доверительного интервала, ее значения обычно выбирают близкими к единице: $\gamma \approx 0{,}9$; 0,95; 0,99 и т.д.

1. Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормального распределения (при известной дисперсии)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – выборка из распределения $N(a,\sigma)$, где a – неизвестное математическое ожидание, а σ^2 - известная дисперсия.

Доверительный интервал для параметра a имеет вид

$$\bar{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \qquad (7.10)$$

где t – аргумент функции Лапласа $\Phi(x)$, при котором $\Phi(t) = \gamma/2$. Значения t находят с помощью таблицы, приведенной в приложении 1.

2. Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормального распределения (при неизвестной дисперсии)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – выборка из распределения $N(a,\sigma)$, где a – неизвестное математическое ожидание, σ^2 - неизвестная дисперсия.

Доверительный интервал для параметра a имеет вид

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (7.11)$$

Значения t_γ находят с помощью таблицы, приведенной в приложении 5 по заданным n и γ.

3. Доверительный интервал для неизвестного среднего квадратического отклонения σ нормального распределения

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – выборка из распределения $N(a,\sigma)$, где σ^2 - неизвестная дисперсия.

Доверительный интервал для параметра σ имеет вид

$$\tilde{\sigma}(1-q) < \sigma < \tilde{\sigma}(1+q), \text{ при } q < 1,$$

$$0 < \sigma < \tilde{\sigma}(1+q), \text{ при } q \geq 1, \qquad (7.12)$$

где $\tilde{\sigma}$ – несмещенное выборочное среднее квадратическое отклонение (7.5).

Значения q находят с помощью таблицы, приведенной в приложении 6 по заданным n и γ.

7.1 Вариационные ряды и их характеристики. Доверительные интервалы.

1. Дан точечный вариационный ряд. Определить выборочные характеристики, построить полигон частот, ЭФР.

а)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

б)

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

2. Дан интервальный вариационный ряд. Определить выборочные характеристики, построить гистограмму частот, ЭФР.

а)

x_i	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
n_i	2	4	8	4	2

б)

x_i	2-5	5-8	8-11	11-14
n_i	6	10	4	5

в)

x_i	1-5	5-9	9-13	13-17	17-21
n_i	10	20	50	12	8

3. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0.99 неизвестного математического ожидания a нормально распепределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\bar{x}$ и объем выборки n: а) $\sigma = 4$, $\bar{x} = 10.2$, $n = 16$; б) $\sigma = 5$, $\bar{x} = 16.8$, $n = 25$.

4. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0.925 точность оценки математического ожидания по выборочной средней равна 0.2, если известно среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma = 1.5$.

5. По данным 16 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x} = 42.8$ и несмещенное среднее квадратическое отклонение $\tilde{\sigma} = 8$. Оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью 0.999.

6. По данным объема n из генеральной совокупности нормально распределенного признака найдено несмещенное («исправленное») среднее квадратическое отклонение s. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0.999, если: а) $s = 5.1$, $n = 10$; б) $s = 14$, $n = 50$.

7. Среднее значение дальности до ориентира, полученное по четырем независимым измерениям, $\bar{x} = 2250$ м. Средняя квадратическая ошибка прибора $\sigma = 40$ м. Найти с надежностью $\gamma = 0.95$ доверительный интервал для оценки истинного значения измеряемой величины.

8. В качестве оценки расстояния до навигационного знака принимают среднее арифметическое результатов независимых измерений расстояния n дальномерами. Измерения не содержат систематической ошибки, а случайные ошибки распределены нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$м. Сколько надо иметь дальномеров, чтобы абсолютная величина ошибки при определении дальности до навигационного знака с вероятностью 0.9 не превышала 5 м.?

7.2 Задачи для самостоятельной работы

Пример решения и оформления контрольной работы по математической статитике.

Дан интервальный вариационный ряд. Требуется:

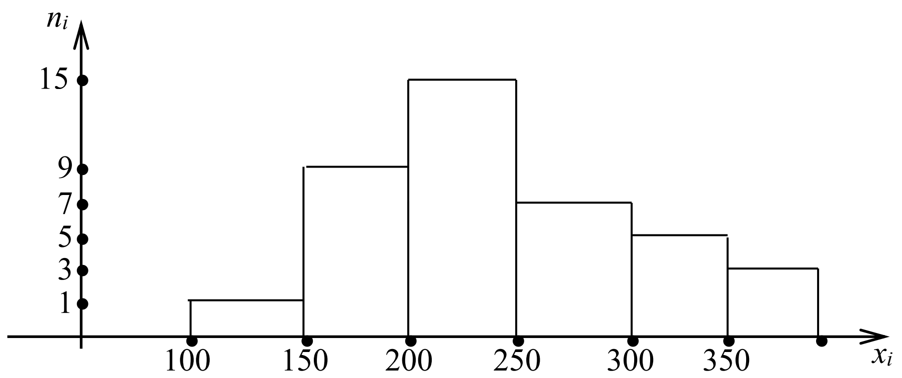
1) Построить гистограмму и полигон частот;
2) Записать эмпирическую функцию распределения и построить её график;
3) Определить числовые характеристики вариационного ряда: $\bar{x}$, S^2, S, $\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\sigma}$;
4) Предполагая нормальным распределение генеральной совокупности, построить доверительные интервалы надежности 0.95 и 0.99 для параметров нормального распределения.

