Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы
Саратов, 27 января – 3 февраля 2016 года

ООО Издательство «Научная книга»
2016

УДК 517; 518; 519; 533
ББК 22.161.5
С56

Современные проблемы теории функций и их приложения:
С56 Материалы 18-й междунар. Сарат. зимней школы. — Саратов: ООО Издательство «Научная книга», 2016. – 360 с. : ил.
ISBN 978-5-9758-1623-8

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу 18-й международной Саратовской зимней школы. Школа проводилась на базе Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского совместно с Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова и Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН. Тематика посвящена вопросам теории функций, таким как теория приближений, ряды Фурье и др., а также их приложениям.

Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект № 16-31-10001-мол_г)

УДК 517; 518; 519; 533
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISBN 978-5-9758-1623-8

UDC 517.5

ON CONSTRUCTION OF RIESZ BASES USING WALSH TYPE AFFINE SYSTEMS IN THE SPACE $L^2(0,1)$[1]

K. H. H. Al-Jourany (Diyala, Iraq; Saratov, Russia)
hadi_hameed@ymail.com
P. A. Terekhin (Saratov, Russia)
terekhinpa@mail.ru

Suppose that the periodic function $f \in L^2(0,1)$ satysfied the condition $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. For any $n \in \mathbb{N}$ using the binary representation $n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu + 2^k$ we set

$$f_n(t) = W^\alpha f(t) = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}} f(t). \tag{1}$$

Besides, we set $f_0(t) \equiv 1$. The system $\{f_n\}_{n\ge0} = \{W^\alpha f\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ ($\mathbb{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty}\{0,1\}^k$) is the affine system of Walsh type, where $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ and

$$W_0 f(t) = f(2t), \qquad W_1 f(t) = r(t) f(2t).$$

It is easy to show that the Walsh – Paley system $\{w_n\}_{n\ge0}$ is affine system.

We consider the problem: under which conditions on the function f an affine system of Walsh type $\{f_n\}_{n\ge0}$ is a Riesz basis in the space $L^2(0,1)$, i.e. $f_n = Ae_n$, $n \ge 0$, where A is an invertible and a bounded (together with A^{-1}) operator in $L^2(0,1)$ and $\{e_n\}_{n\ge0}$ is an orthonormal basis.

In our work we indicate a method for constructing Riesz bases. This method is shown as follow: suppose that H^∞ is the Banach algebra of analytic functions on the open unit disk, $G(H^\infty)$ is the group of invertible elements of the algebra H^∞. Note that for u to be belong to $G(H^\infty)$, it is necessary

[1]The first author was supported by the Republic of Iraq Ministry of Higher Education and Scientific Research. The second author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant no. 13-01-00102) and the Russian Ministry of Education and Science (Project no. 1.1520.2014K).

and sufficient that the function $u(z)$ be analytic on the disk ($|z| < 1$) and that the following inequalities be valid:

$$0 < \inf |u(z)|, \quad \sup |u(z)| < \infty.$$

Theorem 1. *Let $\{w_n\}_{n\geq 0}$ be the Walsh system, $\{r_k\}_{k\geq 0}$ be the Rademacher system and*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r_k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

If the analytic function

$$\hat{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad |z| < 1,$$

belongs to $G(H^\infty)$, then the affine system of Walsh type $\{f_n\}_{n\geq 0}$ is Riesz bases in $L^2(0,1)$.

UDC 517.518.86

A CLASS OF ANALYTICAL UNIVALENT FUNCTIONS DEFINED BY AN INTEGRAL OPERATOR[1]

R. H. B. Almzaiel (Yekaterinburg, Russia)
rafidh_buti@yahoo.com

Let RV be the class of analytical functions that are univalent in the unit circle $U = \{z \in C\colon |z| < 1\}$ and such that their power series expansions have the form

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n. \tag{1}$$

Denote by RVT the subclass of functions $f \in RV$ with nonnegative coefficients in expansion (1):

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \geq 0, \quad n \geq 2. \tag{2}$$

For $\alpha > -1$, on the set of functions $f \in RV$, define the interal operator

$$F^\alpha(z) = (F^\alpha f)(z) = \frac{\alpha+1}{z^\alpha} \int_0^z \delta^{\alpha-1} f(\delta)\, d\delta, \quad z \in U.$$

[1]This work was supported by the Competitiveness Enhancement Program of the Ural Federal University (Enactment of the Government of the Russian Federation of March 16, 2013 no. 211, agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013).

It is not hard to verify the following formula:

$$(F^\alpha f)(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+n}\right) a_n z^n, \quad z \in U.$$

For

$$\alpha > -1, \quad \lambda \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \theta \geq 0, \tag{3}$$

denote by $RVT(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ the set of functions $f \in RVT$ satisfying the condition

$$\left| \frac{\beta \left[z^2(F^\alpha(z))'' - \theta z(F^\alpha(z))' - z\right]}{1 + \lambda \left[z^2(F^\alpha(z))'' - \theta z(F^\alpha(z))' - z\right]} \right| < 1, \quad z \in U.$$

Some other similar classes of functions from RVT were studied by Abudul Hussein and Buti [1,2], Atshan and Buti [3,4], Goel and Sahi [5], Slivarman [6], Pashkouleva and Vasilev [7], Kulkarni, Aouf, and Joshi [8], Juneja and Mogra [9].

The main results of this talk are contained in the following statements, where we suppose that conditions (3) hold.

Theorem 1. *A function $f \in RVT$ belongs to the class $RVT(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ if and only if*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+n}\right) n(n-1-\theta)(\beta+\lambda) a_n \leq 1.$$

As a consequence of this theorem, we can conclude that coefficients of expansion (2) of a function $f \in RVT(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ satisfy the following estimates:

$$a_n \leq \frac{1}{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+n}\right)} n(n-1-\theta)(\beta+\lambda), \quad n \geq 2.$$

Theorem 2. *For a function $f \in RVT(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$, the following estimates are valid:*

$$r - \frac{1}{2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)(1-\theta)(\beta+\lambda)} r^2 \leq |f(z)| \leq$$

$$\leq r + \frac{1}{2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)(1-\theta)(\beta+\lambda)} r^2, \quad 0 < |z| = r < 1, \tag{4}$$

For the function

$$f(z) = z - \frac{1}{2\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)(1-\theta)(\beta+\lambda)} z^2,$$

both inequalities in (4) *turn into equalities.*

Theorem 3. *Let* $f_1(z) = z$ *and*

$$f_n(z) = z - \frac{1}{\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha+n}\right) n(n-1-\theta)(\beta+\lambda)} z^n, \quad n \geq 2.$$

A function f *belongs to the class* $RVT(\alpha, \beta, \lambda, \theta)$ *if and only if this function can be represented in the form*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n f_n(z), \quad |z| < 1,$$

where $\sigma_n \geq 0,\ n \geq 1$; *moreover,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n = 1$.

REFERENCES

1. *Hussein H. J. A., Buti R. H.* Some geometric properties of a class of univalent functions with negative coefficients defined by Hadamard product with fractional calculus I // Int. Math. Forum. 2011. Vol. 6(64). P. 3179–3188.

2. *Hussein H. J. A., Buti R. H.* A new subclass of starlike univalent functions with positive coefficients defined by integral operator I // Adv. App. Math. Sci. 2011. Vol. 10(3). P. 259–266.

3. *Atshan W. G., Buti R. H.* Some properties of a new subclass of meromorphic univalent functions with positive coefficients defined by Ruscheweyh derivative I // J. Al-Qadisiyah Comp. Sci. Math. 2010. Vol. 1(2). P 32–40.

4. *Atshan W. G., Buti R. H.* Fractional calculus of a class of univalent functions with negative coefficients defined by Hadamard product with Rafid-operator // Eur. J. Pure Appl. Math. 2011. Vol. 4(2). P. 162–173.

5. *Goel R. M., Sohi N. S.* Multivalent functions with negative coefficients // Indian J. Pure Appl. Math. 1981. Vol. 12(7). P. 844–853.

6. *Silverman H.* Univalent functions with negative coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 51. P. 109–116.

7. *Pashkouleva D. Z., Vasilev K. V.* On a class of multivalent functions with negative coefficients // Plovdiv University “Paisii Hilend Arski” Bulgaria Scientific Works. 2004. Vol. 34(3). P. 61–67.

8. *Kulkarni S. R., Aouf M. K., Joshi S. B.* On a subfamily of p-valent functions with negative coefficients // Mat. Vesnik. 1994. V. 46 (3–4). P. 71–75.

9. *Juneja O. P., Mogra M. L.* Radii of convexity for certain classes of univalent analytic functions // Pacific J. Math. 1978. Vol. 78(2). P. 359–368.

UDC 517.984

ON RECOVERING STURM – LIOUVILLE OPERATORS WITH FROZEN ARGUMENT [1]

S. A. Buterin, S. V. Vasiliev (Saratov, RF)

buterinsa@info.sgu.ru, altrair@mail.ru

1. Introduction. Inverse problems of spectral analysis consist in recovering operators from given their spectral characteristics. The greatest success in the inverse problem theory has been achieved for the Sturm – Liouville operator and afterwards for higher-order differential operators (see [1, 2] and references therein). Inverse problems for differential operators with deviating argument and other classes of non-local operators because of their difficulty were studied insufficiently. Some aspects of inverse spectral theory for differential operators with fixed argument were investigated in [3].

Fix $k \in \mathbb{N}$ and consider the boundary value problem $L = L(q(x))$:

$$\ell y := -y'' + q(x)y\Big(\frac{\pi}{k}\Big) = \lambda y, \quad 0 < x < \pi. \tag{1.1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0. \tag{1.2}$$

Here λ is the spectral parameter, $q(x)$ is a complex-valued function and $q(x) \in L_2(0,\pi)$. We refer to ℓ as to the Sturm-Liouville operator with frozen (fixed) argument. Let $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$ be the spectrum of L. Consider the following inverse problem.

Inverse Problem 1. Given $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$, find $q(x)$.

We obtain necessary and sufficient conditions for solvability of Inverse Problem 1 and prove uniqueness of its solution in the class of symmetric potentials. A constructive procedure for solving the inverse problem is provided.

2. Characteristic function. Properties of the spectrum. Let $C(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$ be solutions of equation (1.1) under the initial conditions

$$C\Big(\frac{\pi}{k},\lambda\Big) = S'\Big(\frac{\pi}{k},\lambda\Big) = 1; \quad S\Big(\frac{\pi}{k},\lambda\Big) = C'\Big(\frac{\pi}{k},\lambda\Big) = 0.$$

Eigenvalues of L coincide with the zeros of its characteristic function

$$\Delta(\lambda) := S(\pi,\lambda)C(0,\lambda) - S(0,\lambda)C(\pi,\lambda).$$

[1] This research was supported in part by RFBR (Grants no. 15-01-04864, no. 16-01-00015) and by the Ministry of Education and Science of RF (Grant no. 1.1436.2014K).

Lemma 1. *Characteristic function of the boundary problem L has the form*

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sin \rho\pi}{\rho} + \int\limits_0^\pi W(t) \frac{\cos \rho t}{\rho^2}\, dt, \quad W(t) \in L_2(0,\pi). \tag{2.1}$$

Moreover,

$$W(t) = \frac{1}{2} \begin{cases} q\Big(\pi\dfrac{k-1}{k} + t\Big) + q\Big(\pi\dfrac{k-1}{k} - t\Big), & x \in \Big(0, \dfrac{\pi}{k}\Big), \\ q\Big(\pi\dfrac{k-1}{k} - t\Big) - q\Big(\pi\dfrac{k+1}{k} - t\Big), & x \in \Big(\dfrac{\pi}{k}, \dfrac{\pi(k-1)}{k}\Big), \\ -q\Big(\pi\dfrac{k+1}{k} - t\Big) - q\Big(t - \pi\dfrac{k-1}{k}\Big), & x \in \Big(\dfrac{\pi(k-1)}{k}, \pi\Big). \end{cases}$$

Using the properties of $W(t)$, we arrive at the following assertion.

Lemma 2. *The function $\Delta(\lambda)$ has the form*

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sin \rho\pi}{\rho} + \sin\frac{\pi\rho}{k} \int\limits_0^{\pi\frac{k-1}{k}} V(t) \frac{\sin \rho t}{\rho^2}\, dt, \quad V(t) \in L_2\Big(0, \pi\frac{k-1}{k}\Big). \tag{2.2}$$

Theorem 1. *The boundary value problem L has a countable set of eigenvalues $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ of the form*

$$\lambda_n = \Big(n + \frac{\kappa_n}{n}\Big)^2, \quad \{\kappa_n\} \in l_2. \tag{2.3}$$

Moreover, a k-th part of eigenvalues degenerate, in the following sense:

$$\lambda_{kn} = (kn)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Lemma 3. *The specification of the spectrum $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ uniquely determines the characteristic function by the formula*

$$\Delta(\lambda) = \pi \prod_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}. \tag{2.5}$$

Lemma 4. *Let arbitrary complex numbers λ_n, $n \geq 1$, of the form* (2.3)*, satisfying* (2.4)*, be given. Then the function $\Delta(\lambda)$ determined by* (2.5) *has the form* (2.2).

3. Solution of the inverse problem.

The following theorem gives necessary and sufficient conditions for solvability of Inverse Problem1.

Theorem 2. *For arbitrary sequence of complex numbers* $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ *to be the spectrum for a certain boundary value problem* $L = L(q(x))$ *it is necessary and sufficient to satisfy* (2.3), (2.4).

In the class of potentials that are symmetric with respect to the point $x = \pi/k$ the following uniqueness theorem is valid.

Theorem 3. *Let* $q(x) = q(2\pi/k - x),\ x \in (0, \pi/k)$, *then the specification of spectrum uniquely determines the potential* $q(x)$.

The solution of Inverse Problem 1 in the class of symmetric potentials can be found by the following algorithm.

Algorithm 1. Let the spectrum $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ be given.

1. Construct $\Delta(\lambda)$ by formula (2.5);
2. Find $W(x)$, $x \in (0, \pi)$ from (2.1) inverting the Fourier transform;
3. Construct $q(x),\ x \in (0, 2\pi/k)$ using

$$q(x) = \begin{cases} -W\Big(\pi\dfrac{k-1}{k} + x\Big), & x \in \Big(0, \dfrac{\pi}{k}\Big), \\ -W\Big(\pi\dfrac{k+1}{k} - x\Big), & x \in \Big(\dfrac{\pi}{k}, 2\dfrac{\pi}{k}\Big); \end{cases}$$

For $\nu = \overline{2, k-2}$ repeat the following step:

4. If $q(x)$ on $(0, \nu\pi/k)$ is calculated, then find $q(x)$ on $\left(\frac{\nu\pi}{k}, \frac{(\nu+2)\pi}{k}\right)$ by the formula

$$q(x) = q\Big(x - 2\frac{\pi}{k}\Big) - 2W\Big(\pi\frac{k+1}{k} - x\Big). \tag{3.1}$$

REFERENCES

1. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse Sturm – Liouville Problems and Their Applications. N. Y. : NOVA Science Publ., 2001.

2. *Yurko V. A.* Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems. Moscow : Fizmatlit, 2007.

3. *Albeverio S., Hryniv R. O., Nizhnik L. P.* Inverse spectral problems for non-local Sturm – Liouville operators // Inverse Problems. 2007. Vol. 23, no. 2. P. 523–535.

UDC 517.98

SUBINVERTIBILITY OF COMPACT-VALUED SUBLINEAR OPERATORS[1]

I. V. Orlov, S. I. Smirnova (Simferopol, Russia)
igor_v_orlov@mail.ru

In the problems of modern nonsmooth analysis and nonsmooth optimization, the multivalued sublinear operators plays, as is known, ever more important role (see, e.g., [1–5]). In particular, the concepts of the subdifferential and the subsmoothness, which were researched in the series of our works [6–8], are jointly connected to multivalued sublinear operators, that take convex compact values.

The present work represents an outline of such theory. We describe the compact-valued sublinear operators by means of the packets of single-valued so called basic selectors. This makes it possible to introduce a concept of the multivalued invertibility through the concept of the corresponding selectors. The construction and the properties of the invertible multioperators are described explicitly. Special attention is given to the question on extremal points of selector representation and corresponding application of Krein – Milman theorem.

1. Preliminaries. Sublinear K-operators and their simplest properties

Definition 1. Let F be a real normed space. Denote by F_K the convex cone consisting of all non-empty convex compacts from F, equipped with element-wise addition, non-negative scalar multiplication and the cone-norm:

$$\|C\| = \sup_{y\in C} \|y\| \quad (C \subset F).$$

Definition 2. Let E and F be the real normed spaces, $A : E \to F_K$. Say that A is a *sublinear K-operator* if the following properties

(i) $A(h + k) \subset Ah + Ak$ (subadditivity);

(ii) $A(\lambda h) = \lambda \cdot Ah$ $(\lambda \geq 0)$ (positive homogeneity);

are satisfied. A cone-norm for the K-operator is introduced in the standard way:

$$\|A\| = \sup_{\|h\|\leq 1} \|Ah\|.$$

Say that the K–operator A is *bounded* if $\|A\| < \infty$. The normed cone of all bounded K-operators $A : E \to E_K$ denote by $L_K(E; F)$.

[1]Результаты Орлова И. В. получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

For our purposes it is more appropriate to use *totally homogeneous* K-operators ($A(\lambda h) = \lambda \cdot Ah$ ($\forall\, \lambda \in \mathbf{R}$)).

2. Constructing of the packet of basic selectors for a given K-operator

In what follows, $H = \{h_i\}_{i \in I}$ is some fixed normed Hamel basis in some real Banach space E.

Definition 3. Let $A \in L_K(E; F)$. Choose an arbitrary element $a_i \in Ah_i$ for each $i \in I$ and set

$$A^s h_i = a_i \,(\forall\, i \in I), \quad A^s h = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{i_k} \quad \left(h = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_{i_k} \in E \right).$$

Let us call the set $A_K = \{A^s\}$ the *packet of basic selectors* (or *s-representation*) of the sublinear K-operator A.

Note that s-representation depends on the choice of the Hamel basis H in E. First, explain that all basic selectors are linear continuous operators.

Theorem 1. *Let E and F be the real Banach spaces, H be some Hamel basis in E and $A \in L_K(E; F)$. Then for every selector $A^s \in A_K$ the following properties:*

$$A^s \in L(E; F); \quad \|A\| \leq \sup_{A^s \in A_K} \|A^s\| \leq C \cdot \|A\|; \tag{1}$$

are valid. Here the constant $C = C(H)$ from the right in (1) *depends only on the choice of some Hamel basis H in E.*

Remark. It is possible to identify the packet of basic selectors $A_K = \{A^s\}$ and the K-operator $A_K h = \{A^s h |\, A^s \in A_K\}$. Then the estimate (1) can be rewritten in the form of norm equivalence for the K-operators A and A_K:

$$\|A\| \leq \|A_K\| \leq C_H \cdot \|A\| \quad (\forall\, A \in L_K(E; F)), \tag{2}$$

where the constant C_H depends only on the choice of Hamel basis H. In addition, $Ah \subset A_K h$ ($\forall\, h \in E$) and the correspondence $A \mapsto A_K$ is sublinear. Note that, under such representation, $A_K \in L_K(E; F)$.

Theorem 2. *For every K-operator $A \in L_K(E; F)$ its s-representation A_K is a sublinear bounded K-operator, as well.*

Theorem 3. *For every K-operator $A_K \in L_K(E; F)$ its packet of basic selectors A_K is a convex compact in $L(E; F)$.*

Finally, if the Banach space E possesses a topological basis then, it is possible to describe the K-operator A_K by means of its values on the basis in E.

Corollary. *Let a real Banach space have a topological basis* $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A \in L_K(E;F)$. *Then, under a suitable choice of Hamel basis in* E, *the following equality holds:*

$$(h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n h_n \in E) \Rightarrow \left((A_K h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot A h_n \;\middle|\; \mathrm{dist}_H \right).$$

Here we denote by $dist_H$ *the Hausdorff metric in the set of all compacts from* E.

3. K-invertibility of K-operators

Definition 4. Say that the K-operator A is K*-invertible* if $A_K \subset \subset \mathrm{Isom}(E;F)$. In this case, introduce K*-inverse* K-operator A_K^{-1} as follows:

$$A_K^{-1} = \overline{\mathrm{co}} \left\{ (A^s)^{-1} |\, A^s \in A_K \right\} \quad \left(A_K^{-1} k = \left\{ B^{\sigma} k |\, B^{\sigma} \in A_K^{-1} \right\} \right).$$

The set of the all K-invertible K-operators $A : E \to F_K$ denote by $\mathrm{Isom}_K(E;F)$.

Consider some properties of the K-invertible K-operators.

Theorem 4. *If the K-operator A is K-invertible then* A_K^{-1} *forms a convex compact in* $L(E;F)$.

Theorem 5. *If the K-operator A is K-invertible then*

$$I_E h \in [A_K^{-1} \cdot A_K] h \ (h \in E); \quad I_F k \in [A_K \cdot A_K^{-1}] k \ (k \in F). \tag{3}$$

Next, let's explain the structure of the operator that is K-inverse to the K-composition (see [8]).

Theorem 6. *If* $A \in Isom_K(E;F)$, $B \in Isom_K(F;G)$, *then*

$$[B \cdot A]_K^{-1}(l) \subset [B_K \cdot A_K]_K^{-1}(l) \subset [A_K^{-1} \cdot B_K^{-1}](l) \quad (\forall\, l \in G).$$

At last, let's explain the question on the repeated K-invertibility.

Theorem 7. *If* $A \in Isom_K(E;F)$ *then* $A_K^{-1} \in Isom_K(F;E)$, *in addition*

$$A_K h \subset (A_K^{-1})_K^{-1} \cdot h \quad (\forall\, h \in E). \tag{3}$$

Compactness and convexity of the packets A_K and A_K^{-1} lead to the actual problem of describing the extremal points of these sets.

In what follows, we denote by $\mathrm{Extr}(C)$ the set of all extremal points of C; here C is a convex compact set either from F, or from $L(E;F)$, E and F are real Banach spaces, $H = \{h_i\}_{i \in I}$ is some Hamel basis in E. First, let's obtain a description of $\mathrm{Extr}(A_K)$.

Theorem 8. *Let $A \in L_K(E;F)$, $A_K = \{A^s\}$ be its s-representation. Then*

$$(A^s \in \mathrm{Extr}(A_K)) \Leftrightarrow (\forall\, h_i \in H : A^s h_i \in \mathrm{Extr}(Ah_i)). \tag{4}$$

Now, let's pass to the case of the K-invertible K-operator $A \in \in \mathrm{Isom}_K(E;F)$. Thus, $A_K \in \mathrm{Isom}_K(E;F)$, $A_K^{-1} \in \mathrm{Isom}_K(F;E)$.

Theorem 9. *If $A \in Isom(E;F)$ then the following inclusion*

$$(Extr\, A_K)^{-1} \subset Extr(A_K^{-1}). \tag{5}$$

takes place.

Corollary. *Under the conditions of Theorem 8 the following inclusions*

$$\overline{co}\,(Extr\, A_K)^{-1} \subset A_K^{-1}; \qquad A_K \subset \overline{co}\,(Extr\, A_K^{-1})^{-1};$$

take place.

Now let's consider a question on sufficient condition of K-invertibility, namely, on K-analog of the known von Neumann theorem.

Theorem 10. *Let $A \in L_K(E)$. If $A = I - B$, where $\|B_K\| < 1$, then A is K-invertible. Moreover, the following estimate*

$$A_K^{-1} h \subset (I + \sum_{n=1}^{\infty} B_K^n) h \quad (\forall\, h \in E). \tag{6}$$

takes place. Here in (6) the power of the K-operator is meant with respect to the K-product (see [8]), and the convergence of the power series in (6) is meant with respect to the cone-norm in $L_K(E)$.

By applying the Krein – Milman theorem, now it is easy to obtain

Theorem 11. *Let, under the conditions of Theorem 10, the inequality*

$$\|A_e - I\| \leq 1 - \varepsilon$$

holds for all extremal points $A_e \in Extr\, A_K$. Then A is K-invertible.

REFERENCES

1. *Rubinov A. M.* Sublinear operators and their applications // Russ. Math. Surv. 1977. Vol. 32, № 4. P. 115–175.

2. *Levashov V. A.* Operator analogs of the Krein-Milman theorem // Funct. Anal. Appl. 1980. Vol. 14, № 2. P. 130–131.

3. *Borwein J. M., Penot J. P., Thera M.* Conjugate convex operators // J. Math. Anal. Appl. 1984. Vol. 102, № 2. P. 399.

4. *Protasov V. Yu.* On linear selections on convex set-valued maps // Funct. Anal. Appl. 2011. Vol. 45, № 1. P. 46–55.

5. *Florez-Bazán F., Hermandes E.* A unified vector optimization problem: complete scalarizations and applications // Optimization. 2011. Vol. 60, № 12. P. 1399.

6. *Orlov I. V., Stonyakin F. S.* Compact subdifferentials: the formula of finite increments and related topics // J. Math. Sc. 2010. Vol. 170, № 2. P. 251–269.

7. *Orlov I. V., Stonyakin F. S.* The limiting form of Radon-Nikodim property is true for all Fréchet spaces // J. Math. Sc. 2012. Vol. 180, № 6. P. 731–747.

8. *Orlov I. V., Khalilova Z. I.* Compact subdifferentials in Banach cones // J. Math. Sc. 2014. Vol. 198, № 4. P. 438–456.

UDC 517.5

GEOMETRIC PROPERTIES OF WRIGHT FUNCTION

Jugal K. Prajapat (Rajasthan, INDIA)
jkprajapat@curaj.ac.in

The Wright function is define by

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\,\Gamma(\lambda\, n + \mu)}, \quad \lambda > -1,\ \mu \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

This function was studied in connection with the partitions of the natural numbers [1]. For $\lambda > -1$, the Wright function is an entire function of z and has been used widely in the asymptotic theory of partitions, Mikusinski operational calculus, integral transforms and in fractional differential equations [2]. For $\lambda = 1$, $\mu = \nu + 1\,(\nu > -1)$, the function $W_{\lambda,\mu}$ can be represented in terms of the Bessel functions. Also, Wright function generalizes various functions like Array function, Whittakar function, (Wright-type) entire auxiliary functions etc.

Let $\mathcal{A}$ denote the class of all analytic functions in the open unit disk $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ having the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, z^n, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2}$$

We denote by $\mathcal{S}$, the subclass of $\mathcal{A}$ which are also univalent in $\mathbb{D}$. A function $f \in \mathcal{A}$ is called starlike, denoted by $\mathcal{S}^*$ if $tw \in f(\mathbb{D})$ whenever $w \in f(\mathbb{D})$ and $t \in [0,1]$. A function $f \in \mathcal{A}$ is called starlike function, if $\mathrm{Re}\,(zf'(z)/f(z))\,hm > 0$, $z \in \mathbb{D}$. Further, we denote by $\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, the class of strongly starlike functions of order α, which is defined by

$$\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \ \left| \arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad z \in \mathbb{D} \right\}. \tag{3}$$

Note that $\widetilde{\mathcal{S}}^*(1) \equiv \mathcal{S}^*$. An analytic function f is called close-to-convex in $\mathbb{D}$, if complement of $f(\mathbb{D})$ can be written as the union of non-intersecting half-lines. An analytic function f is said to be close-to-convex with respect to a fixed starlike function g, denoted by $\mathcal{C}_g$, if Re $(zf'(z)/g(z)) > 0$, $z \in \mathbb{D}$.

In this paper, we consider the following normalized form of Wright function

$$\mathbb{W}_{\lambda,\mu}(z) = z\Gamma(\mu)W_{\lambda,\mu}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu)z^{n+1}}{n!\,\Gamma(\lambda n+\mu)}, \quad (\lambda > -1,\ \mu > 0,\ z \in \mathbb{D}). \tag{4}$$

We note that, the normalized Wright function $\mathbb{W}_{\lambda,\mu}$ belong to the family $\mathcal{A}$. The function $\mathbb{W}_{\lambda,\mu}$ studied recently by author [3].

The special functions plays an important role in function theory, especially the hypergeometric function in the solution by L. De-Branges [4] of the famous Bieberbach conjecture. Several researchers studied classes of analytic functions involving special functions $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, to find different conditions such that the members of $\mathcal{F}$ have certain geometric properties such as univalency, starlikeness or convexity in $\mathbb{D}$. In this presentation, we discuss the following geometric properties and inequalities of the Wright function $\mathbb{W}_{\lambda,\mu}$.

Theorem 1. *If $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 1$ and $\Gamma(\lambda+\mu) \geq 2\Gamma(\mu)$, then $\mathbb{W}_{\lambda,\mu}$ is close-to-convex with respect to $g(z) = z/(1-z)$.*

Theorem 2. *For each $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 1$ such that $\Gamma(\lambda+\mu) \geq 4\Gamma(\mu)$, the function $\mathbb{W}_{\lambda,\mu}$ is starlike in $\mathbb{D}$.*

Theorem 3. *If $\lambda \geq 1$ and $\mu \geq 1+\sqrt{3}$, then $\mathbb{W}_{\lambda,\mu} \in \widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)$, where*

$$\alpha = \frac{2}{\pi} arc\ sin \left(\eta\sqrt{1-\frac{\eta^2}{4}} + \frac{\eta}{2}\sqrt{1-\eta^2} \right),$$

for $\eta = 2(\mu+1)/\mu^2$.

Theorem 4. *For all $\lambda > -1$, $\mu > 0$, let $\mathbb{W}_{\lambda,\mu}(z)$ satisfy the inequality*

$$|z\mathbb{W}_{\lambda,\mu}(z)| < \frac{M(M-|a|)}{(M+1)(M+|a|)} \quad (0 \leq |a| < M \leq 1;\ z \in \mathbb{D}).$$

Suppose also ϕ be the (unique) solution of the initial value problem

$$\phi^{(n+1)}(z) \pm \mathbb{W}_{\lambda,\mu}(z)\phi^{(n)}(z) = \mathbb{W}_{\lambda,\mu}(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$, $\phi^{(k)}(0) = 0$ ($k = 2, \cdots, n-1$), $\phi^{(n)}(0) = = a$), where $\phi^{(n)}$ denotes n^{th} derivative with respect to z. Then the inequality $|\phi^{(n)}(z)| < M$ holds.

Theorem 5. *For each real $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 1$ such that $\Gamma(\lambda+\mu) \geq 2\Gamma(\mu)$*

$$\text{Re}\left(\frac{\mathbb{W}_{\lambda,\mu}(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

REFERENCES

1. *Wright E. M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // J. Lond. Math. Soc. 1933. Vol. 8. P. 71–79.

2. *Gorenflo R., Luchko .Y, Mainardi F.* Analytic properties and applications of Wright functions // Frac. Cal. Appl. Anal. 1999. Vol. 2. P. 383–414.

3. *Prajapat J. K.* Certain geometric properties of the Wright functions // Integral Transform Spec. Funct. 2015. Vol. 26. P. 203–212.

4. *De-Branges L.* A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math. 1985. Vol. 154. P. 137–152.

УДК 517.9

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ ГОЛОМОРФНЫХ В ШАРЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА[1]

А. В. Абанин (Ростов-на-Дону, Владикавказ, РФ)
abanin@math.rsu.ru

Пусть $\mathbb{B}^N$ — единичный шар в $\mathbb{C}^N$. Полагаем $\mathbb{B}^1 =: \mathbb{D}$ — единичный круг в комплексной плоскости. Для каждого $p \geq 0$ образуем банахово пространство

$$A^{-p}(\mathbb{B}^N) := \{f \in H(\mathbb{B}^N) : \|f\|_p := \sup_{|z|<1} |f(z)|(1-|z|)^p < \infty\},$$

где $H(\mathbb{B}^N)$ — пространство всех голоморфных в $\mathbb{B}^N$ функций.

В соответствии с определением, введенным Ч. Горовицем, Б. Коренблюмом и Б. Пинчуком [1] при $N = 1$, подмножество S в $\mathbb{D}$ называется *определяющим* (*sampling*) для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$, если

$$T_S(f) := \lim_{\zeta \in S, |\zeta| \to 1} \frac{\ln|f(\zeta)|}{|\ln(1-|\zeta|)|} = \lim_{|z| \to 1-0} \frac{\ln|f(z)|}{|\ln(1-|z|)|} =: T(f) \qquad (1)$$

для любой функции $f \in A^{-\infty}(\mathbb{D})$. Ясно, что это понятие без изменений распространяется на случай $N > 1$.

В работе [1] в основном изучался вопрос о взаимосвязи между определяющими множествами для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ и $A^{-p}(\mathbb{D})$. При этом, $S \subset \mathbb{D}$ называется *определяющим* (*sampling*) для пространства $A^{-p}(\mathbb{D})$, если имеется такая постоянная $C > 0$, что $\|f\|_p \leq C\|f\|_{p,S}$ для всех $f \in A^{-p}(\mathbb{D})$. Было показано, что если S является определяющим для всех $A^{-p}(\mathbb{D})$, $p > 0$, то оно будет определяющим и для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$. Было также установлено,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-0140415 а).

что обратный результат, вообще говоря, места не имеет. Причина этого факта осталась неясной.

Л. Х. Хой и П. Томас [2] исследовали взаимосвязь между определяющими и слабо достаточными для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ множествами.

Напомним определение слабо достаточного множества, введенное Д. М. Шнейдером [3]. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}^N$, $\mathcal{V} = (v_n)_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность весов (непрерывных положительных функций) на Ω. Образуем линейное пространство $\mathcal{V}H(\Omega) := \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{v_n}(\Omega)$, где

$$H_{v_n}(\Omega) := \left\{ f \in H(\Omega) : \|f\|_{v_n} := \sup_{z \in \Omega} \frac{|f(z)|}{v_n(z)} < \infty \right\} -$$

банаховы пространства голоморфных в Ω функций. Наделим $\mathcal{V}H(\Omega)$ топологией τ внутреннего индуктивного предела последовательности $(H_{v_n}(\Omega))_{n=1}^{\infty}$. Для подмножества $S \subset \Omega$ определим полунормированные пространства

$$H_{v_n}(\Omega|S) := \left\{ f \in \mathcal{V}H(\Omega) : \|f\|_{v_n,S} := \sup_{\zeta \in S} \frac{|f(\zeta)|}{v_n(\zeta)} < \infty \right\}.$$

Так как $H_{v_n}(\Omega) \hookrightarrow H_{v_n}(\Omega|S) \subset \mathcal{V}H(\Omega)$ ($\hookrightarrow$ — символ непрерывного вложения), то $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_{v_n}(\Omega|S) = H_{v_n}(\Omega)$ и топология τ мажорирует в $\mathcal{V}H(\Omega)$ топологию τ_S внутреннего индуктивного предела последовательности $(H_{v_n}(\Omega|S))_{n=1}^{\infty}$. В случае, когда τ_S совпадает с τ, S называется *слабо достаточным множеством* для $\mathcal{V}H(\Omega)$.

В [2] было показано, что всякое определяющее для пространства $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ множество является для него слабо достаточным и построен пример, показывающий, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Впоследствии в статье [4] эти результаты были тем же методом установлены при $N > 1$.

Х. Бонет и П. Домански [5] ввели и исследовали (p, q)-определяющие множества и с их помощью получили критерий того, что данное множество является определяющим для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$.Это описание оказалось достаточно сложным по форме и трудным для применения.

Во всех упомянутых выше работах — [1, 2, 4, 5] — основной моделью для иллюстрации, а в ряде мест и для обоснования основных результатов выступали, так называемые, инвариантные относительно вращения множества (rotate invariant sets), то есть семейства концентрических окружностей или сфер с центром в начале. Для них удалось установить при $N = 1$ критерии того, что они являются определяющими или слабо достаточными для $A^{-\infty}(\mathbb{D})$. Следует отметить, что при этом в ряде доказательств использовалась сложная техника, которая опиралась на тонкие одномерные результаты, не имеющие аналогов при $N > 1$. Это стало одной из причин того, что при попытке распространения результатов на многомерный случай, предпринятой в [4], даже для таких простых по структуре множеств это удалось сделать только для тривиальной части предшествующих исследований, когда фактически нет зависимости от размерности N.

В настоящей работе будет представлен новый метод исследования определяющих для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ множеств в смысле [1]. Он основан на использовании слабо достаточных множеств для промежуточных индуктивных пределов $A_{-p}(\mathbb{B}^N) := \mathrm{ind}_{q<p} A^{-q}(\mathbb{B}^N)$. На этом пути удается полностью выяснить топологическую природу определяющих для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ множеств. Как оказалось, это ровно те подмножества $\mathbb{B}^N$, которые обладают универсальной слабой достаточностью — они слабо достаточны сразу для всех пространств $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$, $p > 0$, одновременно. Это и есть топологическое отражение алгебраического содержания, заложенного в работе [1] в понятие определяющих для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ множеств. С этой точки зрения, применение к ним термина «определяющий» («sampling») представляется нам недостаточно обоснованным.

С помощью общих результатов о структуре определяющих для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ множеств установлено, что всякое такое множество содержит в себе определяющую для $A^{-\infty}(\mathbb{B}^N)$ последовательность, не имеющую предельных точек в $\mathbb{B}^N$, и получено распространение нетривиальных результатов работ [1] и [5] об инвариантных относительно вращения множеств на многомерный случай. При этом выяснено, что такие инвариантные множества слишком густы, чтобы с их помощью изучать тонкие характеристики слабо достаточных или эффективных множеств для пространств функций полиномиального роста. Оказалось, что с их помощью нельзя даже различить свойство слабой достаточности для индивидуального пространства вида $A_{-p}(\mathbb{B}^N)$ от того же свойства для всех таких пространств одновременно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Horowitz C., Korenblum B., Pinchuk B.* Sampling sequences for $A^{-\infty}$ // Michigan Math. J. 1997. Vol. 44, № 2. P. 389–398.

2. *Khoi L.H., Thomas P.* Weakly sufficient sets for $A^{-\infty}(\mathbb{D})$ // Publ. Mat. 1998. Vol. 42, № 2. P. 435–448.

3. *Schneider.* Sufficient sets for some spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 197. P. 161–180.

4. *Khoi L.H.* Sets of uniqueness, weakly sufficient sets and sampling sets for $A^{-\infty}(\mathbb{B})$ // Bull. Korean Math. Soc. 2010. Vol. 47, № 5. P. 933–950.

5. *Bonet J., Domański P.* Sampling sets and sufficient sets for $A^{-\infty}$ // J. Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 277, № 2. P. 651–669.

УДК 519.853

О ВНУТРЕННЕЙ ОЦЕНКЕ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ЛЕБЕГОВЫМ МНОЖЕСТВОМ КВАЗИВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ

В. В. Абрамова (Саратов, РФ)
veronika0322@rambler.ru

Пусть D — заданное выпуклое тело из конечномерного пространства R^p, а функция $f(x)$

– строго квазивыпукла на R^p;

– непрерывна и непрерывно дифференцируема на R^p и $f'(x) \neq 0_p$ всюду, за исключением точки ее минимума, где она может быть недифференцируемой;

– ее нижние лебеговы множества ограничены.

Задача о вложении в тело D множества $G(x, \alpha) = \{y \in R^p : f(y-x) \leq \leq \alpha\}$ с наибольшим значением α за счет выбора вектора смещения x может быть записана в виде

$$\varphi(x) \equiv \min_{y \in \Omega} f(y - x) \to \max_{x \in R^p}, \tag{1}$$

где $\Omega = \overline{R^p \backslash D}$.

К задаче такого вида сводится, в частности, задача «центрирования области работоспособности» проектирующего технического устройства [1]. Пусть далее $\mathrm{co}\, A$, $\mathrm{int}\, A$ — выпуклая оболочка и внутренность множества A, $Q(x) = \{y \in \Omega : f(y - x) = \varphi(x)\}$.

Средствами негладкого анализа [2] доказана справедливость следующих фактов:

1) решение задачи (1) существует;

2) функция $\varphi(x)$ квазивогнута на множестве $D + x^*$, где $x^* = = \arg\min\limits_{x \in R^p} f(x)$ и $\varphi(x) \equiv f(x^*)$ для $x \in \Omega + x^*$;

3) для того, чтобы точка x_0 была точкой минимума функции $\varphi(x)$ на R^p необходимо и достаточно, чтобы

$$O_p \in co\{f'(y - x_0) : y \in Q(x_0)\};$$

4) если $O_p \in \mathrm{int}\,\mathrm{co}\{f'(y - x_0) : y \in Q(x_0)\}$, то точка x_0 — единственное решение задачи (1);

5) если D — строго выпуклое тело, то задача (1) имеет единственное решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брейтон Р. К., Хэтчел Г. Д., Санджованни-Винчентелли А. Л.* Обзор методов оптимального проектирования интегральных схем // ТИИЭР. 1981. Т. 69, №10. С. 180–215.

2. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М. : Наука, 1990.

УДК 517.5

ОЦЕНКИ БИЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

Г. Акишев (Караганда, РК)
akishev@ksu.kz

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, ..., x_m)$ с вещественными координатами; $I^m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m;\ 0 \le x_j \le 2\pi;\ j = 1, ..., m\}$.

Пространством Лоренца $L_{q,\theta}(I^m)$ называется множество всех измеримых по Лебегу 2π-периодических функций для которых

$$\|f\|_{q,\theta} = \left\{ \frac{\theta}{q} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^t f^*(\tau) d\tau \right)^{\theta} t^{\theta(\frac{1}{q}-1)-1} dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} < +\infty,$$

$$1 \le q < +\infty, \quad 1 \le \theta < +\infty,$$

где $f^*(\tau)$ не возрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$ (см. [1, с. 216]). В случае $\theta = q$, $L_{q,q}(I^m) = L_q(I^m)$ — пространство Лебега.

Пусть $V_l(f, \bar{x})$ кратные средние Валле – Пуссена функции $f \in L_{p,\theta}(I^m)$ и положим

$$\sigma_0(f, \bar{x}) = V_1(f, \bar{x}), \quad \sigma_s(f, \bar{x}) = V_{2^s}(f, \bar{x}) - V_{2^{s-1}}(f, \bar{x}), \quad s = 1, 2, ...$$

Пусть $1 < p,\ \theta < \infty$, $1 \le \tau \le \infty$ и $r > 0$. Рассматривается класс Никольского – Бесова

$$B^r_{p,\theta,\tau} = \Big\{ f \in L_{p,\theta}(I^m) : \Big(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta} \|\sigma_s(f)\|^{\tau}_{p,\theta} \Big)^{\frac{1}{\tau}} \le 1 \Big\}.$$

Для функции $f \in L_{p,\theta}(\mathbb{I}^{2m})$ рассмтривается наилучшее билинейное приближение порядка $M \in \mathbb{N}$ (см. [2, 3]):

$$\tau_M(f)_{p,\theta} = \inf_{u_j(\bar{x}), v_j(\bar{y})} \|f(\bar{x}, \bar{y}) - \sum_{j=1}^{M} u_j(\bar{x}) v_j(\bar{y})\|_{p,\theta},$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 5129/ГФ4 Министерства образования и науки РК.

где $u_j \in L_{p,\theta}(\mathbb{I}^m)$, $v_j \in L_{p,\theta}(\mathbb{I}^m)$. При $M = 0$ считается , что $\tau_0(f)_{p,\theta} = \|f\|_{p,\theta}$.

Если задан класс $F \subset L_{p,\theta}(\mathbb{I}^{2m})$, то положим

$$\tau_M(F)_{p,\theta} = \sup_{f\in F} \tau_M(f)_{p,\theta}.$$

Оценкам порядка величин $\tau_M(F)_q$ в случае когда F класс Соболева W^r_p или Никольского – Бесова $B^r_{p,\theta}$ посвящены статьи В. Н. Темлякова [2, 3], Э. С. Белинского, М-Б. А. Бабаева, А. С. Романюка.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le \theta_1, \theta_2 < \infty$, $1 \le \tau \le \infty$.

1. Если $1 < p \le 2 < q < \infty$, $\frac{r}{m} > \frac{2}{p}$, *то*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta_1,\tau})_{q,\theta_2} \asymp M^{-\frac{r}{m}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

2. Если $1 < p < q \le 2$, $\theta_1 \le \theta_2$, $\frac{\theta_2}{q} \le \frac{\theta_1}{p}$, $\frac{r}{m} > 2(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, *то*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta_1,\tau})_{q,\theta_2} \le CM^{-\frac{r}{m}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

В случае $q \ge \theta_2$ *оценка точна по порядку.*

3. Если $2 < p < q < \infty$, $r > m$, *то*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta_1,\tau})_{q,\theta_2} \le CM^{-\frac{r}{m}}.$$

В доказательстве этой теоремы используется аналог неравенства Марцинкевича – Зигмунда для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца, который доказал H. Konig [4].

Пусть задан тригонометрический полином

$$T_{\bar N}(\bar x) = \sum_{|k_j|\le N_j, j=1,\dots m} c_{\bar k} e^{i\langle \bar k, \bar x\rangle}$$

и $\bar x^{\bar n} = (x_1^{\bar n}, ..., x_m^{\bar n})$, $x_j^{n_j} = \frac{\pi n_j}{2N_j}$, $n_j = 1, ..., 4N_j$, $j = 1, ..., m$.

Пусть $M_m = \prod_{j=1}^m 4N_j$, $\{T^*_{\bar N}(j)\}_{j=1}^{M_m}$ — невозрастающая перестановка чисел $|T_{\bar N}(\bar x^{\bar n})|$.

Лемма (см. [4]). *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$. *Тогда для любого тригонометрического полинома* $T_{\bar N}$ *справедливо соотношение*

$$\|T_{\bar N}\|_{p,\theta} \asymp \Big(\prod_{j=1}^m \frac{\pi n_j}{2N_j}\Big)^{\frac{1}{p}} \Big\{\sum_{j=1}^{M_m} \Big(T^*_{\bar N}(j)\Big)^{\theta} j^{\frac{\theta}{p}-1}\Big\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Замечание. В случае $\theta_1 = p$, $\theta_2 = q$ из теоремы 1 следуют результаты А. С. Романюка и В. С. Романюка [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стейн И., Вейс Г.*, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 335 с.

2. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения // Матем. сб. 1987. Т. 134, № 1. С. 93–107.

3. *Temlyakov V. N.* Nonlinear methods of approximation // Found. Comput. Math. 2003. Vol. 3. P. 33–107.

4. *Konig H.* s-numbers of Besov – Lorentz imbeddings // Math. Nacr. 1979. Vol. 91. P. 389–400.

5. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Наилучшие билинейные приближения функций из пространств Никольского – Бесова // Укр. матем. журн. 2012. Т. 64, № 5. С. 685–697.

УДК 517.984

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Г. Г. Акниев (Махачкала, РФ)

hasan.akniyev@gmail.com

Пусть $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой $\|f\| = \max_x |f(x)|$.

Пусть $N \geq 2$ — целое положительное число, $u = u_N$ — вещественное число и

$$t_k = t_k^{(N)} = u + \frac{2\pi k}{N} \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

система узловых точек. Обозначим через

$$L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f,x) \quad (0 \leq n \leq N/2)$$

тригонометрический полином порядка n с наименьшим квадратичным отклонением от f на сетке $\omega_N = \{t_k\}_{k=0}^{N-1}$. Другими словами

$$L_{n,N}(f) = \inf \sum_{k=0}^{N-1} |f(t_k) - T_n(t_k)|^2$$

на множестве всех тригонометрических полиномов T_n порядка n. В частности, $L_{[N/2],N}(f,x)$ — интерполяционный полином, совпадающий с функцией $f(x)$ в точках ω_N. Легко показать, что $L_{n,N}(f,x)$ является частичной суммой дискретного ряда Фурье функции f и представляется в виде

$$L_{n,N}(f,x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu^{(N)}(f) e^{i\nu x},$$

где

$$c_\nu^{(N)}(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)e^{-i\nu t_k}.$$

Далее, пусть

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$$

— частичная сумма порядка n ряда Фурье функции f, где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{i\nu t}dt.$$

В работе [1] доказано, что если ряд Фурье для функции f сходится в точках $t_k = u + 2k\pi/N$, то имеет место равенство

$$L_{n,N}(f,x) = S_n(f,x) + R_{n,N}(f,x), \tag{1}$$

когда $2n < N$, где $S_n(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье для функции f и

$$R_{n,N}(f,x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)\cos\mu N(u-t)f(t)dt.$$

Обозначим через $P_{2\pi}^m$ класс непрерывных 2π-периодических кусочно-линейных функций, определённых следующим образом.

Пусть $m \geq 3$ — некоторое натуральное число и точки

$$-\pi = a_0 < a_1 < ... < a_m = \pi$$

делят отрезок $[-\pi,\pi]$ на m отрезков $\Delta_i = [a_i, a_{i+1}]$, причем

$$f(x) = f_i(x) = A_i x + B_i, \quad x \in \Delta_i.$$

Заметим, что из непрерывности следует

$$f_i(a_{i+1}) = f_{i+1}(a_{i+1}), \quad f_0(-\pi) = f_{m-1}(\pi).$$

Задача состоит в оценке разности

$$|L_{n,N}(f,x) - f(x)| \tag{2}$$

на отрезке $[-\pi,\pi]$. Из (1)

$$|L_{n,N}(f,x)-f(x)|\le|S_n(f,x)-f(x)|+|R_{n,N}(f,x)|.$$

Оценим отдельно $|S_n(f,x)-f(x)|$ и $|R_{n,N}(f,x)|$. Обозначим через $C(\varepsilon)$ положительное число, зависящее только от ε, причем различное в разных местах. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для функций из $P_{2\pi}^m$ справедливы следующие оценки при приближении частичными суммами ряда Фурье:*

$$|f(x)-S_n(f,x)|=C(\varepsilon)\frac{m}{n},\quad x\in[-\pi,\pi],$$

$$|f(x)-S_n(f,x)|=C(\varepsilon)\frac{m}{n^2},\quad x\in\bigcup_{i=0}^{m-1}[a_i+\varepsilon,a_{i+1}-\varepsilon],\quad \varepsilon>0.$$

Теорема 2. *Для остатка $R_{n,N}(f,x)$, где $f\in P_{2\pi}^m$, имеют место следующие оценки:*

$$|R_{n,N}(f,x)|=C(\varepsilon)\frac{m}{N},\quad x\in[-\pi,\pi],$$

$$|R_{n,N}(f,x)|=C(\varepsilon)\frac{m}{N^2},\quad x\in\bigcup_{i=0}^{m-1}[a_i+\varepsilon,a_{i+1}-\varepsilon],\quad \varepsilon>0.$$

Следствие. *Для полиномов $L_{n,N}(f,x)$, где $f\in P_{2\pi}^m$, справедливы следующие оценки:*

$$|f(x)-L_{n,N}(f,x)|=C(\varepsilon)\frac{m}{n},\quad x\in[-\pi,\pi],$$

$$|f(x)-L_{n,N}(f,x)|=C(\varepsilon)\frac{m}{n^2},\quad x\in\bigcup_{i=0}^{m-1}[a_i+\varepsilon,a_{i+1}-\varepsilon],\quad \varepsilon>0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation // Anal. Math. 1983. Vol. 9. P. 223–234.

УДК 517.984

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ С ЧАСТИ ГРАНИЦЫ[1]

Р. Р. Акопян (Озерск, Екатеринбург, РФ)
RRAkopyan@mephi.ru

Пусть G — односвязная ограниченная область комплексной плоскости с границей Γ, являющейся замкнутой жордановой спрямляемой кривой. Через γ_1 обозначим измеримое подмножество Γ, имеющее положительную меру; $\gamma_2 = \Gamma \setminus \gamma_1$.

Рассмотрим $Q = Q^{q,r}_{\gamma_1,\gamma_2}(G)$, $q, r \geq \infty$, — класс аналитических в области G функций f пространства Харди $H^1(G)$, чьи граничные значения удовлетворяют условиям

$$\|f\|_{L^q(\gamma_1)} < +\infty, \quad \|f\|_{L^r(\gamma_2)} \leq 1.$$

Обозначим $\Upsilon = \Upsilon_{z_0,\gamma_1,G}$ функционал аналитического продолжения в точку $z_0 \in G$ с части границы γ_1 — функционал, ставящий в соответствие граничным значениям аналитической функции f на γ_1 ее значение в точке z_0; т.е. $\Upsilon\left(f\,|_{\gamma_1}\right) = f(z_0)$. Пусть $\mathcal{L}(N), N > 0$, является множеством линейных функционалов на $L^q(\gamma_1)$ с нормой, не превосходящей числа N. Наилучшим приближением функционала Υ множеством $\mathcal{L}(N)$ на классе функций Q является величина

$$E(N) = \inf\left\{U(T)\,:\,T \in \mathcal{L}(N)\right\}, \tag{1}$$

где величина $U(T)$ определяется равенством

$$U(T) = \sup\left\{|f(z_0) - Tf|\,:\,f \in Q\right\}.$$

Задача (1) является частным случаем задачи Стечкина приближения неограниченного оператора ограниченными на классе элементов банахового пространства и взаимосвязана с задачей оптимального восстановления; историю исследования задачи Стечкина и ее взаимосвязь с экстремальными задачами см. в [1] и приведённой там библиографии.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-01-02705), а также при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006).

В случае $q = r = \infty$ решение задачи (1) получено в работе [2]; для частных случаев области G см. также [3, 4].

Теорема 1. *Для величины* (1) *справедливо равенство*

$$E(N) = C\beta\alpha^{\alpha/\beta} N^{-\alpha/\beta},$$

в котором $\alpha = \alpha(z_0, \gamma_1, G)$ *– гармоническая мера* γ_1 *относительно области* G *в точке* z_0, $\beta = 1 - \alpha$, *а величина* C *задается соотношениями*

$$C = \alpha^{-\alpha/q}\beta^{-\beta/r}\varepsilon^{1/q}(\gamma_1)\varepsilon^{1/r}(\gamma_2),$$

$$\varepsilon(\gamma_k) = \exp\left\{\int\limits_{\gamma_k} P(z_0, \zeta)\ln P(z_0, \zeta)\, ds\right\},$$

P *– ядро Пуассона области* G *(плотность гармонической меры).*

Функционал наилучшего приближения определяется равенством

$$T_0 f = \int\limits_{\gamma_1} P(z_0, \zeta)\,\frac{f_0(z_0)}{f_0(\zeta)}\, f(\zeta)\, ds,$$

в котором f_0 *– функция Сегё с модулем граничных значений*

$$|f_0(\zeta)| = \begin{cases} C^{1/\beta}\alpha^{1/\beta - 1/q}N^{1/\beta} & P^{1/q}(z_0, \zeta), \quad \zeta \in \gamma_1, \\ \beta^{-1/r} & P^{1/r}(z_0, \zeta), \quad \zeta \in \gamma_2. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // УМН. 1996. Т. 51, № 6(312). С. 89–124.

2. *Акопян Р. Р.* Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям // Матем. заметки. 2016. Т. 99(2). С. 163–170.

3. *Акопян Р. Р.* Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в полосе функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 3. С. 46–54.

4. *Акопян Р. Р.* Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в кольце функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 3–13.

УДК 511.14

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА (*АКЧ*) 1. ИЗОБРАЖЕНИЕ НА ПЛОСКОСТИ. СВОЙСТВА МОДУЛЕЙ

В. Д. Александров
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры
avd-crystal@mail.ru

Предложен альтернативный вариант геометрической интерпретации комплексных чисел $R = a + bi$, модуль которых $[R] = a + b$ непосредственно равен сумме чисел a, b с аргументом $\psi = \operatorname{Arg}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Классические комплексные числа, альтернативные комплексные числа, модуль, аргумент, геометрическая интерпретация, свойства модулей.

Как известно [1] комплексные числа $Z = x + yi$ (назовем их классическими комплексными числами — $ККЧ$) изображаются в виде вектора $\vec{r}$, модуль которого $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а аргумент $\phi = \operatorname{Arg}\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

Альтернативным комплексным числом $АКЧ$ [2] называется выражение $R = a + bi$, где a и b — любые действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. В векторной форме $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}i$.

Альтернативное комплексное число $R = a + bi$ изображается в плоскости отрезком прямой OM с проекциями x и Y на соответствующие оси, либо вектором $\vec{R} = \overrightarrow{OM}$ под углом ψ относительно оси x (рис. 1).

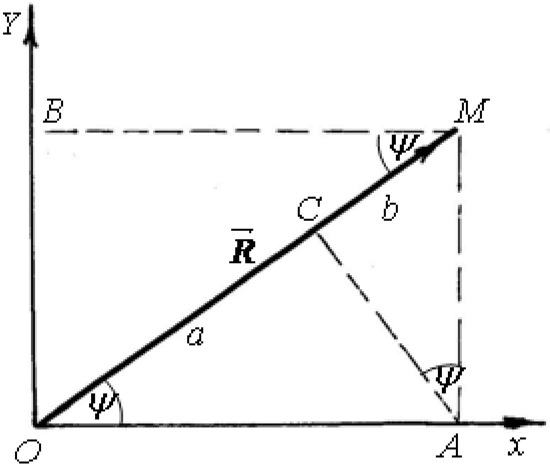


Рис. 1

Длина отрезка OM называется *модулем* ***АКЧ*** $[R]$, равным сумме длин a и b

$$[R] = |a + b|.$$

Отрезок $|OC| = a$ связан с дествительной осью x $a = c\cos\psi$ (из $\Delta\ OCA$), а отрезок $|CM| = b$ связан с мнимой осью Y (yi) $b = y\sin\psi$ (из $\Delta\ CMA$).

Модуль альтернативного комплексного числа выражен через квадратные скобки [ ]. Такое обозначение отнесено лишь к мнимой части комплексного числа (считая $i = \sqrt{(-1)}$ знаком), наподобие модуля вещественных чисел, отнесенного лишь для числа -1, т.е. $|\pm a| = a$, $|\pm b| = b$.

Вещественный модуль от модуля мнимого числа

$$\big|[\pm ai]\big| = |\pm a| = a, \quad \big|[\pm bi]\big| = |\pm b| = b.$$

Тогда вещественный модуль комплексных чисел $R = a \pm bi$ будет иметь вид

$$\big|[R]\big| = \big|[a] + [bi]\big| = |a+b| = a+b, \quad \big|[R]\big| = \big|[a] + [-bi]\big| = |a-b| = a-b.$$

Очевидно, что для $R = a+bi$ $[R] = a+b$, а для $R = a-bi$ $[R] = a-b$.

Угол ψ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, называется *аргументом АКЧ* и обозначается $\psi = \operatorname{Arg}[R]$; он определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$\operatorname{Arg}\ R = \arg\ R + 2k\pi \quad (k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ ...),$$

где $\arg\ R$ есть главное значение $\operatorname{Arg}\ R$, определяемое условиями

$$-\pi < \arg\ R \le \pi.$$

Угол ψ связан с числами a и b следующим образом:

$$\frac{y\sin\psi}{x\cos\psi} = \frac{b}{a}.$$

Так как $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\psi$, то получаем $\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{b}{a}}$, $\quad \psi = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}$,

$$\cos\psi = \sqrt{\frac{a}{[R]}} = \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad \psi = \arccos\sqrt{\frac{a}{a+b}},$$

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{b}{[R]}} = \sqrt{\frac{b}{a+b}}, \quad \psi = \arcsin\sqrt{\frac{b}{a+b}}.$$

Откуда числа a и b можно выразить через аргумент:

$$a = [R]\cos^2\psi, \qquad b = [R]\sin^2\psi.$$

Проанализируем динамику изменения параметров $АКЧ$ при вращении вектора $\vec{R}$. Приняв длину вектора $\vec{R}$ за неизменную величину и вращая его против часовой стрелки, получим круг, который можно разделить на четыре квадранта и восемь секторов (рис. 2).

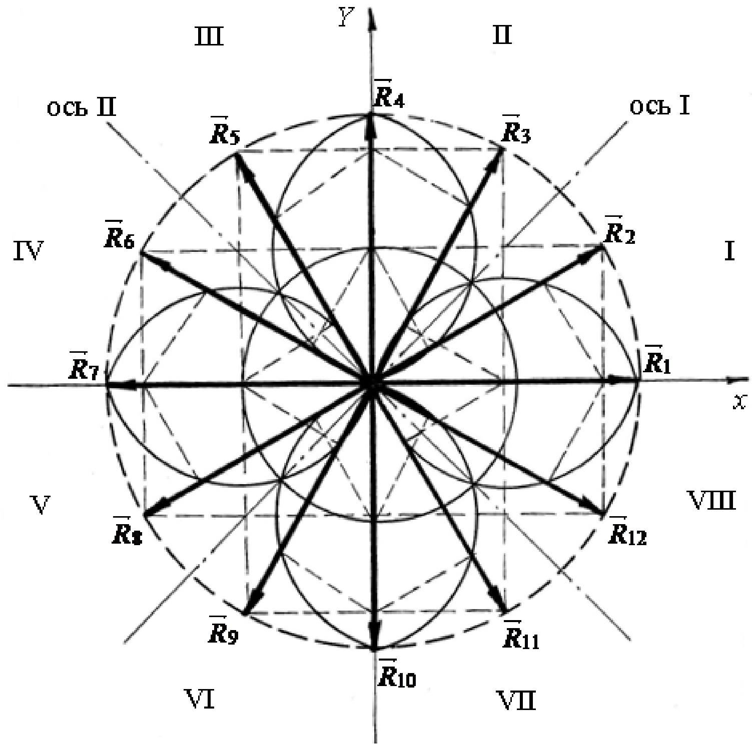


Рис. 2

Расположение векторов $\vec{R}$ в том или ином секторе зависит от соотношения чисел a и b. Например, для вектора $\vec{R}_2$ $a > b$, следовательно, он расположен в первом секторе, а при $a < b$ вектор $\vec{R}_3$ находится во втором секторе и т.д. (рис. 2).

Если построить в каждом квадранте прямоугольники в виде, показанном на рис. 1 с перпендикулярами на соответствующие векторы $\vec{R}$ при условии $[R] = |a| + |b|$, получим схему, показанную на рис. 2. В результате вращения вектора $\vec{R}$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ непрерывно меняются так, что общая их сумма по модулю остается постоянной. При $[R] = |a + b|$ и $|a| = |b|$ вектор $\vec{R}$ длиной $a + b$ находится на оси симметрии I под углом 45°. При $[R] = |a - b|$ и $|a| = |b|$ имеем точку $[R] = 0$ на середине отрезка $[R]$ на оси симметрии II. При вращении вектора $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}i$ в первом квадранте против часовой стрелки $|\vec{a}|$ уменьшается, а $|\vec{b}|$ увеличивается. Во втором квадранте наоборот, величина $|\vec{a}|$ увеличивается, а величина $|\vec{b}|$ уменьшается. В каждом квадранте концы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ описывают соответствующие дуги относительно осей x и Y. При дальнейшем вращении вектора $\vec{R}$ подобные изменения с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут носить циклический характер.

Пользуясь правилами геометрической интерпретации $AKЧ$, перечисленными в начале статьи, можно показать, что уравнения кривых, описываемых концами векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно, имеют вид

$$y = \sqrt{R^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} - x^2}, \tag{1}$$

$$x = \sqrt{R^{\frac{2}{3}} y^{\frac{4}{3}} - y^2}. \tag{2}$$

Методом компьютерной графики по формулам (1) и (2) при $R = 5$ см построены фигуры, образуемые вращением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $\vec{a}$ описывает «восьмерки» вдоль оси x, а вектор $\vec{b}$ — вдоль оси Y (рис. 3).

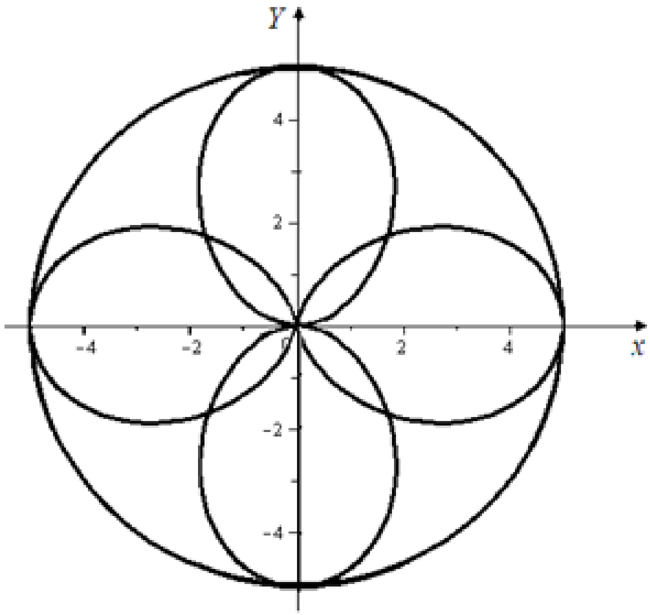


Рис. 3

Анализируя вид «восьмерок» на рис. 3, находим их сходство с лемнискатой Бернулли с осями симметрии Y, x и узлообразной повязкой (лемниском) в точке O. Изменение же положения конца вектора $\vec{R}$ определяется уравнением окружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

На основании многочисленных примеров показано, что использование свойств $AKЧ$ при их решении, приводят к результатам, отличным от результатов, получаемых в версии $KKЧ$.

Тема, затронутая в данном сообщении, имеет свое продолжение в виде статей, готовых к опубликованию:

— «Свойства альтернативных комплексных чисел»,

— «Выражение альтернативных комплексных чисел через гиперболические функции»,

— «Изображение альтернативных комплексных чисел в пространстве»,

— «Использование свойств альтернативных комплексных чисел при решении задач механики, оптики и кристаллографии».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Привалов И. И.* Введение в теорию комплексного переменного. М. : Наука, 1977. 444 с.

2. *Александров В. Д.* Альтернативные комплексные числа и действия над ними. Донецк : Донбасс, 2012. 239 с.

УДК 517.984

МОНОТОННО ЛИНЕЙНО СВЯЗНОЕ МНОЖЕСТВО С РАДИАЛЬНО НЕПРЕРЫВНОЙ СНИЗУ МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЕЙ ЯВЛЯЕТСЯ СТРОГИМ СОЛНЦЕМ[1]

А. Р. Алимов (Москва, РФ)

alexey.alimov-msu@yandex.ru

Всюду ниже X — действительное линейное нормированное пространство, $B(x,r)$ — замкнутый шар с центром x и радиуса r, $\mathring{B}(x,r)$ — открытый шар.

Ниже мы следуем определениям, данным в обзоре [1].

Пусть $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, — непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X. Кривая $k(\cdot)$ *монотонная*, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$ (где $\operatorname{ext} S^*$ — множество крайних точек единичной сферы S^* сопряженного пространства).

Замкнутое подмножество $M \subset X$ называется *монотонно линейно связным*, если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\cdot) \subset M$. Монотонно линейно связное множество всегда экстремально монотонно линейно связно (т.е. его пересечение с любым пересечением гиперполос, порождаемых экстремальными функционалами единичной сферы сопряженного пространства) монотонно линейно связно. Частным случаем бруса является замкнутый шар.

Пусть $\varnothing \neq M \subset X$, $x_0 \in X$, P_M — оператор метрической проекции на M. Метрическая проекция P_M *внешне радиально непрерывна снизу* (*ORL-непрерывна*) в точке x_0 если для любого $v_0 \in P_M x_0$ и любого открытого open множества W такого, что $PMx_0 \cap W \neq \varnothing$, существует окрестность U точки x_0 такая, что $P_M x_0 \cap W \neq \varnothing$ для каждого $x \in U \cap \{v_0 + \lambda(x_0 - v_0) \mid \lambda \geqslant 1\}$ (см. [2]). Метрическая проекция P_M ORL-непрерывна, если оператор P_M ORL-непрерывен в каждой точке

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295).

пространства X. Понятно, что полунепрерывная снизу метрическая проекция является ORL-непрерывной. Однако обратная импликация может нарушаться.

Замкнутое множество M называется *LG-множеством* (или *глобальным минимизатором*), если для любого $x \notin M$ каждый локальный минимум функции $\Phi_x(y) = \|y - x\|$, $y \in M$, является глобальным; иными словами, из того, что $y \in P_{M\cap B(y,\varepsilon)}x$ следует, что $y \in P_M x$.

Для подмножества $\varnothing \neq M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \varnothing$ (называемая *точкой светимости*) такая, что

$$y \in P_M\big((1-\lambda)y + \lambda x\big) \quad \text{для всех} \quad \lambda \geqslant 0 \tag{1}$$

(на геометрическом языке это означает, что из точки y исходит «солнечный» луч, проходящий через x, для каждой точки которого y является ближайшей из M).

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \varnothing$ и условие (1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$. Если же для $x \in X \setminus M$ условие (1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$, то точка x называется *точкой строгой протосолнечности* (при этом, в отличие от точки строгой солнечности, ближайшая точка y к x не обязана существовать).

Множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно, *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно, строгой солнечности) для M. Замкнутое множество $M \subset X$ называется *строгим протосолнцем*, если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой строгой протосолнечности. Выпуклое множество всегда является строгим протосолнцем (выпуклое множество существования — строгим солнцем).

Солнце (в отличие от строгого солнца; см. теорему A) не обязано быть LG-множеством даже в двумерном случае.

Множество $\mathring{K}(y,x) = \bigcup_{r>0} \mathring{B}\big(-ry+(r+1)x, (r+1)\|x-y\|\big)$, состоящее из гомотетичных раздутий шара $\mathring{B}(x, \|x-y\|)$ относительно точки y, называется *опорным конусом* $\mathring{K}(y,x)$ к шару $B(x, \|x-y\|)$ в его граничной точке y.

Точка $y_0 \in M$ называется *лунной точкой* [2], если из того, что $x \in P_M^{-1}y_0$ и $\mathring{K}(v_0, x) \cap M \neq \varnothing$ следует, что $y_0 \in \mathring{K}(y_0, x) \cap M$. Замкнутое множество называется *луной* [2, 3], если все его точки лунные. LG-множество всегда является луной.

Пространство X называется *(MS)-пространством* [2, 3], если в X любая луна является строгим протосолнцем (множеством Колмогорова).

Класс (MS) включает в себя все полиэдральные конечномерные пространства, пространства $C(Q)$ (Q — компактное хаусдорфово пространство), $C_0(Q)$ (Q — локально компактное хаусдорфово пространство) и пространства типа $\ell^1(\Gamma)$.

Известен следующий результат [1].

Теорема A. *Пусть $\varnothing \neq M \subset X$ замкнуто. Рассмотрим следующие условия:*

1) *M — строгое протосолнце;*
2) *метрическая проекция P_M ORL-непрерывна;*
3) *M — LG-множество;*
4) *M — луна.*

Тогда каждое из первых трех условий влечет последующее. В (MS)-пространствах все четыре условия эквивалентны.

Хорошо известно, что в общем случае импликации 2)⇒3), 3)⇒4) теоремы A не являются обратимыми. Вопрос об обратимости импликации 1)⇒2) остается открытым начиная с 1972 г.

Мы показываем обратимость импликации 1)⇒2) теоремы A при дополнительном предположении монотонной линейно связности множества.

Теорема 1. *Монотонно линейно связное множество с ORL-непрерывной (в частности, с полунепрерывной снизу) метрической проекцией в конечномерном банаховом пространстве является B-стягиваемым строгим солнцем.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН. 2016. Т. 71, № 1.

2. *Brosowski B., Deutsch F.* Some new continuity concepts for metric projections // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 6. P. 974–978.

3. *Amir D., Deutsch F.* Suns, moons and quasi-polyhedra // J. Approx. Theory. 1972. Vol. 6. P. 176–201.

УДК 517.275, 517.517

КРИТЕРИЙ ПОЛНОЙ α-ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ p-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

К. Ф. Амозова (Петрозаводск, РФ)
amokira@rambler.ru

В некоторых разделах математики (например, в теоремах вложения, в теории интегральных представлений функции, в вопросах граничного

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00510).

поведения функций, разрешимости задачи Дирихле) важно, чтобы область определения функции $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяла *условию конуса*, т. е. чтобы существовали универсальные для Ω числа $\alpha \in (0;1)$ и $H \in (0;\infty]$ такие, что для каждой точки $p \in \Omega$ прямой круговой конус $V(l(p), H)$ с вершиной в точке p, раствора $\alpha\pi$, высотой H, осью симметрии $l(p)$ лежал в Ω [1].

В [2] были определены α-достижимые области, и было показано, что они являются областями с условием конуса, при этом $l(p) = -p$.

Определение 1. [2] *Область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$, называется α–достижимой (относительно 0), $\alpha \in [0;1)$, если для каждой точки $p \in \partial\Omega$ существует такое число $r = r(p) > 0$, что конус*

$$K_+(p,\alpha,r) = \left\{ x \in \mathbb{B}^n[p,r] : \ \left(x - p, \frac{p}{\|p\|} \right) \geq \|x - p\| \cos\frac{\alpha\pi}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^n \backslash \Omega.$$

Об α-достижимых областях смотри также [3].

Эти области в плоском случае ($n = 2$) впервые ввели J. Stankiewicz [4–5], D. A. Brannan и W. E. Kirwan [6].

Так, например, в [4–5] J. Stankiewicz рассматривал класс $S_{1-\alpha}$, состоящий из $(1-\alpha)$–звездообразных, $\alpha \in [0;1]$, аналитических в единичном круге $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций вида $f(z) = a_1 z + {}+a_2 z^2 + \dots$, $a_1 \neq 0$, удовлетворяющих условию

$$\left| \arg\frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \frac{(1-\alpha)\pi}{2} \quad \forall z \in \mathbb{B},$$

и показал, что область $\Omega \neq \mathbb{C}$ — α-достижима $\Longleftrightarrow$ $\Omega = f(\mathbb{B})$, где f — некоторая функция из класса $S_{1-\alpha}$.

В [2] P. Liczberski и В. Старков обобщили этот результат на класс биголоморфных в открытом единичном евклидовом шаре $\mathbb{B}^N$, $N \geq 1$, функций $f : \mathbb{B}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$, таких, что $f(0) = 0$ и

$$\operatorname{Re}\{z^*(Df(z))^{-1}f(z)\} \geq \|z^*(Df(z))^{-1}\| \cdot \|f(z)\| \cdot \sin\frac{\alpha\pi}{2} \quad \forall z \in \mathbb{B}^N,$$

и доказали, что все такие функции, отображающие $\mathbb{B}^N$ на α-достижимую область, обладают *свойством наследственности* (наследуют α-достижимость), т. е. если $r \in (0;1)$, то каждая область $f(r\mathbb{B}^N)$ — α-достижима, $\alpha \in (0;1)$.

Известно, что в классе гармонических функций $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, сохраняющих ориентацию в $\mathbb{B}$, свойство выпуклости или звездообразности $f(\mathbb{B})$ не наследуется. В таких случаях, выделяют и рассматривают подкласс функций, которые обладают свойством наследственности (см. [7]).

Далее дадим определение p-гармонической функций.

Определение 2 (см., например [8]). Функция $f \in C^{2p}(\mathbb{B})$, $p \in \mathbb{N}$, называется *p-гармонической*, если $\Delta^p f = 0$ в $\mathbb{B}$, где Δ — оператор Лапласа.

Известно, что p-гармоническая сохраняющая ориентацию в $\mathbb{B}$ функция, может быть представлена в виде

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} F_{p-k+1}(z), \tag{1}$$

где функции $F_{p-k+1} = h_{p-k+1} + \overline{g}_{p-k+1}$, $k = 1, \ldots, p$, являются гармоническими, h_{p-k+1} и g_{p-k+1} аналитическими в $\mathbb{B}$.

Заметим, что каждая гармоническая функция является p-гармонической. В этом классе p-гармонических функций рассмотрим подкласс функций, наследующих α-достижимость.

Определение 3. Будем говорить, что p-гармоническая функция Φ, $\Phi(0) = 0$, $J_\Phi(z) > 0$, является *вполне α-достижимой*, $\alpha \in [0,1)$, если для каждого $r \in (0,1)$ Φ отображает $\mathbb{B}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$ на α-достижимую область.

Теорема 1. *Пусть Φ является p–гармонической функцией в $\mathbb{B}$ вида (1), $\Phi(0) = 0$, и $J_\Phi(z) > 0$ в $\mathbb{B}$. Тогда Φ — вполне α-достижима, $\alpha \in [0,1) \Longleftrightarrow$ для любого $z \in \mathbb{B}$ выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} \mathrm{Re}\,\{z(h'_{p-k+1}\overline{\Phi} - g'_{p-k+1}\Phi)\} \ge \sin\frac{\alpha\pi}{2} \cdot |\Phi| \cdot L^{1/2},$$

где

$$L = \mathrm{Re}^{\,2}\left\{ z \sum_{k=1}^{p} |z|^{2k-2}(h'_{p-k+1} - g'_{p-k+1}) \right\} +$$

$$+\mathrm{Im}^{\,2}\left\{ z \sum_{k=1}^{p} |z|^{2k-2}(h'_{p-k+1} + g'_{p-k+1}) \right\}.$$

Как следствие, отсюда получаем критерий полной α-достижимости для бигармонических ($p = 2$), гармонических ($p = 1$), и аналитических ($p = 1$, $g = 0$) $\left(\text{условие } \left|\arg\left(\frac{z\,\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right)\right| \le \frac{\pi}{2}(1-\alpha), \text{ см. [4–6]}\right)$ в $\mathbb{B}$ функций, а также критерий полной звездообразности (случай $\alpha = 0$) для p-гармонических, гармонических ($p = 1$) [2], и аналитических ($p = 1$, $g = 0$) $\left(\text{хорошо известное условие звездообразности } \mathrm{Re}\left\{\frac{z\,\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right\} \ge 0\right)$ в $\mathbb{B}$ функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Сов. энцикл., 1979. 552 с.

2. *Liczberski P., Starkov V. V.* Domains in $\mathbb{R}^n$ with conical accessible boundary // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 408, № 2. P. 547–560. DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.06.029.

3. *Амозова К. Ф.* Достаточные условия α-достижимости области в негладком случае // Probl. Anal. Issues Anal. 2013. Т. 2(20), №. 1. С. 3–11. DOI: 10.15393/j3.art.2013.2321.

4. *Stankiewicz J.* Quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions α-angulairement étoilées // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A. 1966. Vol. XX. P. 59–75.

5. *Stankiewicz J.* Some remarks concerning starlike functions // Bulletin de l'académie Polonaise des sciences. Série des sciences math., astr. et phys. 1970. Vol. XVIII, №. 3, P. 143–146.

6. *Brannan D. A. and Kirwan W. E.* On some classes of bounded univalent functions // J. London Math. Soc. 1969. Vol. 2, №. 1. P. 431–443.

7. *Chuaqui M., Duren P., Osgood B.* Curvature Properties of Planar Harmonic Mappings // Computational Methods and Function Theory. 2004. Vol. 4, №. 1. P. 127–142. DOI: 10.1007/BF03321060.

8. *Li P., Ponnusamy S., Wang X.* Some properties of planar p-harmonic and log-p-harmonic mappings // Bull. Malays. Math. Soc. 2013. Vol. 36, №. 3, P. 595–609.

УДК 517.518.86

ОПЕРАТОР ОБОБЩЕННОГО СДВИГА, ПОРОЖДЕННЫЙ ВЕСОМ ЯКОБИ, И НЕРАВЕНСТВО НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ НА ОТРЕЗКЕ[1]

В. В. Арестов, М. В. Дейкалова, (Екатеринбург, РФ)
vitalii.arestov@urfu.ru, marina.deikalova@urfu.ru

Будет обсуждаться точное неравенство Никольского между равномерной нормой и нормой пространства $L_q^{\alpha,\beta}$, $1 \le q < \infty$, с весом Якоби $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ алгебраических многочленов на отрезке. Для обоснования результатов применен обобщенный сдвиг, порожденный весом Якоби. Изучено множество экстремальных функций, на которых достигается норма оператора сдвига.

Для ультрасферического веса такие исследования осуществлены в совместной работе авторов [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arestov V. V., Deikalova M. V.* Nikolskii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15(4). P. 689–708. DOI: 10.1007/s40315-015-0134-y

[1]Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект № 15-01-02705) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013)

УДК 517

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В ТЕРМИНАХ ВРЕМЕНИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Р. В. Арутюнян (Реутов, М.О., РФ)
rob57@mail.ru

Задача Стефана для уравнения теплопроводности приводится к виду:

$$\begin{cases} \rho\left[c+r_m\delta\left(u-u_f\right)\right]\dfrac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} u\right)+f\left(M,t\right), M\in V,\ t>0, \\ \lambda\frac{\partial u}{\partial n}+ku=q,\ M\in S,\ t>0;\ u\left(M,0\right)=u_0\left(M\right),\ |u|<\mathrm{const}, M\in V, \end{cases} \tag{1}$$

где область $V\subseteq E^m(\bar{V}\backslash V=\partial V)$с кусочно-гладкой границей $S=\partial V$, $\partial V=\partial\bar{V}$. u — искомая функция, u_f — температура, а S_f — поверхность фазового перехода, $\partial(x)$ — дельта-функция. Функции $\rho, c, \lambda, f, r_{pl}, k$ таковые, что существуют классические решения задачи (1) $u(M,t)$ и задачи (1) при $r_{pl}=0-H(M,t)$, например, если $\rho, c, \lambda, f, r_{pl}, k$ положительные константы, $f\in L_2(V), q\in L_2(S), u_0(M)\in C^1(V)$ [1–4]. Пусть $G(M,N,t)$ — функция Грина (1) при $r_{pl}=0$; тогда $t_f(M)$ – наименьший корень уравнения $u(M,t_f(M)+0)=u_f+0$, является решением интегрального уравнения:

$$\int\limits_V \rho\left(N\right)r\left(N\right)G\left(M,N,t_f\left(M\right)-t_f\left(N\right)\right)dV_N=H\left(M,t_f\left(M\right)\right)-u_f, \tag{2}$$
$$M\in\bar{V}.$$

Существование кусочно-непрерывного решения (2) следует из его вывода.

Утверждение 1 *(единственность). Пусть $z(M)$ — кусочно-непрерывное решение (2), удовлетворяющее условию*

1. $\forall\ M\in V_0\subset\ V,\ z\left(M\right)<\theta$;

2. *вектор* $\vec{n}_0=\dfrac{\operatorname{grad}\ z\left(M\right)}{|\operatorname{grad}\ z\left(M\right)|}$ *является вектором внешней единичной нормали к границе области* $\Omega=\left\{M\in V|z\left(M\right)<t\ \right\}, t<\theta$,

тогда $z(M)=t_f(M)$, $\forall M\in V_f(\theta)$.

Численное решение (2). Разобьем V на непересекающиеся элементы $V_j (j = 1, \ldots, N)$. В пределах $V_j : t_f(M) \approx t_j = \mathrm{const}$, $\rho\left(M\right) r_{pl}\left(M\right) \approx \approx \rho_{plj} r_j$, $H\left(M, t\right) \approx H_j(t)$. В результате получаем систему относительно $t^h = (t_1, \ldots, t_N) : M_i$ — узел коллокации. Существование и единственность численного решения t^h показывается как и для $t_f(M)$. Сходимость t^h к $t_f(M)$ оценивается ниже.

Утверждение 2. *Пусть существуют независящие от параметра разбиения h числа $\gamma > 0, \theta > 0, k > 0, k = k(\theta, \gamma)$,*

$$\sum_{j\ \in v_\theta} \left\{ \int\limits_{t_j}^{\theta} \frac{d\tau}{\left|u_j\left(\tau\right) - u_f\right|^\gamma} + \int\limits_{t_f(M_j)}^{\theta} \frac{d\tau}{\left|u\left(M_j, \tau\right) - u_f\right|^\gamma} \right\} |V_j| < K,$$

где $v_\theta \subseteq V^h$, определяется из условия:

$$\max_{i \in v_\theta} \left\{ t_i, t_f\left(M_i\right) \right\} < \theta,$$

тогда

$$\lim_{h \to 0} \left(t^h - P^h t_{f_{l_p(v_\theta)}} \right) = 0, \quad p \geq 1.$$

Пример применения метода. Рассмотрим задачу оттаивания плоского слоя грунта при помощи иглы со спиралью накала. Решение при $r_{pl} = 0$:

$$H\left(M, t\right) =$$

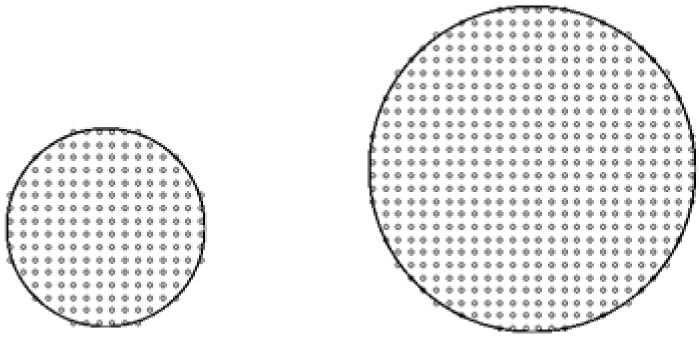
$$= \int\limits_{E^2} u_0\left(N\right) G_0\left(M, N, t\right) dV_N + \int\limits_0^t \int\limits_{E^2} \frac{P_0 \delta\left(x_N, y_N\right)}{\rho c} G_0\left(M, N, t - \tau\right) dV_N d\tau,$$

где

$$G_0(M, N, t) = \frac{exp\left(-\frac{\left(x_M - x_N\right)^2 + \left(y_M - y_N\right)^2}{4at} \right)}{4\pi a t},$$

$a = \lambda/(\rho c)$, $\delta(x_N, y_N)$ — дельта-функция, P_0 — параметр нагрева.

Результаты вычислений. Решение находилось при шаге 10 см, $P_0 = 100$ Вт/м, $u_0 = -5^o C$. Погрешность численного решения изменяется приблизительно периодическим образом с увеличением области таяния. На рисунке показаны области таяния, вычисленные численным методом (множество узлов коллокаций) и при помощи точного решения (окружности).



а *б*

Численное и аналитическое решение задачи Стефана:
а —188 точек; *б* — 540 точек

Таблица

Количество точек	Численное решение	Точное решение	Погрешность, %
188	23417.90	24266.80	3.5
240	29967.62	30903.88	3.0
540	6886078.64	6989668.75	1.5

Градиент решения, требуемый для вычисления сингулярных слагаемых, вычислялся при помощи квадратичной аппроксимации решения по сеточной области таяния методом наименьших квадратов.

Вывод. Предложен новый численный метод решения задачи Стефана, основанный на редукции исходной краевой задачи к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению минимальной размерности. Особенностью метода является использование функции времени фазового перехода в качестве основной неизвестной функции. Данная параметризация является эффективным вычислительным приемом, позволяющим значительно упростить метод решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каменомостская С. Л.* Проблема Стефана // Матем. сб. 1961. Т. 53. № 4. С. 211–223.

2. *Мейрманов А. М.* Задача Стефана // Новосибирск : Наука, СО АН, 1986. 187 с.

3. *Данилюк И. И.* О задаче Стефана // УМН. 1985. Т. 40, вып. 5(245). С. 133–185.

4. *Рубинштейн Л. И.* К вопросу о численном решении интегральных уравнений задачи Стефана // Изв. вузов. Матем. 1958. № 4. С. 202–214.

УДК 510: 53.072: 621.1.016.4(03)

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Р. В. Арутюнян (Реутов, М.О., РФ)
rob57@mail.ru

Рассматривается структура типа одномерного «решета». Длина отверстий (дырок) равна 1, а непроницаемой части — 2. Сквозь решето просеивается поток одномерных частиц (палок) случайных размеров z с плотностью $p(z), z \in (0,2]$. Искомыми являются плотности распределения размеров дырок и палок на выходе из «решета» $C(x,t)$ и $\psi(z,t)$, для которых получена система уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}(x,\ t) = -q\,(x)\,C\,(x,\ t) + \int\limits_x^1 P\,(y-x)\,C\,(y,\ t)\,dy,\ \forall\ x \in (0,1)\ \forall\ t > 0;$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial t}(t) = \int\limits_0^1 C\,(y,t) \int\limits_y^2 \frac{z-y}{3} p\,(z)\ dz\,dy, \quad \forall\ t > 0,$$

$$C(x,0) = \delta(x-1+0), \quad \forall\ x \in (0,1];$$

$$C_0(0) = 0; \quad P\,(w) = \frac{2}{3}\int\limits_{2w}^2 p\,(z)\,dz, \quad 0 \le w \le 1;$$

$$q\,(x) = \frac{2}{3}\left[\int\limits_0^x \frac{z}{2}P\,(z)\,dz + \int\limits_x^{2x} \frac{2z-x}{2}P\,(z)\,dz + \int\limits_{2x}^2 \frac{z+x}{2}P\,(z)\,dz\right],\ \forall\ x \in (0,1);$$

$C_0(t)$ — вероятность нуль-дырки, $C\,(x,t) = C_1\,(x,t) + \delta\,(x-1+0)\,e^{-q(1)t}$;

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = -q\,(x)\,C_1 + \int\limits_x^1 P\,(y-x)\,C_1\,(y,t)\,dy + P\,(1-x)\,e^{-q(1)t}, \quad t > 0,$$

$$C_1(x,0) = 0, \quad \forall\ x \in (0,1];$$

$$\phi\,(z,t) = p\,(z)\int\limits_{z/2}^1 R\,(y,z)\,C\,(y,t)\,dy, \quad \forall\ z \in [0,2),\ t > 0,$$

$$R\,(y,z) = (2y-z)/3, \quad z/2 \le y \le \min(z,1);$$

$$R\,(y,\ z) = y/3, \quad \min(z,1) < y \le 1.$$

Подстановка $C_1(x,t) = A(x,t)\,e^{-q(1)t}$ приводит к уравнению:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -Q(x)\,A + \int\limits_x^1 P(y-x)\,A(y,t)\,dy + P(1-x)\,,$$
$$A(x,0) = 0, \quad \forall\, x \in (0,1],$$
$$Q(x) = q(1) - q(x)\,.$$

Свойство 1. *Если плотность распределения $p(z)$ непрерывна на отрезке $[0,2]$, то решение стохастической системы существует, единственно, причем $C_0(t) \in C^\infty(0,\infty)$, $\dfrac{\partial^k C}{\partial t^k}(x,t) \in C^1(0,1)$, $\forall\ t > 0$, $k = 0,1,...$*

Свойство 2. *Имеют место оценки снизу*

$$C_1(x,\ t) \geq P(1-x)\,\frac{e^{-q(x)t} - e^{-q(1)t}}{q(1) - q(x)} \geq P(1-x)\,\frac{e^{-q(1)t} - e^{-q_{\max}t}}{q_{\max} - q(1)},$$

$$\forall\ x \in [0,1], \quad t \geq 0, \quad q_{\max} = \|q\|_{C(0,1)}$$

Свойство 3. *Справедлива оценка сверху*

$$C_1(x,\ t) \leq \frac{(3/2)^{3/4}}{3\sqrt{\pi}}\frac{t^{1/4}}{(1-x)^{3/2}}e^{-q_{\min}t+2\sqrt{\frac{2}{3}(1-x)t}}, \quad \forall\ x \in [0,1],\ t \geq 0,$$

$$q_{\min} = \min_{[0,1]} q(x)\,.$$

Свойство 4. *Условие нормировки*

$$_0(t) + \int\limits_0^1 C_1(x,\ t)\,dx = 1, \quad \forall\ t \geq 0.$$

На конечных интервалах $(0,T)$, где $T > 0$ — величина порядка постоянной времени процесса, одним из эффективных способов решения стохастических уравнений является применение МКР. Схема 1-го порядка:

$$\frac{B_i^{j+1} - B_i^j}{\tau} = -a_i B_i^j + \sum_{k=1}^{i} P_{i-k} B_k^j h + R_i^j, \quad i = \overline{1,\ M};$$
$$B_0^j = P_0 t_j e^{-q_0 t_j}; \quad a_i = q(1 - z_i)\,; \quad P_i = P(z_i), \quad z_i = ih; \quad R_i^j = P_i e^{-q_0 t_j};$$

$$C_1(z_i, t_j) = B^j_{m-i}(1 + o(1)), \quad \tau, h \to 0, \quad i = \overline{0, M}; \quad h = \frac{1}{M};$$
$$t_j = j\tau; \quad j = \overline{0, J}; \quad J = \left[\frac{T}{\tau}\right].$$

Устойчивость схемы:

$$\left\| B_h^{(1)} - B_h^{(2)} \right\|_h \le \gamma \left\| R_h^{(1)} - R_h^{(2)} \right\|_h,$$

$$\gamma = \frac{e^{\omega T} - 1}{\omega}, \quad \omega = \|P\|_{C(0,\,1)} - q_{\min}, \quad \|B_h\|_h = \max_{\Omega} \left| B_i^j \right|,$$
$$\Omega = \left\{ (i,\ j) :\ i = \overline{0, M};\ j = \overline{0, J} \right\},$$
$$\left| C_1(z_i,\ t_j) - B^j_{m-i} \right| \le f_4\tau + f_5 h, \quad \forall\ (i, j) \in \Omega.$$

Тестовая задача при $q(x) = \dfrac{1 + (1 - x)}{6}$, $P(x) = \dfrac{2}{3}$, на рис. 1 параметры схемы $h = 0.025$, $\tau = 0.5$, $a_1(x,\ t) = A_h(x,\ t)/\|A_h\|_h$, $a_2(x, t) = A(x, t)\|A_h\|$, на рис. 2 параметры схемы $h = 0.025$, $\tau = 0.3$, $a_3(x, t) = A_h(x, t)/\|A_h\|_h$.

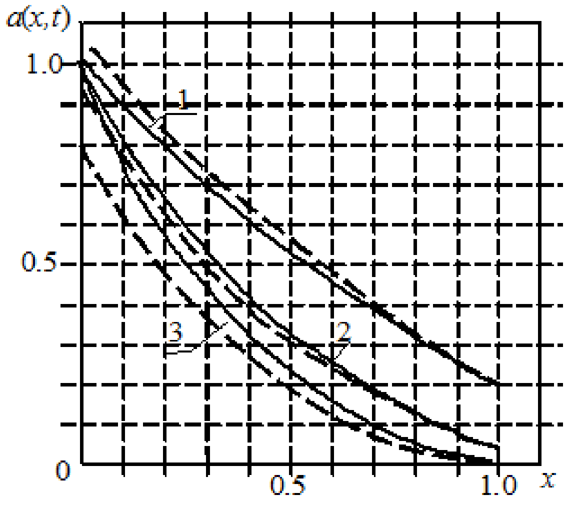


Рис. 1. Точное решение

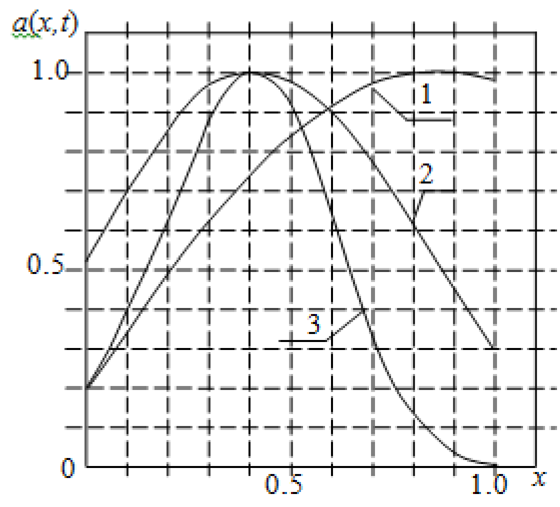


Рис. 2. Равномерное распределение размеров частиц

Здесь *1* — $t = 10$; *2* — $t = 30$; *3* — $t = 60$.

Преимущество моделирования фильтрации на основе стохастических уравнений имеет то преимущество, что конечно-разностные методы являются более экономичными по сравнению со статистическими методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Резников Г. Д., Жихарь А. С.* Численно-аналитический подход к моделированию переноса частиц в фильтрующем слое // Матем. моделирование, 1995. Т. 7, № 6. С. 118–125.

2. *Колесников А. В.* Математическое моделирование фильтрации жидкости в неоднородных и периодических пористых телах методом однородно-анизотропного эквивалентирования: автореферат дис. ... кандидата технических наук: 05.13.18 / Северо-Кавказский федеральный университет. Ставрополь, 2014.

УДК 517.984

СЛУЧАЙНО БЕЗУСЛОВНЫЕ БАЗИСЫ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

С. В. Асташкин (Самара, РФ)

astash@samsu.ru

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ в банаховом пространстве X называется безусловно сходящимся, если для каждого выбора знаков $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots$, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$ сходится в X. Более слабым является требование сходимости при *почти каждом* выборе знаков $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty} \in \{1, -1\}^{\mathbb{N}}$ (относительно произведения считающих мер на двухточечном множестве $\{1, -1\}$). В этом случае говорят, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *случайно безусловно сходится.*

Биортогональная система (x_i, x_i^*), где $x_i \in X$, $x_i^* \in X^*$, называется системой *случайной безусловной сходимости* (или RUC системой) в X, если для произвольного x из замкнутой линейной оболочки $[x_i]$ ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^*(x) x_i$ случайно безусловно сходится, или, то же самое, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^*(x) r_i(t) x_i$ сходится в X для почти всех $t \in [0, 1]$. Здесь r_i — функции Радемахера, т.е. $r_i(t) = \mathrm{sign}(\sin 2^i \pi t)$, $i \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1]$. Последнее условие эквивалентно тому, что существует константа $K > 0$, для которой

$$\int\limits_0^1 \Big\| \sum_{i=1}^{n} c_i r_i(t) x_i \Big\|_X \, dt \le K \Big\| \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \Big\|_X,$$

где $n = 1, 2, \ldots$ и вещественные числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ произвольны [1, следствие 1.1].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ.

Заметим, что проблема существования фундаментальных RUC систем (или RUC базисов) в функциональных пространствах является интересной и далеко не тривиальной. Приведем лишь два факта: классическая тригонометрическая система является (условным) RUC-базисом в пространстве $L^p[0,1]$ для $2 < p < \infty$, но не для $1 < p < 2$ [1, замечание V]; пространство $L^1[0,1]$ не имеет фундаментальной RUC системы [1, следствие 2.2].

В лекции будут рассмотрены вопросы, связанные с существованием и поведением RUC-базисов в симметричных пространствах, а также пространствах Чезаро. В частности, будут обсуждаться результаты, полученные недавно автором совместно с G. Curbera и K. E. Тихомировым. Приведем один из них (см. [2]), где через $\mathrm{Exp}\, L^\alpha$, $\alpha > 0$, обозначается пространство Орлича, построенное по функции Орлича, эквивалентной функции $\exp(t^\alpha) - 1$, а через $(\mathrm{Exp}\, L^\alpha)^0$ — замыкание L_∞ в $\mathrm{Exp}\, L^\alpha$.

Теорема. *Пусть X — сепарабельное симметричное пространство на $[0,1]$, $\alpha > 0$, $\beta = 2\alpha/(\alpha+2)$. Следующие условия эквивалентны:*

1) всякая последовательность функций $\{f_i\}$ такая, что

$$\sup_{i=1,2,\dots} \|f_i\|_{Exp\ L^\alpha} < \infty$$

и

$$\Big\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i \Big\|_{L^2} \geq c \|(c_i)\|_{\ell^2} \ \text{ для всех } \ (c_i) \in \ell^2,$$

является RUC системой в X;

2) всякая ортонормированная система $\{f_i\}$ такая, что

$$\sup_{i=1,2,\dots} \|f_i\|_{Exp\ L^\alpha} < \infty,$$

является RUC системой в X;

3) имеют место непрерывные вложения $(Exp\ L^\beta)^0 \subset X \subset L^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Billard P., Kwapień S., Pełczyński A., Samuel Ch.* Biorthogonal systems of random unconditional convergence in Banach spaces// Texas Functional Analysis Seminar 1985–1986. Longhorn Notes. 1986. P. 13–35.

2. *Astashkin S. V., Curbera G. P., Tikhomirov K. E.* On the existence of RUC systems in rearrangement invariant spaces // Math. Nachr. 1–12(2015). DOI 10.1002mana.201400189.

УДК 517.958

ОБ ОСНОВНЫХ МАТРИЦАХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА В СИСТЕМАХ, МОДЕЛИРУЕМЫХ ГРАФОМ

Ю. В. Афанасенкова, Ю. А. Гладышев (Калуга, РФ)
dvoryanchikova_y@mail.ru

Основной задачей настоящего сообщения является сравнительная характеристика трех основных матриц P, R, K, используемых при решении краевых задач теории переноса, в системах моделируемых геометрических графом. Например, в системах, состоящих из достаточно тонких по сравнению с линейными размерами стержней. Это условие позволяет считать процесс переноса в каждом стержне одномерным. В дальнейшем, используя терминологию теории графов будем называть стержень - ребром, а точки контакта — вершинами. Считаем далее, что уравнение для потенциала $\Phi(x)$ стационарного процесса переноса задано на каждом ребре графа и приведено к виду [1]

$$\alpha_2 \frac{d}{dx}(\alpha_1 \frac{d\Phi}{dx}) - m^2\Phi = D_2 D_1 \Phi - m^2 \Phi = 0,$$

где α_2, α_1 — непрерывные, положительные функции на данном ребре, определяющие физические и геометрические свойства ребра. Константа m учитывает наличие внешнего обмена по длине ребра переносимой величины при постоянном внешнем потенциале и принята за ноль. Если m->0, то внешний обмен исключается. При необходимости номер ребра ставится в верху в скобках, например $\Phi^{(i)}$. Используя аппарат обобщенных степеней Берса [2] решение первой краевой задачи для ребра с координатами x_1, x_2

$$\Phi(x)|_{x_1} = \Phi_1, \Phi(x)|_{x_2} = \Phi_2,$$

запишем

$$\Phi(x) = \Phi_1 \frac{\operatorname{sh} mX(x, x_2)}{\operatorname{sh} mX(x_1, x_2)} + \Phi_2 \frac{\operatorname{sh} mX(x, x_1)}{\operatorname{sh} mX(x_2, x_1)}.$$

Если определить поток J как

$$J = -D_1 \Phi, \tag{1}$$

то значения потенциалов Φ_1, Φ_2 и потоков J_1, J_2 в конечных точках ребра x_1, x_2 связаны линейной зависимостью

$$J_i = \sum P_{ik} J_k.$$

Элементы p_{ij} матрицы P, которую назовем матрицей потоков, определены как

$$p_{11} = -\frac{m \operatorname{ch} mX(x_1,x_2)}{\operatorname{sh} mX(x_1,x_2)}, \quad p_{12} = -\frac{m}{\operatorname{sh} mX(x_1,x_2)},$$
$$p_{21} = -\frac{m}{\operatorname{sh} mX(x_1,x_2)}, \quad p_{22} = -\frac{m \operatorname{ch} mX(x_2,x_1)}{\operatorname{sh} mX(x_2,x_1)},$$

При последовательном соединении двух ребер с координатами (x_1, x_2) и (x_2, x_3) в один отрезок матрица ребра (x_1, x_3) определена как

$$P_{11}^{(3)} = P_{11}^{(1)} + \frac{1}{\Delta} P_{12}^{(1)} P_{21}^{(1)}, \quad P_{12}^{(3)} = -\frac{1}{\Delta} P_{12}^{(1)} P_{12}^{(2)},$$

$$P_{21}^{(3)} = \frac{1}{\Delta} P_{21}^{(1)} P_{21}^{(2)}, \quad P_{22}^{(3)} = P_{22}^{(2)} - \frac{1}{\Delta} P_{21}^{(2)} P_{12}^{(2)}, \tag{2}$$

где $\Delta = P_{11}^{(2)} - P_{22}^{(1)}$.

