Лекция 2

Основные теоремы нейроинформатики

В этой лекции мы рассмотрим одну из базовых в теории нейронных сетей теорем – теорему Колмогорова.

Теорема Колмогорова

Гильберт, в списке своих проблем, которые, по его мнению, должны были определять развитие математики XX века, под номером 13 поместил следующую задачу: представляется ли корень уравнения

$$x^7+ax^3+bx^2+cx+1=0$$

(как функция коэффициентов) суперпозицией каких-либо непрерывных функций двух переменных?

Оказалось полезным абстрагироваться от уравнений и поставить общий вопрос: можно ли произвольную непрерывную функцию n переменных получить с помощью операций сложения, умножения и суперпозиции из непрерывных функций двух переменных? Ответ оказался положительным. В серии работ А.Н.Колмогоров, затем В.И.Арнольд [5] и вновь А.Н.Колмогоров [1] решили эту проблему: можно получить любую непрерывную функцию n переменных с помощью операций сложения, умножения и суперпозиции из непрерывных функций *одного* переменного.

Теорема Колмогорова 2.1. При любом целом $n \geq 2$ существуют такие определенные на отрезке $E^1 = [0,1]$ непрерывные действительные функции $y^{pq}(x)$, что каждая определенная на n-мерном единичном кубе E^n непрерывная действительная функция $f(x_1,...,x_n)$ представима в виде:

$$f(x_1,...,x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} c_q \left[\sum_{p=1}^{n} y^{pq}(x_p) \right], \qquad (2.1)$$

c_q – действительны и непрерывны, а функции $y^{pq}(x_p)$ - непрерывны и не зависят от функции $f(x_1,\mathbf{K},x_n)$.

Доказательство.

1. Построение y^{pq}, где

$$1 \leq p \leq n,\ 1 \leq q \leq 2n+1,\ k = 1,2,...$$

Доказательство проведем для n=2. Для n>2 теорема доказывается аналогично. Равенство (2.1) для n=2 примет вид:

$$f\left(x_1,x_2\right)=\sum_{q=1}^{5}c_q\left[y^{\,q}\left(x_1\right)+j^{\,q}\left(x_2\right)\right]. \qquad (2.1')$$

Рассмотрим сегменты $A_{k,i}^{q}=\left[\frac{1}{18^k}\left(i-1-\frac{q}{6}\right),\frac{1}{18^k}\left(i-\frac{1}{6}-\frac{q}{6}\right)\right]$, $1\le i\le m_k=18^k+1$. Эти сегменты имеют длину $\frac{1}{18^k}\cdot\frac{5}{6}$, а при фиксированных k и q получаются один из другого при переходе от i к $i'=i+1$ с помощью сдвига вправо на расстояние $\frac{1}{18^k}$, то есть, расположены без перекрытий, с промежутками длины $\frac{1}{6\cdot18^k}$.

В соответствии с этим кубики $S_{k,i_1,i_2}^{q}=A_{k,i_1}^{q}\times A_{k,i_2}^{q}$, с ребрами длины $\frac{5}{6\cdot18^k}$ при фиксированных k и q покрывают единичный куб E^2 с точностью до щелей ширины $\frac{1}{6\cdot18^k}$.

Для дальнейшего доказательства потребуются следующие три леммы.

Лемма 2.1. Система всех кубиков S_{k,i_1,i_2}^{q} с постоянной k и переменными q и i_1,i_2 покрывают единичный куб E^2 так, что каждая точка из E^2 оказывается покрытой не менее трех раз.

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$B_{k,i}^{q}=\left[\frac{i-q-2}{18^k\cdot6},\frac{i-q-1}{18^k\cdot6}\right),\ P_{k,i_1,i_2}^{q}=B_{k,i_1}^{q}\times B_{k,i_2}^{q},\ \text{где } i_1,i_2=1,\ldots,18^k+1.$$

Очевидно, что для фиксированных q и k, сегменты P_{k,i_1,i_2}^{q} покрывают весь единичный квадрат E^2 так, что каждая точка E^2 принадлежит какому-либо сегменту P_{k,i_1,i_2}^{q} и притом только одному.

