

**Министерство образования и науки РФ
САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО**

Утверждено Ученым советом
механико-математического факультета СГУ
20 февраля 2014 г., протокол № 8

Председатель Ученого совета
декан механико-математического факультета



А.М. ЗАХАРОВ

ПРОГРАММА

**вступительных испытаний по специальности для поступающих в
аспирантуру**

Направление подготовки 01.06.01 Математика и механика

Саратов 2014

Раздел 1. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ.

Теория функций действительного переменного

Мера, измеримые функции. Сходимость по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Определение интеграла Лебега и его свойства. Сравнение с интегралом Римана. Предельный переход под знаком интеграла. Неопределенный интеграл Лебега. Абсолютно непрерывные функции. Интеграл Лебега как функция множества.

Пространства суммируемых функций. Пространства L_p . Ортогональные системы функций в L_2 . Ряды по ортогональным системам.

Тригонометрические ряды. Условия сходимости ряда Фурье. Единственность разложения функций в тригонометрические ряды. Преобразование Фурье.

Теория функций комплексного переменного

Интегральные представления аналитических функций. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого.

Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты. Разложения аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана. Неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисления интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше.

Целые и мероморфные функции. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями. Разложение целой функции в бесконечное произведение.

Конформные отображения. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерий однолиственности.

Дифференциальные отображения

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши. Теория линейных систем.

Уравнения математической физики. Постановка смешанной задачи. Схема метода разделения переменных для волнового уравнения. Задачи Дирихле. Задача Коши для уравнения теплопроводности в полупространстве.

Функциональный анализ

Метрические и топологические пространства. Сходимость. Полнота и пополнение метрического пространства. Принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических и топологических пространствах.

Нормированные и топологические линейные пространства. Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функции. Теорема Хана-Банаха.

Линейные функционалы и линейные операторы. Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в гильбертовом пространстве. Сопряженное пространство. Слабая сходимость. Линейные операторы. Пространство линейных ограниченных операторов, вполне непрерывные операторы. Теория расширения симметричных операторов.

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 2004.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
4. Маркушевич И.А. Теория аналитических функций. Т.1, 2. С.-П.: Лань, 2009.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественного переменного. М.: Наука, 1974.
6. Никольский С.М. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2001.
7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.
8. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1-5. С.-П.: БХВ-Петербург, 2008-2010.
10. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
11. Люстерник Л.А., Соболева В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

Раздел 2. ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

Топология

Определение топологического пространства. Топология метрического пространства. Непрерывность. Компактность. Связность.

Общая теория дифференцируемых многообразий

Определение дифференцируемого многообразия. Топология многообразия. Дифференцируемые отображения. Иммерсии. Субмерсии. Подмногообразия. Касательные векторы. Касательное пространство. Касательное расслоение. Производная (дифференциал) дифференцируемого отображения. Векторные поля и их свойства. Тензорная алгебра линейного пространства. Внешняя алгебра

линейного пространства. Тензорные расслоения многообразий. Тензорные поля. Внешние дифференциальные формы. Внешний дифференциал и его свойства.

Группы Ли

Определение группы Ли. Полная линейная группа. Алгебра Ли. Алгебра Ли группы Ли. Алгебра Ли полной линейной группы. Гомоморфизмы групп Ли и их алгебр Ли. Подгруппы Ли групп Ли, подалгебры алгебр Ли. Алгебра Ли подгруппы Ли группы Ли. Алгебра Ли произведения групп Ли. Локальные гомоморфизмы групп Ли. Экспоненциальное отображение. Группы Ли преобразований. Однопараметрическая группа Ли преобразований. Производная Ли тензорного поля. Присоединенное отображение. Примеры однородных пространств: аффинное пространство, псевдоевклидово линейное пространство, псевдоевклидово точечное пространство.

Теория связности в главном расслоении

Определение главного расслоенного пространства. Локально тривиальное расслоение со структурной группой. Связность в главном расслоенном пространстве. Форма связности и ее свойства. Форма кривизны и ее свойства. Параллельное перенесение. Абсолютный дифференциал. Расслоение реперов многообразия. Линейная (аффинная) связность. Форма кривизны и тензор кривизны линейной связности. Кручение линейной связности. Абсолютная производная тензорного поля вдоль пути и ее свойства. Ковариантная производная тензорного поля и ее свойства. Тождество Риччи. Геодезические пути.

Римановы пространства

Определение риманова пространства. Примеры римановых пространств. Риманова связность. Тензор кривизны риманова пространства и его алгебраические и дифференциальные свойства. Кривизна риманова пространства в двумерном направлении. Пространства постоянной кривизны. Группа голономии. Локально псевдоевклидовы пространства. Движения римановых пространств. Римановы пространства, допускающие максимальную группу движений.