Обозначим эту операцию $*$

$$P_1(1,2) * P_2(2,3) = P_3(1,3),$$

Относительно этой операции, которая является однозначной, можно высказать ряд утверждений. Операция некоммутативна, но обладает свойством ассоциативности при последовательном умножении более двух матриц. При поставленных условиях положительности функций порождающей пары α_1, α_2, m не существует обратного элемента, но единичный элемент условно можно записать

$$E = \begin{pmatrix} \propto & -\propto \\ \propto & -\propto \end{pmatrix}.$$

Матрица P для ребра была использована для построений решений краевыхх задач на графе [3], в том числе при краевых условиях третьего типа.

Решение второй краевой задачи для потенциала запишем

$$\Phi = -J_1 \frac{\operatorname{ch} mX(x,x_2)}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(x_1,x_2)} - J_2 \frac{\operatorname{ch} mX(x,x_1)}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(x_2,x_1)}.$$

Следовательно, имеем согласно определению (1) для потока выражение

$$J = J_1 \frac{\operatorname{sh} m\tilde{X}(x, x_2)}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(x_1, x_2)} + J_2 \frac{\operatorname{sh} m\tilde{X}(x, x_1)}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(x_2, x_1)}.$$

Матрица R определяет связь потенциалов $\Phi_1,\ \Phi_2$ и потоков $J_1,\ J_2$ на концах стержня

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{2} r_{ik} J_k,\ i = 1, 2.$$

Назовем ее матрицей потенциалов.

Для элементов матрицы R имеем

$$r_{11} = -\frac{\operatorname{ch} mX(1,2)}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(1,2)}, \qquad r_{12} = -\frac{1}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(2,1)},$$

$$r_{21} = -\frac{1}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(1,2)}, \quad r_{22} = -\frac{\operatorname{ch} mX(2,1)}{m \operatorname{sh} m\tilde{X}(2,1)}.$$

Если внешнего обмена нет $m- > 0$, то возвращаемся к понятию обычного сопротивления.

Для нахождения результата вычтем Φ_1, и Φ_2 при условии $J_1 = J_2 = J$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = (r_{21} + r_{22} - r_{11} - r_{12})J.$$

Действуя аналогично нахождению матрицы P для последовательного соединения двух ребер введем операцию умножения матриц $R^{(1)},\ R^{(2)}$ двух отрезков $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$

$$R^{(3)}(x_1, x_3) = R^{(2)}(x_3, x_2) * R^{(1)}(x_2, x_1)$$

по правилам

$$r_{11}^{(3)} = r_{11}^{(1)} - \frac{1}{\Delta} r_{12}^{(1)} r_{21}^{(1)}, \quad r_{12}^{(3)} = \frac{1}{\Delta} r_{12}^{(1)} r_{12}^{(2)},$$

$$r_{21}^{(3)} = -\frac{1}{\Delta} r_{21}^{(1)} r_{21}^{(2)}, \quad r_{22}^{(3)} = r_{22}^{(2)} + \frac{1}{\Delta} r_{21}^{(2)} r_{12}^{(2)}, \tag{3}$$

где $\Delta = r_{11}^{(2)} - r_{22}^{(1)}$.

Легко увидеть почти полное сходство определений (2) и (3). Это связано с тем, как это было показано, что матрица R обратна P [3], даже при неоднородных внешних условиях.

Введение матрицы K связано с решением задачи Коши, когда заданы $\Phi(x_1), J(x_1)$ и для $\Phi(x), J(x)$ найдем

$$\begin{cases} \Phi(x) = \Phi_1 \operatorname{ch} mX(x, x_1) - J_1 \frac{1}{m} \operatorname{sh} mX(x, x_1), \\ J(x) = -\Phi_1 m \operatorname{sh} m\tilde{X}(x, x_1) + J_1 \operatorname{ch} m\tilde{X}(x, x_1). \end{cases}$$

Этот результат в матричной форме

$$V^{(1)}(x, x_1) = K(x, x_1) V^{(0)}(x_1)$$

запишем, если введем вектор-столбцы $V^{(1)}(x, x_1)$, $V^{(0)}(x_1)$ и матрицу $K(x, x_1)$:

$$V^{(1)}(x, x_1) = \begin{pmatrix} \Phi \\ J \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} mX & -\frac{1}{m} \operatorname{sh} mX \\ -m \operatorname{sh} m\tilde{X} & \operatorname{ch} m\tilde{X} \end{pmatrix}, V^{(0)}(x_1) = \begin{pmatrix} \Phi(x_1) \\ J(x_1) \end{pmatrix}.$$

Удобным свойством матрицы K является тот факт, что при идеальном контакте матрицы K для последовательного соединения ребер находится по обычному закону матричного умножения

$$K^{(3)}(x_3, x_1) = K^{(2)}(x_3, x_2) K^{(1)}(x_2, x_1).$$

Поэтому эта матрица удобна при решении задач переноса в многослойной среде. Отметим, что матрица K связана с матрицей P простыми соотношениями

$$p_{11} = -\frac{k_{11}}{k_{12}}, \quad p_{12} = \frac{1}{k_{12}}, \quad p_{21} = k_{21} - \frac{k_{11} k_{22}}{k_{12}}, \quad p_{22} = -\frac{k_{22}}{k_{12}}.$$

Приложения матрицы K для решения краевых задач затруднено неопределенностью постановки задачи Коши на графе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасенкова Ю. В., Гладышев Ю. А., Куликов А. Н.* Краевые задачи двумерной модели процессов переноса в многослойных средах // Вестн. Калуж. ун-та. 2013. № 3–4. С. 7–11;

2. *Гладышев Ю. А.* Метод обобщенных степеней Берса и его приложения в математической физике. Калуга, 2011.

3. *Гладышев Ю. А., Афанасенкова Ю. В.* Об использовании матрицы потоков и матрицы потенциалов при решении задач теории переноса // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зим. шк. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2012. С. 49–51.

УДК 517.955.8

ОБРАТНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Бабич П. В. (Ростов-на-Дону, РФ),
Левенштам В. Б. (Ростов-на-Дону; Владикавказ, РФ)
vleven@math.rsu.ru

Пусть $E_n, n \geq 2$ — n-мерное арифметическое пространство, $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$ — произвольная точка в нем. Символом K обозначим куб $\{x \in E_n : 0 < x_i < \pi, i = \overline{1, n}\}$, а символом S — его границу. Пусть Π — открытый $(n+1)$-мерный параллелепипед $\{(x, t) : x \in K, 0 < t < 1\}$. Символом Γ обозначим часть его границы (параболическую границу), состоящую из нижнего основания $\Pi \cap \{t = 0\}$ и боковой части границы $S \times [0, 1]$. Рассмотрим параболическую начально-краевую задачу с большим параметром ω:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x) r(t, \omega t),\ \omega \gg 1, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \Delta$ — оператор Лапласа, т. е. $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Относительно функций $f(x)$ и $r(t, \tau)$, определенных и непрерывных соответственно на множествах $x \in \overline{K}$ и $(t, \tau) \in \mathcal{T} = [0, 1] \times [0, \infty)$ сделаем следующие предположения. Функция $r(t, \tau)$ — 2π-периодична по τ; представим ее в виде $r(t, \tau) = r_0(t) + r_1(t, \tau)$, где $r_1(t, \tau)$ имеет нулевое среднее по второй переменной, причем $r_0 \in C^0([0, 1]), r_1 \in C^{2,0}(\mathcal{T})$,

$$f \in C^{3n+\alpha}(\overline{K}), \quad \alpha \in (0, 1],$$

$$f(x)|_{x \in S} = (\Delta^k) f(x)\big|_{x \in S} = \left.\frac{\partial^{2k} f(x)}{\partial x_i^{2k}}\right|_{x_i = 0, \pi} = 0, \quad k = 1, 2, \quad i = \overline{1, n}.$$

Обратная задача состоит в следующем. Требуется определить функцию $r(t, \tau)$ так, что в точке $x = x^{(0)}$, где $f(x^{(0)}) \neq 0$, решение $u_\omega(x, t, r)$ принимает вид

$$u_\omega(x^{(0)}, t, r) = \phi_0(t) + \omega^{-1} \phi_1(t, \omega t) + \nu_\omega(t),$$

где функции $\phi_0 \in C^1([0, 1]), \phi_1 \in C^{2,1}(\mathcal{T}), \nu_\omega \in C^1([0, 1])$, а так же

$$\phi_0|_{t=0} = \phi_1|_{t=0} = \nu_\omega|_{t=0} = 0,$$

$$\|\nu_\omega\|_{C[0,1]} = O(\omega^{-2}), \ \left\|\frac{d}{dt}\nu_\omega\right\|_{C[0,1]} = O(\omega^{-1}), \quad \omega \to \infty.$$

Теорема 1. *Обратная задача однозначно разрешима.*

В заключение отметим, что аналогичная обратная задача для уравнения теплопроводности, не содержащего асимптотического параметра, ранее исследована в работе [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисов А. М.* Асимптотика решений обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 5. С. 744–752.

УДК 517.51

ОБ ОЦЕНКАХ П. ЖАМЭ ДЛЯ ЛАГРАНЖЕВЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

Н. В. Байдакова (Екатеринбург, РФ)
baidakova@imm.uran.ru

Пусть Δ является n-симплексом; $W^{m+1}M$ — множество функций, определенных на Δ, имеющих непрерывные частные производные до порядка $m+1$ включительно, причем все производные порядка $m+1$ ограничены по модулю константой M; $f \in W^{m+1}M$; P_m — многочлен степени m по совокупности переменных, интерполирующий значения функции f в равномерных узлах симплекса; H — диаметр симплекса. Пусть

$$\theta = \min_{E_n \subset E_N} \max_{\xi \in \mathbf{R}^n} \min_{e_s \in E_n} \theta_s$$

где θ_s, $0 \le \theta_s \le \pi/2$, — угол между вектором ξ и прямой, параллельной вектору e_s, $E_n = \{e_s\}_{s=1}^n$ — множество n линейно независимых векторов, E_N — множество всех векторов, направленных вдоль сторон симплекса Δ.

В 1976 г. П. Жамэ были получены следующие оценки:

$$\left\|D^k_{\xi_1 \dots \xi_k}(f - P_m)\right\| \le CM\frac{H^{m+1-k}}{\cos^k\theta}, \quad k = 0, ..., m, \tag{1}$$

где $C > 0$ — некоторая величина, не зависящая от f и Δ, $D^k_{\xi_1 \dots \xi_k}$ — производная порядка k по направлениям произвольных единичных векторов $\xi_1, \dots, \xi_k$. В докладе обсуждается геометрическая характеристика

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00496а).

симплекса, эквивалентная $\cos\theta$ и более простая с вычислительной точки зрения.

Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — вершины симплекса Δ, причем $C_1(n)H \leq \leq |a_0 a_1| \leq C_2(n)H$ для некоторых положительных величин $C_1(n)$ и $C_2(n)$, которые могут зависеть только от n; Δ_k — k-симплекс с вершинами $a_0, a_1, \ldots, a_k$ $(k = 2, \ldots, n)$. Через $\sin\beta_k$ обозначим наибольший из синусов углов между ребрами $a_k a_s$ $(s = 0, \ldots, k-1)$ и плоскостью размерности $k-1$, в которой лежит симплекс Δ_{k-1}. Положим

$$\sin\beta = \min_{k=2,\ldots,n} \sin\beta_k.$$

Теорема. *Существуют такие положительные величины $\widetilde{C}_1(n)$ и $\widetilde{C}_2(n)$, для которых выполняется неравенство*

$$\widetilde{C}_1(n)\cos\theta \leq \sin\beta \leq \widetilde{C}_2(n)\cos\theta.$$

В докладе также обсуждаются случаи неулучшаемости оценок (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jamet P. A.* Estimation de l'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés // RAIRO Anal. Numér. 1976. Vol. 10. P. 43–60.

УДК 517.972

СИММЕТРИЧЕСКИЙ КОМПАКТНЫЙ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛ ОСНОВНОГО ВАРИАЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА

И. В. Баран (Симферополь, РФ)

matemain@mail.ru

Субдифференциалы, как важнейший инструмент негладкого анализа, достаточно давно получили признание в математике. Некоторое время назад И. В. Орловым было введено понятие компактного субдифференциала, основаного на понятии K-предела системы множеств разностных отношений (см. [1–4]). Данная теория нашла серьезные приложения в теории векторного интегрирования [4] и в вариационном исчислении [3].

В работе [1] на основе понятия компактного субдифференциала построено субдифференциальное исчисление, вплоть до формулы Тейлора. Разработан аппарат исследования одномерных экстремальных вариационных задач с субгладким интегрантом. Сейчас активно ведутся дальнейшие исследования.

Таким образом, естественной является задача обобщения теории компактных субдифференциалов на симметрических случай. Заменяя в определении компактного субдифференциала обычное разностное отношение на симметрическое, мы вводим понятие симметрического компактного субдифференциала (K_S-субдифференциала).

Определение 1. Назовем *симметрическим K_S-субдифференциалом n-го порядка f в точке x* K-предел:

$$\partial_K^{[n]} f(x) = K - \lim_{\delta\to 0} \overline{co}\Big\{ \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)h\big) \,\Big|\, 0 < h < \delta \Big\}.$$

Как известно, симметрические производные играют большую роль в гармоническом анализе и имеют широкое применение в теории рядов Фурье. Нами рассмотрено обобщение классического метода Римана – Шварца суммирования рядов Фурье посредством перехода от обычной второй симметрической производной для суммы дважды проинтегрированного ряда Фурье ко второму симметрическому компактному субдифференциалу.

В нашей работе [2] построена развитая теория симметрических дифференциалов Фреше и симметрических K-субдифференциалов Фреше первого и высших порядков, включающая, в частности, теорему о среднем и формулу Тейлора. Также рассмотрена теория симметрических K-субдифференциалов первого и высших порядков в банаховых пространствах. Получено точное описание высших симметрических K-субдифференциалов от функционалов.

В настоящем докладе рассмотрено простое достаточное условие симметрической K-субдифференцируемости — симметрическая субгладкость. С его помощью мы исследуем на K-субдифференцируемость основной вариационный функционал с негладким интегрантом.

Определение 2. Пусть $\Lambda : E \supset U(x) \to L_K^S(E;F)$, где E, F — вещественные банаховы пространства, $L_K^S(E;F)$ — множество всех ограниченных симметрических K–операторов. Будем говорить, что Λ *субнепрерывно в точке* $x \in E$ (обозначение $\Lambda \in C_{sub}(x)$), если для $\Lambda_x \in L_K^S(E;F)$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \; (\|h\| < \delta) \Rightarrow (\Lambda(x+h) \preceq \Lambda_x + Y(h), \text{ где } \|Y(h)\| < \varepsilon).$$

Построенный аппарат K_S-субдифференциального исчисления применяется к оценке первой K-вариации одномерного вариационного функционала. Получена оценка следующего вида:

$$\partial_K^{[\prime]} \Phi(y)h \subset \Big[\int_a^b \Big(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial y}}(x,y,y')h + \frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial z}}(x,y,y')h' \Big)\, dx;$$

$$\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial z}}(x,y,y')h' \right) dx \right].$$

В работе И. В. Орлова было показано, что одномерный вариационный функционал с C^1-субгладким интегрантом сильно K-субдифференцируем в $C^1[a;b]$, а также получена оценка его первой K-вариации. Наша цель — обобщить эту оценку на случай *s-субгладких интегрантов* и получить оценку K_S-субдифференциала. При этом симметрическая оценка оказывается более точной.

Упомянутые результаты позволяют применить построенный аппарат к оценке второго K_S-субдифференциала вариационного функционала с негладким (K_S-субдифференцируемым) интегрантом. Получена не только оценка в общем случае

$$\partial_K^{[\prime\prime]}\Phi(y)(h)^2 \subset \Bigg[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \underline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial z}} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x,y,y')hh' \right) dx;$$

$$\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \overline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial z}} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x,y,y')hh' \right) dx \Bigg] +$$

$$+ \Bigg[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial y}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)(x,y,y')hh' + \underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 \right) dx;$$

$$\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial y}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)(x,y,y')hh' + \overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 \right) dx \Bigg],$$

но и подробно исследованы важные частные случаи композиции в интегранте гладкого отображения с негладким.

Введенные понятия симметрической субгладкости первого и высшего порядков позволило в приложениях сводить ситуацию к нижним и верхним симметрическим производным. В качестве конкретного примера, приводится случай интегранта, образованного композицией гладкой функции и модуля.

Таким образом, симметрический случай позволяет не выходить за рамки банаховых пространств, поскольку высшие производные и субдифференциалы не определяются индуктивным путем. С этой точки зрения, симметрический K-анализ оказывается проще несимметрического.

Полученная теория дает возможные перспективы применения симметрических конструкций в теории экстремальных задач. А именно, после нахождения экстремума с помощью несимметрических субдифференциалов, мы применяем симметрические конструкции с целью классификации экстремумов (асимметрия, эксцесс).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ // СМФН. 2014. Т. 53. С. 64–132.

2. *Орлов И. В., Баран И. В.* Введение в сублинейный анализ — 2: симметрический вариант // СМФН. 2015. Т. 57. С. 108–161.

3. *Орлов И. В., Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам // СМФН. 2013. Т. 59. С. 99–131.

4. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты // СМФН. 2009. Т. 34. С. 121–138.

УДК 517.51

О КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ПОЛНОЙ И НЕПОЛНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ Λ-ВАРИАЦИИ[1]

А. Н. Бахвалов (Москва, РФ)
an-bakh@yandex.ru

Мы будем называть последовательность неотрицательных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ допустимой, если она стремится к бесконечности, монотонна (хотя бы начиная с некоторого номера n_0), а ряд из $(\lambda_n)^{-1}$ расходится. Напомним, что для допустимой последовательности Λ и функции m переменных $f(x)$ ее Λ-вариацией $V_\Lambda^{x_{j_1},\dots,x_{j_k}}(f,\Delta)$ по непустому набору переменных $(x_{j_1},\dots,x_{j_k})$ на промежутке $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ называется величина

$$\sup_{x_{l_i}\in\Delta^{l_i}} \sup_{\{I_{n_i}^{j_i}\}} \sum_{n_1,\dots,n_k} \frac{|f(I_{n_1}^{j_1}\times\dots\times I_{n_k}^{j_k}, x_{l_1},\dots,x_{l_{m-k}})|}{\lambda_{j_1}\dots\lambda_{j_k}},$$

где $f(I_{n_1}^{j_1}\times\dots\times I_{n_k}^{j_k}, x_{l_1},\dots,x_{l_{m-k}})$ есть смешанная разность f на k-мерном промежутке $I_{n_1}^{j_1}\times\dots\times I_{n_k}^{j_k}$ как функции от $x_{j_1},\dots,x_{j_k}$ при фиксированных значениях остальных переменных $x_{l_1}\in\Delta^{l_1},\dots,\ x_{l_{m-k}}\in\Delta^{l_{m-k}}$, а внутренний супремум берется по системам попарно непересекающихся интервалов $\{I_{n_i}^{j_i}\}$ на Δ^{j_i}.

Сумма таких вариаций по всем непустым наборам переменных называется полной Λ-вариацией, а класс функций, для которых она конечна,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00350).

обозначается через $\Lambda BV(\Delta)$. Если же при этом полная вариация по последовательностям $\Lambda_N = \{\lambda_n\}_{n=N+1}^{\infty}$ стремится к нулю при $N \to \infty$, то такая функция называется непрерывной по Λ-вариации. В частности, допустимой является последовательность $H = \{n\}_{n=1}^{\infty}$, а соответствующая вариация называется гармонической.

Классы функций трех и более переменных, имеющие ограниченную полную Λ-вариацию, были впервые рассмотрены А. И. Саблиным [1]. В работе автора [2] было доказано, что если непрерывная функция функция f принадлежит классу $CHV(\mathbb{T}^m)$ функций, непрерывных по гармонической вариации ($\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$), то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Прингсхейму, а для функций из класса $HBV(\mathbb{T}^m)$, $m \geq 3$, это неверно.

У. Гогинава и А. Саакян в серии работ изучали классы функций ограниченной частичной Λ-вариации $P\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$, т. е. такие классы, в которых на функцию накладывается лишь условие равномерной ограниченности Λ-вариации по (каждой) одной переменной как функции остальных переменных. Ими получены результаты о вложении таких классов в класс $CHV(\mathbb{T}^m)$, что позволяет сделать вывод о равномерной сходимости ряда Фурье по Прингсхейму.

В частности, ими [3] был установлен следующий результат:

Теорема. *Пусть допустимая последовательность* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такова, что*

$$\frac{\lambda_n}{n} \downarrow 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty, \quad \textit{а} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \ln^{m-2}(n+1)}{n^2} < \infty.$$

Тогда класс $P\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$ *вкладывается в класс* $CHV(\mathbb{T}^m)$.

С другой стороны, ими в этой же работе было доказано, что если для некоторого $\delta > 0$

$$\frac{\lambda_n}{n} = O\left(\frac{\lambda_{[n\delta]}}{[n\delta]}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad \text{а} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \ln^{m-2}(n+1)}{n^2} = \infty,$$

то класс $P\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$ не вкладывается в класс $CHV(\mathbb{T}^m)$.

В частности, если $\Lambda = \{n \ln^a(n+1)\}$, то вложение имеет место при $a < 1 - m$ и не имеет места при $a \geq 1 - m$.

Пусть $k \in \{1, \ldots, m\}$. Обозначим через $P_k\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$ класс тех функций, для которых конечны все вариации по не более чем k переменным. В частности, $P_1\Lambda BV(\mathbb{T}^m) = P\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$, а $P_m\Lambda BV(\mathbb{T}^m) = \Lambda BV(\mathbb{T}^m)$.

Нами установлен следующий основной результат, при $k = 1$ соответствующий результату Гогинавы и Саакяна:

Теорема 1. *Пусть $k \in \{2, \dots, m-1\}$, а допустимая последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что*

$$\frac{\lambda_n}{n} \downarrow 0 \quad \text{и} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n)^k \ln^{m-k-1}(n+1)}{n^{k+1}} < \infty.$$

Тогда класс $P_k \Lambda BV(\mathbb{T}^m)$ вкладывается в класс $CHV(\mathbb{T}^m)$.

В частности, если $\Lambda = \{n \ln^a(n+1)\}$, то включение имеет место при $a < 1 - \frac{m}{k}$. С другой стороны, мы строим следующий

Пример. Пусть $k \in \{2, \dots, m-1\}$. Если $\Lambda = \{n \ln^a(n+1)\}$, где $a > 1 - \frac{m}{k}$, то класс $P_k \Lambda BV(\mathbb{T}^m)$ не вкладывается в класс $HBV(\mathbb{T}^m)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Саблин А. И.* Λ-вариация и ряды Фурье // Изв. вузов. Матем. 1987. № 10. С. 66–68.

2. *Бахвалов А. Н.* Непрерывность по Λ-вариации функций многих переменных и сходимость кратных рядов Фурье // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 12. С. 3–20.

3. *Goginava U., Sahakian A.* On the convergence of multiple Fourier series of functions of bounded partial generalized variation // Anal. Math. 2013. Vol. 39, № 1. P. 45–56.

УДК 517.982.256 + 515.124.4

ЛИПШИЦЕВЫ ВЫБОРКИ ИЗ ОТОБРАЖЕНИЯ ШТЕЙНЕРА[1]

Б. Б. Беднов, К. В. Чеснокова (Москва, РФ)

noriiii@inbox.ru, kchesnokova@gmail.com

Пусть в действительном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ для произвольного набора $\{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geqslant 3$, множество точек Штейнера

$$\operatorname{st}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ s \in X \colon \sum_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = \inf_{x \in X} \sum_{k=1}^{n} \|x_k - x\| \right\}$$

непусто (например, X конечномерно или рефлексивно).

Рассмотрим отображение st_n пространства $X \times \dots \times X$ (n раз) с нормой $\|(x_1, \dots, x_n)\|_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|$, сопоставляющее набору $\{x_1, \dots, x_n\}$ множество $\operatorname{st}(x_1, \dots, x_n)$. J.-P. Kahane показал, что в случае евклидовой плоскости X отображение st_n липшицево при $n = 3$, а при $n = 2k + 1$, $k \geqslant 2$, — не липшицево [1].

Гиперплоскость L называется *опорной* к единичному шару $B(X)$ пространства X в точке x_0 единичной сферы $S(X)$, если $x_0 \in L$ и

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (проекты № 14-01-00510, № 15-01-08335).

$L \cap B(X) \subset S(X)$. Точка $x_0 \in S(X)$ называется *достижимой точкой*, если существует опорная гиперплоскость L к шару $B(X)$ в x_0, для которой выполнено $L \cap B(X) = \{x_0\}$. Точка $x_0 \in S(X)$ называется *точкой гладкости* шара $B(X)$, если существует ровно одна опорная гиперплоскость к шару $B(X)$ в точке x_0. Будем говорить, что банахово пространство *обладает достижимой точкой гладкости*, если единичный шар $B(X)$ имеет точку, являющуюся одновременно достижимой точкой и точкой гладкости.

Теорема 1. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство,* $\dim X \geq 2$, *и сфера $S(X)$ содержит хотя бы одну достижимую точку гладкости. Тогда отображение* $\mathrm{st_n}$ *не имеет липшицевой выборки ни для какого чётного $n \geq 4$.*

Теорема 2. *Если единичный шар $B(X)$ конечномерного банахова пространства X не является конечным многогранником, то отображение* $\mathrm{st_n}$ *не имеет липшицевой выборки ни для какого чётного $n \geq 4$.*

По-видимому, в случае, когда $B(X)$ есть конечный многогранник, липшицева выборка из отображения $\mathrm{st_n}$ существует для всякого натурального n, но доказать это пока не удаётся.

Теорема 3. *Пусть X — рефлексивное локально равномерно выпуклое банахово пространство с локально равномерно выпуклым сопряжённым X^*,* $\dim X \geq 2$ (*в частности, X может быть конечномерным строго выпуклым гладким банаховым пространством*). *Тогда для всякого нечётного $n \geq 5$* (*однозначное*) *отображение* $\mathrm{st_n}$ *не является липшицевым.*

Условия на пространство X в этих теоремах существенны: несложно показать, что в произвольном действительном пространстве L_1 для всякого $n \geqslant 3$ существует липшицева выборка из отображения st_n. Также можно показать, что в пространстве $C[Q]$ действительнозначных непрерывных функций на хаусдорфовом компакте Q отображение st_n определено [2] и обладает липшицевой выборкой в случае $n = 3$ [3] и $n = 4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kahane J.-P.* Best approximation in $L^1(T)$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 80. № 5. P. 788–804.

2. *Беднов Б. Б., Бородин П. А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб. 2014. Т. 205, вып. 4. С. 3–19.

3. *Беднов Б. Б.* О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 26–31.

УДК 517.518

ПОВЕДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ПО ЛОКАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЕ ХААРА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ [1]

Е. С. Белкина (Петрозаводск, РФ)
elena.belkina@gmail.com
Ю. В. Малыхин (Москва, РФ)
jura05@yandex.ru

Положим $\Delta_{k,i} = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$; через $\Delta^+_{k,i}$ и $\Delta^-_{k,i}$ обозначим левую и правую половины интервала $\Delta_{k,i}$, соответстветственно.

Определим функции локализованной системы Хаара на $[0,1]^2$ следующим образом (см. рис. 1): $\chi_0(x,y) \equiv 1$ на $[0,1]^2$; для $k = 0, 1, 2, \ldots$ пачка номер k состоит из функций

$$\chi^{(1)}_{k,i,j}(x,y) = \begin{cases} 2^k, & x \in \Delta^+_{k,i},\ y \in \Delta_{k,j}, \\ -2^k, & x \in \Delta^-_{k,i},\ y \in \Delta_{k,j}, \\ 0, & (x,y) \notin \overline{\Delta_{k,i}} \times \overline{\Delta_{k,j}}, \end{cases}$$

$$\chi^{(2)}_{k,i,j}(x,y) = \chi^{(1)}_{k,j,i}(y,x),$$

$$\chi^{(3)}_{k,i,j}(x,y) = 2^{-k}\chi^{(1)}_{k,i,j}(x,y)\chi^{(2)}_{k,i,j}(x,y).$$

При этом $i, j = 1, 2, \ldots, 2^k$. В граничных точках функции доопределяются нужным образом. Параметр $t \in \{1, 2, 3\}$ назовём *типом* функции.

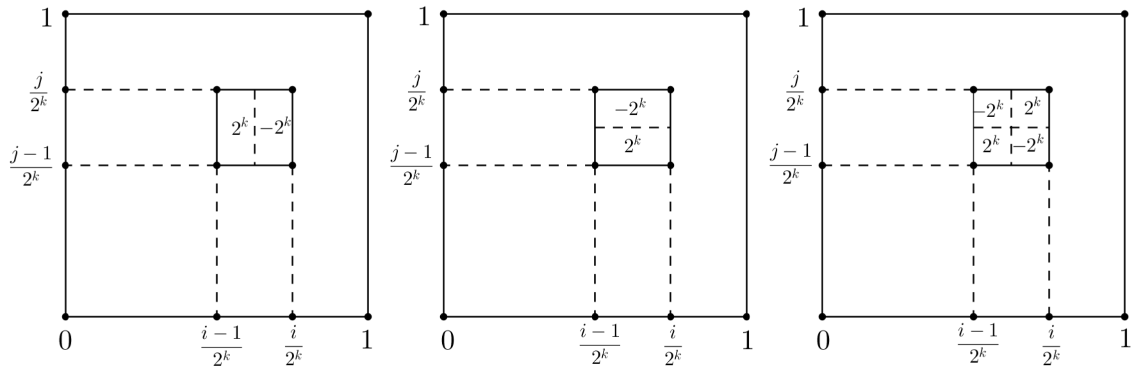


Рис. 1. Локализованная система Хаара

[1] Работа Ю. В. Малыхина поддержана РФФИ (проект № 14-01-00332).

Каждой суммируемой функции соответствуют ее коэффициенты Фурье – Хаара:

$$c_{k,i,j}^{(t)}(f) = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\chi_{k,i,j}^{(t)}(x,y)\,dxdy.$$

В случае классической системы Хаара известно (см., например, [1]), что для любой функции $f \in C[0,1]$ либо

$$\varlimsup_{k\to\infty} 2^{3k/2}\max_i |c_{k,i}(f)| > 0,$$

либо $f \equiv \mathrm{const}$. В случае системы $\{\chi_{k,i,j}^{(t)}\}$ П. В. Глебов доказал, что для $f \in C[0,1]^2$ либо

$$\varlimsup_{k\to\infty} 4^k \max_{i,j,t} |c_{k,i,j}^{(t)}(f)| > 0,$$

либо $f \equiv \mathrm{const}$. Точнее, он доказал, что из убывания коэффициентов 1-го типа со скоростью $o(4^{-k})$ следует, что f не зависит от x (и тогда эти коэффициенты нулевые). Итак, для любой функции $f \in C[0,1]^2$ имеет место одна из следующих возможностей:

- если $f(x,y) = g(x) + h(y)$, то всё сводится к классической системе Хаара:

$$c_{k,i,j}^{(1)}(f) = 2^{-k/2}c_{k,i}(g), \quad c_{k,i,j}^{(2)}(f) = 2^{-k/2}c_{k,j}(h), \quad c_{k,i,j}^{(3)}(f) = 0;$$

- если функция не представима в виде $f(x,y) = g(x) + h(y)$, то:

$$\varlimsup_{k\to\infty} 4^k \max_{i,j} |c_{k,i,j}^{(t)}| > 0, \quad t = 1, 2.$$

Тем самым, поведение коэффициентов непрерывных функций было описано, за исключением коэффициентов третьего типа для $f(x,y) \neq g(x) + h(y)$. Рассмотрим этот случай. Для гладкой функции $f \in C^2[0,1]^2$ найдётся точка, в которой $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq 0$, откуда следует, что коэффициенты третьего типа не могут убывать со скоростью $o(8^{-k})$. Для кусочно-линейных функций коэффициенты убывают не быстрее чем 4^{-k}. Тем не менее, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Существует непрерывная функция f^* на $[0,1]^2$, не представимая в виде $g(x) + h(y)$, для которой $c_{k,i,j}^{(3)}(f^*) = 0$ при всех k, i, j.*

Функция f^* имеет фрактальную структуру (рис. 2).

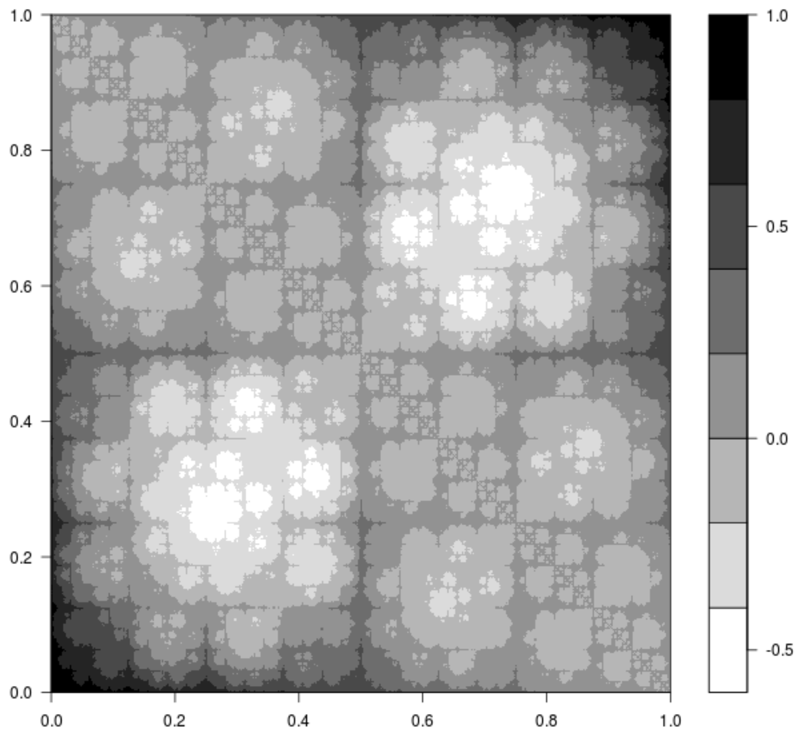


Рис. 2. Функция f^*

Опишем кратко построение этой функции. Рассматривается пространство $C^\circ \subset C[0,1]^2$ функций f, удовлетворящих свойствам (i) $f(0,0) = f(1,1) = 1$, $f(0,1) = f(1,0) = 0$ и (ii) f линейна на сторонах квадрата $[0,1]^2$. Строится отображение "самоподобия" $T\colon C^\circ \to C^\circ$: значение Tf на квадрате $[0,\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2},1]$ получается из f на $[0,1]^2$ делением пополам, то есть $Tf(x,y) = \frac{1}{2}f(2x, 2y-1)$; так же для $[\frac{1}{2},1] \times [0,\frac{1}{2}]$; на оставшихся двух квадратах определение Tf аналогичное, но несколько более сложное. Непрерывная «склейка» значений на разных квадратах достигается за счёт свойств (i) и (ii). Отображение T оказывается сжимающим и в качестве f^* берётся его неподвижная точка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. Изд. 2-е, доп. М. : Изд-во АФЦ, 1999. 560 с.

УДК 517.984

ОРГРАФЫ С КОНТУРАМИ И КМА НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА[1]

Г. С. Бердников (Саратов, РФ)
evrointelligent@gmail.com

Пусть $(G_n, \dot{+})$ — локально компактная группа Виленкина, элементами которой являются бесконечные в обе стороны последовательности

$$x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots), \quad x_j = \overline{0, p-1},$$

где p — любое простое число. Операция сложения $\dot{+}$ определяется как покоординатное сложение по модулю p, т.е. $x\dot{+}y = (x_j\dot{+}y_j)(x_j+y_j \bmod p)$. Пусть

$$G_n = \{x \in G:\ x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, X_{n+1}, \dots)\}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

основная цепочка подгрупп, $G_n^{\perp}$ — совокупность аннуляторов.

На группах Виленкина возможно построить ортогональный кратномасштабный анализ. Задача построения кратномасштабного анализа сводится к нахождению масштабирующей функции φ, которая удовлетворяет равенству $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})$, где $\mathcal{A}$ — оператор растяжения, а функция $m_0(\chi)$ называется маской. В работе [1] рассмотрены ступенчатые функции с компактным носителем и найден алгоритм, позволяющий строить такие масштабирующие функции на локальных полях положительной характеристики по особым образом построенному графу. Аддитивная группа таких полей при $s = 1$ является группой Виленкина. Таким образом найдено достаточное условие масштабирующей функции на группах Виленкина, при условии, что такая функция является финитной и ступенчатой.

Данное исследование решает подобную задачу для функций со сколь угодно малыми промежутками постоянства. Преобразование Фурье таких функций является ступенчатой функцией с некомпактным носителем.

Рассмотрим ориентированное к корню дерево T с корнем равным 0. Остальные вершины пусть принимают значения от 1 до $p-1$, причем будем считать, что каждое число встречается в дереве ровно один раз. Такое дерево является частным случаем при $N = 1$ N-валидного дерева, определенного в работе [2]. Найдем в дереве путь T_h длины $h \geq 0$, обладающий следующими условиями:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102-а).

1) он не содержит корень;

2) он содержит лист;

3) степень захода всех вершин, входящих в путь (кроме листа) равна 1.

Путем T_0 будем считать листья.

Имея такой путь, соединим последнюю вершину пути со входящим в этот путь листом. Очевидно, получим ориентированный граф Г, содержащий контур, или петлю, если $h = 0$.

Теорема 1. *Пусть* Г — *ориентированный граф, описанный выше. Тогда по этому графу можно построить ступенчатую функцию* $\hat{\varphi}$ *с некомпактным носителем. Эта функция является преобразованием Фурье функции* φ*, порождающей ортогональный кратномасштабный анализ на группе Виленкина, причем* $supp\ \varphi \subset \mathfrak{G}_1$ *и промежутки ее постоянства сколь угодно малы.*

Алгоритм построения такой функции по графу аналогичен описанному в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S.* On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic. http://arxiv.org/abs/1503.08600.

2. *Lukomskii S. F., Berdnikov G. S.* N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups // Int. J. Wavelets Multiresolut Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 5. 23 p. DOI: 10.1142/S021969131550037X.

УДК 519.62

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ЗАДАЧАХ НАВИГАЦИИ ПО ГЕОФИЗИЧЕСКИМ ПОЛЯМ[1]

В. И. Бердышев, В. Б. Костоусов (Екатеринбург, РФ)
bvi@imm.uran.ru, vkost@imm.uran.ru

В проблеме навигации автономного движущегося в $X = \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ аппарата по геофизическим полям (г.ф.п.) актуальна задача построения траекторий, учитывающих визуальные характеристики геофизического поля и расположение наблюдателей f, враждебных или дружественных по отношению к движущемуся объекту. В частном случае г.ф.п. представляется в виде замкнутого телесного множества $G \subset X$, $X \backslash G$ связно, препятствующего видимости и движению. Движение объекта осуществляется внутри «коридора» Y, $Y \cap G = \varnothing$, являющегося окрестностью заранее рассчитанной траектории

$$\mathcal{T}^0 = \{t = t(\tau),\ 0 \le \tau \le 1,\ t(0) = t_*,\ t(1) = t^*\}, \quad \mathcal{T}^0 \cap G = \varnothing,$$

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00702).

соединяющей начальную t_* и конечную точки t^*. Обозначим через $\mathbb{T}$ совокупность траекторий $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} \subset Y$, соединяющих точки t_* и t^*. Пусть $s(t)$ — множество точек из $X \backslash G$, невидимых из точки t. Естественно предположить, что наблюдатели располагаются вблизи теневого множества $s(t)$.

В докладе, в частности, предполагается, при некоторых условиях на G рассмотреть задачу поиска траектории $\widehat{\mathcal{T}} \in \mathbb{T}$ такой, что

$$\max_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \min_{t \in \mathcal{T}} \rho(t, s(t)) = \min_{t \in \widehat{\mathcal{T}}} \rho(t, s(t)),$$

а также, при ограничениях на $\mathcal{T}$ задачу

$$\max_{\mathcal{T}} \int\limits_{\mathcal{T}} \rho(t, s(t))\, dt.$$

Для полиэдральных G и Y обсуждается алгоритм численного построения оптимальных траекторий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердышев В. И.* К задаче сопровождения движущегося объекта наблюдателями // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 46–55.

2. *Бердышев В. И., Костоусов В. Б.* Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Екатеринбург : УрО РАН. 2007. 270 с.

УДК 517.518.47

О СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ L_2 ПО НЕКОТОРЫМ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ[1]

И. Л. Блошанский, Д. А. Графов (Москва, РФ)
ig.bloshn@gmail.com, grafov.den@yandex.ru

Пусть $S_n(x; f)$, $n \in \mathbb{Z}_1^N$, — последовательность прямоугольных частичных сумм кратного тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $\mathbb{T}^N = [-\pi, \pi)^N$, $N \geq 2$. Пусть номер $n = (n_1, \dots, n_N)$ частичной суммы $S_n(x; f)$ имеет k компонент, $1 \leq k \leq N-2$, которые являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей $\{n^{(s)}\}$, $n^{(s)} \in \mathbb{Z}_1^1$, т.е. $n^{(1)} = 1$ и $\frac{n^{(s+1)}}{n^{(s)}} \geq q > 1$, $s = 1, 2, \dots$.

П. Шёлиным [1] было доказано, что для любой лакунарной последовательности $\{n_1^{(\lambda_1)}\}$, $n_1^{(\lambda_1)} \in \mathbb{Z}_1^1$, $\lambda_1 = 1, 2, \dots$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, $S_{n_1^{(\lambda_1)}, n_2}(x; f)$ сходится почти всюду (п.в.) на $\mathbb{T}^2$. М. Кожима [2] обобщил этот результат, доказав, что если $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417).

$p > 1$, $N \geq 3$, и $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_1^1, \lambda_j = 1, 2, \ldots, j = 1, \ldots, N-1$, — лакунарные последовательности, то

$$\lim_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}, n_N \to \infty} S_{n_1^{(\lambda_1)}, \ldots, n_{N-1}^{(\lambda_{N-1})}, n_N}(x; f) = f(x) \text{ п.в. на } \mathbb{T}^N.$$

Как заметил М. Кожима (см. [2, теорема 2]), используя функцию Ч. Феффермана из [3], легко доказать, что сформулированный выше результат не может быть усилен в следующем смысле: для любой последовательности $\widetilde{n} = (n_3, n_4, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_0^{N-2}$ (в частности, каждая компонента вектора $\widetilde{n}$ может быть элементом лакунарной последовательности) существует непрерывная функция $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, такая, что

$$\overline{\lim_{n_1, n_2, \widetilde{n} \to \infty}} |S_{n_1, n_2, \widetilde{n}}(x; f)| = +\infty \text{ п.в. на } \mathbb{T}^N.$$

Последний результат показывает, что, как только мы оставляем две компоненты вектора $n = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$ — номера $S_n(x; f)$ — «свободными» (в частности, не являющимися элементами никаких лакунарных последовательностей), класс функций $\mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 3$, уже не является «классом сходимости п.в.» указанного разложения. Тем не менее, можно найти такие условия на «нелакунарные» компоненты вектора n (в последовательности номеров частичных сумм $S_n(x; f)$), что даже классы $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, при $N \geq 3$ остаются классами сходимости п.в. (указанных разложений) и в случае, когда нелакунарных компонент больше одной, а для некоторых подпространств $L_p(\mathbb{T}^N)$ все нелакунарные компоненты могут быть даже «свободными».

Пусть $M = \{1, \ldots, N\}$ и $s \in M$. Обозначим: $J_s = \{j_1, ..., j_s\}$, $j_q < j_l$ при $q < l$, — непустое подмножество множества M, и пусть $\lambda = \lambda[J_k] = (\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_1^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1, \ldots, k$. Символом $n^{(\lambda)} = n^{(\lambda)}[J_k] = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$ будем обозначать такой N-мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$ являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей, $n_j^{(\lambda_j)} \to \infty$ при $\lambda_j \to \infty$. Последовательности частичных сумм вида $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$ будем называть «J_k-лакунарными» последовательностями частичных сумм кратного ряда Фурье.

В работе [4] для функций из классов $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \geq 3$, мы доказали сходимость п.в. на $\mathbb{T}^N$ J_k-лакунарной последовательности частичных сумм, $1 \leq k \leq N-2$, в случае, когда $N-k$ нелакунарных компонент n_j, $j \in M \setminus J_k$, вектора $n^{(\lambda)}[J_k]$ удовлетворяют условию $c_1 \leq n_j/n_m \leq c_2$, $j, m \in M \setminus J_k$, $c_1, c_2 = const$ (т.е. по нелакунарным компонентам имеет место суммируемость по расширяющейся системе прямоугольников).

Возник, естественно, вопрос о поиске классов функций, которые бы обеспечивали сходимость J_k-лакунарной последовательности частичных сумм при $1 \le k \le N-2$, но нелакунарные компоненты n_j с номерами $j \in M \setminus J_k$ вектора $n^{(\lambda)}[J_k]$ были бы либо «более свободными», чем в работе [4], либо вообще «свободными».

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть J_{N-2} — произвольная выборка из M, $N \ge 3$. Если коэффициенты Фурье $c_m(f)$ функции $f \in L_2(\mathbb{T}^N)$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_N=-\infty}^{+\infty} |c_m(f)|^2 \log^2\Big[\min_{i,\,j \in M \setminus J_{N-2}} (|m_i|, |m_j|) + 2\Big] < +\infty,$$

то

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_{N-2}, \\ n_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_{N-2}}} S_{n^{(\lambda)}[J_{N-2}]}(x; f) = f(x) \quad \text{почти всюду на} \quad \mathbb{T}^N.$$

Замечание. Из результата Е. М. Никишина [5, теорема 4] легко получить, что $\log^2\big[\min_{i,\,j \in M \setminus J_{N-2}} (|m_i|, |m_j|) + 2\big]$ в теореме 1 нельзя заменить на $\gamma(m_i, m_j) \log^2\big[\min_{i,\,j \in M \setminus J_{N-2}} (|m_i|, |m_j|) + 2\big]$ для любой последовательности $\gamma(m_i, m_j) \to 0$ при $m_i, m_j \to \infty$, $i, j \in M \setminus J_{N-2}$.

Пусть $\omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности. Фиксируем произвольную выборку J_{N-2}, $J_{N-2} \subset M$, и положим:

$$\widehat{H}^{\omega}(\mathbb{T}^N) = \widehat{H}^{\omega, J_{N-2}}(\mathbb{T}^N) = \Bigg\{ f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N) :$$

$$\omega^*(\delta, f) = \sup_{\substack{x_j,\, y_j \in \mathbb{T}^1,\, j \in M, \\ \sum\limits_{i \in M \setminus J_{N-2}} (x_i - y_i)^2 < \delta^2}} |f(\widetilde{x}) - f(\widetilde{y})| = O(\omega(\delta)) \Bigg\},$$

где $\widetilde{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\widetilde{y} = (y_1, \dots, y_N)$, $N \ge 3$, причем $y_i = x_i$ при $i \in$ $\in J_{N-2}$.

Теорема 2. *Для любой выборки J_{N-2} из M, и для любой функции $f \in \widehat{H}^{\omega_0}(\mathbb{T}^N)$, $N \ge 3$, где $\omega_0(\delta)$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию*

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t} \Big[\omega_0\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big]^2 dt < +\infty,$$

существует предел

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_{N-2}, \\ n_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_{N-2}}} S_{n^{(\lambda)}[J_{N-2}]}(x; f) = f(x) \quad \text{почти всюду на} \quad \mathbb{T}^N.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sjölin P.* Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series // Arkiv Matem. 1971. Vol. 9, № 1. P. 65–90.

2. *Kojima M.* On the almost everywhere convergence of rectangular partial sums of multiple Fourier series // Sci. Repts. Kanazawa Univ. 1977. Vol. 22, № 2. P. 163–177.

3. *Fefferman C.* On the divergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77, № 2. P. 191–195.

4. *Bloshanskii I. L., Grafov D. A.* Sufficient conditions for convergence almost everywhere of multiple trigonometric Fourier series with lacunary sequence of partial sums // Real Analysis Exchange. (принято к печати).

5. *Никишин Е. М.* Множители Вейля для кратных рядов Фурье // Матем. сб. 1972. Т. 89, № 2. С. 340–348.

УДК 517.51

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Д. И. Бойцов, С. П. Сидоров (Саратов, РФ)
dmitriy.boytsov@gmail.com, sidorovsp@info.sgu.ru

Условия сходимости последовательностей линейных положительных операторов $\{K_n\}_{n\geq 1}$ к тождественному оператору в пространстве непрерывных функций были найдены П. П. Коровкиным [1, 2]. Количественные результаты об оценке скорости сходимости $K_n f$ к f были получены в работе [3]. Развивая идеи и результаты работ [4–6], в настоящей статье мы получаем некоторые количественные результаты по оценке скорости сходимости для последовательностей формосохраняющих операторов.

Пусть X есть компактное подмножество $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^X$ есть пространство всех действительнозначных функций, определенных на X. Пусть B есть подмножество $\mathbb{R}^X$, A есть подпространство $C(X)$, $A \subset B$. Пусть $L : B \to \mathbb{R}^X$ есть линейный оператор, такой, что $L(A) \subset C(X)$.

Пусть $P = \{f \in B : \ Lf \geq 0\}$ есть конус в A. Пусть $U = \mathrm{span}\ \{u_i\}_{i\in I}$ есть подпространство A, удовлетворяющее следующим условиям:

1) существует элемент $u \in U$, такой, что $Lu(t) = 1$ для всех $t \in X$;

2) существует элемент $v \in U$, такой, что $Lv(t) = t$ для всех $t \in X$;

3) существуют такие функции $\{a_i\}_{i\in I}$, определенные на X, такие, что для всех $t, x \in X$ выполнено неравенство $Lg_x(t) \geq cLh_x(t)$, $Lg_x(x) = 0$, где $g_x := \sum_{i\in I} a_i(x)u_i$, c есть положительное действительное число, не зависящее от x и t, и h_x удовлетворяет $Lh_x(t) = (t-x)^2$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00140).

Теорема. *Пусть* $\{K_n\}_{n\geq 1}$, $K_n : A \to B$, *есть последовательность линейных операторов, удовлетворяющих* $K_n(P) \subset P$ *для всех* $n \geq 1$. *Тогда для всякой* $f \in A$ *и любого* $n = 1, 2, \ldots$ *будет*

$$|(Lf - L(K_n f))(x)| \leq |Lf(x)| \cdot |(L(K_n u) - Lu)(x)| +$$
$$+\delta_n^{-1}|(L(K_n v) - Lv)(x)|\omega_1(Lf, \delta_n) + |L(K_n u)(x) + \gamma_n^2(x)\delta_n^{-2}| \cdot \omega_2(Lf, \delta_n),$$

где $\gamma_n^2(x) = c^{-1}L(K_n g_x)(x)$.

Говорят, что функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ является k-выпуклой, $k \geqslant 1$, на $[0,1]$, если для произвольно выбранных $k+1$ различных точек $t_0, \ldots, t_k$ из $[0,1]$, имеет место неравенство

$$[t_0, \ldots, t_k]f \geqslant 0,$$

где $[t_0, \ldots, t_k]f$ означает разделенную разность порядка k функции f по узлам $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_k \leqslant 1$. Функция f является 0-выпуклой, если $f(t_0) \geqslant 0$ для произвольного $t_0 \in [0,1]$.

Обозначим $C^k[0,1]$, $k \geqslant 0$, пространство всех действительнозначных k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $[0,1]$. Пусть D^k будет оператором дифференцирования порядка k, т.е. $D^k f(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k}$. Обозначим Δ^k конус всех k-выпуклых функций, определенных на $X = [0,1]$. Обозначим $e_i(x) = x^i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Следствие (см. [4, 8]). *Пусть* $L_n : C^k[0,1] \to C^k[0,1]$, $n \geqslant 1$, *есть последовательность линейных операторов таких, что* $L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k$. *Тогда для всякой* $f \in C^k(X)$ *и для любых* $x \in (0,1)$, $\delta_n > 0$, *справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} |D^k f(x) - D^k L_n f(x)| &\leq \frac{1}{k!}|D^k f(x)||D^k e_k(x) - D^k L_n e_k(x)| + \\ &+\delta_n^{-1}\left|D^k L_n\left(\frac{1}{(k+1)!}e_{k+1} - \frac{1}{k!}xe_k\right)(x)\right|\omega_1(D^k f, \delta_n) + \\ &+\left(\frac{1}{k!}D^k L_n e_k(x) + \delta_n^{-2}\beta_n^2(x)\right)\omega_2(D^k f, \delta_n), \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\beta_n^2(x) = \frac{1}{2}D^k L_n\left(\frac{2}{(k+2)!}e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!}xe_{k+1} + \frac{1}{k!}x^2 e_k\right)(x).$$

При $k = 0$ получаем результат [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Korovkin P. P.* Linear Operators and Approximation Theory. Delhi : Hind. Publ. Comp., 1960.

2. *Коровкин П. П.* О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций // ДАН СССР. 1953. Т. 90, № 5. С. 961–964.

3. *Shisha O., Mond B.* The degree of convergence of linear positive operators // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1968. Vol. 60. P. 1196–1200.

4. *Gonska H. H.* Quantitative Korovkin type theorems on simultaneous approximation // Math. Z. 1984. Vol. 186. P. 419–433.

5. *Knoop H.-B., Pottinger P.* Ein satz vom Korovkin-typ fur C^k raume // Math. Z. 1976. Vol. 148. P. 23–32.

6. *Muñoz-Delgado F. J., Ramírez-González V., Cárdenas-Morales D.* Qualitative Korovkin-Type Results on Conservative Approximation // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144–159.

7. *Păltănea R.* Best constants in estimates with second order moduli of continuity // Approx. Theory. (Proc. Int. Dortmund meeting on Approx. Theory 1995, ed. by M. W. Müller et al.). Berlin : Akad. Verlag 1995. P. 251–275.

8. *Kacsó D. P.* Simultaneous approximation by almost convex operators // Rend. Circ. Mat. Palermo. 2002. Suppl. 68 (2), pt. II. P. 523–538.

517.5

ТОНКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ХАЙЛАША – СОБОЛЕВА M^p_α ПРИ $p > 0$. ТОЧКИ ЛЕБЕГА

С. А. Бондарев, В. Г. Кротов (Минск, Беларусь)
bondarevSA@bsu.by, krotov@bsu.by

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ. Шары, порожденные метрикой d, обозначаем так:

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Будем предполагать, что мера μ удовлетворяет условию удвоения с показателем $\gamma > 0$: для некоторой постоянной a_μ выполнено неравенство

$$\mu(B(x, R)) \le a_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu(B(x, r)), \quad x \in X,\ 0 < r \le R.$$

Для функции $f \in L^p(X)$ обозначим через $D_\alpha[f]$ класс всех неотрицательных μ-измеримых функций g, для каждой из которых существует такое множество $E \subset X$, $\mu(E) = 0$, что

$$|f(x) - f(y)| \le \big[d(x, y)\big]^\alpha [g(x) + g(y)], \quad x, y \in X \setminus E.$$

Элементы $D_\alpha[f]$ называются α-градиентами функции f.

Классы Хайлаша – Соболева $M^p_\alpha(X)$, $p, \alpha > 0$, вводятся так

$$M^p_\alpha(X) = \{f \in L^p(X) : D_\alpha[f] \cap L^p(X) \neq \varnothing\},$$

они нормируются следующим образом:

$$\|f\|_{W^p_\alpha(X)} = \|f\|_{L^p(X)} + \inf\left\{\|g\|_{L^p(X)} : g \in D_\alpha[f] \cap L^p(X)\right\}.$$

(при $0 < p < 1$ выражение это — лишь квазинорма).

Будем использовать обозначение

$$f_B = \fint_B f\, d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f\, d\mu \tag{1}$$

для среднего значения функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ по шару $B \subset X$.

Мы изучаем массивность множества точек Лебега для функций из $M^p_\alpha(X)$. Этой задаче посвящено достаточно много работ (см., например, [1–3], а также библиографию в этих работах).

Обычно точками Лебега называют такие точки x, в которых интегральные средние (1) по шарам $B = B(x, r)$ сходятся при $r \to +0$.

Мы будем рассматривать функции, которые не являются суммируемыми, в общем случае. Поэтому нам необходимо обобщить понятие точки Лебега с помощью подходящей замены интегральных средних.

Для любых $p > 0$, шара $B \subset X$ и функции $f \in L^p(B)$ существует число $I^{(p)}_B f$, для которого

$$\fint_B |f(y) - I^{(p)}_B f|^p\, d\mu(y) = \inf_{I \in \mathbb{R}} \fint_B |f(y) - I|^p\, d\mu(y).$$

При $0 < p \leq 1$ число $I^{(p)}_B f$ может определяться неоднозначно. В этом случае фиксируем любое из возможных значений $I^{(p)}_B f$. Эти числа будут играть роль интегральных средних в случаях, когда функция несуммируема.

Классы M^p_α стандартно порождают емкости

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf\{\|f\|^p_{M^p_\alpha} : f \in M^p_\alpha(X), f \geq 1 \text{ в окрестности } E \subset X\}.$$

Используем эти емкости для оценки исключительных множеств.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in (0, 1]$, $0 < p < \gamma/\alpha$ *и* $f \in M^p_\alpha(X)$. *Тогда существует такое множество* $E \subset X$, *что* $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ *и для любого*

$x \in X \setminus E$ существует предел

$$\lim_{r\to+0} I^{(p)}_{B(x,r)} f = f^*(x). \tag{2}$$

Кроме того,

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q \, d\mu = 0, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}. \tag{3}$$

Замечание 1. В дополнение к теореме 1 для любого $x \in X \setminus E$ мы можем утверждать следующее: 1) если $0 < \theta \le q$, то очевидно

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} |f - I^{(\theta)}_{B(x,r)} f|^\theta \, d\mu = 0,$$

2) если $0 < \theta \le q$, то

$$\lim_{r\to+0} I^{(\theta)}_{B(x,r)} f = f^*(x),$$

3) если $p \ge \frac{\gamma}{\gamma+\alpha}$ (тогда $q \ge 1$), то

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|^q \, d\mu = 0,$$

в частности,

$$\lim_{r\to+0} f_{B(x,r)} = f^*(x).$$

В недавнем препринте [4] рассматривался другой подход к определению точек Лебега, основанный на использовании так называемых δ-медиан $(0 < \delta \le 1/2)$

$$m^\delta_f(E) = \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in E : f(x) > a\}) < \delta\mu(E)\}.$$

Основной результат из [4], относящийся к классам $M^p_\alpha(X)$, состоит в следующем.

Следствие 1. *Пусть $\alpha \in (0,1]$, $0 < p < \gamma/\alpha$ и $f \in M^p_\alpha(X)$. Тогда существует такое множество $E \subset X$, что $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ и для любого $x \in X \setminus E$ и любого $0 < \delta \le 1/2$ существует предел*

$$\lim_{r\to+0} m^\delta_f(B(x,r)) = f^*(x). \tag{4}$$

Это утверждение вытекает из теоремы 1 и простого неравенства

$$|m_f^\delta(B) - I_B^{(p)} f| \leq \left(\frac{1}{\delta} \fint_B |f - I_B^{(p)} f|^p \, d\mu \right)^{1/p}. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь другой способ оценки дополнения ко множеству, на котором выполнено (2). Он основан на использовании так называемых модифицированных вместимостей и мер Хаусдорфа (см., например, [5, 6]).

Пусть задана (измеряющая) возрастающая функция $h : (0,1] \to \to (0,1]$, $h(+0) = 0$. Введем классические вместимость

$$H_R^h(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty h(r_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i), \quad r_i < R \right\}$$

и меру Хаусдорфа

$$H^h(E) = \lim_{R \to +0} H_R^h(E).$$

множества $E \subset X$ (в случае $h(t) = t^s$ пишем $H^s(E)$ вместо $H^{t^s}(E)$). Размерность Хаусдорфа определяется как

$$\dim_H(E) = \inf\{s : H^s(E) = 0\}.$$

Кроме того, модифицированной R-вместимостью Хаусдорфа коразмерности h для множества $E \subset X$ называется

$$\mathcal{H}_R^h(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty \frac{\mu(B(x_i, r_i))}{h(r_i)} : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i), \quad r_i < R \right\}$$

(точная нижняя грань здесь и определении классической H_R^h берется по всевозможным покрытиям множества E счетными семействами шаров), а величина

$$\mathcal{H}^h(E) = \lim_{R \to +0} \mathcal{H}_R^h(E)$$

называется модифицированной мерой Хаусдорфа коразмерности h. Отметим, что вместимость и мера Хаусдорфа (модифицированные или классические) имеют одинаковые наборы нулевых множеств.

Мы будем рассматривать измеряющие функции h вида

$$h(t) = \left(\frac{t^\alpha}{\varphi(t)} \right)^p, \tag{6}$$

где $\varphi : (0,1] \to (0,1]$ — возрастающая функция, $\varphi(+0) = 0$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$ и $f \in M^p_\alpha(X)$. Пусть также задана такая измеряющая функция* (6), *что*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi(2^{-i}) < \infty. \tag{7}$$

Тогда существует такое множество $E \subset X$, что $\mathcal{H}^h(E) = 0$ и для любого $x \in X \setminus E$ существует предел (2) *и выполнено* (3).

Замечание 1 к теореме 1 сохраняет силу и для теоремы 2.

Из теоремы 2 и неравенства (5) выводится подобный результат с использованием медиан $m^\delta_f(B(x,r))$ на месте наилучших приближений $I^{(p)}_{B(x,r)}f$.

Следствие 2. *Пусть $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$, $f \in M^p_\alpha(X)$ и h — измеряющая функция* (6), *удовлетворяющая условию* (7). *Тогда существует такое множество $E \subset X$, что $\mathcal{H}^h(E) = 0$ и для любого $x \in X \setminus E$ и любого $0 < \delta \le 1/2$ существует предел* (4) *и выполнено* (3).

Это утверждение без соотношения (3) для $\alpha \in (0,1]$ и $p \in (0,1)$ было доказано в [6].

Следствие 3. *Пусть $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$ и $f \in M^p_\alpha(X)$. Тогда существует такое множество $E \subset X$, что $\dim_H(E) \le \gamma - \alpha p$ и для любого $x \in X \setminus E$ и существует предел (4) и выполнено (3).*

Неотрицательную функцию ν, определенную на σ–алгебре борелевских множеств из X, будем называть внешней мерой, если она монотонна и субаддитивна с некоторой постоянной a_ν. Последнее означает, что для любой последовательности борелевских множеств $E_k \subset X$ выполнено неравенство

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \le a_\nu \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k).$$

Теорема 3. *Пусть заданы $0 < \beta < \alpha$, $0 < p < \gamma/\alpha$ и внешняя мера ν, удовлетворяющая условию*

$$\nu(B) \le c_\nu r_B^{-(\alpha-\beta)p} \mu(B) \quad \textit{для всех шаров} \quad B \subset X,\ r_B \le 1. \tag{8}$$

Тогда для любой функции $f \in M^p_\alpha(X)$ существует такое множество $E \subset X$, что $\nu(E) = 0$ и для всех $x \in X \setminus E$

$$\lim_{r \to +0} r^{-\beta}[f^*(x) - I^{(p)}_{B(x,r)}f] = 0$$

и

$$\lim_{r\to+0} r^{-\beta}[m_f^\delta(B(x,r)) - f^*(x)] = 0, \quad 0<\delta\le 1/2.$$

Кроме того, при $x\in X\setminus E$

$$\lim_{r\to+0} r^{-\beta}\left(\fint_{B(x,r)} |f-f^*(x)|^q\,d\mu\right)^{1/q} = 0 \quad \text{где} \quad \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{\gamma}.$$

Примерами внешних мер, удовлетворяющих условию (8), могут служить емкость $\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,p}$, модифицированная вместимость Хаусдорфа $\mathcal{H}_R^h$ коразмерности $h(t) = t^{(\alpha-\beta)p}$. Классическая вместимость Хаусдорфа $H_R^{\gamma-(\alpha-\beta)p}$ также удовлетворяет этому условию, но лишь локально.

В случае $p\ge\frac{\gamma}{\gamma+\alpha}$ в теореме 3 для $x\in E$ можно утверждать также

$$\lim_{r\to+0} r^{-\beta}\left(\fint_{B(x,r)} f\,d\mu - f^*(x)\right) = 0.$$

и

$$\lim_{r\to+0} r^{-\beta}[I^{(\theta)}_{B(x,r)}f - f^*(x)] = 0, \quad 0<\theta\le q.$$

Для $p>1$, классической меры Хаусдорфа и средних f_B утверждение теоремы 3 доказано в [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kinnunen J., Latvala V.* Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces // Rev. Mat. Iberoam. 2002. Vol. 18, № 3. P. 685–700.

2. *Kinnunen J., Tuominen H.* Pointwise behavior of M^{11} Sobolev functions // Math. Zeit. 2007. Vol. 257, № 3. P. 613–630.

3. *Прохорович М. А.* Меры Хаусдорфа и точки Лебега для классов Соболева W^p_α, $\alpha>0$, на пространствах однородного типа // Матем. заметки. 2009. Т. 84, № 4. С. 616–621.

4. *Heikkinen T., Koskela P., Tuominen H.* Approximation and quasicontinuity of Besov and Triebel – Lizorkin functions. Preprint 2015, arXiv:1505.056 80.

5. *Heikkinen T., Tuominen H.* Approximation by Hölder functions in Besov and Triebel – Lizorkin spaces. Preprint 2015, arXiv:1504.02585.

6. *Karak N.* Generalized Lebesgue points for Sobolev functions. Preprint 2015, arXiv:1506.08026.

7. *Кротов В.Г., Прохорович М. А.* Скорость сходимости средних Стеклова на метрических пространствах с мерой и размерность Хаусдорфа // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 145–148.

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ ТИПА БЕССЕЛЯ[1]

Н. П. Бондаренко (Саратов, РФ)
BondarenkoNP@info.sgu.ru

Рассмотрим матричное уравнение Штурма – Лиувилля на конечном интервале с особенностью типа Бесселя на одном из концов интервала:

$$\ell(Y) := -Y'' + \left(\frac{\omega}{x^2} + Q(x)\right) Y = \lambda Y, \quad x \in (0, T). \tag{1}$$

Здесь $Y = [y_k(x)]_{k=1}^m$ — вектор-функция, λ — спектральный параметр, $Q(x)$ и ω — $m \times m$ матрицы.

Будем считать, что матрица ω диагональная:

$$\omega = \mathrm{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}, \quad \omega_q \in \mathbb{R}, \quad q = \overline{1, m}.$$

В случае если ω — произвольная эрмитова матрица, ее можно привести к диагональному виду при помощи унитарного преобразования. Пусть для определенности $\omega_q = \nu_q^2 - \frac{1}{4}$, $\nu_1 \ge \nu_2 \ge \dots \ge \nu_m > 0$, $\nu_q \notin \mathbb{N}$, $q = \overline{1, m}$, и матричная функция $x^{1-2\nu_1} Q(x)$ интегрируема на $(0, T)$.

Данная работа посвящена обратной спектральной задаче для уравнения (1) с некоторыми краевыми условиями. Обратные задачи для уравнений с особенностьями типа Бесселя в скалярном случае ($m = 1$) изучались в работах [1, 2]. В работе [3] исследована обратная задача рассеяния для некоторых частных случаев матричных операторов Штурма – Лиувилля с особенностью на полуоси.

В данном работе построены две фундаментальные системы решений уравнения (1): решения типа Бесселя с известным поведением при $x \to 0$ и решения типа Бирхгофа с известной асимптотикой при $\rho \to \infty$. Установлена взаимосвязь этих фундаментальных систем решений, играющая ключевую роль при изучении обратной задачи. Исследуется обратная задача, состоящая в восстановлении матричного потенциала $Q(x)$ и коэффициентов краевых условий по матрице Вейля. Доказана теорема единственности решения обратной задачи (подробности см. в [4]). Доказательство основано на развитии идей метода спектральных отображений (см. [5]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1436.2014К) и РФФИ (проекты № 15-01-04864, № 16-01-00015).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юрко В. А.* Обратная задача для дифференциальных уравнений с особенностями // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. С. 1355–1362.

2. *Freiling G., Yurko V.* Inverse problems for differential operators with singular boundary conditions // Math. Nachr. 2005. Vol. 278, № 12–13. P. 1561–1578.

3. *Агранович З. С., Марченко В. А.* Обратная задача теории рассеяния. Харьков : ХГУ, 1960.

4. *Bondarenko N.* An Inverse Spectral Problem for the Matrix Sturm-Liouville Operator with a Bessel-Type Singularity // International Journal of Differential Equations. 2015. Vol. 2015. Article ID 647396. URL: http://dx.doi.org/10.1155/2015/647396.

5. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007.

ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММАМИ СДВИГОВ ОДНОЙ ФУНКЦИИ[1]

П. А. Бородин (Москва)

pborodin@inbox.ru

Доклад посвящен обсуждению различных результатов следующего типа.

Теорема. *Пусть* $1 \le p < \infty$, *и* 2π*-периодическая функция* f *из действительного пространства* $L_p(\mathbb{T})$ *имеет ряд Фурье* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ *с условиями*

1) $c_0 = 0$, $c_n \ne 0$ *для всех* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

2) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |n||c_n|^2 < \infty$ *при* $1 \le p \le 2$ *или* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |n||c_n|^q < \infty$ *при* $p \ge 2$ $(1/p + 1/q = 1)$.

Тогда суммы сдвигов

$$\sum_{k=1}^{N} f(t + a_k), \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad N = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

плотны в пространстве $L_p^0(\mathbb{T}) = \left\{g \in L_p(\mathbb{T}) : \int_{\mathbb{T}} g(t)\,dt = 0\right\}$.

Условие 2) в этой теореме нельзя заменить на $|c_n| = O(1/n)$ $(n \to \infty)$: для разности индикаторов

$$f(t) = I_{[-\pi,-\alpha]} - I_{[\alpha,\pi)}$$

суммы сдвигов (1) принимают только целые значения и не плотны в $L_p^0(\mathbb{T})$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08335).

УДК 517.983

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. Брук (Саратов, РФ)
vladislavbruk@mail.ru

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $[a,b]$ — отрезок, $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $\Delta\to\mathbf{p}(\Delta)$, определенную на борелевских множествах $\Delta\subset[a,b]$ и принимающую значения в множестве ограниченных линейных операторов, действующих в H. Функция $\mathbf{p}$ называется операторной мерой на $[a,b]$ (см., например, [1, с. 324]), если $\mathbf{p}$ равна нулю на пустом множестве и для любых непересекающихся борелевских множеств Δ_n справедливо равенство $\mathbf{p}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{p}(\Delta_n)$ со слабо сходящимся рядом. Далее всякую меру $\mathbf{p}$, определенную на борелевских множествах $\Delta\subset[a,b]$ (включая «обычную» меру Лебега μ, для которой $\mu[\alpha,\beta)=\beta-\alpha$), продолжаем на некоторый отрезок $[a_0,b_0]\supset(a_0,b_0)\supset[a,b]$, полагая $\mathbf{p}(\Delta)=0$ для всех борелевских множеств $\Delta\subset[a_0,b_0]\backslash[a,b]$.

Через $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p})$ обозначим $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p})=\rho(\Delta)=\sup\sum\limits_j\|\mathbf{p}(\Delta_j)\|$, где sup распространяется на конечные суммы непересекающихся борелевских множеств $\Delta_j\subset\Delta$. Число $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p})$ называется вариацией меры $\mathbf{p}$ на борелевском множестве Δ.

Пусть мера $\mathbf{p}$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. Тогда для ρ-почти всех $\xi\in[a,b]$ существует такая операторная функция $\xi\to\Psi(\xi)$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, $\|\Psi(\xi)\|=1$, что для любого борелевского множества $\Delta\subset[a,b]$ справедливо равенство $\mathbf{p}(\Delta)=\int\limits_\Delta\Psi(\xi)d\rho$. Функция Ψ определяется однозначно с точностью до значений на множестве нулевой ρ-меры и этот интеграл сходится в смысле обычной нормы операторов ([1, с. 325]).

Функция h со значениями в H интегрируема по мере $\mathbf{p}$ на Δ, если существует интеграл (в смысле Бохнера) $\int\limits_\Delta\Psi(t)h(t)d\rho=\int\limits_\Delta(d\mathbf{p})h(t)$. Далее символом $\int\limits_{t_0}^{t}$ обозначаем $\int\limits_{[t_0,t)}$, если $t_0<t$; $-\int\limits_{[t,t_0)}$, если $t_0>t$; и 0, если $t_0=t$.

Предположим, что функция h интегрируема по мере $\mathbf{p}$ на (a_0,b_0). Тогда функция $y(t)=\int\limits_{t_0}^{t}(d\mathbf{p})h(s)$ непрерывна слева в сильном смысле. Пусть $[l_1,l_2]\subset[a_0,b_0]$. Рассмотрим множество функций, измеримых по Борелю, ограниченных на $[l_1, l_2]$, непрерывных слева (в сильном смысле) на $(l_1, l_2]$ и принимающих значения в H. Определим норму равенством $\|u\|_{[l_1,l_2]} = \sup\limits_{t\in[l_1,l_2]} \|u(t)\|$. Полученное банахово пространство обозначим $\widetilde{C}[l_1, l_2]$.

Теорема 1. *Пусть мера* $\mathbf{p}$ *имеет ограниченную вариацию на* $[a, b]$. *Тогда для любой функции* $g \in \widetilde{C}[a_0, b_0]$ *существует единственное решение уравнения*

$$y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p})y(s) + g(t), \quad a_0 \leqslant t_0 \leqslant b_0, \quad a_0 \leqslant t \leqslant b_0, \tag{1}$$

принадлежащее пространству $\widetilde{C}[\tau, b_0]$, *где* $\tau < t_0$ *и* τ *достаточно близко к* t_0.

Следствие 1. *Если в теореме* 1 $t_0 = a_0$, *то существует единственное решение уравнения* (1), *принадлежащее* $\widetilde{C}[a_0, b_0]$.

Пример. Пусть $H = \mathbb{C}$. Рассмотрим на отрезке $[0, 2]$ меру $\mathbf{p}$, заданную производящей функцией $\widehat{p}(t)$, равной нулю при $t \leqslant 1$ и -1 при $t > 1$. Тогда решением уравнения $y = \int\limits_2^t y\, d\mathbf{p}$, кроме функции, тождественно равной нулю, является функция $w(t)$, равная 1, если $t \leqslant 1$, и нулю, если $t > 1$. Далее, функция $y = 1$ является решением уравнения $y = 1 + \int\limits_2^t y\, d\mathbf{p}$ при $1 < t \leqslant 2$. Однако это решение не продолжается влево за точку 1. Действительно, пусть решение продолжено каким-либо образом за точку 1. Тогда $y(1) = -\int\limits_1^2 y\, d\mathbf{p}$. Отсюда $y(1) = 1 + \int\limits_2^1 y\, d\mathbf{p} = 1 + y(1)$, что невозможно.

Рассмотрим интегральные уравнения

$$y_k(t) = x_k + \int\limits_{a_0}^{t} (d\mathbf{p}_k)y_k(s) + \int\limits_{a_0}^{t} f_k(s)\, ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{2}$$

где $x_k \in H$, $f_k \in L_1(H; a, b)$ и f_k обращается в нуль вне отрезка $[a, b]$. С каждым уравнением (2) свяжем оператор L_k следующим образом. Область определения $\mathcal{D}(L_k)$ оператора L_k состоит из функций $y_k \in \widetilde{C}[a_0, b_0]$, для которых существует такой элемент $x_k \in H$ и такая функция $f_k \in L_1(H; a, b)$, что выполняется (2). На $\mathcal{D}(L_k)$ оператор L_k действует согласно формуле $L_k y_k = f_k$. Таким образом, $L_k \subset \widetilde{C}[a_0, b_0] \times L_1(H; a, b)$. Оператор L_k замкнут.

К каждому уравнению (2) присоединим граничное условие

$$\Gamma_k y_k = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{3}$$

где $\Gamma_k : \widetilde{C}[a_0, b_0] \to B$ — линейные непрерывные отображения; $c_k \in B$; B — банахово пространство; $k = 0, 1, 2, \dots$.

Сужение оператора L_k на множество функций $y \in \mathcal{D}(L_k)$, удовлетворяющих условию $\Gamma_k y = 0$, обозначим L_{Γ_k}, а сужение оператора Γ_k на $\ker L_k$ обозначим $\widetilde{\Gamma}_k$.

Теорема 2. *Пусть оператор $\widetilde{\Gamma}_0$ взаимно однозначно отображает $\ker L_0$ на B и $\|\Gamma_n - \Gamma_0\| \to 0$, $\mathbf{V}_{[a_0,b_0]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существуют, непрерывны и всюду определены операторы $L_{\Gamma_0}^{-1}$ и $L_{\Gamma_n}^{-1}$ (при достаточно больших n) и последовательность $\{L_{\Gamma_n}^{-1}\}$ сходится к $L_{\Gamma_0}^{-1}$ в равномерной операторной топологии.*

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2, последовательность $\{f_n\}$ сходится к f_0 в $L_1(H; a, b)$ и в граничных условиях (3) последовательность $\{c_n\}$ сходится к c_0 в B. Тогда при $k = 0$ и при достаточно больших k задача (2), (3) имеет единственное решение и $\|y_k(t) - y_0(t)\| \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно по t.*

Пусть операторные меры $\mathbf{p}_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) абсолютно непрерывны, т.е. существуют такие функции $t \to p_k(t)$ ($t \in [a, b]$) со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, что $\|p_k\| \in L_1(a, b)$ и $\mathbf{p}_k(\Delta) = \int_\Delta p_k(t)dt$ для любого борелевского множества $\Delta \subset [a, b]$. Тогда уравнения (2) переходят в дифференциальные уравнения $y_k'(t) = p_k(t)y_k(t) + f_k(t)$. Для таких уравнений в конечномерном случае сходимость решений граничных задач изучалась во многих работах (см. библиографию в [2], где получены наиболее общие результаты).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев : Наук. думка, 1965. 798 с.

2. *Кодлюк Т. И., Михайлец В. М., Рева Н. В.* Предельные теоремы для одномерных краевых задач // Укр. матем. журн. 2013. Т. 65, № 1. С. 70–81.

УДК 517.984

ИНВАРИАНТЫ НА СОВОКУПНОСТИ НАЧАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ЦЕПНЫХ ЭКСПОНЕНТ

А. П. Буланов (Обнинск, РФ)

Рассмотрим две цепные экспоненты

$$L_b(z) = z \cdot B(z), \tag{1}$$

$$L_a(w) = w \cdot A(w). \tag{2}$$

Цепная экспонента (1) определяется последовательностью функций:

$$B(z) = e^{b_1 z \cdot B_1(z)}, \quad B_1(z) = e^{b_2 z \cdot B_2(z)}, \quad ..., \quad B_{k-1}(z) = e^{b_k z \cdot B_k(z)}, \; ...$$

Здесь вводится обозначение $B(z) = \langle e^z; b_1, b_2, ...\rangle$. Аналогично определяется экспонента (2), где $A(w) = \langle e^w; a_1, a_2, ...\rangle$.

Пусть последовательность показателей $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $b_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, ...$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|b_n| = \overline{b} < \infty$. Цепные экспоненты (1) и (2) могут быть взаимно обратными функциями, тогда последовательность показателей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, определяется рекуррентной формулой (5), приведенной ниже (см. также [1, с. 69]).

Первоначальная функция Ламберта

$$w = z \cdot \langle e^z; -b, -b, ...\rangle \tag{3}$$

определяется как обратная функция по отношению к элементарной функции

$$z = w \cdot e^{bw} = w \cdot \langle e^w; b, 0, 0, ...\rangle. \tag{4}$$

Из определения (3) мы видим $b_1 = b_2$; тогда, включая неравенство $b_1 \neq b_2$, мы приходим к обобщению понятия первоначальной функции Ламберта (3). И тогда вместо исходной функции (4), где обозначим $b = a_1$, можно рассматривать конечную цепную экспоненту

$$z = w \cdot \langle e^w; a_1, ..., a_l, 0, 0, ...\rangle,$$

где $a_k \neq 0$, $k = 1, 2, ..., l$, или бесконечную $z = w \cdot \langle e^w; a_1, a_2, ...\rangle$.

Это обобщение является промежуточным между первоначальной функцией Ламберта (4) и гиперфункциями Ламберта (Lambert's W function), которые ввел И. Н. Галидакис в 2004 году. W-функции Ламберта используются при решении некоторых функциональных уравнений, возникающих, в частности, в гравитационной механике (см. [2–4]).

Здесь задача заключается в том, чтобы по заданной функции $w = L_b(z) = z \cdot B(z)$ найти обратную к ней функцию $z = L_a(w) = w \cdot A(w)$, аналитическую в окрестности точки $w = 0$ (или наоборот: по заданной функции $z = L_a(w)$ найти обратную к ней функцию $w = L_b(z)$), т. е. по заданным показателям $b_1, b_2, \ldots$ найти показатели $a_1, a_2, \ldots$.

Легко определяются первые три показателя

$$a_1 = -b_1, \quad a_2 = b_2 - b_1, a_3 = \frac{1}{b_2 - b_1} \cdot (b_1^2 - 2b_1 b_2 + b_2 b_3).$$

Показатели $a_4, a_5, \ldots, a_n$ определяются по упомянутой рекуррентной формуле

$$a_n = \frac{-1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \cdot \Bigg\{ \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{k_1^{k_2} k_2^{k_3} \cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1! k_2! \cdots k_{n-1}!} \times$$

$$\times \big[(-(n+1))^{k_1-1} b_1^{k_1} b_2^{k_2} b_3^{k_3} \cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} + a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}} \big] +$$

$$+ b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n \Bigg\}. \tag{5}$$

В работе [5] в развернутом виде представлены две формулы для определения «обратного» показателя a_4 посредством b_1, b_2, b_3, b_4 и показателя a_5 посредством b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 и a_1, a_2, a_3, a_4.

Цепная экспонента (1) в окрестности точки $z = 0$ является аналитической функцией и ее степенной ряд (см. [9] и [10])

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{n!} \cdot z^n, \tag{6}$$

где

$$H^{(n)}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \times$$

$$\times b_1^{k_1} \cdot (b_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (b_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \ldots \cdot (b_n \cdot k_{n-1})^{k_n}, \tag{7}$$

сходится в круге $K = \left\{ z : \ |z| < \frac{1}{be} \right\}$. В этом же круге сходится и степенной ряд

$$w = z \cdot B(z) = w(0) + \frac{w'(0)}{1!} \cdot z + \frac{w''(0)}{2!} \cdot z^2 + \cdots =$$

$$= B(0) \cdot z + \frac{B'(0)}{1!} \cdot z^2 + \frac{B''(0)}{2!} \cdot z^3 + \cdots \tag{8}$$

Приведем в развернутом виде формы типа $H^{(k)}(a)$ 1-й, 2-й, 3-й и 4-й степени от показателей a_2, a_3, a_4 и a_5, взятых из определения (7).

$$H^{(1)}(a_2) = a_2, \ H^{(2)}(a_2, a_3) = 2a_2 a_3 + a_2^2, \tag{9}$$

$$H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) = 6a_2 a_3 a_4 + 3a_2 a_3^2 + 6a_2^2 a_3 + a_2^3, \tag{10}$$

$$H^{(4)}(a_2, a_3, a_4, a_5) = 24a_2 a_3 a_4 a_5 + 12a_2 a_3 a_4^2 + 24a_2 a_3^2 a_4 + 4a_2 a_3^3 +$$

$$+ 24a_2^2 a_3 a_4 + 24a_2^2 a_3^2 + 12a_2^3 a_3 + a_2^4 \tag{11}$$

Аналогично имеем такие же формы от показателей b_2, b_3, b_4, b_5.

Если развернуть сумму в правой части формулы (5), то напишем слагаемые в количестве $2^n - 1$. В работе [6] представлена в развернутом виде формула для определения a_6 посредством $b_1, \ldots, b_6$ и $a_1, \ldots, a_5$. В правой части этой формулы в фигурной скобке имеем 63 слагаемых. Если же в тех слагаемых, в которых множителями являются a_k, заменить каждый множитель a_k его выражением, вычисленном по данной рекуррентной формуле (5) посредством $b_1, b_2, \ldots, b_k$, то количество слагаемых во много раз увеличится, но среди них окажутся подобные.

Поэтому есть смысл выявлять инварианты. В работах [7] и [8] намечены два пути построения инвариантов, которые существенно уменьшают количество слагаемых в исходном уравнении:

$$0 = z^{(n+1)}(0)|_a - z^{(n+1)}(0)|_b = (n+1)H^{(n)}(a_1, a_2, ..., a_n)-$$

$$-H^{(n)}(-(n+1)\cdot b_1, b_2, ..., b_n). \tag{12}$$

В работе [9] (см. на с. 60 лемму 7) доказана формула, по которой можно форму порядка n и степени n $H^{(n)}(a_{r+1}, a_{r+2}, ..., a_{r+n})$ представить в виде суммы, слагаемые которой являются формами степени n, но порядок формы в каждом слагаемом строго меньше n. При этом заметим, что эти формулы в каждом слагаемом не будут содержать в качестве аргумента показатель a_{r+1}. В уравнении (12) формы $H^{(n)}(a_1, a_2, ..., a_n)$ $H^{(n)}(-(n+1)b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ $n-$го порядка представим посредством форм, порядок которых строго меньше n. Тогда вместо исходного уравнения (12) (поделив части на $(n+1)a_1$) мы имеем равносильное уравнение:

$$\left.\frac{z^{(n+1)}(0)}{(n+1)a_1}\right|_a - \left.\frac{z^{(n+1)}(0)}{(n+1)a_1}\right|_b = 0 =$$

$$= \left[nH^{(n-1)}(a_2, a_3, \ldots, a_n) - nH^{(n-1)}(b_2, b_3, \ldots, b_n\right] +$$

$$+\left[\binom{n}{2} a_1 H^{(n-2)}(2a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}) -\right.$$

$$\left. -\binom{n}{2}(n+1)a_1 H^{(n-2)}(2b_2, b_3, \ldots, b_{n-1})\right] + \ldots$$

$$+\left[\binom{n}{n-1} a_1^{n-2} H^{(1)}((n-1)a_2) -\right.$$

$$\left. -\binom{n}{n-1}(n+1)^{n-2} a_1^{n-2} H^{(1)}((n-1)b_2)\right] + \left[a_1^{n-1} - (n+1)^{n-1} a_1^{n-1}\right]. \tag{14}$$

Если в правой части равенства (14) мы обнаруживаем «равновесную» пару типа $\phi(a)-\phi(b)$, то перемещая слагаемое $-\phi(b)$ в левую часть, где пока еще стоит ноль, мы тем самым строим инвариант n-го порядка. Видно, что разность в первых квадратных скобках является равновесной парой. Разности во вторых квадратных скобках и последующих не являются равновесными и подлежат преобразованиям.

Приведем несколько простых инвариантов (см. ниже список (15)) на совокупности начальных показателей, которые используются как непосредственно, так и в качестве аргументов полиномов, которые могут оказаться инвариантами:

$$\Delta_0=\Delta_0(a)=a_1^2=b_1^2=\Delta_0(b),$$

$$\begin{gathered}\Delta_1=\Delta_1(a)=2a_2-a_1=2b_2-b_1=\Delta_1(b),\\ \Delta_2=\Delta_2(a)=a_2\cdot a_3-a_2^2=b_2\cdot b_3-b_2^2=\Delta_2(b),\\ \varkappa_1=a_2^2-2a_1a_2+a_2a_3=b_2^2-2b_1b_2+b_2b_3,\\ \varkappa_2=a_2(a_2-a_1)=a_2b_2=b_2(b_2-b_1),\\ \varkappa_3=2a_2a_3-2a_1a_2+a_1^2=2b_2b_3-2b_1b_2+b_1^2,\\ \overline{\varkappa_3}=12\varkappa_1-8\Delta_0=12a_2a_3-24a_1a_2+12a_2^2+8a_1^2=\\ =12b_2b_3-24b_1b_2+12b_2^2+8b_1^2. \qquad (15)\end{gathered}$$

В работе [8] (см. там формулу (29)) доказана

Теорема 1. На совокупности показателей обратных функций $w=$ $=z\cdot B(z)$ и $z=w\cdot A(z)$ формы третьей степени

$$\Delta_3=\Delta_3(a)=H^{(3)}(a_2,a_3,a_4)-a_1\overline{\varkappa_3}=H^{(3)}(b_2,b_3,b_4)-b_1\overline{\varkappa_3}=\Delta_3(b) \quad (16)$$

являются инвариантом 4-го порядка.

Теперь, добавляя к списку (15) инвариант Δ_3 и ещё инвариант $\varkappa_4$

$$\varkappa_4=-10\Delta_3-30\Delta_2\Delta_1-45\Delta_1\varkappa_2+\frac{35}{2}\Delta_1\Delta_0. \quad (17)$$

сформулируем утверждение

Теорема 2. На совокупности показателей взаимно обратных функций $w=z\cdot B(z)$ и $z=w\cdot A(z)$ формы четвертой степени

$$\begin{gathered}\Delta_4=\Delta_4(a)=H^{(4)}(a_2,a_3,a_4,a_5)-a_1\varkappa_4=\\ =H^{(4)}(b_2,b_3,b_4,b_5)-b_1\varkappa_4=\Delta_4(b) \qquad (18)\end{gathered}$$

являются инвариантом 5-го порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буланов А. П.* Цепные экспоненты и функции Ламберта // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 43 С. 64–71.

2. *Дубинов А. Е., Галидакис И. Н.* Явное решение уравнения Кеплера // Письма в ЭЧАЯ, 2007. Т. 4 Н.3(139), С. 365–370.

3. *Galidakis I. N.* On an application of Lambert's W function to infinite exponentials // Complex Var. Theory Appl. 2004. Vol. 49, № 11. P. 759–780.

4. *Galidacis I. N.* On Solving the p-th Complex Auxiliary Equation $f^{(p)}(z) = z$ //Complex Variables. 2005. Vol. 50, № 13. P. 977–997.

5. *Буланов А. П.* О рекуррентной формуле определения показателей обратной функции Ламберта // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зим. шк. Саратов, 2012. С. 29–32.

6. *Буланов А. П.* Шестой показатель обратной функции Ламберта, представленной цепной экспонентой // Комплексный анализ и приложения : материалы VI Петрозаводской междунар. конф. Петрозаводск, 2012. С. 5–10.

7. *Буланов А. П.* Об инвариантах на совокупности показателей взаимно обратных функций Ламберта, представленных цепными экспонентами // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зим. матем. шк. Воронеж, 2013. С. 295–303.

8. *Буланов А. П.* О возможных инвариантах на совокупности показателей взаимно обратных цепных экспонент // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 17-й междунар. Сарат. зим. шк. Саратов, 2014. С. 52–61.

9. *Буланов А. П.* Регулярность степеней бесконечной кратности // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62, № 5. С. 49–78.

10. *Буланов А. П.* Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 11. С. 3–34.

УДК 517.984

О РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

М. Ш. Бурлуцкая (Воронеж, РФ)
bmsh2001@mail.ru

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = B\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + Q(x)u(x,t), \tag{1}$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \qquad u_1(1,t) = u_2(1,t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00238, № 14-01-00867).

где $x \in [0,1]$, $t \in (-\infty,+\infty)$, $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $u_j(x,t)$ и $\varphi_j(x)$ скалярные функции, $B = \mathrm{diag}(1,-1)$, $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & -q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$, $q_j(x) \in C[0,1]$, все функции комплекснозначные.

Задачу исследуем с помощью метода Фурье. Метод Фурье применялся даже для более общих систем А. И. Вагабовым [1], но в [1] рассматривался случай, когда $Q(x)$ была непрерывно дифференцируема. Здесь же для $Q(x)$ предполагается только непрерывность. Возникающие здесь трудности связаны с тем, что соответствующая спектральная задача представляет собой систему Дирака с непрерывным потенциалом.

Основополагающие результаты для системы Дирака с недифференцируемым потенциалом принадлежат П. Джакову, Б. С. Митягину (см. [2]). В дальнейшем близкие по тематике исследования для таких систем проводились в [3–5]. В [6, 7] А. П. Хромовым предложен сравнительно простой способ изучения системы Дирака с негладким потенциалом, базирующийся на операторах преобразования. Этот же прием используется в данной работе.

Обозначим через L оператор:

$$(Ly)(x) = By'(x) + Q(x)y(x), \quad y_1(0) = y_2(0), \quad y_1(1) = y_2(1),$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$. Оператор L есть оператор Дирака с условиями Дирихле.

В [6, 7] доказано, что собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые с асимптотикой

$$\lambda_n = \pi n i + \beta_n, \quad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots,$$

а для собственных функций $y_n(x) = (y_{n1}(x), y_{n2}(x))^T$ имеют место асимптотические формулы:

$$y_{nj}(x) = e^{p_j \pi n i x}(1 + \beta_n x) + \int\limits_0^x b(x,\tau) e^{\pi n i \tau} d\tau + \int\limits_0^x b(x,\tau) e^{-\pi n i \tau} d\tau +$$
$$+ \beta_n \int\limits_0^x b(x,\tau) e^{\pi n i \tau} d\tau + \beta_n \int\limits_0^x b(x,\tau) e^{-\pi n i \tau} d\tau + O(\beta_n^2), \quad j = 1,2,$$

где $n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots$, $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, и оценка $O(\ldots)$ равномерна по $x \in [0,1]$.

Здесь и в дальнейшем через β_n обозначаем различные числа такие, что $\sum |\beta_n|^2 < \infty$, и β_n не зависят от $\varphi(x)$, через α_n такие числа, которые зависят от $\varphi(x)$, но при этом $\sum |\alpha_n|^2 < c\|\varphi\|^2$. Норма $\|\cdot\|$ это либо норма в $L_2[0,1]$, либо в пространстве $L_2^2[0,1]$ вектор-функций размерности 2. Через $b(x,t)$ обозначаем различные непрерывные функции из некоторого конечного набора.

Для собственных функций $z_n(x) = (z_{n1}(x), z_{n2}(x))^T$ оператора L^* имеют место те же асимптотические формулы, но с другими β_n и $b(x,t)$.

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье запишем в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)(x)e^{\lambda t}d\lambda, \tag{4}$$

где $r > 0$ достаточно велико и фиксировано, $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр), $\gamma_n = \left\{\lambda \mid |\lambda - \lambda_n^0| = \delta\right\}$, $\lambda_n^0 = \pi n i$, $\delta > 0$ и достаточно мало, чтобы собственные значения λ_n попадали по одному внутрь γ_n.

Справедлива формула

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}(R_\lambda\varphi)e^{\lambda t}d\lambda = v_n(x,t),$$

где $v_n(x,t) = \dfrac{(\varphi, z_n)}{(y_n, z_n)}\,y_n(x)e^{\lambda_n t}$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2^2[0,1]$ (это же обозначение сохраняется и для скалярного произведения в $L_2[0,1]$).

Лемма 1. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$v_{nj}(x,t) = \alpha_n\Big[e^{p_j\pi n i x} + \int\limits_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i\tau}d\tau +$$

$$+\int\limits_0^x b(x,\tau)e^{-\pi n i\tau}d\tau\Big]e^{\pi n i t} + O(\alpha_n\beta_n),$$

где $v_n(x,t) = (v_{n1}(x,t), v_{n2}(x,t))^T$, $(x,t)\in Q_T = [0,1]\times[-T,T]$ ($T>0$ любое фиксированное число), оценка $O(\cdot)$ равномерна по $(x,t)\in Q_T$.

Лемма 2. *Ряды $\sum\limits_{|n|\geq n_0}\alpha_n\int\limits_0^x b(x,\tau)e^{\pi n i(\pm\tau+t)}d\tau$ сходятся абсолютно и равномерно на множестве $Q_T = [0,1]\times[-T,T]$ при любом $T>0$, и для их сумм $F_\pm(x,t)$ имеют место оценки:*

$$\max_{Q_T}|F_\pm(x,t)| \leq c_T\,\|\varphi\|,$$

где $c_T > 0$ и зависит только от T.

Теорема 1. *Если $\varphi(x) \in D_{L^2}$ (D_{L^2} область определения оператора L^2), то формальное решение (4) сходится равномерно в Q_T, его сумма $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t и является классическим решением задачи (1)–(3).*

Теорема 2. *Если $\varphi(x) \in L_2^2[0,1]$, то ряд $u(x,t)$ формального решения сходится почти всюду по $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$, причем $u(x,0) = \varphi(x)$ почти всюду на $[0,1]$. Далее, если $\varphi_h(x) \in D_{L^2}$ сходится к $\varphi(x)$ в $L_2^2[0,1]$ при $h \to 0$, то $u_h(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ по норме $L_2^2[Q_T]$ при любом $T > 0$, где $u_h(x,t)$ есть классическое решение задачи* (1)–(3) *с начальным условием $u_h(x,0) = \varphi_h(x)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вагабов А.И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов-н/Д : Изд-во Ростов. гос. ун-та, 1994. 160 с.

2. *Джаков П. В., Митягин Б. С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // УМН. 2006. Т. 61. № 4. С. 77–182.

3. *Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28.

4. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 5. С. 573–584.

5. *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* Dirac operator with complex-valued summable potential // Math. Notes. 2014. Vol. 96, № 5. P. 3–36

6. *Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Хромов А.П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака // ДАН. 2012. Т. 443, № 4. С. 414–417.

7. *Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Хромов А.П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака с недифференцируемым потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 22–30.

УДК 517.983

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ГРАНИЧНЫЕ ОСОБЕННОСТИ И ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ

В. Б. Васильев (Липецк, РФ)

vbv57@inbox.ru

0. История. Исторически теория псевдодифференциальных операторов появилась на свет в результате исследований нескольких математиков, я их перечислю, это не долго: С. Г. Михлин, A. Calderon, A. Zygmund, R. T. Seeley, А. С. Дынин (A. Dynin). Когда в работе J. Kohn, L. Nirenberg появился сам термин «псевдодифференциальный оператор», теория, в определенном смысле, уже была; их заслуга состояла в существенном расширении класса операторов и функциональных пространств. Во всех этих работах в качестве элементарной модели фигурировал оператор вида

$$u(x) \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} K(\cdot, x-y)u(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где ядро K можно трактовать в достаточно широком смысле, допуская даже обобщенные функции. Класс таких операторов содержит обычные свертки, многомерные сингулярные интегралы Кальдерона – Зигмунда, дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. В формуле (1) содержится «скрытый параметр», обозначенный точкой; если вместо точки написать x, то в класс операторов (1) уже попадут и операторы с переменными коэффициентами.

1. Принципы. Поскольку построить обратный для оператора с переменными коэффициентами (найти аналитический вид решения для соответствующего уравнения) — практически безнадежная задача, начались попытки сведения этой проблемы к более привычной, а именно, к операторам (уравнениям) типа Фредгольма, для которых уже имелась какая-то теория. К этому времени уже была продвинутая теория одномерных сингулярных интегральных уравнений, и это обстоятельство вселяло надежду получить что-то похожее в многомерном случае. Исследование коммутатора операторов типа (1) с переменными коэффициентами привело к выводу, что коммутатор компактен, в вид оператора (1) — это по сути свертка — к целесообразности использования преобразования Фурье. Конечно, развитие теории шло не так гладко, как здесь описывается, я для краткости опускаю некоторые фрагменты. Функция

$$\sigma(\cdot, \xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\cdot\xi} K(\cdot, x)\, dx$$

получила название *символа* оператора (1). Разбиение единицы и введение кокасательного расслоения T^*M компактного многообразия M позволяет перенести операторы и символы на многообразия. Оператор называют *эллиптическим*, если его символ не имеет вещественных нулей. Оказалось, что символы и операторы — это почти одно и то же, если в операторах пренебрегать вполне непрерывным слагаемым.

2. Алгебра и теорема Атьи – Зингера. Теорема Гельфанда – Наймарка утверждает, что всякая коммутативная банахова алгебра изоморфна алгебре непрерывных функций на пространстве ее максимальных идеалов. Символическое исчисление, построенное для псевдодифференциальных операторов, — это в известном смысле конкретизация этой глубокой теоремы. Топологические свойства индекса оператора и упомянутые алгебраические конструкции привели к появлению теоремы Атьи – Зингера, выражающую индекс оператора в топологических терминах. Это настолько ошеломило математический мир, что, наверное, еще полтора десятилетия спустя эта теорема уточнялась, обобщалась, развивалась, применялась и т. д. Правда, мне, например, до сих пор неясно, что же дает исследователю дополнительно знание *конкретной* величины индекса оператора.

