Лекция 4

Основные понятия теории нейронных сетей

Для описания нейронных сетей в нейроинформатике выработана специальная "схемотехника", в которой элементарные устройства – это простые функциональные элементы (сумматоры, синапсы, нейроны и т.п.), которые объединяются в вычислительные сети, предназначенные для решения задач. Поэтому естественным для описания процессов в нейроподобных системах является язык функциональных схем или язык системного анализа.

В аппаратной реализации нейронных сетей, в профессиональном программном обеспечении, а также в математических моделях, описывающих нейросети, все эти элементы присутствуют необязательно как отдельные блоки. Используемая в нейроинформатике идеальная схемотехника представляет собой особый язык для представления нейронных сетей. При программной и аппаратной реализации выполненные на этом языке описания переводятся на языки другого уровня, более пригодные для реализации. Традиционно используемым для описания нейронных сетей математическим языком является аппарат векторной и матричной алгебры.

Основными функциональными элементами традиционно считаются: *синапс, адаптивный сумматор, активатор, точка ветвления.* Из этих простых элементов строятся более сложные – *формальные нейроны*.

Определение 4.1. *Линейная связь (синапс)* – элемент, умножающий входной сигнал x на «вес синапса» α (см. рис. 4.2).

$$x \xrightarrow{a} ax$$

Рисунок 4.1. Синапс.

Адаптивный сумматор – элемент, вычисляющий скалярное произведение входного сигнала x на вектор параметров a . Адаптивным называем его из-за наличия вектора настраиваемых параметров a . Очевидно, что синапсы являются элементами структуры адаптивного сумматора (см. рис. 4.3).

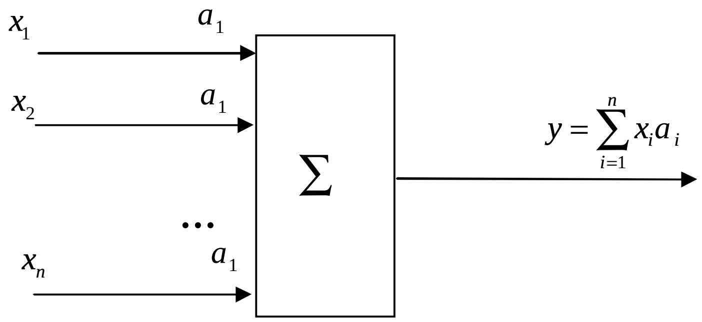

Рисунок 4.2 Адаптивный сумматор

Нелинейный преобразователь сигнала (функция активации нейрона, активатор) – элемент, получающий скалярный входной сигнал x и переводящий его в $j(x)$ (см. рис. 4.4).

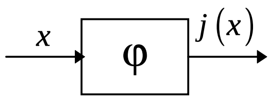

Рисунок 4.3. Нелинейный преобразователь сигнала.

Точка ветвления - получает скалярный входной сигнал x и передает его всем своим выходам. Такие выходы называют *аксонами* (см. рис. 4.5).

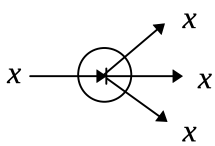

Рисунок 4.4. Точка ветвления.

Преобразователь Паде – получает два скалярных сигнала x_1 и x_2 и выдает произведение $x_1 * x_2$.

Стандартный формальный нейрон – элемент, составленный из входного сумматора, нелинейного преобразователя и точки ветвления на выходе (см. рис.).

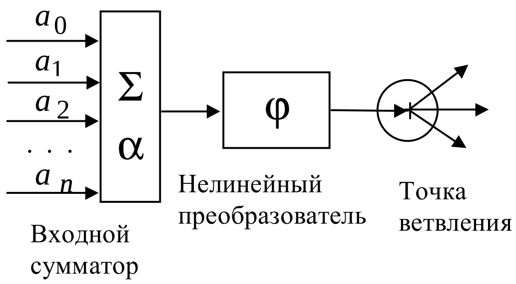

Рисунок 4.5. Формальный нейрон стандартного вида.