Гамильтоновы системы на многообразии

Симплектическое линейное пространство. Канонические базисы в симплектическом пространстве. Симплектическое многообразие. Канонический изоморфизм касательного и кокасательного расслоенных пространств. Теорема Дарбу. Каноническая симплектическая структура на кокасательном расслоенном пространстве. Гамильтонова система на симплектическом многообразии. Гамильтонова механика как гамильтонова система на фазовом пространстве системы.

Литература

1. Новиков С. П., Тайманов И. А. Современные геометрические структуры и поля - М.: МЦНМО, 2005. - 580 с.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
3. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Изд-во МГУ, 1981.

Раздел 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Группы

Циклические группы (теорема Кэли). Общие теоремы о гомоморфизмах групп. Разрешимые группы. Простые группы. Произведение групп. Образующие и определяющие соотношения. Действия групп на множествах: действие сопряжением, сдвиг, транзитивные группы. Теоремы Симона. Конечные абелевы группы. Примарные абелевы группы. Основная теорема о конечных абелевых группах. Характеры конечных абелевых групп. Двойственность. Соотношение ортогональности. Модулярные характеры.

Кольца и идеалы

Гомоморфизмы колец. Коммутативные кольца. Простой идеал. Максимальный идеал. Свойства простых и максимальных идеалов. Китайская теорема об остатках и следствия из неё. Первообразные корни по модулю n . Кольцо частных. Локальное кольцо. Кольцо главных идеалов. Теорема о факториальности целостного кольца главных идеалов. Евклидово кольцо. Теорема о факториальности кольца многочленов под факториальным кольцом. Дедекиндовы кольца. Дробные идеалы. Свойства. Теорема об максимальной и обратимости всех простых идеалов. Теорема о дедекиндовости для области целостности с группой ненулевых дробных идеалов.

Поля

Подтело. Простое тело. Присоединение. Простые расширения. Конечные расширения (теорема о степенях). Алгебраические расширения и их связь с конечными расширениями. Поле разложения (теоремы о их существовании и однозначности). Нормальные расширения (необходимые и достаточные условия для нормальности расширения). Сепарабельные и несепарабельные расширения. Теорема о числе изоморфизмов алгебраических расширений. Совершенные и несовершенные поля. Простота алгебраических расширений. Теорема о примитивном элементе. Нормы и следы. Группа Галуа. Основная теорема теории

Галуа. Конечные поля. Мультипликативная группа конечного поля. Уравнения под конечным полем (теорема Шевалли). Квадрат поля. Символ Лежандра. Квадратичный закон взаимности.

Числовые поля

Квадратичные поля. Основные алгебраические сведения. Геометрическая иллюстрация. Целые числа. Дискриминант. Единицы. Вычисление основной единицы. Квадратичные поля с однозначным разложением на простые множители.

Аналитическая теория чисел

Бесконечные произведения. Теорема Вейерштрасса и следствие из неё. Рост целых функций. Порядок и тип целой функции. Связь роста функции с числом её нулей, неравенство Иейсена. Теорема Адамара. Теорема Бореля-Каратеодори. Обобщенные ряды Дирихле. Обыкновенные ряды Дирихле. Сумматорные функции для рядов Дирихле. Ряды Дирихле с мультипликативными коэффициентами. Ряды с периодическими коэффициентами. Аналитическое продолжение на всю плоскость и L-функций Дирихле. Функциональное уравнение. Оценка модуля в критической полосе. Первая теорема Пейджа. Вторая теорема Пейджа. Теорема Зигеля (без доказательства). Аппроксимация функции.

Литература

Основная

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. - СПб.; М. ; Краснодар : Лань, 2008.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.- М.: Краснодар: Лань, 2007 г., - М.: Физматгиз, 2007 г.
3. Д. К. Фаддеев. Лекции по алгебре. - СПб.; М. ; Краснодар : Лань, 2007
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел - СПб.; М. ; Краснодар : Лань, 2004.
5. Виноградов И.М. Основы теории чисел - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2006.

Дополнительная

1. С. Ленг Алгебра. М.: Мир,1968.
2. Ван дер Варден Б.И. Современная алгебра т.1 и 2. Гостехиздат, М.-Л., 1947.
3. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1964.
4. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел.
5. Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел М.: Наука.
6. Чандрасекхаран К. Арифметические функции М.: Наука, 1975.
7. Ленг С. Алгебраические числа М.: Мир,1960.
8. Под редакцией Касселса. Алгебраическая теория чисел. М.: Наука, 1972.
9. Бурбаки Н. Гомологическая алгебра. М.: Мир 1930.