3. Анализ и локальный принцип. Локальный принцип в операторной форме был провозглашен (или изобретен?) И. Б. Симоненко и утверждает следующее (конечно, следует добавить, что в неявной форме локальный принцип фигурировал в работах Ю. Шаудера, и специалисты по теории дифференциальных уравнений в частных производных называют его принципом замораживания коэффициентов): для того, чтобы линейный ограниченный оператор был оператором Фредгольма, необходимо и достаточно, чтобы все его локальные представители были обратимы. Конечно, присутствуют определенные ограничения, но мне хотелось передать суть принципа. Так, в частности, все псевдодифференциальные операторы с гладкими символами, действующие в шкале соболевских пространств, попадают под действие этого принципа. Например, (1) — это локальный представитель псевдодифференциального оператора на гладком компактном многообразии (без края). Появление даже гладкого края серьезно осложняет ситуацию.

4. Гладкая граница и снова алгебра. Появляется новый модельный оператор (локальный представитель) для многообразия с гладким краем в окрестности точки гладкости края — это оператор вида

$$u(x) \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m_+} K(\cdot, x-y)u(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^m_+, \tag{2}$$

где $\mathbb{R}^m_+$ — полупространство $\{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, \cdots, x_m),\ x_m > 0\}$. Для обращения оператора типа (2) уже и эллиптичности недостаточно — на границе возможно появление появление произвольных функций — такова структура общего решения. Условие Шапиро – Лопатинского позволяет избавиться от произвола и выделить единственное решение. Уравнение с оператором (2) может оказаться и переопределенным, и в этом случае имеет смысл введения дополнительных неизвестных в виде интегралов типа потенциала. L. Boutet de Monvel построил алгебру краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, описав ее (2×2)-матрицами, элементы которых содержали все упомянутые типы операторов. Теорема об индексе краевой задачи была, грубо говоря, сведена к классическому случаю Атьи – Зингера.

5. Негладкая граница и геометрия. Граница многообразия может содержать точки, окрестности которых диффеоморфны конусу, многомерному ребру и т. д., но...что такое, например, конус? С легкой руки В. А. Кондратьева, например, конус в $\mathbb{R}^3$ вида $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > a(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, a > 0\}$ следует трактовать как прямое произведение полуоси $(0, +\infty)$ на круг с центром в 0 радиуса a, затем применить одномерное преобразование Меллина и в результате получить краевую задачу в области с гладкой границей и параметром. Похоже, при таком подходе речь идет уже не о конусе, а о цилиндре с совсем другой геометрией.

6. Снова анализ. Для работы с локальным оператором

$$u(x) \longmapsto \int\limits_{C_+^a} K(\cdot, x-y)u(y)dy, \quad x \in C_+^a, \tag{3}$$

автор предлагает не расщеплять конус на сомнительные простейшие составляющие, а работать с ним как с целостной особенностью, полагая ее естественным многомерным обобщением полупрямой. Технические средства: ядра С. Бохнера для радиальных трубчатых областей над конусами, теория В. С. Владимирова аналитических функций в таких областях, теория М. И. Вишика и Г. И. Эскина (как эталон) краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с гладким краем плюс немного труда и терпения. Работы [1–5] — это попытки автора разобраться с обратимостью оператора (3) в контексте общей теории краевых задач для псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с негладким краем.

7. Волновая факторизация. Наличие волновой факторизации в особой точке границы — это постулат. Автор выяснял, что класс символов, допускающих волновую факторизацию, достаточно широк, и даже строил конкретные примеры таких символов. Однако алгоритма построения такой факторизации пока нет, в отличие от теории Вишика – Эскина (там прекрасно работает аппарат классической краевой задачи Римана и одномерных сингулярных интегральных уравнений). Это в некоторой степени затрудняет продвижение теории, однако все полученные результаты настолько просты и изящны, что невольно верится в то, что удастся найти полное описание класса символов эллиптических операторов, допускающих волновую факторизацию.

Даже бозон Хиггса нашли...

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. 2-е изд. М. : УРСС, 2010. 235 с.

2. *Vasilyev V. B.* Elliptic equations and boundary value problems in non-smooth domains // Pseudo Differential Operators: Analysis, Applications and Computations. Operator Theory : Advances and Applications. Birkhäuser, Basel, 2011. Vol. 213. P. 105–0121.

3. *Vasilyev, V. B.* Pseudo differential equations on manifolds with non-smooth boundaries // Differential and Difference Equations and Applications. Springer Proc. Math. & Stat. 2013. Vol. 47. P. 625–637.

4. *Vasilyev V. B.* New constructions in the theory of elliptic boundary value problems // Integral Methods in Science and Engineering. Theoretical and Computational Advances. Birkhäuser, Basel, 2015. P. 629–641.

5. *Васильев В. Б.* Псевдодифференциальные уравнения в конусах с точками сопряжения на границе // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 9. С. 1123–1135.

УДК 517.982.256

ОБ s–ЧИСЛАХ ДВУХВЕСОВОГО ОПЕРАТОРА СУММИРОВАНИЯ[1]

А. А. Васильева (Москва, РФ)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Пусть $u = (u_j)_{j=1}^{\infty}$, $w = (w_j)_{j=1}^{\infty}$, $1 < p \le q < \infty$. Определим оператор $S_{u,w} : l_p \to l_q$ по формуле $(S_{u,w}f)_j = w_j \sum\limits_{i=1}^{j} u_i f_i$, $f = (f_j)_{j=1}^{\infty}$.

Пусть $u_j = j^{-\alpha_u}(\log(j+1))^{-\lambda_u}$, $w_j = j^{-\alpha_w}(\log(j+1))^{-\lambda_w}$, $\alpha_w > \frac{1}{q}$, $\alpha_u + \alpha_w = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$, $\lambda := \lambda_u + \lambda_w > 0$.

Обозначим через $d_n(S_{u,w} : l_p \to l_q)$, $a_n(S_{u,w} : l_p \to l_q)$ и $c_n(S_{u,w} : l_p \to \to l_q)$ соответственно колмогоровские, аппроксимативные и гельфандовские числа оператора $S_{u,w}$ (см. [1]). При оценке колмогоровских чисел будем обозначать $\vartheta_n = d_n$ и $\widehat{q} = q$, при оценке аппроксимативных чисел будем обозначать $\vartheta_n = a_n$ и $\widehat{q} = \min\{q, p'\}$, при оценок гельфандовских чисел будем обозначать $\vartheta_n = c_n$ и $\widehat{q} = p'$.

Положим $\lambda_{pq} = 0$ при $p = q$ или $\widehat{q} \le 2$, $\lambda_{pq} = \min\left\{1, \dfrac{1/p - 1/q}{1/2 - 1/\widehat{q}}\right\}$ при $p < q$, $\widehat{q} > 2$.

Теорема 1. *Если $\lambda > \frac{1}{q} + \frac{1}{p'}$, то*

$$\vartheta_n(S_{u,w} : l_p \to l_q) \asymp n^{-\frac{1}{q} - \frac{1}{p'} - \lambda_{pq}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\widehat{q}}\right)} (\log n)^{-\lambda + \frac{1}{q} + \frac{1}{p'}}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00022).

Если $\frac{\lambda_{pq}}{\widehat{q}} < \lambda < \frac{1}{q} + \frac{1}{p'}$, *то*

$$\vartheta_n(S_{u,w} : l_p \to l_q) \asymp n^{-\lambda-\lambda_{pq}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\widehat{q}}\right)}.$$

Если $0 < \lambda < \frac{\lambda_{pq}}{\widehat{q}}$, *то*

$$\vartheta_n(S_{u,w} : l_p \to l_q) \asymp n^{-\lambda\widehat{q}/2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pietsch A.* s-numbers of operators in Banach space // Studia Math. 1974. Vol. 51. P. 201–223.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕРАВЕНСТВА $\Delta u + u^q \leqslant 0$ НА КВАЗИМОДЕЛЬНЫХ ЛИПШЕЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ[1]

С. С. Вихарев (Волгоград, РФ)
vhr1987@mail.ru

Настоящая работа посвящена вопросу отсутствия нетривиальных положительных решений эллиптического неравенства

$$\Delta u + u^q \leqslant 0, \quad q > 1 \tag{1}$$

на, так называемых, квазимодельных Липшецевых многообразиях. Опишем их подробнее.

Рассмотрим Липшецево многообразие M, изометричное прямому произведению $R_+ \times S_1 \times \cdots \times S_k$ (где $R_+ = (0, +\infty)$, а S_i — компактные римановы многообразия без края) с метрикой:

$$ds^2 = dr^2 + g_1^2(r)d\theta_1^2 + ... + g_k^2(r)d\theta_k^2.$$

Здесь g_i — локально равномерно непрерывные по Липшицу и положительные на R_+ функции. Пусть также $n_i = dimS_i$.

Рассмотрим неравенство (1) на внешней области M, а именно на множестве $\Omega_e = \{x = (r, \theta_1, ..., \theta_k) \in M : \ r > 1\}$. Под решением неравенства (1) понимается локально равномерно непрерывная по Липшицу функция

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02479-р_поволжье_а).

u такая, что для любого множества $\widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega_e$ и для любой положительной функции $\phi(x) \in C_0^1(\widetilde{\Omega})$ выполнено

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx \geqslant \int\limits_{\widetilde{\Omega}} u^q \, \phi \, dx,$$

где ∇u — градиент, составленнный из слабых производных функции u.

Справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть многообразие M такое, что выполняется условие*

$$\limsup_{\rho\to\infty} \rho^{\frac{2}{q-1}} \left(\frac{\int_{\rho/2}^{\rho} G(r)dr}{\int_{\rho/4}^{2\rho} G(r)dr} \right)^{\frac{1}{q-1}} \int\limits_{2\rho}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} = +\infty,$$

где $G(r) = g_1^{n_1}(r) \cdot ... \cdot g_k^{n_k}(r)$.

Тогда любое неотрицательное решение неравенства (1) на Ω_e есть тождественный ноль.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лосев А. Г.* О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 87–93.

2. *Решетняк Ю. Г.* К теории соболевских классов функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. матем. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 146–168.

3. *Bidaut-Veron M., Pohozaev S. I.* Non-existence results and estimates for some nonlinear elliptic problems // J. Anal. Math. 2001. Vol. 84. P. 1–49. DOI 10.1007/BF02788105.

УДК 517.984

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ СДВИГОВ В ПОЛЕ p-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ[1]

А. М. Водолазов (Саратов, РФ)

vam21@yandex.ru

Пусть $\mathbb{Q}_p$ поле p-адических чисел. Любое p-адическое число $x \neq 0$ единственным образом представимо в виде

$$x = p^{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k \ ,$$

где $x_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ и $x_0 \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{Z}$. Дробной частью числа x называется $\{x\}_p = p^{\gamma} \sum\limits_{k=0}^{-\gamma-1} x_k p^k$, множество H_0 состоит из чисто дробных

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

чисел $x = \{x\}_p$. Множество $B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p \,|\, \|x - a\|_p \le p^\gamma\}$ является p-адическим шаром. Обозначим $D_{-N}(M)$, где $N, M \in \mathbb{N}$, множество локально постоянных функций носитель которых содержиться в $B_N(0)$ и являющихся p^M — периодическими.

Для построения кратномаштабного анализа на $\mathbb{Q}_p$ [1] одним из важных условий является существование функции φ сдвиги, которой на элементы из H_0 ортонормированную систему в $L_2(\mathbb{Q}_p)$. При $p = 2$ и $M = 1$, этот вопрос был изучен в [2]. Мы изучаем способы нахождения таких функций при других значениях p.

Теорема. *Если p — нечетное простое или при $p = 2$ и $M \ge 2$, то множество $\varphi \in D_{-N}(M)$, сдвиги которых на элементы из H_0 образуют ортонормированную систему в $L_2(\mathbb{Q}_p)$ содержат не менее $p^{N+M} - 4(p^{N-1} - 1)$ линейно независимых функций в пространстве $D_{-N}(M)$*

Нами получен алгоритм нахождения таких функций и способы определения коэффициентов разложения по системе сдвигов этих функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Albeverio S., Evdokimov S.,. Skopina M* p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames// J. Fourier Anal. Appl. 2010. Vol. 16, № 5. P. 693–714.

2. *Лукомский С. Ф.* Ортогональные системы сдвигов в поле p-адических чисел // Функциональные пространства и теория приближения функций : тез. докл. междунар. конф., посвящ. 110-летию со дня рожд. акад. С. М. Никольского. М. : МИАН, 2015. С. 174–175.

УДК 517.518

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ СВЕРТКИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА И СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ–ВИЛЕНКИНА[1]

С. С. Волосивец, М. А. Кузнецова (Саратов, РФ)

VolosivetsSS@mail.ru, maffka2@bk.ru

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $2 \le p_n \le N$. По определению $m_0 = 1$, $m_n = p_n m_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение вида $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n/m_n$, $x_n \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_n)$. Разложение будет единственным, если для $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $0 < k < m_l$, брать разложение с конечным числом $x_n \ne 0$. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде $k = \sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}$, $k_i \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_i)$. Для $x \in [0, 1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ положим

[1]Работа С. С. Волосивца выполнена в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / m_j\right)$. Система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной на $[0,1)$ и полной в $L^1[0,1)$. Подробней об ее свойствах см. [1, §1.5]. Определим коэффициенты Фурье по этой системе для $f \in L^1[0,1)$ формулой $\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_n(x)}dx, \quad n \in \mathbb{Z}_+$. Для $f, g \in L^1[0,1)$ определяется свертка $f * g(x) = \int_0^1 f(x \ominus t) g(t)\, dt$, где $\ominus$ – обобщенное вычитание, определяемое $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см. [1, §1.5]).

Для измеримой на $[0,1)$ функции f рассмотрим функцию распределения $\lambda_f(y)$ и невозрастающую перестановку f^*: $\lambda_f(y) = |\{x \in [0,1) : |f(x)| > y\}|$, $f^*(t) = \inf\{y : \lambda_f(y) \le t\}$. Если $0 < p, q < \infty$ и

$$\|f\|_{p,q}^* := \left(\int_0^1 [f^*(t)]^q t^{q/p-1}\, dt\right)^{1/q} < \infty,$$

то f принадлежит пространству Лоренца $L^{p,q}[0,1)$ (см. [2]). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \widehat{f}(k) = 0, k \ge n\}$. Тогда $E_n(f)_{p,q} = \inf\{\|f - t_n\|_{p,q}^* : t_n \in \mathcal{P}_n\}$. При $p = q$ верно, что $L^{p,p}[0,1) = L^p[0,1)$ и мы пишем $E_n(f)_p$ вместо $E_n(f)_{p,p}$ и $\|\cdot\|_p$ вместо $\|\cdot\|_{p,p}$. Через $C^*[0,1)$ обозначим замыкание множества полиномов по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ по норме $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1)} |f(x)|$.

Теорема 1. 1) *Пусть* $1 < p_1,\ p_2 < 2$, $1 \le q_1 \le p_1'$, $1 \le q_2 \le p_2'$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$, $1/s = 1/q_1 + 1/q_2$ *(т.е.* $1/s \ge 1 - 1/r$*). Если* $f \in L^{p_1,q_1}[0,1)$, $g \in L^{p_2,q_2}[0,1)$, *то* $h = f * g \in L^{r,s}[0,1)$ *и верны неравенства*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{s/r'-1} |\widehat{h}(k)|^s\right)^{1/s} \le C\|f\|_{p_1,q_1}^* \|g\|_{p_2,q_2}^*,$$

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{s/r'-1} |\widehat{h}(k)|^s\right)^{1/s} \le C E_n(f)_{p_1,q_1} E_n(g)_{p_2,q_2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Аналогичное утверждение верно при $1 \le q_1, q_2 < \infty$, *если* $\{\widehat{f}(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\widehat{g}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *квазимонотонны и* $\{n\widehat{f}(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n\widehat{g}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *возрастают.*

2) *Пусть* $1 < p_1,\ p_2 < 2$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$. *Если* $f \in L^{p_1}[0,1)$, $g \in L^{p_2}[0,1)$, *то* $h = f * g \in L^r[0,1)$ *и справедливы неравенства*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{h}(k)|^{r'}\right)^{1/r'} \le \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}, \quad \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\widehat{h}(k)|^{r'}\right)^{1/r'} \le E_n(f)_{p_1} E_n(g)_{p_2},$$

где $n \in \mathbb{N}$.

В теоремах 2 и 3 обсуждается точность утверждений теоремы 1.

Теорема 2. 1) *Пусть* $1 < p_1,\ p_2 < 2,\ 1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1,\ 1 \le$ $\le q_1, q_2 < \infty,\ 1/s = 1/q_1 + 1/q_2$. *Если* $\theta < s$, *то существует* $f_0 \in$ $\in L^{p_1,q_1}[0,1)$, $g_0 \in L^{p_2,q_2}[0,1)$ *такие, что* $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^{r,\theta}[0,1)$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\theta/r'-1}(\widehat{h_0}(k))^{\theta}$ *расходится.*

2) *Пусть* $1 < p_1,\ p_2 < 2,\ 1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$. *Если* $\theta > r$ *и* $\gamma < r'$, *то найдутся* $f_0 \in L^{p_1}[0,1)$, $g_0 \in L^{p_2}[0,1)$, *такие что* $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^{\theta}[0,1)$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\widehat{h_0}(k)|^{\gamma}$ *расходится.*

Теорема 3. *Пусть* $1 < p_1,\ p_2 < 2,\ 1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$. *Пусть последовательности* $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *убывают к нулю и для них выполнены условия*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \nu_k^{p_1} k^{-1} \asymp \nu_n^{p_1}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k^{p_2} k^{-1} \asymp \nu_n^{p_2}, \quad n \in \mathbb{N};$$

и, кроме того, $\nu_n \le C\nu_{2n}$, $\mu_n \le C\mu_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда существуют функции* $f_0 \in L^{p_1}[0,1)$, $g_0 \in L^{p_2}[0,1)$, *такие что* $E_n(f_0)_{p_1} \asymp \nu_n$, $E_n(g_0)_{p_2} \asymp \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$ *и для* $h_0 = f_0 * g_0 \in L^{r}[0,1)$ *верно*

$$(\sum_{k=n}^{\infty} (\widehat{h_0}(k))^{r'})^{1/r'} \asymp \nu_n \mu_n.$$

Теорема 4. 1) *Пусть* $2 < p < \infty,\ 1 \le q < \infty,\ f, g \in L^{p,q}[0,1)$, $h = f * g$. *Тогда* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |\widehat{h}(k)| \le C E_n(f)_{p,q} E_n(f)_{p,q}$.

2) *Пусть* $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *убывающие к нулю последовательности, такие что*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \nu_k k^{-1} \asymp \nu_n, \quad \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k k^{-1} \asymp \mu_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и $\nu_k \le C\nu_{2k}$, $\mu_k \le C\mu_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда существуют* $f_0 \in C^*[0,1)$, $g_0 \in$ $\in C^*[0,1)$, *такие что* $E_n(f_0)_{\infty} \asymp \nu_n$, $E_n(g_0)_{\infty} \asymp \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$, *и для* $h_0 =$ $= f_0 * g_0$ *справедливо соотношение* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |\widehat{h}(k)| \asymp \nu_n \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4 обобщает результат Н. А. Ильясова для тригонометрических рядов [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987.

2. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический нализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974.

3. *Ilyasov N. A.* To the M.Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series // Transactions of NAS of Azerbaijan. Ser. of phys.-tech. and math. sciences. 2004. Vol. 24, № 1. P. 113–120.

УДК 517.51

ОБОБЩЕННАЯ МОНОТОННОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ p-ВАРИАЦИИ[1]

С. С. Волосивец, А. А. Тюленева (Саратов, РФ)
VolosivetsSS@mail.ru, anantuleneva@mail.ru

Пусть $1 < p < \infty$, $f(x)$ — измеримая, ограниченная, 2π-периодическая функция и $\xi = \{x_0 < x_1 < ... < x_n = x_0 + 2\pi\}$ — разбиение периода. Введем p-вариационную сумму

$$\varkappa_\xi^p(f) = \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p}$$

и модули непрерывности $\omega_{1-1/p}(f,\delta) = \sup\{\varkappa_\xi^p(f) : \lambda(\xi) := \max_i(x_i - x_{i-1}) \le \delta\}$ и, для $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, $\omega_{k-1/p}(f,\delta) = \sup\{\omega_{1-1/p}(\Delta_h^{k-1} f(x), |h|) : |h| \le \delta\}$, где $\Delta_h^k(x) = \sum\limits_{i=0}^k (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(x+ih)$, $k \in \mathbb{N}$, есть k-я разность f с шагом h. Пространство V_p функций ограниченной p-вариации с конечной нормой $\|f\|_{V_p} = \max(\|f\|_\infty, V_p(f))$ и пространство $C_p \subset V_p$ функций со свойством $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega_{1-1/p}(f,\delta) = 0$ являются банаховыми (см. [1]). Если T_n — пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n, то n-е наилучшее приближение в V_p вводится равенством $E_n(f)_{V_p} := \inf\limits_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{V_p}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Аналогично вводится наилучшее приближение $E_n(f)_p$ в пространствах $L_{2\pi}^p$. Будем писать $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in GM$, если для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено соотношение $\sum\limits_{i=n}^{2n-1} |a_i - a_{i+1}| \le C a_n$ (см. [2]).

Для положительной убывающей последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ будем писать $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \in B$, если $\sum\limits_{i=n}^\infty i^{-1}\varphi_i = O(\varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и $\{\varphi_n\} \in B_\alpha$, $\alpha > 0$, если $\sum\limits_{i=1}^n i^{\alpha-1}\varphi_i = O(n^\alpha \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Если $\varphi_n \le C\varphi_{2n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то говорим, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет Δ_2-условию ($\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \in \Delta_2$).

[1]Работа С. С. Волосивца выполнена в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

Теорема 1. *Пусть* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится. Тогда функция* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ *принадлежит* C_p, $1 < p < \infty$, *и при этом*

$$C_2 \sum_{j=2n}^{\infty} a_j \le E_n(f)_{V_p} \le C_1 \left(na_n + \sum_{i=n}^{\infty} a_i \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in GM$ *и ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится,* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда* $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \cos ix$ *принадлежит* C_p *и при* $n \in \mathbb{N}$ *верны неравенства*

$$\omega_{k-1/p}(f, 1/n) \le C_1 \left(n^{-k+1/p} \left(\sum_{m=1}^{n} a_m^p m^{kp+p-2} \right)^{1/p} + \sum_{m=n}^{\infty} a_m \right),$$

$$\omega_{k-1/p}(f, 1/n) \ge C_2 \left(n^{-k+1/p} \left(\sum_{m=1}^{n} a_m^p m^{kp+p-2} \right)^{1/p} + \sum_{m=n}^{\infty} a_m \right).$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и положительная убывающая последовательность* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Delta_2$ *и* $\{n^{1/p}\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \in B$. *Если* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$, *сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \cos ix$, *то следующие пять утверждений равносильны:*

$$E_n(f)_p = O(\varphi_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k^p k^{p-2} = O(\varphi_n^p), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$a_n = O(n^{1/p-1}\varphi_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = O(n^{1/p}\varphi_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$E_n(f)_{V_p} = O(n^{1/p}\varphi_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4. *Если выполнены условия теоремы 3, то следующие пять утверждений равносильны:*

$$E_n(f)_p \asymp \varphi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k^p k^{p-2} \asymp \varphi_n^p, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$a_n \asymp n^{1/p-1}\varphi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k \asymp n^{1/p}\varphi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$E_n(f)_{V_p} \asymp n^{1/p}\varphi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теоремы 3 и 4 обобщают некоторые результаты А. А. Конюшкова [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терехин А. П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Изв. вузов. Матем. 1965. № 2. С. 171–187.

2. *Tikhonov S.* Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 326, № 2. P. 721–735.

3. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Матем. сб. 1958. Т. 44(86), № 1. С. 53–84.

УДК 517.984

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ МАКСИМУМА АФФИННО-КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

И. Ю. Выгодчикова (Саратов, РФ)

VigodchikovaIY@info.sgu.ru, irinavigod@yandex.ru

1. Введение. В анализе динамических рядов встречаются случаи, когда уровень одного динамического ряда (обладающего доминантным признаком с точки зрения рассматриваемого показателя) превышает уровень другого в каждый момент наблюдения (показатели численности городского и сельского населения, оптовая и розничная цена товара, объём энергопотребления в одной квартире и во всём доме и проч.). Возникает вопрос об оценке динамики развития доминантного признака. Ответить на этот вопрос и получить ряд новых показателей для анализа подобных рядов позволяет инструмент, сводящийся к модели аппроксимации двузначного динамического ряда, представленной задачей негладкого анализа.

2. Постановка задачи. Пусть n — целое неотрицательное число, обозначающее степень алгебраического полинома $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00175, № 16-06-00582).

Задана дискретная сетка из $N+1$ упорядоченных значений независимой переменной, $T=\{t_0<\ldots<t_N\}$, $N\geq n+1$, в узлах которой определено многозначное отображение, $\Psi(\cdot)$, образом которого в каждом узле сетки является пара значений $\Psi(t_k)=\{y_{1,k};y_{2,k}\}$, содержащая соответствующий данному узлу сетки уровень каждого из двух динамических рядов сопоставимых величин $y_{2,k}$ и $y_{1,k}$, так, что $y_{2,k}\geq y_{1,k}$, $k=\overline{0,N}$. Положим $y_2(t_k)=y_{2,k}$, $y_1(t_k)=y_{1,k}$, $k=\overline{0,N}$. Обозначим $c(A,t)=(p_n(A,t)-y_1(t))(p_n(A,t)-y_2(t))$, $t\in T$.

Рассмотрим задачу:

$$C(A)=\max_{t\in T}|c(A,t)|\longrightarrow\min_{A\in\mathbb{R}^{n+1}}. \tag{1}$$

Функция $c(\cdot,t)$ является аффинно-квадратичной функцией при каждом t, поэтому целевая функция задачи (1) вовсе не обязаны быть выпуклой. Задача (1) позволяет отыскать алгебраический полином, в каждом узле дискретной сетки приближающийся к одному из значений многозначного отображения, и таким образом представить в форме алгебраического полинома динамическую модель системы из двух компонент с доминантным признаком. С точки зрения модели (1), оценками y_k^+ и y_k^- уровней $y_{2,k}$ и $y_{1,k}$ двузначного ряда в каждом узле дискретной сетки T являются, соответственно, $y_k^+=\max\{p_n(A,t_k),y_k-p_n(A,t_k)\}$ и $y_k^-=\min\{p_n(A,t_k),y_k-p_n(A,t_k)\}$, где $y_k=y_{1,k}+y_{2,k}$, $k=\overline{0,N}$, A — решение задачи (1).

3. Алгоритм решения. В [1] доказано существование и получены условия оптимальности для задачи (1). В [2] приведено обоснование аналога альтернансного явления в формулировке необходимого условия решения задачи (1) и установлен факт конечности множества решений. Рассмотрим алгоритмическую процедуру, позволяющую отыскать все решения задачи (1). Положим $C^*=\min_{A\in\mathbb{R}^{n+1}}C(A)$. Обозначим через Σ множество всех подмножеств сетки T вида $\sigma=\left\{t_{j_0}<\cdots<t_{j_{n+1}}\right\}\subset T$, называемых *базисами*. Пусть ξ и $\hat{\xi}$ — двоичные наборы из элементов -1 и 1 длины $n+2$ и $\xi\neq-\hat{\xi}$. Множество всех таких наборов обозначим символом Ξ. Пусть $U=\left\{A^{**}=(A,C(A))\in\mathbb{R}^{n+2}:\ C(A)=C^*\right\}$. Сначала положим $U=\emptyset$.

Шаг 1. Берём произвольно базис $\sigma\in\Sigma$. Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Берём произвольно набор $\xi=(\xi_0,\cdots,\xi_{n+1})\in\Xi$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Решаем относительно компонент $(a_0,\cdots,a_n)$ вектора A и неизвестной величины h систему алгебраических уравнений

$$p_n(A,t_{j_k})(p_n(A,t_{j_k})-y_{1,j_k}-y_{2,j_k})+y_{1,j_k}y_{2,j_k}=(-1)^{\xi_k}h,$$

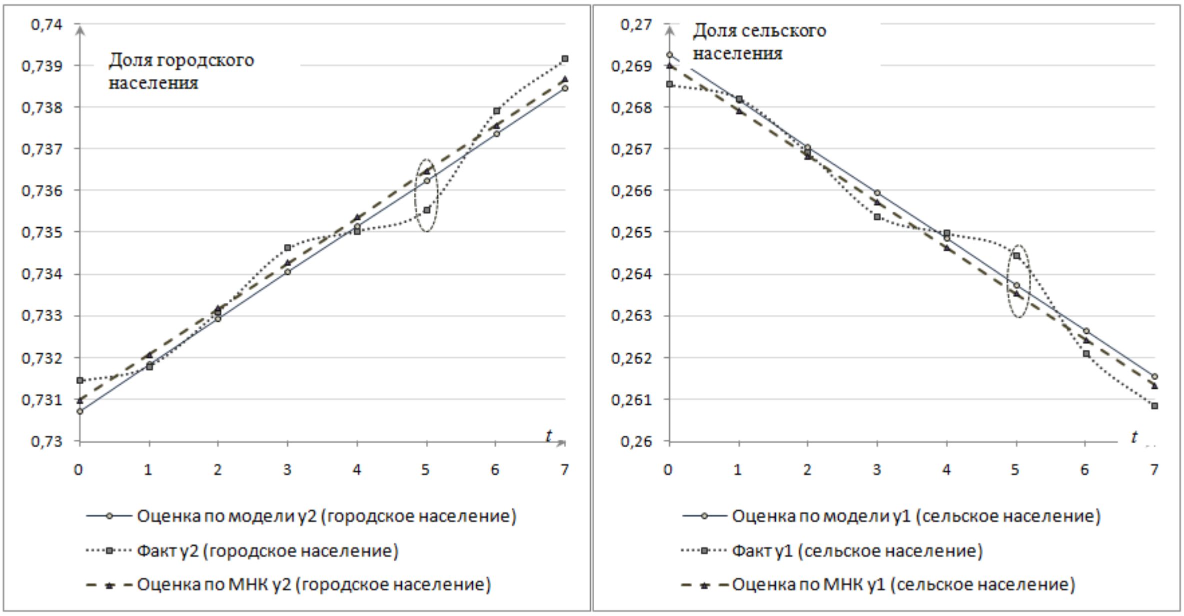
$$k = 0, \cdots, n+1.$$

Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Для каждого полученного на шаге 3 решения, если только выполняется равенство $C(A) = |h|$, то включаем $A^{**} = (A, C(A))$ во множество U. Переходим к шагу 5.

*Шаг 5.*Берём новый набор $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_{n+1}) \in \Xi$ и переходим к шагу 3. Если все такие наборы для текущего базиса исчерпаны, берём новый базис $\sigma \in \Sigma$ и переходим к шагу 2. Если все базисы исчерпаны, завершаем алгоритм. Множество U — конечное множество, каждый элемент которого содержит $n+2$ компоненты, первые $n+1$ компоненты — координаты решений задачи (1), а последняя компонента для каждого элемента одинакова и является минимальным значением целевой функции задачи (1). Множеством решений задачи (1) является $\left\{A \in \mathbb{R}^{n+1} : \ (A, C(A)) \in U\right\}$.

Например, на рисунке приведён результат анализа усиления влияния городского населения России 2005-2012 гг. в долевом распределении «численность городского населения — численность сельского населения».



а *б*

Оценки долевой структуры населения по модели (1)

Получено два решения задачи (1), характеризующие процесс как с точки зрения усиления доли городского населения (*а*), так и с точки зрения снижения доли сельского населения (*б*). Проиллюстрировано сопоставление с оценками, полученными по методу наименьших квадратов (МНК). В [3–4] рассматриваются модели, смежные с (1) с точки зрения математических свойств множества элементов, на котором значения целевых функций иследуемых задач минимальны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Выгодчикова И. Ю.* О среднегеометрическом приближении сегментной функции алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 11–15.

2. *Выгодчикова И. Ю.* О задаче приближения двузначной функции алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 16. С. 18–22.

3. *Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н.* Введение в минимакс. М. : Наука, 1972. 368 с.

4. *Выгодчикова И. Ю.* Алгоритм оценки параметров линейной множественной модели регрессии по минимаксному критерию // Прикладная информатика. 2015. Т. 10, № 4(58). С 105–116.

УДК 517.984

О КВАДРАТАХ ВО МНОЖЕСТВЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНОГО ПОЛЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИ РАЗЛОЖЕНИИ ПО БАЗИСУ[1]

М. Р. Габдуллин (Москва, РФ)

Gabdullin.Mikhail@yandex.ru

Пусть $\mathbb{F}_q$ — поле из $q = p^r$ элементов, $\{a_1, \dots, a_r\}$ — базис $\mathbb{F}_q$ над $\mathbb{F}_p$. Для множества $D \subset \mathbb{F}_p$ через W_D будем обозначать множество элементов поля F_q, все коэффициенты которых при разложении по базису $\{a_1, \dots, a_r\}$ принадлежат множеству D. Обозначим через Q множество ненулевых квадратов поля F_q. Положим $Q_0 = Q \cup \{0\}$. Будем считать, что $p \geq 3$, так как в случае $p = 2$ мы имеем $\mathbb{F}_q = Q_0$.

В недавней работе C.Dartyge, C.Mauduit, A.Sárkozy [1] было показано, что если множество D достаточно велико, то во множестве W_D имеются квадраты.

Теорема A. *Пусть* $D \subset \mathbb{F}_p$, $2 \leq |D| \leq p-1$. *Тогда при* $|D| \geq \geq \frac{(\sqrt{5}-1)p}{2}(1 + o_p(1))$ *имеем* $|W_D \cap Q_0| \geq 1$.

В случае, когда множество D состоит из последовательных чисел, в этой же работе был получен аналог предыдущей теоремы.

Теорема B. *Пусть* $D = \{0, \dots, t-1\}$, *где* $2 \leq t \leq p-1$. *Тогда при* $t \gg \sqrt{p}\log p$ *имеем* $|W_D \cap Q_0| \geq 1$.

Автору удалось доказать следующие два утверждения, усиливающие теорему A.

Теорема 1. *Пусть* $2r - 1 \leq p^{1/2}$, $\delta = \left(\sqrt{p}(2r-1)\right)^{2-r}$. *Тогда при* $|D| \geq (1+\delta)(2r-1)p^{1/2}$ *справедливо* $|W_D \cap Q| \geq 1$.

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00702).

Теорема 2. *Пусть* $r \geq 9$, $C(r) = \exp\left(\frac{2\log r + 4}{r}\right) = 1 + o(1)$, $r \to \infty$. *Тогда при* $|D| \geq C(r)p^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\log p + 4\log\log p}{2r}\right)$ *справедливо* $|W_D \cap Q| \geq 1$.

В частности, если $r \gg \log p$, то из теоремы 2 следует, что во множестве W_D есть квадраты уже при $|D| \gg p^{1/2}$. Отметим, что при $r \gg \frac{\log p}{\log\log p}$, более точный результат дает теорема 2, а иначе — теорема 1.

При малых r теорему B также можно усилить, пользуясь следующим результатом С. В. Конягина [2].

Теорема C. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/4]$, χ *— нетривиальный мультипликативный характер в* $\mathbb{F}_q$, N_i, H_i *– целые числа,* $p^{1/4+\varepsilon} \leq H_i \leq p$, $i = 1, \ldots, r$, *и*

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{r} x_i a_i : N_i + 1 \leq x_i \leq N_i + H_i, \quad i = 1, \ldots, r \right\}.$$

Тогда

$$\left| \sum_{x \in B} \chi(x) \right| \ll \frac{r^{O(1)}}{\varepsilon} p^{-\varepsilon^2/2} |B|.$$

Используя этот результат, легко показать, что заключение теоремы B справедливо при $t \geq p^{1/4+\varepsilon}$, где $\varepsilon = C\left(\sqrt{\frac{\log r}{\log p}} + \frac{\log\log p}{(\log p)^{1/2}(\log\log p + \log r)^{1/2}}\right)$ с некоторой абсолютной постоянной $C > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dartyge C., Mauduit C., Sárközy A.* Polynomial values and generators with missing digits in finite fields // Funct. Approx. Comment. Math. 2015. Vol. 52, № 1. P. 65–74.

2. *С. В. Конягин* Оценки сумм характеров в конечных полях // Матем. заметки. 2010. Т. 88, № 4. С. 529–542.

УДК 517.52

РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПО СОБОЛЕВУ

Р. М. Гаджимирзаев (Махачкала, РФ)
ramis3004@gmail.com

Пусть $1 \leq r$ — целое. Обозначим через $l_{2,\rho}(\Omega_r)$ пространство дискретных функций $g(x)$, заданных на $\Omega_r = \{-r, -r+1, \ldots, 0, 1, \ldots\}$ и таких, что $\sum_{\Omega_0} g^2(x)\rho(x) < \infty$, где $\rho = \rho(x) = \rho(x; \alpha, q) = q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}$. Через $M_k^\alpha(x)$ обозначим полином Мейкснера порядка k с помощью разностной формулы Родрига

$$M_k^\alpha(x) = \frac{q^{-k}}{k!\rho(x)} \Delta^k \{\rho(x) x^{[k]}\}$$

В настоящей работе показано, что система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, в которой

$$\varphi_k(x) = \frac{(x+r)^{[k]}}{k!}, \quad 0 \le k \le r-1, \tag{1}$$

$$\varphi_k(x) = a_k M_k^{-r}(x+r), \quad r \le k, \tag{2}$$

где $b^{[k]} = b(b-1)...(b-k+1), a_k = \frac{q^{\frac{k+r}{2}}}{(1-q)^r}$, образуют полную в $l_{2,\rho}(\Omega_r)$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения типа Соболева

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(-r)\Delta^k g(-r) + (1-q)\sum_{t\in\Omega_r} \Delta^r f(t)\Delta^r g(t) q^t. \tag{3}$$

Также установлено, что ряды Фурье – Соболева по этой системе являются частным случаем смешанных рядов по полиномам Мейкснера $M_k^{\alpha}(x)$, введенных И. И. Шарапудиновым (см. [1, 2]). Известно, что система полиномов Мейкснера $\{M_k^{\alpha}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортогональна на $\Omega_0 = \{0, 1, \ldots\}$ с весом $\rho(x)$, т. е.

$$\sum_{x\in\Omega_0} \rho(x) M_k^{\alpha}(x) M_l^{\alpha}(x) = \delta_{k,l} h_k^{\alpha}(q), \quad 0 < q < 1, \quad \alpha > -1,$$

где

$$h_k^{\alpha}(q) = (1-q)^{\alpha+1} \sum_{x\in\Omega_0} \rho(x) \left\{M_k^{\alpha}(x)\right\}^2 = \binom{k+\alpha}{k} q^{-k}\Gamma(\alpha+1). \tag{4}$$

Из (4) следует, что полиномы $m_k^{\alpha}(x) = m_k^{\alpha}(x,q) = \left\{h_k^{\alpha}(q)\right\}^{-1/2} M_k^{\alpha}(x)$ образуют ортонормированную в $l_{2,\rho}(\Omega_0)$ последовательность.

Кроме того, введен новый специальный ряд по полиномам Мейкснера $M_k^{\alpha}(x)$ с $\alpha > -1$, который в случае $\alpha = r$ совпадает с соответствующим смешанным рядом по полиномам Мейкснера $M_k^0(x)$ и рядом Фурье – Соболева по полиномам Мейкснера $M_k^{-r}(x)$. Напомним определение смешанного ряда по полиномам Мейкснера. Для $r \ge 1$, рассмотрим дискретную функцию $d(x) \in l_{2,\rho}(\Omega_r)$. Из того, что $d(x) \in l_{2,\rho}(\Omega_r)$, очевидно, следует, что функция $\Delta^r \bar{d}(x) = \Delta^r d(x-r)$ принадлежит пространству $l_{2,\rho}(\Omega_0)$, поэтому мы можем определить коэффициенты Фурье – Мейкснера этой функции

$$d_{r,k}^{\alpha} = \sum_{t\in\Omega_0} \Delta^r \bar{d}(t) m_k^{\alpha}(t)\rho(t),$$

и рассмотреть ряд при $\alpha = 0$

$$d(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu d(-r) \frac{(x+r)^{[\nu]}}{\nu!} + (x+r)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^0_{r,k}}{(k+1)_r} \frac{M^r_k(x,q)}{\{h^0_k(q)\}^{1/2}}. \qquad (5)$$

Это и есть *смешанный ряд* по полиномам Мейкснера.

Специальные ряды по полиномам Мейкснера. Пусть $1 \le r$, $d(x)$ определена на Ω_r,

$$P_{r-1}(x) = P_{r-1}(d,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu d(-r) \frac{(x+r)^{[\nu]}}{\nu!},$$

$$d_r(x) = \frac{d(x) - P_{r-1}(x)}{(x+r)^{[r]}} \qquad (6)$$

Предположим, что для функции $d_r(x)$, определенной равенством (6) существуют коэффициенты Фурье – Мейкснера

$$\widehat{d}^\alpha_{r,k} = \sum_{t \in \Omega_0} d_r(t) \rho(t) m^\alpha_k(t) = \sum_{t \in \Omega_0} \frac{d(t) - P_{r-1}(t)}{(t+r)^{[r]}} \rho(t) m^\alpha_k(t).$$

Тогда мы можем рассмотреть ряд Фурье – Мейкснера функции $d_r(x)$

$$d_r(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{d}^\alpha_{r,k} m^\alpha_k(x) \qquad (7)$$

Если ряд (7) сходится к функции $d_r(x)$, то с учетом (6)

$$d(x) = P_{r-1}(x) + (x+r)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{d}^\alpha_{r,k} m^\alpha_k(x) \qquad (8)$$

Это и есть *специальный ряд по полиномам Мейкснера.* Если $\alpha = r$, то ряд (8) совпадает с рядом (5).

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Функции* $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, *определенные равенствами* (1) *и* (2), *образуют полную в* $l_{2,\rho}(\Omega_r)$ *ортонормированную систему относительно скалярного произведения* (3).

Пусть $d(x) \in l_{2,\rho}(\Omega_r)$. Рассмотрим коэффициенты Фурье этой функции

$$\widehat{d}_k = \langle d, \varphi_k \rangle = \Delta^k d(-r), \quad 0 \le k \le r-1,$$

$$\widehat{d}_k = \langle d, \varphi_k \rangle = a_k(1-q) \sum_{t\in\Omega_r} q^t \Delta^r d(t) \Delta^r M_k^{-r}(t+r), \quad k \geq r$$

и ее ряд Фурье

$$d(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{d}_k \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k d(-r) \frac{(x+r)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \widehat{d}_k a_k M_k^{-r}(x+r).$$

Последний ряд совпадает со смешанным рядом по полиномам Мейкснера $M_k^0(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Махачкала : Дагестан. науч. центр РАН, 2004. С. 276.

2. *Гаджиева З. Д.* Смешанные ряды по полиномам Мейкснера : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2004.

УДК 517.51

О СХОДИМОСТИ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПОЧТИ ВСЮДУ[1]

В. В. Галатенко, Т. П. Лукашенко, В. А. Садовничий (Москва, РФ)

vgalat@imscs.msu.ru, lukashenko@mail.ru, info@rector.msu.ru

Понятие орторекурсивного разложения по последовательности элементов было введено в 1999 году в [1, 2], подробная публикация [3] вышла в 2001 году. Обобщения этого понятия, орторекурсивные разложения по цепочке систем и орторекурсивные разложения по последовательности подпространств были даны в [4, 5]. Приведем определение орторекурсивного разложения по последовательности элементов.

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система нормированных элементов гильбертова пространства H (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Определение 1. *Орторекурсивное разложение* (ОРР) элемента $f \in H$ по последовательности элементов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ осуществляется следующим образом:

1) положим $r_0 = f$;

2) если задан остаток приближения $r_{n-1} \in H$, $n \in \mathbb{N}$, и элемент e_n, то полагаем

$$\hat{f}_n = (r_{n-1}, e_n), \quad r_n = r_{n-1} - \hat{f}_n e_n. \tag{1}$$

Назовем полученные числа $\hat{f}_k$ *орторекурсивными коэффициентами Фурье* элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, а ряд $\sigma(f) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k$ назовем

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00417 и НШ–7461.2016.1.

орторекурсивным рядом Фурье элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}$, его частичная сумма $S_n(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \hat{f}_k e_k$. Легко видеть, что $r_n(f) = f - S_n(f)$ и для ортонормированной системы функций $\{e_k\}$ орторекурсивные коэффициенты Фурье являются обычными коэффициентами Фурье, а орторекурсивный ряд Фурье — обычным рядом Фурье. Из (1) следует равенство Пифагора

$$\|r_{n-1}\|^2 = \|r_n\|^2 + |\hat{f}_n|^2. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$f = r_0 = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k e_k + r_n \quad \text{и} \quad \|f\|^2 = \|r_0\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|\hat{f}_k\right|^2 + \|r_n\|^2. \tag{3}$$

Из (3) следуют оценка точности приближения $\|f - S_n(f)\|^2 \equiv$ $\equiv \|r_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k \leqslant n} \left|\hat{f}_k\right|^2$, аналог неравенства Бесселя $\|f\|^2 \geqslant \sum\limits_{k} \left|\hat{f}_k\right|^2$ и утверждение, что $f = \sum\limits_{k} \hat{f}_k e_k$ тогда и только тогда, когда выполняется аналог равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum\limits_{k} \left|\hat{f}_k\right|^2$, причем в случае выполнения аналога равенства Парсеваля оценку точности приближения можно записать в виде $\|f - S_n(f)\|^2 = \|r_n(f)\|^2 = \sum\limits_{k>n} \left|\hat{f}_k\right|^2$.

В теории ортогональных рядов известна теорема Меньшова – Радемахера (см. [6, 7] или [8, с. 332, 532]), утверждающая, что для сходимости почти всюду на $[0, 1]$ ряда ортонормированных функций $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \log_2^2(k+1)$.

Д. Е. Меньшовым в [6] было также показано, что в приведенном условии $\log_2^2(k+1)$ нельзя заменить на любую неубывающую последовательность $o\left(\log_2^2(k+1)\right)$ — растущую медленнее $\log_2^2(k+1)$. Доказывающие этот факт теоремы ряда авторов см. в [8, гл. 9, § 1].

Рассмотрим вопрос об аналогичном условии на коэффициенты орторекурсивных разложений, гарантирующие их сходимость почти всюду.

Теорема 1. *Если пространство Лебега $L^2(\Omega)$, $0 < \mu\Omega < \infty$, сепарабельно, а λ_k — такая строго положительная последовательность, что все $\lambda_k \geqslant 1$ и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty, \tag{4}$$

то для любой функции $f(x) \in L^2(\Omega)$, $\|f(x)\| > 0$, найдется такая нормированная последовательность функций $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, что орторекурсивный ряд $f(x)$ по системе $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не сходится по норме пространства, не сходится поточечно почти всюду на Ω и при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \cdot \lambda_k < \infty.$$

Теорема 2. *Если $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность функций из пространства Лебега $L^2(\Omega)$, нормы которых ограничены в совокупности $\sup\limits_k \|e_k(x)\| = C < \infty$, положительная последовательность $\lambda_k \geqslant 1$ такова, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \Lambda < \infty, \tag{1}$$

а числовая последовательность a_k удовлетворяет уловию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \cdot \lambda_k = L < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x)$ абсолютно сходится почти всюду на Ω и

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k e_k(x)| \right\| \leqslant C\sqrt{L\Lambda}.$$

Замечание. Условия (4) и (5) теорем 1 и 2 показывают, что эти теоремы дополняют друг друга и не могут быть усилены без дополнительных условий.

Ряд из теоремы 1 не сходится по норме пространства, а наибольший интерес вызывают сходящиеся к разлагаемому элементу ряды. В этом случае теорема 2 может быть усилена.

Теорема 3. *Если орторекурсивное разложение функции f по последовательности нормированных функций $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ сходится к f и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left|\hat{f}_k\right|^2 < \infty,$$

то орторекурсивный ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k(x)$ сходится почти всюду на Ω и

$$\left\| \sup_K \left| \sum_{k=1}^{K} \hat{f}_k e_k(x) \right| \right\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k \left|\hat{f}_k\right|^2.$$

Последовательность $\lambda_k = k$ удовлетворяет условию (4), но дополнительное условие сходимости по норме орторекурсивного ряда Фурье элемента f к f влечет сходимость почти всюду.

Обобщением орторекурсивных разложений по последовательности элементов являются введенные в [5] орторекурсивные разложения по последовательности подпространств.

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, далее под подпространством H понимается замкнутое подпространство.

Определение 2. *Орторекурсивное разложение* элемента $f \in H$ по последовательности подпространств $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$ осуществляется следующим образом:

1) положим $r_0 = f$;

2) если задан остаток приближения $r_{n-1} \in H$, $n \in \mathbb{N}$, то полагаем, что $\tilde{f}_n$ — ортогональная проекция остатка r_{n-1} на H_n, а остаток $r_n = r_{n-1} - \tilde{f}_n$ — ортогональная проекция r_{n-1} на $H_n^{\perp}$ — ортогональное дополнение H_n в H.

Итак, $\tilde{f}_k$ — *элементы разложения* f по системе подпространств $\{H_k\}$, ряд $\sigma(f) = \sum\limits_k \tilde{f}_k$ — *рекурсивный ряд* элемента $f \in H$ по системе подпространств $\{H_k\}$, *частичной суммой рекурсивного ряда* $\sigma(f)$ с номером n считаем сумму $S_n(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{f}_n = f - r_N(f)$.

В силу свойств ортогональной проекции для каждого n выполняется равенство Пифагора

$$\|r_{n-1}\|^2 = \|r_n\|^2 + |\tilde{f}_n|^2. \tag{5}$$

Из (5) следуют оценка точности приближения $\|f - S_n(f)\|^2 \equiv \equiv \|r_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k\leqslant n} \left\|\tilde{f}_k\right\|^2$, аналог неравенства Бесселя $\|f\|^2 \geqslant \sum\limits_k \left|\tilde{f}_k\right|^2$ и утверждение, что $f = \sum\limits_k \hat{f}_k e_k$ тогда и только тогда, когда выполняется аналог равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum\limits_k \left|\tilde{f}_k\right|^2$, причем в случае выполнения аналога равенства Парсеваля оценку точности приближения можно записать в виде $\|f - S_n(f)\|^2 = \|r_n(f)\|^2 = \sum\limits_{k>n} \left|\tilde{f}_k\right|^2$.

Если последовательность одномерных подпространств задается последовательностью нормированных векторов, то ОРР по этой последовательности одномерных подпространств совпадает с ОРР по заданной последовательности элементов.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение для ОРР по системе подпространств.

Утверждение. *Если* $\sigma(f) = \sum\limits_n \tilde{f}_k(x)$ *— ОРР функции* $f \in L^2(\Omega)$ *по системе подпространств, положительная последовательность* $\lambda_k \geqslant 1$ *такова, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \Lambda < \infty,$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \tilde{f}_k(x) \right\|^2 \cdot \lambda_k = L < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k(x)$ *абсолютно сходится почти всюду на* Ω *и*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left| \tilde{f}_k(x) \right| \right\| \leqslant \sqrt{L\Lambda}.$$

Так как ОРР по последовательности подпространств в случае одномерных подпространств совпадают с ОРР по последовательности элементов, то теорема 1 показывает окончательность этого утверждения.

Здесь также дополнительное предположение, что ОРР функции $f \in L^2(\Omega)$ по системе подпространств сходится к f позволяет получить более сильное условие сходимости почти всюду.

Теорема 4. *Если орторекурсивное разложение функции* f *по системе подпространств сходится к* f *и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left\| \tilde{f}_k \right\|^2 < \infty,$$

то орторекурсивный ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k(x)$ *сходится почти всюду на* Ω *и*

$$\left\| \sup_K \left| \sum_{k=1}^{K} \tilde{f}_k(x) \right| \right\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k \left\| \tilde{f}_k \right\|^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукашенко Т. П.* Рекурсивные разложения, подобные ортогональным //Математика. Экономика. Экология. Образование. Междунар. симпозиум Ряды Фурье и их приложения (26 мая – 1 июня 1999 г.) : тез. докл. Ростов-н/Д: РГЭА, 1999. С. 331.

2. *Лукашенко Т. П.* Об орторекурсивных разложениях по характеристическим функциям промежутков // Теор. функций, ее приложения и смежные вопросы : материалы шк.-конф., посвящ. 130-летию со дня рожд. Д. Ф. Егорова. Казань : Изд-во Казанск. матем. о-ва, 1999. С. 142–143.

3. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Механ. 2001. № 1. С. 6–10.

4. *Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О рекурсивных разложениях по цепочке систем // ДАН. 2009. Т. 425, № 6. С. 741–746.

5. *Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Орторекурсивные разложения по подпространствам // ДАН. 2012. Т. 445, № 2. С. 135–138.

6. *Меньшов Д. Е.* Sur les séries de fonctions ortogonales // Fund. Math. 1923. Vol. 4. P. 82–105.

7. *Rademacher H.* Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Math. Annalen 1922. Vol. 87. P. 111–138.

8. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : Изд-во АФЦ, 1999. 550 с.

УДК 517.57

ФУНКЦИИ В $\mathbb{C}^n$ С ЗАДАННЫМ АСИМПТОТИЧЕСКИМ МНОЖЕСТВОМ[1]

Е. Г. Ганенкова (Петрозаводск, РФ)
g_ek@inbox.ru

Пусть $D_1, \dots, D_n$ — области в $\mathbb{C}$, $D = D_1 \times \dots \times D_n$, $z_0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) \in \partial D$ — достижимая граничная точка, т. е. существует кривая $\Gamma \subset D$ с концом в точке z_0. Пусть f — определенная в D функция.

Говорят, что $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является асимптотическим значением функции f в точке z_0, если существует такая кривая $\gamma_a \subset D$ с концом z_0, что

$$\lim_{\gamma_a \ni z \to z_0} f(z) = a.$$

Множество всех асимптотических значений (асимптотическое множество) функции f в точке z_0 обозначается $\mathrm{As}(f, z_0)$.

Асимптотические множества подробно изучались для целых и мероморфных в $\mathbb{C}$ функций. Известно, например, что для непостоянной целой функции асимптотическое множество является аналитическим в смысле Суслина и содержит бесконечность (см. [1, 2]). Большое количество статей посвящено построению примеров функций, имеющих заданное асимптотическое множество. W. Gross [3] построил целую функцию, множество асимптотических значений которой совпадает с $\overline{\mathbb{C}}$. M. Heins [4] показал, что каждое аналитическое множество, содержащее бесконечность, является асимптотическим множеством некоторой целой функции. В [5] и [6] теоремы W. Gross'a и M. Heins'a переносятся на случай функций, аналитических в плоских областях произвольной связности. В

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00510а)).

докладе будет представлено обобщение примеров W. Gross'a и M. Heins'a на функции, аналитические в поликруговых областях из $\mathbb{C}^n$.

Область $G \subset \mathbb{C}$ имеет изолированный граничный фрагмент (см. [7]), если выполняется одно из условий:

(I) существуют континуум $K \subset \partial G$ и открытое множество U, такие, что $K \subset U$ и $(\partial G \setminus K) \cap U = \emptyset$.

(II) существуют простая кривая $\Gamma \subset \partial G$ с различными концами ξ, η и открытый круг B, такие, что $\xi, \eta \in \partial B$, $\Gamma \setminus \{\xi, \eta\} \subset B$ и $(\partial G \setminus \Gamma) \cap B = \emptyset$.

(III) существует изолированная точка a множества ∂G.

Теорема. *Пусть k — фиксированное натуральное число, $1 \leq k \leq n$. Пусть $D = D_1 \times \cdots \times D_n$, где D_i, $1 \leq i \leq n$, $i \neq k$, — произвольные плоские области, $D_k \subset \mathbb{C}$ — область с изолированным граничным фрагментом F. Пусть $z_0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0) \in \partial D$; z_i^0, $i \neq k$, — или точка области D_i, или достижимая граничная точка области D_i; $z_k \in F$. Если F — фрагмент типа (I), то будем дополнительно предполагать, что z_k^0 — достижимая граничная точка области D_k и z_k^0 является носителем некоторого простого конца области D_k. Пусть A — аналитическое множество, содержащее бесконечность. Тогда существует аналаитическая в D функция f, для которой $As(f, z_0) = A$.*

Тот факт, что z_k^0 является носителем простого конца области D_k (D_k может быть многосвязной), здесь означает, что z_k^0 — носитель простого конца односвязной области $G \supset D_k$, $\partial G = F$.

В докладе будет показано, что свойства асимптотических множеств в многомерном и одномерном случаях существенно отличаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mazurkiewicz S.* Sur les points singuliers d'une fonction analytique // Fund. Math. 1931. Vol. 17(1). p. 26–29.

2. *Iversen F.* Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes // Imprimerie de la Société de littérature finnoise. Helsinki, 1914.

3. *Gross W.* Eine ganze Funktion für die jede Komplexe Zahl Konvergenzwert ist // Math. Ann. 1918. Vol. 79. P. 201–208.

4. *Heins M.* The set of asymptotic values of an entire function // Proc. Scand. Math. Congress (Lund 1953). 1954. P. 56–60.

5. *Ganenkova E. G., Starkov V. V.* Asymptotic values of functions, analytic in planar domains // Probl. Anal. Issues Anal. 2013. Vol. 2(20)(1). P. 38–42. DOI: 10.15393/j3.art.2013.2341.

6. *Ganenkova E. G., Starkov V. V.* Analytic in planar domains functions with preassigned asymptotic set // J. Appl. Anal. 2014. Vol. 20, № 1. P. 7–14. DOI: 10.1515/jaa-2014-0002.

7. *Liczberski P., Starkov V. V.* On locally biholomorhic mappings from multi-connected onto simply connected domains // Ann. Polon. Math. 2005. Vol. 85, № 2. P. 135–143. DOI: 10.1016/j.jmaa.2008.11.067.

УДК 517.984, 550.834

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВОЛН ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

А. В. Головцов, В. С. Мокейчев (Казань, РФ)
Golovtsov@mail.ru, Valery.Mokeychev@kpfu.ru

В [1,2] для вычисления неизвестных коэффициентов в математической модели

$$\sum_{|\alpha|\le 2} C_\alpha U^{(\alpha)} = 0,\ U^{(\alpha)} = (\partial/\partial t)^{\alpha_1}(\partial/\partial x)^{\alpha_2}(\partial/\partial y)^{\alpha_3}(\partial/\partial z)^{\alpha_4}U$$

используются данные амплитуд элементарных волн $\varphi(t)\psi(x,y,z)$, $\psi_1(x)v_1(t,y,z)$, $\psi_2(y)v_2(t,x,z)$, $\psi_3(z)v_3(t,x,y)$. Это оказалось возможным в случае разделения переменных $t,(x,y,z)$; $x,(t,y,z)$; $y,(t,x,z)$; $z,(t,x,y)$. В случае невозможности разделения переменных предлагается использовать специальные волны $U = V(b_1t + b_2x + b_3y + b_4z) \equiv V(\xi)$. После подстановки в (1) окажется

$$B_2V^{(2)}(\xi) + B_1V^{(1)}(\xi) + B_0V(\xi) = 0. \tag{1}$$

Пусть коэффициенты C_α и вектор $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ постоянны. Тогда $B_2 = \sum\limits_{|\alpha|=2} C_\alpha \cdot b^\alpha$, $B_1 = \sum\limits_{|\alpha|=1} C_\alpha \cdot b^\alpha$, $B_0 = C_0$. После обозначений $a_1 = \dfrac{B_1}{B_2}$, $a_2 = \dfrac{B_0}{B_2}$ уравнение (1) принимает вид

$$V^{(2)}(\xi) + a_1V^{(1)}(\xi) + a_0V(\xi) = 0, \tag{2}$$

и в нём не известны числа a_1, a_2. Чтобы их найти ставится задача с условиями

$$V(\xi_0 + jT) = A_j, \quad j = 0, 1, 2, 3, \tag{3}$$

где $T > 0$ фиксировано и A_j известны. В $[1, 2]$ получены необходимые и достаточные условия для разрешимости задачи (2), (3), и в случае разрешимости вычислены $V(\xi)$ и неизвестные коэффициенты a_1, a_2. В результате получится система уравнений

$$\sum_{|\alpha|=1} C_\alpha \cdot b^\alpha = a_1 \sum_{|\alpha|=2} C_\alpha \cdot b^\alpha, \quad C_0 = a_2 \sum_{|\alpha|=2} C_\alpha \cdot b^\alpha. \tag{4}$$

В частности, если в математической модели не известны только два коэффициента, то их можно вычислить из (4). В случае большего количества неизвестных в математической модели следует использовать волны $V_k(\xi_k) = V(b_{k,1}t + b_{k,2}x + b_{k,3}y + b_{k,4}z)$ и данные

$$V_k(\xi_0 + jT) = A_{k,j}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{5}$$

В случае их существования вычисляются $V_k(\xi)$ и соответствующие $a_{1,k}$, $a_{2,k}$. В результате получится система уравнений

$$\sum_{|\alpha|=1} C_\alpha \cdot b^\alpha_{(k)} = a_{1,k} \sum_{|\alpha|=2} C_\alpha \cdot b^\alpha_{(k)}, \quad C_0 = a_{2,k} \sum_{|\alpha|=2} C_\alpha \cdot b^\alpha_{(k)}. \tag{6}$$

Так как в математической модели один из коэффициентов всегда можно считать 1, то (6) линейная неоднородная система алгебраических уравнений. Выбрав $b_{(k)} = (b_{k,1}, b_{k,2}, b_{k,3}, b_{k,4})$ так, чтобы главный определитель был отличен от нуля, однозначно вычислим неизвестные C_α.

Следует отметить, что 14 — максимальное количество неизвестных коэффициентов в математической модели. Случай постоянных коэффициентов изучен полностью.

Если функции $a_{j,k}$ зависят только от ξ и T-периодические, то в случае существования $V_k(\xi)$ не удастся точно вычислить ни $V_k(\xi)$, ни $a_{j,k}$, а тем более C_α. Чтобы вычислить их приближённо, наряду с данными (5), следует использовать

$$V_k(\xi_r) = X_{k,r,1},\ V_k(\xi_r + T) = C_{k,r,2}, \quad \xi_r \in (0, T), \quad r = 1, \ldots, N. \tag{7}$$

При этом данные (5), (7) можно считать приближением к $V_k(\xi)$ на отрезке $[0, T]$. В случае постоянных $b_{(k)}$ сохраняются равенства (4). Условия существования $V_k(\xi)$ идентичны тем, которые выписаны в $[1, 2]$ при постоянных коэффициентах в (2), они определяется только данными (5) и условиями T-периодичности $a_{j,k}$. С использованием (7) вычисляются $V_k(\xi_r + qT)$ при $q = \pm 1, \pm 2, \ldots$, то есть, приближённо вычисляются волны в R^4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Головцов А. В.* Нахождение элементарных собственных сейсмических волн по результатам измерений // Исследования по прикладной математике и информатике. Казань, 2011. Вып. 27. С. 122–131.

2. *Головцов А. В., Мокейчев В. С.* Приближённое вычисление собственной волны по результатам измерений в заданной точке её амплитуд // Дифференц. уравнения, 2014. Т. 50, № 5. С. 636–645.

УДК 517.95

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Н. Д. Голубева (Самара, РФ)
dinatalia2012@yandex.ru

В данной работе рассматривается задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения в прямоугольнике, ограниченном характеристиками уравнения. Интегральные условия являются комбинацией значения искомого решения на границе области и интеграла от него.

В прямоугольнике $D = \{(x, y) : 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ рассматривается уравнение

$$u_{x,y} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = f(x, y). \tag{1}$$

Ставится следующая задача:

Найти решение уравнения (1) $u(x, y) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, *удовлетворяющее условиям*

$$u(x, 0) + l(x)\int\limits_0^b u(x, y)dy = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u(0, y) + \mu(y)\int\limits_0^a u(x, y)dx = \psi(y), \tag{3}$$

где $l(x),\ \varphi(x),\ \mu(y) \in C^1(\bar{D})$ *— заданные функции, удовлетворяющие условию:*

$$\varphi(0) - l(0)\int\limits_0^b u(0, y)dy = \psi(0) - \mu(0)\int\limits_0^a u(x, 0)dx.$$

Для поставленной задачи доказана терема о существовании и единственности классического решения.

В процессе доказательства устанавливается эквивалентность исходной задачи и задачи Гурса для нагруженного уравнения, если выполняется условие:

$$l(x) \neq -\frac{1}{b}, \quad \mu(y) \neq -\frac{1}{a}, \quad l(0) \neq 0,$$

$$1+a\mu(0)+\frac{\mu(0)}{l(0)}\int\limits_0^a\frac{l(x)-l(0)}{1+bl(0)}dx\neq 0.$$

Задача Гурса эквивалента операторному уравнению со сжимающим оператором.

Для частного случая поставленной задачи получен явный вид решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубева Н. Д., Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями // Матем. заметки. 1996. Т. 59, вып. 3. С. 456–458.

2. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 89–94.

3. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.

УДК 517.984

СХОДИМОСТЬ СРЕДНИХ РИССА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ИМЕЮЩЕЙ РАЗРЫВ

А. В. Голубь (Саратов, РФ)

GolubAV@list.ru

Рассматривается интегральный оператор

$$Af(x)=\int\limits_0^{\theta(x)}A(\theta(x),t)f(t)\,dt,$$

где $\theta(x)=\frac{1}{2}-x$ при $x\in[0,\frac{1}{2}]$ и $\theta(x)=\frac{3}{2}-x$ при $x\in(\frac{1}{2},1]$. Функция $A(x,t)$ обладает свойствами: $A(x,t)=0$ при $t>x$ и $A(x,x-0)\equiv 1$. Кроме того, положив $\widetilde{A}(x,t)=A(\theta(x),t)$ при $t\le\theta(x)$, $\widetilde{A}(x,t)=0$ при $t>\theta(x)$ и обозначив

$$B_{ij}(x,t)=\widetilde{A}\Big(\frac{i-1}{2}+x,\frac{j-1}{2}+t\Big),\quad i,j=1,2,\quad x,t\in\Big[0,\frac{1}{2}\Big],$$

требуем, чтобы

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial t^l}B_{ij}(x,t)\quad (k+l\le 2)$$

были непрерывны всюду, кроме, быть может, линии $t+x=\frac{1}{2}$ и

$$\frac{\partial}{\partial x}B_{ij}(x,t)\Big|_{t=\frac{1}{2}-x\pm 0},\quad \frac{\partial}{\partial x}B_{ij}(x,\gamma),\quad \gamma=0,\frac{1}{2}$$

были непрерывно дифференцируемы.

Функция $g(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$;

2) существует постоянная $C > 0$ такая, что $|g(\lambda, r)| \le C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$;

3) $g(\lambda, r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ;

4)
$$g\left(re^{i\varphi}, r\right) = O\left(\left|\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right|^{\gamma}\right), \gamma \ge 1.$$

Через $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ обозначим резольвету Фредгольма. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* A^{-1} *существует и* $f(x) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap V\left[0, \frac{1}{2}\right]$ *при* $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) \in C\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap V\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *при* $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f\left(\frac{1}{2} - 0\right) = f(0) - f(1) = 0$. *Тогда*

$$\lim_{r\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2} \max_{\frac{k-1}{2} \le x \le \frac{k}{2}} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f(x)\, d\lambda \right|\right) = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубь А. В., Хромов А. П.* Теорема равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с инволюцией, допускающей разрывы // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Информ. 2007. Т. 7, вып. 2, ч. 1. С. 5–10.

УДК 517.97:517.956.2

ОПТИМИЗАЦИЯ В НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ[1]

В. Ю. Гончаров (Москва, РФ)

fulu.happy@gmail.com

Задачи оптимизации функционалов, зависящих от собственных значений систем, описываемых эллиптическими дифференциальными уравнениями в частных производных, встречаются в различных приложениях [1, 2]. Множество таких задач часто возникает в оптимальном проектировании элементов конструкций. Например, для того чтобы расширить безрезонансный интервал частот некоторой конструкции, достаточно максимизировать ее фундаментальную частоту или разницу между соответствующими соседними частотами. Кроме того, часто возникают ситуации, в которых задача оптимального проектирования конструкции

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00827).

или ее элемента включает ограничение снизу на возможные значения частот собственных колебаний. Примерами таких задач являются задачи оптимального проектирования конструкций наименьшего веса. Частоты свободных колебаний конструкции отвечают собственным значениям соответствующей эллиптической краевой задаче. Таким образом, в оптимальном проектировании конструкций существует класс экстремальных задач, связанных с собственными значениями эллиптических операторов.

Исследование экстремальных задач, связанных с собственными значениями эллиптических операторов, сопровождается рядом серьезных математических трудностей. В первую очередь это обуславливается нелинейностью оптимизируемых функционалов и отсутствием гладкой зависимости собственных значений от коэффициентов дифференциальных уравнений, описывающих состояние системы.

В работе доказываются критерии существования и единственности оптимальных решений в задачах оптимизации, связанных с собственными значениями линейных эллиптических краевых задач.

Пусть Ω — ограниченная область $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Далее, пусть $\mathcal{G}$ — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N}$. Следующие обозначения будут полезными в дальнейшем. Пусть $\mathcal{D}$ — множество всех отображений $(x,\xi) \mapsto f(x,\xi) : \Omega \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ таких, что выполняются следующие условия:

1. $(x,\xi) \mapsto f(x,\xi)$ ограничено для п. в. $(x,\xi) \in \Omega \times \mathcal{G}$;
2. $f(\cdot,\xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathcal{G}$;
3. $f(x,\cdot) : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемо для п. в. $x \in \Omega$;
4. $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}(\cdot,\cdot) : \Omega \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ ограничено п. в. в $\Omega \times \mathcal{G}$, $i = 1, \dots, r$.

Пусть $\mathcal{D}_+$ суть множество всех отображений $f \in \mathcal{D}$ таких, что отображение

$$f(x,\cdot) : \mathcal{G} \to \mathbb{R} \tag{1}$$

выпукло для п. в. $x \in \Omega$. Далее, определим

$$\mathcal{D}_- = \{f : -f \in \mathcal{D}_+\}, \qquad \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_+ \cap \mathcal{D}_-.$$

Кроме того, через $\mathring{\mathcal{D}}_+$ обозначим множество всех отображений $f \in \mathcal{D}$ таких, что отображение (1) строго выпукло для п. в. $x \in \Omega$.

Пусть $m < s$, а V и W — замкнутые подпространства пространств $H^s(\Omega)$ и $H^m(\Omega)$ соответственно, причем $C_0^\infty(\bar{\Omega}) \subset V \subset W$. Кроме того, допустим, что свойства Ω обуславливают компактность вложения пространства V в W. Далее, пусть $U \subset [L^\infty(\Omega)]^r$ суть непустое выпуклое слабо со звездой компактное множество, элементы которого отображают Ω в $\mathcal{G}$.

Для $u \in U$ рассмотрим билинейные формы $\mathcal{A}_u : V \times V \to \mathbb{R}$ и $\mathcal{B}_u : W \times W \to \mathbb{R}$, определяемые следующим образом:

$$\mathcal{A}_u(y,z) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \le s} \int\limits_\Omega a_{\alpha\beta}\left(x, u(x)\right) \partial^\alpha y(x)\, \partial^\beta z(x)\, dx,$$

$$\mathcal{B}_u(y,z) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} \int\limits_\Omega b_{\alpha\beta}\left(x, u(x)\right) \partial^\alpha y(x)\, \partial^\beta z(x)\, dx,$$

где $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta} \in \mathcal{D}$. Очевидно, формы $\mathcal{A}_u(\cdot,\cdot)$ и $\mathcal{B}_u(\cdot,\cdot)$ непрерывны. Будем предполагать, что они являются также симметричными и коэрцитивными с положительными постоянными, которые не зависят от u.

Для $u \in U$ рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\mathcal{A}_u(y,z) = \lambda \mathcal{B}_u(y,z), \quad z \in V.$$

Пусть $\lambda_k[u]$ — k–ое собственное значение этой задачи. В связи с изложенным выше представляет интерес исследовать следующую задачу оптимизации: найти элемент $\hat{v} \in U$ такой, что

$$\lambda_k[\hat{v}] = \sup_{u \in U} \lambda_k[u]. \tag{2}$$

Приведем некоторые доказанные утверждения.

Теорема 1. *Если*

$$\begin{array}{llllll} a_{\alpha\alpha} \in \mathcal{D}_-, & |\alpha| \le s, & a_{\alpha\beta} \in \mathcal{D}_0, & \alpha \ne \beta, & |\alpha|, |\beta| \le s, \\ b_{\alpha\alpha} \in \mathcal{D}_+, & |\alpha| \le m, & b_{\alpha\beta} \in \mathcal{D}_0, & \alpha \ne \beta, & |\alpha|, |\beta| \le m, \end{array} \tag{3}$$

то существует решение $\hat{v}$ задачи (2).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (3), *и для некоторого решения $\hat{v}$ задачи* (2) *соответствующее собственное значение $\lambda_k[\hat{v}]$ является простым. Пусть $\hat{y}_k$ обозначает k–ый собственный элемент, соответствующий собственному числу $\lambda_k[\hat{v}]$. Если существует такой набор мультиндексов Γ, что*

$$-a_{\gamma\gamma} \in \mathring{\mathcal{D}}_+ \;\vee\; b_{\gamma\gamma} \in \mathring{\mathcal{D}}_+, \quad \partial^\gamma \hat{y}_k \ne 0 \;\; \textit{п. в. в} \;\; \Omega, \qquad \gamma \in \Gamma,$$

то задача (2) *обладает единственным решением.*

Оказывается, что при довольно близких предположениях справедливо аналогичное утверждение и для случая кратных собственных значений. В [3] приводятся некоторые приложения полученных результатов.

Проводятся дальнейшие исследования в этом направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М. : Наука, 1980. 256 с.

2. *Литвинов В. Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М. : Наука, 1987. 368 с.

3. *Goncharov V. Yu.* On some problems of optimal beam design // Международная конференция по математической теории управления и механике: тез. докл. М. : МИАН, 2015. С. 169–170.

УДК 517.95;517.984

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ И ДВУХТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

А. П. Гуревич, В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

1. Рассматривается задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty,\infty), \tag{1}$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{3}$$

где $q(x) \in C[0,1]$, комплекснозначная,α_1, α_2, β_1, β_2 —комплекснозначные числа и $\psi(x) \in C^1[0,1]$ комплекснозначна, причем

$$\psi'(0) + \alpha_1\psi(0) + \beta_1\psi(1) = \psi'(1) + \alpha_2\psi(0) + \beta_2\psi(1) = 0. \tag{4}$$

В [1], используя резольвентный подход в методе Фурье и прием А. Н. Крылова [2] об ускорении сходимости рядов, подобных рядам Фурье, получено классическое решение задачи (1)–(2) и начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0 \tag{5}$$

при минимальных условиях на $\varphi(x)$. Теперь схожий результат получается в случае начальных условий (3). Представляя $\psi(x)$ в виде

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x), \tag{6}$$

где $\psi_1(x) \in C^1[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = \psi'_1(0) = \psi'_1(1) = 0$ и $\psi_2(x) \in C^2[0,1]$, $\psi_2(x) \in D_L$ (D_L — область определения оператора $Ly = -y'' + q(x)y$, $y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0$, причем

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

$y \in C^2[0,1]$), получаем следующую формулу для формального решения по методу Фурье:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \qquad (7)$$

где $u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_0} + \sum\limits_{n \geq n_0} \int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda \psi_1)\frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda$, $u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_0} + \sum\limits_{n \geq n_0} \int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda \psi_1 - R_\lambda^0 \psi_1)\frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda$, $u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_0} + \sum\limits_{n \geq n_0} \int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda - \mu_0} \times$ $\times (R_\lambda g)\frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda$, $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, L_0 есть L при $q(x) \equiv 0$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, E — единичный оператор, λ — спектральный параметр; γ_n — контур в λ-плоскости, содержащий внутри себя лишь одно собственное значение оператора L, которые являются простыми при $n \geq n_0$ и удовлетворяют асимптотическим формулам: $\lambda_n = \rho_n^2$ $(\lambda = \rho^2, Re\rho \geq 0)$, $\rho_n = n\pi + O(\frac{1}{n})$; γ_0-контур, содержащий внутри себя все собственные значения оператора L, не попавшие в γ_n при $n \geq n_0$, μ_0 — фиксированное число, расположенное вне контуров γ_0 и γ_n при $n \geq n_0$, $g = (L - \mu_0 E)\psi_2$.

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \widetilde{\psi_1}(\tau) d\tau,$$

где $\widetilde{\psi_1}(x) = \psi_1(x)$ *при* $x \in [0,1]$, $\widetilde{\psi_1}(x)$ *— четная,* $\widetilde{\psi_1}(x+2) = \widetilde{\psi_1}(x)$ *и* $\widetilde{\psi_1}(x) \in C^1(-\infty, \infty)$.

Лемма 2. *Ряды* $u_1(x,t)$ *и* $u_2(x,t)$ *допускают почленное дифференцирование дважды по* x *и* t *при* $x \in [0,1]$ *и* $t \in (-\infty, \infty)$.

На основании лемм 1 и 2 получаем

Теорема 1. *Формальное решение* (7) *есть классическое решение задачи* (1)–(3) *при минимальных условиях* (4) *на* $\psi(x)$.

2. Теперь рассмотрим задачу (1), (3) и краевыми условиями

$$u'_x(0,t) + \beta u'_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = \alpha u(0,t) + u(1,t) = 0, \qquad (8)$$

где $q(x)$ — такая же, как и в п. 1, α, α_1, β, β_1 — комплексные числа, комплекснозначная $\psi(x) \in C^1[0,1]$ удовлетворяет условиям

$$\psi'(0) + \beta\psi'(1) + \alpha_1\psi(0) + \beta_1\psi(1) = \alpha\psi(0) + \psi(1) = 0, \qquad (9)$$

которые являются минимальными для классического решения.

Задачу (1), (3), (8) изучаем при условии $1+\alpha\beta \neq 0$, которое необходимо и достаточно для регулярности краевых условий соответствующей спектральной задачи по методу Фурье. Случай начальных условий (5) вместо (3) рассмотрен в [3]. Для задачи (1), (3), (8) сохраняется представление (6) для функции $\psi(x)$, но теперь $\psi_2(x) \in D_L$ — область определения оператора

$$Ly = -y'' + q(x)y, y'(0) + \beta y'(1) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = \alpha y(0) + y(1) = 0, \quad (10)$$

собственные значения которого образуют две последовательности: $\lambda_n = \rho_n^2$ и $\lambda'_n = {\rho'}_n^2$ ($\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$) и имеют асимптотику: $\rho_n = 2n\pi + \zeta_1 + \varepsilon_n$, $\rho'_n = 2n\pi + \zeta_2 + \varepsilon'_n$, где $\zeta_{1,2} = -i\ln(d \pm \sqrt{d^2-1})$, $d = -(\alpha+\beta)/1+\alpha\beta$, $\varepsilon_n = o(1)$, $\varepsilon'_n = o(1)$.

Обозначим через γ_n при $n \geq n_0$ объединение при отображении $\lambda = \rho^2$ образов двух непересекающихся окружностей $\{\rho \mid | \rho + 2n\pi + \zeta_j | = \delta\}$ ($j = 1, 2$), если $\zeta_1 \neq \zeta_2$ или один такой контур, если $\zeta_1 = \zeta_2$ и $\delta > 0$ достаточно мало; n_0 таково что при $n \geq n_0$ внутри каждого γ_n находятся λ_n и λ'_n (которые могут и совпадать).

Для формального решения задачи (1), (3), (8) сохраняется формула (7), но теперь L — оператор, определенный в (10), а L_0 совпадает с L при $q(x) \equiv 0$ и $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Сохраняются также и леммы 1 и 2, но в лемме 1 функция $\widetilde{\psi_1}(x)$ теперь удовлетворяет условиям: $\widetilde{\psi_1}(x) = \psi_1(x)$ при $x \in [0,1]$, $\widetilde{\psi_1}(-x) = \frac{1}{1+\alpha\beta}\left[(1-\alpha\beta)\widetilde{\psi}(x) - 2\beta\widetilde{\psi}(1-x)\right]$, $\widetilde{\psi_1}(1+x) = \frac{1}{1+\alpha\beta}\left[-2\alpha\widetilde{\psi_1}(x) + (\alpha\beta-1)\widetilde{\psi_1}(1-x)\right]$ и $\widetilde{\psi}(x) \in C^1(-\infty,\infty)$.

Теорема 2. *Формальное решение* (7) *есть классическое решение задачи* (1), (3), (8) *при условиях* (9) *на* $\psi(x)$.

Аналогично (даже проще) с помощью резольвентного подхода получается классическое решение задачи (1), (3) и краевыми условиями $u(0,t) = u(1,t) = 0$ при минимальных требованиях на $\psi(x)$: $\psi(x) \in C^1[0,1]$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

Отметим, что эта задача вместе с задачами из пунктов 1 и 2 исчерпывают весь класс смешанных задач для волнового уравнения с начальными условиями (3), для которых оператор соответствующей спектральной задачи в методе Фурье имеет регулярные краевые условия. Для $q(x)$ и $\psi(x)$ вещественных классическое решение задачи (1), (3) и условиями $u(0,t) = u(1,t) = 0$ при минимальных требованиях на $\psi(x)$ получено в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Резольвентный подход к методу Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 4. С. 621–630.

2. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.

3. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье для волнового уравнения в несамосопряженном случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 1156–1167.

4. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.

УДК 519.651

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА АФФИННОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ГИПЕР–БЕНТ–ФУНКЦИЙ

М. К. Датиев, А. В. Иванов (Москва, РФ)
mkdat05@rambler.ru

В прикладных областях криптографии значительную роль играют булевы функции. Гипер-бент-функции (ГБФ) — это специальный класс булевых функций, впервые описанный в работе [1]. Данный класс функций обладает рядом полезных свойств, что позволяет использовать класс гипер-бент-функций во многих областях криптографии.

При решении задач анализа криптографических алгоритмов, построенных с использованием преобразований конечных полей, часто возникает следующая проблема: найти эффективное приближение некоторой функции, заданной на конечном поле, в определенном множестве функций — классе приближений [2].

Многими авторами изучался вопрос нахождения лучшего приближения произвольной булевой функции в классе аффинных функций. Как известно, вероятность совпадения значений любой булевой функции от n переменных со значениями ее лучшей аффинной аппроксимации не меньше величины $\frac{1}{2} + 2^{-\frac{n}{2}-1}$ [2]. Функции, для которых эта оценка обращается в равенство, были названы «бент-функциями» [3].

Для исследования свойств булевых функций от n переменных, возможно рассмотрение их представлений в виде многочленов от одной переменной над полем $\mathrm{GF}(2^n)$. Данный факт позволяет использовать соответствующий алгебраический аппарат [4]. В работе [5] для одного из таких специальных представлений используется термин «приведенное представление в базисе векторного пространства $\mathrm{GF}(2^n)_{\mathrm{GF}(2)}$». В том же исследовании [5] изучался класс, так называемых, собственных мономиальных функций, заданных приведенными представлениями в базисе пространства $\mathrm{GF}(2^n)_{\mathrm{GF}(2)}$, двойственном к некоторому полиномиальному базису. Показано, что в данном классе для бент-функций от n переменных степени нелинейности не выше $\frac{n}{2} - 1$ существует более точное приближение, чем в классе линейных функций [5]. В работе [1] Йозефом и Гонгом построен такой класс отображений из поля $\mathrm{GF}(2^n)$ в поле $\mathrm{GF}(2)$, который наихудшим образом приближается как линейными функциями, так и собственными мономиальными функциями. Такие отображения получили название «гипер-бент-функции» [1, 5].

Введем следующее обозначение. Пусть $\mathcal{F}_n$ — множество всех отображений из поля $\mathrm{GF}(2^n)$ в поле $\mathrm{GF}(2)$. Для того чтобы определить, является ли $F \in \mathcal{F}_n$ гипер-бент-функцией, необходимо найти коэффициенты расширенного преобразования Уолша – Адамара, т. е. посчитать расстояние до множества функций вида $\mathrm{tr}_1^n(ax^\delta)$, где $a \in Q$, $(\delta, 2^n - 1) = 1$. Для наиболее эффективного нахождения коэффициентов расширенного преобразования Уолша – Адамара для любого δ : $(\delta, 2^n - 1) = 1$ был разработан соответствующий алгоритм:

Алгоритм 1.

1. Для заданного $\delta : (\delta, 2^n - 1) = 1$ найти с помощью расширенного алгоритма Евклида соответствующее значение $\sigma : \sigma \cdot \delta \equiv 1(\mathrm{mod} 2^n - 1)$.
2. Вычислить значения функции $F_\sigma(x) = F(x^\sigma)$.
3. С помощью быстрого преобразования Фурье найти коэффициенты Фурье для функции $F_\sigma(x)$.
4. Так как соответствующие коэффициенты Фурье для функции связаны известным соотношением с коэффициентами Уолша – Адамара для функции, то мы можем определить соответствующие коэффициенты преобразования Уолша – Адамара для функции F.

Найденные при помощи алгоритма 1 коэффициенты будут равны соответствующим коэффициентам расширенного преобразования Уолша – Адамара для функции $F \in \mathcal{F}_n$.

Если выполняется условие, что для всех $\delta : (\delta, 2^n - 1) = 1$ соответствующие коэффициенты расширенного преобразования Уолша – Адамара по абсолютной величине все будут равны $2^{\frac{n}{2}}$, тогда функция $F \in \mathcal{F}_n$ является гипер-бент-функцией.

Ротхаусом было экспериментально установлено, что любая булева функция φ от $n = 6$ переменных $\deg\varphi = 3$, являющаяся бент-функцией, эквивалентна с точностью до невырожденных аффинных замен переменных и добавления произвольных аффинных функций одной из следующих трех функций [3]:

$$f_1 = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_4 \oplus x_2x_5 \oplus x_3x_6, \tag{1}$$

$$f_2 = x_1x_2x_3 \oplus x_2x_4x_5 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_4 \oplus x_2x_6 \oplus x_3x_5 \oplus x_4x_5, \tag{2}$$

$$f_3 = x_1x_2x_3 \oplus x_2x_4x_5 \oplus x_3x_4x_6 \oplus x_1x_4 \oplus x_2x_6 \oplus$$
$$\oplus x_3x_4 \oplus x_3x_5 \oplus x_3x_6 \oplus x_4x_5 \oplus x_4x_6, \tag{3}$$

Авторами работы исследовался вопрос, бент-функциям какого из этих классов соответствуют в различных базисах бент-функции, являющиеся гипер-бент-функциями. В результате проведенного анализа был получен результат, показывающий, что только в третьем классе существуют бент-функции, соответствующие в некотором базисе гипер-бент-функциям.

На основании проведенных исследований было доказано утверждение, которое описывает новые свойства отображений из множества $\mathcal{F}_n$, соответствующих одной булевой функции, в специальным образом подобранных базисах.

Утверждение. Пусть $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ — булева функция от n переменных. Пусть в векторном пространстве Q_P базис $\overrightarrow{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ — двойственный базису $\overrightarrow{\theta} = (1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1})$, где θ — примитивный элемент поля Q, а базис $\overrightarrow{\varepsilon^*} = (\varepsilon_0^*, \ldots, \varepsilon_{n-1}^*)$ — двойственный базису $\overrightarrow{\theta^d} = (1, \theta^d, \theta^{2d}, \ldots, \theta^{(n-1)d})$, где $d = 2^k (k \geq 1)$. Пусть $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ соответствует в базисе $\overrightarrow{\varepsilon}$ отображению $F(x)$, а в базисе $\overrightarrow{\varepsilon^*}$ отображению $F^*(x)$. Тогда $F(x)$ — гипер-бент-функция тогда и только тогда, когда $F^*(x)$ гипер-бент-функция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Youssef A., Gong G.* Hyper-bent-functions // Advances in Cryptology. Proc. Of Eurocrypt'2001 // Lecture Notes in Computer Science. 2001. Vol. 2045. P. 406–419.

2. *Амбросимов А. С.* О приближении функций k-значной логики функциями из заданной системы // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3, вып. 3. С. 653–674.

3. *Rothaus O. S.* On "Bent"Functions // Journal of Combinatorial Theory (A). 1976. Vol. 20. № 3. P. 300–305.

4. *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля : в 2 т. Т. 1, 2. М.: Мир, 1988.

5. *Кузьмин А. С., Марков В. Т., Нечаев А. А., Шишков А. Б.* Приближение булевых функций мономиальными // Дискрет. матем. 2006. Т. 18, № 1. С. 9–29.

УДК 517.51

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ОБОБЩЕНИЙ

А. Б. Дикмен (Стамбул, Турция),
А. Л. Лукашов (Саратов, РФ)
LukashovAL@info.sgu.ru

Для построения и исследования аппроксимационных свойств многих классических линейных положительных операторов применяется метод производящих функций. В. С. Виденским был построен обширный класс обладающих хорошими аппроксимативными свойствами операторов, значения которых являются рациональными функциями с фиксированными полюсами. Производящие функции этих операторов обобщают производящую функцию классических многочленов Бернштейна. Им же было отмечено, что с помощью тех же производящих функций можно построить также их q-аналоги (операторы Лупаса, точнее, их модификации). Нами было отмечено [1], что использование q-производных (вместо обычных) позволяет изучать и аппрокимативные свойства операторов Лупаса. Кроме того, этими же методами построены обладающие хорошими аппроксимативными свойствами обобщения операторов Баскакова, включающие их известные q-аналоги.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dikmen A. B. Lukashov A. L.* Generating functions method for classical positive operators, their q-analogues and generalizations // Positivity. (Online first; DOI: 10.1007/s11117-015-0362-4).

УДК 517.984

НЕРАВЕНСТВО ПУАНКАРЕ НА ТРИАНГУЛЯЦИЯХ ОБЛАСТЕЙ[1]

Р. П. Докучаев (Волгоград, РФ)
dokuch90@mail.ru

При решении уравнения минимальной поверхности итерационным методом, основанном на градиентном спуске для функционала площади, возникает вопрос о скорости сходимости данного способа. Оказывается, что скорость сходимости численного метода опирается на аналог неравенства Пуанкаре на триангуляциях, а именно на константу в неравенстве.

В данной работе мы займемся вопросом нахождения константы в аналоге неравенства Пуанкаре для триангуляций некоторых частных случаев для дальнейшего возможного отыскивания константы неравенства для триангуляции общего вида.

Рассмотрим область $\Omega_1 = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, где $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ — разбиение отрезка $[a; b]$, а $\psi(x)$ и $\phi(x)$ — некоторые липшицевы функции, заданные на отрезке $[a; b]$, т. е. $|\frac{\psi(x_{i+1})-\psi(x_i)}{x_{i+1}-x_i}| \leq L_1$ и $|\frac{\phi(x_{i+1})-\phi(x_i)}{x_{i+1}-x_i}| \leq L_2$, $(L_1, L_2) - const$. Положим $f_\tau(x) = \tau\psi(x) + (1-\tau)\phi(x)$ и разобьем отрезок [0;1] точками $0 = \tau_0 < < \tau_1 < ... < \tau_m = 1$. Рассмотрим сетку в данной области, задаваемую системой точек $A_{ij}(x_i, y_j) = (x_i, f_{\tau_j}(x_i)), i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00375).

Разбивая одной из диагоналей все трапеции $A_{ij}A_{i+1j}A_{ij+1}A_{i+1j+1}$, где $i=\overline{0,n-1}, j=\overline{0,m-1}$, получим триангуляцию области. Тогда пусть u_{ij}-значение в точке A_{ij}, причем необязательно нулевое.

Теорема 1. *Тогда в области Ω_1 справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} u_{kl}^2 \leq C\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha=0}^{m-1}\left(a_{k\alpha}^2+b_{k\alpha}^2\right)+\sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha=0}^{m-1}\left(\frac{u_{\beta+1j}-u_{\beta j}}{x_{\beta+1}-x_{\beta}}\right)^2\right),$$

где

$$C=\max\left(\max\left(\psi(x_j)-\phi(x_j)\right)^2;(b-a)^2\max\left(2;2\max^2\left(L_1,L_2\right)+1\right)\right),$$

a_{ij}, b_{ij} — частные производные кусочно-гладкой функции в треугольнике T_{ij}.

Допустим область Ω_2 в полярных координатах имеет следующий вид $\Omega_2=\{(r,\phi) : a\leq r\leq b, \alpha\leq\phi\leq\beta\}$. Пусть $a=r_0<r_1<...<r_n=b$, $\alpha=\phi_0<\phi_1<...<\phi_m=\beta$ и пусть во всех точках $A_{ij}=A_{ij}\left(r_i;\phi_j\right)$ задано некоторое значение u_{ij}, причем $u_{0j}=u_{nj}=u_{i0}=u_{im}=0$. Триангуляция области получается путем построения одной из диагоналей во всех трапециях $A_{ij}A_{i+1j}A_{ij+1}A_{i+1j+1}$.

Теорема 2. *Тогда в области Ω_2 справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} u_{kl}^2 \leq C\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left(a_{kj}^2+b_{kj}^2\right),$$

где $C=(b-a)^2$, a_{ij}, b_{ij} — частные производные кусочно-гладкой функции в треугольнике T_{ij}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галимов Н. К.* Об одном приближенном способе построения точечного каркаса минимальных поверхностей // Энергетика Татарстана. 2006. № 4(8). С. 69–76.

2. *Михайленко В. Е.* Конструирование форм современных архитектурных сооружений. Киев : Будiвельник, 1978. 160 с.

УДК 519.853

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАВНОМЕРНОЙ ОЦЕНКЕ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ШАРОМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА[1]

Дудов С. И., Осипцев М. А. (Саратов, РФ)
DudovSI@info.sgu.ru, Osipcevma@gmail.com

Пусть D — заданное выпуклое тело из $\mathbb{R}^p$, а $n(x)$ — некоторая норма на $\mathbb{R}^p$. Рассматривается задача

$$\phi(x,r) \equiv h(D,\, Bn(x,r)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}. \qquad (1)$$

Здесь $Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x-y) \leqslant r\}$ — шар радиуса r с центром в точке x,

$$h(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} n(a-b),\, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} n(a-b)\}$$

— расстояние Хаусдорфа между множествами A и B, индуцированное нормой $n(\cdot)$.

Задача (1) является канонической для некоторого класса задач по шаровым оценкам выпуклых тел. А именно, своими решениями она способна выражать решения той или иной задачи из этого класса в зависимости от значения параметра $r \geq 0$. Например, задач о вписанном и описанном шарах, о равномерной оценке выпуклого компакта D шаром, о минимальной (по толщине) шаровой оболочке границы этого компакта и др. [1, 2].

Пусть далее D_ε некоторое выпуклое тело, а Bn^δ — симметричное относительно 0_p выпуклое тело, такие что

$$h(D,\, D_\varepsilon) \leqslant \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$
$$\frac{1}{1+\delta}Bn(0_p,1) \subset Bn^\delta \subset \frac{1}{1-\delta}Bn(0_p,1), \quad \delta \in (0,1).$$

То есть D_ε и Bn^δ — некоторые аппроксимации тела D и единичного шара используемой нормы. Обозначим через

$$n_\delta(x) = \inf\{\alpha : \frac{x}{\alpha} \in Bn^\delta\}$$

— функцию Минковского множества Bn^δ, где

$$Bn^\delta(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p :\, n_\delta(x-y) \leqslant r\}.$$

[1]Работа выполнена в рамках выполнения проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

Наряду с «точной» задачей (1) далее рассматриваем и «приближенную» задачу

$$\phi_{\varepsilon,\delta}(x,r) \equiv h_\delta(D_\varepsilon,\, Bn^\delta(x,r)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}, \tag{2}$$

где $h_\delta(\cdot,\cdot)$ — метрика Хаусдорфа, индуцированная нормой $n_\delta(\cdot)$.

Пусть далее обозначения

$$f(r) = \min_{x\in\mathbb{R}^p} \phi(x,r), \quad C(r) = \{y \in \mathbb{R}^p :\, \phi(y,r) = f(r)\},$$
$$f_{\varepsilon,\delta}(r) = \min_{x\in\mathbb{R}^p} \phi_{\varepsilon,\delta}(x,r), \quad C_{\varepsilon,\delta}(r) = \{y \in \mathbb{R}^p :\, \phi_{\varepsilon,\delta}(y,r) = f_{\varepsilon,\delta}(r)\}$$

выражают решения задач (1) и (2) соответственно.

Ставится вопрос, имеет ли место сходимость

$$f_{\varepsilon,\delta}(r) \to f(r),$$
$$h(C(r),\, C_{\varepsilon,\delta}(r)) \to 0,$$

при $\varepsilon \downarrow 0$, $\delta \downarrow 0$?

Теорема 1. *Для любых $r \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$, $\delta \in [0,\, 1)$ справедливо неравенство*

$$|f_{\varepsilon,\delta}(r) - f(r)| \leqslant (1+2\delta)\varepsilon + \frac{\delta(1+\delta)}{1-\delta}(d+2\varepsilon),$$

где $d = \max\limits_{x,y\in D} n(x-y)$ — диаметр тела D в норме $n(\cdot)$.

Теорема 2. *Имеет место*

$$\rho(C_{\varepsilon,\delta}(r),\, C(r)) \to 0, \quad \text{если } \varepsilon \downarrow 0, \quad \delta \downarrow 0,$$

где $\rho(A,B) = \sup\limits_{a\in A} \inf\limits_{b\in B} n(a-b)$ — уклонение множества A от B.

Далее будем полагать, что нам известны решения задач о внешней и внутренней оценках:

$$R(x,D) = \max_{y\in D} n(x-y) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}, \tag{3}$$

$$\rho(x,D) = \min_{\Omega} n(x-y) \to \max_{x\in D}, \quad \Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}, \tag{4}$$
$$P(x,D) = \rho(x,D) - \rho(x,\Omega).$$

Введем для решения этих задач обозначения

$$R^* = \min_{x\in\mathbb{R}^p} R(x,D), \quad C_R = \{y \in \mathbb{R}^p :\; R(y,D) = R^*\},$$
$$\rho^* = \max_{x\in D} \rho(x,\Omega), \quad C_\rho = \{y \in D :\; \rho(y,\Omega) = \rho^*\}.$$

Используя эти данные можно считать также известными величины:

$$R^{\pm} = \max_{x\in C_\rho}(\min) R(x,D), \quad P^{\pm} = \max_{x\in C_R}(\min) P(x,D),$$
$$r_R^{\pm} = (R^* - P^{\mp})/2, \quad r_P^{\pm} = (R^{\pm} + \rho^*)/2,$$
$$0 \le r_R^- \le r_R^+ \le r_P^- \le r_P^+ < \infty.$$

Если решение задачи (3) является единственным (что гарантируется, например, строгой квазивыпуклостью нормы $n(\cdot)$), то $C_R = \{x_R\}$, $r_R^- = r_R^+ \equiv r_R$.

Определение. Норма $n(\cdot)$ называется λ-*сильно квазивыпуклой*, если ее единичный шар является λ-сильно выпуклым, т. е. (см. [3]) представим в виде пересечения евклидовых шаров радиуса λ.

Обозначим через

$$\gamma(\varepsilon,\delta) = 2[(1+2\delta)\varepsilon + \frac{\delta(1+\delta)}{1-\delta}(d+2\varepsilon)],$$

$r_R^+(\varepsilon,\delta)$, $r_P^-(\varepsilon,\delta)$ — аналоги величин r_R^+ и r_P^- для «приближенной» задачи (2).

Теорема 3. *Пусть $C_R \cap C_\rho = \varnothing$, норма $n(\cdot)$ является λ_n-сильно квазивыпуклой и $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ достаточно малы, чтобы выполнялось $r_R < r_P^-(\varepsilon,\delta)$. Тогда для любых $r \in [0, r_R]$, $x_{\varepsilon,\delta}(r) \in C_{\varepsilon,\delta}(r)$ выполняется*

$$||x_{\varepsilon,\delta}(r) - x_R|| \leqslant \sqrt{2C_1\lambda_n(R^* + \gamma(\varepsilon,\delta))\gamma(\varepsilon,\delta)},$$

где константа C_1 такова, что $||x|| \leqslant C_1 n(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^p$.

Если задача (4) имеет единственное решение (что обеспечивается, например, строгой выпуклостью тела D), то $C_\rho = \{x_\rho\}$ и $r_P^- = r_P^+ \equiv r_P$.

Теорема 4. *Пусть $C_R \cap C_\rho = \varnothing$, тело D является λ_D-сильно выпуклым, а $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ достаточно малы, чтобы выполнялось $r_R^+(\varepsilon,\delta) < r_P$. Тогда для любых $r \geqslant r_P$, $x_{\varepsilon,\delta}(r) \in C_{\varepsilon,\delta}(r)$ выполняется*

$$||x_{\varepsilon,\delta}(r) - x_\rho|| \leqslant \sqrt{2C_1\lambda_D\gamma(\varepsilon,\delta)}.$$

Введем обозначения

$$a_R(r) = \min_{\substack{v\in\partial R(x,D)\\ x: R(x,D)=f(r)+r}} ||v||, \qquad a_P(r) = \min_{\substack{v\in\partial P(x,D)\\ x: P(x,D)=f(r)-r}} ||v||,$$
$$a(r) = \min\{a_R(r), a_P(r)\}, \qquad \lambda = \lambda_D + d\cdot\lambda_n.$$

Теорема 5. *Пусть $C_R \cap C_\rho = \varnothing$, D является λ_D-сильно выпуклым множеством, а $n(\cdot)$ — λ_n-сильно квазивыпуклой нормой. Тогда при всех* *достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, чтобы выполнялось $r_R < r_P^-(\varepsilon,\delta)$ и $r_R^+(\varepsilon,\delta) < r_P$ для любых $r \in (r_R, r_P) \cap (r_R^+(\varepsilon,\delta), r_P^-(\varepsilon,\delta))$ и $x_{\varepsilon,\delta}(r) \in C_{\varepsilon,\delta}(r)$ справедлива оценка*

$$||x_{\varepsilon,\delta}(r) - x(r)|| \leqslant \sqrt{\frac{\gamma(\varepsilon,\delta)}{a(r)}\left(2\lambda + \frac{\gamma(\varepsilon,\delta)}{a(r)}\right)}$$

Теорема 6. *Пусть D является λ_D сильно выпуклым телом, $n(\cdot)$-λ_n сильно квазивыпуклой нормой и $\tau \in (0, (r_P - r_R)/2)$. Тогда при $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ достаточно малых, чтобы*

$$r_R^+(\varepsilon,\delta) \leqslant r_R + \tau, \quad r_P^-(\varepsilon,\delta) \geqslant r_P - \tau$$

будет выполняться

$$\sup_{x_{\varepsilon,\delta} \in C_{\varepsilon,\delta}(r)} \sup_{r \in [r_R + \tau, r_P - \tau]} ||x_{\varepsilon,\delta} - x(r)|| \leqslant \sqrt{\frac{\gamma(\varepsilon,\delta)}{b(\tau)}\left(2\lambda + \frac{\gamma(\varepsilon,\delta)}{b(\tau)}\right)},$$

где

$$b(\tau) = \sqrt{\frac{\min\{R(x(r_R+\tau), D) - R^*, P(x(r_P - \tau), D) + \rho^*\}}{2C_1\lambda}}.$$

Теорема 7 *Пусть D является λ_D-сильно выпуклым телом, а $n(\cdot)$ — λ_n-сильно квазивыпуклой нормой. Тогда для любых $r \in (r_R, r_P)$ и $x_{\varepsilon,\delta}(r) \in C_{\varepsilon,\delta}(r)$ справедлива асимптотическая оценка*

$$||x_{\varepsilon,\delta}(r) - x(r)|| \leqslant M(\gamma(\varepsilon,\delta))^{\frac{1}{3}}(1 + o(1)),$$

где $o(1) \to 0$, при $\varepsilon \downarrow 0$ и $\delta \downarrow 0$, а $M > 0$ и зависит только от $\lambda = \lambda_D + d\lambda_n$ и C_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М. : Фазис, 2002.