Определим математическую модель формального нейрона.

Под формальным нейроном будем понимать объект следующего вида

$$F = (X, Y, S, g), \tag{4.1}$$

где $S = \{\overline{s}\} \subseteq R^{N_S}$ - множество состояний, $X = \{\overline{x}\} \subseteq R^{N_X} \cup \{e\}$ - множество входных сигналов, $Y = \{\overline{y}\} \subseteq R^{N_Y} \cup \{e\}$ - множество выходных сигналов, $g : S \times X \to Y$ - функция преобразования $\overline{y} := g(\overline{s}, \overline{x})$. Как правило, функция g определяется следующими формулами

$$y = j\,(z), \tag{4.2}$$

$$z = \sum_{i=1}^{N_X} x_i s_i \tag{4.3}$$

где

$N_X = N_S$ - число входов нейрона;

s_i - вес синапса ($i = 1,...,n$);

x_i - компонента вектора входного сигнала ($i = 1,...,n$);

z - результат суммирования;

$j\,(z)$ - нелинейное преобразование;

y - выходной сигнал нейрона.

Связь двух нейронов

Определим связи между двумя нейронами. Два формальных нейрона $F^1 = (S^1, X^1, Y^1, g^1)$ и $F^2 = (S^2, X^2, Y^2, g^2)$ можно соединить следующим образом. Пусть i - номер компоненты выходного вектора $\overline{y}^1(t) \in Y^1$, а j - номер компоненты входного вектора $\overline{x}^2(t) \in X^2$, где $t \in \mathrm{N}$. Будем говорить, что i-я компонента выхода функционального элемента F^1 соединена с j-й компонентой входа функционального элемента F^2, если

$$\overline{x}_j^2(t) := \overline{y}_i^1(t). \qquad (4.4)$$

Теперь предположим что у нас множество состоящее из m нейронов - $E = \{F^i\}_{i=1}^m$. Связь между двумя любыми нейронами этого множества можно задать при помощи специальной матрицы. Пусть два нейрона $F^i = (X^i, Y^i, S^i, g^i)$ и $F^j = (X^j, Y^j, S^j, g^j)$, $1 \le i, j \le m$, связаны между собой каким либо образом. Пусть также размерности множеств равны $\dim X^i = N_X^i, \dim Y^i = N_Y^i, \dim S^i = N_S^i$ и $\dim X^j = N_X^j, \dim Y^j = N_Y^j, \dim S^j = N_S^j$ соответственно. Введём квадратную матрицу M_{ij} размерности $p_{ij} \times p_{ij}$, где $p_{ij} = \max(N_X^i, N_Y^j)$. Элементы этой матрицы M_{ij}^{kl} будут равны 1 только для тех k, l, для которых k-й выход i-го элемента равен l-му входу j-го элемента. В остальных случаях элементы матрицы равны нулю.

Это определение, а также некоторые другие понятия, приведённые дальше, соответствуют определениям аналогичных понятий в системном анализе[41]. Такое определение связи удобно использовать, так как поступление выходного вектора одного элемента на вход другого элемента можно записать с помощью равенства.

Для двух не связанных между собой элементов матрица $M_{ij} = 0$. Теперь можно рассмотреть матрицу M, элементами которой являются матрицы M_{ij}:

$$M = \left\| M_{ij} \right\|,\ i, j = \overline{1, m}. \qquad (4.5)$$

Такая матрица задаёт связи для всех элементов множества E. Мы будем называть эту матрицу *матрицей внутренних связей множества* E. Если не все матрицы M_{ij} являются матрицами одного порядка, они дополняются нулями справа и снизу там, где это нужно. Это соответствует добавлению «фиктивных» входов и выходов функциональным элементам множества E.

Для всех нейронов множества E мы можем рассматривать общий входной вектор $\overline{x} \in X^1 \times X^2 \times \ldots \times X^m$, общий вектор состояния $\overline{s} \in S^1 \times S^2 \times \ldots \times S^m$ и общий вектор выходов $\overline{y} \in Y^1 \times Y^2 \times \ldots \times Y^m$.