Раздел 4. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Дискретная математика

Алгебра логики. Функции алгебры логики, индуктивное определение формулы, эквивалентность формул. Разложение булевых функций по переменным, дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Понятие о полноте и замкнутости. Важнейшие замкнутые классы, формулировка теоремы о функциональной полноте. ([12])

Вычислимые функции. Классы примитивно-рекурсивных и общерекурсивных функций. Эквивалентность рекурсивных функций и функций, вычисляемых на машинах Тьюринга. ([6])

Автоматы. Основная модель, способы задания. Эквивалентность, задача минимизации автоматов. Эксперименты по распознаванию состояний (установочный и диагностический), их классификация. Эксперименты по распознаванию автоматов. ([2])

Кодирование. Формулировка основных задач, алфавитное кодирование. Кодовое расстояние и его связь с корректирующей способностью. Линейные и циклические коды. ([11])

Графы. Деревья и их характеристические свойства. Эйлеровы пути в графах. Критерий эйлеровости графа. Гамильтоновы пути в графах. Достаточное условие гамильтоновости графа (теорема Орэ). Планарные графы. Формула Эйлера. Критерий планарности (доказательство необходимости). Ориентированные графы. Сильная связность. База орграфа. ([4])

Сети. Задача о коммивояжере. Алгоритмы Дейкстры нахождения кратчайших путей в корневой сети. Потоки в сетях. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Алгоритмы Форда и Фалкерсона. ([5])

Математическое программирование и теория игр

Линейное программирование. Постановка задачи линейного программирования. Каноническая форма задачи линейного программирования. Сведение любой з.л.п. к эквивалентной ей з.л.п. в канонической форме. Теоремы Данцига. Симплекс-метод. Двойственная задача линейного программирования. Теоремы двойственности. ([3])

Выпуклое программирование. Постановка основной задачи выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера. ([3])

Методы минимизации. Методы одномерной минимизации (метод деления отрезка пополам, метод золотого сечения, метод касательных). Методы безусловной минимизации функций многих переменных (градиентный метод, метод наискорейшего спуска, метод координатного спуска). Метод проекции

градиента. Метод условного градиента. Метод Ньютона. Метод случайного поиска. ([1], [3])

Теория игр. Основные понятия теории матричных игр (максиминные и минимаксные стратегии, нижняя и верхняя цена игры, седловые точки). Теорема фон Неймана для матричных игр. Биматричные игры. Ситуация равновесия. Теорема Нэша о существовании ситуации равновесия в биматричной игре. ([7], [8])

Математическая теория оптимального управления

Вариационное исчисление. Постановка простейшей задачи вариационного исчисления. Лемма Дюбуа-Реймона. Уравнение Эйлера. Случай упрощения уравнения Эйлера. Задача о брахистохроне. Лемма Лагранжа. Изопериметрическая задача. Задача Дидоны. ([10])

Оптимальное управление. Постановка основной задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (без вывода). Вывод уравнения Эйлера из принципа максимума. ([9, с. 15-28, 260-267])

Литература

1. Васильев Ф.И. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988.
2. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. – М.: Наука, 1966.
3. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986.
4. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.
5. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1981.
6. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М.: Наука, 1965.
7. Оуэн Г. Теория игр. – М.: Мир, 1971.
8. Петросян Л.А. и др. Теория игр. – М.: Высшая школа, 1998.
9. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.
10. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. IV, часть I. – М.: Наука, 1974.
11. Шоломов Л.А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. – М.: Наука, 1980.
12. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986

Раздел 5. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1. Способы задания движения точки.
2. Скорость и ускорение точки в декартовых и полярных координатах.
3. Скорость в криволинейных координатах.
4. Естественный трехгранник. Касательное и нормальное ускорение.

5. Поступательное движение. Угловая скорость и угловое ускорение тела с неподвижной осью. Скорости и ускорения точек вращающегося тела.
6. Закон движения плоской фигуры. Теорема о перемещении плоской фигуры в ее плоскости.
7. Мгновенный центр вращения (теоремы), центроиды. Скорость и ускорение точки плоской фигуры.
8. Аналитическое изучение движения плоской фигуры.
9. Углы Эйлера. Теорема Эйлера-Даламбера о перемещении тела.
10. Кинематические параметры, матрицы и гиперкомплексные числа, используемые для описания углового движения. Алгебра кватернионов.
11. Формула Родрига. Кватернионные формулы вращения. Ортогональные матричные 3×3 преобразования координат.
12. Кватернионные формулы преобразования координат.
13. Сложение конечных поворотов: векторные формулы сложения конечных поворотов, матричные формулы сложения конечных поворотов, заданных направляющими косинусами, углами Эйлера-Крылова, параметрами Эйлера (Родрига-Гамильтона), параметрами Кейли-Клейна, кватернионные формулы сложения конечных поворотов.
14. Мгновенная ось вращения и аксоиды.
15. Скорость и ускорение точки тела (формула Ривальса).
16. Кинематические уравнения Эйлера. Уравнения Пуассона. Скалярная, матричная и кватернионная формы кинематических уравнений в параметрах Эйлера (Родрига-Гамильтона).
17. Кинематические уравнения в параметрах Кейли-Клейна. Векторные кинематические уравнения.
18. Кватернионные кинематические уравнения относительного углового движения. Определение ориентации твердого тела по известному вектору его угловой скорости (задача Дарбу).
19. Скорость и ускорение точки (теорема Кориолиса). Свойства ускорения Кориолиса.
20. Теорема Шаля о перемещении тела.
21. Скорость и ускорение точки свободного тела в общем случае. Сложение поступательных и вращательных движений. Главный вектор и главный момент системы линейных и угловых скоростей.
22. Инварианты изменения центра приведения системы векторов. Центральная ось системы. Винты и бикватернионы Клиффорда.
23. Матрицы и бикватернионы, используемые для описания произвольного пространственного движения.
24. Принцип перенесения Котельникова-Штуди. Дуальный аналог формулы Родрига.
25. Бикватернионные формулы винтового перемещения в пространстве.