2. *Дудов С. И.* Систематизация задач по шаровым оценкам выпуклого компакта // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 9. С. 99–120.

3.*Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2004.

УДК 517.52

КОНСТАНТЫ В ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРЕМЕ ХАРДИ – ЛИТТЛЬВУДА[1]

М. И. Дьяченко (Москва, РФ),
Е. Д. Нурсултанов (Астана, РК)
dyach@mail.ru

Пусть функция $f(x) \in L(T)$ и

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

— ее ряд Фурье.

Хорошо известна классическая теорема Харди – Литтльвуда (см. [1, с. 181], здесь мы сформулируем только первую часть теоремы, которая и будет обсуждаться).

Теорема А. *Пусть $1 < p \leq 2$ и функция $f(x) \in L_p(T)$. Тогда для коэффициентов Фурье выполняется неравенство*

$$J_p \equiv \left(|a_0|^p + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{p-2} (|a_k|^p + |b_k|^p) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(p) \|f\|_p, \qquad (1)$$

где постоянная $C(p) > 0$ зависит лишь от p.

Хорошо известно, также, что неравенство (1) непосредственно не может быть распространено на $p > 2$. Тем не менее, Е. Д. Нурсултановым [2] было установлено такое обобщение теоремы А.

Теорема Б. *Пусть $1 < p < \infty$ и функция $f(x) \in L_p(T)$. Пусть, также,*

$$\bar{a}_k(f) = \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{k} a_l(f) \quad \text{и} \quad \bar{b}_k(f) = \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{k} b_l(f)$$

при $k = 1, 2, ...$

Тогда выполняется неравенство

$$\left(|a_0|^p + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{p-2} (|\bar{a}_k|^p + |\bar{b}_k|^p) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(p) \|f\|_p, \qquad (2)$$

где постоянная $C(p) > 0$ зависит лишь от p.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-01236) и МОН РК 4080/ГФ4.

При этом, вообще говоря, постоянная $C(p) \to \infty$ при $p \to \infty$.

Нам удалось выяснить, что если рассмотреть отдельно косинус-коэффициенты и несколько видоизменить способ усреднения коэффициентов, то можно уточнить оценку (2).

Введем обозначения

$$a'_k(f) = \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{k} a_l(f) \left(1 - \frac{l}{k+1}\right)$$

и

$$b'_k(f) = \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{k} b_l(f) \left(1 - \frac{l}{k+1}\right)$$

при $k = 1, 2, ...$

Мы дадим простое доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и функция $f(x) \in L_p(T)$. Тогда*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{p-2} |a'_k(f)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|f\|_p, \qquad (2)$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$A(f) = (a'_0(f), 2a'_1(f), \dots, (k+1)a'_k(f), \dots),$$

действующий в пространство функций на целых неотрицательных числах, где мера $\nu(\{k\}) = \frac{1}{(k+1)^2}$. Если $f(x) \in L_2(T)$, то

$$\|A(f)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} ((k+1)a'_k(f))^2 \frac{1}{(k+1)^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l(f) \left(1 - \frac{l}{k+1}\right)\right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \left(\sum_{l=0}^{k} |a_l(f)|\right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \left(\sum_{l=0}^{k} (l+1)^{\frac{1}{3}} |a_l(f)| \frac{1}{(l+1)^{\frac{1}{3}}}\right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \sum_{l=0}^{k} (l+1)^{\frac{2}{3}} |a_l(f)|^2 \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(l+1)^{\frac{2}{3}}} \leq$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\frac{5}{3}}} \sum_{l=0}^{k} (l+1)^{\frac{2}{3}} |a_l(f)|^2 =$$

$$= C \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^{\frac{2}{3}} |a_l(f)|^2 \sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\frac{5}{3}}} \leq C_1 \sum_{l=0}^{\infty} |a_l(f)|^2 \leq C_1 \|f\|_2^2,$$

где C, C_1 — абсолютные постоянные. Если же $f(x) \in L_\infty(T)$, то

$$\|A(f)\|_\infty = \sup_{k\geq 0} |(k+1)a'_k(f)| = \sup_{k\geq 0} \left| \sum_{l=0}^{k} a_l(f) \left(1 - \frac{l}{k+1}\right) \right| =$$

$$= \sup_{k\geq 0} |\sigma_k(f;0)| = \sup_{k\geq 0} \frac{1}{\pi} \left| \int_T f(x) K_k(x) d\,x \right| \leq \|f\|_\infty .$$

Тогда, по интерполяционной теореме Рисса, для всех $p \in [2, \infty)$ имеем

$$C\|f\|_p^p \geq \|A(f)\|_p^p = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{p-2} |a'_k(f)|^p,$$

где C — абсолютная постоянная (не зависит от p).

Отметим, что используя теорему Рисса для сопряженной функции, можно получить такое же неравенство при $p \in [2, \infty)$ для $b'_k(f)$, но там C будет уже зависеть от p (и это по-существу).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 2. М. : Мир, 1965. 539 с.

2. *Нурсултанов Е. Д.* Сетевые пространства и неравенства типа Харди – Литтльвуда // Матем. сб. 1998. Т. 189, № 3. С. 83–102.

УДК 517.984

ЧИСЛЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА С ОСОБЕННОСТЬЮ ТИПА ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ[1]

Л. С. Ефремова (Саратов, РФ)
liubov.efremova@gmail.com

Рассмотрим дифференциальное уравнение Штурма – Лиувилля

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) \tag{1}$$

на отрезке $x \in [0, 1]$.

Дадим корректное определение оператора Штурма – Лиувилля в случае сингулярного потенциала. Пусть $q(x) = u'(x)$, $u(x) \in V$, где V — класс функций с ограниченным изменением, а равенство понимается в смысле распределений, то есть $(q, \varphi) = -(u, \varphi')$ для любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ с компактным носителем на $(0, 1)$. Введем квазипроизводную $y^{[1]}(x) = y'(x) - u(x)y(x)$ и перепишем уравнение (1) в виде

$$-(y^{[1]}(x))' - u(x)y^{[1]}(x) - u^2(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{2}$$

где $x \in [0, 1]$.

Будем считать, что $u(0) = 0$. Добавим две пары краевых условий

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{3}$$

$$y^{[1]}(0) = y(1) = 0. \tag{4}$$

Пусть $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$, $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ - собственные значения краевых задач (2), (3) и (2), (4) соответственно.

В данной работе будем рассматривать потенциал $q(x)$ следующего вида

$$q(x) = q_1(x) + \sum_{j=1}^{m} h_j \delta(x - a_j), \tag{5}$$

где $q_1(x) \in AC[0, 1]$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1436.2014К) и РФФИ (проекты № 14-01-31042, № 15-01-04864, № 16-01-00015).

В случае непрерывности $q(x)$ численные алгоритмы решения обратных задач дают хорошие результаты. В противном случае их использование приводит к ухудшению точности на всем отрезке. Было замечено: используя априорные данные об особенностях потенциала, можно увеличить точность его восстановления. Таким образом, целью данной работы является предоставление процедур восстановления особенностей и самого потенциала вида (5). Ранее были получены результаты для потенциала с конечным числом точек разрыва первого рода [1, 2].

Из (5) получаем: $u(x) = u_1(x) + \sum\limits_{a_j<x} h_j$, где $u_1(x) = \int\limits_0^x q_1(x)dx$. Определим последовательность $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ следующим образом: $\xi_{2n} = \sqrt{\lambda_n}$, $n \geqslant 1$; $\xi_{2n+1} = \sqrt{\mu_n}$, $n \geqslant 0$. Тогда асимптотические формулы для $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ имеют следующий вид [3, 4]:

$$\xi_n = \frac{\pi n}{2} + (-1)^n \int\limits_0^1 u(x)\sin(\pi n x)dx + O(n^{-2}), \quad n \to \infty$$

.

Определим следующую функцию:

$$p_N(x) = \frac{2\pi}{N\beta_N} \sum_{n=N+1}^{2N} w_{n,N} c_n n e^{i\pi n x}, \tag{6}$$

где $c_n = (-1)^n(\xi_n - \frac{\pi n}{2})$, $n \geqslant 1$, $w_{n,N}$ — некоторая оконная функция, $\beta_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=N+1}^{2N} w_{n,N}$ — коэффициент ослабления.

Теорема 1. *Пусть $p_N(x)$ — функция, определенная в (6), где последовательность $w_{n,N}$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. $\frac{1}{N}\sum\limits_{n=N}^{2N} w_{n,N}\cdot e^{i\pi n x} \to 0$ равномерно на $[-1,1]\setminus(-\delta,\delta)$ для любого $\delta > 0$;

2. $C_1 < |\beta_N| < C_2$, где C_1, C_2 — некоторые положительные константы.

Тогда $\lim\limits_{N\to\infty} p_N(a_j) = h_j$; $\lim\limits_{N\to\infty} p_N(x) = 0$, $x \neq a_j$, где сходимость является равномерной на любом множестве вида $[0+\varepsilon, 1-\varepsilon]\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{m}(a_j - -\varepsilon, a_j+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Следствие 1. *Пусть известно, что $a_1 \in [A_1, B_1]$, ... , $a_m \in [A_m, B_m]$, где A_k, B_k — некоторые числа, удовлетворяющие* *неравенствам* $0 < A_1 < B_1 < A_2 < B_2 < ... < A_m < B_m < 1$. *Для всех* $\delta > 0$ *существует* $N(\delta) = N_\delta$ *такое, что: если* $N > N_\delta$ *и* x^* *является точкой глобального максимума функции* $|p_N(x)|$ *на* $[A_j, B_j]$, *то* $x^* \in (a_j - \delta, a_j + \delta)$.

Алгоритм 1. *Пусть даны* $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$, $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$, $[A_1, B_1], ..., [A_m, B_m]$. *Требуется восстановить* a_j, h_j, $j = 1, ..., m$.

1. Определяем $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$: $\xi_{2n} = \sqrt{\lambda_n}, n \geqslant 1$; $\xi_{2n+1} = \sqrt{\mu_n}, n \geqslant 0$.
2. Находим $c_n = (-1)^n(\xi_n - \frac{\pi n}{2})$, $n \geqslant 1$.
3. Конструируем функцию $p_N(x)$ по формуле (6).
4. На каждом отрезке $[A_j, B_j]$ приближенно находим a_j, $j = 1, ..., m$ как глобальный максимум функции $|p_N(x)|$ на этом отрезке.
5. Находим h_j, $j = 1, ..., m$ как $h_j = p_N(a_j)$.

Алгоритм 2. *Пусть даны* a_j, h_j, $j = 1, ..., m$. *Требуется восстановить потенциал.*

1. Находим функцию Вейля исследуемой краевой задачи:

$$M(\lambda) = -\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}}{\prod\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n - \lambda}{(n+\frac{1}{2})^2}}$$

2. Восстанавливаем $q_1(x)$, решая обратную задачу Штурма–Лиувилля на графе (см. [5]) с вершинами $\{0, a_1, ..., a_m, 1\}$ и условиями склейки на внутренних вершинах:

$$y(a_j - 0) = y(a_j + 0),$$

$$y'(a_j - 0) = y'(a_j + 0) - h_j \cdot y(a_j + 0),$$

где $j = 1, ..., m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Efremova L. S., Freiling G.* Numerical solution of inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with discontinuous potentials // Central European Journal of Mathematics. 2013. Vol. 11, iss. 11. P. 2044–2051.

2. *Ефремова Л. С.* Численное решение обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля с разрывным потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 273–279.

3. *Жиков В. В.* Об обратных задачах Штурма–Лиувилля на конечном отрезке // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31, вып. 5. С. 965–976.

4. *Нейман-заде М. И., Савчук А. М.* Операторы Шредингера с сингулярными потенциалами // Тр. МИАН. 2002. Т. 236. С. 262–271.

5. *Юрко В. А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов : Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001. 499 с.

УДК 517.984

О ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ НА ПРОСТЕЙШЕМ НЕКОМПАКТНОМ ГРАФЕ С ЦИКЛОМ[1]

М. Ю. Игнатьев (Саратов, РФ)
IgnatievMU@info.sgu.ru

Пусть Γ — геометрический граф, состоящий из замкнутой кривой r_0 длины T и луча r_1, исходящего из некоторой точки $v_1 \in r_0$. Функцию y на графе Γ будем трактовать как пару функций $(y_0(x), x \in [0,T], y_1(x), x \in \in [0,\infty))$.

На цикле r_0 рассмотрим уравнение

$$\ell_0 y_0 \equiv -y_0'' + q_0(x) y_0 = \lambda y_0 = \rho^2 y_0, \tag{1}$$

где комплекснозначная функция q_0 такова, что:

$$\int\limits_0^{T/2} \left(q_0(x) - \frac{\nu_0}{x^2} \right) x^{1-2Re\nu} dx < \infty,$$

$$\int\limits_{T/2}^{T} \left(q_0(x) - \frac{\nu_0}{(x-T)^2} \right) (T-x)^{1-2Re\nu} dx < \infty,$$

$\nu_0 = \nu^2 - 1/4$, $\mathrm{Re}\nu > 1/2$.

На луче r_1 рассмотрим уравнение

$$\ell_0 y_1 \equiv -y_1'' + q_1(x) y_1 = \lambda y_1 = \rho^2 y_1, \tag{2}$$

где комплекснозначная функция q_1 удовлетворяет условию:

$$\int\limits_0^{1} \left(q_1(x) - \frac{\nu_0}{x^2} \right) x^{1-2Re\nu} dx + \int\limits_1^{\infty} x \left(q_1(x) - \frac{\nu_0}{x^2} \right) dx < \infty.$$

Через $S_{0j}(x,\lambda)$, $j = 1,2$ обозначим решения уравнения (1), удовлетворяющие интегральному уравнению п. 2 [1] с $\gamma = 0$, через $S_{Tj}(x,\lambda)$, $j = 1,2$ обозначим решения, построенные аналогично, но с $\gamma = T$. Для

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 1.1436.2014К) и РФФИ (проекты № 15-01-04864, № 16-01-00015).

уравнения (2) аналогично определим решения $S_j(x,\lambda)$, $j=1,2$ (в соответствующем интегральном уравнении полагаем $\gamma=0$). Известно [1], что для функций $S_j(x,\lambda)$, $S_{\gamma j}(x,\lambda)$, $\gamma\in\{0,T\}$ справедливы следующие асимптотики:

$$S_j(x,\lambda)=\beta_j\rho^{-\mu_j}\left(\exp(-i\rho x)[1]_0+\exp(-i\pi\mu_j)\exp(i\rho x)[1]_0\right),$$

$$S_{\gamma j}(x,\lambda)=\beta_{\gamma j}\rho^{-\mu_j}\left(\exp(-i\rho(x-\gamma))[1]_\gamma+\right.$$
$$\left.\exp(i\pi\mu_j\mathrm{sign}(\gamma-x))\exp(i\rho(x-\gamma))[1]_\gamma\right),\quad \rho\to\infty,\quad \mathrm{Im}\rho\geq 0,$$

где числа β_j, $\beta_{\gamma j}$ зависят только от ν, $[1]_\gamma:=1+O\left((\rho(x-\gamma))^{-1}\right)$.

Введем в рассмотрение линейные формы:

$$U_1(y):=\sigma\langle y,S_2\rangle,\ U_{01}(y):=\sigma_0\langle y,S_{02}\rangle,$$

$$U_2(y):=\sigma_1\langle y,S_2\rangle+\sigma_2\langle S_1,y\rangle,\quad U_{02}(y):=\sigma_{01}\langle y,S_{02}\rangle+\sigma_{02}\langle S_{01},y\rangle,$$
$$U_{T1}(y):=\langle y,S_{T2}\rangle,\ U_{T2}(y):=\langle S_{T1},y\rangle,$$

где $\sigma\sigma_0\sigma_2\sigma_{02}\neq 0$.

Определим *решение типа Вейля* $\psi(\rho)=(\psi_0(x,\rho),\psi_1(x,\rho))$, $\mathrm{Im}\rho>0$ как решение системы (1), (2) со следующими свойствами:

1) $\psi_1(x,\rho)=\exp\left(-i\rho x\right)(1+o(1))$, $x\to\infty$;

2) выполнены условия склейки:

$$U_1(\psi_1)=U_{01}(\psi_0)=U_{T1}(\psi_0),\quad U_2(\psi_1)+U_{02}(\psi_0)+U_{T2}(\psi_0)=0.$$

Условие G_0**.** $\psi_1(x,\rho)$ непрерывна на некотором множестве вида $\{\rho:\mathrm{Im}\rho\geq 0,\ 0<|\rho|\leq\delta\}$, $\delta>0$ и ограничена при $\rho\to 0$.

Условие G_1**.** Все полюсы $\psi_1(x,\rho)$ — простые. Для любого вещественного $\rho_0\neq 0$ существует конечный предел $\lim\limits_{\rho\to\rho_0,Im\rho>0}\psi_1(x,\rho)$.

Условие R**.** $\sigma_{02}\sigma_1\beta_{T1}\beta_2+\sigma_0\sigma_{12}\beta_{T2}\beta_1\neq 0$.

При выполнении условия G_1 для вещественных $\rho\neq 0$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\psi_1(x,\rho)=\exp(-i\rho x)+r(\rho)\exp(i\rho x)+o(1),\quad x\to\infty.$$

Обозначим через Z множество полюсов функции $\psi_1(x,\rho)$. При выполнении условия G_1 при $\rho_0\in Z$ справедлива асимптотика:

$$\mathrm{res}_{\rho=\rho_0}\psi_1(x,\rho)=\exp(i\rho_0x)(\alpha(\rho_0)+o(1)),\quad x\to\infty.$$

Данными рассеяния назовем набор

$$J=\left\{r(\rho),\ \rho\in\mathbb{R};\ Z,\ \alpha(\rho),\ \rho\in Z\right\}.$$

Рассмотрим обратную задачу восстановления коэффициентов уравнений (1), (2), число ν_0 считаем заданным.

Теорема 1. *При выполнении условий G_0, G_1 и условий регулярности склейки R задание данных рассеяния J однозначно определяет коэффициент $q_1(x), x > 0$ уравнения (2).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yurko V. A.* On integral transforms connected with differential operators having singularities inside the interval // Integral Transforms and Special Functions. 1997. Vol. 5(3–4). P. 309–322.

УДК 517.911.5+517.928.7+517.929.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Е. В. Иконникова (Воронеж, РФ)
uralochka_87@mail.ru

В настоящей статье рассматривается задача об усреднении для дифференциальных включений с быстро осциллирующей правой частью, имеющих вид

$$z'(\tau) \in F\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}, z(\tau - h(\varepsilon)), z'(\tau - h(\varepsilon)), \varepsilon\Big).$$

При решении рассматриваемой задачи было установлено, что, в отличие от однозначного случая из [1], в настоящем принципе усреднения необходимо выполнение дополнительного условия отличия от нуля некоторого многозначного векторного поля на границе области. Данный вариант принципа усреднения является обобщением результата, полученного в работе М. И. Каменского и Ж.-Ф. Кушерона [2], где доказывается существование периодических решений в конечномерном пространстве для дифференциальных уравнений нейтрального типа с запаздыванием.

Введем некоторые обозначения и понятия, которые будут использоваться в настоящей статье. Пусть $Kv(E)$ — набор всех непустых компактных выпуклых подмножеств банахова пространства E; $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$; $\mathrm{B}_E = \mathrm{B}_E(0,1)$; $C_T(\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $L^p_T(\mathbb{R}^n)$ — пространство T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, суммируемых со степенью

$1 < p < \infty$ на $[0, T]$; степень отображения $deg(\Phi, \partial U)$ — целочисленная характеристика, которая может быть сопоставлена каждому полунепрерывному сверху (k, χ)-уплотняющему многозначному векторному полю $\Phi = I - F$ [3, с. 52], S_Γ — множество селекторов $\{f \in E_2 : f(\tau) \in \Gamma(\tau)\}$ для многозначного отображения $\Gamma : E_1 \to E_2$. Интеграл от многозначного отображения понимается в смысле Аумана [4].

Пусть $F : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0,1] \to Kv(\mathbb{R}^n)$ — многозначное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

A1) Функция F является T-периодической по первой переменной.

A2) $F(\tau, \cdot, v, \cdot) : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to Kv(\mathbb{R}^n)$ — равномерно относительно всех переменных полунепрерывно сверху по второй и четвертой переменным, если вторая и третья лежат в ограниченных множествах.

A3) $F(\tau, u, \cdot, \varepsilon)$ — удовлетворяет условию Липшица по метрике Хаусдорфа $\mathbf{h}$ в $Kv(\mathbb{R}^n)$ с константой $0 < k < 1$ по третьей переменной.

A4) При каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon \in [0,1]$ для многозначной функции $F(\cdot, u, v, \varepsilon) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ существуют измеримые селекторы.

A5) Для любой константы $M > 0$ из неравенства $\|u\|_{\mathbb{R}^n} \leq M$ следует выполнение оценки $\|F(\tau, u, 0, \varepsilon)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \Phi_M$ при всех $\tau \in \mathbb{R}^1$, $u \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|u\|_{\mathbb{R}^n} \leq M$, и $\varepsilon \in [0,1]$, где Φ_M — некоторая константа, соответствующая M.

Рассмотрим задачу об εT-периодических решениях для включения

$$z'(\tau) \in F\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}, z(\tau - h(\varepsilon)), z'(\tau - h(\varepsilon)), \varepsilon\Big), \tag{1}$$

где $F : \mathbb{R}^1 \times C_{\varepsilon T}(\mathbb{R}^n) \times L^p_{\varepsilon T}(\mathbb{R}^n) \times [0,1] \to Kv(L^p_{\varepsilon T}(\mathbb{R}^n))$, $h : [0,1] \to \mathbb{R}^1_+$ — произвольное отображение и F удовлетворяет условиям $A1) - A5)$.

В (1) сделаем замену переменных $t = \frac{\tau}{\varepsilon}$ и $x(t) = z(\varepsilon t)$, в результате чего перейдем к рассмотрению включения:

$$x'(t) \in \varepsilon F\Big(t, x\Big(t - \frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon}\Big), \frac{1}{\varepsilon} x'\Big(t - \frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon}\Big), \varepsilon\Big). \tag{2}$$

Введем оператор

$$\mathfrak{F}_\varepsilon\Big(\xi, \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big) = \Big\{f \in L^p_T(\mathbb{R}^n) :$$
$$f(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} F\Big(t, \xi\Big(t - \frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon}\Big), \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(t - \frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon}\Big), \varepsilon\Big)\Big\},$$

где $t \in \mathbb{R}^1$, $\xi \in C_T(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in L^p_T(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon \in [0,1]$, $h : [0,1] \to \mathbb{R}^1_+$ — произвольное отображение. Можно показать, что для оператора $\mathfrak{F}_\varepsilon : C_T(\mathbb{R}^n) \times L^p_T(\mathbb{R}^n) \to L^p_T(\mathbb{R}^n)$ выполнены следующие свойства:

$B1)$ $\mathfrak{F}_\varepsilon\Big(\cdot, \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big)$ полунепрерывно сверху по первой переменной при каждом фиксированном $\varepsilon \in [0,1]$ и $\psi \in L^p_T(\mathbb{R}^n)$.

$B2)$ $\mathfrak{F}_\varepsilon\Big(\xi, \cdot\Big)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $0 < k < 1$ по метрике Хаусдорфа по второй переменной.

Тогда соотношение (2) можно переписать следующим образом

$$x'(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} \varepsilon \mathfrak{F}_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon}x')(t). \qquad (3)$$

Положим $\mathfrak{I}_0(\nu) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(s,\nu,0,0)ds$, $\nu \in \mathbb{R}^n$. Введем оператор

$$H_{0,\varepsilon}(x) = x(0) + \varepsilon \mathfrak{I}_0(x(0)).$$

$B3)$ Существует значение $\nu^* \in \mathbb{R}^n$ и некоторая ограниченная окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$ такая, что

$$0 \in H_{0,\varepsilon}(\nu^*), \ \nu^* \in U \text{ и } deg(-H_{0,\varepsilon}, U) \neq 0.$$

Замечание. Положим $\widetilde{M} = \sup\{\|F(t,\nu,0,0)\|_{\mathbb{R}^n}, t \in \mathbb{R}^1, \nu \in \partial U\}$, и $\mathcal{M} = \{\psi \in L^p_T(\mathbb{R}^n) : \|\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\widetilde{M}}{1-k}\max\Big\{1; \frac{2}{T}\Big\}, \int\limits_0^T \psi(s)ds = 0\}$. Очевидно, $\widetilde{M} \leq \Phi_M$. Также определим оператор

$$\mathfrak{F}_0(\overline{\xi}, \psi) = \{f \in L^p_T(\mathbb{R}^n) : f(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} F(t, \overline{\xi}(t), \psi(t), 0)\},$$

где $t \in \mathbb{R}^1, \overline{\xi}(t) \equiv \xi, \xi \in \partial U, \psi \in L^p_T(\mathbb{R}^n)$. Введем в рассмотрение многозначное отображение $Z : \partial U \to \mathbb{R}^n$, определенное следующим образом:

$$Z(\overline{\xi}) = \Big\{z \in \mathbb{R}^n, z = \int\limits_0^T f_0^{(\overline{\xi},\psi)}(s)ds : f_0^{(\overline{\xi},\psi)} \in S_{\mathfrak{F}_0(\overline{\xi},\psi)}, \psi \in \mathcal{M}\Big\}.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия $B1) - B3)$ и для всех $x \in \partial U$ верно соотношение $0 \notin \overline{co}Z(x)$. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ включение (3) имеет, по крайней мере, одно T-периодическое решение x_ε такое, что $x_\varepsilon(t) \in U$ и $\|x'_\varepsilon\|_{L^p_T} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И. , Потапов А. С. и др.* Меры некомпактности и уплотняющие операторы. Новосибирск : Наука. 1986. 265 с.

2. *Couchouron J.-F., Kamenskii M.* Averaging method for neutral differential equations in finite dimension // Topological methods in nonlinear analysis. June 2010. Vol. 35, № 2. P. 221–234.

3. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin; N.Y. : de Gruyter, 2001. 231 p.

4. *Aumann Robert J.* Integrals of Set-Valued Functions // J. Math. Anal. Appl. 1965. № 12. P. 1–12.

УДК 517.984

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РОТОРА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Г. Г. Исламов (Ижевск, РФ)
ggislamov@gmail.com

Решения спектральной задачи для ротора имеют глубокий физический смысл, что подтверждается всем развитием механики сплошной среды. Рассмотрение спектральной задачи для ротора в общей системе криволинейных координат представляет методический интерес. В [1] показано, что в криволинейных координатах векторное поле в конкретной точке трёхмерного пространства можно разложить как по векторам локального репера системы криволинейных координат, так и по векторам сопутствующего репера, построенного из векторных произведений векторов локального репера. Сопутствующий репер криволинейной системы координат биортогонален локальному в каждой конкретной точке и это позволяет утверждать, что матрица $M(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ перехода от локального репера к сопутствующему реперу равна матрице Грамма сопутствующего репера, что совпадает с обратной матрицей матрицы Грамма локального репера. Здесь тройка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ образует криволинейные координаты конца радиус–вектора текущей точки (см. [1]). В формулах для ротора используются координаты $\{G_1, G_2, G_3\}$ векторного поля F в сопутствующем репере, а сам ротор разложен по векторам локального репера. Поэтому спектральная задача для ротора в общей криволинейной системе координат запишется в следующем векторно-матричном виде $\lambda M(\xi)G(\xi) = \mathrm{rot}\ G(\xi)$, где справа стоит столбец координат ротора, который вычисляется по формулам декартовой прямоугольной системы координат через частные производные от координат (G_1, G_2, G_3). В силу симметрии матрицы перехода $M(\xi)$ координаты $\{F_1, F_2, F_3\}$ векторного поля F в локальном репере получаются умножением на неё справа строки вычисленных координат: $\{G_1, G_2, G_3\}M(\xi)$.

В докладе рассматриваются такие граничные условия, которые обеспечивают дискретные значения спектрального параметра λ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаптев Г. Ф.* Элементы векторного исчисления. М.: Наука, 1975. 160 с.

УДК 517.929

О g-ФРЕЙМОВОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРИ БЕСКОНЕЧНОЙ ОПЕРАТОР МАТРИЦЕ

М. И. Исмайлов (Баку, Азербайджан)
miqdadismailov1@rambler.ru

Пусть H и K_j, $j \in N$, — гильбертовы пространства. Через $L(H, K_i)$ обозначается пространство линейных ограниченных операторов действующих из H в K_i. Напомним, что система $\{\Lambda_j\}_{j\in N}$, $\Lambda_j \in L(H, K_j)$, называется g-фреймом в H [2], если существуют постоянные $A > 0$ и $B > 0$ такие, что

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} \|\Lambda_j f\|^2 \le B\|f\|^2, \quad \forall\, f \in H.$$

Числа A и B называются нижним и верхним соответственно границами g-фрейма $\{\Lambda_j\}_{j\in N}$.

В настоящей работе, по аналогии с работой [1], изучаются условия на бесконечную оператор матрицу $U = (U_{ij})$, $U_{ij} \in L(K_j, K_i)$, при которых определены операторы $\Gamma_i : H \to K_i$ по формуле

$$\Gamma_i(f) = \sum_{j=1}^{\infty} U_{ij}(\Lambda_j(f)), \quad f \in H, \tag{1}$$

и система $\{\Gamma_i\}_{i\in N}$ является g-фреймом в H.

Теорема 1. *Пусть система $\{\Lambda_j\}_{j\in N}$ образует g-фрейм в Z с границами A и B, операторы $U_{ij} \in L(K_j, K_i)$ такие, что имеет место $\|U_{ij}(f)\| \ge a_{ij}\|f\|$, $a_{lj} \ge 0$, $\forall f \in H$, и выполнены условия*

$$b = \sup_k \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} U_{ik}^* U_{ij} \right\| < +\infty;$$

$$a = \inf_k \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{lk}^2 - \sum_{j \neq k} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} U_{ik}^* U_{ij} \right\| \right) > 0.$$

Тогда по равенству (1) *определены операторы* $\Gamma_i \in L(H, K_i)$ *и* $\{\Gamma_i\}_{i \in N}$ *является g-фреймом в* Z *с границами* aA *и* bB.

УДК 517.98

ОПЕРАТОР, СОПРЯЖЕННЫЙ К ОПЕРАТОРУ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ОБЩЕГО ВИДА

С. Н. Кабанов (Саратов, РФ)
kabanoff@hotmail.com

Рассмотрим дифференциальное выражение и линейную краевую форму вида

$$ly \equiv iy'(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{1}$$

$$F(y) \equiv y(0) + \int_0^{\infty} y'(t)h(t)\,dt = 0. \tag{2}$$

Обозначим D_0 — множество функций $y(x)$, определенных на интервале $[0, \infty)$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

1) $y(x)$ абсолютно непрерывна на каждом конечном подинтервале интервала $[0, \infty)$;

2) $y(x)$, $y'(x) \in L^2[0, \infty)$.

Обозначим D — множество функций $y(x) \in D_0$, удовлетворяющих условию (2). Будем предполагать, что вещественозначная функция $h(t) \in \in L^2[0, \infty)$ непрерывна в окрестности нуля, так что $\lim\limits_{t \to 0} h(t) = h(0) \neq 1$. При этом не предполагается, что существует $h'(t) \in L^2[0, \infty)$. Обозначим через L оператор вида $Ly = ly$ для всех $y(x) \in D$.

В случае существования $h'(t) \in L^2[0, \infty)$ краевое условие (2) сводится к краевому условию, рассмотренному в [1, 2] в том смысле, что после интегрирования по частям в (2) под знаком интеграла будет $y(x)$, а не $y'(x)$. Именно наличие под знаком интеграла производной в условии (2) представляет сложность при попытке построения оператора, сопряженного к оператору L. Данное исследование опирается на работы [3, 4].

Обозначим через M оператор вида

$$Mz(x) = l(z(x) + \alpha h(x)), \quad z(0) = \gamma,$$

где $\alpha = z(0)/(1 - h(0))$, γ — некоторое число.

Очевидно, что областью определения оператора M будут функции $z(x)$ такие, что $z(x)+\alpha h(x)\in D_0$ и такие, что $z(0)=\gamma$.

Справедлива следующая

Теорема. $L^*=M$.

Доказательство. Пусть

$$(f,g)=\int\limits_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Тогда последовательно имеем

$$(ly,z)=\int\limits_0^\infty iy'(x)\overline{z}(x)\,dx=-iy(0)\overline{z}(0)-\int\limits_0^\infty y(x)\cdot i\overline{z}'(x)\,dx.$$

Так как

$$-\int\limits_0^\infty y(x)\cdot i\overline{z}'(x)\,dx=\int\limits_0^\infty y(x)\overline{lz(x)}\,dx=(y,lz),$$

то получаем

$$(ly,z)=-iy(0)\overline{z}(0)+(y,lz).$$

Из краевого условия (2) имеем

$$y(0)=-\int\limits_0^\infty y'(t)h(t)\,dt.$$

Поэтому

$$(ly,z)=i\overline{z}(0)\cdot\int\limits_0^\infty y'(t)h(t)\,dt+(y,lz).$$

С учетом наших обозначений последнее представление может быть записано в виде

$$(ly,z-z(0)h)=(y,lz).$$

Обозначая $z(x)-z(0)h(x)=w(x)$, получаем $z(x)=w(x)+z(0)h(x)$. Поэтому

$$(ly,w)=(y,l(w+z(0)h)).$$

Очевидно, что при $h(0)\neq 1$ справедливо

$$z(0)=\frac{w(0)}{1-h(0)}\,.$$

Таким образом,

$$(ly, w) = \left(y, l\left(w + \frac{w(0)}{1 - h(0)}h\right)\right).$$

Переобозначая $w \to z$, приходим к записи

$$(ly, z) = (y, l(z + \alpha h)).$$

Тем самым показано, что $L^* \subseteq M$.

Обратное включение также справедливо. В самом деле,

$$(y, Mz) = -i\int_0^\infty y(x)(\overline{z}(x) + \overline{\alpha}h(x))'\,dx =$$

$$= -i[y(x)(\overline{z}(x) + \overline{\alpha}h(x))]\Big|_0^\infty + i\int_0^\infty y'(x)(\overline{z}(x) + \overline{\alpha}h(x))\,dx =$$

$$= iy(0)(\overline{z}(0) + \overline{\alpha}h(0)) + i\int_0^\infty y'(x)z(x)\,dx + i\overline{\alpha}\int_0^\infty y'(x)h(x)\,dx =$$

$$= i\overline{\alpha}\left(y(0) + \int_0^\infty y'(x)h(x)\,dx\right) + \int_0^\infty ly(x)\overline{z}(x)\,dx = (ly, z).$$

Здесь использовано то, что $\overline{z}(0) + \overline{\alpha}h(0) = \overline{\alpha}$ и то, что $y(x)$ удовлетворяет условию (2). Теорема доказана.

Для оператора L^* так же получены формулы для собственных функций и некоторые другие результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krall A. M.* A nonhomogeneous eigenfunction expansion // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 117. P. 352–361.

2. *Krall A. M.* The adjoint of a differential operator with integral boundary condition // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 16, № 41. P. 738–742.

3. *Наймарк М. А.* Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси // Тр. Моск. матем. о-ва. 1954. Т. 3. С. 181–270.

4. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве : в 2 т. Харьков : Изд-во Харьков. ун-та, Вища Школа, 1977. Т. 1. 361 с.; 1978. Т. 2. 288 с.

УДК 517.53/.55

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ НЕКОТОРОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Л. В. Карташева, Т. Н. Радченко (Ростов-на-Дону, РФ)
kartasheva@mail.ru

Пусть L — простой гладкий замкнутый контур, делящий плоскость комплексного переменного на внутреннюю область $\mathcal{D}^+$ и внешнюю $\mathcal{D}^-$, и пусть $t_0 \in L$.

Под $\rho(t) = (t - t_0)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ будем понимать предельное значение аналитической в $\mathcal{D}^+$ функции

$$(z - t_0)^\alpha = |z - t_0|^\alpha e^{\alpha i \arg|t - t_0|}.$$

В классе гельдеровских функций $H_\lambda(L)$ рассматривается сингулярное интегральное уравнение вида:

$$A\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + c(t)(T\varphi)(t) = f(t),$$

где $T = S - S_\rho$,

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \quad (S_p\varphi)(t) = \frac{\rho(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\rho(\tau)(\tau - t)}\,d\tau.$$

Ранее доказано, что оператор T нильпотентный, а операторы S и S_ρ коммутируют с точностью до оператора T. Доказано также, что оператор $A\colon H_\lambda(L) \to H_\lambda(L)$ нетеров тогда и только тогда, когда $a(t) \pm b(t) \neq 0$ на L, и что разрешимость уравнения $A\varphi = f$ можно рассматривать по отношению к союзному уравнению

$$A'\psi \equiv a(t)\psi(t) - (S_\rho b\psi)(t) + (Tc\psi)(t) = 0$$

в $H_\lambda(L)$.

При $a(t) \pm b(t) \neq 0$ на L уравнение $A\varphi = f$ решается в замкнутой форме в том случае, когда коэффициенты уравнения удовлетворяют равенству:

$$\frac{c(t)}{\chi^+(t)(a(t) + b(t))} = \frac{\ell^+}{t - z}.$$

Получены явные формулы для решения уравнения $A\varphi = f$, когда

$$\operatorname{ind}\frac{a - b}{a + b} > 0, \ < 0, \ = 0.$$

Особое внимание уделено условиям разрешимости уравнения $A\varphi = f$, которые удается записать в виде условий ортогональности $f(t)$ к решениям однородного союзного уравнения.

УДК 517.5

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О СКАЧКЕ НА КОНТУРЕ С ПРОТЯЖЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Б. А. Кац (Казань, РФ), С. Р. Миронова (Казань, РФ), А. Ю. Погодина (Саратов, РФ)
katsboris877@gmail.com, srmironova@yandex.ru, apogodina@yandex.ru

Пусть Γ есть образ открытого интервала $(0,1)$ при его взаимно-однозначном непрерывном отображении $\phi : (0,1) \to \mathbb{C}$. Обозначим $\Gamma_0^\varepsilon := \phi((0,\varepsilon))$, $\Gamma_1^\varepsilon := \phi((1-\varepsilon,1))$, $\Gamma^\varepsilon := \phi([\varepsilon, 1-\varepsilon])$, где $0 < \varepsilon < 1$. Если множества $\Delta_0 := \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \overline{\Gamma_0^\varepsilon}$ и $\Delta_1 := \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \overline{\Gamma_1^\varepsilon}$ состоят из одной точки каждое, причем эти точки не совпадают и не лежат на Γ, то $\overline{\Gamma}$ есть простая жорданова дуга. Если же в этих множествах более одной точки, то будем называть Γ контуром с протяженными особенностями. Примером может служить контур $\Gamma = \{x + i\sin(x^{-1}(1-x)^{-1}) : 0 < x < 1\}$. Здесь $\Delta_j = \{j + iy : -1 \le y \le 1\}$, $j = 0, 1$.

Будем считать, что множество $\overline{\Gamma} = \Gamma \bigcup \Delta_0 \bigcup \Delta_1$ не содержит бесконечно удаленной точки. Назовем контур Γ локально спрямляемым, если при любом $\varepsilon \in (0,1)$ спрямляема дуга Γ^ε.

Данная работа продолжает исследования, начатые авторами в [3], где множество Δ предполагалось прямолинейным отрезком, а кривая Γ сгущалась к ней зигзагообразно. Здесь мы исследуем более общую ситуацию.

Рассмотрим случай, когда множества Γ, Δ_0 и Δ_1 попарно не пересекаются. Будем считать, что контур Γ направлен от Δ_0 к Δ_1. Потребуем, чтобы предельное множество $\Delta := \Delta_0 \bigcup \Delta_1$ состояло из конечного числа спрямляемых дуг и удовлетворяло условию $\Delta \subset \{z : v(z) = 0\}$, где $v(z)$ есть заданная на всей комплексной плоскости функция с непрерывными частными производными первого порядка, такая что произведение $v(z)k(z)$ непрерывно на $\Delta_{0,1}$; такой контур мы будем называть v-допустимым. Здесь

$$k(z) := \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z - z_1}{z - z_0}$$

при фиксированных точках $z_j \in \Delta_j$, $j = 0, 1$, а однозначная ветвь $k(z)$ в $\mathbb{C} \setminus \bar{\Gamma}$ определена условием $k(\infty) = 0$.

Введем в рассмотрение функции $K_\nu^j(z) := k(z)\mathrm{dist}^{\nu-1}(z,\Gamma_j^\varepsilon)$, интегрируемые вблизи Δ_j, $j=0,1$ при некотором положительном ε.

Обозначим через $H_\nu(\Gamma)$ множество комплекснозначных функций на Γ, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем ν. Легко видеть, что любая функция этого класса продолжима по непрерывности до определенной на $\bar\Gamma$ функции класса $H_\nu(\bar\Gamma)$. Ниже мы сохраняем за продолженной таким образом функцией ее прежнее обозначение.

Будем искать голоморфную в $\mathbb{C}\setminus\bar\Gamma$ функцию $\Phi(z)$, имеющую в точках $t\in\Gamma$ предельные значения с обеих сторон, связанные соотношением

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=g(t),\qquad t\in\Gamma. \tag{1}$$

Пусть на компакте A задана функция $f\in H_\nu(A)$. Обозначим через $f^w(z)$ ее продолжение Уитни (см., напр., [1]) на всю комплексную плоскость. Функция $f^w(z)$ совпадает с $f(t)$ на A, непрерывна на всей комплексной плоскости и удовлетворяет там условию Гельдера с тем же показателем ν. Кроме того, в $C\setminus\bar\Gamma$ она имеет частные производные всех порядков, причем $|\nabla f^w(z)|\le C\mathrm{dist}^{\nu-1}(z,A)$, где $C>0$ не зависит от z. Без ограничения общности можно считать, что $f^w(z)$ имеет компактный носитель, содержащий A внутри себя.

Мы продолжим по Уитни g с $\bar\Gamma$ в $\mathbb{C}$ и рассмотрим произведение $\varphi(z)=g^w(z)k(z)$. Оно имеет на Γ скачок $g(t)$, но не является голоморфным. В [2] такие функции называются квази-решениями задачи о скачке. Применим преобразование, называемое регуляризацией квази-решения:

$$\varphi\to\Phi:=\varphi-T\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z},\quad \text{где}\quad Tf:=\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_C\frac{f(\zeta)d\zeta d\bar\zeta}{\zeta-z}. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть Γ есть локально спрямляемый v-допустимый контур, множества Γ, Δ_0 и Δ_1 попарно не пересекаются, $g=vg_0$, $g_0\in H_\nu(\Gamma)$ и $\nu>\frac{1}{2}$. Если функции $v(z)K_\nu^j(z)$ и $k(z)$ интегрируемы вблизи Δ_j, $j=0,1$, в степени $p>2$ при некотором $\varepsilon>0$, то задача* (1) *разрешима в классе функций, непрерывных на Δ и исчезающих в бесконечно удаленной точке, причем ее решение Φ в этом классе единственно и может быть найдено с помощью* (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

2. *Kats B. A.* The Riemann boundary value problem on non-rectifiable curves and related questions // Complex Variables and Elliptic Equations. 2014. Vol. 59, № 8. P. 1053–1069.

3. *Кац Б. А., Миронова С. Р., Погодина А. Ю.* Задача о скачке на контуре с предельным континуумом // Изв. вузов. Матем. 2015. № 2. С. 70–75.

УДК 517.94

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ШТУРМА – ЛИУВИЛЯ В $L^2(\mathbb{R}_+)$ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$.[1]

А. И. Козко (Москва, РФ)
prozerpi@yahoo.co.uk

Исследуется спектр оператора $\mathbf{L}_q$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, задаваемого дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$ и граничным условием $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$. В работе изучаются операторы $\mathbf{L}_q$ для потенциалов из класса $\mathbf{Q}$, которые по определению состоят из функций $q \in C[0,+\infty) \bigcap C^2(0,+\infty)$, удовлетворяющих следующим условиям: $q''(x) \geq 0$, начиная с некоторого $x \geq x_0$ и $\ln q(x)/\ln^2 x \uparrow +\infty$, $x \to +\infty$. Для функции класса $\mathbf{Q}$, в частности, справедливо $x(\ln q)' \to +\infty$ и следовательно все потенциалы $q \in \mathbf{Q}$ растут на бесконечности быстрее любой степени x (см., например [1]).

Ввиду быстрого роста $q(x)$ при $x \to +\infty$ оператор $\mathbf{L}_q$ имеет на $\mathbb{R}_+$ дискретный спектр, элементы которого $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем считать расположенными в порядке неубывания.

Ставится следующая задача. Найти условие на последовательность s_n такое, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_n^{s_n}$ будет сходящимся.

Данная задача связана с задачей вычисления регуляризованных следов оператора Штурма-Лиувилля, которая изучалась во многих работах, как в $L^2(\mathbb{R}_+)$ например [2, 3], так и с граничными условиями на концах отрезка $[0,\pi]$ в $L^2[0;\pi]$. Процитируем [4]. Там же имеется большой список литературы по этому вопросу.

Приведём один из результатов данной работы:

Теорема 1. *Пусть $q \in \mathbf{Q}$ и $\ln q(x) \sim x^a$, $x \to +\infty$, для некоторого $a \geq 1$. Тогда справедливо*

1. Если для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{Z}_+$, выполняется оценка

$$s_n \geq -\mu_0 - \frac{\mu_1(a)\cdot\delta_m}{\ln n} - \mu_0\left(\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{\ln n \cdot \ln\ln n \cdot \dots \cdot \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k-\text{раз}} n}\right),$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ начиная с некоторого $n \geq N_0$, где $\delta_m = 0$ при $m = 0$ и $\delta_m = 1$ при остальных m, $\mu_0 = \frac{1}{2}$, $\mu_1(a) = \frac{1+a}{2a}$. Тогда ряд составленный

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00022).

из собственных значений $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\lambda_n)^{s_n}$ *расходится.*

2. Если существует $\theta > 1$ *и* $m \in \mathbb{Z}_+$ *такие, что для всех* $n \in \mathbb{N}$ *начиная с некоторого* $n \geq N_0$ *выполняется*

$$s_n \leq -\mu_0\Delta_{m0} - \frac{\mu_1(a)\cdot\delta_m\cdot\Delta_{m1}}{\ln n} - \\ -\mu_0\left(\sum_{k=2}^{m}\frac{\Delta_{mk}}{\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\dots\cdot\underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{k-\text{раз}} n}\right),$$

где δ_m, μ_0, $\mu_1(a)$ *определены выше и*

$$\Delta_{mk} = \begin{cases} \theta, & m = k, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда ряд составленный из собственных значений $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\lambda_n)^{s_n}$ *сходится.*

В случае $m = 2$ условие, выписанное в теореме 1 на последовательность $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ для расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\lambda_n)^{s_n}$ будет

$$s_n \geq -\mu_0 - \frac{\mu_1(a)}{\ln n} - \frac{\mu_0}{\ln n\cdot\ln\ln n},$$

а условие сходимости ряда

$$s_n \leq -\mu_0 - \frac{\mu_1(a)}{\ln n} - \frac{\mu_0\cdot\theta}{\ln n\cdot\ln\ln n},$$

при некотором $\theta > 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козко А. И.* Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y'' + q(x)y$ с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 5. С. 611–622.

2. *Печенцов А. С.* Следы одного класса сингулярных дифференциальных операторов:метод Лидского – Садовничего // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1999. № 5. С. 35–42

3. *Козко А. И., Печенцов А. С.* Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов с каноническими краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 4. С. 11–17

4 *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов // УМН. 2006. Т 61, №5(371). С. 89–156.

УДК 517.984

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ[1]

В. В. Корнев (Саратов, РФ)
KornevVV@info.sgu.ru

Рассмотрим задачу

$$u''_{tt}(x,t) = u''_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad 0 \le x \le 1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = u(x,0) = u'_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

где $q(x) \in C[0,1]$ и $f(x,t), f'_t(x,t) \in C([0,1]\times\mathbb{R})$. Для существования классического решения этой задачи с необходимостью должно выполняться условие

$$f(0,0) = f(1,0) = 0. \tag{3}$$

Задача (1)–(2) является частным случаем задачи, рассмотренной в [1]. Согласно [1] при сделаннных предположениях ряд, построенный по методу Фурье для задачи (1)–(2), сходится к классическому решению этой задачи.

Традиционно при обосновании метода Фурье для задачи (1)–(2) вводят в отличие от (3) дополнительное условие

$$f(0,t) = f(1,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

причем в [2] утверждается , что это условие является необходимым для существования классического решения задачи (1)–(2). Следующий пример показывает, что условие (4) не является необходимым.

Рассмотрим смешанную задачу

$$u''_{tt}(x,t) = u''_{xx}(x,t) - t, \tag{5}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = u(x,0) = u'_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Введем функцию

$$v(x,t) = \frac{1}{8}x(x+t)(x+3t) + g\Big(\frac{1}{2}(x-t)\Big) - g\Big(-\frac{1}{2}(x+t)\Big),$$

где $g(x) = \frac{1}{2}x^2(1-x)$ при $0 \le x \le 1$ и продолжена на всю числовую ось по правилу

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

$$g(x+1)-g(x)=-\frac{1}{2}x(1+3x), \qquad x\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Односторонние пределы функции $g(x)$ и ее производных до второго порядка включительно в точках $x=0$ и $x=1$ совпадают. Следовательно, на основании формулы (6) имеем, что $g(x)\in C^2(\mathbb{R})$. Непосредственные вычисления показывают, что справедливы соотношения

$$v''_{tt}(x,t)=v''_{xx}(x,t)-t, \quad v(0,t)=v(1,t)=0, \quad 0\le x\le 1,\ t\in\mathbb{R}, \tag{7}$$

Далее определим функции

$$\varphi(x)=v(x,0), \quad \psi(x)=v'_t(x,0), \quad 0\le x\le 1.$$

Очевидно, $\varphi(x)\in C^2[0,1]$ и $\psi(x)\in C^1[0,1]$. Кроме того, из соотношений (7) следует, что

$$\varphi(0)=\varphi(1)=\psi(0)=\psi(1)=\varphi''(0)=\varphi''(1)=0. \tag{8}$$

Теперь продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с $[0,1]$ на $[-1,0]$ нечетным образом, а затем – на всю числовую ось периодически с периодом 2. С помощью равенств (8) нетрудно убедиться, что $\varphi(x)\in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x)\in$ $\in C^1(\mathbb{R})$ и выполняются тождества

$$\varphi(-x)=-\varphi(x), \quad \varphi(1-x)=-\varphi(1+x),$$
$$\psi(-x)=-\psi(x), \quad \psi(1-x)=-\psi(1+x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Из этих свойств функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ вытекает, что функция

$$w(x,t)=\frac{1}{2}\Big(\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau\Big)$$

удовлетворяет соотношениям

$$w''_{tt}(x,t)=w''_{xx}(x,t), \quad w(0,t)=w(1,t)=0,$$
$$w(x,0)=\varphi(x), \quad w'_t(x,0)=\psi(x), \quad 0\le x\le 1, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Из соотношений (7) и (9) следует, что функция

$$u(x,t)=v(x,t)-w(x,t)$$

является классическим решением задачи (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О резольвентном подходе в одной смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф. Воронеж. весен. матем. шк. «Понтрягинские чтения–XXVI» (3–9 мая 2015г.). Воронеж : Издат. дом ВГУ, 2015. С. 110–111.

2. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.

УДК 517.518.8

НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ НОРМАМИ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ [1]

А. С. Кочуров (Москва, РФ)
kochurov@mech.math.msu.su

Колмогоровскими неравенствами для производных (или неравенствами Ландау – Колмогорова) на прямой или полупрямой называют неравенства

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \leqslant K \cdot \|x(\cdot)\|^{\alpha}_{L_p(T)} \|x^{(n)}(\cdot)\|^{\beta}_{L_r(T)}, \qquad x(\cdot) \in \mathcal{W}^n_{p,r}(T),$$

в которых T — это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_-$, $n, k \in \mathbb{Z}_+$, $k < n$, $\mathcal{W}^n_{p,r}(T)$ — функции $x(\cdot)$ из $L_p(T)$, обладающие локально абсолютно непрерывной производной $x^{(n-1)}(\cdot)$ порядка $(n-1)$ на T и производной $x^{(n)}(\cdot)$ порядка n, лежащей в пространстве $L_r(T)$, α, β — положительные числа, в сумме равные 1. Наименьшая возможная константа $K > 0$ в этом неравенстве является решением экстремальной задачи

$$\Bigl(\int\limits_T |x^{(k)}|^q \, dt\Bigr)^{1/q} \to \sup \quad \int\limits_T |x|^p \, dt \leqslant 1, \quad \int\limits_T |x^{(n)}|^r \, dt \leqslant 1, \tag{1}$$

по всем функциям $x(\cdot) \in \mathcal{W}^n_{p,r}(T)$. Она называется константой Колмогорова (или константой Ландау – Колмогорова). Первая задача такого вида, когда $p = q = r = \infty$, $n = 2$, $k = 1$, была решена Ландау (1913) для полупрямой [1] и Адамаром (1914) для прямой. В 1937 г. Колмогоров [2] обобщил результат Адамара и нашёл точное значение в (1) для $p = q = r = \infty$, $T = \mathbb{R}$ при всех возможных значениях n, k. К настоящему времени решение (1) в общем случае не известно, его удаётся получить лишь при определённых частных значениях параметров p, q, r, T, n и k. Такие решения для произвольных k и n были найдены Харди – Литтльвудом – Полиа, Стейном, Тайковым, Любичем – Купцовым, Габушиным и др. Кроме того имеется ряд работ, в которых решения найдены при малых значениях n (в основном $n = 2$) для некоторых частных значений остальных параметров p, q, r, T и k. Известные точные константы K и способы их нахождения приводятся в [4–11]. Точные решения в (1) имеют большое значение для различных задач восстановления функционалов (см., например, [8]), они появляются также в задаче о наилучшем приближении оператора дифференцирования [12].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00642, № 14-01-00744).

В 1941 году Надем ([3], см. также [10]) было найдено решение (1) для всех возможных $p, q > 0$, $r \geqslant 1$ и $T = \mathbb{R}$, $n = 1$, $k = 0$. Пусть $p, q \in (0, \infty)$, $r \in (1, \infty)$ a, η, $\sigma > 0$ и выполнено неравенство $1/q \leqslant 1/p$. На полупрямой $\mathbb{R}_-$ рассмотрим задачу:

$$-\int\limits_{\mathbb{R}_-} |x|^q\,dt \to \inf \quad \int\limits_{\mathbb{R}_-} |x|^p\,dt = \eta^p,\ \int\limits_{\mathbb{R}_-} |\dot{x}|^r\,dt = \sigma^r \tag{2}$$

$\big(\dot{x}(\cdot)$ — производная по переменной t функции $x(\cdot)\big)$ и задачу

$$-\int\limits_{\mathbb{R}_-} |x|^q\,dt \to \inf \quad \int\limits_{\mathbb{R}_-} |x|^p\,dt = \eta^p,\ \int\limits_{\mathbb{R}_-} |\dot{x}|^r\,dt = \sigma^r,\ x(0) = a. \tag{3}$$

Пусть

$$a_0 = (1 - s_0)^{s_0 - 1}\,\sigma^{1 - s_0}\eta^{s_0}, \quad s_0 = (1 + r'/p)^{-1}, \quad 1/r + 1/r' = 1,$$

$a \leq a_0$. Тогда из системы с двумя уравнениями

$$\left(\int\limits_0^{B^{1/(q-p)}} + \tau\int\limits_{B^{1/(q-p)}}^{a}\right) z^p\left(\frac{Bz^p - z^q}{A(r-1)}\right)^{-1/r} dz = \eta^p,$$

$$\left(\int\limits_0^{B^{1/(q-p)}} + \tau\int\limits_{B^{1/(q-p)}}^{a}\right) \left(\frac{Bz^p - z^q}{A(r-1)}\right)^{1-1/r} dz = \sigma^r,$$

можно однозначно определить значения $A, B > 0$, $\tau \in \{-1, +1\}$. В этом случае обозначим

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(a, \eta, \sigma) = -\left(\int\limits_0^{B^{1/(q-p)}} + \tau\int\limits_{B^{1/(q-p)}}^{a}\right) z^q\left(\frac{Bz^p - z^q}{A(r-1)}\right)^{-1/r} dz.$$

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < q < \infty$, $r \in (1, \infty)$, a, η, $\sigma > 0$, $a \leq a_0$. *Тогда решение задачи* (3) *равно* $\mathcal{J}(a, \eta, \sigma)$. *Если же* $a > a_0$, *то в задаче* (3) *нет допустимых функций.*

Как следствие теоремы 1 получаем

Теорема 2 (см. [3]) *Пусть* $0 < p < q < \infty$, $r \in (1, \infty)$, η, $\sigma > 0$. *Тогда значение задачи* (2) *равно*

$$\widehat{\mathcal{J}} = -\frac{p + r'}{q - p} B\Big(\frac{s}{q - p}\,, 1/r'\Big)^{\frac{p-q}{s}} \Big(\sigma^{-r}\frac{1}{q + r'}\Big)^{\frac{p-q}{sr}} \Big(\eta^{-p}\frac{1}{q - p}\Big)^{\frac{-qr - r + q}{sr}},$$

$s = 1 + p/r'$, $\;B\big(\frac{s}{q-p}, 1/r'\big)$ — *бета-функция в точке* $\big(\frac{s}{q-p}, 1/r'\big)$.

СПИСОК ЛИТЕРТУРЫ

1. *Landau E.* Einige Ungleihungen für zweimal differentzierbar Funktionen // Proc. London Math. Soc. 1913. Vol. 2(13). P. 43–49.

2. *Kolmogorov A.* Une generalisation de l'inégalité de M.J.Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées d'une fonction // C.r. séances Soc.math. 1938. Vol. 207. P. 764–765.

3. *Sz.-Nagy B.* Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung // Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. 1941. Vol. 10. P. 64–74.

4. *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных // Избран. тр. матем. и мех. М. : Наука, 1985, С. 386–390.

5. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // УМН. 1996. Т. 51. № 6, С. 89–124.

6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Неравенства для производных колмогоровского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 12, С. 73–106.

7. *Kwong M. K., Zettl A.* Norm Inequalities for Derivatives and Differences // Lecture Notes in Math. Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 1992.

8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ: Теория и Приложения. Неравенства для производных колмогоровского типа. М. : УРСС, 2000. С. 110–125.

9. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Kolmogorov-type inequalities for derivatives. Berlin : Springer-Verlag, 1993. P. 153–157.

10. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. Киев : Наук. Думка, 2003.

11. *Tikhomirov V., Kochurov A.* Kolmogorov-type inequalities on the whole line or half line and the Lagrange principle in the theory of extremum problems // Eurasian Math. J. 2011. Vol. 2, № 3. P. 125–142.

12. *Стечкин С.Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.

УДК 517.984.52

НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЕМЫХ СИЛЬНО СИНГУЛЯРНЫМИ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Л. В. Крицков (Москва, РФ)
kritskov@cs.msu.ru

Рассматриваются спектральные свойства операторов, соответствующих дифференциальной операции

$$Lu = u^{(n)} + p_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)u' + p_0(x)u, \quad x \in G, \tag{1}$$

с, вообще говоря, комплекснозначными коэффициентами $p_{n-1}(x), \ldots, p_1(x), p_0(x)$, которые могут быть несуммируемы на всем или на некоторой части интервала задания G операции (1).

1. Исследования (в том числе проведенные автором в [1–3]) показали, что в случае, когда интервал $G = (a, b)$ конечный, в семействе обыкновенных операторов второго ($n = 2$) и более высоких ($n \geq 3$) порядков с локально суммируемыми на G коэффициентами можно выделить класс операторов, по спектральным свойствам близких к «невозмущенному» оператору, порожденному операцией $L_0 = u^{(n)}$.

При $n = 2$ таковым оказалось семейство операторов, для которых коэффициент $p_1(x) \in L_1(G)$ или $p_1(x) \in W_1^1(G)$, а коэффициент $p_0(x)$ удовлетворяет условию

$$(x - a)(b - x)p_0(x) \in L_1(a, b). \tag{2}$$

Было установлено, что: а) $L_p(G)$-нормы корневых функций оператора удовлетворяют классическим оценкам с тем же порядком по спектральному параметру, что и в регулярном случае [1]; б) полные и минимальные системы корневых функций образуют безусловный базис (базис Рисса) в $L_2(G)$ при выполнении обычных условий В. А. Ильина [2].

При $n \geq 3$ подобное семейство операторов соответствует (1), где $p_{n-1}(x) \in L_1(G)$ или $p_{n-1}(x) \in W_1^{n-1}(G)$, а остальные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$(x - a)^{n-1-k}(b - x)^{n-1-k}p_k(x) \in L_1(a, b), \quad k = \overline{0, n-2}. \tag{3}$$

Установлено [3], что $L_p(G)$-нормы корневых функций этих операторов также удовлетворяют оценкам регулярного случая.

Отметим, что условия (2) и (3) позволяют рассматривать корневые функции как решения почти всюду в G соответствующих уравнений со спектральным параметром, причем любое такое решение абсолютно непрерывно на замкнутом интервале $\overline{G}$. Тем самым, для корневых функций можно использовать известные формулы среднего значения и сдвига.

2. Появившиеся в конце 1990-х годов работы А. А. Шкаликова, А. М. Савчука и др. (см. [4]) вызвали новый интерес к случаю, когда некоторые коэффициенты в (1) являются распределениями из пространств Соболева с негативной нормой. В этих работах описано несколько способов придать смысл дифференциальной операции (1).

В нашей работе предлагается еще один способ «регуляризации» (1), который, по своей сути, близок к предложенному ранее методу аппроксимации резольвенты, но позволяет при изучении корневых функций использовать те же интегральные представления, что и в регулярном случае.

Опишем этот подход на примере дифференциальной операции (1) второго порядка вида

$$Lu = -u'' + q(x)u, \quad x \in G, \tag{4}$$

в которой $q(x) \in W_2^{-1}(G)$.

Пусть $f \in L_1(G)$ и $\mu \in \mathbb{C}$. Квазирегулярным решением уравнения $Lu = \mu^2 u + f$ назовем функцию $u(x) \in W_2^1(\overline{G})$, которая удовлетворяет для всех $x \in G$ и $t \leq \operatorname{dist}(x, \partial G)$ интегральному соотношению

$$\begin{aligned} u(x \pm t) = c_0 \cos \mu t \pm c_1 \mu^{-1} \sin \mu t + \int_0^t Q(x, x \pm \tau) u(x \pm \tau) \times \\ \times \cos \mu(t - \tau)\, d\tau - \int_0^t Q(x, x \pm \tau) u'(x \pm \tau) \mu^{-1} \sin \mu(t - \tau)\, d\tau, \end{aligned} \tag{5}$$

где $Q(x,y) = \int_x^y q(\xi)\, d\xi \in L_2(y \in G)$ и $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ – произвольные постоянные. Корневыми функциями, отвечающими (4), будем называть нетривиальные квазирегулярные решения соответствующих уравнений со спектральным параметром. Отметим, что в (5) $c_0 = u(x)$, $c_1 = = \lim\limits_{t \to 0} [u'(x+t) - Q(x, x+t) u(x+t)]$.

Теорема 1. *$L_p(G)$-нормы так введенных корневых функций удовлетворяют обычным оценкам регулярного случая и, в том числе, выполнена антиаприорная оценка В. А. Ильина.*

Теорема 2. *Справедлива теорема В. А. Ильина* [5] *о безусловной базисности в $L_2(G)$ системы корневых функций.*

3. Анализ формулы сдвига, которой удовлетворяют регулярные решения уравнения $Lu = \mu^n u + f$, $f \in L_1(G)$, для операции (1) с гладкими коэффициентами, дает возможность применить описанный подход для операции любого порядка $n \geq 2$. В результате допустимыми становятся следующие семейства операторов.

а) При $n = 2m$ коэффициенты (1) удовлетворяют условиям:

$$p_{2m-1}(x), \ldots, p_m(x) \in L_2(G), \ p_k(x) \in W_2^{-m+k}(G), \ k = \overline{0, m-1}, \tag{6}$$

и квазирегулярное решение уравнения рассматривается в классе $W_2^m(G)$.

б) При $n = 2m+1$ коэффициенты (1) удовлетворяют условиям:

$$p_{2m}(x), \ldots, p_m(G) \in L_2(G), \ p_k(x) \in W_1^{-m+k}(G), \ k = \overline{0, m-1}, \tag{7}$$

квазирегулярное решение рассматривается в классе $W_1^{m+1}(G)$.

Теорема 3. *$L_p(G)$-нормы так введенных корневых функций для оператора порядка $n \geq 2$ удовлетворяют обычным оценкам регулярного случая и, в том числе, выполнена антиаприорная оценка В. А. Ильина.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крицков Л. В.* Равномерная оценка порядка присоединенных функций и распределение собственных значений одномерного оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 7. С. 1121–1126.

2. *Крицков Л. В.* О безусловной базисности систем корневых функций одномерного сингулярного оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1446–1447.

3. *Крицков Л. В.* Представление и оценки корневых функций сингулярных дифференциальных операторов на отрезке // Дифференц. уравнения. I: 1992. Т. 28, № 8. С. 1291–1302; II: 1993. Т. 29, № 1. 64–73.

4. *Савчук А. М, Шкаликов А. А.* Операторы Штурма – Лиувилля с потенциалами распределениями // Тр. ММО. 2003. Т. 64. С. 159–219.

5. *Ильин В. А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048–1053.

УДК 517.5

НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫЙ КМА НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ[1]

Ю. С. Крусс (Саратов, РФ)

KrussUS@gmail.com

Локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно множеству формальных рядов Лорана

$$x = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{x}_i t^i,\ k \in \mathbb{Z},\ \mathbf{x}_i = (x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(s-1)}) \in GF(p^s),$$

где $GF(p^s)$ конечное поле [1]. Операции сложения и умножения в поле $F^{(s)}$ задаются равенствами:

$$x\dot{+}y = \sum_{i=k}^{\infty} (\mathbf{x}_i \dot{+} \mathbf{y}_i) t^i, \quad xy = \sum_{l=2k}^{\infty} t^l \sum_{i,j:\ i+j=l} (\mathbf{x}_i \mathbf{y}_j),$$

где $\mathbf{x}_i \dot{+} \mathbf{y}_i$ и $\mathbf{x}_i \mathbf{y}_j$ операции сложения и умножения в поле $GF(p^s)$.

Аддитивную группу поля $F^{(s)}$ обозначим через $F^{(s)+}$, а ее подгруппы через $F_k^{(s)+} = \{(\ldots, \mathbf{0}, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots),\ \mathbf{x}_i \in GF(p^s)\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Известно

[1]Работа подготовлена в рамках выполнения проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

[2], что при $s=1$: $F^{(1)+}$ есть группа Виленкина с постоянной образующей последовательностью $p_n=p$. При $s>1$ аддитивная группа $F^{(s)+}$ изоморфна произведению групп Виленкина

$$F^{(s)+} \cong F^{(1)+} \times F^{(1)+} \times \cdots \times F^{(1)+} = \left(F^{(1)+}\right)^{s}. \qquad (1)$$

Также известно [2], что система элементов $g_k \in F_k^{(s)} \setminus F_{k+1}^{(s)}$ есть базис в $F^{(s)}$. Любой элемент $x \in F^{(s)}$ можно представить в виде $x = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{\lambda}_k g_k$, $\boldsymbol{\lambda}_k \in GF(p^s)$. Определим множество

$$H_0^{(s)} = \{h \in F^{(s)}:\ h = \mathbf{x}_{-1}g_{-1}\dot{+}\mathbf{x}_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}\mathbf{x}_{-s}g_{-s}\}.$$

Множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе $F_M^{(s)+}$, с носителем $supp(\varphi) \subset F_{-N}^{(s)+}$ обозначим через $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)+})$, $M,N \in \mathbb{N}$. Аналогично, $\mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$ есть множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе $F_{-N}^{(s)\perp}$, с носителем $supp(\varphi) \subset F_M^{(s)\perp}$, где $F_{-N}^{(s)\perp}$, $F_M^{(s)\perp}$ есть аннуляторы подгрупп $F_{-N}^{(s)+}$, $F_M^{(s)+}$ соответственно. Если функция $\varphi \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ порождает ортогональный КМА, то она удовлетворяет масштабирующему уравнению:

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}), \qquad (2)$$

где

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p^s}\sum_{h\in H_0^{N+1}} \beta_h\overline{(\chi\mathcal{A}^{-1},h)}$$

— маска уравнения (2), $\mathcal{A}$ — оператор растяжения, χ — характер группы $F^{(s)+}$. Если масштабирующая функция некоторого КМА не является тензорным произведением функций одной переменной, то такой КМА называют несепарабельным.

В работе [3] изложен алгоритм построения ортогональной масштабирующей функции $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$ порождающей КМА на локальных полях $F^{(s)}$ положительной характеристики p. Данный алгоритм включает в себя построение N-валидного дерева T, дерева $\tilde{T}$ и графа Γ.

Обозначим $\lambda_{\mathbf{a}_{-N},\ldots,\mathbf{a}_{-1},\mathbf{a}_0} = |m_0(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}}\ldots\mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}}\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0})|^2$. Обозначим через $(\mathbf{a}_{N-1},\mathbf{a}_{N-2},\ldots,\mathbf{a}_1,\tilde{\mathbf{a}}_0)$ те вершины графа Γ, с которыми связана вершина $(\mathbf{a}_N,\mathbf{a}_{N-1},\ldots,\mathbf{a}_1)$. Значения маски определим так, чтобы

$$\sum_{\tilde{\mathbf{a}}_0} \lambda_{\mathbf{a}_{-N},\ldots,\mathbf{a}_{-1},\tilde{\mathbf{a}}_0} = 1 \text{ и } \lambda_{\mathbf{a}_{-N},\ldots,\mathbf{a}_{-1},\tilde{\mathbf{a}}_0} = 0 \quad \forall\, \alpha_0 \notin \{\tilde{\alpha}_0\}. \qquad (3)$$

Значение $\lambda_{\mathbf{0},\dots,\mathbf{0},\mathbf{0}}$ примем равным единице.

Теорема 1. *Пусть по N-валидному дереву T построены дерево $\tilde{T}$, гарф Γ и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в равенствах (3). Пусть $\tilde{H} = height(\tilde{T})$. Тогда равенство*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$, порождающую КМА на локальном поле $F^{(s)}$, причем $M = = \tilde{H} - N$.

КМА, порожденный масштабирующей функцией $\varphi(x)$ из теоремы 1, в силу изоморфизма (1) можно рассматривать как многомерный КМА на произведении групп Виленкина. В некоторых случаях такой КМА будет несепарабельным.

Рассмотрим пример. Пусть $p = s = 2$, $N = 1$. Рассмотрим следующее N-валидное дерево T (рис. 1).

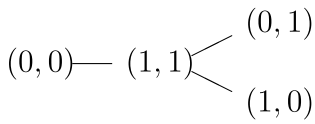


Рис. 1

Аддитивную группу $F^{(2)+}$ локального поля $F^{(2)}$ мы можем рассматривать как произведение групп Виленкина $G \times G$. В этом случае, построенные по алгоритму масштабирующая функция φ и ее преобразование Фурье $\hat{\varphi}$ определены на множествах $G_{-1} \times G_{-1}$ и $G_1^{\perp} \times G_1^{\perp}$ соответственно и принимают значения в соответствии с таблицами на рис. 2, 3.

	0	0	1	0	
	0	0	0	1	G_{-1}
	0	1	0	0	
G_0	1	0	0	0	
	G_1				

Рис. 2. φ

	0	0	1	0	
	0	0	0	1	$G_1^{\perp}$
	0	1	0	0	
$G_0^{\perp}$	1	0	0	0	
	$G_{-1}^{\perp}$				

Рис. 3. $\hat{\varphi}$

КМА, порожденный этой масштабирующей функцией, является несепарабельным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И.* Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1999. – 512 с.

2. *Lukomskii S., Vodolazov A.* Non-Haar MRA on local fields of positive characteristic // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 433, iss. 2, pp. 1415–1440. Available online 28 August 2015.

3. *Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S.* On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic. arxiv.org/abs/1503.08600.

УДК 517.546

ВЛОЖИМОСТЬ ГОЛОМОРФНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМИ НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ В ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКУЮ ПОЛУГРУППУ [1]

О. С. Кудрявцева (Волгоград, РФ)
Kudryavceva_OS@mail.ru

Рассматривается задача вложения голоморфного отображения круга в себя с заданными свойствами в однопараметрическую полугруппу. При этом требуется, чтобы элементы однопараметрической полугруппы обладали теми же свойствами, что и исходное отображение. Установлен критерий вложимости в терминах решения функционального уравнения.

Пусть $\mathfrak{D}$ — совокупность всех голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ функций f, принимающих значения из $\mathbb{D}$, оставляющих инвариантным вещественный диаметр, монотонно возрастающих на вещественном диаметре и имеющих на нём ограниченное искажение. Более точно, $\mathfrak{D}$ – совокупность голоморфных отображений $f\colon \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$, удовлетворяющих условиям:

1) $\operatorname{Im} f(x) = 0$ при $x \in (-1,1)$, $\lim\limits_{x\to\pm1} f(x) = \pm1$;

2) $f'(x) > 0$ при $x \in (-1,1)$ и $\sup\limits_{x\in(-1,1)} f'(x) < \infty$.

$\mathfrak{D}$ образует топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной в $\mathbb{D}$ сходимости.

Определение 1. Под *однопараметрической полугруппой* в $\mathfrak{D}$ понимается непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из аддитивной полугруппы $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}\colon t \geqslant 0\}$ в полугруппу $\mathfrak{D}$.

Определение 2. Функция $f \in \mathfrak{D}$ *вложима в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{D}$, если существует такая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{D}$, что $f^1 = f$.

Описание однопараметрических полугрупп связано с анализом неподвижных точек отображения. Отображения $f^t, t \geqslant 0$, имеют общее множество неподвижных точек, среди которых выделяется так называемая точка Данжуа – Вольфа q, обладающая свойством притяжения $f^t(z) \to q$ при $t \to \infty$ и всех $z \in \mathbb{D}$. Эта точка может располагаться как внутри

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00042 мол_а).

круга $\mathbb{D}$, так и на его границе $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Именно в терминах точки Данжуа – Вольфа записывается классическая формула Берксона – Порты [1], которая описывает множество всех инфинитезимальных образующих однопараметрических полугрупп голоморфных отображений единичного круга в себя.

Все другие неподвижные точки, если они есть, для нетривиальной однопараметрической полугруппы ($f^t(z) \not\equiv z$) должны лежать только на $\mathbb{T}$. Ключевым результатом, дающим возможность изучения вопросов вложимости голоморфного отображения с дополнительными неподвижными точками в однопараметрическую полугруппу, является аналог формулы Берксона – Порты [2].

Отметим, что если $f \in \mathfrak{D}$ имеет внутреннюю неподвижную точку, то эта точка может лежать только на вещественном диаметре. Если же $f \in \mathfrak{D}$ и $f(x) \neq x$ для всех $x \in (-1, 1)$, то выражение $f(x) - x$ сохраняет знак, точка $q = \sigma$, где $\sigma = \operatorname{sgn}(f(x) - x)$, является точкой Данжуа – Вольфа, а точка $a = -\sigma$ является дополнительной граничной неподвижной точкой.

Теорема. *Пусть $f \in \mathfrak{D}$ и $f(x) - x$ сохраняет знак для всех $x \in$ $\in (-1, 1)$. Тогда если f вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$, то существует голоморфная в $\mathfrak{D}$ функция K, являющаяся решением функционального уравнения*

$$K\left(f(z)\right) = K(z) + 1$$

и допускающая представление в виде

$$K(z) = \lambda_1 \ln \frac{1 + \sigma z}{1 - \sigma z} + \lambda_2 \frac{\sigma z}{(1 - \sigma z)^2} + \lambda_3 \int\limits_{[-\sigma,\, \sigma)} \ln \frac{1 - 2xz + z^2}{(1 - \sigma z)^2} \frac{d\mu(x)}{1 - \sigma x} \quad (1)$$

с некоторыми $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_3 \geqslant 0$ и вероятностной мерой μ на $[-\sigma,\, \sigma)$, где $\sigma = \operatorname{sgn}(f(x) - x)$ и под $[a, b)$, если $a > b$, понимается $(b, a]$. При этом, под логарифмами понимаются ветви, принимающие значение 0 при $z = 0$.

Обратно, всякая функция K вида (1) однолистна в $\mathbb{D}$ и отображает $\mathbb{D}$ на область, которая с каждой точкой $w \in K(\mathbb{D})$ содержит и весь луч $\{w + t \colon t \geqslant 0\}$. При этом, функции $f(z) = K^{-1}\big(K(z) + 1\big)$ принадлежат $\mathfrak{D}$, обладают свойством: $f(x) - x$ сохраняет знак для всех $x \in (-1, 1)$, причём $\operatorname{sgn}(f(x) - x) = \sigma$, и вложимы в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berkson E., Porta H.* Semigroups of analytic functions and composition operators // Michigan Math. J. 1978. Vol. 25, № 1. P. 101–115.

2. *Горяйнов В. В., Кудрявцева О. С.* Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 7. С. 43–74.

УДК 517.5

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ УОЛША С МАЛЫМИ ЛАКУНАМИ

И. Ф. Курбыко, С. В. Левизов (Владимир, РФ)
levizov@rambler.ru

Пусть $0 \leq x \leq 1$ и $\{\varphi_n(x)\}$ — система Уолша (в порядке Пэли); $\{n(k)\}$ — некоторая (строго возрастающая) последовательность индексов (номеров). Скажем, что подсистема $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ подчинена закону повторного логарифма (ЗПЛ), если выполнено соотношение:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}(2N\log\log N)^{-1/2} \cdot \sum_{k=1}^{N} \varphi_{n(k)}(x) = 1 \quad \text{почти всюду.} \qquad (1)$$

Известно (см. [1]), что если последовательность $\{n(k)\}$ такова, что, начиная с некоторого номера k_0

$$n(k+1) \geq n(k) \cdot (1 + c \cdot k^{-\alpha}), \quad \text{где} \quad c > 0, \quad 0 < \alpha < 0,5, \qquad (2)$$

то для подсистемы $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ соотношение (1) имеет место.

Размер «пробелов» (лакун) в последовательности $\{n(k)\}$ регулируется показателем α («густота» последовательности растёт вместе с α), причём «критическим» является рубеж $\alpha = 0,5$ (аналогичный результат справедлив и для другого вероятностного закона — ЦПТ, рассмотренного по отношению к подсистеме $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ — см. об этом [2, 3]). А именно: равенство (1) начинает «пропадать», если строить $\{n(k)\}$, не подчинённую (2) — взяв показатель $\alpha \geq 0,5$.

В то же время ЗПЛ может выполняться и для достаточно «густых» последовательностей $\{n(k)\}$. Справедливо следующее утверждение: пусть $\{c_k\}$ — возрастающая (как угодно медленно) последовательность чисел: $c_k \to \infty$. Тогда существует последовательность $\{n(k)\}$ такая, что величина $n(k+1)/n(k) - 1$ при $k \to \infty$ убывает быстрее, чем c_k/k, и при этом для подсистемы $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ равенство (1) выполняется.

Этот факт уточняет результат, полученный в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Takahasi S.* A statistical property of the Walsh functions // Stud. Sci. Math. Hung. 1975. Vol. 10. P. 93–98.

2. *Foldes A.* Further Statistical properties of the Walsh functions // Stud. Sci. Math. Hung. 1972. Vol. 7. P. 147–153.

3. *Левизов С.В.* О ЦПТ для системы Уолша // Матем. заметки. 1984. Т. 36, № 3. С. 435–445.

4. *Курбыко И.Ф., Левизов С.В.* О законе повторного логарифма для рядов по системе Уолша // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 16-й Сарат. зим. шк. Саратов, 2012, С. 104.

УДК 517.518.3

О СВЯЗИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВСПЛЕСКОВ[1]

Е. А. Лебедева (Санкт-Петербург, РФ)
ealebedeva2004@gmail.com

В работе изучается связь нестационарных непериодических и общих периодических систем всплесков, получаемых с помощью унитарного принципа расширения. Доказано, что периодизация фрейма Парсеваля нестационарных всплесков является фреймом Парсеваля периодических всплесков. Также доказано, что и наоборот, фрейм Парсеваля периодических всплесков является периодизацией некоторого фрейма Парсеваля нестационарных всплесков. Хотя существует бесконечное множество нестационарных непериодических фреймов, периодизация которых приводит к одному и тому же периодическому фрейму, среди них можно выбрать фрейм нестационарных всплесков так, чтобы он состоял из функций с компактным носителем и чтобы частотно-временная локализация двух систем была согласована. А именно, чтобы

$$\lim_{j\to\infty}\left(UC_B(\psi_j) - UC_H(\psi_j^0)\right) = 0,$$

где UC_B и UC_H — константы неопределенности Брейтенбергера и Гейзенберга соответственно, $\psi_j \in L_2(\mathbb{T})$, $j \in \mathbb{N}$ и $\psi_j^0 \in L_2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$, — периодические и нестационарные непериодические всплеск-функции соответственно.

Эта взаимосвязь нестационарных и периодических систем всплесков позволяет описать класс периодических последовательностей, для которых можно уточнить нижнюю границу константы неопределенности Брейтенбергера, в терминах всплесковых последовательностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lebedeva E. A.* An inequality for a periodic uncertainty constant (подана в Applied and Computational Harmonic Analysis). http://arxiv.org/abs/1412.2694

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-05796) и Санкт-Петербургского государственного университета (проект № 9.38.198.2015).

УДК 517.95

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА МОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ[1]

А. Г. Лосев (Волгоград, РФ)
allosev59@gmail.com

В данной работе исследуется асимптотическое поведение решений уравнения Пуассона

$$\Delta u - c(x)u = f, \tag{1}$$

где $c(x) \geq 0$, на модельных (сферически-симметричных) римановых многообразиях. В частности, найдены условия однозначной разрешимости задачи Дирихле с непрерывными граничными данными на «бесконечности».

В течение последних четырех десятков лет было опубликовано множество работ, посвященных нахождению условий выполнения теорем типа Лиувилля о тривиальности различных классов решений и субрешений линейных и нелинейных дифференциальных уравнений на некомпактных римановых многообразиях. Кроме того, многие исследования были посвящены оценке размерностей различных пространств решений линейных эллиптических уравнений, а также вопросам разрешимости различных краевых задач.

В частности, точные условия выполнения теорем типа Лиувилля и однозначной разрешимости задачи Дирихле для решений различных однородных эллиптических уравнений и неравенств на модельных многообразиях найдены в работах [1–4]. Опишем данные многообразия подробнее.

Пусть M — полное риманово многообразие с пустым краем, представимое в виде $M = B\bigcup D$, где B — компактное множество, а D — изометрично прямому произведению $R_+ \times S$ (где $R_+ = (0, \infty)$, а S — замкнутое риманово многообразие) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2.$$

Здесь $g(r)$ — положительная, гладкая функция на R_+, $d\theta^2$ — метрика на S. В качестве примеров модельных многообразий можно назвать евклидово пространство, пространство Лобачевского, поверхности вращения и другие.

В данной работе изучается асимптотическое поведение решений уравнения (1) в предположении, что на D выполнено $c = c(r)$, а $f = f(\theta)$ — гладкая функция.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02479 р-поволжье-а).

Введем следующие величины:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dr}{g^{n-1}(r)} \int_1^r g^{n-3}(t)dt,$$

$$J = \int_1^{\infty} \frac{dr}{g^{n-1}(r)} \int_1^r (1 + c(t))g^{n-1}(t)dt,$$

где $\dim M = n$.

В [1] показано, что всякая положительная гармоническая функция на M является тождественной постоянной тогда и только тогда, когда $I = \infty$. В [2] показано, что если $I < \infty$, то для всех $\Phi \in C(S)$ и $\Psi \in C(S)$ существует единственная гармоническая функция на D такая что

$$u(r_0,) = \Phi(\theta)$$

и

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta) = \Psi(\theta).$$

Там же показано что если $I < \infty$ то для любой $\Psi \in C(S)$ существует единственная гармоническая функция на M такая что

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta) = \Psi(\theta).$$

Аналогичные результаты для решений стационарного уравнения Шредингера получены в [3]. Условия выполнения теорем типа Лиувилля для положительных решений некоторых эллиптических неравенств на модельных многообразиях получены, в частности, в [4].

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть многообразие M такое что*

$$J < \infty.$$

Тогда для любых $\Phi \in C(S)$ и $\Psi \in C(S)$ существует единственное решение уравнения (1) на D такое что

$$u(r_0, \theta) = \Phi(\theta)$$

и

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta) = \Psi(\theta).$$

Теорема 2. *Пусть многообразие M такое что*

$$J < \infty.$$

Тогда для любой $\Psi \in C(S)$ *существует единственное решение уравнения* (1) *на* M *такое что*

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = \Psi(\theta).$$

При доказательстве данных утверждений, в частности, используется тот факт, что из сходимости интеграла $J < \infty$ следует сходимость $I < \infty$, условие однозначной разрешимости задачи Дирихле для гармонических на M функций ($I < \infty$), а также стандартный прием, заключающийся в представлении решений уравнения (1) в виде суммы гармонической функции с заданными краевыми условиями и решения уравнения (1) с нулевыми краевыми условиями. Техника доказательства основана на представлении решений в виде рядов Фурье по собственным функциям оператора Лапласа – Бельтрами на S и доказательстве их равномерной сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лосев А. Г.* Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида // Изв. вузов. Матем. 1991. № 12. С. 15–23
2. *Лосев А. Г.* Об одном критерии гиперболичности римановых многообразий специального вида // Матем. заметки. 1996. № 59(4). С. 558–564
3. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях // Изв. вузов. Матем. 1999. № 6. С. 41–49
4. *Лосев А. Г., Федоренко Ю. С.* О положительных решениях квазилинейных эллиптических неравенств на некомпактных римановых многообразиях // Матем. заметки. 2007. Т. 81, № 6. С. 867–878

УДК 519.63+523.68

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАЛОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И КРУГОВОГО ЦИЛИНДРОВ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. Т. Лукашенко (Москва, РФ)
lukashenko-vt@yandex.ru

Одной из фундаментальных задач газовой динамики является проблема взаимодействия тел в сверхзвуковом потоке. Связана данная проблема прежде всего с прикладными исследованиями — начиная от вопросов о динамике распада метеорных тел при движении в атмосфере [1] до получения расчётных аэродинамических коэффициентов при обтекании тел в аэродинамических трубах [2].

В представленной работе автором исследовалось поведение характеристик малого эллиптического цилиндра в поле течения большого кругового цилиндра при квазистационарном сверхзвуковом обтекании (число Маха $M = 6$; число Рейнольдса $Re = 10^5$) обыкновенным воздухом (показатель адиабаты $\gamma = 1.4$).

Расчёты проводились при помощи метода [3, 4] с гибридными сетками. Вокруг каждого обтекаемого тела строились специальные сетки, на которых численно решалась система уравнений Навье – Стокса в приближении тонкого слоя, и после этого результаты расчётов согласовывались со значениями газодинамических характеристик на сетке основного течения, где численно решались уравнения Эйлера. Отметим, что такой подход позволяет с достаточно хорошей точностью получить решение задачи об обтекании тел вязким сжимаемым газом без значительного усложнения вычислений [4].

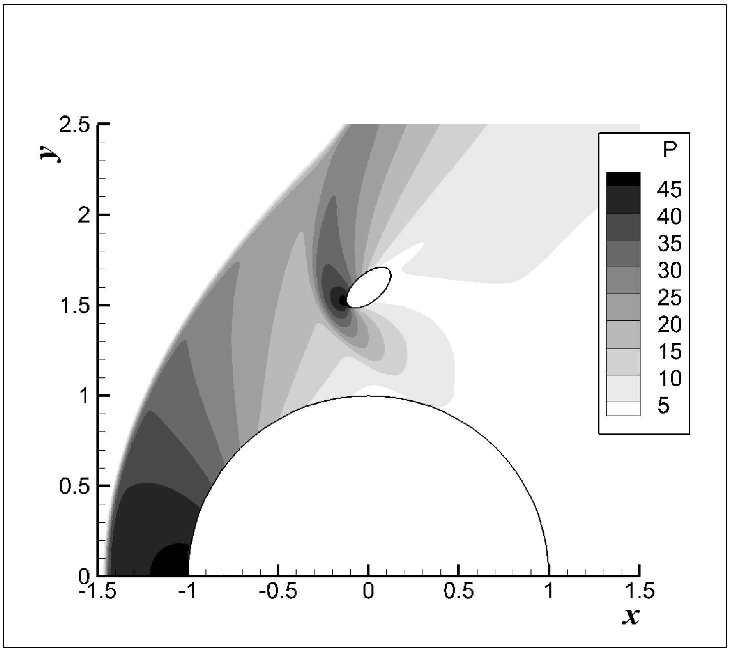


Рис. 1. Распределение давления вблизи цилиндров (конфигурация I).

При этом радиус кругового цилиндра брался равным единице, а само большое тело помещалось в центр. Малый же эллиптический цилиндр брался с главными полуосями $a = 0.15$ и $b = 0.075$. Рассматривались четыре основные конфигурации нахождения малого цилиндра по отношению к большому: I) малый цилиндр находится на линии перпендикулярной к набегающему потоку вблизи большого тела; II) малый цилиндр находится на линии перпендикулярной к набегающему потоку вдали от большого тела; III) малый цилиндр находятся на отходящей от большого тела ударной волне ниже по потоку; IV) малый цилиндр находится в следе большого тела.

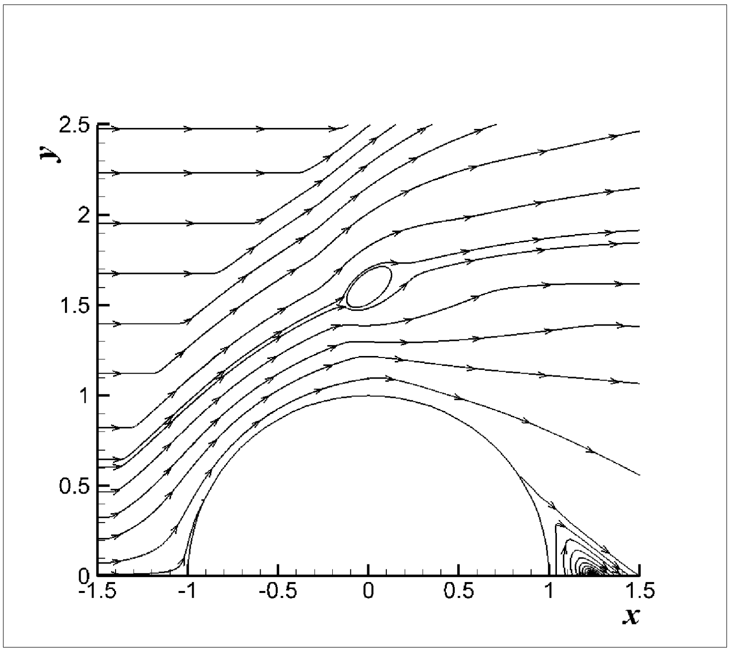


Рис. 2. Линии тока вблизи цилиндров
(конфигурация I)

По результатам расчётов получены зависимости аэродинамических характеристик тел от угла наклона эллиптического цилиндра по отношению к набегающему потоку для четырёх указанных конфигураций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стулов В. П., Мирский В. Н., Вислый А. И.* Аэродинамика болидов. М. : Наука, 1995. 240 с.

2. *Кузнецов Б. Я.* Аэродинамические исследования цилиндров // Тр. ЦАГИ. М., 1931. Вып. 98. 39 с.

3. *Максимов Ф. А.* Сверззвуковое обтекание системы тел // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 3, № 1. С. 161–171.

4. *Максимов Ф. А., Шевелев Ю. Д.* Численное моделирование трёхмерных пространственных сверхзвуковых течений вязкого газа с отрывом потока // Матем. моделирование. Проблемы и решения. М. : Наука, 2003. С. 384–421.

УДК 517.5

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ ХААРА К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА[1]

Д. С. Лукомский, П. А. Терехин (Саратов, РФ)
lukomskiids@info.sgu.ru, terekhinpa@info.sgu.ru

Идея применения системы Хаара для численного решения дифференциальных уравнений (задачи Коши, краевых задач и т.д.) не нова и рассматривалась, например, в работах [1] и [2]. Однако, в этих работах по функциям Хаара раскладывалось само решение, в связи с этим возникала необходимость в применении специального разностного оператора дифференцирования для разрывных функций. Иной подход был предложен в статье [3], когда в ряд разлагалась вторая производная решения дифференциального уравнения второго порядка, а само решение было представлено в виде кусочно-постоянных сплайнов второй степени. Данный подход получил развитие в работе [4], где были получены оценки погрешности приближения данного решения.

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x), & 0 \le x \le 1, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Предполагаем, что $a(x), b(x) \in C[0,1]$ - непрерывные функции.

Будем искать приближенное решение $y_n(x)$ задачи (1), представляя его производную в виде полинома по системе Хаара $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ порядка не выше 2^n:

$$y_n'(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{y}_{n,k}\chi_k(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} y_{n,k}\chi_{(k2^{-n},(k+1)2^{-n})}.$$

Восстановим функцию $y_n(x)$ по ее производной:

$$y_n(x) = y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}(x - k2^{-n}), \qquad k2^{-n} \le x \le (k+1)2^{-n},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (первый автор, проект № 13-01-00102) и в рамках выполнения проектной части госзадания Минобрнауки РФ (второй автор, проект № 1.1520.2014К).

где $k=0,\dots,2^n-1$. Функция $y_n(x)$ является кусочно-линейной с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$. Фиксируем набор промежуточных точек $x_{n,k}=(k+\theta_{n,k})2^{-n}$, $0<\theta_{n,k}<1$, $k=0,\dots,2^n-1$. Потребуем, чтобы функция $y_n(x)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению (1) на множестве точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$. Получим систему уравнений

$$y_n'(x_{n,k})+a(x_{n,k})y_n(x_{n,k})=b(x_{n,k}),\qquad k=0,\dots,2^n-1.$$

С учетом представления функций $y_n(x)$ и $y_n'(x)$ и обозначив для краткости $a_{n,k}=a(x_{n,k})$ и $b_{n,k}=b(x_{n,k})$ будем иметь

$$y_{n,k}+a_{n,k}\left(y_0+2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1}y_{n,j}+y_{n,k}\theta_{n,k}2^{-n}\right)=b_{n,k},\quad k=0,\dots,2^n-1. \tag{2}$$

Упростим рекуррентные соотношения (2) путем приведения их к следующему виду

$$z_{n,k}+a_{n,k}\left(y_0+2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1}z_{n,j}\right)=b_{n,k},\qquad k=0,\dots,2^n-1. \tag{3}$$

Из уравнений (3) величины $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ определяются рекуррентно и однозначно для любого натурального числа n.

Пусть функции $z_n(x)$ и $z_n'(x)$ имеют тот же смысл, что и пара $y_n(x)$ и $y_n'(x)$, т.е. в представлении последних величины $y_{n,k}$ заменены на $z_{n,k}$.

Функцию $z_n(x)$ нетрудно определить из рекуррентных соотношений (3) по входным интерполяционным и начальным данным: $\{a_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$, $\{b_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ и y_0.

Введем следующие характеристики задачи (1):

$$C=|y_0|\,\|a\|+\|b\|,\quad \varOmega_n=|y_0|\omega(a,\tfrac{1}{2^n})+\omega(b,\tfrac{1}{2^n}),\quad \varOmega_n^*=\omega(a,\tfrac{1}{2^n})+\tfrac{\|a\|}{2^n},$$

где $\|f\|=\sup\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|$ и $\omega(f,\delta)=\sup_{|x_1-x_2|\le\delta}|f(x_1)-f(x_2)|$ — равномерный модуль непрерывности, а также характеристики приближенных решений

$$Y_n=\max_{0\le k<2^n}|y_{n,k}|,\quad Z_n=\max_{0\le k<2^n}|z_{n,k}|,\quad \varDelta_n=\max_{0\le k<2^n}|y_{n,k}-z_{n,k}|.$$

Лемма. *Справедливы неравенства*

$$Z_n\le Ce^{\|a\|},\qquad n=1,2,\dots,$$

и

$$\varDelta_n \le \frac{2C\|a\|e^{3\|a\|}}{2^n}, \qquad n \ge \log_2\|a\| + 1.$$

Из леммы вытекает равномерная ограниченность функций $y_n(x)$ и их производных, поскольку

$$Y_n \le Z_n + \varDelta_n \le Ce^{\|a\|}(1 + O(2^{-n})).$$

Обозначим $y(x)$ точное решение задачи (1).

Теорема. *Для любого* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняется неравенство*

$$\|y' - z_n'\| \le e^{\|a\|}(\varOmega_n + Ce^{\|a\|}\varOmega_n^*). \tag{4}$$

Неравенство (4) можно записать в виде

$$\|y' - z_n'\| = O\big(\omega(a, \tfrac{1}{2^n}) + \omega(b, \tfrac{1}{2^n}) + \tfrac{1}{2^n}\big), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Такое же соотношение будет иметь место для нормы $\|y' - y_n'\|$ для достаточно больших n. Постоянные в O-соотношениях зависят от величин $\|a\|$, $\|b\|$ и $|y_0|$.

Следует заметить, что оценка для уклонения $\|y - z_n\|$ повторяет оценку (4). Можно показать, что улучшения порядка сходимости, как это имеет место для интерполяционных сплайнов, в нашем случае не происходит.

По результатам данных исследований написана программа для численного решения задачи (1). Данные численного эксперимента полностью подтверждают сформулированные утверждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *M. Ohkita, Y. Kobayashi* An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations // IEEE Transactions on Circuit and Systems. 1986. Vol. 33, № 9. P. 853–862.

2. *M. Razzaghi, Y. Ordokhani* An application of rationalized Haar functions for variational problems // Appl. Math. Comp. 2001. Vol. 122, № 3. P. 353–364.

3. *Д. С. Лукомский* Применение системы Хаара для решения задачи Коши // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. Вып. 14. С. 47–50.

4. *Лукомский Д. С., Терехин П. А.* Об оценке погрешности решения задачи Коши с помощью систем сжатий и сдвигов // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань : Изд-во Казан. матем. о-ва, 2015. Т 51. С. 295–297.

УДК 517.5

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МАСШТАБИРУЮЩИХ ФУНКЦИЯХ ПО НЕРАВНОМЕРНОЙ СИСТЕМЕ СДВИГОВ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА[1]

С. Ф. Лукомский (Саратов, РФ)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

В работе [1] при построении классического КМА в качестве множества сдвигов предлагалось использовать не множество целых чисел $\mathbb{Z}$, а множество $2\mathbb{Z}+\left\{0,\frac{r}{p}\right\}$, где $0<r\le 2p-1$ и r, p —взаимно простые. В работе [2] этот вопрос рассмотрен на локальном поле K положительной характеристики. Если в качестве поля K выбрать p-ичную группу Виленкина G с базисной последовательностью $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, то в работе [2] в качестве множества сдвигов предлагается выбрать множество $H_0\dot{+}\left\{0,\frac{r}{p}\right\}$, где

$$H_0=\{a_{-1}g_{-1}+a_{-2}g_{-2}+\dots+a_{-s}g_{-s}:\ a_{-j}=\overline{0,p-1}\},\ 1\le r\le 2p-1.$$

В работе [2] получены достаточные условия на функцию φ, при которых φ порождает ортогональный КМА. Примеров построения функции φ нет. Более того, можно доказать, что в случае $p=2$ не существует ступенчатой масштабирующей функции, порождающей ортогональный КМА относительно системы сдвигов $H_0\dot{+}\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$. В докладе мы выбираем в качестве системы сдвигов множество

$$H=\{\dot{-}a_{-1}g_0\dot{+}a_{-1}g_{-1}\dot{+}\dots\dot{+}a_{-s}g_{-s}:\ s\in\mathbb{N}\}.$$

В этом случае справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\varphi\in L_2(G)$ такова, что $\hat\varphi\in\mathcal{D}_{-N}(G_M^\perp)$, т.е. $\operatorname{supp}\hat\varphi\subset G_M^\perp$ и преобразование Фурье $\hat\varphi(\chi)$ постоянно на смежных классах $G_{-N}^\perp\chi$ и пусть r_n — функции Радемахера. Система сдвигов $\varphi(x\dot{-}h)_{h\in H}$ будет ортонормированной системой тогда и только тогда, когда для любых $\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\dots,\alpha_{-1}=\overline{0,p-1}$*

$$\sum_{\alpha_0,\alpha_1,\dots\alpha_{M_1}=0}|\hat\varphi(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}\dots r_{-2}^{\alpha_{-2}}r_{-1}^{\alpha_{-1}+\alpha_0},r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2=1.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

Если $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}_{-N}(G_M^{\perp})$ и φ является масштабирующей функцией, то $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})$, где $\mathcal{A}$ – оператор растяжения. Маска $m_0(\chi)$ имеет вид

$$m_0(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)} \cdot (\chi\mathcal{A}^{-1}, a_{-1}g_0),$$

где $H_0^{(N)} = \{a_{-1}g_{-1} + a_{-2}g_{-2} + \cdots + a_{-N}g_{-N} : \ a_{-j} = \overline{0, p-1}\}$.