Произведено обследование 40 магазинов города, составлен интервальный вариационный ряд (Δ_i - интервал товарооборота, млн. руб.).

Δ_i	[100,150)	[150,200)	[200,250)	[250,300)	[300,350)	[350,400]
n_i	1	9	15	7	5	3

Решение.

1) Гистограмма состоит из прямоугольников, сторона которых, лежащая на оси абсцисс совпадает с интервалом $[x_i, x_{i+1})$, а сторона, параллельная оси ординат, имеет длину равную частоте n_i.



Гистограмма частот

Полигон частот строится аналогично, следует построить ломаную, соединяющую точки (x_i, n_i), где x_i –середина интервала, а n_i – соответствующая частота. Построить самостоятельно.

2) Воспользуемся формулой 7.1. В качестве вариант выберем середины интервалов и припишем всю частоту этому значению.

Тогда будем иметь:

$$\widetilde{F}_n(x)=\begin{cases}0, & x\le 125;\\ \frac{1}{40}, & 125<x\le 175;\\ \frac{1+9}{40}, & 175<x\le 225;\\ \frac{1+9+15}{40}, & 225<x\le 275;\\ \frac{1+9+15+7}{40}, & 275<x\le 325;\\ \frac{1+9+15+7+5}{40}, & 325<x\le 375;\\ \frac{1+9+15+7+5+3}{40}, & x>375.\end{cases}=\begin{cases}0, & x\le 125;\\ 0.025, & 125<x\le 175;\\ 0.250, & 175<x\le 225;\\ 0.625, & 225<x\le 275;\\ 0.800, & 275<x\le 325;\\ 0.925, & 325<x\le 375;\\ 1, & x>375.\end{cases}$$

Функция $\widetilde{F}_n(x)$ является непрерывной слева, её график ступенчатый, с разрывами в точках x_i.

3) Для расчетов используем формулы 7.3, 7.6–7.8 (*при округлении значений оставляем два знака после запятой или на два разряда больше, чем в исходных данных).*

Выборочное среднее

$$\bar{x}=\frac{1}{40}(125\cdot 1+175\cdot 9+225\cdot 15+275\cdot 7+325\cdot 5+375\cdot 3)=243.75.$$

Выборочная дисперсия (смещенная оценка дисперсии)

$$S^2=\frac{1}{40}(125^2\cdot 1+175^2\cdot 9+225^2\cdot 15+275^2\cdot 7+325^2\cdot 5+375^2\cdot 3)-243.75^2=3835.9375$$

Выборочная дисперсия (**не**смещенная оценка дисперсии)

$$\widetilde{\sigma}^2=\frac{40}{39}\cdot 3835.94=3934.29\,.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение (смещенное)

$$S=61.93\,.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение(**не**смещенное)

$$\widetilde{\sigma}=62.72\,.$$

4) Построим доверительный интервал для параметра a в предположении, что произведена выборка из нормальной совокупности значений (в данном случае $M\xi=a$ будет означать средний товарооборот для магазинов). Так как истинное значение дисперсии оценивалось по выборке, то для построения интервала воспользуемся правилом 2 и формулой 7.11.

Интервал имеет вид $\bar{x} - t_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Имеем $\sqrt{n} = \sqrt{40} \approx 6{,}3$.

Число t_γ найдем по таблице 5.

Тогда при $\gamma = 0.95$ $t_\gamma = 2.083$ имеем:

$$\left[243.75 - \frac{2{,}083 \cdot 62.72}{\sqrt{40}}; 243.75 + \frac{2{,}083 \cdot 62.72}{\sqrt{40}}\right] = [223.09; 264.41],$$

при $\gamma = 0.99$ $t_\gamma = 2.708$:

$$\left[243.75 - \frac{2{,}708 \cdot 62.72}{\sqrt{40}}; 243.75 + \frac{2{,}708 \cdot 62.72}{\sqrt{40}}\right] = [216.89; 270.61]$$

Можно заметить, что с повышением уровня надёжности доверительного интервала его размер увеличивается.

Задание и варианты для самостоятельной работы.

Дан интервальный вариационный ряд. Требуется:

5) Построить гистограмму и полигон частот;
6) Записать эмпирическую функцию распределения и построить её график;
7) Определить числовые характеристики вариационного ряда: $\bar{x}$, S^2, S, $\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\sigma}$;
8) Предполагая нормальным распределение генеральной совокупности, построить доверительные интервалы надежности 0.95 и 0.99 для параметров нормального распределения.