26. Матричные 4×4 преобразования однородных координат. Бикватернионные формулы преобразования координат и сложения конечных перемещений.
27. Сложение конечных перемещений, заданных матрицами 4×4 преобразования однородных координат. Дуальные (в том числе бикватернионные) дифференциальные кинематические уравнения и их свойства.
28. Основные определения и аксиомы статики. Понятия о связях и их реакциях.
29. Трение и связи с трением (скольжения, качения). Равнодействующая системы сходящихся сил.
30. Сложение двух параллельных сил.
31. Момент силы относительно точки и оси. Пара сил, свойства пары сил.
32. Центр параллельных сил и центр тяжести. Методы определения центра тяжести. Центры тяжести некоторых однородных тел (дуга окружности, треугольник, пирамида, сферический сегмент, шаровой сектор, конус).
33. Главный вектор и главный момент системы.
34. Инварианты изменения центра приведения. Динама, динамическая ось.
35. Частные случаи приведения системы сил. Условия равновесия системы сил (произвольной, плоской, системы параллельных сил).
36. Предмет динамики. Инерциальные системы отсчета, принцип относительности Галилея. Законы (аксиомы) Ньютона.
37. Дифференциальные уравнения движения материальной точки (векторная форма, в декартовых координатах, естественная форма).
38. Две основные задачи динамики точки. Понятие о первых интегралах.
39. Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения точки. Интеграл площадей. Работа силы, мощность.
40. Теорема об изменении кинетической энергии. Силовые поля, потенциальная энергия. Интеграл энергии. Примеры потенциальных силовых полей.
41. Частные случаи интегрирования уравнения прямолинейного движения точки.
42. Прямолинейные линейные колебания точки.
43. Свободные гармонические колебания.
44. Свободные колебания при наличии трения скольжения. Колебания в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости (затухающие и аperiodические движения). Вынужденные колебания в среде без сопротивления, резонанс.
45. Вынужденные колебания в среде с сопротивлением, резонанс.
46. Движение точки в однородном поле сил тяжести. Парабола "безопасности".
47. Движение точки в центральном силовом поле. Формула Бинэ.
48. Движение небесных тел (законы Кеплера, закон всемирного тяготения).
49. Движение точки в ньютоновом поле тяготения (траектория движения, закон движения по орбите, уравнение Кеплера).
50. Задача двух тел, поправка к третьему закону Кеплера.
51. Регуляризация уравнений возмущенной задачи двух тел.

52. Спинорная регуляризация Кустаанхеймо-Штифеля; регуляризующие преобразования, регулярные уравнения в переменных Кустаанхеймо-Штифеля, их свойства.
53. Кватернионная регуляризация: кватернионное задание орбитального движения, геометрическая интерпретация регуляризующего преобразования Кустаанхеймо-Штифеля, определение KS - переменных через декартовы координаты и их первые производные.
54. Кватернионные регулярные уравнения и их свойства.
55. Движение точки по заданной кривой.
56. Движение точки по заданной поверхности.
57. Уравнения движения точки по гладкой поверхности в декартовых и естественных координатах.
58. Теорема об изменении кинетической энергии. Принцип Даламбера. Явление невесомости.
59. Дифференциальные уравнения относительного движения точки, переносная и кориолисова силы инерции. Условия относительного покоя. Теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении.
60. Определение основных динамических величин (количества движения, кинетического момента, кинетической энергии), их свойства.
61. Осевые моменты инерции простейших тел (тонкое кольцо, диск, стержень).
62. Теорема об изменении количества движения (импульса), ее первые интегралы.
63. Теорема о движении центра масс.
64. Теорема об изменении кинетического момента (для абсолютного и относительного движения), первые интегралы.
65. Дифференциальные уравнение тела около неподвижной оси.
66. Теорема об изменении кинетической энергии системы (для абсолютного и относительного движения). Консервативная система.
67. Классификация связей. Возможные и виртуальные перемещения системы. Число степеней свободы системы.
68. Идеальные связи, примеры. Общее уравнение динамики, принцип виртуальных перемещений.
69. Уравнения Лагранжа I-го рода для неголономной системы. Обобщенные координаты. Обобщенные силы. Условия равновесия в обобщенных координатах.
70. Уравнения Лагранжа 2-го рода для голономной системы. Выражение кинетической энергии через обобщенные скорости. Исследование уравнений Лагранжа 2-го рода, их приведенная форма.
71. Определение реакций связей. Уравнения Лагранжа 2-го рода с функцией Лагранжа. Обобщенный и физический интегралы энергии.
72. Потенциальные и обобщенно-потенциальные силы, лагранжева система.
73. Гироскопические и диссипативные силы. Функция Релея. Циклические координаты и интегралы.