Теперь можно ввести понятие нейронной сети, как структуры, состоящей из простых элементов связанных между собой.

Определение 4.2. *Нейронная сеть (нейросеть)* – структура, состоящая из связанных между собой нейронов, определяемая следующим образом

$$N = (E, G, M, H, \overline{x}_0, \overline{s}_0, T), \qquad (4.6)$$

где

$E=\{F^i\}_{i=1}^m$ - множество формальных нейронов;

$G(\bar{s},\bar{x})=(g^1(\bar{s}^1,\bar{x}^1),g^2(\bar{s}^2,\bar{x}^2),...,g^m(\bar{s}^m,\bar{x}^m))$ - вектор-функция сети определяющая общий выходной вектор по общему входному вектору и вектору состояния;

M – матрица внутренних связей множества E;

$H:(\bar{s},\bar{x})\mapsto\bar{s}'$ - некоторая функция, позволяющая изменять вектор состояния сети;

$\bar{x}_0,\bar{s}_0$ - начальные значения общего входного вектора и вектора состояния;

T - некоторый критерий останова функционирования нейронной сети (в простейшем случае – число тактов).

Большинство современных работ посвящено нейронным сетям, функционирующим в дискретном времени. Мы в дальнейшем будем иметь ввиду именно такие нейронные сети.

Пример 1. Рассмотрим НС состоящую из трёх нейронов. Матрицу связей определим следующим образом

$$M=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}. \qquad (4.7)$$

Эта НС изображёна на рисунке 4.5 и имеет некоторую схожесть с изображением графа. Отличие в том, что некоторые дуги остаются как бы «повисшими в воздухе», т. е. не имеют вершинного окончания.

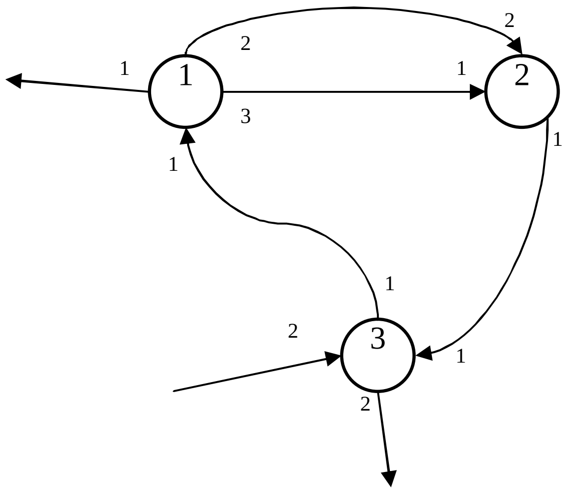

Рисунок 4.6. Здесь входы и выходы пронумерованы своими номерами внутри каждого функционального элемента.

Модель функционирования нейронной сети.

Функционирование нейронной сети происходит следующим образом:

- в момент времени $t=0$, входной сигнал поступает на входные нейроны сети;
- в момент времени $t=1$, сигнал, преобразованный входными нейронами, через связи (аксонов) передается на другие нейроны в соответствии со структурой связей и так далее;
- в некоторый момент $t=k$, сигнал поступает на выходные нейроны сети.

Результатом работы сети является сигнал, поступивший на выходные аксоны в момент $t=T$.

Опишем теперь в операторной форме записи модель функционирования нейронной сети.

Пусть $\bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\ldots,\bar{x}^m)$ - общий вектор, компонентами которого являются входные вектора, $\bar{y}=(\bar{y}^1,\bar{y}^2,\ldots,\bar{y}^m)$ - общий вектор, компоненты которого – выходные вектора, а $\bar{s}=(\bar{s}^1,\bar{s}^2,\ldots,\bar{s}^m)$ - вектор, компоненты которого – вектора состояний функциональных элементов нейронной сети (4.6). Определим функциональные матрицы W и U следующим образом:

$$W=\begin{pmatrix} g^1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & g^3 & \vdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & g^m \end{pmatrix}, \qquad (4.8)$$