1. Дан интервальный ряд испытания на разрыв 100 образцов дюралюминия (x_i - предел прочности на разрыв, кг/мм^2; n_i - число образцов).

x_i	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50
n_i	7	25	37	23	8

2. Даны результаты исследования грануляции партий порошка (x_i - грануляции, мкм; n_i - число партий).

x_i	0-40	40-80	80-120	120-160	160-200
n_i	3	12	18	13	4

3. Даны результаты исследования 50 образцов на прочность напыленного слоя (x_i - прочность, кг/мм^2; n_i - число образцов).

x_i	2,0-2,2	2,2-2,4	2,4-2,6	2,6-2,8	2,8-3,0
n_i	3	12	20	13	2

4. Даны результаты измерения диаметров валиков (x_i - диаметры валиков, мм; n_i - число валиков).

x_i	9,4-9,6	9,6-9,8	9,8-10,0	10,0-10,2	10,2-10,4
n_i	3	8	17	16	6

5. Имеются данные о среднесуточном пробеге 50 автомобилей ЗИЛ (x_i - пробег, сотни км; n_i - число автомобилей).

x_i	1,2-1,6	1,6-2,0	2,0-2,4	2,4-2,8	2,8-3,2
n_i	5	12	25	6	2

6. Даны результаты измерения твердости (x_i, у.е.) сверл (n_i - число сверл).

x_i	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
n_i	3	6	23	14	4

7. Даны результаты испытаний стойкости 100 фрез (x_i - стойкость в час, кг/мм^2; n_i - число фрез).

x_i	32-36	36-40	40-44	44-48	48-52
n_i	7	22	44	21	6

8. Даны результаты измерения толщины (x_i, мм) 50 смоляных прокладок (n_i - число прокладок).

x_i	0,24-0,28	0,28-0,32	0,32-0,36	0,36-0,40	0,40-0,44
n_i	5	8	22	9	6

9. Даны результаты определения содержания фосфора в 100 чугунных образцах (x_i - содержание в % фосфора; n_i - число образцов).

x_i	0,10-0,2	0,2-0,3	0,3-0,4	0,4-0,5	0,5-0,6
n_i	6	23	38	25	8

10. Имеются статистические данные о трудоемкости операции (x_i, мин) ремонта валика водяного насоса (n_i - число валиков).

x_i	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
n_i	16	48	70	47	19

11. Даны результаты испытания стойкости (x_i, ч) 200 сверл (n_i - число сверл).

x_i	3,0-3,2	3,2-3,4	3,4-3,6	3,6-3,8	3,8-4,0
n_i	17	49	70	46	18

12. Дан интервальный ряд испытания на разрыв 100 образцов дюралюминия (x_i - предел прочности, кг/мм^2; n_i - число образцов).

x_i	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30
n_i	4	28	40	23	5

13. В целях изучения норм расходования сырья при изготовлении продукции проведена выборка, в результате которой получено следующее распределение изделий по массе (n_i - число изделий):

Масса, г	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24	24-25
n_i	1	20	40	25	10	4

14. В целях изучения урожайности подсолнечника проведено выборочное обследование 100 га посевов, в результате которого получены данные (n_i - посевная площадь, га).

Урожайность, ц/га	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21
n_i	10	40	25	20	5

15. Даны результаты исследования грануляции партий порошка (x_i - грануляции, мкм; n_i - число партий).

x_i	[15,25)	[25,35)	[35,45)	[45,55)	[55,65)
n_i	3	12	18	13	4

16. В целях изучения норм расходования сырья при изготовлении продукции проведена выборка, в результате которой получено следующее распределение изделий по массе (x_i - масса изделия, г; n_i - число изделий).

x_i	19-21	21-23	23-25	25-27	27-29	29-31
n_i	2	15	49	23	8	3

17. Имеются данные о величине товарооборота для 50 магазинов (x_i - товарооборот, млн руб.; n_i - число магазинов).

x_i	100-140	140-180	180-220	220-260	260-300
n_i	2	10	25	9	4

18. Имеются следующие данные о величине товарооборота для 50 магазинов города (Δ_i - товарооборот, усл. руб.; n_i - число магазинов):

Δ_i	[0,50)	[50,100)	[100,150)	[150,200)	[200,250)	[250,300)
n_i	15	12	9	7	4	3

19. Даны результаты испытания стойкости 100 фрез (x_i - стойкость, ч; n_i - число фрез).

x_i	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42
n_i	4	25	45	20	6

20. Даны результаты измерений предела прочности сварного шва 100 образцов (x_i - прочность, Н/мм²; n_i - частоты).

x_i	28-30	30-32	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44
n_i	8	15	15	12	15	20	10	5

Ответы

Глава 1.

1.1. **1–** 1) 0.384; 2) 0.992; 3)0.488. **2 –** 0.25; **3** –1/15; **4** –1/18; **5**–19/21; **6**–360/7^4, 1/7^5, 1/7^4; **7**–$C_6^4 C_{43}^2 / C_{49}^6$; **8**–$C_{90}^{10}/C_{100}^{10}$; **9** $-3\sqrt{3}/4\pi$; **10**– $\pi/4$; **11**–1/3; **12**–0.6.