74. Канонические уравнения Гамильтона и их первые интегралы. "Скобки" Пуассона, их свойства.
75. Метод Пуассона получения первого интеграла канонической системы Гамильтона.
76. Уравнения Рауса. Метод Рауса "игнорирования" координат.
77. Уравнение Гамильтона-Якоби. Метод Гамильтона-Якоби интегрирования уравнений Гамильтона.
78. Энергия ускорений и ее свойства. Уравнения Чаплыгина.
79. Моменты инерции, их свойства. Теорема Гюйгенса-Штейнера.
80. Моменты инерции для осей пучка. Тензор инерции.
81. Эллипсоид инерции. Свойства главных осей инерции (теоремы).
82. Уравнение движения тела. Определение реакций. Условия отсутствия динамических реакций при вращении тела. Физический маятник. Приведенная длина, центр качания.
83. Углы Эйлера. Кинематические уравнения Эйлера. Выражения основных динамических величин тела с неподвижной точкой.
84. Динамические уравнения Эйлера. Определение реакции в неподвижной точке.
85. Уравнения движения тяжелого тела с неподвижной точкой, их первые интегралы. Случаи нахождения последнего алгебраического интеграла (Эйлера-Пуансо, Лагранжа-Пуассона, Ковалевской).
86. Случай Эйлера-Пуансо (движение по инерции). Понятие об эллиптических функциях Якоби. Определение закона вращения тела. Регулярная прецессия.
87. Понятие о геометрическом представлении движения тела (по Пуансо). Случай Лагранжа-Пуассона. Траектория апекса на сфере.
88. Условие регулярной прецессии, псевдoreгулярная прецессия при быстром собственном вращении тела.
89. Элементарная теория гироскопа. Свойства гироскопов. Некоторые технические применения.
90. Уравнения Мещерского для поступательного движения тела. Задачи Циолковского. Вертикальное движение 2-х ступенчатой ракеты в однородном поле тяжести. Основы космонавтики.
91. Коэффициент восстановления. Типы ударов. Основные теоремы для удара. Общее уравнение динамики.
92. Уравнения Лагранжа 2-го рода для удара. Действие удара на тело с неподвижной осью. Центр удара, баллистический маятник.
93. Теорема Дирихле-Лагранжа об устойчивом положении равновесия.
94. Уравнения малых линейных колебаний и характеристическое уравнение. Исследование корней характеристического уравнения. Случай кратных корней при отсутствии сопротивления. Главные (нормальные) координаты системы.
95. Теорема Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы.

96. Теорема об асимптотической устойчивости положения равновесия определенно-диссипативной системы.
97. Второй метод Ляпунова. Функции Ляпунова I-го рода.
98. Теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости движения в стационарном случае. Функции Ляпунова 2-го рода.
99. Теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению. Условная устойчивость. Теорема Рауса об устойчивости стационарного движения.
100. Принцип виртуальных перемещений. Принцип Даламбера.
101. Принцип Гаусса (принцип наименьшего принуждения). Вывод уравнений движения механической системы из принципа Гаусса.
102. Принцип прямейшего пути Герца, бессиловая механика Герца.
103. Принцип стационарного действия Гамильтона.
104. Принцип стационарного действия Мопертюи-Лагранжа.
105. Принцип Якоби, принцип наименьшего действия.
106. Вывод канонических уравнений движения из принципа Гамильтона.
107. Канонические преобразования: точечные преобразования Лагранжа, контактные преобразования, канонические преобразования общего типа.

Литература

1. Бухгольц Н.Н. Основы курс теоретической механики (часть первая). М.: Наука, 1972. – 468 с.
2. Бухгольц Н.Н. Основы курс теоретической механики (часть вторая). М.: Наука, 1972. – 332 с.
3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В 2-х т. СПб.: Лань, 2004. – 729 с.
4. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. СПб: Лань, 2003. – 304 с.
5. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. – 320 с.
6. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения: Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. – 512 с.
7. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения: Геометрия движения. Учебное пособие. Саратов: СГУ, 2006. – 236 с.

Раздел 6. МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

6.1. Механика и термодинамика сплошной среды

Теория деформаций

Понятие сплошной среды. Кинематика сплошной среды в переменных Эйлера и Лагранжа. Переход от координат Эйлера к координатам Лагранжа и обратно. Деформация сплошной среды. Тензоры деформации Коши-Грина и Альманси, геометрический смысл компонент тензора деформаций. Малые деформации и малые вращения среды. Инварианты тензора деформаций. Условия совместности деформаций.