Определим характеристическую функцию d_{i_1,i_2}^{q} для сегмента P_{k,i_1,i_2}^{q}:

$$d_{i_1,i_2}^{q}=\begin{cases}0, & \text{если } (i_1-q) \text{ или } (i_2-q) \text{ кратно } 6,\\ 1, & \text{в другом случае}\end{cases}$$

Иначе говоря, характеристические функция d_{i_1,i_2}^{q} равна нулю для тех q,i_1,i_2, для которых сегменты P_{k,i_1,i_2}^{q} не покрыты одним из S_{k,j_1,j_2}^{q}, и равна единице для других.

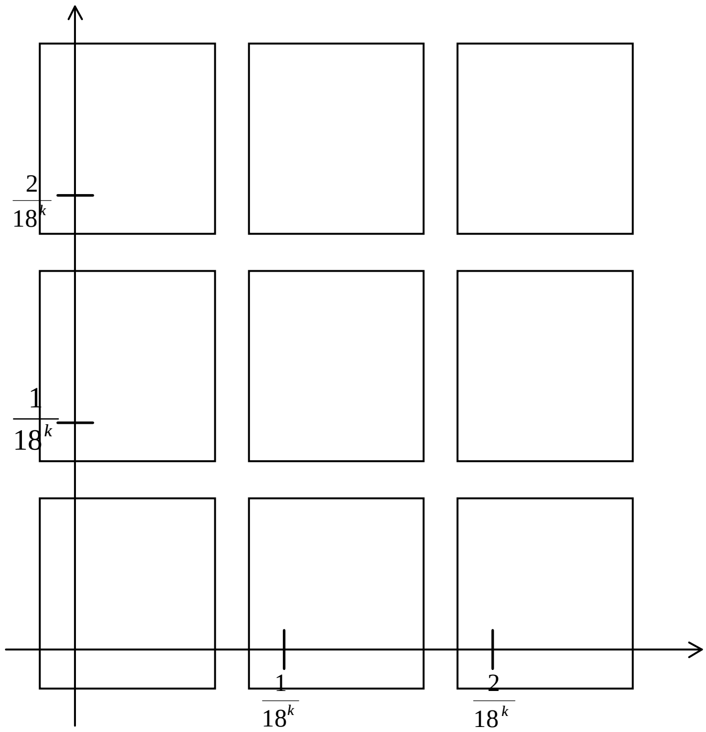

Рисунок 2.1. Вид сегментов S^q_{k,i_1,i_2} **.**

Выберем произвольную точку $x \in E^2$. Для этой точки существуют i_1, i_2 такие, что $x \in P^q_{k,i_1,i_2}$.

Для этого P^q_{k,i_1,i_2} оценим сумму характеристических функций $d^q_{i_1,i_2}$:

$$\sum_{q=1}^{5} d^q_{i_1,i_2}$$

Так как $5 \geq q \geq 1$, то $(i_1 - q)$ будет кратно 6-ти не более одного раза, и $(i_2 - q)$ будет кратно 6-ти не более одного раза, то есть, $d^q_{i_1,i_2}$, не менее трех раз из пяти будет равна единице.

Таким образом

$$\sum_{q=1}^{5} d^q_{i_1,i_2} \geq 3.$$

Другими словами, сегмент P^q_{k,i_1,i_2} , а следовательно и точка x, покрываются не менее трех раз системой квадратов S^q_{k,j_1,j_2} для фиксированного k и $1 \leq q \leq 5$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Можно подобрать константы $l^{pq}_{k,i}$ и e_k так, что будут выполнены условия:

1) $l^{pq}_{k,i} < l^{pq}_{k,i+1} \leq l^{pq}_{k,i} + \dfrac{1}{2^k}$;

2) $l_{k,i}^{pq} \le l_{k+1,i'}^{pq} \le l_{k,i}^{pq} + e_k - e_{k+1}$, если сегменты $A_{k,i}^q$ и $A_{k+1,i'}^q$ пересекаются;

3) сегменты $\Delta_{k,i_1,i_2}^q = \left[l_{k,i_1}^{1q} + l_{k,i_2}^{2q}; l_{k,i_1}^{1a} + l_{k,i_2}^{2q} + 2e_k \right]$ при фиксированных k и q попарно не пересекаются.

Доказывается при помощи индукции по k.

Упражнение. Доказать лемму 2.2.