Теорема 2. 1. *Маска $m_0(\chi)$ периодична с любым периодом $r_{-2}^{\alpha_{-2}} r_{-3}^{\alpha_{-3}} \ldots r_{-s}^{\alpha_{-s}}$.*

2. *Маска m_0 определяется своими значениями на подгруппе $G_1^{\perp}$. Более того, при каждом $\gamma_0 \in \{0, ..., p-1\}$ значения маски m_0 совпадают на смежных классах $(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots \ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1})$, для которых $\alpha_1 \dot{-} \alpha_0 = \gamma_0$.*

Рассмотрим **пример**. Пусть $p = 3$, $M = N = 1$. Определим значения маски на смежных классах $G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0}$ равенствами $m_0(G_{-1}^{\perp}) = 1$, $|m_0(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})| = 1$ при $(\alpha_{-1}, \alpha_0) = (2, 0)$, $(\alpha_{-1}, \alpha_0) = (0, 2)$, $m_0(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0}) = 0$ в остальных случаях. Продолжим m_0 на подгруппу $G_2^{\perp}$ так, чтобы было выполнено 2-е условие теоремы 2. После этого продолжим ее периодически на всю группу X.

Для такой маски

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi\mathcal{A}^{-k}) = \begin{cases} 0, & \chi \in G_2^{\perp} \setminus G_1^{\perp} \\ m_0(\chi\mathcal{A}^{-1}) m_0(\chi), & \chi \in G_1^{\perp} \end{cases},$$

и функция $\hat{\varphi}(\chi)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Поэтому сдвиги $\varphi(\chi \dot{-} h)_{h \in H}$ образует ортонормированную систему в G. Общие методы КМА позволяют доказать, что $\varphi(\chi)$ порождает ортогональный КМА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *J.-P. Gabardo and M. Nashed* Nonuniform multiresolution analyses and spectral pairs// J. Funct. Anal. 1998. Vol. 158. P. 209–241.

2. *F. A. Shah and Abdullah* Nonuniform multiresolution analysis on local fields of positive characteristic// Complex Anal. Oper. Theory. 2015. Vol. 9, iss. 7. P. 1589–1608.

УДК 517.521

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СМЕШАННЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

М. Г. Магомед-Касумов (Махачкала, РФ)
rasuldev@gmail.com

В данной работе предложен метод численного решения задачи Коши, основанный на разложении самой функции и ее производных в смешанный ряд по функциям Хаара.

Рассмотрим его применение на примере задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad t \in [0,1], \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \quad (1)$$

Смешанные ряды по различным ортогональным системам были введены и исследованы в работах И. И. Шарапудинова (см., например, [1]). В данной работе нам понадобятся смешанные ряды по системе Хаара $\{\chi_k(x)\}$ [2]. Для $r \in \mathbb{N}$ определим систему функций $\{\chi_{r,k}\}_{k=1}^{\infty}$ [1]:

$$\chi_{r,k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \quad 1 \le k \le r, \quad (2)$$

$$\chi_{r,r+k}(t) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^t (t-x)^{r-1}\chi_k(x)\,dx, \quad t \in [0,1], \quad k = 1,2,\ldots. \quad (3)$$

Поскольку для простоты изложения мы ограничились лишь дифференциальными уравнениями второго порядка, то в дальнейшем будут встречаться функции (2) только для $r = 1$ и $r = 2$.

Пусть функция $y(t)$ имеет на $[0,1]$ абсолютно непрерывную первую производную. Применяя формулу Тейлора с остатком в интегральной форме, мы можем записать следующие равенства:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + \int\limits_0^t (t-x)y''(x)\,dx, \quad (4)$$

$$y'(t) = y'(0) + \int\limits_0^t y''(x)\,dx. \quad (5)$$

В силу того, что $y''(t) \in L^1(0,1)$, ряд Фурье – Хаара $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{y}_k \chi_k(t)$ для этой функции будет сходиться к самой функции в метрике пространства $L^1(0,1)$. В таком случае $y''(t)$ можно приближенно заменить частичной суммой

$$y''(t) \approx S_n(y'', t) = \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k \chi_k(t). \tag{6}$$

Подставляя сумму (6) в (4) и учитывая начальные условия (1), получим следующее приближенное представление функции $y(t)$:

$$y(t) \approx y_0 + y_1 t + \int\limits_0^t (t-x) \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k \chi_k(t) dx =$$

$$= y_0 + y_1 t + \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k \int\limits_0^t (t-x) \chi_k(t) dx = y_0 + y_1 t + \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k \chi_{2,k+2}(t). \tag{7}$$

Поступая аналогичным образом, для $y'(t)$ получим:

$$y'(t) \approx y_1 + \sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k \chi_{1,k+1}(t). \tag{8}$$

Выражения (7) и (8) называются частичными суммами смешанных рядов по системе Хаара $\{\chi_k\}$ [2].

Вернемся теперь к задаче Коши (1). С помощью разложения в ряд Фурье – Хаара мы приближенно представили неизвестную функцию $y''(t)$ в виде конечной суммы (6), в которой фигурируют неизвестные коэффициенты $\hat{y}_k$. Основная идея при применении смешанных рядов заключается в том, что удается выразить все производные меньших порядков (в данном случае $y'(t)$, $y(t)$) через конечные суммы с теми же самыми неизвестными коэффициентами $\hat{y}_k$ (см. (7), (8)). Таким образом, подставляя найденные выражения (6), (7) и (8) в (1), получаем уравнение относительно неизвестных $\hat{y}_k$, $k = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k (\chi_k(t) + a\chi_{1,k+1}(t) + b\chi_{2,k+2}(t)) = f(t) - ay_1 - b(y_0 + y_1 t), \tag{9}$$

решение которого можно получить, например, следующим образом. Фиксируем на отрезке $[0,1]$ узлы $t_1, \ldots, t_m$. Рассматривая уравнение (9) относительного каждого узла t_j, получим систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k (\chi_k(t_j) + a\chi_{1,k+1}(t_j) + b\chi_{2,k+2}(t_j)) =$$

$$= f(t_j) - ay_1 - b(y_0 + y_1 t_j), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Неизвестные коэффициенты $\hat{y}_k$ данной системы можно найти, к примеру, с помощью метода наименьших квадратов.

Заметим, что данный метод численного решения задачи Коши практически без изменений переносится на линейные дифференциальные уравнения любого порядка с переменными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам // Дагестанский электрон. матем. изв. 2015. Вып. 3. С.1–257. URL: http://mathreports.ru/static?id=87 (дата обращения 12.12.2015).

2. *Шарапудинов И. И., Муратова Г. Н.* Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 68–76.

УДК 517.518.26

ВАРИАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕГОМЕОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С S-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А. Н. Малютина, К. А. Алипова (Томск, РФ)

nmd@math.tsu.ru, ksusha_ast@mail.ru

Пусть D, D^* — области в R^n, и отображение $f\colon D \to D^*$ — открытое, непрерывное, изолированное, $f \in W^1_{n,loc(D)}$ и $J(x, f)$ сохраняет знак почти всюду в D (для определенности возьмем $J(x, f) > 0$), тогда будем говорить $f \in \hat{W}^1_{n,loc(D)}$.

Введем следующие обозначения:

$K_I(x, f) = \dfrac{J(x, f)}{l^n(x, f)}$ — внутренняя дилатация отображения f, где $l(x, f) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$; $K_O(x, f) = \dfrac{L^n(x, f)}{J(x, f)}$ — внешняя дилатация отображения f, где $L(x, f) = \max\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$; $K(x, f) = \dfrac{|f'(x)|}{l(x, f)}$, $\lambda(x, f) = n^{-n/2}\dfrac{|\nabla f(x)|^n}{|J(x, f)|}$.

$W^k_m(D)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $L_m(D)$, имеющих обобщенные производные всех видов до порядка k включительно, суммируемые по D со степенью m.

$\overset{0}{W}{}^k_m(D)$ — подпространство пространства $W^k_m(D)$, плотным множеством в котором является совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций с носителями в D.

Определение 1 [1]. Отображение f называется *отображением с $K_{I,s}$-усредненной характеристикой*, если:

1) $f \in \hat{W}^1_{n,loc(D)}$;

2) существует постоянная $K_{I,s} \geq 0$ такая, что выполняется неравенство

$$K_{I,s}(f) = \left(\int\limits_D K_I^s(x,f)\, d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K_{I,s},$$

где $d\sigma_x = \dfrac{dx}{(1+|x|^2)^n}$.

Определение 2. Отображение f называется *отображением с $K^*_{O,s}$-усредненной характеристикой*, если:

1) $f \in \hat{W}^1_{n,loc(D)}$;

2) существует постоянная $K^*_{O,s} \geq 0$ такая, что выполняется неравенство

$$K^*_{O,s}(f) = \left(\int\limits_D K_O^s(x,f) J(x,f)\, d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K^*_{O,s},$$

где $d\sigma_x = \dfrac{dx}{(1+|x|^2)^n}$.

Определение 3 [1, 2]. Отображение f будем называть *отображением с $(K^*_{O,s}, K_{I,s})$-усредненной характеристикой* или *отображением с s-усредненной характеристикой.*

Определение 4. Пусть $f^{-1}(y) = \{x_i\}$, $f^{-1}(y_j) = \{x_j^k\}$ и $V_i = U(x_i, f, r)$ — непересекающиеся нормальные окрестности точек x_i [MRV]. В каждой окрестности V_i находится $m_i = i(x_i, f)$ точек из множества $\{x_j^k\}$. Существуют окрестности $V_i = U(x_i, f, r)$ точек x_i такие, что $f|_{V_i}$ — гомеоморфизм. Поэтому можно рассмотреть отображения $f_i \colon B^n(y,r) \to V$, f_i — ветви отображения f, причем $f \circ f_i$ — тождественное отображение. Отображения f_i тоже абсолютно непрерывны в смысле Тонелли в сферической метрике.

$$\int\limits_{D^*} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}\, d\sigma_y = \int\limits_{D^* \setminus f(B_f)} \left(\frac{1}{m} \sum_i \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \right|^n \right) d\sigma_y \leq$$

$$\leq \frac{n^{\frac{n}{2}}}{m} \sum_i \int\limits_{D^*} \parallel Jf_i \parallel^n \; d\sigma_y \leq k \frac{n^{\frac{n}{2}}}{m} \int\limits_{D^*} (Jf_i)\, d\sigma_y \leq Ck \frac{n^{\frac{n}{2}}}{m} |D|,$$

где $C = C(n, D)$. Следовательно, $f_i \in ACL_n(D^*)$.

Определение 5. Пусть $f\colon D \to D^*$, $g\colon D \to D^*$ — отображения с s-усредненной характеристикой. Мы будем называть f *экстремальным отображением*, если для любого g, совпадающего с f на границе области D, выполняется $K_{I,s}(f) \leq K_{I,s}(g)$.

Определение 6. Функция $\eta(x) = \big(\eta^1(x), ..., \eta^n(x)\big) \in \overset{0}{W}{}^1_n(D)$ называется *допустимой вариацией отображения с s-усредненной характеристикой* f, если для всех $t \in [-1, 1]$ отображение $f(x) + t\eta(x)$ является отображением с s-усредненной характеристикой.

Лемма 1. *Пусть $f(x)$ — произвольное отображение с s-усредненной характеристикой. Тогда класс его допустимых вариаций не пуст.*

Доказательство. Нетрудно показать, что функция $\eta(x) = (0, ..., 0, -\varepsilon\zeta\,(f(x)))$ является допустимой вариацией отображения $f(x)$ при $0 < \varepsilon < \min\left\{1, \left(\max\limits_{D^*}|\zeta|\right)^{-1}\right\}$, где $\zeta(y)$ — гладкая вещественная функция с носителем в D^*.

Обозначим

$$F(A) = n^{-n/2}|A|^{sn}|detA|^{-s},$$

где $a^i_j = \dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}$ и $|A| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a^i_j)^2\right)^{1/2}$, $F^i_j(A_f) = \dfrac{\partial F}{\partial a^i_j}(A_f)$.

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ — экстремальное отображение с s-усредненной характеристикой. Тогда*

$$\int\limits_D \sum_{i,j=1}^{n} F^i_j(A_f)\frac{\partial \eta^i}{\partial x_j}\,d\sigma_x = 0,$$

где $\eta(x) = \zeta(f(x))$, $\zeta(y) \in \overset{0}{W}{}^1_n(D^*)$.

Доказательство. Если $\zeta(y) \in C^1_0(D^*)$, то можно показать, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\left|F^i_j(A_{f+\varepsilon t\eta})\frac{\partial \eta^i}{\partial x_j}\right| \leq M < \infty$$

для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и для всех $t \in [-1, 1]$.

Поэтому

$$0 = \int\limits_D \sum_{i,j=1}^{n} F^i_j(A_f)\frac{\partial \eta^i}{\partial x_j}\,d\sigma_x = \int\limits_{D^*} \sum_{i,j=1}^{n} G^i_k\frac{\partial \zeta^i}{\partial y}\,d\sigma_y,$$

где $G^i_k(y) = |J(y, f^{-1})| \sum\limits_{j=1}^{n} F^i_j(A_f)\frac{\partial f^k}{\partial x_j}$.

Отсюда справедливость леммы для $\zeta(y) \in \overset{0}{W}{}_n^1\ (D^*)$ следует из [3, гл. V, замечание 2.1].

Для квазиконформных в среднем экстремальных отображений см. [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елизарова М. А., Малютина А. Н.* Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства. LAMBERT Acad. Publ., 2013. 121 с.

2. *Alipova K. A., Elizarova M. A., Malyutina A. N.* Examples of the mappings with s-averaged characteristic // Комплексный анализ и его приложения : материалыVII Петрозаводск. междунар. конф. (29июня –5 июля 2014 г.) /под ред. проф. В. В. Старкова; ПетрГУ. Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2014. С. 12–17.

3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1975.

4. *Стругов Ю. Ф.* Вариации пространственных квазиконформных отображений и экстремальные отображения // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1976. Вып. 25. С. 154–157.

УДК 517.54

О ПРОДОЛЖЕНИИ ОТОБРАЖЕНИЙ С (s, α)-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А. Н. Малютина, Б. В. Соколов (Томск, РФ)

nmd@math.tsu.ru, sokolov@ido.tsu.ru

Для отображений с (s, α)-усредненной характеристикой доказывается теорема о продолжении на границу шара.

Пусть $R^n (n \geq 3)$ — евклидово n-мерное пространство, $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$, B^n — шар $|x| < 1$. Если $D \subset R^n$ — область, то через ∂D и $\bar{D}$ обозначим соответственно границу и замыкание области D в R^n.

Определение 1. Будем говорить, что *отображение* $f\colon D \to R^n$ *принадлежит классу* $f \in Q_K^{s,\alpha}(D)$, если

1) $f \in W_{n,loc}^1(D)$ — непрерывное, открытое, изолированное отображение, якобиан отображения $J(x, f) > 0$ почти всюду в D;

2) существует постоянная $K > 0$ такая, что при фиксированных s, α, $\frac{1}{n-1} < s < \infty$, $\alpha \in R$, интеграл

$$I_{s,\alpha}(f, D) = \left(\int\limits_D \lambda^s(x, f) r^\alpha(x, \partial D) \frac{dx}{(1 + |x|^2)^n} \right)^{1/s} \leq K,$$

где $\lambda(x, f) = \dfrac{|\nabla f|^n}{J(x, f)}$, $r(x, \partial D)$ — евклидово расстояние от точки x до границы ∂D области D.

Назовем отображение $f\colon D \to R^n$ отображением с (s,α)-усредненной характеристикой ($f \in Q^{s,\alpha}(D)$), если $f \in Q_K^{s,\alpha}(D)$ при каком-либо конечном $K > 1$. Известно [1], что $Q^{s,\alpha} \not\subset BL^{p,\alpha}$ при $p < n$, $s < \frac{p}{n-p}$.

Определение 2. Функцию $k(t)\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ будем называть*ядром*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $k(t)$ непрерывна, не возрастает и $\lim\limits_{t\to 0+} k(t) = \infty$;

2) $\int\limits_0 k(t)t^{n-1}\,dt < \infty$.

Определение 3. Будем говорить, что *отображение $f\colon D \to R^n$ принадлежит классу $f \in Q_K^{s,\alpha}(k,D)$*, если существует постоянная $K > 1$ такая, что при фиксированных s, α, $1 < s < \infty$, $\alpha \in R$, интеграл

$$I_{s,\alpha}(f,k,D) = \left(\int\limits_D \lambda^s(x,f)r^\alpha(x,\partial D)k(|x-y|)\frac{dx}{(1+|x|^2)^n}\right)^{1/s} \le K$$

для всех $y \in \bar{D}$, где ядро $k(t)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0 (k(t))^{\frac{1}{s+1}}\,t^{\frac{n}{s+1}+\bar{\alpha}-1}\,dt = +\infty, \bar{\alpha} = \begin{cases} \alpha, \alpha \ge 0 \\ 0, \alpha < 0 \end{cases}.$$

Будем говорить, что *отображение $f\colon D \to R^n$ принадлежит классу* $f \in Q^{s,\alpha}(k,D)$, если $f \in Q_K^{s,\alpha}(k,D)$ при каком-либо конечном K.

Различные соотношения между классами $f \in Q_K^{s,\alpha}(k,D)$ и классами отображений с ограниченными интегралами Дирихле и с ограниченным потенциалом градиента см. в [1].

Мы опираемся на следующее утверждение, представляющее собой модификацию хорошо известного неравенства [2].

Теорема 1. *Пусть $f \in Q^{s,\alpha}(k,B^n)$, $s > (n-1)\left(1+\frac{\bar{\alpha}}{\gamma}\right)$, $0 < \gamma < 1$, и пусть S_r — семейство концентрических сфер с центром в точке $x_0 \in \in B^n$ и радиуса r, $0 \le r_1 \le r \le r_2 < \frac{1}{2}$. Тогда выполняется неравенство*

$$\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\omega^{ns}(f,S'_r)k(r)}{r^{s+1-n+\bar{\alpha}}}\right)^{\frac{1}{s+1}} dr\right)^{s+1} \le$$

$$\le C \int\limits_{B^n_{r_2}(x_0)} \lambda^s(x,f)r^\alpha(x,\partial B^n)k(|x-x_0|)\,d\sigma_x,$$

где $\omega(f,S'_r)$ – колебание отображения f на множестве $S'_r = S_r \cap B^n$, C — постоянная, не зависящая от f.

Доказательство. Используя лемму 2 [3] и включение $Q^{p/(n-p)} \subset$ $\subset BL^p$, $p < n$ [6], будем иметь

$$I = \int\limits_{r_1}^{r_2} \omega^{\frac{ns}{s+1}}(f, S_r) r^q k^{\frac{1}{s+1}}(r)\, dr \le$$

$$\le C \int\limits_{B^n_{r_2}(x_0)} \lambda^{\frac{s}{s+1}}(x,f) r^{\alpha}(x, \partial B^n) k^{\frac{1}{s+1}}(|x-x_0|) J^{\frac{s}{s+1}}(x,f)\, d\sigma_x,$$

где $q = 1 + \bar{\alpha} - n/(s+1)$, C — постоянная, не зависящая от f.

Применяя к интегралу, стоящему в правой части этого неравенства, неравенство Гельдера с показателями $p = s+1$, $q = \frac{s+1}{s}$, получим $I \le$ $\le C V^k_{r_2}(f, x_0)$, где

$$V^k_{r_2}(f, x_0) = \int\limits_{B^n_{r_2}(x_0)} \lambda^s(x,f) r^{\alpha}(x, \partial B^n) k(|x-x_0|)\, d\sigma_x.$$

Следствие 1. *В условиях и обозначениях теоремы 1 для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\bar{r} \in [r_1, r_2]$ *такое, что*

$$\omega^{\frac{ns}{s+1}}(f, S'_{\bar{r}}) \int\limits_{r_1}^{r_2} k^{\frac{1}{s+1}}(r) r^q\, dr \le (C+\varepsilon) V^k_{r_2}(f, x_0),$$

где $q = 1 - \frac{n}{s+1} + \bar{\alpha}$.

Следующая теорема обобщает аналогичные результаты для квазиконформных отображений [4, 17.13] и для отображений класса $L^1_n(D)$ [5].

Теорема 2. *Пусть ядро* $k(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0 k(t) t^{n+\alpha-s-1} dt = \infty, \qquad (1)$$

$s > (n-1)(1+\alpha)$, $\alpha \ge 0$. *Если* f *— гомеоморфное отображение класса* $Q^{s,\alpha}(k, B^n)$ *шара* B^n *на область* $D \subset R^n$, *локально связную в каждой точке предельного множества* $C(f,b)$, $b \in \partial B^n$, *то существует* $\lim\limits_{x \to b} f(x)$.

Доказательство. Предположим, наоборот, что область D локально связна в двух различных точках $b_1, b_2 \in C(f,b)$. Выберем шаровые окрестности U_1, U_2 точек b_1 и b_2 соответственно такие, что $r(U_1, U_2) =$ $= d > 0$.

По определению предельного множества $C(f,b)$ существуют последовательности точек $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ такие, что $x_i, y_i \in B^n$, $x_i \to b_1$, $y_i \to b_2$ и $f(x_i) \to b_1$, $f(y_i) \to b_2$. В силу локальной связности области D в точке $b_1 \in C(f,b)$ найдется окрестность U_1', $U_1' \subset U_1$ точки b_1 такая, что любые две точки из U_1' можно соединить связным множеством $\gamma \subset U_1$. Зафиксируем некоторую точку $x_0' \in U_1'$. Тогда для достаточно больших номеров k точки $x_0', f(x_k)$ можно соединить связным множеством γ_k', целиком лежащим в U_1'. Аналогично, для точки $b_2 \in C(f,b)$ найдется связное множество γ_k'', $\gamma_k'' \subset U_2'$. Тогда будем иметь, что

$$r(\gamma_k', \gamma_k'') \geq d > 0. \tag{2}$$

Рассмотрим семейство концентрических сфер $\{S_r\}$ с центром в точке $b \in \partial B^n$ и радиуса r, $\sup(|x_k - b|, |y_k - b|) = r_1 \leq r \leq r_2 = \sup(|x_0 - b|, |y_0 - b|)$, где $x_0 = f^{-1}(x_0')$, $y_0 = f^{-1}(y_0')$. Легко видеть, что для любого $r \in$ $\in [r_1, r_2]$ множество $S_r' = S_r \cap B^n$ пересекает связные множества $f^{-1}(\gamma_k')$, $f^{-1}(\gamma_k'')$. Отсюда, в силу условия (2) будем иметь, что $\omega(f, S_r') \geq d > 0$, а учитывая (1) получаем, что

$$\int_0^{r_2} \frac{\omega^s(f, S_r)k(r)}{r^{s+1-n+\bar{\alpha}}} dr \geq d \int_0^{r_2} k(r) r^{n+\alpha-s-1} dr = \infty.$$

С другой стороны, применяя следствие 1, будем иметь что

$$\int_0^{r_2} \frac{\omega^s(f, S_r')k(r)}{r^{s+1-n+\bar{\alpha}}} dr \leq C \int\limits_{B^n_{r_2}(b)} \lambda^s(x,f) r^\alpha(x, \partial B^n) k(|x - x_0|)\, dx < \infty.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 2. *Если в условиях и обозначениях теоремы 2 f — гомеоморфное отображение класса $Q^{s,\alpha}(k, B^n)$ шара B^n на область $D \subset R^n$, локально связную на границе, тогда существует непрерывное продолжение $\bar{f} \colon \bar{B}^n \to \bar{D}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малютина А. Н.* Классы отображений с ограниченным в среднем искажением // Вестн. Том. гос. ун-та. 2000. № 269. С. 51–55.

2. *Овчинников И. С., Суворов Г. Д.* Преобразования интеграла Дирихле и пространственные отображения // Сиб. матем. журн. 1965. Т. 6, № 6. С. 1292–1314.

3. *Куфарев Б. П., Соколов Б. В.* О граничном соответствии при отображениях областей из R^n // ДАН СССР. 1978. Т. 243, № 3. С. 568–571.

4. *Vaisala J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Lect. Notes in Math. Vol. 229. Berlin : Springer-Verlag, 1971.

5. *Овчинников И. С.* Простые концы пространственных областей // Тр. Том. ун-та. 1966. Т. 189. С. 96–104.

6. *Малютина А. Н., Елизарова М. А.* О связи классов отображений с s-усредненной характеристикой с некоторыми классами пространственных отображений // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2010. № 4 (12). С. 18–31.

УДК 517.956.223

БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ ФУНКЦИИ

А. Н. Марковский (Краснодар, РФ)
mark@kubsu.ru

Доказывается полнота сдвигов фундаментальных решений бигармонического уравнения; приводится обобщение утверждения П. С. Новикова о разложении пространства $L_2(Q)$ в прямую сумму гармонического, бигармонического и новиковского подпространств. Предложен алгоритм задачи выделения бигармонической составляющей.

1. Рассмотрим однородное бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u(x) = 0,\ \Delta^2 = \Delta(\Delta)$$

в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей Ляпунова $S = \partial Q$, $S \in C^{1+\alpha}$,($\alpha > 0$), где Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$, представляющим собой декартовы координаты точек $(x_1, x_2, ..., x_n)$ евклидова n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, ($n \geqslant 2$).

Известно [1, 2], что фундаментальные решения бигармонического уравнения имеют вид:

а) в случае нечетных $n > 1$ и четных n, для которых $n > 4$,

$$E_{2,n}(x) = d_{2,n}\,|x|^{4-n}\,, \quad d_{2,n} = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{8(4-n)(2-n)}; \tag{1}$$

б) в случае четных n, $n \leqslant 4$,

$$E_{2,n}(x) = d_{2,n}\,|x|^{4-n}\ln|x|\,,\ d_{2,n} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} - 1}{8\Gamma(3-\frac{n}{2})(\pi)^{n/2}}. \tag{2}$$

2. Обозначим $G(Q)$ — подпространство гармонических в Q функций из $L_2(Q)$. Ниже приводится лемма П. С. Новикова разложения пространства $L_2(Q)$, данная в статье [3] для трехмерного случая. Общий случай ($n \geqslant 2$) приводится в работах [4, 5].

Лемма (П. С. Новиков). *Если Q — ограниченная область с границей Ляпунова $S = \partial Q$, то пространство $L_2(Q)$ имеет следующее разложение в прямую сумму:*

$$L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q),$$

где $G(Q)$ — подпространство гармонических в Q функций, а функция $h(x)$ принадлежит $N(Q)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_Q h(y) E_{1,n}(x-y)dy = 0, \quad x \in Q^+.$$

3. Обозначим

$$G_2(Q) \subset L_2(Q),$$

множество *строго* бигармонических функций, то есть функций, удовлетворяющих бигармоническому уравнению и не удовлетворяющих уравнению Лапласа в Q. Можно показать, что множество $G_2(Q)$ замкнуто в норме $L_2(Q)$ и, таким образом, является собственным подпространством $L_2(Q)$. Нетрудно видеть, что $G_2(Q) \subset N(Q)$.

Обозначим,

$$Q^+ := \mathbb{R}^n \backslash \overline{Q},$$

и рассмотрим ограниченную, отделенную от границы S последовательность точек

$$z^k \in Q^+ \ (Q), \quad k = 1, 2, ...,$$

удовлетворяющую условию единственности гармонических функций; будем называть такую последовательность *базисной*.

Обозначим

$$\gamma_{2,k}(x) = E_{2,n}(z^k - x), \quad x \in Q, \quad k = 1, 2, ...$$

Лемма 1. *Система функций $\gamma_{2,k}(x)$, $k = 1, 2, ...$, линейно независима и замкнута в подпространстве $G_2(Q)$, если последовательность $z^k \in \in Q^+$ является базисной.*

Полнота и линейная независимость системы $\gamma_{1,k}(x)$, $k = 1, 2, ...$, в гармоническом подпространстве $G(Q)$, доказана в [4, 5].

Нетрудно показать, что множество единственности гармонических функций является множеством единственности бигармонических функций.

4. Разложение пространства $L_2(Q)$ в прямую сумму.

Теорема 1. *В условиях леммы Новикова*

$$L_2(Q) = G(Q) \oplus G_2(Q) \oplus N_2(Q),$$

где $G(Q)$ и $G_2(Q)$ — подпространства гармонических и бигармонических в Q функций, а функция $h(x)$ принадлежит $N_2(Q)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_Q h(y) E_{2,n}(x-y) dy = 0, \quad x \in Q^+.$$

5. Алгоритм определения бигармонической проекции. Пусть задана $f(x) \in L_2(Q)$ и требуется определить (приближенно) ее проекцию $g_2(x)$ на бигармоничекое подпространство $G_2(Q)$. По теореме $f(x) = g_1(x) + g_2(x) + h(x)$. Обозначим $g_2^N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \gamma_{2,k}(x)$, проекцию на подпространство, натянутое на $\gamma_{2,k}(x)$, $k = 1, 2, ..., N$, тогда $g_2(x) = g_2^N(x) + \rho_N(x)$, $\rho_N \perp \gamma_{2,k}$, $k = 1, 2, ..., N$, $\rho_N \to 0$ при $N \to \infty$ и

$$f(x) = g_1(x) + g_2^N(x) + \rho_N(x) + h(x).$$

Умножая последнее скалярно на $\gamma_{2,m}$, $m = 1, 2, ..., N$, имеем систему линейных уравнений с невырожденной матрицей Грама

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \left(\gamma_{2,k}, \gamma_{2,m}\right) = \left(f, \gamma_{2,m}\right), \quad m = 1, 2, ..., N.$$

Задача выделения гармоничекой составляющей функции рассматривалась в [6]; алгоритм метода базисных потенциалов для бигармонической задачи представлен в [7]. Определение гармонической и бигармонической проекций может быть использовано, например, в задаче идентификации цифровых изображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1988. 512 с.

2. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М. : Наука, 1974. 808 с.

3. *Новиков П. С.* Об единственности решения обратной задачи потенциала // ДАН СССР. 1938. Т. XVIII, № 3. С. 165–168.

4. *Лежнев А. В., Лежнев В. Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар : КубГУ, 2009. 111 с.

5. *Лежнев М. В.* Задачи и алгоритмы плоскопараллельных течений. Краснодар : КубГУ, 2009. 134 с.

6. *Лежнев В. Г.* Выделение гармонической составляющей // Численный анализ: теория, приложения, программы. М. : МГУ, 1999. С. 90–95.

7. *Лежнев В. Г., Марковский А. Н.* Метод базисных потенциалов для неоднородного бигармонического уравнения // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2008. № 8/1 (67). С. 127–139.

УДК 517.9

О ПРОБЛЕМЕ ШВАРЦА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ НА ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

С. Н. Мелихов (Ростов-на-Дону, Владикавказ РФ)
melih@math.rsu.ru
Л. В. Стефаненко (Ростов-на-Дону РФ)
stefanenko.lv@mail.ru

В середине 50-х годов прошлого века Л. Шварц поставил проблему существования линейного непрерывного правого обратного (ЛНПО) к дифференциальному оператору в частных производных конечного порядка с постоянными коэффициентами в пространствах бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(\Omega)$ и распределений $D'(\Omega)$ на открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Для выпуклых областей Ω она была решена в работе Р. Майзе, Б.А. Тейлора, Д. Фогта [1].

С начала 60-х годов прошлого века аналогичная проблема решалась для операторов свертки (в частности, дифференциальных операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами) в пространствах всех (ростков) функций, аналитических на множествах Q в $\mathbb{C}^N$. К настоящему времени эта задача решена для выпуклых областей Q и компактов Q [4, 5] в $\mathbb{C}^N$ и, более общим образом, для выпуклых локально замкнутых множеств $Q \subseteq \mathbb{C}^N$ [6].

В докладе речь идет о существовании ЛНПО к задаваемому некоторым аналитическим функционалом μ сюрьективному оператору свертки T_μ, действующему в пространствах ростков всех функций, аналитических на выпуклых подмножествах $Q \subseteq \mathbb{C}$ с непустой внутренностью, обладающих счетным базисом окрестностей из выпуклых областей. В случае, когда носителем функционала μ является точка и Q ограничено, указанная проблема решена в [7].

Далее Q — собственное выпуклое подмножество $\mathbb{C}$ с непустой внутренностью, обладающее базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей Q_n таких, что $Q_{n+1} \subseteq Q_n$, $n \in \mathbb{N}$. Для существования такого базиса необходимо и достаточно, чтобы множество $\omega := Q \cap (\partial Q)$ было компактно и любая опорная прямая к $\overline{Q}$ — замыканию Q — не пересекала одновременно множество ω и $(\partial Q) \setminus \omega$. При этом символ ∂Q обозначает границу Q. Пусть $A(Q_n)$ — пространство Фреше всех аналитических в Q_n

функций; $A(Q) := \mathrm{ind}_{n\to}A(Q_n)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на Q.

Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$. Базисом окрестностей множества $Q+K$ является последовательность $(Q_n+K)_{n\in\mathbb{N}}$. Положим $A(Q+K) := = \mathrm{ind}_{n\to}A(Q_n+K)$. Для линейного непрерывного на $A(K)$ функционала μ оператор свертки

$$T_\mu(f)(z) := \mu_t(f(t+z)),\ f \in A(Q+K),$$

линейно и непрерывно отображает $A(Q+K)$ в $A(Q)$. Пусть множество нулей $V(\hat{\mu})$ функции $\hat{\mu}(z) := \mu_t(\exp(zt))$, $z \in \mathbb{C}$, бесконечно; $V(\hat{\mu}) := = \{z_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}, |z_j| \to \infty$ $(z_j \neq z_k,\ j \neq k)$. Через $A_{\hat{\mu}}$ обозначим множество всех предельных точек последовательности $\{z_j/|z_j| \,|\, j \in \mathbb{N}\}$.

Приведем сведения о некоторых характеристиках конформных отображений, связанных с выпуклыми областями и компактами. Далее $S := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. Для множества $M \subseteq \mathbb{C}$ символ H_M обозначает опорную функцию M: $H_M(z) := \sup\limits_{t\in M} \mathrm{Re}(tz)$, $z \in \mathbb{C}$.

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, φ — конформное отображение единичного круга $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ на G. Для $r \in (0,1)$ положим $G_r := \varphi(\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \le r\})$. Компакты G_r выпуклы. Через H_r обозначим опорную функцию G_r. Согласно [8] определена функция

$$D_G(z) := \lim_{r\to 1-0} \frac{H_G(z) - H_r(z)}{1-r} \in (0,+\infty],\ |z| = 1.$$

Пусть G — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, отличный от точки, ψ — конформное отображение $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 1\}$ на $\mathbb{C}\backslash G$ такое, что $\psi(\infty) = \infty$. Для $r > 1$ компакты $G_r := \mathbb{C}\backslash\psi(\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > r\})$ выпуклы. Пусть H_r — опорная функция G_r. Согласно [5] определена функция

$$D_G(z) := \lim_{r\to 1+0} \frac{H_r(z) - H_G(z)}{r-1} \in [0,+\infty),\ |z| = 1.$$

Введем множество опорных направлений, соответствующих опорным точкам из $\omega_0 := (\partial Q) \setminus \omega$:

$$S_0 := \{a \in S \,|\, \mathrm{Re}(wa) = H_Q(a) \ \text{для некоторого}\ w \in \omega_0\}.$$

Заметим, что множество S_0 открыто в S, если Q ограничено. Положим $S_\omega := S \setminus S_0$.

Основным результатом является

Теорема. *Пусть Q ограничено.*
(I) Если множество нулей $\hat{\mu}$ конечно или пусто, то оператор $T_{\hat{\mu}} : A(Q+K) \to A(Q)$ имеет ЛНПО.
(II) Пусть оператор $T_\mu : A(Q+K) \to A(Q)$ сюръективен и множество нулей $\hat{\mu}$ бесконечно. Следующие утверждения равносильны:

(i) $T_{\hat{\mu}} : A(Q+K) \to A(Q)$ имеет ЛНПО.

(ii) Функция $D_{\operatorname{int} Q}$ ограничена на каждом компактном подмножестве $A_{\hat{\mu}} \cap S_0$ и функция $1/D_{\overline{Q}}$ ограничена на некоторой окрестности множества $A_{\hat{\mu}} \cap S_\omega$ в S.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Meise R., Taylor B. A., Vogt D.* Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients that admit a continuous linear right inverse // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1990. Vol. 40. P. 619–655.

2. *Momm S.* Convolution equations on the analityc functions on convex domains in the plane // Bull. Sci. Math. 1994. Vol. 118. P. 259–270.

3. *Momm S.* A critical growth rate of the pluricomplex Green function // Duke Math. J. Vol. 72. 1993, P. 487–502.

4. *Melikhov S. N., Momm S.* Solutions operators for convolution equations on the germs of analytic functions on compact convex sets of $\mathbb{C}^N$ // Studia. Math. 1995. Vol. 117. P. 79–99.

5. *Мелихов С. Н., Момм З.* О линейном непрерывном правом обратном для оператора свертки на пространствах ростков аналитических функций на выпуклых компактах в $\mathbb{C}$ // Изв. вузов. Матем. 1997. № 5. С. 38–48.

6. *Melikhov S. N., Momm S.* Analytic solutions of convolution equations on convex sets with an obstacle in the boundary // Math. Scand. 2000. Vol. 86. P. 293–319.

7. *Мелихов С. Н.* Аналитические решения дифференциальных уравнений бесконечного порядка на выпуклых множествах с препятствием, открытым на границе // Исследования по комплексному анализу,теории операторов и математическому моделированию. Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004. С. 141–162.

8. *Momm S.* Convex univalent functions and continuos linear right inverses // J. Functional Analysis. 1992. Vol. 103. P. 85–103.

УДК 517.51+517.98

БАЗИСНОСТЬ ПО РИССУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ ТИПА УОЛША[1]

В. А. Миронов, П. А. Терехин (Саратов, РФ)

v.a.mironoff@gmail.com, terekhinpa@mail.ru

Дадим определение аффинных систем функций типа Уолша [1].

[1]Работа подготовлена в рамках выполнения проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014K). Второй автор также поддержан РФФИ (проект № 13-01-00102).

Пусть функция $f(x), x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f \in L^2(0,1), \qquad \int_0^1 f(x)d(x) = 0, \qquad f(x+1) = f(x).$$

Обозначим пространство таких функций $L_0^2 = L_0^2(0,1)$.

Определим в L_0^2 линейные операторы

$$W_0 f(x) = f(2x), \qquad W_1 f(x) = r(x) f(2x),$$

где $r(x)$ — периодическая функция Хаара – Радемахера – Уолша.

Пусть $\mathbb{A}$ — множество всех конечных наборов $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$, $k = 0, 1, \ldots$, состоящих из нулей и единиц: $a_\nu = 0$ или $1, 0 \le \nu \le k-1$. Длину такого набора α обозначим $|\alpha| = k$.

Воспользуемся взаимно однозначным соответствием между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством $\mathbb{A}$, определяемым бинарным разложением $n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu + 2^k$. Будем использовать указанное соответствие для замены индекса $x_\alpha = x(\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}) = x_n$.

Для каждого набора $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A}$ обозначим

$$W^\alpha = W_{\alpha_0} \ldots W_{\alpha_{k-1}}$$

произведение операторов (первым действует оператор $W_{\alpha_{k-1}}$, последним — W_{α_0}; при $k = 0$ пустое произведение полагаем равным тождественному оператору I).

Для любой функции $f \in L_0^2$ положим

$$f_\alpha(t) := W^\alpha f(t) = W_{\alpha_0} \ldots W_{\alpha_{k-1}} f(t)$$

$$= f(2^k t) r^{\alpha_{k-1}}(2^{k-1} t) \ldots r^{\alpha_0}(t) = f(2^k t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(t),$$

где $r_k(t) = r(2^k t), k = 0, 1, \ldots,$ — система Радемахера.

Семейство функций $\{W^\alpha f\}$ назовём *аффинной системой функций типа Уолша*, порожденной функцией $f \in L_0^2$, и будем обозначать $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ или $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ с учетом замены индекса.

Система функций $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется *биортогонально сопряженной* к системе $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, если:

$$(f_i, f_j^*) = \int_0^1 f_i(t) f_j(t) dt = \delta_i j, \qquad i, j \in \mathbb{N}.$$

Разложим функцию $f \in L_0^2$ в ряд Фурье – Уолша

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n w_n$$

и предположим, что f нормирована условием $x_1 = (f, w_1) = 1$.

По числовой последовательности коэффициентов Фурье – Уолша $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ построим новую числовую последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ следующим образом: пусть $y_1 = 1$ и все $\alpha \in \mathbb{A}$, $|\alpha| \geq 1$, определяются из рекуррентных соотношений

$$\sum_{\alpha=\beta\gamma} x_\beta y_\gamma = \sum_{\nu=0}^{k} x(\alpha_0, \ldots, \alpha_{\nu-1}) y(\alpha_\nu, \ldots, \alpha_{k-1}) = 0,$$

где набор $\alpha\beta = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{l-1})$ представляет собой конкатенацию наборов $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$ и $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_{l-1})$.

Теорема 1 [2]. *Семейство функций*

$$f_n^* = f_\alpha^* = \sum_{\alpha=\beta\gamma} y_\gamma w_\beta = \sum_{\nu=0}^{k} y(\alpha_0, \ldots, \alpha_{\nu-1}) w(\alpha_\nu, \ldots, \alpha_{k-1}) \tag{1}$$

является биортогонально сопряженной системой к аффинной системе функций типа Уолша $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Представление (1) показывает, что функции f_n^* биортогонально сопряженной системы являются полиномами порядка n по системе Уолша.

Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — тригонометрическая аффинная система функций типа Уолша, порожденная функцией

$$f(t) = \frac{\pi}{2} \sin(2\pi t).$$

Теорема 2 [3]. *Тригонометрическая аффинная система функций типа Уолша* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *образует базис Рисса в пространстве* L_0^2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терехин П. А.* Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 1. С. 395–400.

2. *Миронов В. А., Терехин П. А.* Минимальность аффинных систем функций типа Уолша // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 42–44.

3. *Миронов В. А., Терехин П. А.* Тригонометрическая аффинная система функций типа Уолша // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17.

УДК 517.982.4

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ТОРЕ

В. С. Мокейчев, А. М. Сидоров (Казань, РФ)
Valery.Mokeychev@kpfu.ru, Anatoly.Sidorov@kpfu.ru

Пусть $\varphi = \{\varphi_k, k \in T\}$, где T счётное множество, — система элементов, имеющая в некотором гильбертовом пространстве H биортогональную систему $\varphi^* = \{\varphi_k^*, k \in T\}$.

В [1–3] построено полное топологическое векторное пространство D_φ', в котором сходятся ряды $\sum\limits_{k\in T} a_k\varphi_k$, где все a_k либо числа, либо векторы одной конечной размерности, либо матрицы одной конечной размерности. Элементы D_φ' называются φ-распределениями.

Для $u \in D_\varphi'$ числа $u_k = \overline{u(\varphi_k^*)}$, $k \in T$, называются коэффициентами Фурье по системе φ-распределения u. Было показано, что D_φ' — наибольшее пространство объектов. разложенных в ряд Фурье по системе φ.

Если $\varphi = \{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp(ik \bullet x), k = (k_1, \cdots, k_n) \in Z^n\}$, где $ik \bullet x = ik_1x_1 + \cdots + ik_nx_n, x \in R^n$, то φ-распределения называются 2π-периодическими распределениями на 2π-торе. Пространство всех таких распределений обозначим через $D_\varphi'(2\pi)$.

Пусть X — полное топологическое векторное пространство, $S(x, ik)$ — матрицы одной конечной размерности, элементы которых измеримые функции, $k \in Z^n$, $x \in R^n$. Пусть $D(A)$ — множество всех $u = \sum\limits_{k\in Z^n} u_k \exp(ik \bullet x) \in D_\varphi'(2\pi)$, для которых сходятся в X ряды $\sum\limits_{k\in Z^n} S(x, ik)u_k \exp(ik \bullet x) =: Au$.

Оператор $A : D(A) \to X$ называется псевдодифференциальным оператором, а уравнение $Au = f$, $f = X$ — псевдодифференциальным уравнением на 2π-торе. В работе рассмотрена разрешимость этого уравнения для $X = L^2(\Omega)$, $\Omega = (-\pi, \pi)^n$ и некоторых других пространств X.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мокейчев В. С., Мокейчев А. В.* Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. 1// Изв. вузов. Матем. 1999. № 1. С.25–35.

2. *Мокейчев В. С.* О разложении в ряды по заданной системе элементов // Исследования по прикладной математике. Казань : Изд-во КГУ, 2011. Вып. 27. С. 144–152.

3. *Mokeichev V. S., Sidorov A. M.* On an expansion in the series by given system of elements //Исследования по прикладной математике и информатике. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2004. Вып. 25. С. 163–167.

УДК 517.984

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ[1]

Е. В. Назарова (Москва, РФ), В. А. Халова (Саратов, РФ)
nazarovi@inbox.ru, HalovaVA@info.sgu.ru

В пространстве $L_2[0,1]$ рассматривается интегральный оператор вида

$$Af = \int\limits_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt + \alpha\int\limits_0^{x} A(x,t)f(t)\,dt, \qquad x\in[0,1], \qquad (1)$$

где $\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha^2 \neq 1$. На ядро $A(x,t)$ наложены следующие ограничения: $A(x,x)=1$, $\dfrac{\partial A(x,t)}{\partial x}\Big|_{t=x} = 0$.

Исследуется равносходимость разложений Фурье произвольной функции $f(x)\in L[0,1]$ по собственным и присоединенным функциям оператора (1) и линейной комбинации функций $f(x)$ и $f(1-x)$ по обычной тригонометрической системе.

Оператор (1) является представителем класса операторов, допускающих разрывы первого рода ядра на линиях $t=x$ и $t=1-x$. Другим важным достоинством оператора (1) является то, что в условиях получаемой теоремы равносходимости не требуется проверка трудно проверяемых условий регулярности по Биркгофу линейных форм в естественных граничных условиях [1].

Для исследования равносходимости применлся метод, разработанный А. П. Хромовым и базирующийся на методе контурного интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра.

Интегральный оператор (1) является частным случаем оператора, исследуемого в работе [2], на ядро и производные которого наложены ограничения $\dfrac{\partial^j A(x,t)}{\partial x^j}\Big|_{t=x} = \delta_{j,n-1}$, $j=0,\ldots,n$, δ_{ij} — символ Кронекера. Все доказательства и рассуждения в работе [2] проведены для случая четного n.

В данной работе теорема равносходимости получена для случая нечетного $n=1$ при $\alpha\neq 0$ (случай $\alpha=0$ рассмотрен в [3]).

Теорема. *Пусть ядро оператора A непрерывно дифференцируемо один раз по x и один раз по t при $0\le t\le x\le 1$, выполняются условия:*

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 13-01-00238).

а) $\dfrac{\partial}{\partial x}A(x,t)\Big|_{t=x} = 0$*; б)* $A(x,x) \equiv 1$*; в)* $\alpha^2 - 1 \neq 0$*. Тогда для любой* $f(x) \in L[0,1]$ *и любого* $\delta \in (0, 1/2)$ *имеет место соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\delta\le x\le 1-\delta} \left| S_r(f,x) - \sigma_{r|\sqrt{\alpha^2-1}|}(\Phi, x) \right| = 0,$$

где $\Phi(x) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} f(x) - \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} f(1-x)$*,* $S_r(f,x)$ *— частичная сумма ряда Фурье функции* $f(x)$ *по собственным и присоединенным функциям оператора* A *для тех характеристических чисел* λ_k*, для которых* $|\lambda_k| < r$*,* $\sigma_{r|\sqrt{\alpha^2-1}|}(\Phi, x)$ *— частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции* $\Phi(x)$ *для тех номеров* k*, для которых* $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} 2k\pi < r$*,* r *таково, что* $\{\lambda \in C \setminus |\lambda| = r,\ 0 \le \arg\lambda \le 2\pi\} \subset S_{\delta_0}$*.*

Здесь S_{δ_0} — область, получающаяся после удаления из λ-плоскости нулей некоторых функций вместе с их δ_0-окрестностями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

2. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

3. *Хромов А. П.* Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: сб. статей, посвящ. 70-летию П. Л. Ульянова. М. : Изд-во АФЦ, 1999. С. 255–266.

УДК 517.54

ОБОБЩЕННЫЕ РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ И УНИФОРМИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ТОРОВ[1]

С. Р. Насыров (Казань, РФ)
snasyrov@kpfu.ru

1. Поверхности рода нуль. В [1] нами был предложен приближенный метод нахождения полинома, униформизирующего заданную риманову поверхность S_1 над сферой Римана. Суть его состоит в том, что рассматривается гладкое однопараметрическое семейство $S(t)$, $1 \le t \le 1$, n-листных компактных римановых поверхностей рода нуль, которые имеют над бесконечно удаленной точкой точку ветвления порядка $(n-1)$ такое, что: 1) для поверхности $S(0)$ известен униформизирующий ее полином P_0; 2) $S(1) = S_1$; 3) кратности точек ветвления, расположенных

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00351).

над конечной частью плоскости, равны заданным натуральным числам m_j, $1 \le j \le N$, где N и m_j не зависят от t (следовательно они определяются однозначно по поверхности S_1). Такое семейство может быть построено чисто топологическими методами.

Из условия 3) следует, что полиномы $P_t(z) = P(z,t)$, униформизирующие $S(t)$, имеют вид

$$P_t(z) = n\int_0^z \prod_{l=1}^{N-1} (\xi - a_l(t))^{m_l} d\xi + P(0,t), \tag{1}$$

где $a_l(t)$ — их критические точки. В силу 1), мы можем определить критические точки полинома P_0; таким образом, можно считать, что значения

$$a_l(0) = a_l^0 \tag{2}$$

нам известны.

Отметим, что хотя $a_l(t)$, $0 < t \le 1$, неизвестны, в силу того, что поверхности $S(t)$ заданы, мы знаем проекции их точек ветвления на плоскость, т. е. зависимости $A_l(t) = P_t(a_j(t))$. В [1] выведена система дифференциальных уравнений для определения $a_l(t)$ по заданным $A_l(t)$. Без ограничения общности можно считать, что одна проекция одной из точек ветвления неподвижна, скажем, $A_{N-1}(t) = 0$ и $a_{N-1}(t) = 0$; этого легко добиться сдвигами. Таким образом, в (5) имеем $P(0,t) = 0$.

Теорема 1 [1]. *Функции $a_l(t)$, $0 \le t \le 1$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{n\dot{a}_l}{a_l} = \frac{H_l^{(m_l)}(a_l)}{m_l!}\dot{A}_l + \sum_{k=1, k\ne l}^{N-2} \frac{G_{kl}^{(m_k-1)}(a_k)}{(m_k-1)!}\dot{A}_k, \quad 1 \le l \le N-2, \tag{3}$$

где

$$H_l(x) = \frac{1}{x\prod_{j=1, j\ne l}^{N-1}(x-a_j)^{m_j}}, \quad G_{kl}(x) = \frac{H_k(x)}{x-a_l}.$$

Как обычно, точка сверху означает дифференцирование по параметру t.

Из теоремы 1 следует, что для определения зависимостей $a_l(t)$ достаточно решить задачу Коши для системы (3) с начальными условиями (2). Значения $a_l(1)$ дадут критические точки полинома вида (1), униформизирующего S_1.

2. Поверхности рода один. Случай простых точек ветвления. Аналогичная задача может быть поставлена для римановых поверхностей рода один (комплексных торов). Как и в случае поверхностей рода нуль, будем рассматривать семейство n-листных римановых поверхностей $S(t)$ над сферой, имеющих точку ветвления максимального порядка $(n-1)$ над бесконечно удаленной точкой. Это семейство униформизируется эллиптическими функциями $f(z,t)$. Можно считать, что прообраз точки ветвления максимального порядка совпадает с началом координат и одна из точек ветвления располагается над началом координат; ее прообраз ниже обозначен через a_0.

Сначала опишем случай, когда остальные точки ветвления, за исключением описанной выше, — простые. Полученные результаты анонсированы в [2]. Функции $f(z,t)$ можно представить в виде

$$f(z,t) = c(t) \int_{a_0(t)}^{z} \frac{\prod\limits_{l=0}^{n} \sigma(\xi - a_l(t))}{\sigma^{n+1}(\xi)}\, d\xi, \tag{4}$$

где точки $a_0(t)$ попарно различны и $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(t) = 0$. Здесь $\sigma(z)$ — σ-функция Вейерштрасса с периодами ω_1 и ω_2, которые зависят от параметра t. Применяя линейное преобразование в плоскости z, мы можем добиться, чтобы один из периодов, скажем, ω_1 не зависел от параметра t. Для простоты будем считать, что $\omega_1 \equiv 1$.

При выводе системы дифференциальных уравнений для определения параметров в (4) нам потребуется выражение для частной производной функции $\ln\sigma(z) = \ln\sigma(z;\omega_1,\omega_2)$ по периоду ω_2. Для полноты картины приведем также выражение для производной по ω_1, причем для произвольных периодов ω_1 и ω_2. При этом, для простоты обозначений, как это принято в теории эллиптических функций, мы не будем указывать явно их зависимость от периодов ω_1 и ω_2.

Теорема 2. *Имеют место равенства*

$$\frac{\partial \ln\sigma(z)}{\partial\omega_1} = -\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{2}\,\omega_2[\mathfrak{P}(z) - (\zeta(z))^2] + \eta_2(z\zeta(z)-1) + \omega_2\frac{g_2}{24}\,z^2\right],$$

$$\frac{\partial \ln\sigma(z)}{\partial\omega_2} = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{2}\,\omega_1[\mathfrak{P}(z) - (\zeta(z))^2] + \eta_1(z\zeta(z)-1) - \omega_1\frac{g_2}{24}\,z^2\right].$$

Здесь $\mathfrak{P}(z)$ и $\zeta(z)$ — $\mathfrak{P}$- и ζ-функции Вейерштрасса, $\eta_k = 2\zeta(\omega_k)/2$, $k = 1,\, 2$, $g_2 = 60\sum' \frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^4}$ — инвариант Вейерштрасса.

Теорема 3 [2]. *Критические точки $a_l(t)$, сомножитель $c(t)$ в (4) и период $\omega_2(t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:*

$$\dot{a}_l = \sum_{k\neq l} \frac{\dot{A}_k}{D_k}\left[\zeta(a_k - a_l) - \zeta(a_k) + \eta_1 a_l\right] -$$

$$-\frac{\dot{A}_l}{D_l}\left(\sum_{s\neq l}\zeta(a_l-a_s)-\eta_1 a_l-n\zeta(a_l)\right),\quad 0\le l\le n,$$

$$\dot{c}/c=-\sum_{j=0}^{n}\Big[\zeta(a_j)\dot{a}_j+\dot{\omega}_2\frac{\partial\ln\sigma(a_j)}{\partial\omega_2}\Big]+n\sum_{k=1}^{n}\frac{\dot{A}_k}{D_k}\,[\mathfrak{P}(a_k)+\eta_1],\qquad(5)$$

$$\dot{\omega}_2(t)=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\frac{\dot{A}_j}{D_j},\quad \textit{где}\quad D_k=c\,\frac{\prod\limits_{j=0,j\neq k}^{n}\sigma(a_k-a_j)}{\sigma^{n+1}(a_k)}\,.$$

Рассмотрены численные примеры, показывающие, что путем решения задачи Коши для системы (5), описанной в теореме 3, можно быстро и с очень хорошей точностью определять параметры функций, униформизирующих заданные комплексные торы над сферой Римана с простыми точками ветвления.

3. Поверхности рода один. Случай кратных точек ветвления. Теперь рассмотрим случай точек ветвления произвольной кратности. Вместо (4) имеем следующее представление для униформизирующих функций:

$$f(z,t)=c(t)\int_{\alpha_0(t)}^{z}\frac{\prod\limits_{j=0}^{N}\sigma(\xi-\alpha_j(t))^{m_j}}{\sigma^{n+1}(\xi)}\,d\xi,\qquad(6)$$

где $\sum\limits_{j=0}^{N}m_j=n+1$.

Как и в случае поверхностей рода нуль [1], можно вывести систему дифференциальных уравнений для этого случая, осуществляя предельный в системе (5) для параметров с простыми точками ветвления. Для этого рассмотрим вместо (6) представление (4) и осуществим в нем предельный переход при

$$a_0,\dots,a_{m_1-1}\to\alpha_0;\ a_{m_1},\dots,a_{m_1+m_2-1}\to\alpha_1;\dots$$

$$\dots;a_{n-m_N+1},\dots,a_n\to\alpha_N.$$

Точно такой же предельный переход делаем в правых частях системы (5), считая, что $A_0=\dots=A_{m_1-1}$, $A_{m_1}=\dots=A_{m_1+m_2-1},\dots$ $\dots,A_{n-m_N+1}=\dots=A_n$. В силу теоремы 3 параметры в представлении (4) удовлетворяют (5). Заметим, что специфика системы (5) такова, что в ее правые части входят выражения, которые можно выразить через обобщенные разделенные разности вида

$$\Delta_k(\varphi;\sigma;x_1,\ldots,x_{k+1}) := \sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi(x_j)}{\prod_{s\neq j}\sigma(x_j-x_s)}$$

и их частные производные; здесь $x_1,\ldots,x_{k+1}$ совпадают с наборами тех точек a_k, которые неограниченно сближаются при описанном выше предельном переходе, в качестве φ выступают вполне определенные функции, определяемые системой (5). В связи с этим, представляет интерес изучить вопрос о пределах обобщенных разделенных разностей

$$\Delta_k(\varphi;g;x_1,\ldots,x_{k+1}) := \sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi(x_j)}{\prod_{s\neq j} g(x_j-x_s)},$$

при $x_1,\ x_2,\ldots,x_{k+1} \to x$, где функция g достаточно произвольна. Отметим, что в случае $g(x)=x$ обобщенные разделенные разности $\Delta_k(\varphi;g;x_1,\ldots,x_{k+1})$ совпадают с обычными и для C^k-гладких функций φ предел их при $x_1,\ x_2,\ldots,x_{k+1}\to x$ равен $\varphi^k(x)/k!$.

Теорема 4. *Пусть $\varphi(\tau)$ — некоторая функция, определенная и k раз непрерывно дифференцируемая в окрестности точки x. Пусть $g(\tau)$ — нечетная k раз непрерывно дифференцируемая в окрестности нуля функция, причем $g(\tau)\sim\tau$, $\tau\to 0$. Тогда обобщенные разделенные разности $\Delta_k(\varphi;g;x_1,\ldots,x_{k+1})$ при $x_1,\ldots,x_{k+1}\to x$, стремятся к*

$$\frac{1}{k!}\,\varphi^{(k,g)}(x), \quad \textit{где} \quad \varphi^{(k,g)}(x) := \frac{d^k}{d\tau^k}\left(\frac{\tau^{k+1}\varphi(x+\tau)}{g(\tau)^{k+1}}\right)\Bigg|_{\tau=0}.$$

Если функции φ и g, к тому же, $(k+1)$ раз непрерывно дифференцируемы в окрестностях точки x и точки 0 соответственно, то предел частной производной $\partial\Delta_k(\varphi;g;x_1,\ldots,x_{k+1})/\partial x_1$ при $x_1,\ldots,x_{k+1}\to x$ равен

$$\frac{1}{(k+1)!}\,\varphi^{(k+1,g)}(x) + \frac{1}{(k-1)!}\,\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left(\frac{\tau^k(g'(\tau)-1)\varphi(x+\tau)}{g(\tau)^{k+2}}\right)\Bigg|_{\tau=0}.$$

Значения производных при $\tau=0$ понимаются как пределы этих производных при $\tau\to 0$.

Теорема 4 позволяет в достаточно компактном виде записать правые части искомой системы дифференциальных уравнений для определения параметров в (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Насыров С. Р.* Нахождение полинома, униформизирующего заданную компактную риманову поверхность // Матем. заметки. 2012. Т. 91(4). С. 597–607.

2. *Насыров С. Р.* Однопараметрические семейства многолистных функций и римановых поверхностей // Совр. методы теории функций и смежные проблемы : материалы междунар. конф. Воронеж. зим. матем. шк. (27 января – 2 февраля 2015 г.). Воронеж : Издат. дом ВГУ, 2015. С. 83–85.

УДК 517.988

ВАРИАНТЫ ДИСКРЕТНОЙ ФАЗОВОЙ ПРОБЛЕМЫ[1]

С. Я. Новиков (Самара, РФ)

nvks@samsu.ru

Решением дискретной фазовой проблемы занимаются в последнее десятилетие многие исследователи и научные группы. В работе [1] предпринята попытка установить связи между различными вариантами постановок и решений возникающих в этом направлении задач. Это предварительный вариант статьи и в нем остается много мест, требующих дополнительных уточнений.

Пусть $\mathbb{H}^M$ обозначает одно из пространств $\mathbb{R}^M$ или $\mathbb{C}^M$. Векторы $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_M)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_M)$ имеют, по определению, *одинаковые фазы*, если для всех $i = 1, \ldots, M$ имеем

$$\mathrm{ph}(a_i) = \mathrm{ph}(b_i).$$

Каждую из координат представляем в полярной форме $a_i = |a_i|\, e^{i\mathrm{ph}(a_i)}$. Число 0 не имеет фазы, поэтому, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют одинаковые фазы, то $a_i = 0$ тогда и только тогда, когда $b_i = 0$.

Рассматриваются два подхода к решению фазовой проблемы.

Определение 1. Пусть $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ — набор векторов в $\mathbb{H}^M$ (соответственно, $\{P_i\}_{i=1}^N$ — набор ортопроекторов в $\mathbb{H}^M$) и пусть для любых $x, y \in \mathbb{H}^M$ выполняются равенства:

$$|\langle x, \varphi_i\rangle| = |\langle y, \varphi_i\rangle|\,,\ i = 1, \ldots, N.$$

(соответственно, $\|P_i x\| = \|P_i y\|,\ i = 1, \ldots, N$).

1. Если отсюда следует существование числа θ с $|\theta| = 1$ такого, что x и θy имеют одинаковые фазы, то говорят, что Φ *восстанавливает фазы (phase retrieval)* (соответственно, $\{P_i\}_{i=1}^N$ *восстанавливает фазы*).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания, проект № 204

2. Если отсюда следует существование числа θ с $|\theta| = 1$ такого, что $x = \theta y$, то говорят, что Φ *восстанавливает без фаз (phaseless reconstruction).*

Если Φ восстанавливает фазы, то $\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^N = \mathbb{H}^M$, то есть Φ является фреймом пространства $\mathbb{H}^M$. Если предположить противное, то найдется $0 \neq x \in \mathbb{H}^M$ такой, что

$$\langle x, \varphi_i\rangle = \langle y, \varphi_i\rangle = 0, \ i = 1, \dots, N.$$

и фазы векторов не совпадают.

Теорема 1 [2, 3]. *Пусть набор векторов $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{H}^M$ восстанавливает без фаз. Тогда Φ обладает свойством альтернативной полноты. В пространстве $\mathbb{R}^M$ восстановление без фаз и альтернативная полнота эквивалентны.*

Определение 2. Набор векторов $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N$ в $\mathbb{H}^M$ называется *альтернативно полным* (АП) если для любого $S \subseteq \{1, \dots, N\}$ либо $\{\varphi_n\}_{n\in S}$, либо $\{\varphi_n\}_{n\in S^c}$ полно в $\mathbb{H}^M$.

Теорема 2 [1]. *Пусть набор проекторов $\{P_i\}_{n=1}^N$ на подпространства $\{W_i\}_{n=1}^N$ восстанавливает фазы. Тогда семейство $\{\varphi_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{n_i,d_i}$, состоящее из ортонормированных базисов $\{\varphi_{i,j}\}_{j=1}^{d_i}$ подпространств W_i, обладает свойством альтернативной полноты.*

Итогом работы [1] является эквивалентность свойств восстановления фаз и восстановления без фаз как в $\mathbb{R}^M$, так и в $\mathbb{C}^M$.

Определение 3. Набор векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в $\mathbb{H}^M$ *слабо восстанавливает фазы*, если из равенств

$$|\langle x, \varphi_i\rangle| = |\langle y, \varphi_i\rangle|, \ i = 1, \dots, N$$

следует существование θ с $|\theta| = 1$ такого, что

$$\mathrm{ph}(x_i) = \theta \mathrm{ph}(y_i)$$

для всех $i = 1, \dots, M$ таких, что $x_i \neq 0 \neq y_i$.

В пространстве $\mathbb{R}^M$ построен пример набора векторов, который слабо восстанавливает фазы, и не восстанавливает фазы в смысле определения 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Botelho-Andrade S., Casazza P. G., Nguyen H. V., Tremain J. C.* Phase retrieval verses phaseless reconstruction. Available online: arxiv:1507.05815.

2. *Balan R., Casazza P., Edidin D.* On signal reconstruction without phase // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2006. Vol. 20. P. 345–356.

3. *Новиков С. Я.* Восстановление сигнала по модулям измерений // Проблемы передачи информации. 2015. Т. 51, вып. 4.

УДК 519.853

СЛУЧАЙ РЕДУКЦИИ ЗАДАЧИ О РАВНОМЕРНОЙ ОЦЕНКЕ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ШАРОМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Осипцев М. А., Дудов С. И. (Саратов, РФ)
Osipcevma@gmail.com, DudovSI@info.sgu.ru

Пусть D — заданное выпуклое тело из конечномерного пространства $\mathbb{R}^p$, а $n(x)$ — некоторая норма на $\mathbb{R}^p$. Рассматривается задача

$$\phi(x,r) \equiv h(D,\, Bn(x,r)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}. \tag{1}$$

Здесь $Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x-y) \leqslant r\}$ — шар радиуса r с центром в точке x,

$$h(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} n(a-b),\, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} n(a-b)\}$$

— расстояние Хаусдорфа между множествами A и B, индуцированное нормой $n(\cdot)$

Задача (1) своими решениями при значениях r из определенных диапазонов выражает решения известных задач по шаровым оценкам выпуклого тела [1, 2].

Целевую функцию задачи (1) можно представить в виде (см. [3])

$$h(D,Bn(x,r) = \max\{R(x) - r, P(x) + r\} \qquad (2),$$

где

$$R(x) = \max_{y\in D} n(x-y), \quad P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x),$$
$$\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}, \quad \rho_A(x) = \min_{y\in A} n(x-y).$$

Предположим, что шар используемой нормы является многогранником и тогда норма представима в виде

$$n(x) = \max_{i=\overline{1,m}} |\langle B_i,\, x\rangle|. \tag{3}$$

Будем считать, что и выпуклое тело D является многогранником, заданным в виде

$$D = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A_j,\, y\rangle \le a_j,\, j = \overline{1,\, l}\}, \tag{4}$$

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

Тогда множество $G(\alpha) = D + Bn(0_p, \alpha)$ также является многогранником. Используя (3)–(4) можно найти его представление в виде

$$G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_j,\, y\rangle \le d_j(\alpha),\, j = \overline{1,k}\},$$

причем нормали C_j к граничным гиперплоскостям многогранника $G(\alpha)$ при $\alpha > 0$ не зависят от α.

Без потери общности считаем далее, что $n^*(C_j) = 1,\ j = \overline{1,k}$, где $n^*(x) = \max\limits_{n(v)\leqslant 1} \langle v,\, x\rangle$ –полярная норма. Набор $\{C_j : j = \overline{1,k}\}$ содержит с себе наборы $\{B_i/n^*(B_i) : i = \overline{1,m}\}$, $\{A_i/n^*(A_i) : i = \overline{1,l}\}$, но может содержать и другие элементы.

Лемма. *Имеют место формулы*

$$R(x) = \max_{i=\overline{1,m}} \max\{\langle B_i,\, x\rangle - b_{i1},\, b_{i2} - \langle B_i,\, x\rangle\} \tag{5}$$

$$P(x) = \max_{j=\overline{1,k}} \{\langle C_j,\, x\rangle - c_j\}, \tag{6}$$

где $b_{i1} = \min\limits_{y\in D}\langle B_i,\, y\rangle$, $b_{i2} = \max\limits_{y\in D}\langle B_i,\, y\rangle$, $c_j = \max\limits_{y\in D}\langle C_j,\, y\rangle$.

Формулы (2), (5) и (6) позволяют записать задачу (1) в виде

$$\phi(x,\, r) = \max_{\substack{j=\overline{1,k}\\ i=\overline{1,m}}} \{\langle B_i,\, x\rangle - b_{i_1} - r,\, b_{i_2} - \langle B_i,\, x\rangle - r,\, \langle C_j,\, x\rangle - c_j + r\} \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}, \tag{7}$$

Используя (7) можно доказать, что справедлива

Теорема *Задача* (1) *эквивалентна задаче*

$$\begin{cases} z \to \min \\ \langle B_i,\, x\rangle - b_{i_1} - r \le z, \quad i = \overline{1,m}, \\ b_{i_2} - \langle B_i,\, x\rangle - r \le z, \quad i = \overline{1,m}, \\ \langle C_j,\, x\rangle - c_j + r \le z, \quad j = \overline{1,k} \end{cases} \tag{8}$$

При этом, если x^* — одно из решений задачи (1), *то* $\widehat{x^*} = (x^*,\, z^*) \in \mathbb{R}^{p+1}$, *где* $z^* = \phi(x^*,\, r)$ *— одно из решений* (8). *И наоборот, если* $\widehat{x^*} = (x^*,\, z^*)$ *— одно из решений задачи* (8), *то x^* — одно из решений задачи* (1), *а* $z^* = \phi(x^*,\, r)$ *– оптимальное значение целевой функции* $\phi(x, r)$.

В итоге мы можем предложить следующий подход к получению приближённого решения задачи (1). Следует аппроксимировать выпуклое тело многогранником, представив его в виде (4), а также аппроксимировать единичный шар нормы $n(\cdot)$, представив его в виде $Bn(0_p,\, 1) = \{x \in \mathbb{R}^p : \langle \pm B_i,\, x\rangle \le 1,\, i = \overline{1,m}\}$.

Отметим, наличие широкого спектра методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел (см., напр., обзор [4]). После этого остаётся решить задачу линейного программирования вида (8). Конечно при этом возникает вопрос об устойчивости решения задачи (1) и его чувствительности к погрешности приближения тела D и единичного шара нормы многогранниками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М. : Фазис, 2002.

2. *Дудов С.И.* Систематизация задач по шаровым оценкам выпуклого компакта // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 9. С. 99–120.

3.*Дудов С. И., Златорунская И. В.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 13–38.

4. *Бронштейн Е. М.* Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // СМФН. 2007. Т. 22. С. 5–37.

УДК 517.54

ОЦЕНКА ШВАРЦИАНА ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Н. А. Павлов (Владивосток, РФ)

npamcs@gmail.com

Пусть функция f голоморфна в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяет условию $|f(z)| < 1$ при $z \in U$. Точка z, $|z| = 1$, называется неподвижной граничной точкой функции f, если существует угловой предел $\angle \lim\limits_{\zeta \to z} f(\zeta) = z$. По лемме Жюлиа – Вольфа существование углового предела $f(z)$ в неподвижной граничной точке z влечет за собой существование угловой производной $f'(z)$ [1, с. 79–83]. В недавней статье [2, теорема 6] получена нижняя оценка $f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})$, зависящая от величины $\Phi(f(0))$. Здесь Φ есть дробно-линейный автоморфизм круга U, такой, что $\Phi(f(0)) \in (0, 1)$, $\Phi(e^{\pm i\theta}) = e^{\pm i\theta}$. В данной работе устанавливается точное неравенство, включающее произведение $f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})$ и производную Шварца, вычисленную в точке $z = 0$. Следующее утверждение получено методами теории потенциала [3].

Теорема. *Для любой голоморфной и однолистной в круге U функции f с неподвижными граничными точками $e^{\pm i\theta}$, $\theta \in (0, \pi)$ выполняется неравенство*

$$|S_f(0)| \le 6\left(1 - \frac{|f'(0)|^2}{(1 - |f(0)|^2)^2}\right) - 3\log|f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})| -$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00022).

$$- 3\log\frac{1-\Phi^2(f(0))}{1-2\Phi(f(0))\cos\theta+\Phi^2(f(0))}.$$

Равенство достигается в случае тождественного отображения.

Следствие. *Если функция f голоморфная и однолистная в круге U, $f(0)=0$, и точки $e^{\pm i\theta}$, $\theta\in(0,\pi)$, являются неподвижными граничными точками f, то*

$$|S_f(0)|\leq 6(1-|f'(0)|^2)-\frac{3}{2}\log(f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})).$$

Равенство достигается в случае тождественного отображения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pommerenke Ch.* Boundary behaviour of conformal maps. Berlin : Springer, 1992. 299 p.

2. *Frolova A. Levenshtein M. Shoikhet D. Vasil'ev A.* Boundary distortion estimates for holomorphic maps // Complex Analysis and Operator Theory. 2014. Vol. 8, iss. 5. P. 1129–1149.

3. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. Владивосток : Дальнаука, 2009. 401 с.

УДК 517.984

АППРОКСИМАЦИЯ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ВАРИАЦИЕЙ ЛОКАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Б. И. Пелешенко, Т. Н. Семиренко
(Днепропетровск, Украина)
dsaupelesh@mail.ru, semirenkot@mail.ru

В работе получено точное неравенство между наилучшим приближением простыми функциями в метриках $L_p(Q_0)$ и $E(Q_0)$ (E — симметричное пространство) функций f из квазилипшицевых пространств $\Lambda_E^{0,p}(Q_0)$ [1], определенных при помощи локальных приближений на подкубах разбиения куба $Q_0\in\mathbb{R}^m$.

Далее буквой $E(Q_0)$ обозначим симметричное пространство функций, определенных на m-измеримом единичном кубе $Q_0 = \{x\in\mathbb{R}^m : 0\leq x_i\leq 1, i=1,...,m\}$ и $\phi_E(\operatorname{mes}U)=\|\chi_U\|_E$, где χ_U — характеристическая функция измеримого по Лебегу множества $U\subseteq Q_0$.

Пусть через π обозначается укладка куба Q_0 конгруэнтными подкубами $\{Q_i\}$, каждые два из которых не имеют общих точек, и со сторонами, параллельными сторонам Q_0. Через $E_0(f,Q_i)_E$ обозначается наилучшее приближение функции $f \in E(Q_i)$ постоянной на подкубе Q_i в метрике пространства E. Для $1 \le p < \infty$ и функции $f \in \in E(Q_0)$ определяется $(0,p)$ — модуль непрерывности [1] $\Omega_{0,p}(f,\tau)_E = = \sup\limits_{\pi}\left\{\sum\limits_i \operatorname{mes} Q_i \dfrac{E_0^p(f,Q_i)_E}{\phi^p(\operatorname{mes} Q_i)}\right\}^{\frac{1}{p}}$, где верхняя грань взята по всем укладкам π куба Q_0 подкубами $\{Q_i\}$ равного объема, не превышающего τ^m.

Через $\Lambda_E^{0,p}(Q_0)$ обозначается квазилипшицево пространство функций $f \in E(Q_0)$, для которых $|f|_{0,p,E} = \sup\limits_{0<\tau\le 1} \Omega_{0,p}(f,\tau)_E < \infty$.

Пусть $n,k \in \mathbb{N}$, $0 \le k < n^m$, числа $l_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,\dots,n^m$ и такие, что в случае, когда $k > 0$, то $l_i > 1$ для $i = 1,\dots,k$, а $l_{k+1} = \dots = l_{n^m} = 1$. Если $k = 0$, то $l_i = 1$, $i = 1,\dots,n^m$.

Сначала разобъем куб Q_0 на n^m подкубов $\left\{Q_{x_i,\frac{1}{n}}\right\}$ объемами $\frac{1}{n^m}$ и со сторонами параллельными сторонам куба Q_0, а потом каждый из подкубов $Q_{x_i,\frac{1}{n}}$ $(i = 1,...,k)$ в случае $k > 0$ разобъем на $R_i = l_i^m$ $(i = 1,...,k)$ подкубов меньшего объема $\left\{Q_{x_{i,j},\frac{1}{nl_i}}\right\}_{j=1}^{R_i}$.

Обозначим $\tilde{E}_0\left(f,Q_0\right)_{L_p} = \inf\limits_{g\in P_0} \|f-g\|_{L_p(Q_0)}$, где нижняя грань взята в случае $k > 0$ по множеству P_0 простых функций

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{R_i} c_{ij}\chi_{Q_{ij}}(x) + \sum_{i=k+1}^{n^m} d_i\chi_{Q_i}(x)$$

и когда $k = 0$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n^m} d_i\chi_{Q_i}(x).$$

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$ *и симметричное пространство* E *такое, что* $E(Q_0) \subset L_p(Q_0)$ *(и* $\|f\|_{L_p(U)} \le \dfrac{(\operatorname{mes} U)^{\frac{1}{p}}}{\phi_E(\operatorname{mes} U)}\|f\|_{E(U)}$ *для любого измеримого по Лебегу множества* $U \subseteq Q_0$*), тогда*

$$\sup_{\substack{f\in\Lambda_E^{0,p}(Q_0),\\ |f|_{0,p,E}\neq 0}} \frac{\tilde{E}_0\left(f,Q_0\right)_{L_p}\phi_E\left(\operatorname{mes} Q_{i,\frac{1}{n}}\right)}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n^m} E_0^p\left(f,Q_{i,\frac{1}{n}}\right)_E\right\}^{\frac{1}{p}}\left(\operatorname{mes} Q_{i,\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}} = 1.$$

Замечание. Так как $\operatorname{mes} Q_{i,\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^m}$, то

$$\sup_{\substack{f\in\Lambda_E^{0,p}(Q_0),\\ |f|_{0,p,E}\neq 0}} n^{\frac{m}{p}}\phi_E\left(n^{-m}\right)\frac{\tilde{E}_0\left(f,Q_0\right)_{L_p}}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n^m} E_0^p\left(f,Q_{i,\frac{1}{n}}\right)_E\right\}^{\frac{1}{p}}} = 1.$$

Для формулировки следующего утверждения обозначим

$$\|f\|_{\Lambda_\infty^{0,E}(Q_0)} = \sup_{0<\tau\leq 1}\|\Omega_{0,\infty}\left(f,\tau\right)\|_E = \sup_\pi\left\|\sum_{\{Q_i\}} E_0\left(f,Q_i\right)_{L_\infty}\chi_{Q_i}(\tau)\right\|_E$$

.

Теорема 2. *Если* $\|f\|_{\Lambda_{L_\infty}^{0,E}(Q_0)} < \infty$, *то*

$$\sup_{\substack{f\in\Lambda_{L_\infty}^{0,E}(Q_0),\\ |f|_{0,\infty,E}\neq 0}}\frac{\tilde{E}_0\left(f,Q_0\right)_E}{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n^m} E_0\left(f,Q_{i,\frac{1}{n}}\right)_{L_\infty}\chi_{Q_{i,\frac{1}{n}}}(\tau)\right\|_E} = 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брудный Ю. А.* Пространства, определяемые с помощью локальных приближений // Тр. Моск. матем. о-ва. 1971. Т. 24. С. 69–132.

УДК 517.984

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ЯВНОГО РЕШЕНИЯ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н. Р. Перельман (Смоленск, РФ)
nataly@mannet.ru

Пусть T^+ — конечная односвязная область комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова L.

Среди краевых задач со сдвигом в классах аналитических функций важное место занимает *трехэлементная задача типа Карлемана* (кратко — задача $\boldsymbol{K}_3$): *найти все аналитические в области* T^+ *функции* $F(z)$ *класса* $A(T^+)\cap H(L)$, *удовлетворяющие на* $L = \partial T^+$ *условию*

$$F^+[\alpha(t)] = A(t)F^+(t) + B(t)\overline{F^+(t)} + h(t), \tag{1}$$

где $A(t), B(t), h(t)$ *— заданные на* L *функции класса* $H(L)$, $\alpha(t)$ *— прямой или обратный сдвиг контура* L, *удовлетворяющий условию Карлемана*

$$\alpha[\alpha(t)] = t,$$

причем $\alpha'(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \in H(L)$.

Несмотря на то, что задаче $\boldsymbol{K}_3$ были посвящено значительное число работ (см., например, [1] и имеющуюся там библиографию), до недавнего времени не были известны методы решения этой задачи в самом сложном так называемом*невырожденном случае*, то есть когда коэффициенты краевого условия (1) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$A(t)A[\alpha(t)] + \overline{B(t)}B[\alpha(t)] \equiv 1, \tag{2}$$

$$A[\alpha(t)]B(t) + \overline{A(t)}B[\alpha(t)] \equiv 0, \tag{3}$$

$$A[\alpha(t)]h(t) + B[\alpha(t)]\overline{h(t)} + h[\alpha(t)] \equiv 0, \tag{4}$$

Невырожденному случаю задачи.$\boldsymbol{K}_3$ характерно то, что она в этом случае не *редуцируется* к двухэлементной краевой задаче. Впервые идея общего метода решения задачи $\boldsymbol{K}_3$ в невырожденном случае и при прямом сдвиге контура была сформулирована К. М. Расуловым (см., например, [2]). С использованием данной идеи автором был подробно разработан метод решения задачи $\boldsymbol{K}_3$ в невырожденном случае для обратного сдвига контура.

Основная суть разработанного метода решения задачи $\boldsymbol{K}_3$ в невырожденном случае состоит в построении равносильной (в смысле разрешимости) краевой задаче $\boldsymbol{K}_3$ системы интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода. При этом существенным образом используется теория Ф. Д. Гахова краевой задачи Римана (задачи сопряжения) для аналитических функций и метод аналитического продолжения по симметрии относительно окружности.

Поскольку в общем случае система интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода не решается в замкнутой форме (в квадратурах), то и задача $\boldsymbol{K}_3$, вообще говоря, также не решается в квадратурах. Поэтому представляет интерес проблема установления частных случаев невырожденной задачи $\boldsymbol{K}_3$, допускающих эффективное решение.

В дальнейшем будем говорить, что *задача* $\boldsymbol{K}_3$ *решается в явном виде*, если ее общее решение удается построить, используя только формулы Ф. Д. Гахова для решения двухэлементной задачи Римана для аналитических функций, а также решая конечное число систем линейных алгебраических уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в явном виде (в квадратурах).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* T^+ *— единичный круг. Если в краевом условии* (1) *задачи* $\boldsymbol{K}_3$ *коэффициенты* $A(t), B(t), h(t)$ *являются рациональными функциями, удовлетворяющими условиям* (2)–(4), *функция обратного* *сдвига $\alpha(t)$ является дробно-линейной, то краевая задача $\boldsymbol{K}_3$ решается в явном виде.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М. : Наука, 1977. 448 с.

2. *Расулов К. М.* Трехэлементная односторонняя краевая задача со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге // Изв. СмолГУ. 2008. № 2. С. 94–104.

УДК 517.518.82

О СКОРОСТИ РОСТА МАКСИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПОЛИНОМАХ БЕРНШТЕЙНА, ВЗЯТЫХ ОТ СИММЕТРИЧНОГО МОДУЛЯ НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

М. А. Петросова (Москва, РФ)

petrosova05@mail.ru

Теория классических полиномов Бернштейна составляет важный раздел конструктивного анализа (см. [1–4]). Подробный обзор основных результатов, полученных на стандартном отрезке $[0, 1]$, представлен в [5]. Там, в частности, отмечен специальный эффект, связанный с экспоненциальным ростом коэффициентов полиномов Бернштейна при явной алгебраической записи. Этот эффект наглядно проявляется на примере простейших кусочно–линейных функций типа модуля (см. также [6, 7]). Покажем, что при переходе к симметричному отрезку $[-1, 1]$ качественный характер эффекта сохранится, но количественные оценки изменятся.

Для функции $f \in C[-1, 1]$ полиномы Бернштейна определяют формулой

$$B_n(f,x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k \,(1+x)^k\,(1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

При выборе

$$f(x) = |x|, \qquad x \in [-1, 1], \qquad (2)$$

полиномы (1) подчинены *правилу склеивания* (см. [8]), согласно которому $B_{2m+1}(f,x) = B_{2m}(f,x)$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Поэтому в примере (2) достаточно ограничиться изучением полиномов (1) только с четными номерами $n = 2m$. Такие полиномы коротко обозначим

$$B_{2m}(x) = 2^{-2m} \sum_{k=0}^{2m} \left|\frac{k}{m} - 1\right| C_{2m}^k \,(1+x)^k\,(1-x)^{2m-k}, \quad m \in \mathbb{N}. \qquad (3)$$

Можно показать, что явная алгебраическая запись полиномов (3) по степеням переменной x имеет вид

$$B_{2m}(x) = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m} \left[1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\, C_m^k\, x^{2k}\right], \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Рассмотрим вопрос о скорости роста максимального (по модулю) коэффициента в записи (4) при увеличении значения m. Другими словами, исследуем рост величины

$$\mu_{2m} = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |a_{2m,2k}|, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Здесь

$$a_{2m,2k} = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m}\, (-1)^{k-1}\, \beta_m(k), \quad m \in \mathbb{N}, \quad k = 1, \ldots, m\,, \tag{6}$$

с числами

$$\beta_m(k) = \frac{1}{2k-1}\, C_m^k, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad k = 1, \ldots, m\,. \tag{7}$$

Для решения поставленной задачи требуется при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ найти максимальное из чисел (7).

Отметим следующие закономерности, действующие для (7) в зависимости от выбора $m \in \mathbb{N}$ при изменении $k = 1, \ldots, m$.

1. При любом фиксированном $m \in \{1, \ldots, 6\}$ числа (7) образуют конечную строго убывающую последовательность.

2. При $m = 7$ числа (7) образуют особый набор

$$7, \quad 7, \quad 7, \quad 5, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{7}{11}, \quad \frac{1}{13},$$

где первые три элемента совпадают, а затем элементы строго убывают.

3. При любом фиксированном $m \geqslant 8$ конечная последовательность (7) строго возрастает вплоть до $k = [(m-1)/2]$, а затем строго убывает.

Перечисленные закономерности позволяют показать, что первые полиномы Бернштейна (4), отвечающие значениям m от 1 до 7, являются исключительными, и рост коэффициентов (6) в их записи почти не наблюдается. При $m \geqslant 8$ тенденция меняется. Основной результат состоит в следующем.

Теорема. *Пусть величина* μ_{2m} *определена по формуле* (5)*, как максимальное абсолютное значение среди коэффициентов* (6)*, взятых из полиномов* (4)*. Тогда верна асимптотическая формула*

$$\mu_{2m} \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{2^m}{m^2}, \qquad m \to \infty, \tag{8}$$

и справедлива оценка

$$0.45 \cdot \frac{2^m}{m^2} < \mu_{2m} < 0.55 \cdot \frac{2^m}{m^2}, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad m \geqslant 8. \tag{9}$$

Соотношения (8), (9) показывают, что максимальный коэффициент в полиномах (4) растет с экспоненциальной скоростью, однако, скорость роста будет существенно меньшей, чем в аналогичном примере на стандартном отрезке $[0, 1]$ (ср. с [5, 6]).

Автор выражает признательность И. В. Тихонову за постановку задачи и В. Б. Шерстюкову за большую помощь в исследовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.; Л. : ГИТТЛ, 1949. 688 с.

2. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. 130 p.

3. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Л. : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.

4. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Berlin : Springer-Verlag, 1993. 450 p.

5. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.

6. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

7. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2015 : материалы науч. конф. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. С. 115–121.

8. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 288–300.

УДК 517.984

ПРОСТРАНСТВА ЛИПШИЦА НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ТОРЕ

С. С. Платонов (Петрозаводск, РФ)
platonov@psu.karelia.ru

Будем считать, что одномерный тор совпадает с фактор-группой $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Элемент $x + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{R}$, будем обозначать через $\bar{x}$. Пусть $\mathbb{T}^\infty$ — прямое произведение счетного числа групп $\mathbb{T}$. Элементами группы $\mathbb{T}^\infty$ являются последовательности $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\}_{k=1}^\infty$, где $\bar{x}_k \in \mathbb{T}$.

Снабженная тихоновской топологией группа $\mathbb{T}^\infty$ является компактной топологической группой.

Пусть $d\mathbf{x}$ — элемент группы Хаара на группе $\mathbb{T}^\infty$, нормированной условием $\int_G 1\,d\mathbf{x} = 1$. Пусть $L_p(\mathbb{T}^\infty) = L_p(\mathbb{T}^\infty, d\mathbf{x})$, $1 \le p < \infty$, и $L_\infty(\mathbb{T}^\infty) = C(\mathbb{T}^\infty)$ комплексные Лебеговы банаховые пространства, $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L_p(\mathbb{T}^\infty)$.

Для $\bar{s} \in \mathbb{T}$ пусть $|\bar{s}|_{\mathbb{T}} := \min_{m\in\mathbb{Z}} |s - 2\pi m|$. Если $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} \in \mathbb{T}^\infty$, то полагаем $|\mathbf{x}| := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|\bar{x}_k|_{\mathbb{T}}$. Отображение $\mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|$ задает квазинорму на группе $\mathbb{T}^\infty$.

Для любой функции $f(\mathbf{x})$ на группе $\mathbb{T}^\infty$ и для любого $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ пусть

$$(\tau_{\mathbf{h}} f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} - \mathbf{h}).$$

Оператор $\tau_{\mathbf{h}}$ называется оператором сдвига. Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$ конечная разность $\Delta_{\mathbf{h}} f$ с шагом $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ определяется формулой $\Delta_{\mathbf{h}} f := f - \tau_{\mathbf{h}} f$.

Для любых $\alpha \in (0,1]$ и $p \in [1,+\infty]$ через $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ обозначим множество всех функций $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$, удовлетворяющих условию

$$\|\Delta_{\mathbf{h}} f\|_p \le A_f |\mathbf{h}|^\alpha, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty, \tag{1}$$

где A_f — некоторое число, не зависящее от $\mathbf{h}$.

Множество $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ является комплексным линейным пространством. Снабженное нормой

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)} := \|f\|_p + \sup_{\mathbf{h}\neq 0} |\mathbf{h}|^{-\alpha} \|\Delta_{\mathbf{h}} f\|_p \tag{2}$$

множество $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ является банаховым пространством, которое естественно назвать пространством Липшица на группе $\mathbb{T}^\infty$.

Естественным средством приближения функций на группе $\mathbb{T}^\infty$ (как и на любой компактной абелевой группе) являются линейные комбинации характеров. Опишем характеры группы $\mathbb{T}^\infty$. Пусть $\mathbb{Z}^\infty$ — множество всех целочисленных последовательностей. Элементы из $\mathbb{Z}^\infty$ имеют вид $\mathbf{n} = \{n_k\}_{k=1}^\infty$, $n_k \in \mathbb{Z}$. Через $\mathbb{Z}^{(\infty)}$ обозначим подмножество в $\mathbb{Z}^\infty$, состоящее из всех финитных последовательностей, т. е. таких последовательностей $\mathbf{n}$ для которых $n_k = 0$ при $k > N$.

Характеры группы $\mathbb{T}^\infty$ задаются формулами

$$\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \exp(i(\sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k)),$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\mathbf{n} = \{n_k\} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$, $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} \in \mathbb{T}^\infty$.

Обозначим через $\mathcal{P}(\mathbf{T}^\infty)$ комплексную линейную оболочку функций $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$. Функции из $\mathcal{P}(\mathbf{T}^\infty)$ (будем называть их тригонометрическими полиномами на группе $\mathbb{T}^\infty$) будут служить средством приближения для функций из нормированных пространств $L_p(\mathbb{T}^\infty)$.

Для любого натурального числа N обозначим через $\mathcal{P}_N^*(\mathbb{T}^\infty)$ линейную оболочку всех характеров $\chi_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} = \{n_k\} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$, которые удовлетворяют условиям $|n_k| \le N/2^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Линейное подпространство $\mathcal{P}_N^*(\mathbb{T}^\infty)$ конечномерное, так как $n_k = 0$ при $k > \log_2 N + 1$.

Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$ пусть

$$E_N^*(f)_p := \sup\{\|f - \Phi\|_p : \Phi \in \mathcal{P}_N^*(\mathbb{T}^\infty)\}$$

— наилучшее приближение функции f функциями из $\mathcal{P}_N^*(\mathbb{T}^\infty)$.

Для любых $\alpha \in (0, 1]$ и $p \in [1, +\infty]$ обозначим через $\Lambda(\alpha, p)$ множество всех функций $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$, для которых наилучшие приближения $E_N^*(f)_p$ удовлетворяют условию

$$E_N^*(f)_p \le \frac{B_f}{N^\alpha}, \quad N = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

где B_f — некоторое положительное число.

Множество $\Lambda(\alpha, p)$ является комплексным линейным пространством. Снабженное нормой

$$\|f\|_{\Lambda(\alpha,p)} := \|f\|_p + \sup_{N\in\mathbb{N}} N^\alpha\, E_N^*(f)_p \tag{4}$$

пространство $\Lambda(\alpha, p)$ является банаховым пространством.

Если $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — топологические векторные пространства, то будем писать, что $\mathcal{F}_1 \hookrightarrow \mathcal{F}_2$ ($\mathcal{F}_1$ вложено в $\mathcal{F}_2$), если $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ и это вложение линейное и непрерывное.

Теорема. *Для банаховых пространств* $\mathrm{Lip}(\alpha_1, p)$ *и* $\Lambda(\alpha_2, p)$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1])$ *имеются следующие вложения*

$$\Lambda(\alpha_2, p) \hookrightarrow \mathrm{Lip}(\alpha_1, p) \quad \forall \alpha_1 < \alpha_2; \tag{5}$$

$$\mathrm{Lip}(\alpha_1, p) \hookrightarrow \Lambda(\alpha_2, p) \quad \forall \alpha_2 < \alpha_1. \tag{6}$$

Для любого $\alpha \in (0, 1]$ пусть

$$^*\mathrm{Lip}(\alpha, p) := \bigcap_{0<\sigma<\alpha} \mathrm{Lip}(\sigma, p). \tag{7}$$

Множество $^*\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ является комплексным линейным пространством. Снабженное топологией, порожденной семейством полунорм (даже норм) $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}(\sigma,p)}$, $\sigma\in(0,\alpha)$, пространство $^*\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ будет локально выпуклым топологическим векторным пространством. Будем называть пространство $^*\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ предельным пространством Липшица.

Аналогично, пусть

$$^*\Lambda(\alpha,p) := \bigcap_{0<\sigma<\alpha} \Lambda(\sigma,p).$$

Множество $^*\Lambda(\alpha,p)$ является локально выпуклым топологическим векторным пространством с топологией, порожденной семейством норм $\|\cdot\|_{\Lambda(\sigma,p)}$, $\sigma\in(0,\alpha)$.

Из вложений (5) и (6) вытекает, что для любого $\alpha\in(0,1]$ имеются вложения $^*\Lambda(\alpha,p)\hookrightarrow{}^*\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ и $^*\mathrm{Lip}(\alpha,p)\hookrightarrow{}^*\Lambda(\alpha,p)$, откуда вытекает следующее следствие.

Следствие. *Для любого* $\alpha\in(0,1]$ *пространства* $^*\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ *и* $^*\Lambda(\alpha,p)$ *совпадают как топологические векторные пространства.*

Тем самым получено описание предельного пространства Липшица в терминах наилучших приближений. Отметим, что, вообще говоря, $\mathrm{Lip}(\alpha,p)\neq\Lambda(\alpha,p)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Платонов С. С.* О некоторых задачах теории приближения функций на бесконечномерном торе: аналоги теорем Джексона // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, вып. 6. С. 99–120.

2. *Платонов С. С.* О некоторых задачах теории приближения функций на бесконечномерном торе // Функциональные пространства и теория приближений функций : тез. докл. междунар. конф. Москва, 2015. С. 202–204.

УДК 517.518

КРАТНЫЕ РЯДЫ УОЛША – ПЭЛИ И МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ[1]

М. Г. Плотников (Вологда, РФ)
MGPlotnikov@gmail.com

В работе рассматриваются множества единственности для кратных рядов по системе Уолша $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ в нумерации Пэли [1].

Пусть $\{f_n\}$ — система функций, заданных на некотором множестве X. Напомним, что множество $A\subset X$ называется *множеством единственности* (иначе, $\mathcal{U}$*-множеством*) для рядов $\sum\limits_n a_n f_n(x)$, если любой сходящийся к нулю вне этого множества ряд является *тривиальным*, то есть имеет лишь нулевые коэффициенты.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417).

Множества единственности для кратных рядов Уолша при сходимости по прямоугольникам изучались в работах [2–7] и ряде других. Так, из результатов работ [2, 3] вытекает, что всякое счетное множество, и даже любое счетное объединение гиперплоскостей являются $\mathcal{U}$-множествами. В [4] найдены более широкие классы $\mathcal{U}$-множеств и доказано, что множество $A \subset [0,1]^{d-1}$ является $\mathcal{U}$-множеством для $(d-1)$-кратных рядов Уолша тогда и только тогда, когда $A \times [0,1]$ является $\mathcal{U}$-множеством для d-кратных рядов Уолша. Наиболее широкие известные классы $\mathcal{U}$-множеств для кратных рядов Уолша при сходимости по прямоугольникам построены Л. Д. Гоголадзе и Т. А. Жеребьевой (Своровска) [6, 7].

В [8–10] найдены $\mathcal{U}$-множества для d-кратных рядов Уолша

$$\sum_{n_1,\dots,n_d=0}^{\infty} b_{n_1,\dots,n_d} \prod_{l=1}^{d} W_{n_l}(t^l) \tag{1}$$

на d-мерной двоичной группе $\mathbb{G}^d$ при λ-сходимости и сходимости по кубам. Наиболее общие результаты в этом направлении содержатся в [10]. В частности, для всех указанных типов сходимости существуют совершенные $\mathcal{U}$-множества хаусдорфовой размерности d.

При этом для любого $\lambda \geq 1$ существуют $\mathcal{U}$-множества для рядов (1) при сходимости по прямоугольникам, не являющиеся таковыми при λ-сходимости [11].

Если же рассматривать кратные ряды Уолша не на группе $\mathbb{G}^d$, а на единичном кубе $[0,1]^d$, то неизвестно даже, *является ли пустое множество $\mathcal{U}$-множеством при λ-сходимости или сходимости по кубам.* Аналогичная проблема не решена и для кратных тригонометрических рядов.

Также остается нерешенной следующая фундаментальная для теории единственности ортогональных рядов проблема, приведенная Н. Н. Холщевниковой в 2002 г. [5].

Проблема 1. *Обязано ли каждое множество положительной меры не быть $\mathcal{U}$-множеством для кратных рядов Уолша или для кратных тригонометрических рядов?*

Для тригонометрических рядов примерно в то же время Проблему 1 привели Дж. М. Эш и Л. В. Жижиашвили. Проблема не решена ни для какого из вышеуказанных типов сходимости.

Хотя среди построенных в [8–10] несчетных $\mathcal{U}$-множеств имеются достаточно массивные множества, все они имеют достаточно жесткую арифметическую структуру. Естественным образом возникает вопрос: существуют ли несчетные $\mathcal{U}$-множества для кратных рядов Уолша при

λ-сходимости или сходимости по кубам, имеющие более простую структуру? В частности, являются ли $\mathcal{U}$-множествами гиперплоскости в $\mathbb{G}^d$ или их конечные либо счетные объединения? Частично ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \geq 2$, A — конечное объединение гиперплоскостей в $\mathbb{G}^d$, параллельных координатным гиперплоскостям. Тогда A является $\mathcal{U}$-множеством для рядов* (1) *при λ-сходимости.*

Следующие результаты, доказанные в [12] и являющиеся аналогами для рядов (1) теоремы Зигмунда, являются попытками приблизиться к решению Проблемы 1.

Теорема 2. *Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ — произвольные стремящиеся к нулю и к ∞, соответственно, последовательности положительных чисел. Тогда для всякого $\delta > 0$ существует совершенное множество $H \subset \mathbb{G}^d$ меры Хаара большей, чем $1-\delta$, обладающее следующим свойством. Любой ряд* (1)*, сходящийся по двоичным кубам к нулю на множестве $\mathbb{G}^d \setminus H$ и такой, что*

$$|b_{n_1,\ldots,n_d}| \leq \varepsilon_{n_d}, \qquad n_1,\ldots,n_d = 0,1,\ldots,$$

$$|n_u - n_d| \leq C_{n_d} \quad (u = 1,\ldots,d-1), \tag{2}$$

имеет все коэффициенты равными нулю.

Следствие. *В условиях теоремы 2 для всякого $\delta > 0$ найдется совершенное множество $H \subset \mathbb{G}^d$ меры Хаара большей, чем $1-\delta$, обладающее следующим свойством. Если коэффициенты ряда* (1)*, сходящегося по прямоугольникам или по кубам к нулю на множестве $\mathbb{G}^d \setminus H$, удовлетворяют условию* (2)*, то все они равны нулю.*

Условие (2) является весьма мягким ограничением на поведение коэффициентов рядов (1) в том числе потому, что оно накладывается только на коэффициенты, стоящие не слишком далеко от «главной диагонали». Попытка избавиться от него приводит к Проблеме 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения, 2-е изд. М. : ЛКИ, 2008. 352 с.

2. *Скворцов В. А.* О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1973. № 6. С. 77–79.

3. *Мовсисян Х. О.* О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН Армян. ССР. Сер. матем. 1974. Т. 9, № 1. С. 40–61.

4. *Лукомский С. Ф.* О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 7. С. 937–945.