Теория напряжений

Типы сил в механике сплошной среды: внешние и внутренние силы, массовые и поверхностные силы. Теория напряженного состояния, тензоры напряжений Коши и Пиолы-Кирхгофа. Инварианты тензора напряжений.

Законы сохранения

Интегральная и дифференциальная форма законов сохранения массы, импульса, момента импульса и энергии.

Термодинамика сплошной среды

Работа, количество тепла, внутренняя энергия, температура и энтропия термодинамической системы. Первый и второй законы термодинамики.

6.2. Теория упругости

Связь между напряженным и деформированным состояниями

Упругая деформация твердых тел. Упругий потенциал и энергия деформации. Линейно упругое тело Гука. Понятие об анизотропии упругого тела. Закон Гука для изотропного и анизотропного тела. Тензор упругих постоянных. Упругие модули изотропного тела, их механический смысл.

Основные уравнения и задачи теории упругости

Уравнения Ламе в перемещениях. Уравнения Бельтрами-Митчелла в напряжениях. Постановка краевых задач математической теории упругости. Теорема существования и единственности решения. Принцип Сен-Венана. Общие теоремы теории упругости. Простейшие задачи теории упругости.

Плоская задача теории упругости

Плоская деформация. Плоское напряженное состояние. Обобщенное плоское напряженное состояние. Функция напряжений Эри. Плоская задача в прямоугольных координатах. Плоская задача в полярных координатах.

Теория тонких упругих пластин и оболочек

Основные гипотезы. Деформация срединной поверхности. Внутренние усилия и моменты. Граничные условия. Постановка задач теории пластин и оболочек. Безмоментная теория.

Теория распространение волн в упругой среде

Типы упругих волн в неограниченной изотропной среде. Поверхностные волны Рэлея. Волны Лява.

6.3. Асимптотические методы

Асимптотические ряды. Асимптотические разложения и последовательности. Сравнение сходящихся и асимптотических рядов. Простейшие действия над асимптотическими разложениями. Асимптотические оценки интегралов. Метод Лапласа. Метод стационарной фазы. Метод перевала.

6.4. Теория пластичности

Упруго-пластическое состояние в точке тела. Условия пластичности Мизеса и Треска-Сен-Венана. Упрочняющийся упруго-пластический материал. Теория малых упруго-пластических деформаций: определение процесса простого нагружения, основные теоремы, постановка краевой задачи, метод упругих решений.

6.5. Теория линейной вязкоупругости

Понятие о ползучести материала и релаксации напряжений. Кривые ползучести и релаксации. Простейшие модели линейно вязкоупругих сред: модели Максвелла, Фойхта (Кельвина), стандартного вязкоупругого тела. Дифференциальная форма определяющих соотношений теории вязкоупругости. Время релаксации. Интегральная форма определяющих соотношений теории вязкоупругости. Ядра ползучести и релаксации. Постановка краевых задач в линейной теории вязкоупругости.

6.6. Численные методы решения задач механики деформируемого твердого тела

Метод конечных разностей. Типичные разностные схемы для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений. Метод конечных элементов. Понятие о вычислительном эксперименте. Использование вычислительного эксперимента для решения задач механики деформируемого твердого тела.

Литература

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. В 2-х томах. Санкт-Петербург: Изд-во «Лань», 2004.
2. Селиванов В.В. Прикладная механика сплошных сред. В 3 томах. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М., 1988.
4. Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высш. шк., 1979.

5. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности. М.: Физматлит, 2002.
6. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судостроение, 1962.
7. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред: Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001.
8. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред: Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. М.: Физматлит, 2002.
9. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
10. Бренд Д.Р. Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965.
11. Товстик П.Е., Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Филиппов С.Б. Асимптотические методы в механике тонкостенных конструкций. СПб.: СПбГУ. 1995
12. Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. Асимптотические методы в механике твердого тела. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007.
13. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004.
14. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
15. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.
16. Угодников А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Изд. Казанского университета, 1986.
17. Бураго Н.Г. Вычислительная механика. М.: Изд-во МГТУ им Н. Э. Баумана, 2007.

Раздел 7. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ

Механика жидкости и газа

Основные уравнения динамики в интегральной и дифференциальной формах: неразрывности, количества движения, момента количества движения, энергии. ([4], гл. 111, V; [5], гл. I.)

Элементы термодинамики. Параметры состояния, первое начало термодинамики, внутренняя энергия, обратимые и необратимые процессы, совершенный газ, теплоемкости. Термодинамические процессы. Теплопроводность. Второе начало термодинамики. ([4], гл.V; [5], гл.I.)