$$U = \begin{pmatrix} h^1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & h^2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & h^3 & \vdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & h^m \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Тогда формулы функционирования сети (4.6) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\overline{x}(0) = \overline{x}_0,\ \overline{s}(0) = \overline{s}_0, \\ &\overline{y}(t+1) = (\overline{s}(t), \overline{x}(t)) \circ W, \\ &\overline{s}(t+1) = (\overline{s}(t), \overline{x}(t)) \circ U, \\ &\overline{x}(t+1) = \overline{y}(t+1) \cdot M, \\ &t = \overline{0, T-1}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Или, в сокращённом виде

$$\begin{aligned} &\overline{y}(0) = \overline{x}_0,\ \overline{s}(0) = \overline{s}_0, \\ &\overline{y}(t+1) = (\overline{s}(t), \overline{y}(t) \cdot M) \circ W, \\ &\overline{s}(t+1) = (\overline{s}(t), \overline{x}(t)) \circ U, \\ &t = \overline{0, T-1}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Знак "$\circ$" в этих формулах означает применение оператора стоящего справа от знака к вектору, стоящему слева от знака.

На практике часто возникает потребность отделить нейроны, синапсы которых являются входными для нейросети, от нейронов, синапсы которых связаны с аксонами этой нейросети.

Определение 4.3. Нейроны, часть синапсов которых являются входными, будем называть *входными нейронами сети*. Нейроны, аксон которых является выходным, будем называть *выходным нейроном сети*.

Из определения видно, что нейронная сеть вычисляет линейные функции, нелинейные функции одного переменного, а также всевозможные суперпозиции – функции от функций, получаемые при каскадном соединении сетей. Из этого, а также из теоремы 3.2 следует следующее утверждение.

Утверждение 4.1. С помощью нейронной сети можно задать любую непрерывную функцию, с любой, заданной точностью.

Это утверждение позволяет надеяться, что для любой задачи, в основе решения которой лежит построение некоторой непрерывной функции, мы можем построить нейронную сеть, реализующую искомую функцию, и, следовательно, являющуюся решением задачи.

Лемма 4.1. Класс функций, вычислимый с помощью нейронных сетей, замкнут относительно линейных операций.

Доказательство. Действительно, пусть есть нейронные сети $S_1, S_2, \mathbf{K}, S_k$, которые вычисляют функции $F_1, F_2, \mathbf{K}, F_k$ от вектора входных сигналов x. Линейная комбинация $a_0 + a_1 F_1 + a_2 F_2 + \mathbf{K} + a_k F_k$ вычисляется сумматором (рис. 4.3) с весами $a_0, a_1, \mathbf{K} a_k$, на вход которого подаются выходные сигналы сетей $S_1, S_2, \mathbf{K}, S_k$. Разница в числе тактов функционирования этих сетей до получения ответа легко компенсируется «линиями задержки», составленными из связей (рис. 4.2) с единичным весом. Лемма доказана.

Лемма 4.2. Класс функций, вычислимый с помощью нейронных сетей, замкнут относительно унарной операции, осуществляемой нелинейным преобразователем сигнала, входящим в состав нейрона (см. рис. 4.4, 4.6).

Доказательство. Если сеть S вычисляет функцию F, то, подавая выход этой сети на вход нелинейного преобразователя (рис. 4.4), получим на его выходе функцию $j(F)$. Лемма доказана.

Таким образом, из теоремы 3.2, а также из лемм 4.1–4.2, следует теорема:

Теорема 4.1. Множество функций, вычислимых нейронными сетями с заданной непрерывной нелинейной функцией активации, плотно в пространстве непрерывных функций от входных сигналов.

Классификация нейронных сетей

Можно классифицировать нейронные сети по разным свойствам: по функциям активации нейронов, по архитектуре, по функциональным возможностям, по способу их обучения и т. д. Традиционными являются следующие способы классификации – по архитектуре, т. е. по характеру связей элементов нейросети, и по функции активации нейронов. Нейронные сети могут иметь различные архитектуры. Однако можно выделить два основных типа нейронных сетей: *слоистая нейросеть* и *полносвязная нейросеть*.