5. *Холщевникова Н. Н.* Объединение множеств единственности кратных рядов Уолша и тригонометрических // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 4. С. 135–160.

6. *Гоголадзе Л. Д.* К вопросу восстановления коэффициентов сходящихся кратных функциональных рядов // Изв. РАН. Сер. матем. 2008. Т. 72, № 2. С. 83–90.

7. *Жеребьева Т. А.* Об одном классе множеств единственности для кратных рядов Уолша // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 2. С. 14–21.

8. *Плотников М. Г.* О множествах единственности для кратных рядов Уолша // Матем. заметки. 2007. Т. 81, вып. 2. С. 265–279.

9. *Плотников М. Г.* О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 1. С. 61–78.

10. *Плотников М. Г.* Квазимеры на группе G^m, множества Дирихле и проблемы единственности для кратных рядов Уолша // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 12. С. 131–156.

11. *Lukomskii S. F.* On a U-set for multiple Walsh series // Anal. Math. 1992. Vol. 18, № 2. P. 127–138.

12. *Плотников М. Г.* Кратные ряды Уолша и множества Зигмунда // Матем. заметки. 2014. Т. 95, вып. 5. С. 750–762.

УДК 517.518

ПРОБЛЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПЕРЕСТАВЛЕННЫХ КРАТНЫХ РЯДОВ ХААРА[1]

М. Г. Плотников, Ю. А. Плотникова (Вологда, РФ)

MGPlotnikov@gmail.com, JAPlotnikova@yandex.ru

В 1870 г. Кантор доказал [1, гл. 1], что *если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду на* $[0, 2\pi)$, *за исключением, быть может, точек некоторого конечного множества, то он является тривиальным рядом, то есть все его коэффициенты равны нулю.*

Теорема Кантора означает, что всякое конечное множество $A \subset \subset [0, 2\pi)$ является $\mathcal{U}$-множеством для тригонометрических рядов. Напомним, что множество $A \subset X$ называется *множеством единственности* (иначе, *$\mathcal{U}$-множеством*) для рядов по системе функций $\{f_n\}$, если любой сходящийся к нулю вне A такой ряд является *тривиальным*, то есть все его коэффициенты равны нулю.

В 1964 г. появилось 4 работы (Арутюнян, Арутюнян – Талалян, Петровская, Скворцов), из результатов которых вытекало, что $\emptyset$ является $\mathcal{U}$-множеством для рядов по системе Хаара $\{H_n\}$. С другой стороны, любое одноточечное множество $A \subset [0, 1]$ не является $\mathcal{U}$-множеством (Фабер 1910, Арутюнян – Талалян 1964). Таким образом, в отличие от тригонометрического случая, только $\emptyset$ является $\mathcal{U}$-множеством для рядов Хаара. См. [2] о результатах этого абзаца.

Аналог теоремы Кантора для всюду сходящихся *по прямоугольникам* кратных рядов Хаара доказали, независимо, Скворцов, Эбралидзе

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417).

и Мовсисян [3–5]. Недавно в [6] была решена более общая задача о восстановлении коэффициентов таких рядов по их сумме.

В работах [7–10] изучались проблемы единственности для λ-*сходящихся* кратных рядов Хаара. В [7] и [9] доказано, что $\emptyset$ есть $\mathcal{U}$-множество для таких рядов, если $\lambda \geq 2$. Но единственность нарушается, если λ близко к 1. Имеет место

Теорема A (см. [8].) *Для всякого* $\lambda \in [1, \sqrt{2})$ *найдется нетривиальный двойной ряд Хаара,* λ*-сходящийся к нулю всюду на* $[0,1]^2$. *В частности, существует двойной ряд Хаара, всюду сходящийся к нулю по квадратам.*

Последний результат оказался неожиданным. С другой стороны, пустое множество является $\mathcal{U}$-множеством для λ-сходящихся двойных рядов Хаара, если $\lambda > \sqrt{2}$ (см. [10]). Если же рассматривать переставленные двойные ряды Хаара, то для некоторых "хороших" перестановок неединственность имеет место даже если $\sqrt{2} < \lambda < 2$. Пусть $\mathbb{N}$ означает множество целых неотрицательных чисел.

Теорема 1. *Существуют биекции* $U, V\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *сохраняющие все двоичные пачки* $B_k \overset{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N}\colon 2^k \leq n \leq 2^{k+1}-1\}$, $k \in \mathbb{N}$, *а также нетривиальный* $(U \times V)$*-переставленный двойной ряд Хаара* $(\mathrm{S}^*) = \sum\limits_{n,m=0}^{\infty} a^*_{n,m} H_{U(n)}(x) H_{V(m)}(y)$, *причем* (S^*) *сходится по прямоугольникам к нулю всюду на* $[0,1]^2$, *за исключением точки* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, *а в точке* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *он* λ*-сходится к нулю для каждого* $\lambda \in [1,2)$.

Следствие. *Существуют биекции* $U, V\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *сохраняющие все двоичные пачки* B_k, *а также нетривиальный* $(U \times V)$*-переставленный двойной ряд Хаара такой, что для всякого* $\lambda \in [1,2)$ *он* λ*-сходится к* 0.

В связи с теоремой 1, ее следствием и результатами работ [8] и [10] интересно узнать ответы на следующие вопросы.

Вопрос 1. *Пусть* $\mathbf{T}\colon \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}^d$ *— произвольная биекция, сохраняющая все* d*-мерные двоичные пачки*

$$B_{\mathbf{k}} \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d : 2^{k_i} \leq n_i \leq 2^{k_i+1} - 1,\ i = 1, \ldots, d\},$$

$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$. *Является ли пустое множество* $\mathcal{U}$*-множеством для* λ*-сходящихся* $\mathbf{T}$*-переставленных* d*-кратных рядов Хаара*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} a_{n_1,\ldots,n_d} H_{\mathbf{T}(n_1,\ldots,n_d)}(x_1, \ldots, x_d)? \tag{1}$$

Мы предполагаем, что ответ на вопрос 1 утвердительный. Если это так, то условие $\lambda < 2$ в теореме 1 и ее следствии неулучшаемо.

Вопрос 2. *Возьмем произвольное* $\lambda \in [1, \sqrt{2}]$. *Существует ли биекция* $\mathbf{T}\colon \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}^d$, *сохраняющая все* d*-мерные двоичные пачки* $B_{\mathbf{k}}$ *и такая, что* $\emptyset$ *есть* $\mathcal{U}$*-множество для* λ*-сходящихся рядов* (1)?

Ниже рассматриваются $\mathcal{U}$-множества для классов рядов

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_d=0}^{\infty} a_{n_1,\ldots,n_d} H_{\mathbf{T}(n_1,\ldots,n_d)}(t_1,\ldots,t_d) \tag{2}$$

на d-мерной двоичной группе $\mathbb{G}^d$.

Определение. Скажем, что класс Θ рядов (2) *обладает свойством наследственности*, если он подчинен следующему условию. Предположим, что (S) и (S^*) — произвольные ряды вида (2) такие, что для N-ых кубических частичных сумм S_N и S_N^* рядов (S) и (S^*), соответственно, имеем $\left|S_{2^k}(\mathbf{t})\right| \leq \left|S^*_{2^k}(\mathbf{t})\right|$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{G}^d$. Тогда если $(S^*) \in \Theta$, то $(S) \in \Theta$.

Теорема 2 (типа Бари). *Пусть биекция* $\mathbf{T}\colon \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}^d$ *сохраняет все* d*-мерные двоичные пачки, а* Θ *— произвольный класс рядов* (2), *обладающий свойством наследственности. Если замкнутые множества* $A_i \subset \mathbb{G}^d$ $(i \in \mathbb{N})$ *являются* $\mathcal{U}$*-множествами для рядов* (2) *из класса* Θ, *то их объединение также является таковым. В качестве сходимости можно рассматривать сходимость по прямоугольникам, сходимость по кубам или* λ*-сходимость при* $\lambda > 1$.

В [11] теорема 2 доказана для $\mathbf{T} \equiv \mathrm{id}$, но доказательство легко переносится на общий случай.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : ГИФМЛ, 1961. 936 с.

2. *Голубов Б. И.* Ряды по системе Хаара // Итоги науки. Сер. Математика. Матем. анал. 1970, 1971. С. 109–146.

3. *Скворцов В. А.* О множествах единственности для многомерных рядов Хаара // Матем. заметки. 1973. Т. 14(6). С. 789–798.

4. *Эбралидзе А. Д.* О единственности кратных рядов по системе Хаара // Сообщ. АН Груз. ССР. 1973. Т. 70, № 3. С. 537–539.

5. *Мовсисян Х. О.* О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН Армян. ССР. Сер. матем. 1974. Т. 9, № 1. С. 40–61.

6. *Skvortsov V. A., Tulone F.* Multidimensional dyadic Kurzweil – Henstock- and Perron-type integrals in the theory of Haar and Walsh series // J. Math. Anal. Appl. 2015. Vol. 421(2). P. 1502–1518.

7. *Плотников М. Г.* О единственности всюду сходящихся кратных рядов Хаара // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2001. № 1. С. 23–28.

8. *Плотников М. Г.* О нарушении единственности для двумерных рядов Хаара // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2003. № 4. 20–24.

9. *Плотников М. Г.* Вопросы единственности для кратных рядов Хаара // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 2. 97–116.

10. *Плотников М. Г.* О границе существования единственности для двумерных рядов Хаара // Изв. вузов. Матем. 2006. № 7. С. 57–64.

11. *Плотников М. ,Г., Плотникова Ю. А.* Разложение двоичных мер и объединение замкнутых $\mathcal{U}$-множеств для рядов по системе Хаара // Матем. сб. (в печати).

УДК 517.518.26+519.214.8

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ГЁЛЬДЕРОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЧТИ ВСЮДУ ФУНКЦИЙ

И. В. Подвигин (Новосибирск, РФ)
ipodvigin@math.nsc.ru

1. Пусть M — метрическое пространство с метрикой d, и μ — вероятностная мера на борелевской σ-алгебре подмножеств M. Обозначим класс гёльдеровских функций с показателем $\alpha \in (0,1]$ через $H_\alpha(M)$. Рассмотрим новый класс $\mathcal{F}_\alpha$, состоящий из всех интегрируемых по Лебегу функций $f : M \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $\delta > 0$ найдутся интегрируемые функции $g_1^\delta, g_2^\delta \in H_\alpha(M)$, для которых выполняются неравенства

$$g_1^\delta \le f \le g_2^\delta,$$

$$\int_M g_1^\delta(x)\, d\mu(x) + l(\delta) \ge \int_M f(x)\, d\mu(x) \ge \int_M g_2^\delta(x)\, \mu(x) - l(\delta),$$

где $l(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Ясно, что всякая интегрируемая по Лебегу гёльдеровская функция f принадлежит классу $\mathcal{F}_\alpha$. Запас гёльдеровских функций на метрическом пространстве M достаточно большой (не меньше чем мощность самого множества M), и интегрируемые среди них обязательно найдутся. Например, всюду постоянные функции или вида $f(x) = \sin(d^\alpha(x, x_0))$, $x_0 \in M, \alpha \in (0,1]$. Таким образом, класс $\mathcal{F}_\alpha$ для любого $\alpha \in (0,1]$ заведомо не пуст.

Следующая теорема, анонсированная в [1], дает описание всем ограниченным функциям из $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha \in (0,1]$.

Теорема 1. *Ограниченная функция f принадлежит классу $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, тогда и только тогда, когда она непрерывна μ-п.в. на M.*

Доказательство теоремы 1 основано на построении функций g_1^δ и g_2^δ для каждой ограниченной непрерывной μ-п.в. функции f, которое осуществляется применением часто используемой в различных задачах конструкции инфимальной (супремальной) конволюции (см., например, [2, гл. 12]). А именно, положим для любых $\alpha \in (0,1]$, $\delta > 0$ и $x \in M$

$$g_1^\delta(x) = \inf_{y\in M}(f(y) + 2M_f\delta^{-\alpha}d^\alpha(x,y)),$$

$$g_2^\delta(x) = \sup_{y\in M}(f(y) - 2M_f\delta^{-\alpha}d^\alpha(x,y)),$$

где $M_f = \sup_{x\in M}|f(x)|$. Нетрудно проверить, что g_1^δ и g_2^δ, действительно, гёльдеровские и удовлетворяют выписанным выше соотношениям с

$$l(\delta) = \int_M \omega_f(\delta, x)\, d\mu(x),$$

где

$$\omega_f(\delta, x) = \sup_{d(x,y)\le\delta} |f(x) - f(y)|,\ \delta > 0.$$

2. На основе полученной аппроксимации ограниченных непрерывных μ-п.в. функций можно для таких функции получать оценки вероятности больших уклонений эргодических средних относительно сохраняющего меру μ преобразования. Сформулируем этот результат более точно.

Пусть $T : M \to M$ — эргодическое сохраняющее меру μ преобразование. Для $f \in L_1(M)$, $x \in M, n \ge 1$ обозначим эргодические средние

$$A_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x),$$

и для каждого $\varepsilon > 0$ вероятности больших уклонений

$$\mathrm{p}_n^\varepsilon(f) = \mu\left\{|A_n f - \int_M f\, d\mu| \ge \varepsilon\right\}.$$

Теорема 2. *Для любой ограниченной μ-п.в. непрерывной функции $f : M \to \mathbb{R}$ и любых $\delta > 0$ и $\alpha \in (0,1]$ найдутся гёльдеровские функции $g_1^\delta, g_2^\delta \in H_\alpha(M)$ и $l(\delta) > 0$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех $n \ge 1$*

$$\mathrm{p}_n^{\varepsilon + l(\delta)}(f) \le \mathrm{p}_n^\varepsilon(g_1^\delta) + \mathrm{p}_n^\varepsilon(g_2^\delta),$$

где $l(\delta) = l_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Большие уклонения и скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа: переход от гёльдеровости к непрерывности // ДАН. 2016. Т. 466. № 1 (в печати).

4. *Bauschke H. H., Combettes P. L.* Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. *CMS Books in Mathematics.* N. Y. : Springer, 2011. 468 p.

УДК 517.956+004.942

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ В МОДЕЛИ НАГЕЛЯ – ШРЕКЕНБЕРГА

А. В. Подорога, И. В. Тихонов (Москва, РФ)
anastasiapodoroga@gmail.com, ivtikh@mail.ru

При математическом описании процесса дорожного движения часто используют макроскопический подход, в рамках которого транспортный поток интерпретируют как специфический поток сплошной среды (см. [1]). Соответствующие исследования проводят на языке квазилинейных дифференциальных уравнений, записанных для неизвестной плотности потока. При этом возникает проблема неединственности решения задачи Коши, хорошо известная из общей теории (см. [2–4]). Обсудим проявления этого эффекта применительно к интересной модели Нагеля–Шрекенберга, введенной в работе [5] на основе данных компьютерного моделирования.

Следуя стандартной схеме [1], рассмотрим транспортный поток с плотностью $\rho = \rho(x,t)$, где $x \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$. Интенсивность движения потока обозначим через $q = q(x,t)$. Основное предположение состоит в наличии *фундаментальной диаграммы*, т. е. зависимости $q = Q(\rho)$. Здесь $Q(\rho)$ — непрерывная выпуклая вверх функция, заданная на промежутке $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_{\max}$. Дифференциальное уравнение дорожного движения имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Добавим начальное условие

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

с заданной кусочно непрерывной функцией $\rho_0(x)$, удовлетворяющей оценке $0 \leqslant \rho_0(x) \leqslant \rho_{\max}$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

В соответствии с [5] фундаментальную диаграмму возьмем в виде

$$Q(\rho) = \begin{cases} k_1\,\rho, & 0 \leqslant \rho \leqslant \rho^*, \\ k_2(\rho_{\max} - \rho), & \rho^* \leqslant \rho \leqslant \rho_{\max}. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\rho_{\max} > 0$ — максимально возможная плотность потока. Значение $\rho^* \in (0, \rho_{\max})$ соответствует «переходной» плотности от свободного движения к затрудненному. Коэффициенты $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ имеют вид

$$k_1 = \frac{q_{\max}}{\rho^*}, \qquad k_2 = \frac{q_{\max}}{\rho_{\max} - \rho^*}, \tag{4}$$

где $q_{\max} > 0$ — максимальное значение интенсивности q. Постоянные числа $\rho_{\max}$, ρ^*, $q_{\max}$ считаются параметрами диаграммы (3), (4).

Поскольку выражение (3) не дифференцируемо в точке $\rho = \rho^*$, то уравнение (1) следует понимать в обобщенном смысле. Так, кусочно непрерывная функция $\rho = \rho(x,t)$ называется *обобщенным решением* уравнения (1), если она удовлетворяет соотношению

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(x,t)\,dx = Q(\rho(\alpha,t)) - Q(\rho(\beta,t)) \tag{5}$$

для почти всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ при почти всех $t \geqslant 0$. Основные типы решений, характерные для квазилинейного уравнения (1) в модели Нагеля–Шрекенберга (3), (4), указаны в работе [6]. Обсудим более подробно пример неединственности решения задачи Коши (1), (2), коротко упомянутый в [6].

Рассмотрим задачу Коши (1), (2) с диаграммой (3), (4), взяв начальное условие

$$\rho_0(x) = \rho^*, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Покажем, что при выборе (6) поставленная задача будет иметь бесконечно много различных обобщенных решений помимо стационарного решения $\rho(x,t) \equiv \rho^*$.

Определим функцию

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho^+(x + k_2 t), & x \leqslant 0, \\ \rho^-(x - k_1 t), & x > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь

$$\rho^+(s) = \begin{cases} \rho^*, & s \leqslant 0, \\ f(s), & s > 0, \end{cases} \qquad \rho^-(s) = \begin{cases} g(s), & s \leqslant 0, \\ \rho^*, & s > 0, \end{cases} \tag{8}$$

причем $\rho^* \leqslant f(s) \leqslant \rho_{\max}$ при $s > 0$, а $0 \leqslant g(s) \leqslant \rho^*$ при $s \leqslant 0$. Тогда справедлив следующий результат.

Утверждение. *Для того чтобы функция (7) с выражениями $\rho^+(s)$, $\rho^-(s)$ из формулы (8) удовлетворяла интегральному соотношению (5) необходимо и достаточно, чтобы кусочно непрерывные функции $f(s)$, $g(s)$, входящие в запись (8), для почти всех $s > 0$ подчинялись равенству*

$$f(s) = \rho_{\max} - \gamma g(-\gamma s), \tag{9}$$

с коэффициентом $\gamma = k_1/k_2$. При этом функция (7) удовлетворяет начальному условию $\rho(x,0) \equiv \rho^*$.

Будем выбирать теперь кусочно непрерывные функции $g(s)$ так, чтобы $0 \leqslant g(s) \leqslant \rho^*$ при $s \leqslant 0$ и $g(s) \not\equiv \rho^*$ при $s \leqslant 0$. Определяя соответствующие функции $f(s)$ по формуле (9), получим бесконечно много различных решений вида (7), (8) для задачи Коши с начальным условием (6).

Этот теоретический эффект неединственности допускает экспериментальную проверку на практике. При имитационном компьютерном моделировании однополосного дорожного движения с фундаментальной диаграммой Нагеля – Шрекенберга (см. [6, 7]) на однородных режимах, близких к значению ρ^*, наблюдается эффект неустойчивости. Однородный транспортный поток с такой переходной плотностью существует лишь конечное время, после чего однородность потока нарушается, и в нем появляются прямые и обратные волны, согласованные с теоретическим описанием (7)–(9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гасников А. В. и др.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков. Изд. 2-е, испр. и доп. М. : МЦНМО, 2013. 427 с.

2. *Олейник О. А.* Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // УМН. 1957. Т. 12, № 3. С. 3–73.

3. *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка. М. : Мех-мат МГУ, 1999. 96 с.

4. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск : Тамара Рожковская, 2003. 576 с.

5. *Nagel K., Schreckenberg M.* A cellular automaton model for freeway traffic // Journal de Physique I France. 1992. Vol. 2, № 12. P. 2221–2229.

6. *Подорога А. В., Тихонов И. В.* Квазилинейное уравнение дорожного движения и компьютерное моделирование // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2015 : материалы науч. конф. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. С. 209–213.

7. *Подорога А. В.* Моделирование идеального транспортного потока на кольцевой автодороге // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XVI Междунар. науч. конф., посвящ. 75-летию проф. В. П. Дьяконова. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2015. Вып. 16. С. 35–38.

УДК 517.977

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ[1]

Е. С. Половинкин (Москва, РФ)
polovinkin@mail.mipt.ru

В докладе будут рассмотрены различные условия на дифференциальное включение со значениями в сепарабельном банаховом пространстве

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00295а).

и с неограниченной правой частью, при которых существуют решения (траектории) задачи Коши для такого дифференциального включения. Будут рассмотрены некоторые свойства траекторий дифференциального включения с неограниченной измеримо-псевдолипшицевой правой частью. Опираясь за полученные свойства, будет исследована задача на минимум функционала по множеству траекторий дифференциального включения, заданных на отрезке, со свободным правым концом. Для такой задачи будут представлены необходимые условия оптимальности в форме дифференциального включения Эйлера – Лагранжа.

Для случая, когда траектории дифференциального включения с неограниченной измеримо-псевдолипшицевой правой частью принимают значения в евклидовом конечномерном пространстве, будут представлены необходимые условия оптимальности для задачи минимизации функционала на множестве траекторий, заданных на отрезке с закрепленными левым и правым концами, а также для задачи быстродействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014. 524 с.

2. *Половинкин Е. С.* Дифференциальные включения с неограниченной правой частью и необходимые условия оптимальности // Оптимальное управление : сб. статей к 105-летию со дня рожд. акад. Л. С. Понтрягина. Тр. МИАН. Т. 291. М. : МАИК, 2015. С. 249–265.

УДК 517.518

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ХАРТМАНА – ВИНТНЕРА ДЛЯ СУММ РЯДОВ ПО СИНУСАМ С КВАЗИМОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ [1]

А. Ю. Попов, А. П. Солодов (Москва, РФ)

Напомним несколько утверждений относительно рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad \boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 0. \tag{1}$$

Сумму ряда (1) (если он сходится в точке $x \in \mathbb{R}$) обозначим $g(\boldsymbol{b}, x)$. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k|b_k| < +\infty$, то $g(\boldsymbol{b}, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ и

$$g'(\boldsymbol{b}, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(\boldsymbol{b}, x)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k.$$

[1] Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417).

Если же

$$b_k \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k b_k = +\infty, \tag{2}$$

то предельное соотношение

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(\boldsymbol{b}, x)}{x} = +\infty, \tag{3}$$

вообще говоря, не выполняется. При каких дополнительных условиях на последовательность $\boldsymbol{b}$ (кроме неотрицательности её элементов) из (2) следует (3)? Хартман и Винтнер [1] доказали, что если $\boldsymbol{b}$ монотонна, то из (2) всегда следует (3) и, в частности, сумма ряда (1) положительна в некоторой правой полуокрестности нуля. Известно следующее обобщение понятия «$\boldsymbol{b}$ монотонна». Берётся неубывающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Через $\mathfrak{M}_\Lambda$ обозначим класс всех последовательностей $\boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ неотрицательных чисел, $b_1 > 0$, для которых

$$\frac{b_{k+1}}{\lambda_{k+1}} \leqslant \frac{b_k}{\lambda_k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$$

Если последовательность Λ постоянна, то получается класс невозрастающих и стремящихся к нулю последовательностей, который обозначим $\mathfrak{M}$. Как было сказано выше, справедлива импликация

$$(2) \Rightarrow (3) \quad \forall \boldsymbol{b} \in \mathfrak{M}. \tag{4}$$

Для каких последовательностей Λ в (4) можно заменить $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}_\Lambda$?

Теорема 1. *Для того чтобы была верна импликация*

$$(2) \Rightarrow (3) \quad \forall\, \boldsymbol{b} \in \mathfrak{M}_\Lambda$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяла двум следующим условиям:*

$$\lambda = \sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k = \lim_{k\to\infty} \lambda_k < +\infty, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda - \lambda_k) < +\infty. \tag{6}$$

Если же при условии (5) *ряд в* (6) *расходится, то существует такая последовательность* $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathfrak{M}_\Lambda$, *что* $\varliminf_{x\to 0+} g(\tilde{\boldsymbol{b}}, x)/x = -\infty$.

Итак, если последовательность Λ даже ограничена, но стремление λ_k к пределу λ «не слишком быстрое», то некоторые суммы рядов по синусам (1) с коэффициентами из $\mathfrak{M}_\Lambda$ принимают отрицательные значения в сколь угодно малой правой полуокрестности нуля. Должно ли выполняться предельное соотношение

$$\varliminf_{x\to 0+} g(b,x) \geqslant 0 \quad \forall\, \boldsymbol{b} \in \mathfrak{M}_\Lambda. \tag{7}$$

Теорема 2. *Если верно* (5) *и* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} k(\lambda-\lambda_k) < +\infty$, *то справедливо предельное соотнощение* (7). *Если же при условии* (5) *имеем* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} k(\lambda - \lambda_k) = +\infty$, *то существует такая последовательность* $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathfrak{M}_\Lambda$, *что* $\varliminf\limits_{x\to 0+} g(\boldsymbol{b},x) = -\infty$.

Оказывается, что отрицательная часть суммы ряда (1) с коэффициентами из $\mathfrak{M}_\Lambda$ даже в случае ограниченности Λ не обязана быть суммируемой на $(0,\pi)$!

Теорема 3. *Если верно (5) и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_k)/k < +\infty$, *то отрицательная часть суммы ряда* (1) *лежит в* $L(0,\pi)$, *какова бы ни была последовательность* $\boldsymbol{b} \in \mathfrak{M}_\Lambda$. *Если же* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_k)/k = +\infty$ *и последовательность* $\{\lambda_k\}$ *вогнута, то найдётся такая последовательность* $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathfrak{M}_\Lambda$, *что отрицательная часть* $g(\boldsymbol{b},x)$ *не суммируема на* $(0,\pi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hartman P., Wintner A.* On sine series with monotone coefficients // J. London Math. Soc. 1953. T. 28, № 1. C. 102–104.

УДК 517.935.2

ОБ УСЛОВИЯХ АНАЛИТИЧНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО И ВОЗМУЩАЮЩИХ КВАЗИМНОГОЧЛЕНОВ КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. С. Портенко, Д. В. Мельничук, Д. К. Андрейченко (Саратов, РФ)

msportenko@gmail.com, meldm007@gmail.com, kp_andreichenko@renet.ru

Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой математические модели технических систем в форме систем связанных посредством условий связи и граничных условий обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. КДС с входной и выходной вектор-функциями $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_x}$ и $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_y}$ рассмотрены в [1, 2]. Динамическая модель линеаризованной КДС сводится к матрице передаточных функций $\Phi(\lambda) = [Q_{kj}(\lambda)/D(\lambda)]$, где $D:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — характеристический [1, 2], а $Q_{kj}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $k=\overline{1,N_y}$, $j=\overline{1,N_x}$, — возмущающие квазимногочлены (индексы k,j далее опущены). Быстрый алгоритм проверки устойчивости КДС, основанный на теоремах из [1, 2], проверяет условие $\underset{0\leqslant\omega\leqslant\infty}{\Delta}\arg D(i\omega)=n\pi/2$, где n — обобщенная степень $D(\lambda)$, а для его применимости необходима аналитичность функций $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ в правой комплексной полуплоскости (λ) и вблизи мнимой оси. Модельные уравнения линеаризованной КДС аналогичны [2]:

$$\dot{\mathbf{y}}=B\mathbf{x}+C\mathbf{y}+A\mathbf{h};\quad \dot{\mathbf{u}}=\mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u})+L_2^{(F)}\mathbf{x}+L_3^{(F)}\mathbf{y}+L_4^{(F)}\dot{\mathbf{y}},\quad \mathbf{r}\in\Omega,$$

$$\left.(\mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})+L_2^{(G)}\mathbf{y})\right|_S=0;\quad \mathbf{h}=\int_S\mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{u})dS;\quad \mathbf{y}(0)=0,\quad \mathbf{u}(\mathbf{r},0)=0.$$

Здесь $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^{N_r}$ – независимые пространственные координаты; $\Omega\subset\mathbb{R}^{N_r}$ и $S=\partial\Omega$ — области, занимаемые объектами управления с распределенными по пространству параметрами, и их границы; $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{u}:\mathbb{R}^{N_r}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_u}$; $\mathbf{h}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N_h}$; A, B, C – матрицы с постоянными элементами; $L_2^{(F)}$, $L_3^{(F)}$, $L_4^{(F)}$, $L_2^{(G)}$ — матрицы, которые могут зависеть от пространственных координат $\mathbf{r}$; $\mathbb{L}_1^{(F)}$, $\mathbb{L}_1^{(G)}$, $\mathbb{L}^{(H)}$ — линейные операторы; точкой сверху обозначено дифференцирование по времени t. При этом $D(\lambda)=\det(\lambda E-C-AC_u(\lambda))$, $\Phi(\lambda)=(\lambda E-C-AC_u(\lambda))^{-1}(B+AB_u(\lambda))$, а матрицы $B_u(\lambda)$ и $C_u(\lambda)$ находятся решением вспомогательных линейных краевых задач

$$\lambda\mathbf{v}=\mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v})+L_2^{(F)}\mathbf{e}_j^{(N_x)},\quad \mathbf{r}\in\Omega;\quad \left.\mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v})\right|_S=0,$$

$$B_u(\lambda)\mathbf{e}_j^{(N_x)}=\int_S\mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{v})dS,\quad j=\overline{1,N_x},$$

$$\lambda\mathbf{v}=\mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v})+(L_3^{(F)}+\lambda L_4^{(F)})\mathbf{e}_j^{(N_y)},\mathbf{r}\in\Omega,$$

$$\left.(\mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v})+L_2^{(G)}\mathbf{e}_j^{(N_y)})\right|_S=0;\ C_u(\lambda)\mathbf{e}_j^{(N_y)}=\int_S\mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{v})dS,\quad j=\overline{1,N_y},$$

$$\mathbf{e}_j^{(N)}\in\mathbb{R}^N,\quad j=\overline{1,N};\quad \mathbf{e}_1^{(N)}=(1,0,...0)^T,\quad ...,\quad \mathbf{e}_N^{(N)}=(0,0,...1)^T.$$

Быстрый алгоритм проверки устойчивости позволяет эффективно исследовать устойчивость КДС [1–3]. В работе [1] найдено точное решение вспомогательной линейной краевой задачи и показана аналитичность функций $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ в правой комплексной полуплоскости и вблизи мнимой оси. В работе [3] в низкочастотной области выполнялось численное интегрирование линейной краевой задачи на основе проекционного метода Галеркина с проверкой аналитичности функций $D(\lambda)$

и $Q(\lambda)$ на основе принципа аргумента. Пусть, например, для функций $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{C}^{N_u}$ скалярное произведение и норма суть $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega$, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$. На основе теоремы об обратном операторе ([4, с. 119, теорема 1]) доказаны утверждения:

Теорема 1. *Пусть при* $\nu = 3, 4$

$$\left\| L_2^{(F)} \mathbf{e}_j^{(N_x)} \right\| < \infty, \quad j = \overline{1, N_x} \quad \left\| L_\nu^{(F)} \mathbf{e}_j^{(N_y)} \right\| < \infty, \quad j = \overline{1, N_y} \tag{2}$$

для любых функций

$$\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{C}, \quad \left\| \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}) \right\| < \infty, \quad \mathbb{L}^{(G)}(\mathbf{u}) \Big|_S = 0 \tag{3}$$

справедливо

$$\left| \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{u}) dS \right| < \infty, \tag{4}$$

существуют функции $\mathbf{v}_0^{(j)} : \Omega \to \mathbb{R}^{N_u}$*, такие, что*

$$\begin{gathered} \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v}_0^{(j)}) \Big|_S = -L_2^{(G)} \mathbf{e}_j^{(N_y)}, \quad \left\| \mathbf{v}_0^{(j)} \right\| < \infty, \\ \left\| \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v}_0^{(j)}) \right\| < \infty, \quad \left| \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{v}_0^{(j)}) dS \right| < \infty, \quad j = \overline{1, N_y} \end{gathered} \tag{5}$$

и при $\lambda \in \bar{\Omega}_\lambda = \Omega_\lambda \cup \partial\Omega_\lambda \subset \mathbb{C}$ *для функций* (3)

$$\left\| \lambda \mathbf{u} - \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}) \right\| \geqslant m(\lambda) \left\| \mathbf{u} \right\|, \quad m(\lambda) > 0 \tag{6}$$

Тогда функции $D(\lambda)$ *и* $Q(\lambda)$ *— аналитические в области* Ω_λ.

Следствие 1. *Если математическая модель объектов управления с распределенными по пространству параметрами соответствует процессам теплопроводности или диффузии, т.е., наряду с* (2)–(5) *выполнено*

$$\begin{gathered} \mathbb{L}_1^{(F)} = \mathbb{L}_{v,1}^{(F)} - \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}, \\ \forall\ (\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^{N_u}) : \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u}) \Big|_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle > 0, \\ \forall\ (\mathbf{u}, \mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^{N_u}) : \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u}) \Big|_S = 0, \\ \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v}) \Big|_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\langle \mathbf{v}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \right\rangle = \left\langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{v}) \right\rangle, \\ \forall\ (\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^{N_u}) : \quad \|\mathbf{u}\| = 1, \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u}) \Big|_S = 0, \end{gathered}$$

$$\left\|\mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u})\right\| \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\left\langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,1}^{(F)}(\mathbf{u})\right\rangle\right| \ll \left\langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u})\right\rangle,$$

то при $|\lambda| \gg 1$, $0 < \alpha < \pi/2$, $\operatorname{Re}\lambda > -|\lambda|\sin\alpha$ *характеристический квазимногочлен* $D(\lambda)$ *и возмущающие квазимногочлены* $Q(\lambda)$ *будут аналитическими функциями* λ.

Утверждение, аналогичное следствию 1, справедливо для объектов управления с распределенными по пространству параметрами, соответствующих упругим средам с учетом внутреннего трения. Аналитичность в высокочастотной области позволила реализовать ряд параллельных алгоритмов параметрического синтеза КДС [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.

2. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* Моделирование, анализ и синтез комбинированных динамических систем : учеб. пособие. Саратов : ООО «Издательский Дом «Райт-Экспо», 2013. 144 с.

3. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Кононов В. В.* К устойчивости системы угловой стабилизации вращающегося упругого стержня под действием продольного ускорения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. № 5. С. 12–25.

4. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. М. : Высш. шк., 1982. 271 с.

5. *Андрейченко Д. К., Ерофтиев А. А., Мельничук Д. В.* Распараллеливание параметрического синтеза по схеме «Портфель задач» на основе технологии MPI // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 222–228.

УДК 517.53

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ Р. НЕВАНЛИННЫ ИЗ L^p-ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ[1]

Е. Г. Родикова (Брянск)

evheny@yandex.ru

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, D — единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех функций, аналитических в D. Для любого $\alpha > -1$ определим класс S_α^p (см. [4]):

$$S_\alpha^p := \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 (1-r)^\alpha T^p(r,f)dr < +\infty \right\},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97508) и Минобрнауки РФ (проект № 1.1704.2014К).

при всех $0 < p < +\infty$, $T(r, f)$ — характеристика Р. Неванлинны функции f (см. [2]).

Для любого $\beta > -1$ обозначим $\pi_\beta(z, \alpha_k)$ — бесконечное произведение М.М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset D$ (см. [1]).

Как установлено в работе [3], если $f \in S_\alpha^p$, то

$$\ln^+ M(r, f) = o\left(\frac{1}{(1-r)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}\right), \quad r \to 1-0,$$

где $M(r, f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Ясно, что если $f \in S_\alpha^p$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — последовательность точек из единичного круга, то оператор $R(f) = (f(\alpha_1), ..., f(\alpha_k), ...)$ отображает класс S_α^p в класс весовых последовательностей

$$l_\alpha^p = \left\{ \gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty} : \ln^+ |\gamma_k| = o\left(\frac{1}{(1-|\alpha_k|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}}\right), \, k \to +\infty \right\}.$$

Последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ назовем *интерполяционной* последовательностью в классе S_α^p, если $R(S_\alpha^p) = l_\alpha^p$.

Углом Штольца $\Gamma_\delta(\theta)$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ называется угол раствора $\pi\delta$, $0 < \delta < 1$, биссектриса которого совпадает с отрезком $re^{i\theta}$, $0 \le r < 1$.

Справедлива:

Теорема. *Пусть $\alpha > -1$, $0 < p < +\infty$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел из D, расположенных в конечном числе углов Штольца:*

$$\{\alpha_k\} \subset \bigcup_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s),$$

при некотором $0 < \delta < \frac{p}{\alpha+p+1}$. Следующие утверждения эквивалентны:

i) $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — интерполяционная последовательность в классе S_α^p;

ii)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p}{2^{k(\alpha+p+1)}} < +\infty,$$

где $n_k = card\{\alpha_k : |\alpha_k| < 1 - \frac{1}{2^k}\}$, $k = 1, 2, ...$,

$$|\pi'_\beta(\alpha_k)| \ge \exp \frac{-\varepsilon(k)}{(1-|\alpha_k|)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}},$$

при всех $\beta > \frac{\alpha+1}{p}$, где $\varepsilon(k) \to 0$, $k \to +\infty$.

Отметим, что решению интерполяционных задач в различных классах аналитических функций посвящено множество работ отечественных и зарубежных ученых: А. Г. Нафталевича, Х. Шапиро и А. Шилдса, С. А. Виноградова и В. П. Хавина, М. М. Джрбашяна, Н. А. Широкова, А. М. Коточигова, К. Сейпа, А. Хартмана, В. А. Беднаж и Ф. А. Шамояна и др. Фундаментальный результат в этой области принадлежит Л. Карлесону [5]. Изменение класса функций, в котором решается задача интерполяции, ведет к изменению в методах ее решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джрбашян М. М.* К проблеме представимости аналитических функций // Сообщ. ИММ АН Арм. ССР. 1948. Т. 2. С. 3–40.

2. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции М.; Л. : ГИТТЛ, 1941. 388 с.

3. *Родикова Е.Г.* Об оценках коэффициентов разложения некоторых классов аналитических в круге функций // Комплексный анализ и приложения : материалы VI Петрозавод. междунар. конф. Петрозаводск : ПетрГУ, 2012. С. 64–69.

4. *Шамоян Ф. А.* Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 6. С. 1422–1440.

5. *Carleson L.* An interpolation problem for bounded analytic functions // Amer. J. Math. 1958. Vol. 80. C. 921–930.

УДК 517.518+519.235

О ПРИМЕНЕНИЯХ ВЕЙВЛЕТОВ К АНАЛИЗУ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Е. А. Родионов (Москва, РФ)

evgeny_980@list.ru

В докладе будет расказано о применениях вейвлетов Добеши [1] и параметрических вейвлетов Лэнга [2] к анализу геофизических и финансовых временных рядов. Диадические вейвлеты Лэнга определяются с помощью функций Уолша, а в соответствующем дискретном преобразовании используются арифметические операции по модулю 2.

Будут рассматриваться сигналы GPS от 1203 стационарных станций, расположенных на Японских островах за период с 30.01.2011 по 26.03.2011 г. Этот период включает более 40 суток до мега-землетрясения 11 марта 2011 года и 16 суток после него. Временные ряды имеют три компоненты, шаг по времени составляет 30 минут. Исследуются статистические свойства шума этих сигналов до и после сейсмической катастрофы. Из временных рядов удаляется линейный тренд и осуществляется переход к приращениям. Для данных до и после землетрясения проводится многомерный статистический анализ трех характеристик шума:

максимального нормированного значения корреляционной матрицы и двух индексов гладкости. Индексы гладкости вычисляюся из условия минимума энтропии распределения квадратов вейвлет-коэффициентов при применения к сигналам GPS дискретных вейвлет-преобразований Добеши и Лэнга. Строятся карты указанных свойств на регулярной сетке по информации от 10 ближайших к узлу станций. Наконец, для каждой компоненты сигналов вычисляется максимальное нормированное собственное значение μ корреляционной матрицы главных компонент свойств шума в скользящем пространственном окне. Результаты вычислений показывают, что до землетрясения зона, включающая его эпицентр является зоной максимальных значений μ, тогда как после сейсмического события эта зона становится зоной слабой корреляции. Это подтверждает гипотезу о повышенной корреляции свойств геофизических шумов в зонах, где возможны крупные землетрясения. Эта часть доклада отражает результаты работы [3].

Кроме того, в докладе будет рассказано о применении ортогональных всплесков Лэнга к анализу финансовых временных рядов. Рассматриваются валютные курсы 29 стран относительно американского доллара за период с 26.02.91 по 31.12.98. Вводятся две меры близости между временными рядами x и y:

$$D_1(x,y) = -\ln\left|\sum_{j,k} \widetilde{d}^{(x)}_{j,k}\widetilde{d}^{(y)}_{j,k}\right|,$$

$$D_2(x,y) = 1 - \left|\sum_{j,k} \widetilde{d}^{(x)}_{j,k}\widetilde{d}^{(y)}_{j,k}\right|,$$

где

$$\widetilde{d}^{(z)}_{j,k} = \frac{d^{(z)}_{j,k}2^j}{\sqrt{\sum_{j,k}\left(d^{(z)}_{j,k}2^j\right)^2}},$$

а $d^{(z)}_{j,k}$ — детализирующие всплесковые коэффициенты для ряда z, из которого удален линейный тренд.

На сетке с шагом 0.1 для параметра диадического преобразования с всплеском Лэнга вычисляются меры близости между курсом швейцарского франка и курсами остальных валют. Наиболее близкими к швейцарскому франку относительно выбранных мер близости оказались валюты шести стран: Нидерландов, Германии, Австрии, Бельгии, Франции и Дании. Это подтверждается данными, полученными в результате применения к этим данным той же методики с вейвлетами Добеши (см. [4]).

Кроме того, проводился кластерный анализ данных временных рядов. В качестве расстояния между двумя элементами выбиралось расстояние на основе коэффициента корреляции. Применялись агломеративные и дивизивные методы кластеризации. В ходе этих исследований курсы тех же шести стран попадали в один кластер со швейцарским франком, более того, курсы этих семи стран целиком составляли данный кластер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 464 с.

2. *Lang W. C.* Orthogonal Wavelets On The Cantor Dyadic Group // Houston J. Math. Anal. 1996. Vol. 27(1). P. 305–312.

3. *Любушин А. А., Яковлев П. В., Родионов Е. А.* Многомерный анализ параметров флуктуаций GPS сигналов до и после мегаземлетрясения 11 марта 2011 г. в Японии // Геофизические исследования. 2015. Т. 16. № 1. С.14–23.

4. *Бурнаев Е. В., Оленев Н. Н.* Меры близости на основе вейвлет коэффициентов для сравнения статистических и расчетных временных рядов // Межвуз. сб. науч. и науч.-метод. тр. за 2005 год (Десятый выпуск). Киров : Изд-во ВятГУ, 2006. С. 41–51.

УДК 517.972:517.98:517.982

ДОМИНАНТНЫЕ ОЦЕНКИ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВАРИАЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА В $W^{1,p}$

И. А. Романенко (Симферополь, РФ)

rom.igor.alex@gmail.com

При исследовании вариационных задач в пространствах Соболева, активно используются так называемые компактные экстремумы и компактно-аналитические (K-аналитические) свойства вариационных функционалов [1, 2]. При этом, применяется метод K-псевдополиномиального представления интегранта вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad \left(y(\cdot) \in W^{1,p}[a; b]\right).$$

Однако это представление не всегда возможно и, кроме того, приводит к рассмотрению задач лишь на соболевской шкале с натуральным интегральным индексом.

В связи с этим, для вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}[a, b]$ с интегральным индексом $(1 \leq p < \infty)$ вводится последовательность *доминантных «оценок роста»* градиента соответствующего порядка от интегранта, каждая из которых гарантирует соответствующий уровень *аналитичности* вариационного функционала в

C^1-*гладких* точках пространства Соболева. Таким образом, при менее сильном условии на интегрант, получаем более сильное свойство вариационного функционала в C^1-гладких точках.

Вначале определим простейшую доминантную оценку.

Определение 1. Будем говорить, что борелевская функция $f : \mathbb{R}_x \times \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ удовлетворяет *доминантной оценке порядка p роста по z* (обозначение: $f \in B_p(z)$, $0 < p < \infty$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ существуют неотрицательные константы $A_1(C)$ и $A_2(C)$ такие, что для любых $(x, y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$, f допускает оценку:

$$\big|f(x,y,z)\big| \le A_1(C) + A_2(C)|z|^p.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если интегрант $f \in B_p(z)$ $(1 \le p < \infty)$, то вариационный функционал Эйлера – Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx, \quad \big(y(\cdot) \in W^{1,p}[a;b]\big)$$

всюду определен в пространстве $W^{1,p}[a;b]$. Кроме того, для любого компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$ при $y(\cdot) \in C_\Delta$ справедлива локальная оценка:

$$\big|\Phi(y)\big| \le \alpha(C_\Delta) + \beta(C_\Delta)\|y\|^p_{W^{1,p}},$$

где коэффициенты α и β зависят только от выбора компакта C_Δ; $\alpha, \beta \ge 0$.

Далее введем более сильную доминантную оценку.

Определение 2. Будем говорить, что непрерывная функция $f \in \in B_p(z)$ $(0 < p < \infty)$ удовлетворяет *C-доминантной оценке порядка p роста по z* (обозначение: $f \in CB_p(z)$), если для любого компакта $C \subset \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ и для любых приращений h, k, соответственно, переменных y, z, при $(x, y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$ приращение f допускает оценку:

$$|\Delta_{yz} f(x,y,z;h,k)| = |f(x,y+h,z+k) - f(x,y,z)| \le \\ \le A_1(C;h,k) + A_2(C;h,k)\,|z|^p,$$

где коэффициенты A_i $(i = 1, 2)$ — неотрицательные борелевские функции от h, k, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) A_i локально по h ограничены равномерно по k;

(ii) $A_i(C; h, k) = o(1)$ при $h, k \to 0$.

Справедлива теорема о непрерывности вариационного функционала.

Теорема 2. *Если интегрант* $f \in CB_p(z)$ $(1 \le p < \infty)$, *то вариационный функционал непрерывен всюду в* $W^{1,p}[a;b]$.

Продолжая процесс усиления доминантных оценок, будем оценивать остаточный член формулы Тейлора первого порядка градиента от интегранта, увеличивая порядок градиента. При этом, дадим общее определние доминантных оценок роста.

Определение 3. Будем говорить, что n раз непрерывно дифференцируемая функция $f \in C^{n-1}B_p(z)$ $(n \in \mathbb{N}, 0 < p < \infty)$ удовлетворяет *C^n-доминантной оценке порядка p роста по z* (обозначение: $f \in C^n B_p(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ и для любых приращений h, k, соответственно, переменных y, z, при $(x,y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$, остаточный член формулы Тейлора первого порядка для $\nabla_{yz}^{n-1} f$ допускает оценку:

$$\begin{gathered}\left|\left(\Delta_{yz}\left(\nabla_{yz}^{n-1} f\right) - \nabla_{yz}\left(\nabla_{yz}^{n-1} f\right)\right)(x,y,z)(h,k)\right| = \\ = \left|\ \left[\nabla_{yz}^{n-1} f(x, y+h, z+k) - \nabla_{yz}^{n-1} f(x,y,z)\right] - \right. \\ \left. -\nabla_{yz}\left(\nabla_{yz}^{n-1} f(x,y,z)\right) \cdot (h,k)\right| \le A_1(C;h,k) + A_2(C;h,k)|z|^p,\end{gathered}$$

где коэффициенты A_i $(i = 1,2)$ — неотрицательные борелевские функции от h, k, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) A_i локально по h ограничены равномерно по k;

(ii) $A_i(C;h,k) = o(|h| + |k|)$ при $h, k \to 0$.

Также справедлива теорема об n-кратной дифференцируемости вариационного функционала.

Теорема 3. *Если интегрант* $f \in C^n B_p(z)$ $(n \le p < \infty)$, *то вариационный функционал n раз дифференцируем во всех C^1-гладких точках из* $W^{1,p}[a;b]$. *При этом справедливо равенство:*

$$\Phi^{(n)}(y)(h)^n = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} h + \frac{\partial}{\partial z} h'\right)^n f(x,y,y')dx.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Orlov I. V.* Compact-analitical properties of variational functionals in Sobolev spaces $W^{1,p}$ // Eurasian Math. J. 2012. Vol. 3, № 2. P. 94–119.

2. *Кузьменко Е. М.* Компактные экстремумы и компактно аналитические свойства вариационных функционалов в шкале пространств Соболева $W^{1,p}$ над многомерной областью : дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 "Вещественный, комплексный и функциональный анализ". Симферополь, 2014. 142 с.

УДК 517.984

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО НЕРЕГУЛЯРНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ[1]

В. С. Рыхлов (Саратов, РФ)
RykhlovVS@yandex.ru

На отрезке [0,1] рассмотрим краевую задачу на собственные значения (с.з.) для пучка $L(\lambda)$:

$$y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) - y'(0) = 0. \tag{1}$$

Характеристическое уравнение $\omega^2 - 2\omega + 1 = 0$ пучка имеет кратные корни $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Характеристический определитель $\Delta(\lambda) = e^\lambda - 1$ является вырожденным, а пучок $L(\lambda)$, таким образом, нерегулярным [1, с. 66–67]. С.з. пучка являются числа $\lambda_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решается задача нахождения условий на вектор-функцию (в.-ф.) $f = (f_1, f_2)^T$, при которых имеет место двукратная разложимость этой в.-ф. в биортогональный ряд Фурье по производным цепочкам пучка $L(\lambda)$ (см. [1, с. 102]).

В нерегулярном случае обыкновенного дифференциального оператора 3-го порядка, когда характеристики лежат в вершинах правильного треугольника, задача о разложении решена в [2]. Разложения по корневым функциям в случае регулярного пучка с четырехкратными характеристиками изучались в [3]. Случай нерегулярного пучка второго порядка с простыми характеристиками рассматривался в [4].

Для данной в.-ф. $f = (f_1, f_2)^T$ определим функцию $F(x, \lambda, f) := -\lambda f_1(x) + 2f_1'(x) - f_2(x)$. Обозначим через Γ_k круговые контуры с центром в начале координат и радиуса $(2k-1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $G(x, t, \lambda)$ есть функция Грина задачи (1).

Теорема 1. *Если в.-ф. f удовлетворяет условиям:*

$$f_1''', f_2'' \in L_p[0,1], \ 1 < p \le +\infty, \tag{2}$$

$$f_1^{(s)}(0) = f_1^{(s)}(1) = 0, \ s = 0,1,2; \ f_2^{(s)}0) = f_2^{(s)}(1) = 0, \ s = 0,1. \tag{3}$$

то имеют место следующие формулы двукратного разложения в.-ф. f по собственным функциям пучка $L(\lambda)$:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} \lambda^s \int_0^1 G(x,t,\lambda) F(x,\lambda,f)\, d\lambda =$$

[1] Работа подготовлена в рамках выполнения проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

$$= f_s(x) + (1-x)\Big(xf_1'(x) - f_1(x) - xf_2(x)\Big)^{(s-1)}, \quad s=1,2,$$

где сходимость равномерная по $x \in [0,1]$.

Из этой теоремы получаем результат о разложении в.-ф. f в биортогональный ряд фурье по производным цепочкам пучка $L(\lambda)$.

Теорема 2. *Пусть в.-ф.* f *удовлетворяет условиям* (2)–(3). *Для того, чтобы имели место следующие формулы двукратного разложения в.-ф.* f *по собственным функциям пучка* $L(\lambda)$ *с равномерной сходимостью по* $x \in [0,1]$*:*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} \lambda^s \int_0^1 G(x,t,\lambda) F(x,\lambda,f)\, d\lambda = f_s(x), \quad s=1,2,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее тождество

$$xf_1'(x) - f_1(x) - xf_2(x) \equiv 0.$$

Доказательство теоремы 1 проводится путем линеаризации задачи (1) подстановкой $z_1 = y$, $z_2 = \lambda z_1$. В результате получается краевая задача на собственные значения уже для обыкновенного дифференциального оператора $\hat{L}$, но в пространстве вектор-функций $z = (z_1, z_2)^T$: $\hat{L}z - \lambda z = = 0$, где

$$\hat{L}z := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{d^2}{dx^2} & \frac{d}{dx} \end{pmatrix} z,$$

$$D_{\hat{L}} = \Big\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Big| z_1', z_2 \in L_1[0,1],\ z_1(0) = 0,\ z_1(1) - z_1'(0) = 0 \Big\}.$$

Очевидно, с.з. пучка $L(\lambda)$ и оператора $\hat{L}$ совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ (см. [1, с. 102]) совпадает с системой собственных в.-ф. оператора $\hat{L}$.

Хорошо известно, что $\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \hat{R}_\lambda f\, d\lambda$, где $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda E)^{-1}$ резольвента оператора $\hat{L}$, есть частичная сумма разложений в.-ф. f в биортогональный ряд Фурье по собственным в.-ф. оператора $\hat{L}$, соответствующим тем с.з., которые попали внутрь контура Γ_k.

Пусть $\hat{R}_\lambda f = \big(z_1(x,\lambda;f), z_2(x,\lambda;f)\big)^T$. В доказательстве теоремы 1 используются явные формулы для функции $z_1(x,\lambda;f)$ и $z_2(x,\lambda;f)$, которые даются в следующей лемме.

Лемма 1. *Если* $f_0', f_1 \in L_1[0,1]$ *то при* $\operatorname{Re}\lambda \le 0$

$$z_1(x,\lambda;f) = \int_0^1 G(x,t,\lambda) F(t,\lambda;f)\, dt = \int_0^x (x-t) e^{\lambda(x-t)} F(t,\lambda;f)\, dt +$$

$$+\frac{1}{1-e^{\lambda}}\int_0^1 x(1-t)e^{\lambda(x+1-t)}F(t,\lambda;f)\,dt;$$

а при $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$

$$z_1(x,\lambda;f)=\int_0^1 G(x,t,\lambda)F(t,\lambda;f)\,dt=\int_x^1 (t-x)e^{\lambda(x-t)}F(t,\lambda;f)\,dt+$$

$$+\int_0^1 (x-1)te^{\lambda(x-t)}F(t,\lambda;f)\,dt+$$

$$+\frac{1}{1-e^{-\lambda}}\int_0^1 x(t-1)e^{\lambda(x-1-t)}F(t,\lambda;f)\,dt;$$

$$z_1(x,\lambda;f)=\lambda z_0(x,\lambda;f)+f_0(x).$$

Дальнейшее доказательство проводится с использованием приведенных в лемме 1 формул аналогично доказательству соответствующей теоремы о разложении в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969.

2. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. Уфа, 1988. С. 182–193.

3. *Вагабов А. И., Абуд А. Х.* Четырехкратная разлолжимость в ряды Фурье по корневым элементам дифференциального пучка с четырехкратной характеристикой // Вестник Дагест. гос. ун-та. 2015. Т. 30, вып. 1. С. 34–39.

4. *Рыхлов В. С.* Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 21–26.

УДК 517.518

ОЦЕНКИ КОНСТАНТЫ ЧИГЕРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ[1]

К. С. Рютин (Москва, РФ)
kriutin@yahoo.com

Пусть σ, V — площадь поверхности и объём выпуклого тела в $\mathbb{R}^n$, а B_p^n — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_p, $1 \leq p \leq \infty$. Известна следующая задача : найти множество $\mathcal{C}$ в заданном открытом $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с минимальным отношением σ/V, называемым константой Чигера $h(\Omega)$. Данная величина была введена Чигером [1] для оценки минимального

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00332).

собственного значения оператора Лапласа в области Ω. Интересные приложения неравенства Чигера содержатся в [2, 3], а обзор результатов по этой проблематике есть, скажем, в [4].

Областей для которых известно множество Чигера крайне мало. Известно, что для экстремального множества в регулярной точке $\partial\mathcal{C}$ средняя кривизна постоянна. Для выпуклого Ω экстремаль существует, единственна и выпукла [5], а граница имеет как минимум класс $C^{1,1}$. Более того, для $x \in \partial\Omega$ C^1-гладкость $\partial\Omega$ в некоторой окрестности x влечёт C^1-гладкость $\mathcal{C}$. Естественная задача — изучить множества Чигера случайных многогранников и l_p^n-шаров.

Для l_p^n-шаров, при $n = 2$ выполнено

Если $1 \le p < 2$ и $p^* < p \le \infty$, то $\mathcal{C}$ — собственное подмножество B_p^2 (его граница состоит из дуг границы B_2^p, а в окрестности 4х максимумов кривизны ∂B_p^2 граница заменяется на дуги окружностей). Если $2 \le p \le p^*$, то $\mathcal{C} = B_p^2$, где p^* — решение уравнения

$$(p-1)2^{(1/p-1/2)}\frac{\Gamma^2(1+1/p)}{\Gamma(1+2/p)} = \int_0^1 \sqrt{1+(1-x^p)^{(2/p-2)}x^{2p-2}}\,dx.$$

А при $n > 2$ справедливо

$$h(B_p^n) \ge c_p n^{1/2+1/p},$$

где $c_p > 0$.

Для оценки сверху (вероятно) необходимо уметь строить собственные функции лапласиана в B_p^n специального вида. В докладе речь пойдёт про оценки константы Чигера случайных многогранников и некоторые другие вопросы, связанные с множествами и функционалом Чигера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cheeger J.* A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian // Problems in analysis. 1970. P. 195–199.

2. *Kindler G., Rao A., O'Donnell R., Wigderson A.* Spherical cubes: Optimal foams from computational hardness amplification // Commun. of the ACM. 2012. Vol. 55, № 10. P. 90–97.

3. *Alon N., Klartag B.* Economical toric spines via Cheeger's inequality // J. Topol. Anal. 2009. Vol. 1, № 2. P. 101–111.

4. *Parini E.* An introduction to the Cheeger problem // Surv. in Math. and Appl. 2011. Vol. 6. P. 9–22.

5. *Alter F., Caselles V.* Uniqueness of the Cheeger set of a convex body // Nonlin. analysis. 2009. Vol. 70. P. 32–44.

УДК 517.92725

РАВНОСХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ 2-ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ[1]

А. М. Сарсенби (Шымкент, Казахстан)
abzhahan@mail.ru

В работах [1, 2] исследована спектральная задача

$$-u''(-x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < 1, \tag{1}$$

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{2}$$

Было установлено, что система собственных функций вида

$$\left\{\sin k\pi x,\ k = 1, 2, ...,\ \cos\left(l + \tfrac{1}{2}\right)\pi x,\ l = 0, 1, 2, ...\right\}$$

образует ортонормированный базис пространства $L_2(-1, 1)$. В связи с этим естественно возникает вопрос: будет ли базисом в пространстве $L_2(-1, 1)$ система собственных функций спектральной задачи

$$-u''(-x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < 1, \tag{3}$$

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0,$$

с непрерывным комплекснозначным коэффициентом $q(x)$.

В работе [3] построена функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и со спектральным параметром (1), (2).

Рассмотрим краевую задачу

$$-u''(-x) = \lambda u(x) + f(x), \tag{4}$$

с краевыми условиями (2), где $f(x)$ — непрерывная функция.Функцией Грина краевой задачи (1)–(2) назовем такую функцию $G(x, t, \lambda)$, что функция

$$u(x) = \int\limits_{-1}^{1} G(x, t, \lambda) f(t)\, dt$$

является решением краевой задачи (4), (2).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК (проекты № 0971/ГФ4, № 5414/ГФ4).

Теорема 1 [3]. *Если λ не является собственным значением однородной краевой задачи* (1)–(2), *то ее функция Грина имеет вид*

$$G(x,t,\lambda)=\frac{1}{8\rho}\left\{\frac{e^{\rho}+e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)-\right.$$

$$\left.-i\frac{e^{i\rho}-e^{-i\rho}}{e^{i\rho}+e^{-i\rho}}\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)\right\}+g(x,t,\lambda), \tag{5}$$

$$g(x,t,\lambda)=\frac{1}{8\rho}\times$$

$$\times\begin{cases}-i\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}-e^{-i\rho t}\right)+\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right), t\le -x,\\ i\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)\left(e^{i\rho x}-e^{-i\rho x}\right)-\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)\left(e^{\rho x}+e^{-\rho x}\right), -x\le t\le x,\\ i\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}-e^{-i\rho t}\right)-\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right), t\ge x.\end{cases}$$

С помощью функции Грина (5) мы можем написать, разложение произвольной функции из класса $L_1(-1,1)$ по собственным функциям спектральной задачи (1)–(2).

В комплексной $\rho=\sqrt{\lambda}$ плоскости рассмотрим окружности P_{k1}, $k=1,2,...$, P_{k2}, $k=0,1,...$, с общим центром в начале координат:

$$P_{k1}:|\rho|=k\pi+\frac{1}{4}, P_{k2}:|\rho|=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{1}{4}.$$

При $\lambda=\rho^2$ окружности P_{k1}, P_{k2} соответственно переходят в окружности $\widetilde{P}_{k1}$, $\widetilde{P}_{k2}$ в λ плоскости

$$P_{k1}:|\rho|^2=(k\pi+\frac{1}{4})^2; P_{k2}:|\rho|^2=\left((k+\frac{1}{2})\pi+\frac{1}{4}\right)^2.$$

Для любой функции $f(x)\in L_1(-1.1)$ частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (1), (2) имеет вид (см., например, [4])

$$\sigma_m(f)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{P}_m}\left(\int\limits_{-1}^{1}G(x,t,\lambda)f(t)\,dt\right)d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{P_m}\left(\int\limits_{-1}^{1}G(x,t,\lambda)f(t)\,dt\right)2\rho d\rho.$$

Подробные вычисления приводят к соотношению вида

$$\sigma_m(f) = \sum_{k=1}^{m} a_k \sin k\pi x + \sum_{k=0}^{m} b_k \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x,$$

где

$$a_k = \int\limits_{-1}^{1} f(t) \sin k\pi t dt,\ b_k = \int\limits_{-1}^{1} f(t) \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi t dt.$$

Обозначим через $G_q(x,t,\lambda)$ функцию Грина задачи (3), (2), а через $G(x,t,\lambda)$ — функцию Грина задачи (1), (2). Частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (3), (2) обозначим через

$$S_m(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\left[\int\limits_{P_m} G_q(x,t,\lambda) 2\rho d\rho\right] f(t)dt.$$

Последовательность $S_m(f)$ назовем равносходящимся с последовательностью $\sigma_m(f)$ на промежутке $-1 \leq x \leq 1$, если $S_m - \sigma_m \to 0$ равномерно на этом промежутке при $m \to \infty$.

Теорема 2. *Для любой функции $f(x) \in L_1(-1,1)$ последовательность $S_m(f)$ равносходится с последовательностью $\sigma_m(f)$.*

Результаты настоящей заметки имеют тесную внутреннюю связь с циклом работ профессора А. П. Хромова и его последователей [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sadybekov M. A., Sarsenbi A. M.* Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution // Differ. Equations. 2012. Vol. 48, № 8. P. 1112–1118.

2. *Sarsenbi A. M.* Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator // Differ. Equations. 2010. Vol. 46, № 4. P. 509–514.

3. *Sarsenbi A. M.* The Green's function of the second-order differential operator with an involution and its application // AIP Conf. Proc. 2015. Vol. 1676. 020010. DOI: 10.1063/1.4930436.

4. *Coddington E. A., Levinson N.,* Theory of ordinary differential equations. N. Y., Toronto, London, 1955.

5. Math-Net.Ru. Персоналии. Хромов Август Петрович. URL: http://www.mathnet.ru/rus/person9199 (дата обращения 16.12.2015).

УДК 517.5

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ БЕССЕЛЯ И БАЗИСЫ РИССА[1]

А. М. Сарсенби (Шымкент, Казахстан)
abzhahan@mail.ru
П. А. Терехин (Саратов, РФ)
terekhinpa@mail.ru

Пусть $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полные в пространстве $L^2(0,1)$ биортогонально сопряженные друг к другу системы функций. Решению задачи о базисности по Риссу таких систем функций посвящены многочисленные исследования по функциональному анализу, теории функций, спектральной теории дифференциальных операторов и вычислительной математике. Следует упомянуть фундаментальную работу Н. К. Бари [1], где такая задача была поставлена и решена во всей ее общности на основе установленной двойственности между введенными понятиями бесселевой и гильбертовой системы, а также системы Фишера – Рисса, которую в современной терминологии общепринято называть фреймом. Общность подхода Бари делает его наиболее широко используемым методом установления базисности по Риссу систем функций. Как хорошо известно, суть метода состоит в получении оценок

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f,u_n)|^2 \le B\|f\|_2^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |(f,v_n)|^2 \le B\|f\|_2^2,$$

для любой функции $f \in L^2(0,1)$ или, что эквивалентно, в доказательстве сходимости в пространстве $L^2(0,1)$ каждого из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x), \tag{1}$$

с произвольными коэффициентами $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$.

Заметим, что условие сходимости рядов (1) можно записать так: $\ell^2 \subset X(u) \cap X(v)$, где $X(u)$ — пространство коэффициентов системы $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. пространство всех числовых последовательностей $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых сходится первый из рядов в (1). Кроме того, само условие базисности по Риссу означает, что $X(u) = X(v) = \ell^2$.

[1]Первый автор поддержан Минобрнауки Республики Казахстан (проекты № 0971/ГФ4, 5414/ГФ4). Второй автор подготовил работу в рамках выполнения проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К), а также при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

В спектральной теории дифференциальных операторов известен ряд результатов, показывающих, что для безусловной базисности собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов необходимо и достаточно выполнения условий вида

$$\|u_n\|_\infty \le C\|u_n\|_2, \qquad \|v_n\|_\infty \le C\|v_n\|_2, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

— см., напр., [2, 3]. В связи с этим возникает вопрос: для каких классов полных биортогонально сопряженных систем функций выполнение условия равномерной ограниченности типа (2) гарантирует их базисность по Риссу? А также вопрос: какие дополнительные условия к условию типа (2) обеспечивают базисность по Риссу общих систем функций? Подобные вопросы можно поставить и относительно свойства бесселевости отдельной системы функций.

Теорема 1 [4]. *Пусть полные биортогонально сопряженные системы функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$ равномерно ограничены в пространстве $L^2(0,1)$:*

$$\|u_n\|_2 \le C, \qquad \|v_n\|_2 \le C, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

и оба пространства коэффициентов $X(u)$ и $X(v)$ являются идеальными пространствами последовательностей. Тогда обе системы $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$ образуют базис Рисса.

Напомним, что банахово пространство последовательностей X называется идеальным, если из условий $|a_n| \le |b_n|$, $n = 1, 2, \dots$, и $\{b_n\}_{n=1}^\infty \in X$ следует, что $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in X$.

Аналогичный теореме 1 результат справедлив и для бесселевых систем. А именно, равномерно ограниченная в $L^2(0,1)$ система функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$, у которой пространство коэффициентов $X(u)$ является идеальным, будет системой Бесселя.

Заметим также, что в формулировке теоремы 1 пару $X(u)$ и $X(v)$ можно заменить на $X(u) \cap \ell^2$ и $X(v) \cap \ell^2$.

Несмотря на то, что все условия теоремы 1 являются необходимыми, остается открытым вопрос: можно ли отбросить дополнительное требование об идеальности пространств коэффициентов для конкретных классов систем функций? Такие примеры известны. Укажем на один из них.

Пусть V — оператор (простого, одностороннего) сдвига в гильбертовом пространстве H. Это означает, что $V : H \to H$ — изометрия пространства H и существует вектор $e \in H$ такой, что система $\{V^n e\}_{n=0}^\infty$ образует ортонормированный базис в H. Оператор сдвига реализуется как оператор $Vf(z) = zf(z)$, действующий в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$. Как известно, система функций $\{z^n f(z)\}_{n=0}^{\infty}$ является бесселевой (базисом Рисса) тогда и только тогда, когда $f \in H^{\infty}(\mathbb{D})$ (соответственно, $f, 1/f \in H^{\infty}(\mathbb{D})$). Видим, что никаких дополнительных условий к условию равномерной ограниченности не требуется.

Теперь рассмотрим операторную структуру мультисдвига в гильбертовом пространстве, которая является аналогом оператора сдвига для случая двух некоммутирующих операторов. Пара изометрий W_0 и W_1 гильбертова пространства H называется мультисдвигом, если существует вектор $e \in H$ такой, что система $\{W^{\alpha} e\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ образует ортонормированный базис в H. Поясним, что $W^{\alpha} = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}}$ обозначает произведение операторов для каждого мультииндекса $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ из семейства $\mathbb{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0,1\}^k$. Мультисдвиг реализуется как пара операторов

$$W_0 f(x) = f(2x), \qquad W_1 f(x) = r(x) f(2x),$$

в пространстве $L_0^2(0,1)$, состоящем из всех функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$f \in L^2(0,1), \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = 0, \qquad f(x+1) = f(x).$$

Здесь $r(x)$ — периодическая функция Хаара – Радемахера – Уолша. Семейство функций $\{W^{\alpha} f(x)\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ называется аффинной системой функций типа Уолша [5]. Сопоставим каждому мультииндексу $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A}$ натуральное число $n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_{\nu} 2^{\nu} + 2^k$. Получим следующее представление функций аффинной системы

$$f_n(x) = W^{\alpha} f(x) = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}} f(x) = f(2^k x) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_{\nu}^{\alpha_{\nu}}(x),$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — система Радемахера.

Будут ли для аффинных систем функций типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ справедливы аналоги результатов о бесселевости и базисности по Риссу систем аналитических функций вида $\{z^n f(z)\}_{n=0}^{\infty}$? Покажем, что ответ будет отрицательным.

Теорема 2. *Существует непрерывная функция $f(x) \in L_0^2(0,1)$, порождающая аффинную систему типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая не является системой Бесселя.*

Конструкция требуемой функции $f(x)$ основана на использовании примера Е. М. Никишина [6], дающего решение одной задачи П. Л. Ульянова [7].

Для сравнения с теоремой 2 приведем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть функция* $f(x) \in L_0^2(0,1)$ *удовлетворяет условию Липшица* $|u(x) - u(y)| \le L|x-y|^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$. *Тогда аффинная система функций типа Уолша* $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ *является системой Бесселя.*

Аналогичный теореме 2 результат имеет место и для базисов Рисса, т.е. существует ограниченная функция $f \in L_0^2(0,1)$, порождающая полную в пространстве $L_0^2(0,1)$ минимальную (с полной в $L_0^2(0,1)$ биортогонально сопряженной системой) аффинную систему функций типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$, которая не является базисом Рисса.

Приведенные результаты показывают, что дополнительное условие идеальности пространств коэффициентов в теореме 1 не может быть отброшено в классе аффинных систем функций. Выбор нами класса аффинных систем функций продиктован глубокой аналогией (основанной на сопоставлении оператора сдвига и операторов мультисдвига в гильбертовом пространстве) в структуре этих систем и систем аналитических функций $\{z^n f(z)\}_{n=0}^\infty$, для которых никаких дополнительных условий, обеспечивающих их бесселевость и базисность по Риссу, не требуется.

В докладе планируется также представить различные признаки базисности по Риссу аффинных систем функций и указать примеры аффинных систем Бесселя и базисов Рисса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бари Н. К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. записки Моск. гос. ун-та. 1951. Вып. 148. С. 69–107.

2. *Ильин В. А., Крицков Л. В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. 2006. Т. 96. С. 5–105.

3. *Сарсенби А. М.* Критерии базисности Рисса систем собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов высших порядков на отрезке // ДАН. 2008. Т. 419, вып. 5. С. 601–603.

4. *Sarsenbi A. M., Terekhin P. A.* Riesz Basicity for General Systems of Functions // J. Function Spaces. 2014. Vol. 2014. Article ID 860279.

5. *Терехин П. А.* Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. вып. 4, ч. 1. С. 395–400.

6. *Никишин Е. М.* О рядах по системе $\varphi(nx)$ // Матем. заметки. 1969. Т. 5, вып. 5. С. 527–532.

7. *Ульянов П. Л.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов // УМН. 1964. Т. 19, вып. 1(115). С. 3–69.

УДК 517.95

О ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА КВАЗИМОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ[1]

А. В. Светлов (Волгоград, РФ)
a.v.svetlov@gmail.com

Рассмотрим многообразие M, представимое в виде $K \cup D$, где K — компактное мноогообразие, а конец D — простое скрещенное произведение. Простым скрещенным произведением порядка k мы называем полное риманово многообразие D, изометричное произведению $\mathbf{R_0} \times$ $\times\, \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \cdots \times \mathrm{S}_k$ (где $\mathbf{R_0} = (r_0, +\infty)$, а S_i — компактные римановы многообразия без края размерности n_i) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + q_1^2(r)d\theta_1^2 + \cdots + q_k^2(r)d\theta_k^2,$$

где $d\theta_i^2$ метрика на S_i, а $q_i(r)$ — гладкие положительные на $\mathbf{R_0}$ функции.

Рассмотрим на многообразии M оператор Лапласа – Бельтрами

$$-\Delta = -\mathrm{div}\nabla$$

и оператор Шредингера

$$L = -\Delta + c(r, \theta),$$

где $c(r, \theta)$ — произвольная функция на многообразии. Кроме того, введем обозначение $s(r) = q_1^{n_1}(r) \cdot \dots \cdot q_k^{n_k}(r)$. Заметим, что такие многообразия являются простым обобщением искривленных произведений порядка k, поведение решений различных эллиптических уравнений на которых достаточно подробно изучено А. Г. Лосевым, Е. А. Мазепой (см., напр., [1, 2]) и другими авторами, причем разработанные методы оказались применимы и для многообразий более общего вида (см. [3, 4]).

Будем говорить, что спектр оператора дискретен, если он состоит лишь из собственных значений конечной кратности. Для оператора Лапласа – Бельтрами известен критерий дискретности спектра на рассматриваемых многообразиях. При этом для оператора Шредингера удается получить критерий дискретности спектра только при наложении некоторых условий на потенциал и метрику многообразия. В частности, от потенциала требовалась радиальная симметричность (см. [6–8]), т.е. рассматривался оператор Шредингера вида

$$L_r = -\Delta + c(r).$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-41-02479-р_поволжье_а).

В настоящей работе получены достаточные условия дискретности спектра оператора Шредингера с потенциалом общего вида на квазимодельных многообразиях.

Будем обозначать $V(\cdot)$ и $\operatorname{cap}(\cdot)$ объём и ёмкость соответствующих объектов, а $B(r) = \{(\rho, \theta) \in D : \ \rho < r\}$ — шар радиуса r с центром в начале координат на многообразии D.

Теорема 1. *Пусть $c(r, \theta) \geq 0$. Тогда спектр оператора Шрёдингера L на многообразии M дискретен, если на конце D выполнено одно из условий:*

$$V(D) < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{V(D \setminus B(r))}{\operatorname{cap}(B(1), B(r))} = 0,$$

или

$$\operatorname{cap} B(1) > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{V(B(r))}{\operatorname{cap} B(r)} = 0.$$

Отметим, что условия, выполнение которых требуется в данной теореме, для дискретности спектра оператора Лапласа – Бельтрами являются не только достаточными, но и необходимыми [5].

Далее нам потребуется еще одно обозначение:

$$F(r) = \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)' + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)^2.$$

Имеет место так же следующий результат.

Теорема 2. *Если на многообразии M существует функция $\tilde{c}(r)$ такая, что $c(r, \theta) \geq \tilde{c}(r)$ и $\tilde{c}(r) + F(r) > -C$ ($C = \mathrm{const} > 0$), то для дискретности спектра оператора Шредингера L на многообразии M достаточно, чтобы для произвольного $\omega > 0$ было выполнено*

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_r^{r+\omega} (\tilde{c}(r) + F(r))\, dr = +\infty.$$

Заметим, что для некоторых случаев потенциала данное утверждение так же является и необходимым условием дискретности спектра оператора Шредингера, а в простейшем случае, если вместо квазимодельного многообразия рассматривать числовую приямую, оно соответствует известному критерию дискретности спектра А.М. Молчанова на прямой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лосев А. Г.* О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 87–93.

2. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, вып. 1. С. 84–110.

3. *Корольков С. А., Светлов А. В.* Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера в неограниченных областях римановых многообразий // Наука и образование в современной конкурентной среде : материалы междунар. науч.-практ. конф. : в 3-х частях. Уфа, 2014. С. 215–221.

4. *Korolkova E., Korolkov S., Svetlov A.* On solvability of boundary value problems for solutions of the stationary Schrödinger equation on unbounded domains of Riemannian manifolds // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2014. Vol. 97, № 2. P. 231–240.

5. *Светлов А. В.* Критерий дискретности спектра оператора Лапласа–Бельтрами на квазимодельных многообразиях // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1362–1371.

6. *Светлов А. В.* Спектр оператора Шреденгера на скрещенных произведениях // Вестн. Волоград. гос. ун-та. Сер. 1, Математика. Физика. 2002. № 7. С. 12–19.

7. *Svetlov A. V.* Discreteness criterion for the spectrum of the Schrödinger operator on weighted quasimodel manifolds // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2013. Vol. 89, № 3. P. 393–400.

8. *Светлов А. В.* О спектре оператора Шредингера на многообразиях специального вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, № 4, ч. 2. С. 584–589.

УДК 517.5

ЗАДАЧА О ДВУХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКАХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ И ПРОБЛЕМА МОРЕРЫ

В. Е. Силенко (Орехово-Зуево, РФ)
V.Silenko@bk.ru

В работе рассматриваются проблемы Помпейю и Мореры и их обобщения на гиперболической плоскости для случая двух гиперболических прямоугольников.

Ранее С. А. Вильямс для евклидового пространства $X = \mathbb{R}^n$, К. А. Беренстейн и М. Шахшахани в [1, следствие 1] для симметрического пространства $X = G/K$ некомпактного типа (с группой движений G) получили достаточные условия того, что данный компакт является множеством Помпейю. В связи с этим возникли задачи об исследовании нескольких множеств (например, задачи о двух кругах, трех квадратах в $\mathbb{R}^2$), а также задачи о нахождении дополнительных ограничений на класс функций, если рассматривается лишь подгруппа (например, сдвигов) группы G. Такие задачи были предметом исследований многих математиков, среди которых Д. Помпейю, Л. Браун, Ф. Шницер и А. Л. Шилдс, Л. Зальцман, К. А. Беренстейн, Б. А. Тейлор, П. Г. Лард, Р. Гэй, А. Ижер, Р. М. Тригуб, В. П. Заставный, В. В. Волчков, Вит. В. Волчков и другие.

В частности, точные условия на рост функций для случаев параллелепипеда и эллипсоида в $\mathbb{R}^n$ приведены в [2].

Автором получены точные условия на рост функций $f \in C(\mathbb{H}^2)$, для которых гиперболический прямоугольник является множеством Помпейю для группы "сдвигов" NA гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$. Найдены примеры функций с нулевыми интегралами по гиперболическим прямоугольникам, подтверждающие точность полученных условий. В теореме 1 приведено обобщение задачи на случай двух гиперболических прямоугольников, дающее решение задачи, поставленной В.В. Волчковым в [2, с. 229].

Проблема Помпейю тесно связана с классической теоремой Мореры из комплексного анализа. Исследуя проблему Мореры на гиперболической плоскости, М. Л. Аграновский в [3, теорема 1] получил общее условие $f \in L^2(\mathbb{H}^2)$, являющееся неточным для некоторых конкретных контуров и излишним для каждой кусочно-гладкой жордановой кривой, ограничивающей множество со свойством Помпейю. Для случая окружности неулучшаемые условия установлены В. В. Волчковым в [4, теорема 1].

Как применение вышеописанных задач типа Помпейю автором найдены новые обобщения теоремы Мореры. Для группы «сдвигов» гиперболической плоскости в [5] приведены условия на рост функций $f \in C(D)$, для которых граница гиперболического прямоугольника является множеством Мореры. В теореме 2 рассмотрен случай двух гиперболических прямоугольников. При этом показано, что условие $f \in L^2(D)$, накладывающее ограничения на поведение функции вблизи всей границы единичного круга D, можно заменить ограничениями на рост функции лишь в окрестности $z_0 = 1$. Найдены примеры функций с нулевыми интегралами по границам гиперболических прямоугольников, подтверждающие точность полученных условий.

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — плоскость Лобачевского $\mathbb{H}^2$ с неевклидовым расстоянием $d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1-\overline{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1-\overline{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|}$ между точками $z_1, z_2 \in D$ и мерой $d\omega = \frac{dxdy}{(1-|z|^2)^2}$. Группа $G = SU(1,1)$ состоит из комплексных матриц $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right)$ с определителем $|a|^2 - |b|^2 = 1$ и действует на D посредством отображений $g \circ z = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$. Разложение Ивасавы группы G имеет вид $G = KAN$, где $K = SO(2)$ – группа вращений $\mathbb{C}$, $A = \left\{a_t = \left(\begin{smallmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$, $N = \left\{n_s = \left(\begin{smallmatrix} 1+is & -is \\ is & 1-is \end{smallmatrix}\right) : s \in \mathbb{R}\right\}$.

Для $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$ и $z \in D$ обозначим $\lambda_l(z) = \frac{e^{2l}(1-|z|^2)-(1+|z|^2-2z)}{e^{2l}(1-|z|^2)+(1+|z|^2-2\overline{z})}$ и назовем гиперболическим прямоугольником следующее множество

$$Q_\alpha = \{z = n_s a_t \circ 0 : 0 \le s \le \alpha,\ 0 \le t \le 1\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in C(D)$,

$$\forall z \in D \qquad f\left(\lambda_l(z)\right) = o\left(e^{2l}\right) \quad \text{при } l \to +\infty, \quad l \in \mathbb{N},$$

и для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 > 0$

$$\iint\limits_{gQ_{\alpha_1}} f(z)\, d\omega = \iint\limits_{gQ_{\alpha_2}} f(z)\, d\omega = 0 \quad \text{для всех } g \in NA.$$

Тогда если $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$, *или*

$$e^{-2} f\left(\lambda_1(z)\right) - f(z) = o\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \quad \text{при } z \to 1 \text{ по орициклам},$$

то $f(z) \equiv 0$ *в* D.

Обозначим $M_f(z) = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left(1 - |n_u a_v \circ z|^2\right) |f\left(n_u a_v \circ z\right)|\, du dv$.

Теорема 2. 1. *Пусть* $f \in C(D)$,

$$\forall z \in D \quad M_f(\lambda_l(z)) = o\,(1) \quad \text{при } l \to +\infty, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

и для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 > 0$

$$\int\limits_{\partial(gQ_{\alpha_1})} f(z)\, dz = \int\limits_{\partial(gQ_{\alpha_2})} f(z)\, dz = 0 \quad \text{для всех } g \in NA \tag{2}$$

Тогда если $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$, *или*

$$M_f(z) = o\,(1) \quad \text{при } z \to 1 \text{ по орициклам}, \tag{3}$$

то $f(z)$ *голоморфна в* D.

2. *Для любых* $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ *существует неголоморфная функция* $f \in C^1(D)$, *удовлетворяющая* (2), (3) *и такая, что*

$$\forall z \in D \qquad M_f(\lambda_l(z)) = O\,(1) \quad \text{при } l \to +\infty, \quad l \in \mathbb{N}.$$

3. *Для любых соизмеримых* $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ *существует неголоморфная функция* $f \in C^1(D)$, *удовлетворяющая* (1), (2) *и такая, что*

$$M_f(z) = O\,(1) \quad \text{при } z \to 1 \text{ по орициклам}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berenstein C. A. and Shahshahani M.* Harmonic analysis and the Pompeiu problem // Amer. J. Math. 1983. Vol. 105. P. 1217–1229.

2. *Volchcov V. V.* Integral geometry and convolution equations. Dordrecht. Boston. London: Kluwer Academic Publishers, 2003. 454 p.

3. *Аграновский М. Л.* Преобразование Фурье на $SL_2(\mathbb{R})$ и т еоремы типа Морера // ДАН СССР. 1978. Т. 243, № 6. С. 1353–1356.

4. *Волчков В. В.* Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Матем. заметки. 1993. Т. 53, № 2. С. 30–36.

5. *Silenko V. E.* A new Morera-type theorem on a unit disk // Ukrainian Math. J. 2001. Т. 53. № 2. P. 317–322.

УДК 517.518.862

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ С ФИКСИРОВАННЫМИ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ НОРМЕ[1]

И. Е. Симонов (Екатеринбург, РФ)

Simonov.Ivan@urfu.ru

Пусть A_0, B_0, A_1, B_1, $\ldots$, A_s, B_s — фиксированные вещественные числа. Рассмотрим множество $\mathcal{T}_n^s$ тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = \mathrm{Re}\,\left(C_0 e^{int} + \cdots + C_{n-s} e^{i(n-s)t} + \cdots\right), \quad C_k = A_k - iB_k$$

с фиксированными коэффициентами при $s+1$ старших гармониках. Требуется найти такой полином $f^*_{n,s} \in {\mathcal{T}_n}^s$, что

$$\|f^*_{n,s}\|_1 = \min_{f \in {\mathcal{T}_n}^s} \|f\|,$$

где

$$\|f\| = \int_0^{2\pi} |f(t)| dt.$$

Полином $f^*_{n,s}$ называют полиномом, наименее уклоняющимся от нуля в интегральной норме. С. Н. Бернштейн [1] выписал тригонометрический полином, наименее уклоняющийся от нуля в интегральной норме, при $s = 0$, а именно

$$f^*_{n,0}(t) = A_0 \cos nt + B_0 \sin nt.$$

Аналогичная задача для алгебраических многочленов, наименее уклоняющихся от нуля в интегральной норме, с фиксированными старшими коэффициентами изучена достаточно полно. А. Н. Коркин и

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006 и РФФИ (проект № 15-01-02705)

Е. И. Золотарев [2] нашли алгебраический многочлен, наименее уклоняющийся от нуля в интегральной форме со старшим коэффициентом равным единице. Решение задачи для алгебраических многочленов с двумя фиксированными коэффициентами впервые получил Я. Л. Геронимус [3], а затем независимо от него и другим методом Э. М. Галеев. Многочлены с тремя фиксированными коэффициентами появились в работах Ф. Пейерсторфера. Им получен критерий [4], позволяющий в некоторых случаях выписывать алгебраические многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, с заданными старшими коэффициентами. В работах В. Э. Гейта [5, 6] в явном виде выписаны многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, с тремя, четырьмя и пятью фиксированными коэффициентами, а также сформулирован общий метод, позволяющий находить алгебраические многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля в интегральной норме, с произвольным числом заданных коэффициентов.

В докладе будет представлен новый метод нахождения тригонометрических полиномов, наименее уклоняющиеся от нуля в интегральной норме, с фиксированными коэффициентами при двух и трех старших гармониках.

Теорема. *Тригонометрический полином, наименее уклоняющийся от нуля в интегральной норме, с фиксированными коэффициентами при двух старших гармониках равен*

$$f^*_{n,1}(t) = \begin{cases} \mathrm{Re}\left(C_0 e^{int} + C_1 e^{i(n-1)t} + \dfrac{C_1^2}{4C_0} e^{i(n-2)t}\right), & |C_1| \le 2|C_0|, \\ \mathrm{Re}\left(C_0 e^{int} + C_1 e^{i(n-1)t} + \dfrac{\overline{C}_0 C_1}{\overline{C}_1} e^{i(n-2)t}\right), & |C_1| > 2|C_0|. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бернштейн С. Н.* Sur la déformation des surfaces // Math. Ann. 1905. Vol. 60. P. 434–436

2. *Коркин А. Н., Золотарев Е. И.* Sur un certain minimum // Коркин А. Н. Сочинения. Т. 1. СПб.: С.-Петерб. ун-т, 1911. С. 329–349.

3. *Геронимус Я. Л.* Sur quelques propriétés extrémales de polynomes dont les coefficients premiers sont donnés // Сообщ. Харьк. матем. о-ва. Сер. 4. 1935. Т. 12. С. 49–58.

4. *Пейерсторфер Ф.* Trigonometric Polynomial Approximation in the L^1-Norm // Math. Z. 1979. Vol. 169. P. 261–269.

5. *Гейт В. Э.* О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в метрике $L[-1,1]$ (третье сообщение) // Сиб. журн. вычисл. матем. РАН. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 2003. Т. 6, № 1. С. 37–57.

6. *Гейт В. Э.* О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в метрике $L[-1,1]$, с пятью предписанными коэффициентами // Сиб. журн. вычисл. матем. РАН. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 2009. Т. 12, № 1. С. 37–57.

7. *Чебышев П. Л.* Théorie des mécanismes connes sous le norm de parallélogrammes // Mémoires présentés a l'Acad. Imp. des Sci. de St.-Pétersbourg pae divers savants. 1854. B. 7. P. 539–568

УДК 517.54

ПЛОСКИЕ ОДНОЛИСТНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ[1]

В. В. Старков (Петрозаводск, РФ)
VstarV@list.ru

Теория таких отображений стала активно развиваться с 80-х годов прошлого века после решения проблемы Бибербаха об оценке коэффициентов в классе S голоморфных и однолистных в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_n z^n$. При изучении однолистных гармонических в Δ функций f по аналогии с S обычно тоже вводят нормировку в нуле: $f(0) = 0, f_z(0) = 1$. Каждую комплекснозначную гармоническую в односвязной области функцию f можно представить в виде $f = h + \bar{g}$, где f и g — голоморфные функции в этой области.

Из-за широты класса S_H однолистных гармонических функций (по сравнению с S) информацию о функциях из S_H получать сложнее, свойства классов S и S_H существенно различны. Этим, в частности, объясняется отсутствие до 2014 г. критерия однолистности [1] для гармонических функций; сейчас этот критерий активно используется у нас и за рубежом.

В докладе в основном будут представлены результаты, связанные с новым критерием однолистности [2]:

Теорема. *Пусть f гармоническая в выпуклой области D и $\Omega = f(D)$. Функция f однолистна в D, если, и только если, существует такая комплекснозначная функция $\phi = \phi(w, \overline{w}) \in C^1(\Omega)$, что для любого $\epsilon \in \partial\Delta$ существует вещественное $\gamma = \gamma(\epsilon)$, удовлетворяющее неравенству*

$$\mathrm{Re}\big\{e^{i\gamma}\big(\partial\phi(f(z), \overline{f(z)}) + \epsilon\overline{\partial}\phi(f(z), \overline{f(z)})\big)\big\} > 0 \quad \forall z \in D,$$

где $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ *и* $\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$.

Самостоятельный интерес для приложений представляет собой следующая лемма, доказанная в [1] и уточненная в [2]

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-01-92692, № 14-01-00510).

Лемма. *Пусть* $f = h + \overline{g} \in S_H^0 = \{f \in S_H : g'(0) = 0\}$. *Тогда для всех* $z_1, z_2 \in \Delta : |z_1| = |z_2| = r \in (0,1)$, *справедливо неравенство*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \geq |z_2 - z_1| \frac{1}{4\alpha r} \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{2\alpha}\right],$$

где $\alpha = \operatorname{ord} S_H = \sup\limits_{f \in S_H} |h''(0)/2|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Starkov V. V.* Univalence of harmonic functions, hypothesis of Ponnusamy and Sairam, and constructions of univalent polynomials // Probl. Anal. Issues Anal. 2014. Vol. 3(21), № 2. P. 59–73. DOI:10.15393/j3.art.2014.2729.

2. *Graf S. Yu., Ponnusamy S., Starkov V. V.* Univalence criterion for harmonic mappings and Φ-like functions. arXiv:1510.04886v1 [math.CV] 16 Okt 2015. 14 p.

УДК 517.538.52+517.538.53

АСИМПТОТИКА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ[1]

А. П. Старовойтов, Г. Н. Казимиров, М. В. Сидорцов
(Гомель, РБ)
svoitov@gsu.by, grigory.kazimirov@gmail.com, sidortsov@mail.ru

Диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ называют многочлены $A_n^p(z)$, $deg\, A_n^p \leqslant n-1$, $p = 0, 1, ..., k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{k} A_n^p(z)\, e^{\lambda_p z} = O(z^{nk+n-1}), \;\; z \to 0\,.$$

Многочлены $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ введены Эрмитом спустя 10 лет после выхода в свет его знаменитой работы, посвящённой доказательству трансцендентности числа e. К. Малером [1] установлено, что с их помощью можно также доказать трансцендентность числа e.

В работах [2, 3] найдена асимптотика многочленов $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ в случае, когда $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ — различные действительные числа. Исходя из этих результатов, легко описать асимптотику аппроксимаций Эрмита – Паде, в случае, когда $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ — различные комплексные числа, лежащие на одной прямой, проходящей через начало координат, в том числе, на мнимой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

оси. Для произвольных комплексных множителей в показателях экспонент, описание асимптотик соответствующих аппроксимаций известными в настоящее время методами не представляется возможным.

В данной работе исследуется асимптотика диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$, в предположении, что $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ являются корнями уравнения

$$\varphi(\xi) := \xi(\xi^k - 1) = 0\,,$$

т.е.

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_p = e^{i\,2\pi(j-1)/k}, \quad j = 1, 2, ..., k.$$

Если обозначить через $\{x_j\}_{j=1}^{k}$ все решения уравнения $\varphi'(\xi) = 0$, то легко заметить, что

$$x_j = \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}\; e^{i\,2\pi(j-1)/k}, \quad j = 1, 2, ..., k.$$

В окрестности точки x_1 выделим однозначную ветвь функции $S(\xi) = -\ln\varphi(\xi)$, полагая $S(x_1) = -\left[\ln|\varphi(x_1)| + i\pi\right]$. Пусть G такая односвязная область, что $\{x_j\}_{j=1}^{k} \subset G \subset \mathbb{C}\setminus\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$. Выбранная ветвь аналитически продолжается в G. Полученная в результате продолжения функция является однозначной аналитической функцией в G. Её значения в G вычисляются по формуле

$$S(\xi) = -\left[\ln|\varphi(\xi)| + i\pi + i\triangle_\gamma \arg\varphi(\xi)\right]\,,$$

где кривая γ лежит в G и соединяет точки x_1 и ξ, а $\triangle_\gamma \arg\varphi(\xi)$ — приращение аргумента $\varphi(\xi)$ вдоль кривой γ.

Пусть

$$B_n(x_j) := \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_j)}}\; e^{nS(x_j)}, \quad j = 1, 2, ..., k\,.$$

Здесь ветвь корня определяется условием

$$\arg\sqrt{\frac{-1}{S''(x_j)}} = \varphi_0\,,$$

где φ_0 — угол между вектором касательной к окружности $\{z\,:\,|z| = \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}\}$ в точке x_j, проходимой по часовой стрелке, и положительным направлением действительной оси.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Для любого фиксированного z при $n \to \infty$*

$$A_n^0(z) = \sum_{j=1}^{k} B_n(x_j) \;\; e^{(x_j-\lambda_j)z} \, (1 + O(1/n)) \ ,$$

$$A_n^p(z) = -B_n(x_p) \;\; e^{(x_p-\lambda_p)z} \, (1 + O(1/n)) \ , \quad j = 1, 2, ..., k \, .$$

Следствие 1. *При $k = 3$ и $n \to \infty$ для любого фиксированного z*

$$A_n^1(z) = (-1)^{n-1} \, \Lambda_n \; e^{(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-1)z} \, (1 + O(1/n)) \ ,$$

$$A_n^2(z) = e^{i\pi(n-1)/3} \, \Lambda_n \; e^{(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}e^{i2\pi/3}-1)z} \, (1 + O(1/n)) \ ,$$

$$A_n^3(z) = e^{-i\pi(n-1)/3} \, \Lambda_n \; e^{(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}e^{-i2\pi/3}-1)z} \, (1 + O(1/n)) \ ,$$

$$A_n^0(z) = \Lambda_n \; e^{-z} \Bigg[(-1)^n e^{\frac{z}{\sqrt[3]{4}}} - e^{i\pi(n-1)/3} e^{\frac{z}{\sqrt[3]{4}} e^{i2\pi/3}} -$$

$$- e^{-i\pi(n-1)/3} e^{\frac{z}{\sqrt[3]{4}} e^{-i2\pi/3}} \Bigg] (1 + O(1/n)) \ ,$$

где

$$\Lambda_n = \frac{1}{\sqrt{16\sqrt[3]{2}\,\pi n}} \; \left(\frac{4^{4/3}}{3} \right)^n \, .$$

Следствие 2. *При $k = 4$ и $n \to \infty$ для любого фиксированного z*

$$A_n^1(z) = (-1)^{n-1} \, \Omega_n \; e^{(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}-1)z} \, (1 + O(1/n)) \ ,$$

$$A_n^2(z) = i^{n-1} \, \Omega_n \; e^{(\frac{i}{\sqrt[4]{5}}-1)z} \, (1 + O(1/n)) \ ,$$

$$A_n^3(z) = \; \Omega_n \; e^{(-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}-1)z} \, (1 + O(1/n)) \ ,$$

$$A_n^4(z) = (-i)^{n-1} \, \Omega_n \; e^{(-\frac{i}{\sqrt[4]{5}}-1)z} \, (1 + O(1/n)) \ ,$$

$$A_n^0(z) = \; \Omega_n \; e^{-z} \Bigg[(-1)^n e^{\frac{z}{\sqrt[4]{5}}} - i^{n-1} e^{\frac{i\,z}{\sqrt[4]{5}}} -$$

$$- e^{-\frac{z}{\sqrt[4]{5}}} + (-1)^n \, (i^{n-1}) \, e^{-\frac{i\,z}{\sqrt[4]{5}}} \Bigg] (1 + O(1/n)) \ ,$$

где

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{10\sqrt{5}\,\pi n}} \left(\frac{5^{5/4}}{4} \right)^n \, .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mahler K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus // J. Reine Angew. Math. 1931. Vol. 166. P. 118–150.

2. *Wielonsky F.* Asymptotics of Diagonal Hermite-Padé Approximants to e^z // J. Approx. Theory. 1997. Vol. 90, № 2. P. 283–298.

3. *Астафьева А. В., Старовойтов А. П.* Асимптотические свойства многочленов Эрмита // Докл. НАН Беларуси. 2015. Т. 59, № 3. С. 5–11.

УДК 517.538.52+517.538.53

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко (Гомель, РБ)
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

Для заданного натурального числа k, рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^k$ целых неотрицательных чисел.

Аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ называют многочлены $A_{n_p}^p(z)$, $\deg A_{n_p}^p \leqslant n_p - 1$, $p = 0, 1, ..., k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{k} A_{n_p}^p(z)\, e^{\lambda_p z} = O\left(z^{n_0+n_1+...+n_k-1}\right), \quad z \to 0\,. \tag{1}$$

Если $n_0 = n_1 = ... = n_k = n$, то элементы множества $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ называют *диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде I типа* системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ (по поводу терминологии см. [1]).

Такие многочлены введены Эрмитом спустя 10 лет после выхода в свет его знаменитой работы, посвящённой доказательству трансцендентности числа e. К. Малером (см. [1]) установлено, что с их помощью можно также доказать трансцендентность числа e.

Мы хотим локализовать область, в которой находятся нули многочлена $A_{n_p}^p(z)$, в зависимости от выбора чисел $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ и $\{n_p\}_{p=0}^k$. В отдельных частных случаях такая задача хорошо известна. Так Г. Сеге [2] исследовал поведение нулей многочленов Тейлора функций, связанных с экспонентой. Э. Сафф и Р. Варга [3] нашли границы кольца, в котором находятся нули многочленов Паде $p_{n,m}(z) = -A_n^0(z)$, $q_{n,m}(z) = A_m^1(z)$ экспоненциальной функции. Им принадлежит следующее утверждение, которое часто называют «теоремой о кольце».

Теорема 1 (Э. Сафф, Р. Варга). *При $n \geqslant 2$ и $m \geqslant 1$ все нули многочленов Паде $p_{n,m}(z)$, $q_{n,m}(z)$ функции $\exp z$ лежат в кольце*

$$K = \{z : (n+m-2)\mu < z < n+m-2/3\}\,,$$

где $\mu = 0.278465$ — единственный положительный корень уравнения $te^{t+1} = 1$.

В работе [4] Ф. Вилонский получил оценку сверху для модулей нулей диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ системы экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^k$. Г. Шталь [5] исследовал расположение нулей преобразованных с помощью масштабирования независимой переменной квадратичных диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде I и II типов системы экспонент $\{1, e^z, e^{2z}\}$ и показал, что указанные нули лежат на специальных дугах комплексной плоскости.

Если не принимать во внимание одномерный случай, когда аппроксимации Эрмита – Паде совпадают с достаточно хорошо изученными классическими аппроксимациями Паде, то можно сказать, что в настоящее время недиагональные аппроксимации Эрмита – Паде остаются практически не исследованными (см. [6]).

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ — произвольные различные комплексные числа. Тогда при $n_p \geqslant 2$, $p = 0, 1, ..., k$, $k \geqslant 1$ нули многочлена $A_{n_p}^p(z)$, $0 \leqslant p \leqslant k$, находятся в круге $\{z : |z| < R_{n_p}^p\}$, где*

$$R_{n_p}^p = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^{k} \frac{n_p + n_j - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_j|}\,. \tag{2}$$

При $k = 1$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $n_0 = n$, $n_1 = m$ из теоремы 2 следует, что все нули многочленов Паде $q_{n,m}(z)$, $p_{n,m}(z)$ лежат в круге $\{z : |z| < n + m - 2/3\}$, что согласуется с теоремой Э. Саффа, Р. Варги.

Если $k \geqslant 2$, $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, ..., k$; $n_0 = n_1 = ... = n_k = n$, то из (2) в качестве следствия вытекает теорема 2.2 из работы [4] Ф. Вилонского: *все нули многочлена $A_n^p(z)$, принадлежат кругу $\{z : |z| < R_n^p\}$, где*

$$R_n^p = 2(n - 1/3)\left[\sum\nolimits_{j=1}^{p} 1/j + \sum\nolimits_{j=1}^{k-p} 1/j\right]\,.$$

При тех же условиях, что и в теореме Ф. Вилонского, но для произвольных различных действительных $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$, из теоремы 2 следует утверждение, доказанное в работе [7]: *все нули многочлена $A_n^p(z)$, лежат в круге*

$\{z : |z| < R_n^p\}$, *где*

$$R_n^p = 2(n - 1/3)\left[\sum\nolimits_{j=1}^{p} 1/|\lambda_p - \lambda_j| + \sum\nolimits_{j=1}^{k-p} 1/|\lambda_{p+j} - \lambda_p|\right].$$

В случаях, когда $p = 0$ или $p = k$, соответственно, первая и вторая суммы в скобках в двух последних равенствах равны нулю.