Замечание. Легко заметить, что из 1) и 3) вытекает

$$4) e_k \le \frac{1}{2^k}.$$

На основе указанных ранее свойств сегментов $A_{k,i}^q$ и свойств 1), 2) и 4), констант $l_{k,i}^{pq}$ и e_k доказывается лемма:

Лемма 2.3. При фиксированных q требования:

$$5)\ l_{k,i}^{1q} \le y^q(x) \le l_{k,i}^{1q} + e_k, \quad l_{k,i}^{2q} \le j^q(x) \le l_{k,i}^{2q} + e_k$$

при $x \in A_{k,i}^q$, однозначно определяют на E^1 непрерывные функции y^q, j^q.

Доказательство. Доказывается от противного. Пусть существуют непрерывные на E^1 функции $g_1^q(x), g_2^q(x)$, удовлетворяющие условиям 1), 2), 4), 5) и отличные от $y^q(x), j^q(x)$. Тогда

$$l_{k,i}^{1q} \le g_1^q(x) \le l_{k,i}^{1q} + e_k, \quad l_{k,i}^{2q} \le g_2^q(x) \le l_{k,i}^{2q} + e_k. \qquad (2.2)$$

Из этих неравенств, а также из неравенств 5) следует:

$$\lim_{k\to\infty} l_{k,i}^{1q} = y^q(x) = g_1^q(x).$$

Получили противоречие. Аналогично доказывается для $j^q(x)$ и $g_2^q(x)$. Лемма доказана.

Замечание. Легко видеть, что по построению функции y^q, j^q – монотонно возрастающие. Из 5) и 3) вытекает

$$6)\ y^q(x_1) + j^q(x_2) \in \Delta_{k,i_1,i_2}^q \text{ при } (x_1, x_2) \in S_{k,i_1,i_2}^q.$$

2. Построение функции c^q. Установив существование функций y^q, j^q и констант $l_{k,i}^{pq}$ и e_k, обладающих свойствами 1) – 6), переходим к доказательству основной

части теоремы. Искомые функции будут построены в виде $c^q = \lim_{r\to\infty} c_r^q$, где $c_0^q \equiv 0$, а c_r^q для $r > 0$ будут определены с помощью индукции по r одновременно с натуральным k_r.

Обозначим

$$f_r\left(x_1, x_2\right) = \sum_{q=1}^{5} c_r^q\left[y^{\,q}\left(x_1\right) + j^{\,q}\left(x_2\right)\right], \tag{2.3}$$

$$M_r = \sup_{E^2}\left| f - f_r\right|. \tag{2.4}$$

1-й шаг. Очевидно, что $f_0 \equiv 0$, $M_0 = \sup_{E^2}\left| f\right|$.

2-й шаг. Допустим, что непрерывная функция c_{r-1}^q и номер k_{r-1} уже определены. Тем самым определена на E^2 и непрерывная функция f_{r-1}. Так как диаметры кубиков S_{k,i_1,i_2}^q при $k \to \infty$ стремятся к нулю, то можно выбрать k_r столь большим, чтобы колебание $f - f_{r-1}$ на любом S_{k,i_1,i_2}^q не превосходило $\frac{1}{6}M_{r-1}$.

3-й шаг. Пусть $x_{k,i}^q$ – произвольные точки из соответствующего сегмента в $A_{k,i}^q$. На сегменте Δ_{k,i_1,i_2}^q положим

$$c_r^q(y) = c_{r-1}^q(y) + \frac{1}{3}\left[f\left(x_{k,i_1}^q, x_{k,i_2}^q\right) - f_{r-1}\left(x_{k,i_1}^q, x_{k,i_2}^q\right)\right]. \tag{2.5}$$

Очевидно, что фиксированные таким образом значения функции c_r^q подчинены неравенству

$$\left|c_r^q(y) - c_{r-1}^q(y)\right| \le \frac{1}{3}M_{r-1}. \tag{2.6}$$

Вне сегментов Δ_{k,i_1,i_2}^q доопределим функцию c_r^q произвольно, но с соблюдением этого же неравенства (2.6) и непрерывности.