Модели идеальной несжимаемой и сжимаемой жидкостей. Уравнения Эйлера. ([4], гл.IV, V.) Интегралы Коши-Лагранжа, Бернулли.([5], гл. II.)

Модель вязкой жидкости. Закон Навье-Стокса. [4], гл. IV. Уравнения Навье-Стокса. Критерии подобия. ([5], гл.V.)

Одномерные неустановившиеся движения. Уравнения в характеристической форме. Инварианты Римана. Метод характеристик. Простые волны. Задача о поршне, образование разрыва. ([6], гл. II.)

Установившиеся двумерные движения. Основные уравнения и граничные условия. ([6], гл. III, п.1,2.) Сверхзвуковые течения. Метод характеристик. ([6], гл. II, п.7,8,9; [5], гл. II, п.8.) Обтекание криволинейной стенки. Течение разрежения. ([5] гл. III, п.4.) Образование разрывов. ([6], гл. III, п.10,11,12.)

Ударные волны. Прямой и косой скачок уплотнения. Условие на скачке в плоскости годографа (ударная поляра). Отражение ударной волны от твердой или свободной границы. Сверхзвуковое обтекание клина и профиля. Пересечение скачков уплотнения. ([5], гл. III, п.1,3; [6], гл. III, п.13,14,15.)

Вычислительные методы, информатика и программирование

Численные методы алгебры. Итерационные методы решения систем линейных уравнений. Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона. ([7], гл. VI, VII.)

Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы Рунге-Кутты, Адамса. ([7], гл. VIII; [8], гл.6.)

Принципы построения разностных схем газовой динамики. Понятие консервативности, однородности. Искусственная вязкость. Сравнение расчетов по неконсервативным и консервативным схемам. ([9], гл. II.)

Устойчивость разностных схем. Корректность и устойчивость. Исследование устойчивости на примере линейного уравнения переноса. Метод гармоник. Критерий Куранта. Влияние вязкости на устойчивость разностных схем. ([9], гл. III 111, п.1,2,5.)

Архитектура современных ЭВМ. Понятие сетей ЭВМ. Концепции развития архитектуры ЭВМ. ([10]).

Принципы построения и функционирования операционных систем. ([10].)

Структура процедурных языков программирования. Иерархия конструкции языков. Типы данных в языке Паскаль: массивный, комбинированный, множественный, файловый. ([10], [11]).

Модульное программирование. Виды программных единиц. Формальные и фактические параметры процедур. Локальные и глобальные переменные. Рекурсивные процедуры. ([10], [11]).

Принципы структурного программирования. Композиция, выбор, цикл. Предусловия, постусловия, инварианты циклов. Информационные структуры, стеки, очереди, деки, деревья. Динамические структуры данных. ([10], [11]).

Литература

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. I. II. М.: Физматгиз. 1972.
2. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М. Наука. 1996.
3. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М. Наука. 1971.
4. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Т. I. М. Наука. 1983.

5. Гинзбург И.П. Аэрогазодинамика. М. Высшая школа. 1966.
6. Черный Г.Г. Газовая динамика. М. Наука. 1988.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы. М. Наука. 1973.
8. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.ФМЛ. 1975.
9. Самарский А.А., Попов И.П. Разностные схемы газовой динамики. М.ФМЛ. 1980.
10. М-Бройль. Информатика. Ч. I-IV. Изд.-во "Диалог", МИФИ. 1996.
11. Н. Вирт. Алгоритмы и структуры данных. М. Мир. 1989.

Раздел 8. БИОМЕХАНИКА

8.1. Механика и термодинамика сплошной среды

Теория деформаций

Понятие сплошной среды. Кинематика сплошной среды в переменных Эйлера и Лагранжа. Переход от координат Эйлера к координатам Лагранжа и обратно. Деформация сплошной среды. Тензоры деформации Коши-Грина и Альманси, геометрический смысл компонент тензора деформаций. Малые деформации и малые вращения среды. Инварианты тензора деформаций. Условия совместности деформаций.

Теория напряжений

Типы сил в механике сплошной среды: внешние и внутренние силы, массовые и поверхностные силы. Теория напряженного состояния, тензоры напряжений Коши и Пиолы-Кирхгофа. Инварианты тензора напряжений.

Законы сохранения

Интегральная и дифференциальная форма законов сохранения массы, импульса, момента импульса и энергии.

Термодинамика сплошной среды

Работа, количество тепла, внутренняя энергия, температура и энтропия термодинамической системы. Первый и второй законы термодинамики.

8.2. Теория упругости

Связь между напряженным и деформированным состояниями

Упругая деформация твердых тел. Упругий потенциал и энергия деформации. Линейно упругое тело Гука. Понятие об анизотропии упругого тела. Закон Гука для изотропного и анизотропного тела. Тензор упругих постоянных. Упругие модули изотропного тела, их механический смысл.