Согласно теореме 2 нули многочленов Эрмита $A_{n_p}^p(z)$ лежат в круге с центром в нуле, радиус которого $R_{n_p}^p$ зависит как от степени многочленов, так и от взаимного расположения множителей в показателях экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$. В связи с этим представляет интерес вопрос о точности полученной в теореме 2 верхней оценки для модулей нулей $A_{n_p}^p(z)$ в случае, когда n_p — фиксированы, а расстояние между соседними членами последовательности $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ является сколь угодно малой величиной.

Прежде чем перейти к примерам, заметим, что известные представления многочленов $A_{n_p}^p(z)$ позволяет получить для них явные выражения, а при $2 \leqslant n_p \leqslant 4$ найти точные значения всех нулей.

Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^3$, где

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1 - \varepsilon, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Нами установлено, что для рассматриваемой системы экспонент при $2 \leqslant n_p \leqslant 4$ полученные в теореме 2 неравенства для модулей нулей соответствующих многочленов Эрмита – Паде являются точными в смысле порядка при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \to 1)$.

Примеры, подтверждающие точность полученных в теореме 2 неравенств в диагональном случае, имеются в работе [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mahler K.* Perfect systems// Comp. Math. 1968. Vol. 19. P. 95–166.

2. *Szegö G.* Über eienige Eigenschaften der Exponentialreihe// Sitzunggsberichte Berliner Math. Ges. 1924. Vol. 23. P. 50–64.

3. *Saff E., Varga R.* On the zeros and poles of Pade approximations to e^z, II, in "Pade and Rational Approximations: Theory and Applications". N. Y. : Academic Press, 1977.

4. *Wielonsky F.* Asymptotics of Diagonal Hermite-Padé Approximants to e^z // J. Approx. Theory. 1997. Vol. 90, № 2. P. 283–298.

5. *Stahl H.* Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function // Electronic Trans. Num. Anal. 2002. № 14. P. 193–220.

6. *Driver K.* Nondiagonal Hermite – Padé approximation to the exponential funktion // J. Comput. Appl. Math. 1995. Vol. 65. P. 125–134.

7. *Астафьева А. В., Кечко Е. П., Старовойтов А. П.* О нулях многочленов Эрмита // Изв. Гомель. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2015. № 3(90). С. 104–110.

УДК 517.98

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ШАУДЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНТИКОМПАКТОВ[1]

Ф. С. Стонякин (Симферополь, РФ)
fedyor@mail.ru

Хорошо известна теорема Шаудера, утверждающая существование неподвижной точки всякого отображения $f : B \to B$, где B — выпуклый компакт в банаховом пространстве E. Если же выпуклое множество B замкнуто и ограничено в E, то результат остаётся верным в случае предкомпактности $f(B)$.

Мы предлагаем подход к теоремам о неподвижных точках для ограниченного замкнутого множества B в банаховом пространстве, но без требования предкомпактности образа $f(B)$ (что, естественно приводит к ограничениям нового типа). Этот метод основан на понятии антикомпакта в банаховых пространствах, которое предложено нами ранее (см. [1]). Замкнутое выпуклое симметричное множество C' в банаховом пространстве E называется антикомпактом, если в пространстве $E_{C'} = (span\, C', ||\cdot||_{C'})$ ($||\cdot||_{C'} = p_{C'}(\cdot)$ — функционал Минковского; $E_{C'}$ пополнено относительно $||\cdot||_{C'}$) содержится и предкомпактно всякое ограниченное множество $B \subset E$. Иными словами, E инъективно компактно вложено в $E_{C'}$. Обозначим через $\mathcal{C}'(E)$ набор антикомпактов в банаховом пространстве E. Доказано, что E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда в пространстве E существует счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов $T_0 = \{\ell_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E^*$: $\ell_n(x) = \ell_n(y)\, \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow x = y$ (здесь и всюду далее будем полагать, что $\|\ell_n\|_{E^*} \leqslant 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$). Примером антикомпактов, соответствующих T_0 в таких пространствах E может служить система множеств:

$$C_\varepsilon = \left\{ x \in E \,\middle|\, \sup \left| \frac{\ell_k(x)}{\varepsilon_k} \right| \leqslant 1 \right\}, \qquad (1)$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к $+\infty$ [1].

Перейдём к изложению полученных аналогов теоремы Шаудера. Условимся всюду далее через $\overline{B_{E_{C'}}}$ мы будем обозначать замыкание множества $B \subset E \subset E_{C'}$ в пространстве $E_{C'}$. Сначала отметим очевидный факт, вытекающий из обычный теоремы Шаудера в в пространстве $E_{C'}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук (проект МК-2915.2015.1).

Предложение 1. *Пусть B — ограниченное выпуклое подмножество в банаховом пространстве $E, f : B \to B$ и существует антикомпакт $C' \in \mathcal{C}'(E)$: $\overline{B_{E_{C'}}} = B$ и $f : B \to B$ непрерывно в пространстве $E_{C'}$. Тогда существует $x_0 \in B$: $f(x_0) = x_0$.*

Однако условия $\overline{B_{E_{C'}}} = B$ и непрерывности f в пространстве $E_{C'}$ выглядят несколько искусственными и трудно проверяемыми. Введём следующее понятие.

Определение 1. Для выпуклого ограниченного множества B будем называть отображение $f : B \to B$ *$E_{C'}$-равномерно непрерывным*, если $\forall\, x, y \in B$

$$\forall\, L > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ ||x - y||_{C'} < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)||_{C'} < L.$$

Теорема 1. *Пусть B — выпукло и ограничено в банаховом пространстве E, $\mathcal{C}'(E) \neq \varnothing, f : B \to B$ $E_{C'}$-равномерно непрерывно при некотором $C' \in \mathcal{C}'(E)$. Тогда f можно единственным образом по непрерывности продолжить на $\overline{B_{E_{C'}}} \subset E_{C'}$ (продолжение будем также обозначать через f) и существует $x_0 \in \overline{B_{E_{C'}}} : f(x_0) = x_0$.*

Построены конкретные примеры отображений f, к которым применима теорема 1. Оказывается, при выборе системы антикомпактов (1) можно в теореме 1 заменить условие E_{C_ε}-равномерной непрерывности $f : B \to B$ (где B — ограниченное множество в пространстве E) на следующее условие T_0-равномерной непрерывности в E, связанное с соответствующим (1) счётным тотальным в E множеством $T_0 = \{\ell_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E^*$.

Определение 2. Пусть $B \subset E$ ограничено. Будем называть $f : B \to B$ *T_0-равномерно непрерывным*, если для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m_n \in \mathbb{N}$, что

$$\forall\, L > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ |\ell_{m_n}(x - y)| < \delta \Rightarrow |\ell_n(f(x) - f(y))| < L.$$

T_0-равномерная непрерывность влечёт E_{C_ε}-равномерную непрерывность при всяком выборе последовательности ε из (1). Отметим, что T_0-равномерно непрерывным будет всякое слабо равномерно непрерывное отображение.

Теорема 2. *Если множество B выпукло и ограничено в E, а отображение $f : B \to B$ T_0-равномерно непрерывно, то имеется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \ell(f(x_n)) \quad \forall \ell \in T_0$;

(ii) для всякой последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_k > 0\}_{k=1}^{\infty}$, сходящейся к $+\infty$, f можно единственным образом по непрерывности продолжить (продолжение мы тоже обозначим f) на $\overline{B_{E_{C_\varepsilon}}} \subset E_{C_\varepsilon}$, C_ε

удовлетворяет (1). *При этом существует* $x_0 \in \overline{B_{E_{C_\varepsilon}}}$ *такое, что* $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x_0||_{C_\varepsilon} = 0$ *и верно* $f(x_0) = x_0$.

Сделаем замечание по поводу связи T_0-равномерной непрерывности (или $E_{C'}$-равномерной непрерывности, $C' \in \mathcal{C}'(E)$) $f : B \to B$ с обычной равномерной непрерывностью: *T_0-равномерно непрерывное отображение f может быть разрывным (в том числе и слабо разрывным) в E.* Это показывает, что полученные нами аналоги теоремы о неподвижных точках можно использовать для некоторых разрывных отображений.

Обратим внимание на ещё одно обстоятельство: *неподвижная точка, существующая на $E_{C'}$ при некотором $C' \in \mathcal{C}'(E)$ по теореме 2 может не лежать в B и даже в пространстве E.* Тем не менее, сделаем такие замечания по этому поводу:

1. Если E *рефлексивно* и $\mathcal{C}'(E) \neq \varnothing$, то применяя слабую секвенциальную компактность в E всякого замкнутого ограниченного выпуклого множества, можно доказать в условиях теоремы 1 и замкнутости B существование такого $x_0 \in B$, что $f(x_0) = x_0$.

2. *Принадлежность $x_0 = f(x_0)$ исходному пространству E для замкнутого выпуклого B возможна и в некоторых нерефлексивных пространствах.* Например, такой пример можно построить в пространстве $E = \ell_\infty$ (т. е. можно построить E_{C_ε}-непрерывное отображение $f : B \to B$ такое, что $x_0 \in E$).

Обсуждаются вопросы приложений полученных результатов в многозначном анализе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стонякин Ф. С.* Аналог теоремы Ула о выпуклости образа векторной меры // Динамические системы. 2013. Т. 3(31), № 3–4. С. 281–288.

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ В КРУГЕ И ЕГО КОНФОРМНЫХ ОБРАЗАХ[1]

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных (Екатеринбург, РФ)
yunsub@imm.uran.ru, chernykh@imm.uran.ru

На базе интерполяционно-ортогональных всплесков, построенных авторами в работах [1–3] сконструированы интерполяционно-ортогональные гармонические кратно-масштабные анализаторы и интерполяцион-

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00702).

но-ортогональные гармонические всплески (wavelets), удобные для точного (в виде рядов по гармоническим всплескам) и приближенного (с любой точностью в виде просто конструируемых гармонических многочленов) представления решений задачи Дирихле с непрерывными граничными условиями. При этом класс аналитически представляемых в явном виде построенных всплесков значительно шире исходных для нашей конструкции всплесков Мейера. В конструкции всплесков и в оценках точности приближения решений задачи Дирихле нами использованы также некоторые идеи и результаты К. И. Осколкова [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Субботин Ю. Н., Черных Н. И.* Интерполяционно-ортогональные системы всплесков // Тр. ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 153–161.

2. *Субботин Ю. Н., Черных Н. И.* Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.

3. *Субботин Ю. Н., Черных Н. И.* Гармонические всплески в краевых задачах // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби : тр. междунар. сем., посв. 60-летию акад. А. И. Субботина. Екатеринбург, 2005. Т. 1. С. 38–47.

4. *Offin D., Oskolkov K.* A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1963. № 9. P. 319–325.

УДК 517.984

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ С ЕДИНИЧНЫМ ВЕСОМ

М. С. Султанахмедов (Махачкала, РФ)

sultanakhmedov@gmail.com

Пусть $\eta_j (0 \le j \le N)$ — система точек, заданных на отрезке $[-1, 1]$ и таких что $-1 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_{N-1} < \eta_N = 1$. Введем обозначения $\triangle\, \eta_j = \eta_{j+1} - \eta_j$ $(0 \le j \le N-1)$, $\lambda_N = \max_{0 \le j \le N-1} \triangle\, \eta_j$. Пусть, кроме того, на каждом частичном отрезке $[\eta_j, \eta_{j+1}]$ выбрана точка $t_j(\eta_j \le t_j \le \eta_{j+1})$. Тогда мы можем составить сетку $\Omega_N = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$, в которой будем считать узлы t_j попарно различными ($t_i \ne t_j$, при $i \ne j$).

Рассмотрим пространство $l_2(\Omega_N)$ дискретных функций вида $f : \Omega_N \to R$, в котором скалярное произведение задано следующим образом

$$< f, g >= \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) g(t_j) \triangle\, \eta_j.$$

Через $\hat{P}_{n,N}(t) \quad (0 \le n \le N-1)$ обозначим полиномы, образующие ортонормированную систему относительно этого скалярного произведения:

$$< \hat{P}_{n,N}, \hat{P}_{m,N} >= \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

Будем называть полиномы $\hat{P}_{n,N}(t) \quad (0 \leq n \leq N-1)$ дискретными ортонормированными полиномами Лежандра.

Пусть теперь задана некоторая функция $f \in l_2(\Omega_N)$. Обозначим через $\Lambda_{n,N}(f,t)$ частичную сумму Фурье порядка n этой функции по системе $\left\{\hat{P}_{k,N}\right\}_{k=0}^{N-1}$, т.е.

$$\Lambda_{n,N}(f,t) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k \hat{P}_{k,N}(t), \quad \text{где} \quad \hat{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \hat{P}_{k,N}(t_j) \vartriangle \eta_j.$$

Рассматривается задача оценки погрешности приближения функции $f(t)$ соответствующей частичной суммой $\Lambda_{n,N}(f,t)$ в равномерной метрике. Хорошо известно, что погрешность приближения частичной суммой $\Lambda_{n,N}(f,t)$ может быть оценена следующим образом

$$R_{n,N}(f,t) = |f(t) - \Lambda_{n,N}(f,t)| \leq E_n(f) \left(1 + L_{n,N}(t)\right),$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f полиномом степени не выше n в равномерной метрике пространства $C[-1,1]$, $L_{n,N}(t)$ — функция Лебега для полиномов $\left\{\hat{P}_{n,N}\right\}_{n=0}^{N-1}$:

$$L_{n,N}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \left| \sum_{k=0}^{n} \hat{P}_{k,N}(t_j) \hat{P}_{k,N}(t) \right| \vartriangle \eta_j.$$

Таким образом, для оценки величины $R_{n,N}(f,t)$ требуется оценить $L_{n,N}(t)$. При решении этой задачи существенно используются результаты работы [1]. В частности, из них следует, что существует такая константа $a > 0$, что при $2 \leq n \leq a\lambda_N^{-\frac{1}{3}}$ справедлива весовая оценка

$$\left|\hat{P}_{n,N}(t)\right| \leq c(a) \left(1 + B\sqrt{n^3 \lambda_N}\right) \left(\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$B = \left(\frac{3 - 4\lambda_N \chi n^2}{1 - 16\lambda_N^2 \chi^2 n^4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

здесь $c(a)$ — положительная константа, χ — наименьшая из констант в интегральном неравенстве Маркова для оценки производной алгебраического многочлена:

$$\int\limits_{-1}^{1} |q_m'(t)|dt \le \chi m^2 \int\limits_{-1}^{1} |q_m(t)|dt.$$

Используя указанную весовую оценку, в настоящей работе доказана следующая

Теорема. *Существует такое достаточно малое фиксированное число a, что при $2 \le n \le a\lambda_N^{-1/3}$ имеет место оценка*

$$L_{n,N}(t) \le c(a)C_{n,N}\left[\ln n + \left(\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\right], \quad t \in [-1,1],$$

где

$$C_{n,N} = \sqrt{\frac{\hat{k}_{n,N}\hat{P}_{n+1,N}(1)}{\hat{k}_{n+1,N}\hat{P}_{n,N}(1)}}.$$

Следствие. *Для каждой последовательности $A = (a_2, a_3, \ldots)$, такой что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, и каждого $2 \le n \le a_N\lambda_N^{-1/3}$ имеет место оценка*

$$L_{n,N}(t) \le c_N(A)\left[\ln n + \left(\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\right], \quad t \in [-1,1].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Султанахмедов М.С.* Асимптотические свойства и весовые оценки полиномов, ортогональных на неравномерной сетке с весом Якоби // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 38–46.

УДК 517.9

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

И. В. Тихонов (Москва, РФ)

ivtikh@mail.ru

Дадим краткий обзор к одному из направлений теории обратных задач, понимаемых в смысле [1]. Речь идет о восстановлении неточно заданного неоднородного слагаемого в линейном эволюционном уравнении.

Исследование удобно проводить на языке абстрактных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Полученные результаты можно применять затем к разным ситуациям, важным для математической физики.

Пусть A — линейный замкнутый оператор в комплексном банаховом пространстве E. Область определения $D(A) \subset E$ не обязательно плотна в E. Зафиксируем отрезок $[0,T] \subset \mathbb{R}$ и функцию $\varphi \in C([0,T])$, такую, что $\varphi(t) \not\equiv 0$ на $[0,T]$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + \varphi(t)g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

с неизвестной функцией $u \in C^1([0,T],E)$ и неизвестным элементом $g \in E$. Предполагаем также, что $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0,T]$. Для одновременного нахождения пары $(u(t), g)$ возьмем условия

$$u(0) = u_0, \qquad u(T) = u_1, \tag{2}$$

с заданными элементами $u_0, u_1 \in D(A)$. Другими словами, к стандартному *условию Коши* добавим еще *финальное переопределение*. Возникает вопрос: обеспечивают ли условия (2) однозначность восстановления неизвестной пары $(u(t), g)$ в уравнении (1)?

Так как нас интересует единственность решения, то достаточно разобрать случай однородных условий

$$u(0) = 0, \qquad u(T) = 0. \tag{3}$$

Ясно, что задача $(1), (3)$ всегда имеет тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$. Спрашивается, бывают ли другие, нетривиальные решения? Как можно гарантировать их отсутствие? Оказывается, поставленные вопросы допускают «почти исчерпывающий» ответ, выраженный в чисто спектральных терминах.

Первоначально исследование подобных задач проводилось в предположении корректности задачи Коши для уравнения (1). Например, типичным было требование, чтобы оператор A порождал полугруппу класса C_0 (см. [1–3]). Затем, однако, выяснилось, что концептуальные ограничения на оператор A не имеют особого значения. Определяющим является «взаимодействие» оператора d/dt с функцией $\varphi(t)$ и краевыми условиями (3).

Так, при анализе соотношений $(1), (3)$ методом разделения переменных естественно возникает скалярная *операционная модель*

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) + \varphi(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ y(0) = 0, \quad y(T) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

со спектральным параметром $\lambda \in \mathbb{C}$. Собственные значения модельной задачи (4) совпадают с нулями целой функции

$$L(\lambda) = \int\limits_0^T e^{\lambda(T-s)}\varphi(s)\,ds, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Будем называть функцию (5) *характеристической функцией* обратной задачи (1), (3). Поскольку $\varphi(t) \not\equiv 0$, то функция (5) имеет счетное множество различных нулей. Непосредственно проверяется такой результат.

Теорема 1. *Пусть некоторый нуль* $\lambda_k \in \mathbb{C}$ *характеристической функции* (5) *является собственным значением оператора* A *с собственным вектором* f_k, *т. е.*

$$Af_k = \lambda_k f_k, \qquad f_k \in D(A), \qquad f_k \neq 0. \tag{6}$$

Тогда пара

$$u(t) = \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t-s)}\varphi(s) f_k\,ds, \qquad g = f_k \tag{7}$$

дает нетривиальное решение однородной обратной задачи (1), (3).

Теорема 1 указывает необходимое условие единственности решения в обратной задаче (1), (3): *ни один нуль характеристической функции* (5) *не должен совпадать с собственным значением оператора* A. Весьма неожиданно, что в самых естественных ситуациях это простое *необходимое* условие единственности оказывается также *достаточным.* Некоторые тонкости связаны с функцией $\varphi(t)$.

Самый простой случай, когда $\varphi(t) \equiv 1$ на $[0, T]$. Характеристическая функция (5) принимает вид

$$L(\lambda) = \frac{e^{\lambda T} - 1}{\lambda}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad L(0) = T. \tag{8}$$

Нули для (8) вычисляются явно:

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{T}, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad i^2 = -1. \tag{9}$$

В работе [4] установлен следующий базовый результат.

Теорема 2. *Допустим, что ни одно число* λ_k *из формулы* (9) *не является собственным значением оператора* A. *Тогда однородная обратная задача* (1), (3) *с функцией* $\varphi(t) \equiv 1$ *имеет на* $[0, T]$ *только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.

В работах [5, 6] удалось распространить теорию на другие случаи, рассмотрев почти все возможности. Приведем для примера один характерный результат из [6].

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in C([0,T])$, *причем*

$$\varphi(0) \neq 0, \qquad \varphi(T) \neq 0. \tag{10}$$

Допустим, что ни один нуль характеристической функции (5) *не является собственным значением оператора* A. *Тогда однородная обратная задача* (1), (3) *имеет на* $[0,T]$ *только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.

Подчеркнем, что теоремы 2 и 3 не требуют никаких ограничений на оператор A, кроме *линейности* и *замкнутости*. Если отвлечься от ряда деталей, то общую идею доказательства можно выразить так (см. [6]). Характеристическая функция (5) имеет нули, по которым строится соответствующая система экспонент. Эта система заведомо неполна, поскольку ее ортогональное дополнение в пространстве $C([0,T])$ содержит функцию $\varphi(t) \not\equiv 0$. Но, когда дефект системы экспонент не слишком велик, обратную задачу (1), (3) удается свести к конечномерной модели, где все нетривиальные решения выражаются через элементарные решения вида (6), (7). Если ни один нуль характеристической функции (5) не является собственным значением оператора A, то элементарные решения отсутствуют, и в обратной задаче (1), (3) остается только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.

При оценке дефекта системы экспонент ключевую роль играют соображения работы [7], связанные с «методом частных» из теории целых функций [8]. Обычно величина дефекта зависит от степени вырождения функции $\varphi(t)$ на концах отрезка $[0,T]$. Этим объясняются требования типа (10). Их можно ослабить, но совсем отбросить нельзя, иначе возникают примеры обратных задач (1), (3), где природа нетривиальных решений никак не связана с собственными значениями оператора A и элементарными решениями из теоремы 1 (подробности см. в [6]).

Разработанная методика допускает перенос на близкие обратные задачи. Было бы полезно, в частности, изучить все возможности, которые появляются при замене в (2) финального переопределения $u(T) = u_1$ на интегральное условие

$$\int_0^T u(t)\, d\mu(t) = u_1 \tag{11}$$

с той или иной функцией $\mu(t)$ ограниченной вариации на $[0,T]$. Недавние исследования (А. В. Карев, И. В. Тихонов), проведенные для случая

$\varphi(t) \equiv 1$ в уравнении (1) и $\mu(t) \equiv t$ в условии (11), подтвердили математическую актуальность такой тематики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. N. Y.; Basel : Marcel Dekker, 2000. 744 p.

2. *Эйдельман Ю. С.* Единственность решения обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 9. С. 1647–1649.

3. *Орловский Д. Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 9. С. 1614–1621.

4. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1132–1133.

5. *Тихонов И. В.* Соображения монотонности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюллетень. 2001. Т. 2, № 1. С. 119–128.

6. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Матем. заметки. 2005. Т. 77, вып. 2. С. 273–290.

7. *Любич Ю. И.* О собственных и присоединенных функциях оператора дифференцирования // Известия вузов. Матем. 1959. № 4. С. 94–103.

8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.

УДК 517.518.82

ЗАДАЧА О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА НА МОДЕЛЬНОМ ПРИМЕРЕ СИММЕТРИЧНОГО МОДУЛЯ

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, Д. Г. Цветкович (Москва, РФ)

ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, dianacve@inbox.ru

Полиномы Бернштейна являются важным инструментом классического анализа (см. [1–3]). Недавно замечено [4], что в некоторых типичных ситуациях нули полиномов Бернштейна образуют регулярные структуры на комплексной плоскости. Дадим сейчас качественное описание распределения нулей полиномов Бернштейна в модельном примере симметричного модуля.

Пусть

$$f(x) = |2x - 1|, \qquad x \in [0,\, 1]. \tag{1}$$

Для функции (1) введем полиномы Бернштейна переменной $z \in \mathbb{C}$ по формуле

$$B_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{2k}{n} - 1 \right| C_n^k \, z^k (1 - z)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Основные соотношения, связанные с полиномами (2), обсуждаются в [5, 6]. Первый полином $B_1(z) \equiv 1$ является исключительным. Остальные полиномы (2) подчинены *правилу склеивания*

$$B_{2m+1}(z) = B_{2m}(z), \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

В силу (3) отберем полиномы (2) только с четными номерами

$$B_{2m}(z) = \sum_{k=0}^{2m} \left| \frac{k}{m} - 1 \right| C_{2m}^k \, z^k (1-z)^{2m-k}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Важную роль играет следующее *разложение Поповичу* (см. [5, 6])

$$B_{2m}(z) = 1 \, - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1} \, C_{2k}^k \, (z(1-z))^k, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Дифференцируя (5), получаем

$$B'_{2m}(z) = 2(2z-1) \sum_{k=0}^{m-1} C_{2k}^k \, (z(1-z))^k, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Сравнение (5) и (6) дает соотношение

$$(2z-1)B'_{2m}(z) = 2\big(\, B_{2m}(z) - C_{2m}^m (z(1-z))^m \, \big), \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Особенно простым будет выражение для второй производной:

$$B''_{2m}(z) = 2m C_{2m}^m \, (z(1-z))^{m-1}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Полиномы (8) образуют элементарную δ-образную последовательность, сходящуюся на [0, 1] к $4\delta(z-1/2)$ (см. [5]).

При исследовании аналитических вопросов, связанных с полиномами (4), полезен переход от разложения (5) к эквивалентному представлению

$$B_{2m}(z) = 1 \, - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1} \, 2^{-2k} C_{2k}^k \, (4z(1-z))^k, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

с последующей заменой

$$\zeta = q(z) \equiv 4z(1-z), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Возникающие полиномы переменной $\zeta \in \mathbb{C}$ совпадают с частичными суммами степенного разложения

$$\sqrt{1-\zeta} \,=\, 1 \,-\, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\, 2^{-2k} C_{2k}^{k}\, \zeta^{k}. \tag{11}$$

Ряд (11) сходится в круге $|\zeta| \leqslant 1$.

Основываясь на отмеченных соотношениях (5)–(11), можно провести полное исследование сходимости полиномов Бернштейна (4) в комплексной плоскости и показать, что их нули концентрируются вблизи границы области сходимости.

Перечислим основные результаты.

1. Для последовательности полиномов (4) множество сходимости совпадает с компактом, ограниченным лемнискатой

$$|4z(1-z)| = 1, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{12}$$

Сходимость полиномов равномерная: в левой петле — к функции $f_1(z) = 1-2z$, в правой петле — к функции $f_2(z) = 2z-1$.

2. Все нули полиномов (4) являются простыми и находятся строго вне лемнискаты (12), т. е. не попадают ни внутрь лемнискаты, ни на саму кривую.

3. «Почти все» нули полиномов (4) являются комплексными. Точнее, при $j \in \mathbb{N}$ полиномы $B_{4j}(z)$ имеют ровно два вещественных нуля. Остальные полиномы (4) вовсе не имеют вещественных нулей.

4. Для любой малой внешней окрестности лемнискаты (12) в эту окрестность попадают все нули полиномов (4), начиная с некоторого достаточно большого номера $n = 2m$. Каждая точка лемнискаты (12) является предельной для некоторой последовательности нулей. Проще говоря, нули полиномов (4) постепенно сближаются с лемнискатой (12), заполняя «в пределе» всю лемнискату.

Аналогичные результаты, с соответствующими техническими поправками, устанавливаются для производных от полиномов (4), т. е. для полиномов (6).

1. Последовательность полиномов (6) сходится (поточечно) на компакте, ограниченном лемнискатой (12); в точке $z = 1/2$ — к нулю, в остальных точках левой петли — к функции $\varphi_1(z) \equiv -2$, а в остальных точках правой петли — к функции $\varphi_2(z) \equiv 2$. Эта сходимость будет равномерной на пересечении указанного компакта с множеством $|z-1/2| \geqslant \varepsilon$ при любом малом $\varepsilon > 0$.

2. Точка $z = 1/2$ на лемнискате (12) является простым нулем для любого из полиномов (6). Все другие нули полиномов (6) тоже являются простыми, но находятся строго вне лемнискаты (12).

3. «Почти все» нули полиномов (6) являются комплексными. Точнее, при $j \in \mathbb{N}$ полиномы $B'_{4j}(z)$ имеют ровно три вещественных нуля, включая $z = 1/2$. Остальные полиномы (6) имеют единственный вещественный нуль $z = 1/2$.

4. При увеличении номера $n = 2m$ нули полиномов (6) постепенно сближаются с лемнискатой (12), заполняя «в пределе» всю лемнискату.

Современные системы компьютерной математики позволяют проводить весьма точные расчеты, дающие наглядное представление о перечисленных закономерностях. Среди прочего вычислительные эксперименты показывают, что нули полиномов (4), стягиваясь к лемнискате (12), быстро уплотняются на некотором удалении от точки $z = 1/2$. Рядом же с указанной точкой нули появляются лишь при больших номерах и имеют малую плотность. Схожая картина наблюдается для нулей полиномов (6).

Теоретическая часть нашего исследования использует известные результаты о нулях частичных сумм степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \zeta^k \tag{13}$$

с коэффициентами $a_k \in \mathbb{C}$. Считаем, что радиус сходимости ряда (13) равен единице, т. е. ряд заведомо сходится в круге $|\zeta| < 1$ и расходится при $|\zeta| > 1$. Тогда справедливы два утверждения [7, 8].

Теорема (Jentzsch, 1916). *Каждая точка границы круга сходимости степенного ряда* (13) *является предельной для множества нулей, взятых от всех частичных сумм этого ряда.*

Теорема (Izumi, 1927). *Если коэффициенты ряда* (13) *удовлетворяют условию*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k-1}}{a_k} = 1,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ множество $|\zeta| > 1 + \varepsilon$ содержит не более, чем конечное число нулей от частичных сумм ряда (13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. x+130 p.

2. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.

3. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1993. x+450 p.

4. *Новиков И. Я.* Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Матем. заметки. 2002. Т. 71, вып. 2. С. 239–253.

5. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

6. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по матем. анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.

7. *Jentzsch R.* Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen // Acta Math. 1916. Vol. 41. P. 219–251.

8. *Izumi S.* On the Distribution of the Zero Points of Sections of a Power Series // Japanese J. Math. 1927. Vol. 4. P. 29–32.

УДК 517.518

СКОРОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ МОНОТОННОЙ ФУНКЦИИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КАК КРИТЕРИЙ ЕЁ СИНГУЛЯРНОСТИ [1]

Ю. В. Тихонов (Москва, РФ)

july.tikh@gmail.com

Рассмотрим ограниченную неубывающую функцию $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$. Будем приближать её в $L^p[0;1]$ кусочно постоянными функциями f_N, у которых соответственно не более N различных значений. Тогда асимптотическое поведение величины $\|f - f_N\|_{L^p}$ будет некоторым образом характеризовать степень сингулярности функции f.

Пусть $\mathcal{D}_N$ — множество кусочно-постоянных функций на $[0;1]$, принимающих не более N различных значений. Тогда существует функция $f_N \in \mathcal{D}_N$, ближайшая к f в метрике $L^p[0;1]$.

Легко проверить, что для произвольной неубывающей ограниченной функции f величина $\|f - f_N\|_{L^p} \cdot N$ ограничена при всех натуральных N. Оказывается, что для сингулярных функций и только для них эта величина стремится к нулю при $N \to \infty$.

Теорема 1. Пусть f — ограниченная неубывающая функция на $[0;1]$. Следующие условия эквивалентны:

(1) f — сингулярна, то есть её производная равна нулю почти всюду.

(2) Для любого $p \in [1;+\infty)$

$$\|f - f_N\|_{L^p} \cdot N \to 0\,, \quad N \to \infty,$$

где $f_N \in \mathcal{D}_N$, $\|f - f_N\|_{L^p} \to \min$.

[1] Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 14-11-00754).

(3) Условие (2) выполнено только для некоторого p и для некоторой бесконечной последовательности натуральных номеров N.

Результат (3) $\Rightarrow$ (1) (для $p = 2$) был получен А. А. Владимировым в работе [1].

Более быстрая сходимость величины $\|f - f_N\|_{L_p}$ дает оценку для размерности Хаусдорфа носителя меры Лебега-Стилтьеса μ, порожденной функцией f. Будем говорить, что функция f приближается $\{f_N\}$ в L^p со скоростью $\alpha \geq 1$, если для бесконечного множества N выполнено

$$\|f - f_N\|_{L^p} \cdot N^\alpha \leq C\,, \quad \text{где } f_N \in \mathcal{D}_N\,.$$

Теорема 2. Пусть f приближается в L^p со скоростью α. Тогда у меры существует носитель, размерность Хаусдорфа которого не превосходит $1/(\alpha p + 1 - p)$.

Для самоподобных функций размерность носителя меры следует как частный случай из работы R. Strichartz [2], а скорость приближения вычислена в работе [3]. Используя это, можно построить примеры функций f, для которых указанная верхняя оценка на размерность Хаусдорфа будет точной; существуют и функции, для которых размерность меньше. Более того, нижнюю оценку на размерность получить невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров А. А., Шейпак И. А.* О задаче Неймана для уравнения Штурма – Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа // Функц. анализ и его прил. 2013. Т. 47, № 4. С. 18–29.

2. *Strichartz R.* Self-Similar Measures and their Fourier Transforms I // Indiana Univ. Math. J. 1990. Vol. 39, № 3. P. 797–817.

3. *Тихонов Ю. В.* О скорости приближения сингулярных функций кусочно-постоянными // Матем. заметки. 2014. Т. 95, вып. 4. С. 590–604.

УДК 517

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССАМ БЕСОВА

Т. Е. Тилеубаев (Астана, Казахстан)
Tileubaev@mail.ru

Пусть $1 < p < \infty$. Через $L_{p,\alpha,\beta}[-1,1]$ обозначим пространство функций f таких, что функция $f(x)$ принадлежит пространству суммируемых функций на отрезке $[-1,1]$ с нормой

$$\|f\| = \left(\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^p (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть $f \in L_{p,\alpha,\beta}$. Для $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ введем модуль гладкости следующим образом:

$$\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{0\le h\le\delta} \|\triangle_h^k(f,.)\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Через $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$ обозначим наилучшее приближение функции f в метрике пространства $L_{p,\alpha,\beta}$ алгебраическими многочленами степени не выше, чем $n-1$, т.е.

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{P\subset P_n} \|f - P_n\|_{p,\alpha,\beta.}$$

Для θ, $p \in [1,+\infty)$ определим пространство

$$B(\theta,p,r)=\left\{ f\in L_{p,\alpha,\beta} : \|f\|_{\theta,p,r}=\|f\|_{p,\alpha,\beta}+\left(\int_0^1 t^{-\theta r-1}\omega_k^\theta(f,t)_{p,\alpha,\beta}\right)^{1/\theta}\right\},$$

где $k > r$.

Сформулируем известные результаты в виде лемм, которые мы будем использовать в дальнейшем при доказательстве теорем 1 и 2.

Лемма 1. *Пусть* $1 < q < \infty$, *числа* c_ν, d_ν *таковы, что* $c_\nu > 0$, $d_\nu \ge 0$ *при* $\nu \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} d_\mu\right)^q \le q^q \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{1-q} \left(\sum_{\mu=1}^{\nu}\right)^q d_\mu^q.$$

Лемма 2. *Пусть* $1 < q < \infty$, *числа* c_ν, d_ν *таковы, что* $c_\nu > 0$, $d_\nu \ge 0$ *при* $\nu \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \left(\sum_{\mu=1}^{\nu} d_\mu\right)^q \le q^q \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{1-q} \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\right)^q d_\mu^q.$$

Лемма 3. *Пусть* $0 < q < 1$, *числа* c_ν, d_ν *таковы, что* $c_\nu > 0$, $d_\nu \ge 0$ *при* $\nu \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} d_\mu\right)^q \ge q^q \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{1-q} \left(\sum_{\mu=1}^{\nu}\right)^q d_\mu^q.$$

Лемма 4. *Пусть* $0 < q < 1$, *числа* c_ν, d_ν *таковы, что* $c_\nu > 0$, $d_\nu \ge 0$ *при* $\nu \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \left(\sum_{\mu=1}^{\nu} d_\mu\right)^q \ge q^q \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{1-q} \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\right)^q d_\mu^q.$$

Доказательства лемм 1–4 содержатся в работе [2] (см. так же [3]).

Лемма 5. *Пусть $f \in L_{p,\alpha,\beta}$. Тогда*

а) при $2 \le p < \infty$ справедливо неравенство

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha,\beta} \le C_1 \left\{ \frac{1}{n^{2k}} \left[\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p \nu^{(2k+1)p-2}\right]^{1/p} + \left[\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2}\right]^{1/p} \right\},$$

б) при $1 < p \le 2$ справедливо неравенство

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{p}\right)_{p,\alpha,\beta} \ge C_2 \left\{ \frac{1}{n^{2k}} \left[\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p \nu^{(2k+1)p-2}\right]^{1/p} + \left[\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2}\right]^{1/p} \right\}.$$

Лемма 6. *Пусть числа a, b и C_k таковы, что $0 < a < b < \infty$, $C_k > 0$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k^b\right)^{1/b} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k^a\right)^{1/a}.$$

Сформулируем достаточные условия принадлежности функции классу типа Бесова $B(\theta, p, r)$.

Теорема 1. 1. *Пусть $2 \le p < \infty$, $f \in L_{p,\alpha,\beta}$.*

а) если $\frac{\theta}{p} \ge 1$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta\left(r+1-\frac{1}{r}\right)-1} a_n^\theta$ сходится, то $f \in B$;

б) если $0 < \frac{\theta}{p} \le 1$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta\left(r+1-\frac{2}{r}\right)} a_n^\theta$ сходится, то $f \in B$.

2. *Пусть $1 < p < 2$, $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ $\theta \ge 1$.*

в) если $\theta \geqslant 2$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta\left(r+\frac{1}{2}\right)-1} a_n^\theta$ сходится, то $f \in B$;

г) если $\theta \le 2$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta r} a_n^\theta$ сходится, то $f \in B$.

Теперь сформулируем необходимые условия принадлежности функции пространству Бесова $B(\theta, p, r)$.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$, $f \in B$. Тогда*

а) при $1 < p \le 2$ и $\frac{\theta}{p} \ge 1$ сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta\left(r+1-\frac{2}{r}\right)-1} a_n^\theta$;

б) при $1 < p \le 2$ и $0 < \frac{\theta}{p} \le 1$ сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta\left(r+1-\frac{1}{r}\right)} a_n^\theta$.

в) при $p \ge 2$ и $\theta \ge 2$ сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta r} a_n^\theta$.

г) при $0 < \theta \le 2$ и $p \ge 2$ сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\theta\left(r+\frac{1}{2}\right)} a_n^\theta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федоров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений : дисс. канд. физ.-мат. наук. М., МГУ, 1983. 127 с.

2. *Потапов М. К., Берриша М.* Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного // Publications De L'institut mathemaique. 1979. Nouvelle serie. T. 26 (40). P. 215–228.

3. *Leindler L.* Uber verschiedene Konvergenzarten trigonomtricher Reihen, III // Acta. Scient. Math. 1966. Vol. 27, № 3–4. P. 205–215.

УДК 517.5

О РАЗНОСТНОМ УРАВНЕНИИ ЛАПЛАСА С ЧЕТЫРЕМЯ УЗЛАМИ

Д. С. Теляковский (Москва, РФ)

dtelyakov@mail.ru

Ослабляются достаточные условия гармоничности функций $u(z) = u(x, y)$, $z \in G$, двух действительных переменных.

Определим расположение узлов разностного уравнения Лапласа. Пусть точки z_1, z_2 и z_3 являются вершинами остроугольного треугольника $\triangle = \triangle_{z_1 z_2 z_3}$, а точка z_0 — точкой пересечения высот этого треугольника. Поскольку треугольник остроугольный, точка z_0 лежит внутри $\triangle$ и углы между каждыми двумя лучами из набора $z_0 z_1$, $z_0 z_2$ и $z_1 z_3$ больше $\pi/2$. Для определённости будем считать, что вершины z_1, z_2 и z_3 занумерованы в порядке обхода $\triangle$ в положительном направлении. Такой набор точек $\{z_1, z_2, z_3\}$ будем называть подходящим (для уравнения Лапласа) набором узлов для точки z_0. Пусть $z_j - z_0 = r_j e^{i\varphi_j}$, $j = 1, 2, 3$ и $u_j = u(z_j)$, $j = 0, 1, 2, 3$.

Рассматривается следующее разностное выражение для уравнения Лапласа в точке z_0 для набора узлов $\{z_1, z_2, z_3\}$:

$$\Delta^* u(z_0) = \Delta^* u(z_0, z_1, z_2, z_3) :=$$
$$:= \frac{u_1 - u_0}{r_1^2} \sin 2(\varphi_2 - \varphi_3) + \frac{u_2 - u_0}{r_2^2} \sin 2(\varphi_3 - \varphi_1) + \frac{u_3 - u_0}{r_3^2} \sin 2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Будем говорить, что функция $u(z)$ удовлетворяет в точке z_0 обобщённому разностному уравнению Лапласа, если в любой окрестности точки z_0 найдётся подходящий набор узлов $\{z_1, z_2, z_3\}$ для которого величина $\Delta^* u(z_0, z_1, z_2, z_3)$ сколь угодно мала по модулю.

Теорема. *Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет в области G следующим условиям:*

1) *в каждой точке области выполнено обобщённое разностное уравнение Лапласа*;

2) для некоторого положительного $p \leqslant 1$ функция $u(z)$ в каждой точке $\zeta \in G$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка p вдоль трёх исходящих из точки ζ лучей t_1, t_2 и t_3, углы между которыми при обходе ζ против часовой стрелки меньше π, т. е. найдётся такое $C_\zeta > 0$, что во всех точках z, лежащих на лучах t_j достаточно близко к ζ, выполнено неравенство $|u(z) - u(\zeta)| < C_\zeta |z - \zeta|^p$;

3) функция $u^2(z)$ локально суммируема в G.

Тогда функция $u(z)$ гармонична в области G.

Для разных точек $z \in G$ нет никакой связи между наборами узлов, для которых рассматривается разностное отношение $\Delta^* u(z)$, или направлениями исходящих из z лучей, вдоль которых функция удовлетворяет условию Гёльдера. Дать достаточное условие гармоничности при другом расположении четырёх узлов нельзя.

УДК 517.5

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В L РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИНУСАМ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. А. Теляковский (Москва, РФ)
sergeyAltel@yandex.ru

Показано, что для рядов Фурье по синусам с монотонными коэффициентами точный порядок убывания нормы в L остатка выражается через коэффициенты ряда так же, как и для рядов с выпуклыми коэффициентами. Но числовые множители в оценках при этом различны.

УДК 51-72

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ОБЪЕМНОМ СЛУЧАЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ В МОДЕЛИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Н. А. Трубаев (Москва, РФ)
trubaevn@umail.ru

Доказывается существование представления гармонической функции в объемном случае вида (1), (2) в сферических координатах: r, Ω, β, отличного от известного с использованием функций Лежандра.

$$A \;\; r^{\lambda} \sin(\lambda(\Omega + l)) \cos(\kappa\beta) \;\; , \tag{1}$$

$$B \;\; r^{\lambda} \cos(\lambda(\Omega + l)) \cos(\kappa\beta) \;\; , \tag{2}$$

где A, B, λ, l — константы, $\kappa = 0,\ 1$.

Используя вводимые отображения, сравнивая (1), (2) с представлением (3) произвольной при выполнении условия излучения гармонической функцией $u \in C_2(\Theta) \cap C_1(\overline{\Theta})$ потенциалами простого V и двойного слоя W в пространстве $L_2^{(1)}$, получен вывод о существовании острых кромок замкнутой границы S расчетной области Θ, вблизи которых возможны только аналитические решения задач Дирихле, Неймана и смешанной Дирихле – Неймана [1, 2].

$$\delta u(p) \;=\; -\; W_S(u) \;-\; V_S\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,, \tag{3}$$

где $\delta = 2$, если $p \in \Theta \backslash S$, и $\delta = 1$, если $p \in S$, $S \in C_1$.

Определение. $u \in L_2^{(1)}(\Theta)$, при $\int_\Theta (|u|^2 + |\mathrm{grad}\, u|^2)\ d\Theta < \infty$. Определяются два отображения:

β_0-*отображение*: отображение полупространства на бесконечный клин с границей в виде двух пересекающихся полуплоскостей. В каждой плоскости перпендикулярной линии пересечения полуплоскостей β_0-отображение соответствует конформному в плоскости отображению степенной функцией с полюсом в точке пересечения этой плоскости с прямой — пересечением полуплоскостей.

β_1-*отображение*: отображение полупространства на внутренность бесконечного конуса или внешность конуса — пространство с выемкой в виде бесконечного конуса. В каждой плоскости, включающей ось конуса, β_1-отображение соответствует конформному в плоскости отображению степенной функцией с полюсом в вершине конуса с одним показателем степени для всех таких плоскостей.

Показано, что если в предсталении (3) в области Θ с гладкой границей $S \in C_1$ функция $u \in C_m(\Theta) \cap C_k(\overline{\Theta})$, $m \geq 2$, $k \geq 1$, $k \leq m$, то конформное отображение степенной функцией в плоском случае с полюсом в точке границы отображает $k+1$ членов ряда Тейлора разложения функций плотности потенциалов W, V в плотности задающие k членов ряда Кондратьева соответствующего решению для бесконечного клина при нулевых граничных условиях [3; 4, с. 305; 5, с. 122].

В объемном случае, если использовать одно из β-отображений, члены ряда Тейлора функций плотности, отображаются в плотности задающие члены асимптотики решения задачи для клина или конуса при нулевых граничных условиях соответственно.

Результат отображения в плоском и объемном случаях принадлежит $L_2^{(1)}(\Theta \cup \overline{\Theta})$.

Введенные β-отображения позволяют обобщить на объемный случай результаты некоторых классических задач модели идеальной несжимаемой жидкости, ранее полученные в плоском случае с помощью конформных отображений. Например, задачи о падении струи на плоскость [6, 7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.; Л. : Гос. изд-во тех.-теорет. лит., 1946.

2. *Трубаев Н. А.* Аппроксимация гармонической функции вблизи угловой точки кусочно гладкой границы и точки смены типа граничных условий // Тр. Матем. центра им. Лобачевского. Казань : Изд-во Казан. матем. о-ва, 2015. Т. 51. С. 431–435.

3. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для элиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Тр. Моск. матем. о-ва. 1967. Т. 16, С. 209–292.

4. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М. : Наука, 1981. 688 с.

5. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М. : ТОО «Янус», 1995. 520 с.

6. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М. : Изд-во иностр. лит., 1963.

7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973.

УДК 517.984

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ[1]

И. В. Трухляева (Волгоград, РФ)

irishka2027@mail.ru

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения минимальной поверхности

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0 \tag{1}$$

в области Ω с краевым условием

$$f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}, \tag{2}$$

где функция $\varphi \in C(\overline{\Omega})$. Известно, что задача (1)–(2) имеет единственное решение для любой непрерывной функции φ, если граница $\partial\Omega$ имеет неотрицательную среднюю кривизну относительно внешней нормали.

Мы исследуем вопрос о равномерной сходимости полиномиальных приближенных решений уравнения минимальной поверхности, построение которых осуществляется следующим образом. Предположим, что

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02517- р_поволжье_а).

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная выпуклая область такая, что для некоторого многочлена $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, степени не более N_0 по каждой переменной, выполнено $\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ при $(x_1, \ldots, x_n) \in \partial\Omega$ и $\psi(x_1, \ldots, x_n) > 0$ для $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. Для натурального N обозначим через L_N множество всех многочленов вида

$$v_N(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1, \ldots, x_n) \sum_{h_1=1}^{N} \ldots \sum_{h_n=1}^{N} c_{h_1,\ldots,h_n} x_1^{h_1}, \ldots, x_n^{h_n}.$$

Ясно, что $v_N(x_1, \ldots, x_n) = 0$ для $(x_1, \ldots, x_n) \in \partial\Omega$.

Функцию $f_N^* = \varphi + v_N^*$, $v_N^* \in L_N$, будем называть полиномиальным приближенным решением краевой задачи (1)–(2), если для любого многочлена $v_N \in L_N$ выполнено равенство

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\langle \nabla\varphi + \nabla v_N^*, \nabla v_N \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi + \nabla v_N^*|^2}}\, dx = 0. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть f — решение задачи (1)–(2), $f, \varphi \in C^k(\bar{\Omega})$. Предположим, что область Ω имеет C^2 — гладкую границу. Тогда последовательность f_N равномерно сходится к решению f при $N \to \infty$.*

Условие сходимости формулируется через следующую характеристику области $\Omega \subset R^n$

$$\lambda_N = \inf_P \frac{\left(|\nabla P|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Omega} \sup\limits_{\Omega} |\nabla P|},$$

точная нижняя грань берется по всем многочленам $P(x_1, \ldots, x_n)$ степени не более чем N по каждой переменной. Отметим, что подобные величины часто встречаются в вопросах сходимости приближенных решений различных краевых задач (см.[1]).

Нами установлено следующее неравенство (см.[2]). Если для области Ω выполнено $\triangle(\Omega) > 0$, то верно неравенство

$$\lambda_N \geq \frac{1}{2^{n+1} N^n} \frac{\sqrt{\omega}_n}{2^{\frac{n}{2}} \sqrt[4]{n}^n} \frac{\Delta^{\frac{n}{2}}(\Omega)}{\sqrt{|\Omega|}}, \tag{4}$$

где ω_n — объем единичного шара в R^n. Отметим, что для области $\Omega \subset R^n$ с гладкой границей величина $\Delta(\Omega) > 0$ и поэтому

$$\lambda_N = O\left(\frac{1}{N_n}\right)$$

при $N \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михлин И. А.* Вариационные методы в математической физике. М. : Наука, 1970. 512 с.

2. *Трухляева И. В.* Оценка некоторой полиномиальной характеристики многомерной области // Дни геометрии в Новосибирске – 2015 : тез. Междунар. конф. Новосибирск : Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, 2015. С. 61–62.

УДК 517.977

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ОБХОДА ЦЕЛЕЙ[1]

Е. А. Трушкова (Москва, РФ)
katerinatr@mail.ru

Среди всевозможных задач управления движением механических систем, летательных аппаратов (в частности, беспилотных), роботов-манипуляторов и т. д. есть широкий класс задач обхода заданных целей. Так, можно сформулировать задачу оптимального (по квадратичному критерию) обхода заданных пространственных целей в фиксированные моменты времени с одинаковыми скоростями прохода целей для линейной стационарной управляемой динамической системы вида

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_2 v(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad t_0 < t_1, \\ &\dot{v}(t) = B_1 x(t) + B_2 v(t) + C u(t), \end{aligned} \tag{1}$$

Математически эта задача представляет собой задачу оптимального управления системой (1), где состояние динамической системы описывается вектором $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T \in W_2^1[t_0, t_1]$, скорость — вектором $v(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))^T \in W_2^1[t_0, t_1]$, управление — вектором $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_q(t))^T \in L_2[t_0, t_1]$, с неразделенными многоточечными промежуточными условиями

$$\begin{gathered} x(t_0) = x_0, \quad x(\alpha_i) = x_i, \quad v(\alpha_{i-1}) = v(\alpha_i), \\ i \in \overline{1, m}, \quad t_0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{m-1} < \alpha_m = t_1. \end{gathered} \tag{2}$$

на минимум квадратичного критерия

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} (u(t), u(t))\, dt \to \min . \tag{3}$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-07-00925а).

Кроме управляемости динамической системы (1) дополнительно предполагаем единственность решения задачи оптимального управления системой (1) на каждом отрезке времени $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, $i = \overline{1,m}$, с фиксированными граничными условиями $x(\alpha_{i-1}) = x_{i-1}$, $x(\alpha_i) = x_i$, $v(\alpha_{i-1}) = v_{i-1}$, $v(\alpha_i) = v_i$ для любых $x_{i-1}, x_i, v_{i-1}, v_i \in \mathbb{R}^n$.

Множество $\mathbb{M}$ оптимальных траекторий $(x(t), v(t))$ задачи управления (1)–(3) должны удовлетворять соответствующим дифференциальным соотношениям принципа максимума Л.С. Понтрягина при $t \in \in [t_0, \alpha_1) \cup (\alpha_1, \alpha_2) \ldots \cup (\alpha_{m-1}, t_1]$

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_2 v(t),\, \dot{v}(t) = B_1 x(t) + B_2 v(t) + \tfrac{1}{2} C C^T \psi_2(t), \\ &\dot{\psi}_1(t) = -A_1^T \psi_1(t) - B_1^T \psi_2(t),\, \dot{\psi}_2(t) = -A_2^T \psi_1(t) - B_2^T \psi_2(t), \end{aligned} \tag{4}$$

и n–параметрическим (с параметром p) условиям

$$x(\alpha_i) = x_i, \quad v(\alpha_i) = p, \quad i \in \overline{0,m}. \tag{5}$$

Общее решение системы (4) имеет вид

$$\begin{aligned} &x(t) = \Phi_1(t) C_i, \quad v(t) = \Phi_2(t) C_i, \quad \psi_1(t) = \Phi_3(t) C_i, \\ &\psi_2(t) = \Phi_4(t) C_i, \quad t \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i), \quad i = \overline{1,m}, \end{aligned}$$

где C_i — произвольные постоянные вектора размера $4n$, $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Phi_3(t)$, $\Phi_4(t)$ — первый, второй, третий и четвертый блоки из n строк фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ системы (4). Тогда условия (5) можно переписать в виде

$$L(\alpha_{i-1}, \alpha_i) C_i = \begin{pmatrix} \Phi_1(\alpha_{i-1}) \\ \Phi_1(\alpha_i) \\ \Phi_2(\alpha_{i-1}) \\ \Phi_2(\alpha_i) \end{pmatrix} C_i = \begin{pmatrix} E_n & O_n \\ O_n & E_n \\ O_n & O_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_n \\ O_n \\ E_n \\ E_n \end{pmatrix} p,$$

и выразить $C_i = D_i p + d_i$, где

$$D_i = L^{-1}(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \begin{pmatrix} O_n \\ O_n \\ E_n \\ E_n \end{pmatrix}, d_i = L^{-1}(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \begin{pmatrix} E_n & O_n \\ O_n & E_n \\ O_n & O_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix}.$$

Здесь через E_n, O_n обозначены соответственно единичная и нулевая матрицы размера $n \times n$. Из вышеизложенного вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Множество оптимальных траекторий задачи оптимального обхода заданных пространственных целей x_i в фиксированные моменты времени α_i с одинаковыми скоростями прохода целей* (1)–(3) *имеет вид n–параметрического семейства*

$$\mathbb{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \exists p \in \mathbb{R}^2 : x(t) = \Phi_1(t)(D_i p + d_i), \\ v(t) = \Phi_2(t)(D_i p + d_i), \quad t \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i],\, i = \overline{1,m} \end{array} \right\}.$$

В силу теоремы 1, опираясь на результаты работ [1–5], построены функции $u(t,x)$ и $\widetilde{u}(t,v)$, синтезирующие семейство $\mathbb{M}$. А именно, для каждого из полуинтервалов $t \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i)$, $i = \overline{1,m}$, кроме конечного числа точек, в которых обращаются в нуль определители матриц $\Phi_1(t)D_i$ и $\Phi_2(t)D_i$ соответственно, справедливы формулы

$$u(t,x) = \frac{1}{2} C C^T \Phi_4(t) \left(D_i \left(\Phi_1(t) D_i\right)^{-1} \left(x - \Phi_1(t) d_i\right) + d_i \right),$$

$$\widetilde{u}(t,v) = \frac{1}{2} C C^T \Phi_4(t) \left(D_i \left(\Phi_2(t) D_i\right)^{-1} \left(v - \Phi_2(t) d_i\right) + d_i \right).$$

Таким образом, в линейно–квадратической задаче оптимального обхода заданных пространственных целей построено множество оптимальных траекторий и явные аналитические выражения для функций, синтезирующих оптимальные траектории, в виде управления с обратной связью как по состоянию $u(t,x)$, так и по скорости $\widetilde{u}(t,v)$ системы. Доказательства вышеперечисленных результатов опираются на результаты работ [1—5]. Как частные случаи с помощью описанной процедуры могут быть достаточно просто построены семейства оптимальных траекторий для задачи обхода фиксированных целей на плоскости или в пространстве при известной информации о состоянии системы или о скорости системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П.* О синтезирующих функциях линейных дифференциальных систем с квадратичным критерием качества // Теория функций и приближений : тр. 4-й Сарат. зим. шк. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1990. Ч. 1. С. 106–112.

2. *Хромов А. П.* О задаче синтеза для линейных систем с квадратичным критерием качества // Дифференциальные уравнения и теория функций : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 9. С. 3–14.

3. *Корнев В. В.* О существовании синтезирующих функций для линейно-квадратичных задач оптимального управления // Математика и ее приложения : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1988. С. 44–45.

4. *Трушкова Е. А.* Синтез оптимальных траекторий, подчиненных граничным условиям, для линейных управляемых систем // АиТ. 2011. № 3. С. 3–14.

5. *Трушкова Е. А.* Синтез оптимальных траекторий для линейных систем с трехточечным смешанным условиям // Материалы XIX Межд. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015). Алушта : Изд-во МАИ, 2015. С. 665–667.

УДК 517.518.85

О НЕКОТОРЫХ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ[1]

А. Ю. Трынин (Саратов, РФ)
tayu@rambler.ru

В качестве инструмента приближения функций в теории кодирования сигналов Э. Борель и Э.Т. Уиттекер предложили рассматривать кардинальную функцию и усечённую кардинальную функцию, сужение на отрезок $[0, \pi]$ которых выглядит так:

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Обозначим $x_{k,n} = \frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$. Для любых $0 \leq a < b \leq \pi$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ положим

$$Q_n(f,[a,b],\varepsilon) := \max_{p_1 \leq p \leq p_2} \left| {\sum_{m=m_1}^{m_2}}' \frac{f(x_{2m+1,n}) - f(x_{2m,n})}{p - 2m} \right|.$$

Штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем равным нулю, а индексы p_1, p_2, m_1 и m_2 определяются неравенствами

$$x_{p_1,n} \leq a + \varepsilon < x_{p_1+1,n}, \quad x_{p_2,n} \leq b - \varepsilon < x_{p_2+1,n},$$

$$x_{k_1-1,n} < a \leq x_{k_1,n}, \quad x_{k_2,n} \leq b < x_{k_2+1,n},$$

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right] + 1, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right].$$

Здесь $[z]$ обозначает целую часть числа z.

Теорема 1. *Если функция $f \in C[a,b]$, то из соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f,[a,b],\varepsilon) = 0 \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

следует

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n(f,\cdot)\|_{C[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} = 0. \tag{2}$$

Обозначим через Ω —множество действительных непрерывных неубывающих, выпуклых вверх на $[a,b]$, исчезающих в нуле функций ω. А через $C(\omega^l,[a,b])$ и $C(\omega^r,[a,b])$ — совокупность элементов $C[a,b]$ таких, что для любых x и $x+h$ $(a \le x < x+h \le b)$ справедливы неравенства

$$f(x+h) - f(x) \ge -K_f\omega(h) \text{ или } f(x+h) - f(x) \le K_f\omega(h)$$

соответственно, где $\omega \in \Omega$. Выбор положительных констант K_f может зависеть только от функции f. В этом случае функцию $\omega(h)$ иногда называют, соответственно, левосторонним или правосторонним модулем непрерывности. Классический модуль непрерывности будем обозначать как обычно $\omega(f,\delta) = \sup\limits_{|h|<\delta;x,x+h\in[a,b]} |f(x+h) - f(x)|$.

По аналогии с положительным (отрицательным) изменением функции назовём модулем положительного (отрицательного) изменения функции f на отрезке $[a,b]$ соответственно функции натурального аргумента вида

$$v^+(n,f) = \sup_{T_n} \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(t_{k+1}) - f(t_k)\big)_+ \text{и } v^-(n,f) = \inf_{T_n} \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(t_{k+1}) - f(t_k)\big)_-,$$

где $z_+ = \frac{z+|z|}{2}$ и $z_- = \frac{z-|z|}{2}$ и $T_n = \{a \le t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n \le b\}$, $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что f принадлежит классам $V^+(v)$ или $V^-(v)$, если для неё найдётся такая константа M_f, что для любого натурального n будут справедливы неравенства

$$v^+(n,f) \le M_f v(n) \text{ или } v^-(n,f) \ge -M_f v(n)$$

соответственно. Кроме того, обозначим функциональный класс $V(v) = V^+(v) \cap V^-(v)$ и классический модуль изменения $v(n,f) = v^+(n,f) - v^-(n,f)$.

Теорема 2. *Пусть $0 \le a < b \le \pi$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$. Если неубывающая выпуклая вверх функция натурального аргумента $v(n)$ и функция $\omega \in \Omega$ такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} \min_{1\le m\le k_2-k_1-1} \left\{ \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + \sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1} \frac{v(k)}{k^2} \right\} = 0, \tag{3}$$

где k_1 и k_2 — номера наименьшего и наибольшего из узлов $x_{k,n} = k\pi/n$, попадающих в отрезок $[a,b]$, то для любой функции $f \in C(\omega^l[a,b]) \cap \cap V^-(v)$ $(f \in C(\omega^r[a,b]) \cap V^+(v))$ имеет место равномерная сходимость (2).

В [1] доказано, что условие аналогичное (1) или, в случае когда $f \in C(\omega^l[a,b]) \cap V(v)$ или $f \in C(\omega^r[a,b]) \cap V(v)$ (v является мажорантой *классического* модуля изменения $v(n,f)$), условие вида (3) являются достаточными для равномерной сходимости тригонометрических интерполяционных процессов и последовательностей классических интерполяционных многочленов Лагранжа по матрице интерполирования П. Л. Чебышёва. В работе [2] установлена равномерная сходимость тригонометрических рядов Фурье для $2\pi-$периодичесих функций из класса $f \in C(\omega[a,b]) \cap V(v)$, где функии ω и v являются мажорантами *классических* модуля непрерывности $\omega(f,\delta)$ и модуля изменетя $v(n,f)$.

Из теоремы 2 следует, что если $f_1 \in C(\omega_1^r[a,b]) \cap V^+(v_1)$, а $f_2 \in \in C(\omega_2^l[a,b]) \cap V^-(v_2)$, и обе пары функций $(v_i,\, \omega_i)$, где $i = 1,2$, удовлетворяют соотношению (3), то, хотя линейная комбинация $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ может не принадлежать ни одному из этих классов, тем не менее, в силу линейности оператора L_n, для f будет иметь место равномерная сходимость (2) внутри интервала (a,b).

Несложно проверить, что каждый из классов функций: удовлетворяющих условию Дини – Липшица $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f,1/n)\ln n = 0$, и, удовлетворяющих условию Крылова (непрерывные функции ограниченной вариации), является собственным подмножеством функционального класса, описываемого условиями (3) теоремы 2.

Если неубывающая, выпуклая вверх функция натурального аргумента v такая, что
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v(k)}{k^2} < \infty,$$
то для любой функции $f \in C[a,b] \cap V^{\pm}(v)$ верно соотношение (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А. А. Привалов* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 2. С. 228–244.

2. *З. А. Чантурия* О равномерной сходимости рядов Фурье // Матем. сб. 1976. Т. 100(142), № 4(8). С. 534–554.

УДК 517.984

ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕПЛИКАЦИИ ИНДЕКСА[1]

А. Р. Файзлиев, С. П. Сидоров, А. А. Хомченко
(Саратов, РФ)
faizlievar1983@mail.ru

Для $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ положим $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ и $\|x\|_0 = = \lim_{q \to 0+} \|x\|_q =$ (число ненулевых элементов вектора x). Обозначим r_{ti} — доходность актива i в момент t, $R = (r_{ti})$, $1 \le i \le n$, $1 \le t \le m$. Портфель определяется как вектор весов активов, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Пусть I_t есть доходность индекса в момент времени t, $1 \le t \le m$, и $I = (I_1, \ldots, I_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Мы не позволяем изменять портфель в течение инвестиционного периода и не учитываем транзакционные издержки. Мы будем полагать, что короткие продажи допустимы, т.е. веса x_i могут быть отрицательными; инвестор имеет одну единицу капитала, т.е. $x^T 1_n = 1$, где 1_n означает вектор из $\mathbb{R}^n$, в котором каждый компонент равен 1. В традиционной задаче слежения за индексом цель состоит в нахождении портфеля, который имеет минимальное значение дисперсии ошибки слежения, т.е. суммы квадратов отклонений между доходностями портфеля и рыночным индексом:

$$x^* = \arg\min \frac{1}{m}\|I - Rx\|_2^2 \ \ s.t. \ \ x^T 1_n = 1. \tag{1}$$

Рассмотрим задачу минимизации (1) с ограничением на кардинальность:

$$x^* = \arg\min \frac{1}{m}\|I - Rx\|_2^2 \ \ s.t. \ \ x^T 1_n = 1, \ \|x\|_0 \le K, \tag{2}$$

где K есть ограничение на количество активов в портфеле с ненулевыми весами. Обычно предполагается, что K значительно меньше общего числа активов n, $K \ll n$.

Задача слежения за индексом с ограничением на кардинальность является задачей неполиномиальной сложности и поэтому обычно требует разработки алгоритмов эвристического поиска, таких, как генетические алгоритмы или алгоритм дифференциальной эволюции [1–8]. Хотя эти алгоритмы и приводят к получению достаточно точного решения задачи, при этом они требуют использования больших вычислительных мощностей, возможностей распараллеливания, временных затрат на подбор

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00140).

оптимальных параметров, а также больших объемов вычислений и времени выполнения. Хороший обзор может быть найден в работах [1, 4, 8]. Жадные алгоритмы не обладают этими недостатками и также доказали свою эффективность [9]. Свойства жадных алгоритмов для решения задач выпуклой оптимизации получены в работе [10].

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ есть индексное множество инвестиционных активов. Жадный алгоритм для решения задачи (2) в норме l_2 был рассмотрен, в частности, в работе [11]. Алгоритм на каждом шаге своей работы добавляет в портфель актив, который еще не входит в портфель и который наиболее (в некотором смысле) «близок» к индексу. Процесс включения новых активов в портфель продолжается до тех пор, пока в портфеле не окажется ровно K активов.

Обозначим $M_k \subset N$ подмножество индексного множества N, соответствующее k ненулевым элементам x. Обозначим $\widetilde{R}_{M_k}$ подматрицу матрицы доходностей R размерности $(m \times |M_k|)$, в которую вошли столбцы M_k. Тогда задача (2) с $x_i = 0$ для $i \in N \setminus M_k$ будет иметь вид

$$\widetilde{x}^* = \arg\min_{\widetilde{x}} \|I - \widetilde{R}_{M_k}\widetilde{x}\|_2^2 \;\; s.t. \; \widetilde{x}^T 1_{|M_k|} = 1, \; \widetilde{x} \in \mathbb{R}^{|M_k|}. \tag{3}$$

Обозначим $f(M_k) := \|I - \widetilde{R}_{M_k}\widetilde{x}^*\|_2^2$. Оптимальное решение задачи (3) может быть найдено методом Лагранжа:

$$\widetilde{x}_{M_k} = (\widetilde{R}_{M_k}^T \widetilde{R}_{M_k})^{-1}(\widetilde{R}_{M_k}^T I - \lambda e_k), \tag{4}$$

и $\lambda = \frac{1_k^T (\widetilde{R}_{M_k}^T \widetilde{R}_{M_k})^{-1}\widetilde{R}_{M_k}^T I - 1}{1_k^T (\widetilde{R}_{M_k}^T \widetilde{R}_{M_k})^{-1} 1_k}$.

Algorithm 1: Жадный алгоритм в L_2

begin
- Пусть $M_0 = \varnothing$ и $k = 1$. Положить $f(M_0)$ достаточно большим.
- **while** $k \leq K$ **do**
  - $\forall s \in N \setminus M_{k-1}$ вычислить $\widetilde{x}_{M_{k-1}\cup\{s\}}$, используя (4).
  - Выбрать $s^* = \arg\min_{s \in N\setminus M_{k-1}} f(M_{k-1} \cup \{s\})$ и положить $\widetilde{x}_{M_k} = \widetilde{x}_{M_{k-1}\cup\{s^*\}}$.
  - Положить $M_k = M_{k-1} \cup \{s^*\}$ и $k = k + 1$.
- Присвоить $x_G = \widetilde{x}_{M_K}$ и $M_G = M_K$.
- Вернуть x_G и M_G.

end

В выступлении мы представим оценки скорости сходимости алгоритма и эмпирический анализ работы алгоритма на реальных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beasley J.E., Meade N., Chang T.-J.* An evolutionary heuristic for the index tracking problem // European J. Operational Research. 2003. Vol. 148. P. 621–643.

2. *Chang T.J. , Meade N., Beasley J.E., Sharaiha Y.M.* Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation // Computers & Operations Research. 2003. Vol. 27. P. 1271–1302.

3. *8Woodside-Oriakhi M., Lucas C., Beasley J.E.* Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier // European J. Operational Research. 2011. Vol. 213. P. 538–550.

4. *Canagkoz N.A., Beasley J.E.* Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation // European J. Operational Research. 2008. Vol. 196(1). P. 384–399.

5. *Derigs U., Nickel N.-H.* Meta-heuristic based decision support for portfolio optimization with a case study on tracking error minimization in passive portfolio management // OR Spectrum. 2003. Vol. 25. P. 345–378.

6. *Maringer D., Oyewumi O.* Index tracking with constrained portfolios // Intell. Syst. Account., Finance Mgmt. 2007. Vol. 15. P. 57–71.

7. *Gilli M., Winker P.* Heuristic optimization methods in econometrics. *In Handbook of Computational Econometircs*, edited by D. Beasley and E. Kontoghiorghes. Wiley : Chichester. 2009. P. 81–120.

8. *Maringer D.* Portfolio Management with Heuristic Optimization. Berlin : Springer, 2005.

9. *Das A., Kempe D.* Submodular meets spectral: Greedy algorithms for subset selection,sparse approximation and dictionary selection // Proc. Intern. Conf. on Machine Learning. 2011.

10. *Temlyakov V. N.* Greedy Approximation in Convex Optimization // Constr. Approx. 2015. Vol. 41(2). P. 269–296.

11. *Takeda A., Niranjan M., Gotoh J., Kawahara Y.* Simultaneous pursuit of out-of-sample performance and sparsity in index tracking portfolios // Comput. Manag. Sci. 2013. Vol. 10, № 1. P. 21–49.

УДК 517.518

ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ В АНАЛИЗЕ УОЛША

Ю. А. Фарков (Москва, РФ)
farkov@list.ru

Функции Уолша и их обобщения являются характерами аддитивных абелевых групп Кантора и Виленкина (см., например, [1, 2]). Напомним, что для данного целого $p \geq 2$ группа Виленкина G_p состоит из последовательностей $x = (x_j)$, где $x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $j \in \mathbb{Z}$, и только конечное число x_j с отрицательными индексами могут быть отличными от нуля. Операция сложения на G_p определяется как покоординатное сложение по модулю p:

$$(z_j) = (x_j) \oplus (y_j) \iff z_j = x_j + y_j \,(\mathrm{mod}\, p) \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{Z},$$

а топология вводится с помощью системы окрестностей нуля:

$$U_l = \{(x_j) \in G_p \,:\, x_j = 0 \quad \text{для всех } j \le l\}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Группа G_p локально компактна и самодвойственна, причем отношение двойственности вводится по формуле

$$\chi(x, \omega) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j\, \omega_{1-j}\right), \quad x, \omega \in G_p.$$

Локально компактная канторова группа $\mathcal{C}$ изоморфна группе G_2. Равенство $z = x \ominus y$ означает, что $z \oplus y = x$ (при $p = 2$ операции $\oplus$ и $\ominus$ совпадают).

Положим для краткости $G = G_p$ и $U = U_0$ (в случае $p = 2$ подгруппа U группы G изоморфна компактной канторовой группе). Выберем в G дискретную подгруппу $H = \{(x_j) \in G \,:\, x_j = 0 \text{ для } j > 0\}$ и определим автоморфизм $A \in \operatorname{Aut} G$ по формуле $(Ax)_j = x_{j+1}$, $x = (x_j) \in G$. Легко видеть, что фактор-группа $H/A(H)$ содержит p элементов и что $\chi(Ax, \omega) = \chi(x, A\omega)$ для всех $x, \omega \in G$. Отображение $\lambda : G \to [0, +\infty)$ определим по формуле

$$\lambda(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j p^{-j}, \qquad x = (x_j) \in G.$$

Образом подгруппы H при отображении λ является множество целых неотрицательных чисел: $\lambda(H) = \mathbb{Z}_+$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ через $h_{[\alpha]}$ обозначим элемент из H такой, что $\lambda(h_{[\alpha]}) = \alpha$; в частности, $h_{[0]}$ совпадает с нулевым элементом группы G. *Функции Уолша* для группы G могут быть заданы равенством

$$W_\alpha(x) = \chi(x, h_{[\alpha]}), \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+,\ x \in G.$$

Эти функции непрерывны на G и удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_U W_\alpha(x) \overline{W_\beta(x)}\, d\mu(x) = \delta_{\alpha,\beta}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\delta_{\alpha,\beta}$ — символ Кронекера. Известно также, что при $\alpha \le p^n - 1$ функция W_α постоянна на каждом из множеств

$$U_{n,s} = A^{-n}(h_{[s]}) \oplus A^{-n}(U), \quad 0 \le s \le p^n - 1.$$

Дискретное преобразование Виленкина – Крестенсона переводит данный вектор $(b_0, b_1, \ldots, b_{p^n-1})$ в вектор $(a_0, a_1, \ldots, a_{p^n-1})$, компоненты которого вычисляются по формулам

$$a_\alpha = \frac{1}{p^n}\sum_{s=0}^{p^n-1} b_s W_\alpha(A^{-n}h_{[s]}), \quad 0 \le \alpha \le p^n - 1. \tag{1}$$

Обратное преобразование определяется формулами

$$b_s = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \, \overline{W_\alpha(A^{-n}h_{[s]})}, \qquad 0 \le s \le p^n - 1. \tag{2}$$

Существуют быстрые алгоритмы реализации этих дискретных преобразований (см., например, [1, с. 256]).

Пространство Лебега $L^2(G)$ определяется по мере Хаара μ, заданной на борелевских множествах в G и нормированной условием $\mu(U) = 1$. Обозначим через $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ и $\| \cdot \|$ скалярное произведение и норму в $L^2(G)$, а через $\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции f. Для любых $f, g \in L^2(G)$ имееет место равенство Парсеваля $\langle \widehat{f}, \widehat{g}\,\rangle = \langle f, g\rangle$.

Для данного множества $\Psi := \{\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}\} \subset L^2(G)$, $r \ge p-1$, *система всплесков* $X(\Psi)$ определяется по формуле

$$X(\Psi) := \{\psi^{(\nu)}_{j,k} \ : \ 1 \le \nu \le r, \ j \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{Z}_+\},$$

где

$$\psi^{(\nu)}_{j,k}(x) = p^{j/2}\psi^{(\nu)}(A^j x \ominus h_{[k]}), \quad x \in G.$$

Система $X(\Psi)$ называется *фреймом Парсеваля* для $L^2(G)$, если для всех $f \in L^2(G)$ выполнено равенство

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\sum_{\nu=1}^{r} |\langle f\,, \psi^{(\nu)}_{j,k}\rangle|^2 = \|f\|^2.$$

Основополагающие факты теории всплесковых фреймов содержатся в [3]. Первые примеры фреймов на канторовой группе $\mathcal{C}$ построены в [4]. Наименьшее значение константы в диадическом принципе неопределенности получено [5] на одном из этих фреймов. Приведем алгоритмы построения фреймов Парсеваля на группе G, основанные на принципе унитарного продолжения и недавних результатах из [6]. Элементы $\delta_l \in U$ определим условием $\lambda(\delta_l) = l/p$, где $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Алгоритм А.

- **Шаг 1**. Выбрать числа b_s, $0 \le s \le p^n - 1$, такие, что

$$b_0 = 1, \quad |b_l|^2 + |b_{l+p^{n-1}}|^2 + \cdots + |b_{l+(p-1)p^{n-1}}|^2 = 1, \tag{3}$$

где $0 \le l \le p^{n-1} - 1$.

- **Шаг 2**. Вычислить a_α, $0 \le \alpha \le p^n-1$, по формулам (1) и определить полином Уолша

$$m_0(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W_\alpha(\omega)}. \tag{4}$$

- **Шаг 3**. Найти функцию $\varphi \in L^2(G)$ такую, что

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(A^{-j}\omega), \quad \omega \in G.$$

- **Шаг 4**. Найти полиномы Уолша

$$m_\nu(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha^{(\nu)} \overline{W_\alpha(\omega)}, \quad 1 \le \nu \le p-1,$$

  такие, что матрица

$$\begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) & \dots & m_{p-1}(\omega) \\ m_0(\omega \oplus \delta_1) & m_1(\omega \oplus \delta_1) & \dots & m_{p-1}(\omega \oplus \delta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_0(\omega \oplus \delta_{p-1}) & m_1(\omega \oplus \delta_{p-1}) & \dots & m_{p-1}(\omega \oplus \delta_{p-1}) \end{pmatrix}$$

  унитарна при каждом $\omega \in G$.

- **Шаг 5**. Определить функции $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(p-1)}$ по формулам

$$\psi^{(\nu)}(x) = p \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha^{(\nu)} \varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}), \quad 1 \le \nu \le p-1.$$

Алгоритм B.

- **Шаг 1**. Выбрать числа b_s, $0 \le s \le p^n-1$, такие, что

$$b_0 = 1, \quad |b_l|^2 + |b_{l+p^{n-1}}|^2 + \dots + |b_{l+(p-1)p^{n-1}}|^2 \le 1, \tag{5}$$

  где $0 \le l \le p^{n-1}-1$.

- **Шаги 2 и 3** как в алгоритме A.

- **Шаг 4**. Для данного $r \ge p$ найти полиномы Уолша

$$m_\nu(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha^{(\nu)} \overline{W_\alpha(\omega)}, \quad 1 \le \nu \le r,$$

такие, что строки матрицы

$$\begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) & \dots & m_r(\omega) \\ m_0(\omega\oplus\delta_1) & m_1(\omega\oplus\delta_1) & \dots & m_r(\omega\oplus\delta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_0(\omega\oplus\delta_{p-1}) & m_1(\omega\oplus\delta_{p-1}) & \dots & m_r(\omega\oplus\delta_{p-1}) \end{pmatrix}$$

при каждом $\omega \in G$ образуют ортонормированную систему.

- **Шаг 5**. Определить функции $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}$ по формулам

$$\psi^{(\nu)}(x) = p\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha^{(\nu)}\varphi(Ax\ominus h_{[\alpha]}), \quad 1 \le \nu \le r,$$

или, в терминах преобразований Фурье, по формулам

$$\widehat{\psi}^{(\nu)}(\omega) = m_\nu(A^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(A^{-1}\omega), \quad 1 \le \nu \le r.$$

Теорема. *Пусть множество всплесков $\Psi = \{\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}\}$ определено для $r = p-1$ по алгоритму A и для $r \ge p$ по алгоритму B. Тогда система $X(\Psi)$ является фреймом Парсеваля для $L^2(G)$.*

При переходе от первого алгоритма ко второму множество исходных векторов $(b_0, b_1, \dots, b_{p^n-1})$ расширяется (сравните (3) и (5)), что компенсируется увеличением числа всплесков $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}$. Корректность определения функции $\varphi \in L^2(G)$ на шаге 3 алгоритма B следует из [6, теорема 11]. Поскольку $\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(A^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(A^{-1}\omega)$, функция φ удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = p\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha\varphi(Ax\ominus h_{[\alpha]}), \quad x \in G, \tag{6}$$

а полином (4) является *маской* уравнения (6).

Из формул (2) и (4) следует, что $b_s = m_0(A^{-n}h_{[s]})$ для $s = 0, 1, \dots, p^n-1$. Для значений b_s маски m_0 масштабирующего уравнения (6) условия (3) являются следствием ортонормированности системы H-сдвигов решения φ этого уравнения (см. [8, предложение 3.2]). Более того, согласно [8, с.210], если в дополнение к условиям (3) потребовать, что $b_j \ne 0$ при $0 \le j \le p^{n-1}-1$ (это означает, что $m_0(A^{-1}\omega) \ne 0$ при $\omega \in U$), то решение φ уравнения (6) порождает кратномасштабный анализ в $L^2(G)$ и алгоритм A приводит к ортонормированному базису всплесков в $L^2(G)$

(сравните с алгоритмами в [9] и [10]). Алгоритм построения ортонормированных базисов в L^2-пространстве периодических комплексных последовательностей с периодом $N = p^n$ по векторам $(b_0, b_1, \ldots, b_{p^n-1})$, удовлетворяющим условиям (3), изложен в [11]. Обобщения на биортогональный случай даны в [9] и [12], а основные конструкции периодических всплесков на группе G, дополняющие стандартную процедуру периодизации, приведены в [13].

При построении фреймов система H-сдвигов решения φ масштабирующего уравнения (6) может быть линейно зависимой. В общем случае для вычисления значений $\widehat{\varphi}(\omega)$ на шаге 3 алгоритмов A и B можно воспользоваться формулой (2.18) из [8]. Некоторые методы реализации шага 4 в алгоритмах A и B указаны в [6] и [9]. Известно [6, § 5], что в пространствах типа Соболева $W_m^2(G)$ разложения по полученным фреймам имеют произвольный порядок аппроксимации. Особенно простые разложения получаются по фреймам на группе G, для которых масштабирующие функции φ являются конечными линейными комбинациями функций Уолша (см. [7, теорема 3.9]). Отметим также, что применяемые для обработки сигналов дискретные всплесковые преобразования могут быть определены по любому набору векторов $(b_0, b_1, \ldots, b_{p^n-1})$, удовлетворяющему условиям (3) или (5), и для некоторых сигналов решена задача об оптимальном выборе таких наборов по энтропийному и иным критериям (см. библиографию в [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. Изд. 2-е. М. : Изд-во ЛКИ, 2008. 352 с.

2. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. N. Y. : Adam Hilger, 1990. 545 p.

3. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 616 с.

4. *Farkov Yu. A.* Examples of frames on the Cantor dyadic group // J. Math. Sc. 2012. Vol. 187, № 1. P. 22–34.

5. *Krivoshein A. V., Lebedeva E. A.* Uncertainty principle for the Cantor dyadic group // J. Math. Anal. Appl. 2015. Vol. 423, № 2. P. 1231–1242.

6. *Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 5. 1550036 (19 pages).

7. *Farkov Yu. A.* Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis // Poincare J. Anal. Appl. 2015. Vol. 2. Special Issue (IWWFA-II, Delhi). P. 13–36.

8. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 3. С. 193–220.

9. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups // p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. 2011. Vol. 3, № 1. P. 181–195.

10. *Berdnikov G. S., Lukomskii S. F.* N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 5. 1550037 (23 pages).

11. *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина – Крестенсона // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 6. С. 914–928.

12. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* On biorthogonal discrete wavelet bases // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 1. 1550002 (18 pages).

13. *Farkov Yu. A.* Periodic wavelets in Walsh analysis // Communic. Math. Appl. 2012. Vol. 3, № 3. P. 223–242.

УДК 517.98

СХОДИМОСТЬ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НАПРАВЛЕННОСТЕЙ[1]

Д. В. Фуфаев (Москва, РФ)
fufaevdv@rambler.ru

Пусть (X, μ) — пространство с мерой, а оператор T действует из $L^0(X, \mu)$ в $L^0(X, \mu)$. Назовем T выпуклым, если из существования Tf_1 и Tf_2 следует существование $T(f_1 + f_2)$ и при этом $|T(f_1+f_2)(x)| \le |Tf_1(x)|+|Tf_2(x)|$. Будем говорить, что выпуклый оператор T имеет слабый тип $(1,1)$ с константой C, если для любого $\lambda > 0$ и для любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ выполняется следующее неравенство:

$$\mu\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\} \le \frac{C}{\lambda}||f||_{L^1(X,\mu)}.$$

Теорема 1 (неравенство Харди – Литтльвуда).
Пусть $\mu(X) < \infty$, $f \in L^1(X), f \cdot \ln(f+1) \in L^1(X), f \ge 0$, T — оператор слабого типа $(1,1)$ и задано $\varepsilon > 0$. Тогда для любого $\gamma > 0$ найдется множество $X_\gamma \subset X$ такое, что $\mu(X_\gamma) > \mu(X) - \gamma$ и справедливо неравенство

$$\int\limits_{X_\gamma} |Tf(x)| d\mu(x) \le A \int\limits_{X_\gamma} f(x) \cdot \ln(f(x)+1) d\mu(x) + B \int\limits_{X_\gamma} f(x) d\mu(x) + \varepsilon,$$

где A и B суть константы, зависящие от ε, но не от f.

В частных случаях это неравенство как правило следует непосредственно из общего вида оператора, причем с $k = \gamma = 0$.

Порой в гармоническом анализе возникают приближения не последовательностью операторов, а семейством операторов, которые образуют лишь частично упорядоченное множество. Самый распространенный

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417).

пример — кратные ряды Фурье. Чтобы работать с такими семействами, вспомним понятие направленности (см. [1, с. 12]).

Определение. Непустое множество A называется *направленным*, если на нем задан частичный порядок, удовлетворяющий следующему условию: для любых $m, n \in A$ найдется элемент $k \in A$ такой, что $m \le k$ и $n \le k$. *Направленностью* в множестве X называется набор элементов $\{x_n\}_{n\in A}$, индексируемых элементами направленного множества. Направленность $\{x_n\}_{n\in A}$ в топологическом пространстве X сходится к элементу x, если для любого непустого открытого множества U, содержащего x, найдется такой элемент $n_0 \in A$, что $x_n \in U$ для всех $n \ge n_0$, $n \in A$. Понятным образом определяется *сходимость числовых направленностей*, а также *поточечная сходимость* и *сходимость почти всюду направленностей числовых функций*.

Пусть $\{T_n\}_{n\in A}$ — направленность линейных операторов, переводящих $L^0(X,\mu)$ в себя. Максимальным оператором относительного данного семейства операторов называется оператор $T : f(x) \mapsto \sup\limits_{n\in A} |T_n f(x)|$. Будем рассматривать лишь счетные направленности, т.е. такие, что множество A счетно — это гарантирует измеримость функции $Tf(x)$. Оператор T оказывается выпуклым.

Аналогично [2, теорема 5.1.3] доказывается следующий результат.

Теорема 2. *Пусть направленность линейных операторов $\{T_n\}_{n\in A}$ такова, что соответствующий максимальный оператор T имеет слабый тип* $(1,1)$, *и пусть для любой функции ϕ из всюду плотного в $L^1(X,\mu)$ множества $\lim\limits_{n\in A} T_n\phi(x) = \phi(x)$ почти всюду на X. Тогда для любой функции $f \in L^1(X,\mu)$ выполняется $\lim\limits_{n\in A} T_n f(x) = f(x)$ почти всюду на X.*

Нас будут интересовать направленности лишь интегральных операторов, то есть операторов вида $Tf(x) = \int\limits_X K(x,y)\cdot f(y)d\mu(y)$.

Если интегральные операторы T^i с ядрами $K_i(\cdot,\cdot)$ заданы на $L^1(X^i,\mu^i)$, $i = 1, 2$, то определим их тензорное произведение как интегральный оператор $T^1 \hat{\otimes} T^2$, действующий в $L^1(X^1 \times X^2, \mu^1 \otimes \mu^2)$ с ядром $K_1(\cdot,\cdot)\cdot K_2(\cdot,\cdot)$.

Для двух направленностей операторов $\{T^1_{n^1}\}_{n^1\in A^1}$ и $\{T^2_{n^2}\}_{n^2\in A^2}$ их тензорным произведением назовем направленность $\{T^1_{n^1} \hat{\otimes} T^2_{n^2}\}_{\mathbf{n}\in A}$, где $\mathbf{n} = (n^1, n^2), A = A^1 \times A^2$, причем $(n^1, n^2) > (m^1, m^2)$ тогда и только тогда, когда $n^1 > m^1$ и $n^2 > m^2$. Тензорное произведение большего числа слагаемых определяется очевидным образом.

Теорема 3. *Пусть* (X^i, μ^i), $i = 1, \ldots, D$ — *измеримые пространства конечной меры,* $X = \prod_{i=1}^{D} X^i$, $\mu = \bigotimes_{i=1}^{D} \mu^i$, $\{T^i_{n^i}\}_{n^i \in A^i}$, $i = 1, \ldots, D$, — *направленности линейных интегральных операторов, действующих в соответстующих* $L^1(X^i, \mu^i)$, *таких, что каждый максимальный оператор* T^i *имеет слабый тип (1,1) и, кроме того, для любого* $i = 1, \ldots, D$ *и любой ограниченной функции* $\phi \in L^1(X^i, \mu^i)$ *выполнено* $\lim\limits_{n^i \in A^i} T^i_{n^i}\phi(x) = \phi(x)$ μ^i*-почти всюду.*

Тогда для любой $f \in L^1(X)$ *такой, что* $f \cdot \ln(|f| + 1) \in L^1(X)$, *выполнено* $\lim\limits_{\boldsymbol{n} \in A} T_{\boldsymbol{n}} f(x) = f(x)$ μ*-почти всюду, где* A — *произвольная поднаправленность тензорного произведения направленностей* $\{T^i_{n^i}\}_{n^i \in A^i}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачев В. И.* Основы теории меры : в 2 т. Т. 2. М.; Ижевск : НИЦ Регулярная и Хаотическая динамика, 2006. 680 с.

2. *Голубов Б. И.,Ефимов А. В.,Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М. : Изд. ЛКИ, 2008. 352 с.

УДК 517.512

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МАЛЫМИ ПРОПУСКАМИ

Ю. Х. Хасанов, Ф. М. Талбаков (Душанбе, Таджикистан)
yukhas60@mail.ru

Пусть $f(x)$ — интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ периодическая функция и имеет ряда Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=\infty}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt.$$

Определение 1. Говорят, что *ряд Фурье функции* $f(x)$ *имеет пропуски*, если $a_n^2 + b_n^2 > 0$ только для $n = n_k$ $(k = 1, 2, ...)$, где $1 < n_1 < n_2 < \ldots$ — натуральные числа.

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с ограниченным изменением на отрезка $[-\eta, \eta]$, где $0 < \eta < \pi$, а последовательность $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, ...)$ удовлетворяет условию малых пропусков, т.е.

$$n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{\eta} \tag{2}$$

М. Нобль [1] показал, что если функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\omega(1/n, f)} < \infty,$$

и кроме того, если при $k \to \infty$, выполняется

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{\log n_k} \to \infty,$$

то ряд (1) сходится абсолютно. П. Кеннеди [2] доказал, что для абсолютной сходимости рядов вида (1) достаточно, чтобы выполнялись условия $n_{k+1} - n_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Обобщая результаты Нобля и Кеннеди для рядов Фурье с указанными малыми пропусками вида (2), Р. Боянич и М. Томич [3] доказали, что если этот ряд на отрезке $[-\eta, \eta] \subset [-\pi, \pi]$ $(0 < \eta < \pi)$ имеет модуль непрерывности

$$\omega(h, f) = \sup_{|x_1 - x_2| \leq h} |f(x_1) - f(x_2)| \ (x_1, x_2 \in [-\eta, \eta]),$$

то условия

$$\int_{-\eta}^{\eta} |df(t)| < \infty, \int_{1}^{\infty} \omega(1/t, f) \Big(\sum_{n_{k \leq t}} 1 \Big)^{1/2} \frac{dt}{t^{3/2}} < \infty,$$

влекут сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|).$$

Если выполнены условия

$$n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{\eta} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и

$$n_k \geq C k^{\rho} \quad (\rho \geq 1;\ k = 1, 2, \ldots),$$

то

$$\sum_{n_k \leq x} 1 \leq \sum_{C k^{\rho} \leq x} 1 \leq \left(\frac{x}{C} \right)^{1/\rho}.$$

Следовательно, второе условие теоремы Боянича и Томича примет следующий вид:

$$\int_{1}^{\infty} \omega(1/t, f) t^{\frac{1}{2\rho} - 1} dt < \infty.$$

В настоящей работе найдены достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций с малыми пропусками в равномерной метрике. Однако, в отличие от периодических функций, где условия накладываются только на гладкости функций, здесь потребуется дополнительные условия и на поведения показателей Фурье (см. напр., [4] или [5]).

Пусть $f(x)$ — равномерная почти-периодическая функция, т.е. $f(x) \in$ $\in \mathbf{B}$ и ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}, \tag{3}$$

где

$$A_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda_n x} dx$$

— коэффициенты Фурье функций $f(x) \in \mathbf{B}$, а $\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, ...)$ — показатели Фурье, которые имеют единственную предельную точку в бесконечности, т. е.

$$\lambda_0 = 0, \lambda_{-n} = -\lambda_n, \lambda_n < \lambda_{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty. \tag{4}$$

Теорема. *Пусть $f(x) \in \boldsymbol{B}$ имеет ряда Фурье* (3) *с показателями удовлетворяющих условий* (4). *Если этот ряд допускает малых пропусков вида $n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{T}$ $(T \to \infty)$ и*

$$\int_1^{\infty} \omega_k(f;h)_B \sqrt{S(x)} \frac{dx}{x} < \infty,$$

где $\omega_k(f;h)_B$ — модуль гладкости функции $f(x) \in \boldsymbol{B}$, а $S(t) = \sum\limits_{n_k \leq t} 1$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{n_k}| < \infty.$$

Эта теорема содержит результатов Нобля и Кеннеди, потому что из неравенства

$$l = \inf_{k\geq 0} (n_{k+1} - n_k) \geq \frac{4\pi}{T}$$

вытекает, что $n_k \geq lk$ $(k = 1, 2, ...)$, и следовательно выполняется неравенства

$$\sum_{n_k \leq x} 1 \leq \sum_{lk \leq x} 1 \leq \frac{x}{l}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Noble M.* Coefficient properties of Fourier series with a gap condition // Math. Ann. 1958. Vol. 128. P. 55–62.

2. *Kennedy P.* Fourier series with gap // Quart. Journ. Math. 1956. Vol. 7. P. 224–230.

3. *Боянич Р., Томич М.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье с малыми пропусками // Матем. сб. 1966. Т. 70(112), № 3. С. 297–309

4. *Хасанов Ю. Х.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций // Матем. заметки. 2013. Т. 94, № 5. С. 745–756.

5. *Хасанов Ю. Х.* Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций // Anal. Math. 2013. Vol. 39. P. 259–270.

УДК 517.5

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СЧЕТНОКРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Н. Н. Холщевникова (Москва, РФ)

Kholshchevnikova@gmail.com

Для счетнократных тригонометрических рядов исследуются множества единственности, в случае сходимости этих рядов по прямоугольникам.

Системой Йессена или счетнократной тригонометрической системой называется система функций счетного множества переменных

$$\prod_{r=1}^{p} e^{2\pi i n_r x_r} = \theta_{n_1,\dots,n_p}(x), \quad p \in \mathbb{N}, \quad n_r \in \mathbb{Z},$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $x_n \in \mathbb{R}$.

Функции системы можно считать определенными на бесконечномерном торе, рассматриваемом как декартово произведение счетного множества одномерных торов $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{T}^\infty = \{x = (x_1, ..., x_n, ...) : 0 \le x_n < 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

На торе $\mathbb{T}^\infty$ определяется мера Лебега, как на пространстве-произведении пространств $\mathbb{T}$ с одномерной мерой Лебега. Система Йессена является полной ортонормированной системой на $\mathbb{T}^\infty$. Впервые систематически изучается эта система в работе Йессена [1].

Обозначим через $\mathbb{Z}^{<\infty}$ множество бесконечномерных векторов $n = (n_1, ..., n_p, ...)$ с целочисленными координатами $n_p \in \mathbb{Z}$ $(p \in \mathbb{N})$, лишь конечное число которых отлично от нуля.

Рассмотрим счетнократные тригонометрические ряды:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^{<\infty}} a_n e^{2\pi i n x}, \quad \text{где} \quad x\in\mathbb{T}^\infty, \quad nx=\sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k, \quad a_n\in\mathbb{C}. \tag{1}$$

Если для $n\in\mathbb{Z}^{<\infty}$ координаты n_k равны нулю для $k>p$, то для коэффициентов a_n будем пользоваться также обозначением $a_n=a_{n_1,\dots,n_p}$.

Ряд (1) будем также обозначать

$$\sum_{p,n_1,\dots,n_p} a_{n_1,\dots,n_p} e^{2\pi i(n_1x_1+\dots+n_px_p)}.$$

Прямоугольные частичные суммы этого ряда имеют вид

$$S_{p,N_1,\dots,N_p}(x)=\sum_{n_1=-N_1}^{N_1}\dots\sum_{n_p=-N_p}^{N_p} a_{n_1,\dots,n_p} e^{2\pi i(n_1x_1+\dots+n_px_p)}, \quad p,N_1,\dots,N_p\in\mathbb{N},$$

$x\in\mathbb{T}^\infty$.

Ряд (1) называется сходящимся по прямоугольникам в точке $x\in\mathbb{T}^\infty$ к числу s , если для любого $\varepsilon>0$ существует номер P такой, что для всякого $p\geq P$ найдется такое натуральное N, что для всех $N_1,\dots,N_p\geq$ $\geq N$ выполняется неравенство

$$|S_{p,N_1,\dots,N_p}(x)-s|<\varepsilon.$$

Множество $E\subset\mathbb{T}^\infty$ называется множеством единственности для рядов вида (1), кратко U-множеством, если из сходимости ряда (1) к нулю на множестве $\mathbb{T}^\infty\setminus E$ следует, что все коэффициенты этого ряда равны нулю.

В [2] доказано, что пустое множество является множеством единственности для счетнократных тригонометрических рядов. Обобщение этого результата было получено в [3].

Доказательство этих результатов опирается на некоторые свойства одномерных тригонометрических рядов.

Лемма 1. *Пусть*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}, \qquad \text{где } x\in\mathbb{T},\ a_n\in\mathbb{C}, a_{-n}=\overline{a}_n (n\in\mathbb{Z}), \tag{2}$$

тригонометрический ряд, в котором

$$|a_0|\geq 1, \tag{3}$$

а E — счетное замкнутое подмножество $\mathbb{T}$.

Тогда найдутся точка $x_0 \in \mathbb{T} \setminus E$ и строго возрастающая последовательность номеров $\{N_k\}$, такие что для частичных сумм ряда (2) *выполняются неравенства*

$$|S_{N_K}(x_0)| \geq 1.$$

С помощью леммы 1 доказывается

Теорема 1. *Пусть E_k — счетные замкнутые множества, $E_k \subset \mathbb{T}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда множество*

$$E_1 \times \mathbb{T}^{1,\infty} \cup_{k=2}^{\infty} \mathbb{T}^{k-1} \times E_k \times \mathbb{T}^{k,\infty}$$

является множеством единственности для счетнократных тригонометрических рядов вида (1) *для сходимости по прямоугольникам.*

Здесь для удобства считаем, что $\mathbb{T}^k$ — k-мерный тор первых k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а $\mathbb{T}^{k,\infty}$ — бесконечномерный тор переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jessen B. The theory of integration in a space of infinite number of dimensions // Acta math. 1934. Vol. 63. P. 249–323.
2. Холщевникова Н. Н. Единственность для тригонометрических рядов по возрастающему числу переменных // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 175–181.
3. Холщевникова Н. Н. Множества единственности для тригонометрических рядов бесконечного числа переменных // Фундамент. физико-матем. проблемы и моделир. технико-технол. систем. 2006. Вып. 9. С. 30–31.

УДК 517.984

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

А. А. Хромов (Саратов, РФ)
KhromovAP@info.sgu.ru

Рассматривается краевая задача:

$$k(x)u''(x) + k'(x)u'(x) - q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0, l],$$

$$u(0) = u(l) = 0.$$

Предполагается, что $k(x)$, $q(x)$ — известные функции, $k(x) \in AC[0, l]$, $k'(x) \in L_2[0, l]$, $q(x) \in C[0, l]$, $u(x) \in C^2[0, l]$.

Требуется найти среднеквадратичное приближение к $f(x)$, если точное решение $u(x)$ нам неизвестно, а вместо него дана функция $u_\delta(x)$: $\|u_\delta - u\|_{L_2} \leq \delta$.

К такой постановке приводит, например, задача об определении плотности тепловых источников в тонком стержне длины l, в котором установилась стационарная температура с нулевыми значениями на концах, по известной температуре, если она задана ее среднеквадратичным δ-приближением [1].

В [2] в случае, когда $u_\delta(x)$ — приближение к $u(x)$ в равномерной метрике, а $k(x) \in C^1[0,l]$, построен метод регуляризации, позволяющий найти равномерные приближения к $f(x)$.

Этот метод основан на двух семействах операторов T_α и $T_\alpha^{(2)}$, построенных на базе операторов Стеклова и позволяющих при $\alpha \to 0$ получать устойчивые приближения к $u(x)$ и $u'(x)$. Согласно [2]

$$T_\alpha u = \begin{cases} DS_{\alpha 2}^2 u \equiv T_{\alpha 2} u, & x \in [0, l/2], \\ DS_{\alpha 1}^2 u \equiv T_{\alpha 1} u, & x \in [l/2, l], \end{cases}$$

$$T_\alpha^{(2)} u = \begin{cases} T_{\alpha 2}^2 u, & x \in [0, l/2], \\ T_{\alpha 1}^2 u, & x \in [l/2, l], \end{cases}$$

где $S_{\alpha 1} u = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x-\alpha}^{x} u(t)\,dt$, $S_{\alpha 2} u = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x}^{x+\alpha} u(t)\,dt$, D — оператор дифференцирования, $\alpha \le 1/8$.

T_α и $T_\alpha^{(2)}$ представляют собой интегральные операторы с разрывной областью значений. Конкретный вид их приведен в [2].

Для решения задачи, поставленной в [2], там строится последовательность функций

$$f_\delta^\alpha(x) = k(x) T_\alpha^{(2)} u_\delta + k'(x) T_\alpha u_\delta - q(x) u_\delta,$$

а затем указывается зависимость $\alpha = \alpha(\delta)$, которая обеспечивает равномерную сходимость $f_\delta^{\alpha(\delta)}(x)$ к $f(x)$.