1.2. **1**–0.14; **2**–0.5; 0.8; **3**– $C_M^l C_{N-M}^{k-l} / C_N^k$; **4**–$C_{10}^5 C_{10}^5 / C_{20}^{10}$; **5**–4/689, 8/689; **6**–C_{19}^4 / C_{20}^5; **7**– $(1-(19/20)^5)$; **8** – 0.25; **9** – 0.65; **10** – $2(n-r+1)/(n+2)(n+1)$; **11**–1/22.

Глава 2.

2.1.1 **1**– 1)–E; 2)–K; 3)– G; 4)– E; 5)–G; 6)– H; 7)– E.

3– 1) зависимы; 2) независимы; 3) зависимы; 4) зависимы.

4– 1) независимы; 2) зависимы; 3) зависимы; 4) независимы; 5) зависимы.

2.1.2 **5**–0.49565; **6**–0.0345;

2.1.3 **8**– 60 и 10; **9**– 0.38; **10**–0.7; **11**– 14/47.

2.2 **1**–7/24; **2**–0.09712; **3**–0.452; 0.788; **4**–6/13; **5**– 31/96; **6**–5/144.

Глава 3.

3.1 **1**–0.7, 8/35; **2**–1/15; **3**–16/69; **4**–13/121; **5**–4/29; **6**–10/37; **7**– (N+1)/(2N+2)

3.2 **1**–100/105; **2**–0.22; **3**–8/32, 9/32, 15/32; **4**–1/2; **5**–0,998; **6**–$N^k \Big/ \sum_{i=0}^{N} C_N^i i^k$; **7**–1/22, 6/22, 15/22; **8**– $(1-e^{-\lambda p})$; $p\lambda e^{-\lambda p}$.

Глава 4

4.1 **1**–6/15, 5/15; **2**–0,02065; **3**– 0.93803, 0.99983, 0.16062; **4**– 0.9537 (0.94412); **5**–0.9709; **6**–0.6212; **7**–0.131756, 0.39055; **8**– 0.0484; 0.8274.

4.2 **1**–$1-0.8^{10}-2*0.8^9$, $(1-0.8^{10}-2*0.8^9)/(1-0.8^{10})$; **2**–0.04565, 0,8914; **3**–0.0916; **4**–101. Использовать: $\Phi(4.33)=0.499993\approx 0.5$; **5**– от 4 до 23; **6**– от15 до 33; 7–0.051.

Глава 5

5.1 1–

ξ	0	1	2	3
p	0.125	0.375	0.375	0.125

$M\xi = 1.5$, $D\xi = 0.75$;

2–

ξ	1	2	3
p	1/5	3/5	1/5

$M\xi = 2$, $D\xi = 0.4$, $\sigma = \sqrt{0.4} \approx 0.63$;

3–

ξ	0	1	2	3	4
p	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

4– в) $M\xi = 3a = 5b = c$, $D\xi = a^2 + 2b^2$; **5**–а) $M\xi = -0.1$, $D\xi = 1.09$, $\sigma = \sqrt{1.09} \approx 1.44$, б) $M\xi = 1.2$, $D\xi = 8.76$, $\sigma = \sqrt{8.76} \approx 2.96$;

5, а)

ξ^2	0	1	4
p	0.2	0.7	0.1

5, б)

ξ	1	9	16
p	0.2	0.4	0.4

6–а) $M\xi = 5$, $D\xi = 4$, $\sigma = 2$, б) $M\xi = 0.9$, $D\xi = 0.49$, $\sigma = 0.7$.

5.2 1–

ξ	1	2	3
p	1/15	7/15	7/15

2–$M\xi = 0.8$, $D\xi = 0.48$, $\sigma \approx 0.693$; **3**– $P(\xi = k) = 0.1 * 0.9^{k-1}, \quad k = 1,2,3.....$; **6**–б)

ξ	1	3	4	5
p	0.25	0.15	0.2	0.2

8–

ξ_1	1	2	3	....	n	....
p	$q_1 + p_1 q_2$	$p_1 p_2 (p_1 q_1 + p_1 q_2)$	$p_1^2 p_2^2 (p_1 q_1 + p_1 q_2)$	....	$p_1^{n-1} p_2^{n-1} (p_1 q_1 + p_1 q_2)$	....

ξ_2	0	1	2	....	n	....
p	q_1	$p_1 (q_2 + p_2 q_1)$	$p_1^2 q_2 (q_2 + p_2 q_1)$	....	$p_1^n q_2^{n-1} (q_2 + p_2 q_1)$	....

Глава 6

6.1 1–а) 0.25, б) 0.75;

2–$M\xi = \dfrac{\pi - 2}{2}$, $M\xi^2 = \dfrac{\pi^2}{2} - 2$, $D\xi = \pi - 3$;

3– а) *1)*- a=-1/4, *3)* 27/64, 37/64, *4)*- $M\xi = -\dfrac{1}{3}$, $M\xi^2 = \dfrac{2}{3}$, $D\xi = \dfrac{5}{9}$; б) *1)*- a=1/2, b=$1/\pi$, *3)* 27/64, 37/64; *4)*- не существуют.