Оценим теперь $f - f_r$ в произвольной точке $\left(x_1, x_2\right) \in E^2$. Очевидно, что

$$\begin{gathered} f\left(x_1,x_2\right) - f_r\left(x_1,x_2\right) = f\left(x_1,x_2\right) - f_{r-1}\left(x_1,x_2\right) - \\ -\sum_{q=1}^{5}\left\{ c_r^q\left[y^{\,q}\left(x_1\right) + j^{\,q}\left(x_2\right)\right] - c_{r-1}^q\left[y^{\,q}\left(x_1\right) + j^{\,q}\left(x_2\right)\right]\right\}. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Это равенство получается, если к левой части прибавить $f_{r-1}(x_1, x_2)$, вычесть определение этой функции, а $f_r(x_1, x_2)$ представим ее определением.

Сумму $\sum\limits_q$ в (1.7) представим в виде $\sum^1+\sum^2$, где $\sum^1$ распространена на некоторые из 3-х значений q, для которых точка (x_1,x_2) входит в какой-либо из кубиков S^q_{k,i_1,i_2} (такие существуют по лемме 1), а сумма $\sum^2$ распространена на остающиеся 2 значения q.

Для каждого слагаемого из $\sum^1$ получаем в силу (2.5)

$$\begin{aligned} &c_r^q\left[y^{\,q}(x_1)+j^{\,q}(x_2)\right]-c_{r-1}^q\left[y^{\,q}(x_1)+j^{\,q}(x_2)\right]= \\ &=\frac{1}{3}\left[f\left(x^q_{k,i_1},x^q_{k,i_2}\right)-f_{r-1}\left(x^q_{k,i_1},x^q_{k,i_2}\right)\right]= \\ &=\frac{1}{3}\left[f(x_1,x_2)-f_{r-1}(x_1,x_2)\right]+\frac{w^q}{3}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$\left|w^q\right|\le\frac{1}{6}M_{r-1} \tag{2.9}$$

Слагаемые из $\sum^2$ оцениваются при помощи (2.6). Из (2.5) и (2.8), (2.9) и (2.6) получаем:

$$\begin{aligned} &|f-f_r|=\left|\frac{1}{3}\cdot 3\cdot w^q+\sum{}^2\left(c_r^q-c_{r-1}^q\right)\right|\le \\ &\le\frac{1}{6}M_{r-1}+\frac{2}{3}M_{r-1}=\frac{5}{6}M_{r-1}\ . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Так как $f-f_{r-1}$ в равенстве (2.7) и в представлении (2.8) взаимно уничтожаются.

Так как (2.10) справедливо в любой точке $(x_1,x_2)\in E^2$, то

$$M_r\le\frac{5}{6}M_{r-1},\quad M_r\le\left(\frac{5}{6}\right)^r M_0. \tag{2.11}$$

Из (2.6) и (2.11) вытекает, что разности $c_r^q-c_{r-1}^q$ не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_r\frac{1}{3}M_{r-1}$:

$$\frac{1}{3}M_{r-1}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{r-1}\cdot M_0\ge c_r^q-c_{r-1}^q$$

Поэтому функция c_r^q при $r\to\infty$, по признаку Вейрштрасса равномерной сходимости рядов функций, равномерно сходится к непрерывным предельным функциям c^q. Каждый из q рядов $\sum\limits_r(c_r^q-c_{r-1}^q)$ - равномерно сходится, следовательно, равномерно сходится и сумма по q этих рядов.

Из соотношений (2.4) и (2.3) и оценки (2.11) предельным переходом при $r \to \infty$ получаем равенство (2.1’), чем и заканчивается доказательство теоремы.

Литература

1. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного. Доклад. АН СССР, 1957. Т. 114, No. 5. С. 953-956.
2. К. Иосида «Функциональный анализ», «Мир», М., 1967, с. 17.
3. Горбань А.Н., Россиев Д.А. Нейронные сети на персональном компьютере. «Наука», Новосибирск, 1996.
4. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. «Наука», Москва, 1973.
5. Арнольд В. И. О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных. // Математическое просвещение, 19 № с. 41-61.
6. Stone M.N. The generalized Weierstrass approximation theorem. Math. Mag., 1948. V.21. PP. 167-183, 237-254. Cybenko G. Approximation by superposition of a sigmoidal function. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 1989. Vol. 2. PP. 303 - 314.