Основные уравнения и задачи теории упругости

Уравнения Ламе в перемещениях. Уравнения Бельтрами-Митчелла в напряжениях. Постановка краевых задач математической теории упругости. Теорема существования и единственности решения. Принцип Сен-Венана. Общие теоремы теории упругости. Простейшие задачи теории упругости.

Плоская задача теории упругости

Плоская деформация. Плоское напряженное состояние. Обобщенное плоское напряженное состояние. Функция напряжений Эри. Плоская задача в прямоугольных координатах. Плоская задача в полярных координатах.

Теория тонких упругих пластин и оболочек

Основные гипотезы. Деформация срединной поверхности. Внутренние усилия и моменты. Граничные условия. Постановка задач теории пластин и оболочек. Безмоментная теория.

8.3. Теория линейной вязкоупругости

Понятие о ползучести материала и релаксации напряжений. Кривые ползучести и релаксации. Простейшие модели линейно вязкоупругих сред: модели Максвелла, Фойхта (Кельвина), стандартного вязкоупругого тела. Дифференциальная форма определяющих соотношений теории вязкоупругости. Время релаксации. Интегральная форма определяющих соотношений теории вязкоупругости. Ядра ползучести и релаксации. Постановка краевых задач в линейной теории вязкоупругости.

8.4. Численные методы решения задач механики сплошной среды

Метод конечных разностей. Типичные разностные схемы для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений. Метод конечных элементов. Понятие о вычислительном эксперименте. Использование вычислительного эксперимента для решения задач механики деформируемого твердого тела.

8.5. Биомеханические системы

Сердечно-сосудистая система

Строение и общая физиология сердца. Механическая работа сердца. Функции сосудистой системы. Свойства стенок сосудов. Функциональная организация сосудистой системы. Артериальный отдел большого круга кровообращения. Венозный отдел большого круга кровообращения. Микроциркуляция. Лимфатическая система. Регуляция кровообращения. Легочное кровообращение. Кровообращение в отдельных органах и его регуляция. Измерение давления, кровотока и объемов крови в сердечно-сосудистой системе. Кровь. Реологические свойства крови. Течение крови в сосудах и напряжение сдвига на стенке. Пульсовая волна.

Дыхательная система. Строение структур и органов дыхательных путей. Общая характеристика механических явлений в дыхательных органах человека.

Опорно-двигательная система. Строение опорно-двигательного аппарата. Механические функции элементов опорно-двигательного аппарата.

Сенсорные системы. Общая характеристика глаза. Строение и функции органов слуха и равновесия.

Пищеварительная и выделительная системы. Строение и функции пищеварительной системы. Перистальтический механизм. Мочевыделительная система.

8.6. Экспериментальные методы исследования биомеханических систем

Методы исследования физико-механических свойств биологических тканей и жидкостей. Методы исследования структуры и химического состава биологических тканей и органов человека. Методы визуализации для исследования механических явлений, происходящих в тканях, органах и системах человека. Методы исследования движений человека.

Литература

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. В 2-х томах. Санкт-Петербург: Изд-во Лань, 2004.
2. Селиванов В.В. Прикладная механика сплошных сред. В 3 томах. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М., 1988.
4. Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высш. шк., 1979.
5. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судостроение, 1962.
6. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
7. Бренд Д.Р. Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965.
8. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
10. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.
11. Стренг Г., Фикс Дж. Теория конечных элементов. М.: Мир, 1977.
12. Угодников А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Изд. Казанского университета, 1986.
13. Бураго Н.Г. Вычислительная механика. М.: Изд-во МГТУ им Н. Э. Баумана, 2007.
14. Самусев Р.П., Селин Ю. М. Анатомия человека: учеб. М.: Медицина. 1995.
15. Физиология человека: учебник под ред. В. М. Покровского, Г. Ф. Коротько. М.: Медицина, 2007.
16. Герман И. Физика организма человека. Изд-во Интеллект, 2011.
17. Бегун П.И., Шукейло Ю.А. Биомеханика. Спб.: Политехника, 2000.
18. Пурия Б.А., Касьянов В.А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов.
19. Бранков Г. Основы биомеханики. М.: Мир, 1981. Рига: Зинатне, 1980.
20. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. М.: Мир, 1981.
21. Регирер С.А. Лекции по биологической механике. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1980.

22. Сковорода А.Р. Задачи теории упругости в проблеме диагностики патологий мягких биологических тканей. Издательство: Физматлит, 2006.

Авторы программы:

Ю.П. Гуляев, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики (раздел 8);

С.И. Дудов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической экономики (раздел 4);

В.В. Кузнецов, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной алгебры и теории чисел (раздел 3);

П.Ф. Недорезов, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики (раздел 6);

В.В. Розен, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой геометрии (разделы 2, 4);

А.П. Хромов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики (раздел 1);

Ю.Н. Челноков, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры компьютерного и математического моделирования (раздел 5);

Г.П. Шиндяпин, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры компьютерного и математического моделирования (раздел 7).