4– $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - \cos(x), & 0 < x \le \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$ $M\xi = 1$, $M\xi^2 = \pi - 2$, $D\xi = \pi - 3$;

5– а) $\lambda = \dfrac{1}{6}$; $M\xi = \dfrac{68}{45}$, $M\xi^2 = \dfrac{22}{9}$, $D\xi = \dfrac{14}{15}$; б) $\lambda = \dfrac{3}{20}$; $M\xi = 2.4$, $M\xi^2 = 5.96$, $D\xi = 0.2$.

6.2 **1**– $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \dfrac{x^2-x}{2}, & 0<x\le 2; \\ 1, & x>2. \end{cases}$ $M\xi=\dfrac{19}{12}$, $M\xi^2=\dfrac{31}{12}$, $D\xi=\dfrac{11}{144}$;

2– $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$; **3**– а) *1)*- $a=1$, $b=-1$, *4)*- $M\xi=1$, $M\xi^2=2$, $D\xi=1$; б) *1)*- $a=1/2$, *4)*- $M\xi=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}$, $M\xi^2=\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{\pi^2}$, $D\xi=\dfrac{\pi-3}{\pi^2}$; **4**– а) $\lambda=6/5$; б) $\lambda=3/8$.

***Глава** 7*

7.1 **1**–а) $\bar{x}=4.2$, $S^2=2.76$, $\tilde{\sigma}^2=2.82$; б) $\bar{x}=26.75$, $S^2=40.69$, $\tilde{\sigma}^2=41.099$;

2– а) $\bar{x}=22.5$, $S^2=30.0$, $\tilde{\sigma}^2=31.58$; б) $\bar{x}=8.06$, $S^2=11.37$, $\tilde{\sigma}^2=11.84$; в) $\bar{x}=10.52$, $S^2=16.41$, $\tilde{\sigma}^2=16.58$;

3– а) $7.63<a<12.77$; б) $14.23<a<19.37$; **4**–179; **5**– $34.66<a<50.94$;

6– а) $0\le\sigma<14.28$; б) $7.98<a<20.02$; **7**– $2210.8<a<2289.2$; **8**–11.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агафонова Н.Ю., Израйлевич В.Л., Смирнов А.К., Чернявский И.Я.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике.– Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. –36 с. ил.
2. *Александров Е.Л.* Теория вероятностей и математическая статистика.: Учеб. пособие для студентов мех.-мат. и физ.фак. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. –76 с.ил.
3. *Александров Е.Л.* Сборник задач по математической статистике.: Учеб. пособие для студентов мех.-мат. и физ.фак. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1992.
4. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Задачи и упражнения по теории вероятностей [Текст] : учеб. пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - 5-е изд., испр. . - Москва : Академия, 2003. - 439, [9] с. : рис. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 440 (12 назв.) .
5. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. [Текст] : учебное пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - Москва : Юрайт, 2013. - 403, [13] с. - (Бакалавр. Базовый курс)
6. *Израйлевич В.Л., Смирнов А.К., Черкасов И.Д.,Чернявский И.Я.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. Часть 1.: Изд-во Сарат. ун-та, 1982.
7. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : Учебник / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - М. : Издательство Юрайт, 2016. - 479 с. - (Бакалавр. Прикладной курс). - 40 экз.: 1360.40 р.
8. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. Киев, Издательское объединение «Вища школа», 1979, 408 с.
9. *Ширяев А. Н.* Вероятность [Текст] : учеб. для студентов вузов по физ.-мат. направлениям и специальностям : в 2 кн. / А. Н. Ширяев. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва : Изд-во МЦНМО. - 2004. - 519, [1] с. : ил. - Библиогр. 97.00 р.
10. *Агапов Г.И.* Задачник по теории вероятностей: Учеб. пособие для втузов. / Г. И. Агапов. - 2-е изд., доп. - Москва : Высш. шк., 1994. - 112 с. : табл.