Здесь мы используем ту же формулу, только теперь согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ определяется на основании следующей леммы.

Лемма. *Справедливы оценки:*

$$\|T_\alpha\|_{L_2 \to L_2} \le \sqrt{2l}\,\alpha^{-3/2}, \quad \|T_\alpha^{(2)}\|_{L_2 \to L_2} \le 2\sqrt{\frac{2l}{3}}\alpha^{-5/2}.$$

Отсюда следует

Теорема. *Для сходимости $\|f_\delta^\alpha(x) - f(x)\|_{L_2} \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to \to 0$ достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условиям: $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-5/2} \to 0$ при $\delta \to 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисов А. М.* Ввведение в теорию обратных задач. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1994. 206 с.

2. *Хромов А. А., Хромова Г. В.* Решение задачи об определении плотности тепловых источников // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 309–314.

УДК 517.984

О ФОРМАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ПО МЕТОДУ ФУРЬЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

А. П. Хромов (Саратов, РФ)

KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

при условиях:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \tag{3}$$

Предполагаем, что комплексная $q(x) \in L[0,1]$. Условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты.

В $[1,2]$ был предложен резольвентный подход в методе Фурье, базирующийся на применении метода Коши – Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты оператора, порождаемого соответсвующей спектральной задачей, для получения классического решения задачи (1)–(3) при минимальных требованиях гладкости $\varphi(x)$. Теперь у нас $\varphi(x)$ удовлетворяет более слабым требованиям. Кроме того, теперь потенциал $q(x) \in L[0,1]$. Приводимые ниже результаты усиливают соответвующие результаты для случая $q(x) \in C[0,1]$ в [3].

Как и в $[1,2]$ ряд формального решения задачи (1)–(3) берем в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda, \tag{4}$$

где $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр), $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$ при условиях

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014K).

$y(0) = y(1) = 0$; $r > 0$ фиксировано и таково, что все собственные значения оператора L при $|\lambda_n| > r$ простые и попадают по одному в области с границами γ_n, являющиеся образами окружностей $\tilde{\gamma}_n = \{\rho| \, |\rho - n\pi| = \delta\}$ ($\delta > 0$ и достаточно мало), $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$, $n \geq n_0$.

Представим (4), как и в [1, 2], в виде:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t), \tag{5}$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda^0 g)\cos\rho t\, d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R_\lambda^0 g]\cos\rho t\, d\lambda, \tag{6}$$

R_λ^0 — резольвента оператора L_0, получающегося из L при $q(x) \equiv 0$, $g = (L - \mu_0 E)\varphi$, μ_0 не является собственным значением операторов L и L_0, $|\mu_0| > r$ и μ_0 находится вне γ_n при $n \geq n_0$. Формула (5) есть аналог процедуры ускорения сходимости рядов, принадлежащей А. Н. Крыловым.

1. Здесь считаем, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и $L\varphi \in L_p[0,1]$ при $1 < p \leq 2$.

Лемма 1. *Имеет место формула:*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+t) + \Phi(x-t)],$$

где $\Phi(x)$, $\Phi'(x)$ *абсолютно непрерывны,* $\Phi''(x) \in L_p[-A, A]$ *при любом* $A > 0$, $\Phi(x) = -\Phi(-x)$, $\Phi(2 + x) = \Phi(x)$, $\Phi(x) = \varphi_1(x) = R_{\mu_0}^0 g$ *при* $x \in [0,1]$.

Лемма 2. *При* $|\operatorname{Im}\rho| \leq h$ *(*$h > 0$ *любое) имеет место асимптотика:*

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} - \frac{1}{2\rho^2}\left(\int\limits_0^x q(\tau)\,d\tau\right)\cos\rho x +$$
$$+\frac{1}{4\rho^2}\int\limits_0^x\left[q\left(\frac{x-\tau}{2}\right) + q\left(\frac{x+\tau}{2}\right)\right]\cos\rho\tau\,d\tau + O\left(\frac{1}{\rho^3}\right).$$

Лемма 3. *Обозначим*

$$\varphi_2(x)=\int\limits_x^1 g(\xi)q\left(\frac{\xi-x}{2}\right)d\xi,\quad \varphi_3(x)=\int\limits_x^1 g(\xi)q\left(\frac{\xi+x}{2}\right)d\xi.$$

Тогда

$$\|\varphi_j\|_p\le 2\|g\|_p\|q\|_1\quad (j=2,3),$$

где $\|\cdot\|_p$ *— норма в* $L_p[0,1]$.

Лемма 4. *Ряд* $u_1(x,t)$ *и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по* x *и дважды по* t *сходятся абсолютно и равномерно в* $Q_T=\{x,t|\ x\in[0,1],\ t\in[-T,T]\}$ *(*$T>0$ *любое).*

Лемма 5. *Функция* $u'_{1x}(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* x *и почти всюду по* x *и* t

$$u''_{1x^2}(x,t)=q(x)u(x,t)+d(x,t),$$

где

$$d(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{\lambda}{\lambda-\mu_0}\times$$

$$\times[v(x,\rho)(g,z_2)-v^0(x,\rho)(g,z_2^0)]\cos\rho t\,d\lambda,$$

и ряд для $d(x,t)$ *сходится абсолютно и равномерно на* Q_T. *Здесь* $v(x,\rho)=\dfrac{z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)}$, *где* $z_1(x,\rho)$ *и* $z_2(x,\rho)$ *— решения уравнения* $y''-q(x)y+\rho^2y=0$ *при условиях* $z_1(0,\rho)=1$, $z_1'(0,\rho)=0$, $z_2(0,\rho)=0$, $z_2'(0,\rho)=1$ *и* $v^0(x,\rho)$ *то же, что и* $v(x,\rho)$ *при* $q(x)\equiv 0$, $(\cdot,\cdot)$ *— скалярное произведение в* $L_2[0,1]$.

Теорема 1. *Если* $q(x)\in L[0,1]$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *абсолютно непрерывны,* $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, $L\varphi\in L_p[0,1]$ *(*$1<p\le 2$*), то сумма* $u(x,t)$ *ряда* (4) *обладает свойствами:* $u(x,t)$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по* x *и* t*;* $u'_x(x,t)$ $(u'_t(x,t))$ *абсолютно непрерывна по* x *(по* t*); удовлетворяет* (1) *почти всюду и* (2), (3), *т. е. является решением задачи* (1)*–*(3), *когда* (1) *выполняется лишь почти всюду.*

2. Пусть теперь $\varphi(x)\in L_p[0,1]$ $(p>1)$. В этом случае будем брать в (5) следующие $u_0(x,t)$ и $u_1(x,t)$:

$$u_0(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda^0\varphi)\cos\rho t\,d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)[R_\lambda\varphi - R_\lambda^0\varphi]\cos\rho t\,d\lambda.$$

Теорема 2. *Если* $q(x)\in L[0,1]$, $\varphi(x)\in L_p[0,1]$ $(p>1)$, *то ряд* (4) *сходится почти всюду по* x *и* t *и для его суммы* $u(x,t)$ *верно* $u(x,0)= =\varphi(x)$ *почти всюду по* $x\in[0,1]$. *Более того, если* $\varphi_h(x)$ *имеет тот же смысл, что и* $\varphi(x)$ *в теореме* 1, *и* $\|\varphi_h-\varphi\|_p\to 0$ *при* $h\to 0$, *то решение* $u_h(x,t)$ *задачи* (1)–(3) *для такой* $\varphi_h(x)$ *сходится к* $u(x,t)$ *в* $L_p[Q_T]$ *при любом* $T>0$.

Таким образом, $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (1)–(3) при любой $\varphi(x)\in L_p[0,1]$. Ряд $u_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T, а при исследовании $u_0(x,t)$ существенно используется теорема Карлесона – Ханта о сходимости почти всюду тригонометрического ряда Фурье функций из $L_p[0,1]$ при $1<p\le 2$.

Условия $q(x)\in L[0,1]$ и $\varphi(x)\in L_p[0,1]$ $(p>1)$ являются предельными для сходимости почти всюду ряда (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // ДАН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140.

2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 51–63.

3. *Хромов А. П.* Смешанная задача для волнового уравнения с произвольными двухточечными краевыми условиями // ДАН. 2015. Т. 462, № 2. С. 148–150.

УДК 517.984

О СХОДИМОСТИ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО МЕТОДУ ФУРЬЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕГО НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ[1]

А. П. Хромов (Саратов, РФ)

KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x\in[0,1], \quad t\in(-\infty,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

$$u(x,0) = u'_t(x,0) = 0. \tag{3}$$

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье есть:

$$u(x,t) = 2\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_{0}^{t} (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \, sin\, n\pi(t-\tau)\, d\tau, \tag{4}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2[0,1]$.

Теорема 1. *Если комлекснозначная $f(x,t) \in L_2[Q_T]$, где $Q_T = [0,1] \times [-T,T]$ и T любое, то ряд (4) сходится абсолютно и равномерно по $x, t \in Q_T$ и для его суммы $u(x,t)$ имеет место формула:*

$$u(x,t) = \int_{0}^{t} d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \varPhi(\eta,\tau)\, d\eta, \tag{5}$$

где $\varPhi(\eta,\tau)$ нечетна и 2-периодична по η на всей оси и $\varPhi(\eta,\tau) = \frac{1}{2} f(\eta,\tau)$, если $\eta \in [0,1]$.

Из этой теоремы легко следует

Теорема 2. *Если $f(x,t)$ непрерывно дифференцируема по $x \in [0,1]$ и непрерывна всюду по t, причем*

$$f(0,t) = f(1,t) = 0,$$

то $u(x,t)$ из (5) есть классическое решение задачи (1)–(3).

Этот результат другим способом получен В. А. Чернятиным [1, с. 51].

Теорема 3. *Если $f(x,t) \in L_2[Q_T]$, при любом $T > 0$, а $f_h(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, и*

$$\lim_{h\to 0} \|f_h(x,t) - f(x,t)\|_{L_2[Q_T]} = 0,$$

то

$$\lim_{h\to 0} \max_{x,t\in Q_T} |u_h(x,t) - u(x,t)| = 0,$$

где $u_h(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3), когда $f(x,t)$ заменяется на $f_h(x,t)$, а $u(x,t)$ определяется по формуле (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.

УДК 517.984

ОБ ОБОБЩЕННОМ ФОРМАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ[1]

А. П. Хромов (Саратов, РФ)

KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t),\ x \in [0,1],\ t \in (-\infty,\infty), \quad (1)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \quad (3)$$

Здесь $\varphi(x)$, $q(x)$, $f(x,t)$ — комплекснозначные функции, причем $q(x) \in L[0,1]$, $f(x,t) \in L[Q_T]$, где $Q_T = [0,1] \times [0,1]$ и $T > 0$ любое фиксированное. Условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты.

Формальное решение задачи (1)–(3) берем в следующем виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\Bigg[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t + \int\limits_0^t (R_\lambda f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\Bigg]\,d\lambda, \quad (4)$$

где $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $y(0) = y(1)$ (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор), $R_\lambda f$ означает, что R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по переменной x; $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$; γ_n есть образ окружности $\tilde\gamma_n = \{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$ ($\delta > 0$ и достаточно мало), r и n_0 выбраны так, чтобы все собственные значения $\lambda_n = \rho_n^2$ оператора L при $n \geq n_0$ таковы, что $|\lambda_n| \geq r$ и ρ_n попадают по одному в $\tilde\gamma_n$ при $n \geq n_0$.

Введем еще обобщенное формальное решение по формуле:

$$\tilde u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \quad (5)$$

где

$$u_0(x,t) = \frac{\tilde\varphi(x+t)+\tilde\varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\Phi(\eta,\tau)\,d\eta,$$

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

$\tilde{\varphi}(x)$, $\Phi(x,t)$ есть нечетные, 2-периодические продолжения по x функций $\varphi(x)$, $f(x,t)$ на всю ось,

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\int\limits_0^t ((R_\lambda - R_\lambda^0)f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)((R_\lambda - R_\lambda^0)\varphi)\cos\rho t\,d\lambda,$$

$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ и L_0 есть L при $q(x) \equiv 0$.

Лемма. *Если $f(x,t) \in L[Q_T]$, $\varphi(x) \in L_p[0,1]$ при $p > 1$, то ряды в $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ сходятся абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T > 0$.*

Теорема 1. *Если $\varphi(x) \in L_2[0,1]$, $f(x,t) \in L_2[Q_T]$, то ряд в (4) при $f(x,t) \equiv 0$ сходится почти всюду, ряд в (4) при $\varphi(x) \equiv 0$ сходится абсолютно и равномерно по x, t из Q_T, причем верно $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$ и имеют место оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[Q_T]} \leq c_T\left\{\|\varphi\|_2 + \|f\|_{L_2[Q_T]}\right\},$$
$$\|u_0(x,t)\|_{L_2[Q_T]} \leq c_T\left\{\|\varphi\|_2 + \|f\|_{L[Q_T]}\right\},$$
$$\|u_1(x,t)\|_{C[Q_T]} \leq c_T\|f\|_{L[Q_T]}, \quad \|u_2(x,t)\|_{C[Q_T]} \leq c_T\|\varphi\|_2,$$

где c_T — постоянная, зависящая от T, $\|\cdot\|_2$ — норма в $L_2[0,1]$.

Теорема 2. *Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $L\varphi \in L_2[0,1]$; $f(x,t)$, $f_t'(x,t)$ непрерывны и $f(0,t) = f(1,t) = 0$, то ряд в (4) сходится абсолютно и равномерно в Q_T и его сумма есть классическое решение задачи (1)–(3) (уравнение (1) выполняется почти всюду).*

Теорема 3. *Если: а) $\varphi_h(x)$, $f_h(x,t)$ из теоремы 2; б) $\varphi(x) \in L_2[0,1]$, $f(x,t) \in L_2[Q_T]$; $u_h(x,t)$, $u(x,t)$ — суммы ряда (4) для случаев а) и б) соответственно, то имеет место*

$$\lim_{h\to 0}\|u_h(x,t) - u(x,t)\|_{L_2[Q_T]} = 0,$$

если только $\|\varphi_h - \varphi\|_2$, $\|f_h - f\|_{L_2[Q_T]}$ стремится к нулю при $h \to 0$.

Теорема 4. *Если $\varphi_h(x)$, $f_h(x,t)$, $u_h(x,t)$ из теоремы 3, а $\varphi(x) \in L_2[0,1]$, $f(x,t) \in L[Q_T]$ и $\tilde{u}(x,t)$ есть (5) для таких $\varphi(x)$ и $f(x,t)$, то*

$$\lim_{h\to 0}\|u_h(x,t) - \tilde{u}(x,t)\|_{L_2[Q_T]} = 0,$$

если только $\|\varphi_h - \varphi\|_2$, $\|f_h - f\|_{L[Q_T]}$ стремится к нулю при $h \to 0$.

Таким образом, теорема 4 дает сходимость $u_h(x,t)$ при более слабых требованиях на $f(x,t)$, чем теорема 3.

УДК 517.51, 517.968

О РАЗРЫВНОМ ОПЕРАТОРЕ СТЕКЛОВА [1]

Г. В. Хромова (Саратов, РФ)
KhromovAP@info.sgu.ru

Рассматривется так называемый разрывный оператор Стеклова [1]:

$$S_\alpha u = \begin{cases} S_{\alpha_2} u, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ S_{\alpha_1} u, x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{1}$$

где

$$S_{\alpha_1} u = \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^{x} u(t)dt,$$
$$S_{\alpha_2} u = \frac{1}{\alpha} \int_{x}^{x+\alpha} u(t)dt$$

В данном сообщении для нескольких математических задач приводятся методы их решения, построенные на базе этих операторов.

1. Получение равномерных приближений к непрерывным функциям и их непрерывным производным любого порядка на отрезке.

Теорема 1. *Для любой $u(x) \in C^m[0,1]$ имеет место сходимость:*

$$\|D^m S_\alpha^{m+1} u - u^{(m)}\|_{L_\infty} \to 0 \text{ при } \alpha \to 0,$$

где S_α^{m+1} имеют вид (1) с заменой S_{α_j} на $S_{\alpha_j}^{m+1}$, $j = 1, 2$, D^m — оператор дифференцирования порядка m. При этом операторы $D^m S_{\alpha_j}^{m+1}$ имеют вид:

$$D^m S_{\alpha_1}^{m+1} = \alpha^{-(m+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k F_1(x - k\alpha)$$

$$D^m S_{\alpha_2}^{m+1} = \alpha^{-(m+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k F_2(x + (m-k)\alpha),$$

где

$$F_1(x) = \int_{x-\alpha}^{x} u(\xi)\, d\xi, \quad F_2(x) = \int_{x}^{x+\alpha} u(\xi)\, d\xi,$$

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

$$m \geq 0, \quad \alpha \leq \frac{1}{2(m+1)}, \quad \|\cdot\|_{L_\infty} = \max(\|\cdot\|_{C[0,\frac{1}{2}]},\ \|\cdot\|_{C[\frac{1}{2},1]}).$$

2. Решение задачи восстановления непрерывной функции и её непрерывных производных по приближениям $u_\delta(x) : \|u_\delta - - u\|_{L_2} \leq \delta$.

Рассматриваются величины

$$\Delta^m(\delta, D^m S_\alpha^{m+1}, u) = \sup\{\|D^m S_\alpha^{m+1} u_\delta - u^{(m)}\|_{L_\infty} : \|u_\delta - u\|_{L_2} \leq \delta\}$$

Теорема 2. *Для сходимости $\Delta(\delta, D^m S_\alpha^{m+1}, u) \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$ такого что $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-\frac{2m+1}{2}} \to 0$ при $\delta \to 0$.*

3. Получение равномерных приближений к решению уравнения Абеля по приближенно заданной правой части.

Рассмотривается уравнение Абеля:

$$Au \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(t)dt = f(x),$$

где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция, $0 < \beta < 1$, $u(x) \in C[0,1]$, $f(x)$ задана ее δ-приближением в $L_2[0,1] : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta$.

Решается задача нахождения равномерных приближений к $u(x)$ по заданным $f_\delta(x)$ и δ. Строится семейство операторов $R_\alpha = S_\alpha^{(2)} A^{-1}$, где A^{-1} — оператор, обратный к A.

Теорема 3. *Операторы R_α являются интегральными операторами с ядрами $R_\alpha(x,t)$, имеющими вид:*

$$R_\alpha(x,t) = \alpha^{-2}(1-\beta)^{-1}(\Gamma(1-\beta))^{-1} \begin{cases} R_{\alpha_2}(x,t), x \in [0, \frac{1}{2}] \\ R_{\alpha_1}(x,t), x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

где

$$R_{\alpha_2}(x,t) = \begin{cases} (x-t)^{1-\beta} - 2(x-t+\alpha)^{1-\beta} + (x-t+2\alpha)^{1-\beta},\ 0 \leq t \leq x, \\ (x-t+2\alpha)^{1-\beta} - 2(x-t+\alpha)^{1-\beta},\ x \leq t \leq x+\alpha, \\ (x-t+2\alpha)^{1-\beta},\ x+\alpha \leq t \leq x+2\alpha, \\ 0,\ x+2\alpha \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$R_{\alpha_1}(x,t) = \begin{cases} (x-t-2\alpha)^{1-\beta} - 2(x-t-\alpha)^{1-\beta} + (x-t)^{1-\beta},\ 0 \leq t \leq x-2\alpha, \\ (x-t)^{1-\beta} - 2(x-t-\alpha)^{1-\beta},\ x-2\alpha \leq t \leq x-\alpha, \\ (x-t)^{1-\beta},\ x-\alpha \leq t \leq x, \\ 0,\ x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Теорема 4. *Операторы R_α, рассматриваемые как операторы из $L_2[0,1]$ в $L_\infty[0,1]$, являются регуляризирующими для уравнения Абеля при любом β из интервала $(0,1)$.*

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, R_\alpha, u) = \sup\{\|R_\alpha f_\delta - u\|_{L_\infty} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta\}$$

Теорема 5. *Если β — любое из интервала $(0,1)$, то для сходимости $\Delta(\delta, R_\alpha, u) \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ необходимо согласование $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющее условиям:*

1) $\alpha(\delta) \to 0$;

2) $\delta(\alpha(\delta))^{-(\frac{1}{2}+\beta)} \to 0$ при $\delta \to 0$,

и достаточно выполнения условия 1) и условия $\delta(\alpha(\delta))^{-\frac{3}{2}} \to 0$ при $\delta \to \to 0$.

Замечание. Семейство операторов $R_\alpha = S_\alpha A^{-1}$ также является регуляризирующим для уравнения Абеля, но лишь для диапазона $0 < < \beta < \frac{1}{2}$ [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложния : тез. докл. Сарат. зим. шк. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 181.

2. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Разрывные операторы Стеклова в задачах равномерного приближения производных на отрезке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54, вып. 9. С. 1442–1447.

3.*Хромова Г.В.* Регуляризация уравнения Абеля с помощью разрывного оператора Стеклова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 597–601.

УДК 517.9

C^1-РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА [2]

И. Г. Царьков (Москва, РФ)

tsar@mech.math.msu.su

Одним из новых и перспективных направлений геометрической теории приближения является изучение ее методами решений уравнений Гамильтона – Якоби. Здесь для иллюстрации возможностей геометрической теории приближения мы изучим задачу точного описания множества C^1-решений уравнения эйконала $|\nabla u| = 1$ на некотором открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Из простейших соображений нетрудно получить, что такие решения локально представляют собой функции вида $c \pm \varrho(x, M)$ для некоторых констант $c \in \mathbb{R}$ и подмножеств $M \subset \mathbb{R}^n$.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00022-а)

При этом существуют односвязная область Ω и C^1-решение уравнения эйконала, которое представляет собой счетную склейку функций вида $\varphi(x) = c_j \pm \varrho(x, M_j)$ $(j \in \mathbb{N})$, и при этом представить это решение в виде конечных склеек функций такого вида нельзя. Кстати для описания класса решений достаточно научиться это делать на областях (открытых и связных множествах). Поэтому далее будем считать, что Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Изучаемая задача описания C^1-решений уравнения эйконала зависит от геометрии области, и, конечно, должна исследоваться для каждой области как отдельная задача.

Приведем общее утверждение, которое поясняет, в каком случае функция $\varphi(x) = c \pm \varrho(x, M)$ (можно считать, что M — замкнутое множество) является C^1-решением уравнения эйконала во всей области Ω. Основным здесь является понятие особых точек.

Определение 1. Точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$ называется *регулярной* для замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^n$, если все точки некоторой окрестности $O(x)$ являются точками единственности (т. е. для них существует единственная ближайшая в M). Точки, не являющиеся регулярными или принадлежащие замыканию $\operatorname{int} M$, будем называть *особыми*.

Отметим, что множество всех регулярных точек (регулярное множество) является открытым, а множество всех особых точек (особое множество) точек является замкнутым. Регулярное множество состоит из так называемых точек солнечности (здесь и начинают свою работу методы геометрической теории приближения (см. обзоры [1, 2])). Из результатов геометрической теории приближения известно, что множество особых точек, не являющихся точками единственности, покрывается счетным набором липшицевых поверхностей и является связным и локально связным в случае выпуклых гиперповерхностей, а если множество, представляет собой гладкое многообразие класса C^2, то особое множество нигде не плотно.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, $M \subset \mathbb{R}^n$. Тогда функция $\varphi(x) = c \pm \varrho(x, M)$ является C^1-решением уравнения эйконала в области Ω только тогда, когда множество особых точек лежит в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.*

Это утверждение показывает, что изучение *особых множеств* различных подмножеств $\mathbb{R}^n$ представляет *особый* интерес. И часто позволяет отсеивать лишние функции вида $c \pm \varrho(x, M)$.

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, $K = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ — компакт. Тогда класс функций $J = J_K = \{\varphi(x) = c \pm \varrho(x, M)|_\Omega \mid M \subset K$ – выпуклое непустое множество$\}$ состоит из C^1-решений уравнения эйконала в области Ω, более того, функция вида $c \pm \varrho(x, M)$ $(M \subset K)$ является C^1-решением уравнения эйконала на Ω тогда и только тогда, когда ее сужение на Ω принадлежит классу J.*

Эта теорема отсеивает достаточно много подозрительных функций.

К примеру, если K имеет только одноточечные непустые выпуклые множества, то остаются только функции вида $c \pm |x - x_0|$ $(x_0 \in K)$.

Теорема 3. *Пусть гиперповерхность* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *класса* C^1 *разделяет область* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *на две компоненты связности* Ω_1 *и* Ω_2. *Тогда функция* $\psi_\Gamma(x) = c \pm \begin{cases} \varrho(x,\Gamma), & \text{если } x \in \Omega_1 \\ -\varrho(x,\Gamma), & \text{если } x \in \Omega_2 \end{cases}$ *является* C^1*-решением уравнения эйконала на* Ω *тогда и только тогда, когда множество особых точек* Γ *лежит в* $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Отметим, что Γ из последней теоремы играет роль поверхности уровня некоторого C^1-решения уравнения эйконала на Ω. И вместе с теоремой 2 позволяет существенно отсеивать функции, подозреваемые в принадлежности к решениям, но не являющимися таковыми. Далее, в качестве иллюстрации данного факта, разберем пример для специальной области.

Пример. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{N} K_j$, где K_j — попарно непересекающиеся следы простых спрямляемых кривых γ_j. Опишем все C^1-решения уравнения эйконала на Ω. Решения состоят из функций 3-х типов.

1-й тип — аффинные функции $c \pm (a, x)$, где $|a| = 1$. Этот класс представляет собой весь класс C^1-решений уравнения эйконала на всем $\mathbb{R}^n$ (кстати, легко вытекает из свойства чебышевских множеств быть выпуклыми в $\mathbb{R}^n$).

2-й тип — функции вида $c \pm \varrho(x, M)$, где M — непустые выпуклые подмножества $\bigcup\limits_{j=1}^{N} K_j$.

Перейдем к описанию (правда, пока неконструктивному) функций 3-го типа. Пусть γ — произвольная простая кривая, являющаяся частью какой-либо кривой γ_j $(j = \overline{1, N})$, а K — след кривой γ без концевых точек. В качестве Γ возьмем границу выпуклого тела D, представляющего собой объединение шаров $B(x, r_x)$ (с центром x радиуса r_x) по всем $x \in K$ и такого, что $\operatorname{card}(\Gamma \cap B(x, r_x)) \geqslant 2$ для всех $x \in K$. К третьему типу отнесем все функции вида $\psi_\Gamma(x)$ (см теорему 3).

Отметим, что в частном случае, когда дополнение Ω состоит лишь из конечного набора точек $\{x_j\}_{j=1}^{N}$, все C^1-решения уравнения эйконала на Ω — это аффинные функции $c \pm (a, x)$ $(|a| = 1)$ и функции вида $c \pm |x - x_j|$ $(j = \overline{1, N})$.

Понятно, что для изучения задачи описания решений уравнения эйконала важным является описание структуры особого множества, важно это также и для приложений. Здесь мы не будем уделять внимание этому вопросу, но отметим простейшие свойства особых множеств. Лишь одна C^1-гиперповерхность не имеет особых точек — это гиперплоскость.

C^1-гиперповерхность, имеющая единственную особую точку, — это сфера (см. [1]). Все остальные C^1-гиперповерхности имеют континуум особых точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балаганский В. С., Власов Л. П.* Проблема выпуклости чебышевских множеств // УМН. 1996. Т. 51, № 6(312). С. 125–188.

2. *А.Р.Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышевских множеств // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 63, № 4, Р. 21–91.

УДК 517.97 +517.98

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К-СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С СУБГЛАДКИМ ИНТЕГРАНТОМ (МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

А. В. Цыганкова (Симферополь, РФ)

tsygankova_a_v@mail.ru

Вариационные задачи с негладким интегрантом составляют важную часть современного вариационного исчисления.

Так, например, введение модуля под знак классического вариационного функционала уже приводит к экстремальной задаче, которая не поддается исследованию классическими методами, ввиду нарушения гладкости интегранта.

В подобных ситуациях обычно применяются методы негладкого анализа, использующие различные типы субдифференциалов, каждый из которых имеет свои преимущества и свою разумную область применимости.

Субдифференциалы, как инструмент негладкого анализа, достаточно давно получили признание в математике. Начиная с классического субдифференциала выпуклого функционала, появились и продолжают появляться новые определения субдифференциалов, рассчитанные на применение к различным классам экстремальных и других негладких задач (такие, как известный субдифференциал Ф. Кларка, субдифференциал Б. Н. Пшеничного и многие другие). В большинстве своем эти определения с отображениями в евклидовы пространства, но имеются и более общие.

При всем том, «больным местом» современного субдифференциального исчисления является отсутствие значимой теории субдифференциалов высших порядков. Это ведет, например, к отсутствию достаточных условий экстремума вне рамок выпуклости (в той или иной форме). По существу, это ограничивает общую теорию экстремальных задач «прямыми методами», восходящими к принципу Гильберта – Лебега.

Данная работа посвящена приложениям K-субдифференциального исчисления к исследованию экстремальных вариационных задач с негладким (а именно субгладким) интегрантом (многомерный случай). Работа содержит вариационные приложения теории K-субдифференциалов первого порядка к экстремальным задачам с субгладким интегрантом. Получена оценка первого K-субдифференциала для вариационного функционала с субгладким интегрантом. Рассмотрены частные случаи, в том числе случай композиции субгладкой и гладкой функций. Получен компактный выпуклый аналог вариационного уравнения Эйлера – Остроградского. Разработанная методика позволяет найти в некоторых примерах гладкую субэкстремаль, которая не поддается определению классическими методами, ввиду субгладкости интегранта. На базе теории K-субдифференциалов высших порядков, получена оценка второго K-субдифференциала вариационного функционала. С помощью этой оценки получен соответствующий аналог необходимого условия Лежандра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Орлов И. В., Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам // СМФН. 2013. Т. 49. С. 99–131.

2. *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ // Современная математика. Фундаментальные направления. 2014. Т. 53. С. 64–132.

3. *Орлов И. В., Цыганкова А. В.* Исключение уравнения Якоби в многомерных вариационных задачах // Динамические системы. 2014. Т. 3(31), № 3–4. С. 233–248.

УДК 517.5

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ МАРТЕНСА – ТЕРЕХИНА

С. А. Чумаченко (Саратов, РФ) [1]
chumachenkosergei@gmail.com

Введение. В работе Р. Мартенса [1] введена аффинная система, порожденная функцией

$$F(t)=\begin{cases} 8t, & t\in(0,1/4),\\ 4-8t, & t\in(1/4,3/4),\\ 8t-8, & t\in(3/4,1),\\ 0, & t\notin(0,1).\end{cases}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Функция $F(t)$ есть линейная комбинация двух соседних функций Фабера – Шаудура. С другой стороны $F(t)$ с точностью до множителя совпадает с интегралом от функции Уолша $w_3(t) = r_0(t)r_1(t)$, а именно

$$F(t) = 8\int_0^t w_3(x)dx$$

Мы рассмотрим некоторое обобщение функции $F(t)$ которая получается многократным интегрированием функции Уолша $w_{2^n-1}(t)$ и получим рекуррентную формулу для ее вычсиления.

1. Определение функции F_n и ее свойства. Пусть $(r_k(t))_{k=0}^{infty}$ — функции Радемахера на отрезке $[0,1]$, $(W_n)_{n=0}^{\infty}$ — функции Уолша в нумерации Пэли. При $n \geq 2$ обозначим

$$\mathbf{1}_{(k,n)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}), \\ 0, & x \notin (\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}). \end{cases}$$

Зададим непрерывную функцию F_n через ее $(n-1)$-ю производную следующим образом:

$$F_n^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{(k,n)}, \quad F_n^{(l)}(0) = 0 \text{ при } l = 0,..,n-2,$$

где

$$f_{(k,n)}(x) = c_{(k,n)} * \mathbf{1}_{(k,n)}(x), \quad c_{(0,n)} = 1, \quad c_{(k,n)} = -c_{(k-2^{\lfloor log_2 k \rfloor},n)},$$

т. е. $c_{(k,n)}$ — это значения функции $F_n^{(n-1)}$ на интервале $\Delta_k^{(n)} = (\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$. Функция F_n однозначно восстанавливается интегрированием $n-1$ раз.

Обозначим через $w_n,\ n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ функции Уолша в нумерации Пэли, а через $r_k,\ k \in \mathbb{N}_0$ — функции Радемахера на отрезке $[0,1]$.

Теорема 1. *Функция F_n имеет непрерывные производные до порядка $n-2$ включительно.*

Теорема 2. $F_n^{(n-1)} = w_{2^n-1}$.

Определение. Функцию f будем называть *антипериодической* на двоичном интервале $\Delta_j^{(n)}$ с периодом $\frac{1}{2^{n+1}}$, если для любых $x, y \in \Delta_j^{(n)}$, связанных соотношением $x + \frac{1}{2^{n+1}} = y$, справедливо равенство $f(x) = -f(y)$.

Очевидно, что функция Радемахера r_k периодична с периодом $\frac{1}{2^k}$ и антипериодична на любом интервале $\Delta_j^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$.

Лемма 1. *1. Функция Уолша $r_k r_{k+1} \dots r_{n-1}$ периодична с периодом $\frac{1}{2^k}$.*

2. Функция Уолша $r_k r_{k+1}\dots r_{n-1}$ антипериодична на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$ $(\nu = 0,1,\dots,2^k-1)$.

3. Функция Уолша $W_{2^n-1}(x) = r_0 r_1 \dots r_{n-1}$ антипериодична на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ с периодом $\frac{1}{2^{k+1}}$ $(\nu = \overline{0, 2^k-1}; k = \overline{0, n-1})$.

Лемма 2. *Пусть I — оператор интегрирования, т. е. $I(f)(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$. Тогда функция $I^l(W_{2^n-1})(x)$ антипериодична на любом интервале $\Delta_\nu^{(k)}$ $(k = n-1-l,\dots,0; l = 0,1,\dots,n-1)$ и*

$$\int\limits_{\Delta_j^{(n-1-l)}} I^l W_{2^n-1}\,dx = 0$$

.

Теорема 3. *Функция $W_{2^n-1}\cdot(I^l W_{2^n-1})$ периодична с периодом $T = \frac{1}{2^{n-l}}$ $(l = 1,2,\dots,n-1)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мартенс Р. В.* О полной минимальной системе сжатий и сдвигов, связанной с системой Фабера – Шаудера // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2013. Т. 46. С. 299–300.

УДК 591.65

О ЗНАЧЕНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ВЕЛИЧИНЫ В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА

И. А. Шакиров (Набережные Челны, РФ)
iskander@tatngpi.ru

Известно [1, 2], что тригонометрическому полиному Лагранжа

$$L_n(x,t) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} x(\widetilde{t_k}) D_n(\widetilde{t_k} - t) \tag{1}$$

$$\left(D_n(u) = \frac{\sin(n+0.5)u}{2\sin 0.5u}, \quad \widetilde{t_k} = \frac{2\pi}{2n+1}k\right),$$

интерполирующему периодическую функцию $x = x(t)$ $(t \in [0, 2\pi])$ в нечетном числе $N = 2n+1$ узлов, соответствует константа Лебега

$$\lambda_n = \frac{1}{2n+1}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}\frac{2k-1}{4n+2}\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}\left(t_k - \frac{\pi}{4n+2}\right)\right) \quad \left(t_k = \frac{\pi k}{2n+1}\right). \tag{2}$$

Для нее верна асимптотическая формула

$$\lambda_n = (2/\pi)\ln n + O(1), \quad n \to \infty$$
$$(n \in \mathbf{N} \Rightarrow O_n = O(n) = \lambda_n - (2/\pi)\ln n), \tag{3}$$

где n — степень полинома (1); $O(1)$, O_n — неизвестные числа из ограниченного интервала.

Интерполяционные проблемы и другие важнейшие вопросы теории функций подробно изучены в классических монографиях Н. П. Натансона, А. Зигмунда, А. Ф. Тимана, К. И. Бабенко, а также в монографиях [1, 2], посвященных непосредственно теории интерполирования. Среди работ, связанных с подробным исследованием остаточного члена O_n в равенствах вида (3) либо нахождением малого интервала, к которому он принадлежит, отметим статьи [3–5].

Ниже получены следующие новые результаты: 1) установлено специальное представление для остаточного члена $O_n = O(n)$ $(n \in \mathbf{N})$; 2) доказана строгая монотонность последовательностей (λ_n), (O_n); 3) найдено значение величины $O(1)$ как предел строго убывающей последовательности (O_n), т.е.

$$O(1) = \lim_{n\to\infty} O_n = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\frac{16}{\pi}\right) = 1.403794027066\ldots$$

(γ — константа Эйлера).

В ходе доказательства основных теорем данной работы существенно используются нижеследующие определение [5] и две леммы.

Определение 1. Строго монотонную функцию $\varphi = \varphi(n)$ $(n \in \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{N})$ дискретного аргумента, имеющую малое изменение δ области значений $R(\varphi)$, назовем *функцией, имеющей малую монотонную вариацию*, и класс таких функций обозначим через $V_\delta^{\pm}$, где знак $(+)$ — в случае возрастания функции в области $\mathbf{D}$, знак $(-)$ — при ее убывании; $\delta = \sup\{\varphi(n) | n \in \mathbf{D}\} - \inf\{\varphi(n) | n \in \mathbf{D}\}$.

Лемма 1. *Зависимость* $y = y(t) = 1/\sin t - 1/t$ $(t \in D = [0, \pi/2]$; $y(0) = \lim_{t\to 0+} y(t) = 0)$ *является неотрицательной, строго возрастающей и выпуклой вниз функцией в области своего определения* $\boldsymbol{D}$. *Соответствующая ей последовательность интегральных сумм вида*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{sin(t_k - \pi/(4n+2))} - \frac{1}{t_k - \pi/(4n+2)}\right)\frac{\pi}{2n+1} \tag{4}$$

$$\left(t_k = \frac{\pi k}{2n+1}\right)$$

монотонно возрастает и стремится к своему предельному значению $\ln(4/\pi)$, т.е.

$$S_n < ln(4/\pi) \quad \forall\, n \in \mathbf{N}; \quad \lim_{n\to\infty} S_n = ln(4/\pi). \tag{5}$$

Лемма 2. *Разность двух расходящихся числовых рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k-0.5}$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *является сходящимся рядом, для суммы s которого верно равенство*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \ln 4 \quad \left(s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k-1)}, \quad n \in \mathbf{N}\right). \tag{6}$$

Поведения константы λ_n, ее остаточного члена O_n, их пределов полностью определим в двух нижеследующих теоремах.

Теорема 1. *Для остаточного члена константы Лебега верно представление*

$$O_n = (2/\pi)[S_n + s_n + \gamma_n + \pi/(4n+2)] \qquad (n \in \mathbf{N}); \tag{7}$$

последовательность (λ_n) является строго возрастающей, а (O_n) - строго убывающей последовательностью, где суммы S_n, s_n определены в (4), (6) *соответственно, а числа* $\gamma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ $(n \in \boldsymbol{N})$ *определяют константу Эйлера* $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0.577215664901\cdots$.

Доказательство. Преобразуем (2), используя при этом представление (4):

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sin(t_k - \pi/(4n+2))} - \frac{1}{t_k - \pi/(4n+2)}\right)\frac{\pi}{2n+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-1/2} + \frac{\pi}{2(2n+1)}\right] > \frac{2}{\pi}\left(S_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k-1} + \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[S_n + 2\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} + \left(-\frac{1}{2n+1}\right)\right].$$

Ясно, что выражения в квадратных скобках образуют строго возрастающие (первая — согласно лемме 1) последовательности, следовательно, (λ_n) также является строго возрастающей последовательностью.

Продолжим преобразование λ_n, используя при этом формулу (6) и определение константы Эйлера:

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi}\left[S_n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-1/2} + \frac{\pi}{4n+2}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{S_n + \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-1/2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right] + \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{\pi}{4n+2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[S_n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(2k-1)} + \left(\gamma_n + \ln n + \frac{\pi}{4n+2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\ln n + \frac{2}{\pi}\left(S_n + s_n + \gamma_n + \frac{\pi}{4n+2}\right) \equiv \frac{2}{\pi}\ln n + O_n,$$

откуда и следует справедливость представления (7).

Далее, перепишем двойное неравенство (18) для константы λ_n, полученное в работе [5] (см. теорему 1), в следующем виде:

$$\frac{11}{6}\alpha_n + \varphi_n < \lambda_n - \frac{2}{\pi}lnn < 2\alpha_n + \varphi_n \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{11}{6}\alpha_n + \varphi_n < O_n < 2\alpha_n + \varphi_n \quad (n \in \mathbf{N}), \tag{8}$$

где согласно леммам 1, 2 [5] для оценивающих O_n сверху и снизу функций натурального аргумента верны соотношения $\alpha_n \equiv 1/[(2n+1)sin(\pi/(4n+2))] \in V_\delta^-$, $\quad \varphi_n \equiv \frac{2}{\pi}ln[(2+1/n)\alpha_n cos(\pi/(4n+2))] \in V_\delta^-$. Их линейные комбинации $2\alpha_n + \varphi_n$, $(11/6)\alpha_n + \varphi_n$ и сама последовательность O_n (согласно (8)) также являются функциями из класса V_δ^-, т.е. строго убывают.

Теорема 2. *Для константы Лебега* (2) *справедливо следующее асимптотическое равенство:*

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi}\ln n + \frac{2}{\pi}(\gamma + ln\frac{16}{\pi}), \quad n \to \infty$$
$$\left(\Leftrightarrow O(1) = \lim_{n\to\infty} O_n = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\frac{16}{\pi}\right) = 1.403794027066\ldots\right).$$

Доказательство. Переходя в (7) слева и справа к пределу и используя при этом формулы (5), (6), получим:

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{2}{\pi}\left[\lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty}\gamma_n + \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4n+2}\right] =$$

$$
= \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{4}{\pi} + \ln 4 + \gamma\right) = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\frac{16}{\pi}\right),
$$

причем

$$
R(O_n) = \left[\frac{2}{\pi}\gamma + \frac{2}{\pi}\ln\frac{16}{\pi}, \frac{5}{3}\right] \subset (1.403794, 1.666667),
$$
$$
\delta = \delta(O_n) = 0.262872\cdots .
$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М.; Л. : ГТТИ, 1934.

2. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1990. Кн. 1, 2.

3. *Rivlin T. J.* The Lebesgue constants for polynomial interpolation // Functional Analysis and its Application. H. C. Garnier et al. eds. Springer-Verlag, 1974. P. 422–437.

4. *Simon J. S.* Lebesgue constants in polynomial interpolation // Annal. Math. et Inf. 2006. Vol. 33. P. 109–123.

5. *Шакиров И. А.* О влиянии выбора узлов лагранжевой интерполяции на точные и приближенные значения констант Лебега // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1404–1423.

УДК 517.53

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ[1]

Ф. А. Шамоян (Брянск, РФ)
shamoyanfa@yandex.ru

Пусть $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство, G — некоторая область в $\mathbb{C}^n$, $H(G)$ — множество всех аналитических функций в G, $H^\infty(G) := H(G) \cap L^\infty(G)$. Обозначим через $N(G)$ – множество аналитических функций ограниченного вида в G, т. е.

$$
N(G) = \left\{ f : f(z) = \frac{h_1(z)}{h_2(z)},\ h_j \in H^\infty(G),\ j = 1, 2,\ h_2(z) \neq 0, z \in G \right\}.
$$

В одномерном случае класс $N(G)$ совпадает с известным классом Р. Неванлинны, т.е. классом функций $f \in H(G)$, для которых $\ln|f|$ допускает гармоническую мажоранту в G (см. [1, 2]). В многомерном случае

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1704.2014К) и РФФИ (проект № 13-01-97508).

классы функций ограниченного вида и классы Р. Неванлинны совершенно разные (см. [3, 4]). Хорошо известно, что если функция f принадлежит классу В. И. Смирнова $N^+(\mathbb{C}_+)$ (см. [1]) в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, и граничные значения этой функции на вещественной оси R принадлежат $L^1(R)$, то f принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{C}_+)$, и тем самым, преобразование Фурье этой функции:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-itx} dt, x \in R.$$

исчезает на полуоси $R_- = (-\infty, 0)$ (см. [1, 5]).

Простые примеры показывают, что если $f \in N(\mathbb{C}_+)$, при этом граничные значения этой функции принадлежат классу $L^1(R)$, то вообще говоря, не следует, что $f \in H^1(\mathbb{C}_+)$, т. е. $\hat{f}$ не исчезает на R_-.

В работе [6] (см. также [7]) установлено, что если преобразование Фурье функции f достаточно сильно стремится к нулю при $x \to -\infty$, то оно тождественно равно нулю на R_-, при этом в [6] найдено необходимое и достаточное условие на скорость убывания преобразования Фурье указанных функций, при которых справедливо упомянутое утверждение. Учитывая важную роль преобразования Фурье во многих вопросах анализа и других разделах математики (см. [8, 9]), возникает вопрос обобщения этих результатов на многомерный случай. Отметим также, что в одномерном случае существенно использовалось фактори-зационное представление функции класса Р. Неванлинны. Хорошо известно, что в многомерном случае такие представления отсутствуют (см. [3]). В докладе будет изложен аналог этих результатов в случае трубчатых областей.

Для формулировки полученного результата введем еще следующие обозначения.

Пусть $x = (x_1 ... x_n) \in R^n_+$, $P(x) = (p_1(x_1), p_2(x_2), ..., p_n(x_n))$ — вектор функция, определенная на $R^n_+ = \{x = (x_1...x_n) \in R^n : x_j > 0, j = 1, ..., n\}$, $R^n_- = \{x = (x_1...x_n) \in R^n : x_j \leq 0, j = 1, ..., n\}$, $\mathbb{C}^n_+$ — трубчатая область с основанием R^n (см. [4, 8]),

$$\mathbb{C}^n_+ = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : (\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2, ..., \operatorname{Im} z_n) \in R^n_+\},$$

$$\mathbb{C}^n_- = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : (\operatorname{Im} z_1, ..., \operatorname{Im} z_n) \in R^n_-\}.$$

Если $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, $P = (p_1, ..., p_n)$, то $\exp(-P(|z|)) = \exp\left(-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(|z_j|)\right)$. Для $f \in L^1(R^n)$ преобразование Фурье функции f обозначим через $\hat{f}$.

В дальнейшем для краткости используем обозначения $\mathbb{C} := \mathbb{C}^1$, $R_+ = R^1_+$, $R_- = R^1_-$, $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C}^1_+$, $H^p(\mathbb{C}^n_+)\,(0 < p < +\infty)$ — класс Харди аналитических функций в $\mathbb{C}^n_+$, а $h^p(\mathbb{C}^n_+)$ — класс Харди плюригармонических в $\mathbb{C}^n_+$ функций (см. [3, 4]).

Если $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n_+$, то $P(x) = (p_1(x_1), ..., p_n(x_n))$, а если $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n_+$, то $P(|z|) := (p_1(|z_1|), p_2(|z_2|), ..., p_n(|z_n|))$, dm_{2n} — $2n$-мерная мера Лебега на $\mathbb{C}^n$. Кроме того, в дальнейшем будем предполагать, что $p_j(x) = \int\limits_1^x \frac{\omega_j(t)}{t}dt$, $x \in R_+$, $j = 1, ..., n$, где ω_j определена на R_+, причем $\omega_j(t) \uparrow^{+\infty} (t \to +\infty)$.

Такие функции назовем весовыми, а вектор-функцию $P = (p_1, ..., p_n)$ назовем весовыми вектор-функциями. Множество всех весовых вектор-функций обозначим через Ω.

Теорема. *Пусть $f \in N(C^n_+)$, при этом граничные значения функции f на R^n принадлежат $L^1(R^n)$ и почти всюду совпадают с граничными значениями некоторой функции из $h^1(\mathbb{C}^n_+)$,*

$$\overline{\lim_{y_j \to +\infty}} \frac{\ln|f(iy_1, ..., iy_{j-1}, iy_j, iy_{j+1}, ..., iy_n)|}{y_j} \le 0,\ j = 1, ..., n, \tag{1}$$

при всех $\widetilde{y} = (y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_n) \in R^{n-1}_+$.

Предположим, что преобразование Фурье функции f

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{R^n} f(t)\, e^{-itx} dt,\ x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$$

удовлетворяет оценке:

$$\left|\widehat{f}(x_1, ..., x_n)\right| \le \exp(-P(|x|)) = \exp\left(-\sum_{j=1}^n p_j(|x_j|)\right),$$

где $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n_-$, $P \in \Omega$.

Тогда если

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{p_j(t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt = +\infty,\ j = 1, ..., n, \tag{2}$$

то $\hat{f}(x) = 0$, $x \in R^n_-$, а функция f принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{C}^n_+)$.

Обратно, если $P \in \Omega$ и хоть один из интегралов в (2) сходится или не выполняется условие (1), то можно построить функцию $f \in \in N(\mathbb{C}^n_+)$, такую что граничные значения функции f на R^n принадлежат классу $L^1(R^n)$, при этом $\widehat{f}(x) \ne 0$ не при всех $x \in R^n_-$, т.е. $f \notin H^1(\mathbb{C}^n_+)$.

Замечание 1. Ясно, что при $n = 1$ любая функция из $L^1(R)$ почти всюду совпадает с граничным значением плюригармонической (т.е. гармонической) функции из $\mathbb{C}_+$.

Замечание 2. В утверждении теоремы 1 условие (1) нельзя отбросить. Простым примером, удовлетворяющим всем условиям теоремы 1, кроме (1), является функция вида

$$f_a(z_1, ..., z_n) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} e^{a_j z_j} (iN + z_j)^2},$$
$$a = (a_1, ..., a_n) \in R_+^n, \quad z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}_+^n.$$

Ясно, что $\operatorname{supp}\left(\widehat{f}\right) \cap R_-^n \neq \emptyset$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Duren P.* Theory of H^p spaces. Pure Appl. Math. Vol. 38. N. Y.; London : Acad. Press, 1970. 258 p.

2. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М. : Мир, 1984. 469 с.

3. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. М. : Мир, 1974. 156 с.

4. *Бохнер С., Мартин У.* Функции многих комплексных переменных. М. : Ил, 1951.

5. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной плоскости. М. : Наука, 1964. 2964 с.

6. *Шамоян Ф.А.* О преобразованиях Фурье функций класса Р. Неванлинны в полуплоскости // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 4. С. 218–240.

7. *Шамоян Ф.А.* Характеристика скорости убывания коэффициентов Фурье функций ограниченного вида и классы аналитических с бесконечно дифференцируемыми граничными значениями // Сиб. матем. жур. 1995. Т. 36, № 4. С. 943–953.

8. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М. : Наука, 1979. 318 с.

9. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М. : Мир, 1986. 463 с.

УДК 517.984

СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

И. И. Шарапудинов (Махачкала, РФ)
Sharapud@mail.ru

В ряде наших работ [1–7] были введены, так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам, частичные суммы которых обладают свойством совпадения их значений в концах области ортогональности со со значениями исходной функции. Общая идея, которая лежит в основе построения смешанных рядов, заключается в следующем. Предположим, что система функций $\{\varphi_k(x)\}$ ортонормирована на (a, b) с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int\limits_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\rho(x)\,dx = \delta_{kl}, \tag{1}$$

где δ_{kl} — символ Кронекера. Через $L^p_\rho(a,b)$ обозначим пространство функций $f(x)$, измеримых на (a,b), для которых $\int\limits_a^b |f(x)|^p \rho(x) dx < \infty$. Если $\rho(x) \equiv 1$, то будем писать $L^p_\rho(a,b) = L^p(a,b)$ и $L(a,b) = L^1(a,b)$. Из (1) следует, что $\varphi_k(x) \in L^2_\rho(a,b)$ $(k = 0,1,\ldots)$. Мы добавим к этому условию еще одно, считая, что $\varphi_k(x) \in L(a,b)$ $(k = 0,1,\ldots)$. Тогда мы можем определить следующие функции

$$\varphi_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{r-1}\varphi_k(t)dt, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{2}$$

Кроме того определим конечный набор функций

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{(x-a)^k}{k!}, \quad k = 0,1,\ldots,r-1. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$(\varphi_{r,k}(x))^{(\nu)} = \begin{cases} \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0 \le \nu \le r-1,\ r \le k, \\ \varphi_{k-r}(x), & \text{если } \nu = r \le k, \\ \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } \nu \le k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \le r. \end{cases} \tag{4}$$

Через $W^r_{L^p_\rho(a,b)}$ обозначим пространство Соболева $W^r_{L^p_\rho(a,b)}$, состоящее из функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ $r-1$ раз, причем $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $f^{(r)}(x) \in L^p_\rho(a,b)$. Скалярное произведение в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ определим с помощью равенства

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt. \tag{5}$$

Тогда, пользуясь определением функций $\varphi_{r,k}(x)$ (см. (2) и (3)) и равенством (4) нетрудно увидеть, что система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$. В цитированных выше работах [1–7], а также в [8] были рассмотрены некоторые частные случаи ортонормированных систем функций вида $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденных классическими ортонормированными системами Якоби, Лежандра, Чебышева, Лагерра и Хаара. С другой стороны, в последние годы интенсивное развитие получила (см.[9, 10] и цитированную там литературу) теория полиномов, ортогональных относительно различных скалярных произведений соболевского типа (полиномы, ортогональные по Соболеву). Скалярные произведения соболевского типа характеризуются тем, что они включают в себя слагаемые, которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов в нескольких заданных точках числовой оси. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на интервале (a, b), могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого интервала. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах интервала (a, b) со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на (a, b) весом полиномы этим важным свойством не обладают. Скалярное произведение (5), рассматриваемое в настоящей работе имеет одну особую точку, а именно, точку a, в окрестности которой «контролируется» поведение функций $\varphi_{r,k}(x)$, ортогональных по Соболеву и порожденных исходной ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенства (3). Из (2)–(5) нетрудно увидеть, что ряд Фурье функции $f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ имеет смешанный характер, а именно:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k}\varphi_{r,k}(x),$$

где

$$f_{r,k} = \int_a^b f^{(r)}(t)\varphi_{k-r}(t)\rho(t)dt, \tag{6}$$

поэтому ряды Фурье вида (6) будем (следуя [1–7]) называть *смешанными рядами* по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. В [1–7] было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномами, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных. При этом отметим, что в работах [1–6] основное внимание уделялось исследованию аппроксимативных свойств смешанных рядов по ультрасферическим полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\alpha}(x)$, тогда как в работе [8] были найдены условия на параметры α и β, которые обеспечивают равномерную сходимость смешанных рядов по общим полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$. В настоящей работе вводятся и исследуются системы функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (5) и порожденных системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Рассмотрена зада о представлении функций $\varphi_{r,k}(x)$, определенных равенством (2), в виде, более удобном для исследования их асимптотических свойств при $k \to \infty$. Эта задача решена для ортонормированных систем Якоби, Лежандра, Лагерра, Хаара и Эрмита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 5. С. 143–160.

2. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 5. С. 765–795.

3. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала : Даг. науч. центр, 2004. 176 с.

4. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 3. С. 135–154

5. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства средних типа Валле – Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Матем. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 452–471.

6. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Матем. сб. 2003. Т. 194, № 3. С. 115–148

7. *Шарапудинов И. И., Шарапудинов Т. И.* Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Матем. заметки. 2010. Т. 88, № 1. С. 116–147.

8. *Шарапудинов И. И. Муратова Г. Н.* Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 68–76.

9. *Iserles A. Koch P. E. Norsett S. P. and Sanz-Serna J. M.* On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. 1991. Vol. 65. P. 151–175.

10. Marcellan F. and Yuan Xu. On Sobolev orthogonal polynomials. arXiv: 6249v1 [math.C.A] 25 Mar 2014. P. 1–40.

УДК 517.538

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ СУММАМИ УИТТЕКЕРА И ИХ МОДИФИКАЦИЯМИ: УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ

И. И. Шарапудинов, А. Я. Умаханов (Махачкала, РФ)
sharapud@mail.ru, aivarumahanov@gmail.com

Синк-функция или кардинальный синус определяется соотношениями $\operatorname{sinc} x = \sin x/x$, при $x \neq 0$, $\operatorname{sinc} 0 = 1$, и является целой функцией.

Оператор Уиттекера

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f(k\pi/n)\,\mathrm{sinc}\, n(x - k\pi/n), \tag{1}$$

сопоставляет функции $f(x)$, определенной на $[0,\pi]$, целую функцию $L_n(f,x)$, совпадающую с $f(x)$ в узловых точках $x_k = k\pi/n$, $k = 0,1,\ldots,n$.

Вопросы сходимости значений интерполяционного оператора (1) к $f(x)$ при $n \to \infty$ для различных классов функций рассмотрены в [1–3]. Так, в [1] и [2] доказано, что на любом отрезке $[a,b]$, $0 < a < b < \pi$, $\{L_n(f,x)\}$ равномерно сходятся к $f(x)$, если, в частности, эта функция удовлетворяет условию Дини – Липщица: $\lim\limits_{t\to o+} \omega(f,t)\ln\frac{1}{t} = 0$, где $\omega(f,t)$ — модуль непрерывности $f(x)$ на отрезке $[0,\pi]$. Там же отмечено, что равномерной сходимости на всем отрезке $[0,\pi]$нет даже для функции $f(x) \equiv 1$. Здесь мы доказываем, что при выполнении некоторых дополнительных условий равномерная сходимость $\{L_n(f,x)\}$ к $f(x)$ на $[0,\pi]$ имеет место, а именно, справедлива

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию Дини – Липщица на $[0,\pi]$ и пусть $f(0) = f(\pi) = 0$. Тогда последовательность функций $L_n(f,x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на $[0,\pi]$.*

Рассмотрены также модификации операторов Уиттекера.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию Дини – Липщица на $[0,\pi]$. Тогда последовательность функций*

$$\hat{L}_n(f,x) = L_n(F,x) + L_1(f,x),$$

где $F(x) = f(x) - L_1(f,x)$, равномерно сходится к $f(x)$ на $[0,\pi]$.

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0,\pi]$ и дифференцируема на концах этого промежутка, а функция $G(x) = (f(x) - L_1(f,x))/\sin x$ при $0 < x < \pi$, $G(0) = f'(0) - f(\pi)/\pi$ и $G(\pi) = -f'(\pi) - f(0)/\pi$, имеет ограниченную вариацию и удовлетворяет условию Дини – Липщица на $[0,\pi]$. Тогда последовательность функций*

$$\tilde{L}_n(f,x) = \sin x L_n(G,x) + L_1(f,x)$$

равномерно сходится к $f(x)$ на $[0,\pi]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трынин А. Ю.* Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // Изв. вузов. Матем. 2008. № 6. С. 66–78.

2. *Трынин А. Ю.* Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc–приближений непрерывных функций на отрезке// Сиб. матем. жур. 2007 . Т. 48, № 5. С. 1155–1166.

3. *Stenger F.* Numerical metods based on sinc and analytic functions. N. Y. : Springer-Verlag, 1993. 565 p.

УДК 517.521

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ РЯДОВ ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Т. И. Шарапудинов (Махачкала, РФ)
sharapudinov@gmail.com

Рассматривается задача об исследовании аппроксимативных свойств полиномиального оператора $\mathcal{X}_{m,N}(f) = \mathcal{X}_{m,N}(f,x)$, действующего в пространстве $C[-1,1]$, основанного на использовании дискретных значений функции $f(x)$, заданных в узлах равномерной сетки $H_\Lambda = \{-1+jh\}_{j=0}^{\Lambda-1} \subset [-1,1]$, $\Lambda = n+2r$. Этот оператор может быть использован в задаче одновременного приближения дифференцируемой функции $f(x)$ и ее нескольких производных $f'(x),\dots,f^{(p)}(x)$. Построение операторов $\mathcal{X}_{m,N}(f)$ основано на полиномах Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ $(0 \le n \le N-1)$, ортогональных на равномерной сетке $\Omega_N = \{0,1,\dots,N-1\}$ с весом

$$\mu(x) = \mu(x;\alpha,\beta,N) = c\frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)},$$

т.е.

$$\sum_{x\in\Omega_N} \mu(x)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)T_m^{\alpha,\beta}(x,N) = h_{n,N}^{\alpha,\beta}\delta_{nm}.$$

Нам понадобятся следующие обозначения:

$$h = \frac{2}{\Lambda-1}, \quad \psi(x) = \Delta_h^\nu f(x-\nu h).$$

Через $\mathcal{P}_m^{r,\nu}$ обозначим пространство алгебраических полиномов $p_m(x)$ степени m, удовлетворяющих условию

$$\psi(x_j) = p_m(x_j), \quad j \in \{\nu,\dots,r-1\} \cup \{N+r+\nu,\dots,N+2r-1\},$$

$$E_m^{r,\nu}(\psi,N) = \inf_{p_m\in\mathcal{P}_m^{r,\nu}} \max_{j\in\Omega_\Lambda} \frac{|\psi(x_j)-p_m(x_j)|}{\left(\sqrt{1-x_j^2}+\frac{1}{m}\right)^{r-\nu}}.$$

Теорема. *Пусть* $r \geq 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $a > 0$, $1 \leq n \leq a\sqrt{N}$, $m = n + 2r - \nu$. *Тогда имеет место оценка*

$$\frac{|\Delta_h^\nu f(x_{j-\nu}) - \Delta_h^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_{j-\nu})|}{\left(\sqrt{1-x_{j-\nu}^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-\nu-\frac{1}{2}}} \leq$$

$$\leq c(r,a)E_m^{r,\nu}(\psi, N)\left(1+\left(\sqrt{1-x_{j-\nu}^2}+\frac{1}{n}\right)^{1/2}\ln\left(n\sqrt{1-x_{j-\nu}^2}+1\right)\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на дискретных сетках. Махачкала : Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997.

2. *Шарапудинов Т. И.* Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Вестн. ДНЦ РАН. 2007. Т. 29. С. 12–23.

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Т. Н. Шах-Эмиров (Махачкала, РФ)
Tadgius@gmail.com

Пусть $E = [-\pi, \pi]$, $p(x)$ — 2π-периодическая измеримая функция, $w(x)$ — неотрицательная почти всюду положительная 2π-периодическая суммируемая функция. Через $L_{2\pi,w}^{p(x)}$ обозначим множество измеримых 2π-периодических функций $f = f(x)$ таких, что

$$\int_E |f(x)|^{p(x)} w(x)dx < \infty.$$

Если $1 \leq \underline{p}(T) \leq \overline{p}(T) < \infty$ ($\underline{p}(B) = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in B} p(x)$, $\overline{p}(B) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B} p(x)$), то пространство $L_{2\pi,w}^{p(x)}$ нормируемо (см. [1]) при $p(x) \geq 1$ и одна из эквивалентных норм вводится следующим образом:

$$\|f\|_{p(\cdot),w} = \inf\left\{\alpha > 0 : \int_E \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} w(x)dx \leq 1\right\}.$$

Класс 2π-периодических переменных показателей, для которых выполнено условие Дини – Липшица:

$$\big|p(x) - p(y)\big| \ln \frac{1}{|x-y|} \le C \quad (x, y \in E),$$

обозначим через $\mathcal{P}_{2\pi}$.

Разобьем отрезок E на множества $E_1 = \{x : p(x) = 1\}$ и $E_2 = E \backslash E_1$. Через $\mathcal{H}(E, p)$ обозначим класс весовых функций w, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1) \;\; w(x) \ge C_1(w) > 0, \quad x \in E_1(\text{п.в.}),\\ &2) \;\; \|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty, \end{aligned}$$

где $p'(x)$ определяется из условия $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$.

Из [2] известно, что при $w \in \mathcal{H}(E, p)$ имеет место включение $L^{p(x)}_{2\pi,w} \subset \subset L^1_{2\pi}$. Тогда для $f \in L^{p(x)}_{2\pi,w}$ мы можем определить оператор Стеклова

$$s_h(f)(x) = \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{h} \int\limits_0^h f(x+t)dt.$$

В работе [3] показана равномерная ограниченность по h семейства операторов $\{s_h(f)\}_{h>0}$ в $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ для $w \in \mathcal{H}(E, p)$, $p \in \mathcal{P}_{2\pi}$, что позволяет ввести модуль гладкости r-го порядка

$$\Omega_r(f, \delta)_{p(\cdot),w} = \sup\left\{ \left\| \prod_{i=1}^r (I - s_{h_i})(f) \right\|_{p(\cdot),w} : 0 < h_i < \delta, \quad 1 \le i \le r \right\},$$

где I — тождественный оператор.

Целью настоящей работы является получение теоремы типа Джексона в $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ для модуля гладкости $\Omega_r(f, \delta)_{p(\cdot),w}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26(4). С. 613–632.

2. *Магомед-Касумов М. Г.* Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Владикавказ. матем. журн. 2014. Т. 16(3). С. 38–46.

3. *Шах-Эмиров Т. Н.* О равномерной ограниченности некоторых семейств интегральных операторов свертки в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 1. С. 422–428.

УДК 511.9

О РАЗЛОЖЕНИИ ЧИСЕЛ ВИДА m/p В g-ИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

Ю. Н. Штейников (Москва, РФ)
yuriisht@yandex.ru

Возьмем и зафиксируем произвольное натуральное $g \geq 2$. Известно, что если $gcd(n, gm) = 1$ то разложение рационального числа m/n в g-ичной системе счисления является периодическим с периодом t_n, которое является мультипликативным порядком элемента g в кольце вычетов по модулю n, см. [1, 2]. Для натурального k и $m < n$, $gcd(n, mg) = 1$ мы обозначим через $T_{m,n}(k)$ количество различных g-ичных строк $(d_1, ..., d_k) \in \{0, 1, ..., g-1\}^k$ которые появляются среди первых t_n строк $(s_r, ..., s_{r+k-1})$, $r = 1, ..., t_n$ при $g-$ ичном разложении

$$\frac{m}{n} = \sum_{r \geq 1} s_r g^{-r}.$$

В некоторых приложениях интересно знать, когда величина $T_{m,n}(k)$ близка к своей тривиальной верхней границе

$$T_{m,n}(k) \leq \min(t_n, g^k).$$

Имеет место такое утверждение.

Теорема 1. Существует абсолютная $c > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ и для почти всех простых p справедлива оценка

$$T_{m,p}(k) = g^k$$

если $k \leq (c - \varepsilon) \log_g p$.

В работах [1, 3, 4] эта константа c уточнялась. Ее можно взять равной 575/6552.

Теорема 1 гласит, что для почти всех простых p все строки заданной длины встречаются в разложении указанных чисел m/p. В работе [5] имеет место дальнейший результат. А именно доказана такая теорема.

Теорема 2 [3]. Для любого $\varepsilon > 0$ и для почти всех простых p справедлива оценка

$$T_{m,p}(k) = (1 + o(1))g^k, \quad p \to \infty$$

если $k \leq (5/24 - \varepsilon) \log_g p$.

Теорема 2 и ее доказательство использовалось в работе [6] для исследования суммы степеней между соседними элементами подгрупп.

Из недавнего рузультата И. Шпарлинского [7] можно вывести аналоги теорем 1, 2 для множества простых чисел положительной относительной плотности. В свлем докладе я планирую рассказать о них.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Konyagin S., Shparlinski I.* Character sums with exponential functions and their applications. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1999.

2. *Коробов Н. М.* Тригонометрические суммы и их приложения. М. : Наука, 1989. 240 с.

3. *Bourgain J., Konyagin S., Shparlinski I.* Product set of rationals, multiplicative translates of subgroups in residue rings and fixed points of the discrete logarith // Int. Math. Res. Notices. 2008. p. 1–29. DOI: 10.1093/imrn/rnn090.

4. *Штейников Ю. Н.* Тригонометрические суммы по подгруппам и некоторые их приложения // Матем. заметки. 2015. Т. 98, вып. 4. С. 606–625.

5. *Shparlinski I. E. , Steiner W.* On digit patterns in expansions of rational numbers with prime denominator. arXiv:1205.5673v1 [Math.NT]. 25 May 2012. (available from http://arxiv.org/pdf/1205.5673.pdf).

6. *Ковалевский Д. Е.* Оценка суммы степеней расстояний между вычетами по простому модулю // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, № 2. С. 77–85.

7. *Shparlinski I.* Ratios of small integers in multiplicative subgroups of residue rings. Preprint.

УДК 519.651

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СОСТАВНЫМИ ДВУХТОЧЕЧНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ЭРМИТА

В. В. Шустов (Москва, РФ)

vshustov@gosniias.ru

Известно приближение периодических функций на основе использования тригонометрических функций в форме рядов Фурье [1–3]. Особенностью приближения периодических функций рядами Фурье является то, что в них используются тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$, которые требуют последующего вычисления. Для вычисления этих функций применяют разные методы, в частности, разложение их в степенные ряды по формуле Тейлора.

Идея предлагаемого подхода состоит в том, чтобы напрямую использовать определенным образом многочлены выбранного класса для представления периодических функций. В качестве таких многочленов предлагается использовать двухточечные интерполяционные многочлены Эрмита [4].

Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом T

$$f(x) = f(x + T) \tag{1}$$

определена на интервале $(-\infty < x < \infty)$ и имеет достаточный набор производных на этом интервале.

Пусть также в некоторой точке x_0 интервала $(-\infty, \infty)$ заданы значения функции $f(x)$ и ее производных до порядка m включительно:

$$f^{(j)}(x_0) = f_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, ..., m. \tag{2}$$

Необходимо построить составной многочлен $H(x)$, который определен на том же интервале $(-\infty < x < \infty)$ и который удовлетворяет условиям (1) и (2).

Введем новую переменную ξ, связанную с исходной переменной x соотношением:

$$\xi = \left\{ \frac{x - x_0}{T} \right\}, \tag{3}$$

где функция $\{z\}$ обозначает дробную часть своего аргумента, т.е. $0 \leq$ $\leq \{z\} < 1$.

Преобразование, выраженное формулой (3), сводит неограниченный интервал $(-\infty, \infty)$, на котором периодическая функция определена, к промежутку [0,1) .

Вследствие того, что производные $f(x)$также являются периодическими функциями и они непрерывны, можно записать, что выполняются условия на правом конце отрезка:

$$f^{(j)}(x_1) = f_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, ..., m. \tag{4}$$

Задача аппроксимации периодической функции на неограниченном промежутке сводится к задаче приближения функции на отрезке с заданными условиями (2) и (4) на его концах.

Согласно [4, с. 1097] приближающий многочлен $H_m(x)$, удовлетворяющий условиям (1) и (2) , с использованием относительной переменной ξ, определеной (3), и с учетом условия (4) можно представить в виде:

$$H_m(\xi) = \sum_{j=0}^{m} \frac{f_0^{(j)} T^j}{j!} \psi_m^j(\xi), \tag{5}$$

где функции $\psi_m^j(\xi)$ определены формулой:

$$\psi_m^j(\xi) = (1 - \xi)^{m+1} \xi^j \sum_{k=0}^{m-j} c_{m+k}^k \xi^k + \xi^{m+1} (\xi - 1)^j \sum_{k=0}^{m-j} c_{m+k}^k (1 - \xi)^k.$$

В таблице приведены формулы двухточечного многочлена $H_m(\xi)$, полученные из соотношения (5), в которых функции $\psi_m^j(\xi)$ представлены в виде степеней по ξ и s — степень многочлена.

Таблица

s	m	Формулы для $H_m(\xi)$
1	0	$H_0 = f_0$
3	1	$H_1 = f_0 + f_0'(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3)T$
5	2	$H_2 = f_0 + f_0'(\xi - 10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5)T + \frac{f_0''}{2!}(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4)T^2$
7	3	$H_3 = f_0 + f_0'(\xi - 35\xi^4 + 84\xi^5 - 70\xi^6 + 20\xi^7)T +$ $+\frac{f_0''}{2!}(\xi^2 - 5\xi^4 + 6\xi^5 - 2\xi^6)T^2 + \frac{f_0'''}{3!}(\xi^3 - 5\xi^4 + 9\xi^5 - 7\xi^6 + 2\xi^7)T^3$

Если функция имеет неограниченное число производных, то для нее может быть построена последовательность приближающих ее многочленов. При условии ограниченности всех производных функции $f(x)$ эта последовательность сходится, т.е. имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $(-\infty < x < \infty)$, т.е существует такая постоянная $M > 0$, что*

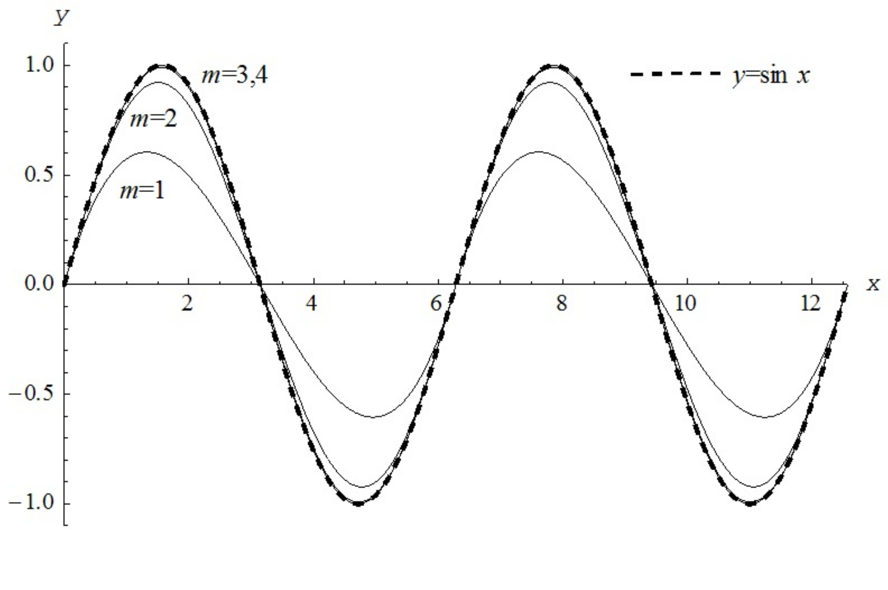
$$|f^{(j)}(x)| \leq M, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда на этом интервале функция $f(x)$ представляется сходящейся последовательностью составных двухточечных многочленов:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} H_m(\xi(x)).$$

Для периодической функции $y = \sin x$ с периодом $T = 2\pi$ путем подстановки значений функции и ее производных в формулы, приведенные в таблице, получены соотношения для приближающих ее многочленов $H_m(x)$.

На рисунке приведены графики многочленов $H_m(x)$ при $x_0 = 0$ для значений $m = 1, 2, 3, 4$, а также график функции $y = \sin x$.



Из рисунка видно, что с увеличением значения параметра m графики приближающих многочленов монотонно подходят к графику заданной функции. При этом погрешность обращается в ноль при $x_k = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и уменьшается с возрастанием m, стремясь к нулю при $m \to \infty$, что объясняется выполнением достаточного условия сходимости двухточечных многочленов для этой функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Романовский П. И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. М. : Наука, 1980. 336 с.

2. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. II. М. : Высш. шк., 1981. 584 с.

3. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1 М. : Физматлит, 1962. 464 с.

4. *Шустов В. В.* О приближении функций двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 1091–1108.

УДК 517.52

ОСОБЕННОСТИ ПОТОЧЕЧНОГО ПРИЗНАКА СХОДИМОСТИ ДИНИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМАМ ВИЛЕНКИНА И ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМАМ ХААРА НА НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ

В. И. Щербаков (Жуковский, М.О, РФ)

ShcherbakovV.I.(kafmathan@mail.ru)

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, состоящая из простых чисел; $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Всякое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n', \tag{1}$$

где a_k, s и n' — целые с $0 \le a_k < p_{k+1}$; $1 \le a_s < p_{s+1}$; $0 \le n' < m_s$.

Пусть G — нульмерная компактная абелева группа (группа Виленкина) с операцией $\oplus$ и обратной операцией $\ominus$ и со вложенной системой подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0_G\}$ (0_G — нулевой элемент группы G), являющаяся системой окрестностей нуля и фактор-группа $G_{n-1} \setminus G_n$ имеет порядок $p_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$. В каждом из множеств $G_{n-1} \setminus G_n$ зафиксируем элемент $e_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$, который назовем базисным. Тогда для всякой точки $x \in G$ можно подобрать единственный набор целых чисел x_k (зависящих, вообще говоря, от базисных элементов e_k с $0 \le x_k < p_k$ таких, что

$$x = x_1 e_1 \oplus x_2 e_2 \oplus \ldots \oplus x_n e_n \oplus \ldots \tag{2}$$

(для $a \in G$, по определению, $ka = \underbrace{a \oplus a \oplus \ldots \oplus a}_{n \text{ раз}}$ и $0a = 0_G$). Для $x \in G$ положим

$$\tilde{x}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{m_k}, \tag{3}$$

где x_k определяется равенством (2) ($\tilde{x}_n \in [0,1]$ — действительные числа).

Пусть $V = \{v_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — система Виленкина (система характеров группы G; см. [1]), занумерованная следующим образом:

$$v_0(x) \equiv 1; v_{m_k}(x) = \exp \frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}} \quad \text{и} \quad v_n(x) = \prod_{k=0}^{s} (v_{m_k}(x))^{a_k} \tag{4}$$

(a_k и s определены равенством (1), а x_k — формулой (2) , и $H =$ $= \{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — обобщённая система Хаара на группе G (см. [2]):

$$h_0(x) \equiv 1;$$

$$h_n(x) = h_{a_s m_s + n'}(x) = \begin{cases} \sqrt{m_s} \exp \frac{2i\pi x_{s+1} a_s}{p_{s+1}}, & \text{если } \tilde{x}_s m_s = n' \\ 0, & \text{если } \tilde{x}_s m_s \ne n' \end{cases} \tag{5}$$

(s, a_s и n' определены формулой (1), а x_{s+1} и $\tilde{x}_s$ — равенствами (2) и (3)).

Таким способом обобщённая система Хаара занумерована в [3]; эквивалентным образом — в [4].

Система борелевских множеств определяется смежными классами $x \oplus G_n$ с мерой $\mu(x \oplus G_n = \frac{1}{m_n}$ (мерой Хаара). Тогда на G определён интеграл Лебега, а $\{v_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — полные ортонормированные системы функций на G.

Известны следующие мажоранты ядер Дирихле по этим (обеим системам) : $V(x) = m_{n+1}$, если $x \in G_n \backslash G_{n+1}$ (V-мажоранта или мажоранта Виленкина) и $S_E(x) = \dfrac{m_n}{\sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}}$ для $x \in G_n \setminus G_{n+1}$, а x_{n+1} определены в (2) (S-мажоранта).

В отличие от V-мажоранты S-мажоранта зависит от выбора базисных элементов $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Справедливы следующие теоремы (см. [5]):

Теорема A (V-признак Дини или признак Дини – Виленкина для систем V). *Если выполнено условие*

$$\int_G |f(x \oplus t) - f(x)|\, V(t)\, dt < \infty, \tag{6}$$

то ряд Фурье от функции $f(t)$ по системе Виленкина V сходится к ней в точке .

Теорема B (S-признак Дини для систем Виленкина). *При выполнении условия*

$$\int_G |f(x \oplus t) - f(x)|\, S_E(t)\, dt < \infty \tag{7}$$

ряд Фурье от функции $f(t)$ по системе Виленкина V сходится к ней в точке x.

Теорема C (V-признак Дини или признак Дини – Виленкина для обобщённых систем Хаара). *Если имеет место условие*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \oplus t) - f(x)|\, V(t)\, dt = 0, \tag{8}$$

то ряд Фурье от функции $f(t) \in L(G)$ по обобщённой системе Хаара сходится к ней в точке x.

Теорема D (S-признак Дини для обобщённых систем Хаара). *Если верно условие*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \oplus t) - f(x)|\, S_E(t)\, dt = 0, \tag{9}$$

то ряд Фурье от функции $f(t) \in L(G)$ по системе типа Хаара H сходится к ней в точке x.

Отметим, что из (6) всегда следует (7), а из (8)–(9), т. е. S-признак Дини, во всяком случае, не хуже V-признака. В случае $\sup\limits_n p_n < \infty$ они эквивалентны.

При $\sup\limits_n p_n = \infty$ S-признак Дини всегда сильнее, т.е. имеет место

Теорема 1. *Для любого выбора базисных элементов E найдется непрерывная на группе G функция $f(t)$ такая, что для нее выполнено условие (7) (и, следовательно, и условие (9), т.е. ее ряд Фурье по* *системе H (и V) сходится в точке x), однако*

$$\int\limits_G |f(x \oplus t) - f(x)|\, V(t)\, dt = \infty.$$

К сожалению, в случае $\sup\limits_n p_n = \infty$ S-признак Дини как для систем Виленкина, так и для обобщенных систем Хаара зависит от выбора базисных элементов $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, ибо верны следующие теоремы

Теорема 2. *Если* $\sup\limits_n p_n = \infty$ *, то существует непрерывная на группе G функция $f(t)$, для которой при одном выборе базисных элементов E_1 выполнено условие* (7) *(и, следовательно, ее ряд Фурье по системе Виленкина сходится в точке x), однако при другом выборе базисных элементов E_2 ее ряд Фурье по системе Виленкина в той же самой точке x разойдется*

Теорема 3. *В случае* $\sup\limits_n p_n = \infty$ *существует непрерывная на группе G функция $g(t)$, а также набор базисных элементов E_1, относительно которого для функции $g(t)$ выполнено условие* (9) *(и, следовательно, относительно E_1 ее ряд Фурье по обобщенной системе Хаара сходится в точке x), однако найдется другой набор базисных элементов E_2, относительно которого ряд Фурье от той же самой функции $g(t)$ по той же самой системе Хаара и в той же самой точке x разойдется.*

Следует отметить, что сами системы V и H при этом остаются прежними (меняется только их нумерация).

Поэтому, в отличие от V-признака Дини, перенос S-признака Дини (который всегда сильнее, чем V-признак (для $\sup\limits_n p_n = \infty$)) с отрезка $[0,1]$ на группу G затруднителен, ибо он сильно привязан к отображению группы G на отрезок $[0,\ 1]$, т. е. к выбору базисных элементов $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Благодарю студентов МТУСИ П. Д. Игнатовича и И. М. Кондракова за их помощь в наборе и пересылке данной статьи по электронной почте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11, № 5. С. 363–400.

2. *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактной нульмерной группе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матемематика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вы. 1. С. 24–29.

3. *Щербаков В. И.* Расходимость рядов Фурье по обобщённым системам Хаара в точках непрерывности функции // Изв. вузов. Матем. 2016. № 1. С. 49–68.

4. *Щербаков В. И.* Признак Дини – Липшица по обобщённым системам Хаара // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 17-й Сарат. зим. шк. Саратов, 2014. С. 307–308.

5. *Щербаков В. И.* Признак Дини по обобщённым системам Хаара // Тез. докл. 11-й Каз. летней школы. Казань, 2013. С. 469–472.

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С РЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ[1]

В. А. Юрко (Саратов, РФ)
YurkoVA@info.sgu.ru

1. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений на полуоси:

$$Y'(x) - B(x)Y(x) = \rho B_0 Y(x), \quad B(x) = \frac{1}{x}\,A + A^0(x), \quad x > 0. \tag{1}$$

Здесь $Y = [y_k]^T_{k=\overline{1,n}}$ — вектор-столбец (T — знак транспонирования), ρ — спектральный параметр, $B_0 = \mathrm{diag}[b_k]_{k=\overline{1,n}}$, $B(x) = [B_{kj}(x)]_{k,j=\overline{1,n}}$, $A = [A_{kj}]_{k,j=\overline{1,n}}$, $A^0(x) = [A^0_{kj}(x)]_{k,j=\overline{1,n}}$, $A_{kk} = 0$, $A^0_{kk}(x) \equiv 0$, где b_k, A_{kj} — комплексные числа, $A^0_{kj}(x)$ — комплекснозначные функции. Матрица $B(x)$ называется потенциалом.

Исследуется обратная задача спектрального анализа для системы (1). В качестве основной спектральной характеристики вводится так называемая матрица Вейля. Получена теорема единственности восстановления потенциала по заданной матрице Вейля.

Обозначим $\varepsilon := \exp(2\pi i/n)$, $\varepsilon_k = \varepsilon^{k-1}$, $k = \overline{1,n}$. Пусть для простоты $b_k = \varepsilon_k$ (общий случай требует очевидных технических изменений). Пусть $\{\mu_k\}_{k=\overline{1,n}}$ — корни характеристического многочлена $\Delta(\mu) := = \det[\mu I - A]$ (I — единичная матрица), т.е. $\{\mu_k\}_{k=\overline{1,n}}$ — собственные значения матрицы A. Ясно, что $\mu_1 + \ldots + \mu_n = 0$. Для определенности будем рассматривать случай, когда $\mu_j \neq 0$, $\mu_j - \mu_k \neq sn$, $s \in \mathbf{Z}$, $\mathrm{Re}\,\mu_1 < \ldots < \mathrm{Re}\,\mu_n$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Обозначим $A^1_{kj}(x) := A^0_{kj}(x)$ при $x \geq 1$, и $A^1_{kj}(x) := A^0_{kj}(x)x^{n-1-Re(\mu_n-\mu_1)}$ при $x \leq 1$, и предположим, что $A^1_{kj}(x) \in L(0,\infty)$. Пусть $D^0_j = [d^0_{kj}]^T_{k=\overline{1,n}}$ — собственные векторы A для μ_j, и $\det[d^0_{kj}]_{k,j=\overline{1,n}} = 1$.

2. Сначала рассмотрим следующую систему в комплексной x-плоскости:

$$Y'(x) - \frac{1}{x}\,AY(x) = B_0 Y(x). \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1436.2014K) и РФФИ (проект № 16-01-00015).

Пусть $x = r\exp(i\varphi)$, $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $x^\mu = \exp(\mu(\ln r + i\varphi))$, а Π_- — комплексная x-плоскость с разрезом при $x < 0$. Введем вектор-функции $c_j^0(x) = [c_{kj}^0(x)]_{k=\overline{1,n}}^T$:

$$c_j^0(x) = x^{\mu_j} \sum_{\nu=0}^{\infty} D_j^\nu x^\nu, \quad x \in \Pi_-, \quad j = \overline{1,n},$$

где $D_j^\nu = ((\mu_j + \nu)I - A)^{-1} B_0 D_j^{\nu-1}$, $\nu \geq 1$. Ясно, что $c_j^0(x) \sim D_j^0 x^{\mu_j}$ при $x \to 0$. Вектор-функции $c_j^0(x)$, $j = \overline{1,n}$ аналитичны в Π_-; они образуют фундаментальную систему решений для системы (2), и $\det[c_{kj}^0(x)]_{k,j=\overline{1,n}} \equiv 1$. Обозначим

$$L_0 Y := Y' - (B_0 + A/x)Y, \quad L_0^* Z := Z' + Z(B_0 + A/x),$$

где $Z = [z_k]_{k=\overline{1,n}}$ — вектор-строка. Введем матрицу $u(x) = [u_k(x)]_{k=\overline{1,n}}^T = [u_{\nu k}(x)]_{\nu,k=\overline{1,n}}$, где $u_k(x)$ — вектор-столбцы вида

$$u_k(x) := \exp(b_k x)\left(u_k^0 + \frac{1}{x}\, u_k^1\right), \quad u_k^s = [u_{\nu k}^s]_{\nu=\overline{1,n}}^T,$$

$$u_{\nu k}^0 = \delta_{\nu k}, \quad u_{\nu k}^1 = \frac{A_{\nu k}}{b_k - b_\nu} \quad (k \neq \nu), \quad u_{kk}^1 = \sum_{j \neq k} \frac{A_{kj} A_{jk}}{b_j - b_k}\,.$$

Здесь и далее $\delta_{\nu k}$ — символ Кронекера. Пусть $v(x) = (u(x))^{-1}$, $v(x) = [v_k(x)]_{k=\overline{1,n}} = [v_{k\nu}(x)]_{k,\nu=\overline{1,n}}$, где $v_k(x) = [v_{k\nu}(x)]_{\nu=\overline{1,n}}$– вектор-строки. Тогда $L_0^* v_k(x) = x^{-2}\exp(-b_k x)\omega_k(x)$, где $\omega_k(x) = [\omega_{k\nu}(x)]_{\nu=\overline{1,n}}$ — вектор-строки, и

$$\omega_{k\nu}(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{\omega_{k\nu j}}{x^j}, \quad N \geq 1.$$

Обозначим $S_\nu := (x :\ \arg x \in (\frac{\nu\pi}{n}, \frac{(\nu+1)\pi}{n}))$, $\nu = \overline{-n, n-1}$, $S_1^* := \bar{S}_{n-1}$, $S_k^* := \bar{S}_{n-2k+1} \cup \bar{S}_{n-2k+2}$, $k = \overline{2,n}$. Пусть вектор-функции $e_k(x) = [e_{\nu k}(x)]_{\nu=\overline{1,n}}^T$ являются решениями следующей системы интегральных уравнений

$$e_k(x) = u_k(x) - \int_x^\infty \Big(\sum_{j=1}^{n} u_j(x) L_0^* v_j(x)\Big) e_k(t)\, dt, \quad x \in S_k^*.$$

Тогда $e_k(x) = e_k^0(x)\exp(b_k x)$, $e_k^0(x) = [e_{\nu k}^0(x)]_{\nu=\overline{1,n}}^T$, причем

$$|e_{\nu k}^0(x) - \delta_{\nu k}| \leq C/|x|, \quad x \in S_k^*,\ |x| \geq x^*.$$

Имеем
$$e_k(x)=\sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}^0 c_j^0(x).$$
Это дает аналитическое продолжение функций $e_k(x)$ для $x\in\Pi_-$. Обозначим
$$Q_k:=\Big(x:\ \arg x\in\Big[\max\Big(-\pi,\frac{(-2k+2)\pi}{n},\Big),\min\Big(\pi,\frac{(2n-2k+2)\pi}{n}\Big)\Big]\Big),$$
$k=\overline{1,n}$.
Тогда имеют место оценки: $|e_{\nu k}^0(x)-\delta_{\nu k}|\le C/|x|,\quad x\in Q_k,\ \underline{|x|}\ge x^*$. Кроме того, $\det[e_{\nu k}(x)]_{\nu,k=\overline{1,n}}\equiv 1$. Вектор-функции $e_k(x)$, $k=\overline{1,n}$ образуют фундаментальную систему решений для системы (2).

Рассмотрим дифференциальную систему
$$Y'(x)-\frac{1}{x}AY(x)=\rho B_0Y(x),\quad x>0,\tag{3}$$
со спектральным параметром ρ. Ясно, что если $Y(x)$ — решение системы (2), то $\hat{Y}(x):=Y(\rho x)$ – решение системы (3). Введем вектор-функции $C_j^0(x,\rho)=[C_{kj}^0(x,\rho)]_{k=\overline{1,n}}^T$, $x>0:$
$$C_j^0(x,\rho):=\rho^{\mu_j}c_j(\rho x)=x^{\mu_j}\sum_{\nu=0}^{\infty}D_j^{\nu}(\rho x)^{\nu},\quad x>0.$$
Функции $C_j^0(x,\rho)$ являются целыми по ρ; они образуют фундаментальную систему решений для системы (3), причем $\det[C_{kj}^0(x,\rho)]_{k,j=\overline{1,n}}\equiv 1$. Кроме того, $C_j^0(x,\rho)\sim D_j^0x^{\mu_j}$ при $x\to 0$. Обозначим $E_k(x,\rho):=e_k(\rho x)$. Тогда $E_k(x,\rho)=[E_{\nu k}(x,\rho)]_{\nu=\overline{1,n}}^T$,

$\det[E_{\nu k}(x,\rho)]_{\nu,k=\overline{1,n}}\equiv 1,\ |E_{\nu k}(x,\rho)\exp(-\rho\varepsilon_kx)-\delta_{\nu k}|\le C/(|\rho|x),\ |\rho|x\ge 1,$

$\rho\in Q_k$,
$$E_k(x,\rho)=\sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}^0\rho^{\mu_j}C_j^0(x,\rho).$$
В каждом секторе $S_m:=(\rho:\ \ \arg\rho\in(\frac{\pi m}{n},\frac{\pi(m+1)}{n}))$ корни $R_1,\dots,R_n$ уравнения $R^n-1=0$ можно занумеровать так, что
$$\mathrm{Re}\,(\rho R_1),\dots<\mathrm{Re}\,(\rho R_n),\quad \rho\in S_m\,.$$
Ясно, что $R_k=\varepsilon_{\gamma_{mk}}$, где $\{\gamma_{mk}\}_{k=\overline{1,n}}$ — перестановка чисел $\{1,\dots,n\}$, зависящая от сектора S_m. Обозначим $\mathcal{E}_k^0(x,\rho):=E_{\gamma_{mk}}(x,\rho)$, $\rho\in S_m$,

$b^0_{kj} := \beta^0_{\gamma_{mk},j}$. Тогда вектор-функции $\mathcal{E}^0_k(x,\rho) = [\mathcal{E}^0_{\nu k}(x,\rho)]^T_{\nu=\overline{1,n}}$, $k = \overline{1,n}$ образуют фундаментальную систему решений для системы (3) в секторе S_m, причем

$$|\mathcal{E}^0_{\nu k}(x,\rho)\exp(-\rho R_k x) - \delta_{\nu,\gamma_{mk}}| \le C/(|\rho|x), \quad |\rho|x \ge 1, \quad \rho \in \bar{S}_m\,,$$

$$\mathcal{E}^0_k(x,\rho) = \sum_{j=1}^n b^0_{kj}\rho^{\mu_j} C^0_j(x,\rho).$$

Рассмотрим теперь систему (1). Используя свойства функций $\{C^0_j(x,\rho)\}$ и $\{\mathcal{E}^0_k(x,\rho)\}$, известным методом (см. [2]) построим фундаментальные системы решений $\{C_j(x,\rho)\}$ и $\{\mathcal{E}_k(x,\rho)\}$ для системы (1) со следующими свойствами.

1. Вектор-функции $C_j(x,\rho) = [C_{\nu j}(x,\rho)]^T_{\nu=\overline{1,n}}$, $x > 0$ являются целыми по ρ, и

$$(C_j(x,\rho) - C^0_j(x,\rho))x^{-\mu_j} = o(x^{\mu_n-\mu_1}),\ x \to 0, \quad \det[C_{\nu j}(x,\rho)]_{\nu,j=\overline{1,n}} \equiv 1.$$

2. Для каждого фиксированного m, вектор-функции $\mathcal{E}_k(x,\rho) = [\mathcal{E}_{\nu k}(x,\rho)]^T_{\nu=\overline{1,n}}$, $x > 0$ аналитичны при $\rho \in S_m\,,\ |\rho| > \rho^*$, непрерывны при $\rho \in \bar{S}_m, |\rho| \ge \rho^*$, и

$$(\mathcal{E}_{\nu k}(x,\rho) - \mathcal{E}^0_{\nu k}(x,\rho))(F_k(\rho x))^{-1} = O(\rho^{-1}),\ \rho \in \bar{S}_m,\ |\rho \ge \rho^*|,$$

где $F_k(\rho x) = \exp(\rho R_k x)$ при $|\rho|x > 1$, и $F_k(\rho x) = (\rho x)^{\mu_1}$ при $|\rho|x \le 1$.

3. Имеет место соотношение

$$\mathcal{E}_k(x,\rho) = \sum_{j=1}^n b_{kj}(\rho) C_j(x,\rho), \tag{4}$$

где $b_{kj}(\rho) = b^0_{kj}\rho^{\mu_j}(1 + O(\rho^{-1}))$ при $\rho \in \bar{S}_m,\ |\rho| \to \infty$.

3. Пусть $\Phi_k(x,\rho) = [\Phi_{\nu k}(x,\rho)]^T_{\nu=\overline{1,n}}$ — решения системы (1) при условиях

$$\Phi_k(x,\rho) \sim D^0_k x^{\mu_k},\ x \to 0, \quad \Phi_k(x,\rho) = O(\exp(\rho R_k x)),\ \ x \to \infty,\ \ \rho \in S_m\,.$$

Тогда $\det[\Phi_{\nu k}(x,\rho)]_{\nu,k=\overline{1,n}} \equiv 1$, и

$$\Phi_k(x,\rho) = C_k(x,\rho) + \sum_{j=k+1}^n M_{kj}(\rho) C_j(x,\rho), \tag{5}$$

где коэффициенты $M_{kj}(\rho)$ не зависят от x. Матрица $M(\rho) = [M_{kj}(\rho)]_{k,j=\overline{1,n}}$, где $M_{kj}(\rho) := \delta_{kj}$ при $k \geq j$, называется матрицей Вейля для системы (1).

Обратная задача. Дана матрица Вейля $M(\rho)$, построить потенциал $B(x)$.

Сформулируем теорему единственности для этой обратной задачи.

Теорема 1. *Задание матрицы Вейля однозначно определяет потенциал* $B(x)$.

При доказательстве используется метод спектральных отображений [3], формулы (4)–(5) и полученные выше свойства фундаментальных систем решений дифференциальной системы (1). Методом спектральных отображений можно также получить алгоритм построения решения рассматриваемой обратной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969.
2. *Юрко В. А.* Обратная задача для дифференциальных уравнений с особенностью // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 8. С. 1355–1362.
3. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht :VSP, 2002.

УДК 517.5

U-МНОЖЕСТВА ДЛЯ СИСТЕМЫ ХАРАКТЕРОВ НУЛЬ-МЕРНОЙ ГРУППЫ В СМЫСЛЕ СХОДИМОСТИ ПО КУБАМ[1]

И. С. Юрченко (Саратов, РФ)
hamsterchik@mail.ru

В работах Скворцова В. А. [1] и Мовсисяна Х. О. [2] было показано, что счетное множество является множеством единствености для кратных рядов Уолша, сходящихся по прямоугольникам. В работе [3] было доказано, что любая непрерывная кривая конечной длины или их счетное объединение является множеством единствености для двойных рядов Уолша, сходящихся по прямоугольникам. В работе [4] был получен класс множеств единственности для кратных рядов по смешанной системе функций, расширяющий известные классы множеств единственности. С. Ф. Лукомский [5] построил пример кратного ряда, сходящегося по прямоугольникам, но не сходящегося по кубам. Затем в [6] было доказано, что пустое множество является множеством единственности для кратных рядов Уолша на двоичной группе в смысле сходимости по кубам.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

М. Г. Плотников в 2007 г. [7], рассмаривая функции Уолша на двоичной группе, показал, что конечное множество и счетное множество, имеющее только одну предельную точку, являются множеством единственности для кратных рядов Уолша, сходящихся по кубам. Там же было построено не пустое совершенное множество единственности. Мы покажем, что данный результат справедлив для произвольной нуль-мерной группы.

Пусть $(G, \oplus)$ — компактная нуль-мерная группа, $G = G_0 \supset G_1 \supset \supset G_2 \supset ...$; $p_k = (G_k/G_{k+1})^\sharp$, $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ — базисная система, числа (m_k) определены равенствами $m_0 = 1, m_{k+1} = p_k m_k$. Аннуляторы группы G образуют возрастающую последовательность $G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset ...$ и $(G_{k+1}^\perp/G_k^\perp)^\sharp = p_k$. Обозначим через $X = \{\chi\}$ совокупность характеров группы G. Данная система является ортогональной и $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} G_n^\perp$. Характеры $r_k(z) \in G_{k+1}^\perp \setminus G_k^\perp$ назовем функциями Радемахера. Пусть

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k m_{k+1} \in \mathbb{N}_0, \quad \varepsilon_k = \overline{0, p_k - 1},$$

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k g_k \in G, \quad z_k = \overline{0, p_k - 1}.$$

Положим по определению $\chi_n(z) = \prod\limits_{k=0}^{\infty} (r_k(z))^{\varepsilon_k}$. Очевидно, что данное произведение содержит конечное число сомножителей.

Обозначим через $\mathfrak{G} = G^N = \underbrace{G \times \cdots \times G}_{N}$ N-мерную группу с топологией произведения групп. В этом случае база топологии состоит из произведений сдвигов $(G_j \oplus h^{(1)}) \times (G_j \oplus h^{(2)}) \times ... \times (G_j \oplus h^{(N)})$, где $j = max(j_1, \ldots, j_N)$, а компоненты $h^{(l)}$ вектора $\mathbf{h}$ имеют вид $h^{(l)} = = a_{j_l-1}^{(l)} g_{j_l-1} \oplus a_{j_l-2}^{(l)} g_{j_l-2} \oplus ... \oplus a_0^{(l)} g_0$.

Положим по определению $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \chi_{n_1}(z_1) ... \chi_{n_N}(z_N), \mathbf{z} \in \mathfrak{G}$, $\mathbf{n} = = (n_1, ..., n_N)$. Рассмотрим кратный ряд

$$\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} c_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} ... \sum_{n_N=0}^{\infty} c_{n_1 ... n_N} \chi_{n_1}(z_1) ... \chi_{n_N}(z_N). \tag{1}$$

Множество U называется множеством единственности ряда (1), если из сходимости ряда (1) к нулю вне множества U следует, что все его коэффициенты равны нулю.

Теорема. *Существуют непустые совершенные множества единственности в $\mathfrak{G} = G^N$ в смысле сходимости по кубам.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скворцов В. А.* О множествах единственности для многомерных рядов Хаара // Матем. заметки. 1973. Т. 14, № 6. С. 789–798.

2. *Мовсисян Х. О.* О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. 1974. Т. 9, № 1. С. 40–61.

3. *Лукомский С. Ф.* О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 7. С. 937–945.

4. *Жеребьева Т. А.* Об одном классе множеств единственности для кратных рядов Уолша // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 2. С. 14–21.

5. *Lukomskii S. F.* On a U-set for multiple Walsh series // Anal. Math. 1992. Vol. 18, № 2. P. 127–138.

6. *Лукомский С. Ф.* Представление функций рядами Уолша и коэффициентами сходящихся рядов Уолша : дисс. … докт. физ.-мат. наук. Саратов: СГУ, 1996.

7. *Плотников М. Г.* О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 1. С. 61–78.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы

Оригинал-макет подготовили О. А. Королева, В. А. Халова

Подписано в печать 12.01.2016. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 20,93 (22,5). Тираж 225 экз. Заказ

ООО Издательство «Научная книга».
410031, Саратов, ул. Московская, 35.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
ООО «Типография ТИСАР».
410044, Саратов, пр-т Строителей, 1.