Определение 4.4. *Слоистая сеть* – нейронная сеть, структура которой определяется следующим образом:

1) нейроны расположены в несколько слоев,

2) нейроны первого слоя являются входными нейронами сети,

3) аксоны нейронов i-го слоя связаны с некоторыми синапсами нейронов $(i+1)$-го слоя,

4) нейроны последнего слоя – выходные нейроны сети.

Очевидно, что матрица связей такой сети выглядит как псевдодиагональная двоичная матрица:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & {}_{12}M & 0 & \mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}_{23}M & \mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 & 0 \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{O} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}_{T-1T}M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

в которой ${}_{ij}M$ - матрицы связей нейронов i-го слоя с нейронами j-го.

Таким образом, в этой матрице ненулевыми являются только элементы, расположенные непосредственно над элементами главной диагонали. Такую многослойную нейронную сеть принято называть многослойным персептроном.

Если не оговорено противное, то каждый выходной сигнал i-го слоя подается на вход всех нейронов $(i+1)$-го. Число нейронов в каждом слое может быть любым и никак заранее не связано с количеством нейронов в других слоях. Стандартный способ подачи входных сигналов: все нейроны первого слоя получают каждый входной сигнал.

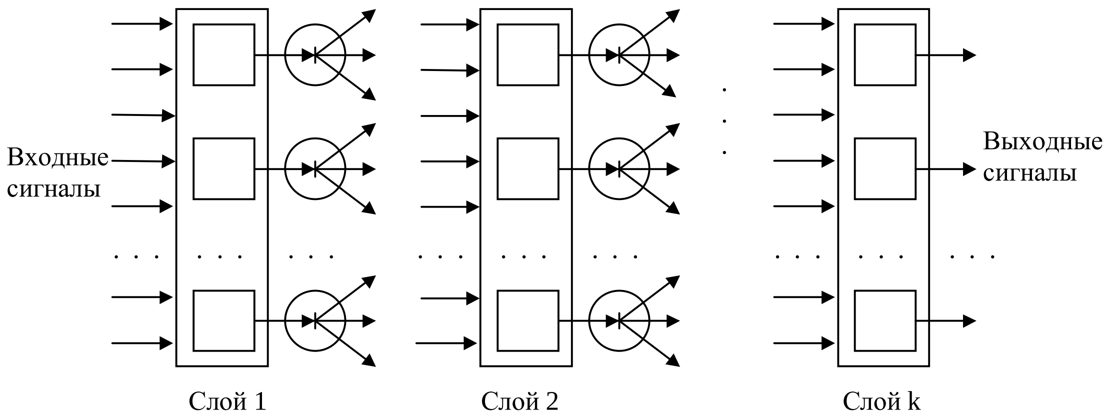

Рисунок 4.7. Слоистая сеть.

Определение 4.5. *Полносвязная сеть* **–** нейронная сеть, каждый нейрон которой связан со всеми нейронами этой сети, включая самого себя. Все входные сигналы подаются всем нейронам. Выходными сигналами сети могут быть все или некоторые выходные сигналы нейронов после нескольких тактов функционирования сети.

Существенное различие между полносвязной и слоистой сетями возникает тогда, когда число тактов функционирования заранее не ограничено – слоистая сеть так работать не может.

Определение 4.6. Если функция активации нейронов j - одна и та же для всех нейронов сети, то такая сеть называется *однородной*. Если же j зависит еще от одного или нескольких параметров, значения которых меняются от нейрона к нейрону, то сеть называют *неоднородной*.

Выше были определены основные понятия нейроинформатики, используя которые можно строить практические модели формальных нейронных сетей. Однако часто необходимо иметь строгую формальную модель для математического обоснования тех или иных свойств нейронных сетей. Дополним определение 4.2

Литература

1. Митрофанов Ю. И. Системный анализ: учеб. пособие. – Саратов: Изд-во «Научная книга», 2000. 232 с.