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ Приложение 1

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0,00	0,0000	0,60	0,2257	1,20	0,3849	1,80	0,4641	2,40	0,4918	3,00	0,49865
0,01	0,0040	0,61	0,2291	1,21	0,3869	1,81	0,4649	2,41	0,4920	3,01	0,49869
0,02	0,0080	0,62	0,2324	1,22	0,3888	1,82	0,4656	2,42	0,4922	3,02	0,49874
0,03	0,0120	0,63	0,2357	1,23	0,3907	1,83	0,4664	2,43	0,4925	3,03	0,49878
0,04	0,0160	0,64	0,2389	1,24	0,3925	1,84	0,4671	2,44	0,4927	3,04	0,49882
0,05	0,0199	0,65	0,2422	1,25	0,3944	1,85	0,4678	2,45	0,4929	3,05	0,49886
0,06	0,0239	0,66	0,2454	1,26	0,3962	1,86	0,4686	2,46	0,4931	3,06	0,49889
0,07	0,0279	0,67	0,2486	1,27	0,3980	1,87	0,4693	2,47	0,4932	3,07	0,49893
0,08	0,0319	0,68	0,2517	1,28	0,3997	1,88	0,4699	2,48	0,4934	3,08	0,49896
0,09	0,0359	0,69	0,2549	1,29	0,4015	1,89	0,4706	2,49	0,4936	3,09	0,49900
0,10	0,0398	0,70	0,2580	1,30	0,4032	1,90	0,4713	2,50	0,4938	3,10	0,49903
0,11	0,0438	0,71	0,2611	1,31	0,4049	1,91	0,4719	2,51	0,4940	3,11	0,49906
0,12	0,0478	0,72	0,2642	1,32	0,4066	1,92	0,4726	2,52	0,4941	3,12	0,49910
0,13	0,0517	0,73	0,2673	1,33	0,4082	1,93	0,4732	2,53	0,4943	3,13	0,49913
0,14	0,0557	0,74	0,2704	1,34	0,4099	1,94	0,4738	2,54	0,4945	3,14	0,49916
0,15	0,0596	0,75	0,2734	1,35	0,4115	1,95	0,4744	2,55	0,4946	3,15	0,49918
0,16	0,0636	0,76	0,2764	1,36	0,4131	1,96	0,4750	2,56	0,4948	3,16	0,49921
0,17	0,0675	0,77	0,2794	1,37	0,4147	1,97	0,4756	2,57	0,4949	3,17	0,49924
0,18	0,0714	0,78	0,2823	1,38	0,4162	1,98	0,4761	2,58	0,4951	3,18	0,49926
0,19	0,0753	0,79	0,2852	1,39	0,4177	1,99	0,4767	2,59	0,4952	3,19	0,49929
0,20	0,0793	0,80	0,2881	1,40	0,4192	2,00	0,4772	2,60	0,4953	3,20	0,49931
0,21	0,0832	0,81	0,2910	1,41	0,4207	2,01	0,4778	2,61	0,4955	3,21	0,49934
0,22	0,0871	0,82	0,2939	1,42	0,4222	2,02	0,4783	2,62	0,4956	3,22	0,49936
0,23	0,0910	0,83	0,2967	1,43	0,4236	2,03	0,4788	2,63	0,4957	3,23	0,49938
0,24	0,0948	0,84	0,2995	1,44	0,4251	2,04	0,4793	2,64	0,4959	3,24	0,49940
0,25	0,0987	0,85	0,3023	1,45	0,4265	2,05	0,4798	2,65	0,4960	3,25	0,49942
0,26	0,1026	0,86	0,3051	1,46	0,4279	2,06	0,4803	2,66	0,4961	3,26	0,49944
0,27	0,1064	0,87	0,3078	1,47	0,4292	2,07	0,4808	2,67	0,4962	3,27	0,49946
0,28	0,1103	0,88	0,3106	1,48	0,4306	2,08	0,4812	2,68	0,4963	3,28	0,49948
0,29	0,1141	0,89	0,3133	1,49	0,4319	2,09	0,4817	2,69	0,4964	3,29	0,49950
0,30	0,1179	0,90	0,3159	1,50	0,4332	2,10	0,4821	2,70	0,4965	3,30	0,49952
0,31	0,1217	0,91	0,3186	1,51	0,4345	2,11	0,4826	2,71	0,4966	3,35	0,49960
0,32	0,1255	0,92	0,3212	1,52	0,4357	2,12	0,4830	2,72	0,4967	3,40	0,49966
0,33	0,1293	0,93	0,3238	1,53	0,4370	2,13	0,4834	2,73	0,4968	3,45	0,49972
0,34	0,1331	0,94	0,3264	1,54	0,4382	2,14	0,4838	2,74	0,4969	3,50	0,499767
0,35	0,1368	0,95	0,3289	1,55	0,4394	2,15	0,4842	2,75	0,4970	3,55	0,499807
0,36	0,1406	0,96	0,3315	1,56	0,4406	2,16	0,4846	2,76	0,4971	3,60	0,499841
0,37	0,1443	0,97	0,3340	1,57	0,4418	2,17	0,4850	2,77	0,4972	3,65	0,499869
0,38	0,1480	0,98	0,3365	1,58	0,4429	2,18	0,4854	2,78	0,4973	3,70	0,499892
0,39	0,1517	0,99	0,3389	1,59	0,4441	2,19	0,4857	2,79	0,4974	3,75	0,499912
0,40	0,1554	1,00	0,3413	1,60	0,4452	2,20	0,4861	2,80	0,49744	3,80	0,499928
0,41	0,1591	1,01	0,3438	1,61	0,4463	2,21	0,4864	2,81	0,49752	3,85	0,499941
0,42	0,1628	1,02	0,3461	1,62	0,4474	2,22	0,4868	2,82	0,49760	3,90	0,499952
0,43	0,1664	1,03	0,3485	1,63	0,4484	2,23	0,4871	2,83	0,49767	3,95	0,499961
0,44	0,1700	1,04	0,3508	1,64	0,4495	2,24	0,4875	2,84	0,49774	4,00	0,499968

0,45	0,1736	1,05	0,3531	1,65	0,4505	2,25	0,4878	2,85	0,49781	4,05	0,499974
0,46	0,1772	1,06	0,3554	1,66	0,4515	2,26	0,4881	2,86	0,49788	4,10	0,499979
0,47	0,1808	1,07	0,3577	1,67	0,4525	2,27	0,4884	2,87	0,49795	4,15	0,499983
0,48	0,1844	1,08	0,3599	1,68	0,4535	2,28	0,4887	2,88	0,49801	4,20	0,499987
0,49	0,1879	1,09	0,3621	1,69	0,4545	2,29	0,4890	2,89	0,49807	4,25	0,499989
0,50	0,1915	1,10	0,3643	1,70	0,4554	2,30	0,4893	2,90	0,49813	4,30	0,499991
0,51	0,1950	1,11	0,3665	1,71	0,4564	2,31	0,4896	2,91	0,49819	4,35	0,499993
0,52	0,1985	1,12	0,3686	1,72	0,4573	2,32	0,4898	2,92	0,49825	4,40	0,499995
0,53	0,2019	1,13	0,3708	1,73	0,4582	2,33	0,4901	2,93	0,49831	4,45	0,499996
0,54	0,2054	1,14	0,3729	1,74	0,4591	2,34	0,4904	2,94	0,49836	4,50	0,499997
0,55	0,2088	1,15	0,3749	1,75	0,4599	2,35	0,4906	2,95	0,49841	4,55	0,499997
0,56	0,2123	1,16	0,3770	1,76	0,4608	2,36	0,4909	2,96	0,49846	4,60	0,499998
0,57	0,2157	1,17	0,3790	1,77	0,4616	2,37	0,4911	2,97	0,49851	4,65	0,499998
0,58	0,2190	1,18	0,3810	1,78	0,4625	2,38	0,4913	2,98	0,49856	4,70	0,499999
0,59	0,2224	1,19	0,3830	1,79	0,4633	2,39	0,4916	2,99	0,49861	4,75	0,499999

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ Приложение 2

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Таблица значений $p(k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \lambda>0$ Приложение 3

k	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00000	0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01111
5		0,00000	0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6			0,00000	0,00000	0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7					0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004
8							0,00000	0,00000	0,00000

k	λ								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,36787	0,13533	0,04978	0,01831	0,00673	0,00247	0,00091	0,00033	0,00012
1	0,36787	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14652	0,08422	0,04461	0,02234	0,01073	0,00499
3	0,06131	0,18044	0,22404	0,19536	0,14037	0,08923	0,05212	0,02862	0,01499
4	0,01532	0,09022	0,16803	0,19536	0,17546	0,13385	0,09122	0,05725	0,03373
5	0,00306	0,03608	0,10081	0,15629	0,17546	0,16062	0,12771	0,09160	0,06072
6	0,00051	0,01203	0,05040	0,10419	0,14622	0,16062	0,14900	0,12213	0,09109
7	0,00007	0,00343	0,02160	0,05954	0,10444	0,13767	0,14900	0,13958	0,11711
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176
9	0,00000	0,000191	0,002701	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756
10		0,000038	0,000810	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11		0,000007	0,000221	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12		0,000001	0,000055	0,000642	0,003434	0,011264	0,026350	0,048127	0,072765
13			0,000013	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14			0,000003	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15			0,000001	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16				0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17				0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18					0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19					0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20						0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21						0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22							0,000003	0,000022	0,000108
23							0,000001	0,000008	0,000042

Таблица значений $\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ Приложение 4

n	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,99532	0,98248	0,96306	0,93845	0,90980	0,87810	0,84420	0,80879	0,77248
2	0,99985	0,99885	0,99640	0,99207	0,98561	0,97688	0,96586	0,95258	0,93714
3	1,00000	0,99994	0,99973	0,99922	0,99825	0,99664	0,99425	0,99092	0,98654
4		1,00000	0,99998	0,99994	0,99983	0,99961	0,99921	0,99859	0,99766
5			1,00000	1,00000	0,99999	0,99996	0,99991	0,99982	0,99966
6					1,00000	1,00000	0,99999	0,99998	0,99996
7							1,00000	1,00000	1,00000
8									1,00000

n	λ										
	1,0	**2,0**	**3,0**	**4,0**	**5,0**	**6,0**	**7,0**	**8,0**	**9,0**	**10,0**	**11,0**
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012	0,00005	0,00002
1	0,73576	0,40601	0,19915	0,09158	0,04043	0,01735	0,00730	0,00302	0,00123	0,00050	0,00020
2	0,91970	0,67668	0,42319	0,23810	0,12465	0,06197	0,02964	0,01375	0,00623	0,00277	0,00121
3	0,98101	0,85712	0,64723	0,43347	0,26503	0,15120	0,08177	0,04238	0,02123	0,01034	0,00492
4	0,99634	0,94735	0,81526	0,62884	0,44049	0,28506	0,17299	0,09963	0,05496	0,02925	0,01510
5	0,99941	0,98344	0,91608	0,78513	0,61596	0,44568	0,30071	0,19124	0,11569	0,06709	0,03752
6	0,99992	0,99547	0,96649	0,88933	0,76218	0,60630	0,44971	0,31337	0,20678	0,13014	0,07861
7	0,99999	0,99890	0,98810	0,94887	0,86663	0,74398	0,59871	0,45296	0,32390	0,22022	0,14319
8	1,00000	0,99976	0,99620	0,97864	0,93191	0,84724	0,72909	0,59255	0,45565	0,33282	0,23199
9	1,00000	0,99995	0,99890	0,99187	0,96817	0,91608	0,83050	0,71662	0,58741	0,45793	0,34051
10		0,99999	0,99971	0,99716	0,98630	0,95738	0,90148	0,81589	0,70599	0,58304	0,45989
11		1,00000	0,99993	0,99908	0,99455	0,97991	0,94665	0,88808	0,80301	0,69678	0,57927
12		1,00000	0,99998	0,99973	0,99798	0,99117	0,97300	0,93620	0,87577	0,79156	0,68870
13			1,00000	0,99992	0,99930	0,99637	0,98719	0,96582	0,92615	0,86446	0,78129
14			1,00000	0,99998	0,99977	0,99860	0,99428	0,98274	0,95853	0,91654	0,85404
15			1,00000	1,00000	0,99993	0,99949	0,99759	0,99177	0,97796	0,95126	0,90740
16				1,00000	0,99998	0,99983	0,99904	0,99628	0,98889	0,97296	0,94408
17				1,00000	0,99999	0,99994	0,99964	0,99841	0,99468	0,98572	0,96781
18					1,00000	0,99998	0,99987	0,99935	0,99757	0,99281	0,98231
19					1,00000	0,99999	0,99996	0,99975	0,99894	0,99655	0,99071
20						1,00000	0,99999	0,99991	0,99956	0,99841	0,99533
21						1,00000	1,00000	0,99997	0,99983	0,99930	0,99775
22							1,00000	0,99999	0,99993	0,99970	0,99896
23							1,00000	1,00000	0,99998	0,99988	0,99954
24								1,00000	0,99999	0,99995	0,99980
25								1,00000	1,00000	0,99998	0,99992
26									1,00000	0,99999	0,99997
27									1,00000	1,00000	0,99999
28										1,00000	1,00000

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$ Приложение 5

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$ Приложение 6

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,38	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Критические точки распределения χ^2 Приложение 7

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,3	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Критические точки распределения Стьюдента Приложение 8

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,314	12,71	31,82	63,66	318,29	636,6
2	2,920	4,30	6,96	9,92	22,33	31,6
3	2,353	3,18	4,54	5,84	10,21	12,9
4	2,132	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,015	2,57	3,36	4,03	5,89	6,87
6	1,943	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,895	2,36	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,860	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,833	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,812	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,796	2,20	2,72	3,11	4,02	4,44
12	1,782	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,771	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,761	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,753	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,746	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,740	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,734	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,729	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,725	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,721	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,717	2,07	2,51	2,82	3,50	3,79
23	1,714	2,07	2,50	2,81	3,48	3,77
24	1,711	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,708	2,06	2,49	2,79	3,45	3,73
26	1,706	2,06	2,48	2,78	3,43	3,71
27	1,703	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,701	2,05	2,47	2,76	3,41	3,67
29	1,699	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,697	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,684	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,671	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,658	1,98	2,36	2,62	3,16	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Приложение 9

Критерий Колмогорова, значения функции λ_p:

$$p = P\{D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| > \lambda_p\}$$

n	p			n	p		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	0,950	0,975	0,995	19	0,271	0,301	0,361
2	0,776	0,842	0,929	20	0,265	0,294	0,352
3	0,636	0,708	0,829	25	0,238	0,264	0,317
4	0,565	0,624	0,734	30	0,218	0,242	0,290
5	0,509	0,563	0,669	35	0,202	0,224	0,269
6	0,468	0,519	0,617	40	0,189	0,210	0,252
7	0,436	0,483	0,576	45	0,179	0,198	0,238
8	0,410	0,454	0,542	50	0,170	0,188	0,226
9	0,387	0,430	0,513	55	0,162	0,180	0,216
10	0,369	0,409	0,489	60	0,155	0,172	0,207
11	0,352	0,391	0,468	65	0,149	0,166	0,199
12	0,338	0,375	0,449	70	0,144	0,160	0,192
13	0,325	0,361	0,432	75	0,139	0,154	0,185
14	0,314	0,349	0,418	80	0,135	0,150	0,179
15	0,304	0,338	0,404	85	0,131	0,145	0,174
16	0,295	0,327	0,392	90	0,127	0,141	0,169
17	0,286	0,318	0,381	95	0,124	0,137	0,165
18	0,279	0,309	0,371	100	0,121	0,134	0,161