

Михайлов А.И., Митин А.В.

Руководство к выполнению практического задания
по дисциплине «Математическое моделирование
в твердотельной электронике»

Математическое моделирование работы выпрямителя тока на полупроводниковом диоде

Введение

Одной из важнейших задач электротехники и радиотехники является преобразование переменного тока (или напряжения) в постоянный. Практически ни одно радиотехническое, радиоэлектронное устройство, прибор, в котором электричество используется просто как электроэнергия, как правило, не обходится без специального блока или устройства, которое бы преобразовывало переменный ток, потребляемый из сети, в одно или даже несколько значений постоянных напряжений (токов), питающих отдельные узлы, элементы, приборы, электрические схемы, микросхемы и пр.

Радиотехническое устройство, преобразующее переменный ток в постоянный, принято называть выпрямителем тока или просто выпрямителем. Центральным звеном любого выпрямителя является элемент, имеющий нелинейную вольт-амперную характеристику (ВАХ) – зависимость тока от напряжения. Роль таких элементов в современных радиоэлектронных устройствах и приборах выполняют так называемые выпрямительные вакуумные или твердотельные (полупроводниковые) диоды. Выпрямительные диоды имеют нелинейную и асимметричную ВАХ. Именно благодаря этому свойству они и могут использоваться в выпрямителях.

Выпрямитель кроме выпрямительного диода содержит и другие (линейные) элементы (резистивные, емкостные, индуктивные), которые предназначены для улучшения качества выпрямленного тока, а также для согласования выходной цепи выпрямителя с входом тех устройств или приборов, которые являются потребителями выпрямленного тока (или напряжения).

Наибольшее распространение в современных выпрямителях получили схемы с полупроводниковыми кремниевыми (Si) выпрямительными диодами, включающие также фильтрующие цепи, задачей которых служит сглаживание пульсаций выпрямленного диодом тока.

Целью данной работы является изучение некоторых возможных вариантов математической модели, описывающей работу выпрямителя тока на полупроводниковом диоде.

Формулировка математических моделей

Математическая модель выпрямителя тока на полупроводниковом диоде может быть построена на основе схемы выпрямителя с использованием законов Кирхгофа, а также математических моделей всех элементов, формирующих схему выпрямителя (диод, резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности).

Основными динамическими переменными при описании работы электрических схем являются токи I и напряжения U на отдельных участках и элементах схемы. Математическое описание каждого из элементов электрических цепей базируется на следующих соображениях, которые определяют известные математические связи между токами и напряжениями.

Математические модели резистивных, емкостных и индуктивных линейных элементов

1) Резистивный элемент

$$U = R \cdot I \text{ или } I = G \cdot U, \text{ где } G = \frac{1}{R},$$

R - сопротивление, G - проводимость.

2) Емкостной элемент ($C = const$)

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(C \cdot U) = C \cdot \frac{dU}{dt}, \text{ или } U = \frac{1}{C} \int I \cdot dt, \text{ где } Q = C \cdot U,$$

Q - заряд и C - емкость конденсатора, t - время.

3) Индуктивный элемент ($L = const$)

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(L \cdot I) = L \cdot \frac{dI}{dt}, \text{ или } I = \frac{1}{L} \int U \cdot dt, \text{ где } \Phi = L \cdot I,$$

Φ - магнитный поток, L - индуктивность.

Математическая модель полупроводникового выпрямительного диода

Математическая модель полупроводникового выпрямительного диода в самом простом и получившем наибольшее распространение случае представляет собой аналитическую запись ВАХ диода - математическую формулу, связывающую ток диода I_D и напряжение, приложенное к нему U_D :

$$I_D = I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot U_D}{kT} \right)} - 1 \right), \quad (1)$$

где I_s - ток насыщения диода; q - модуль заряда электрона; k - постоянная Больцмана; T - абсолютная температура.

Математическая модель схемы выпрямителя
без фильтрующих реактивных элементов

Соответствующая схема изображена на рис. 1, где использованы следующие обозначения: Д – диод; R – сопротивление нагрузки. На левую пару клемм подается переменное синусоидальное напряжение U_{al} :

$$U_{al} = U_0 \cdot \sin(\omega t) , \quad (2)$$

где U_0 – амплитудное значение переменного синусоидального напряжения; ω – круговая частота; $\omega = 2\pi \cdot f$; f – линейная частота; t – время.

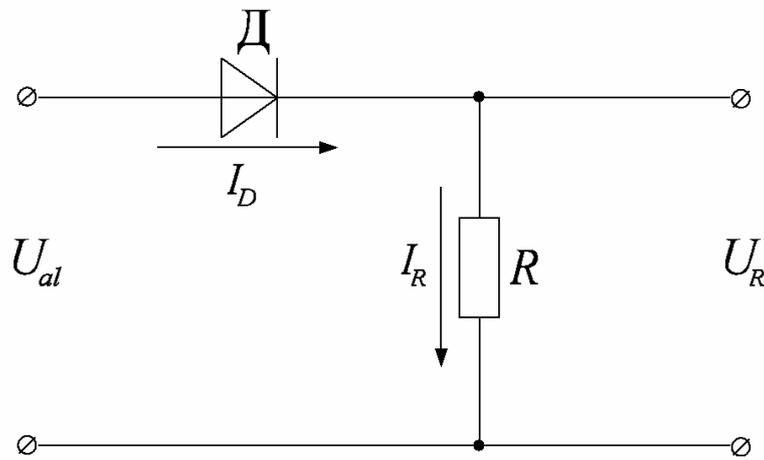


Рис. 1.

Используя законы Кирхгофа для разветвленных электрических цепей, получаем для этой схемы следующую систему уравнений:

$$U_{al} = U_D + U_R , \quad (3)$$

$$I_D = I_R , \quad (4)$$

$$U_R = I_R \cdot R , \quad (5)$$

$$I_D = I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot U_D}{kT} \right)} - 1 \right) , \quad (6)$$

где в дополнение к введенным выше используются следующие обозначения: U_R и I_R – напряжение и ток нагрузки.

Несложные математические преобразования позволяют привести систему (3) – (6) к одному нелинейному уравнению с одной неизвестной величиной U_D :

$$I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot U_D}{kT} \right)} - 1 \right) = \frac{U_{al} - U_D}{R} , \quad (7)$$

или, с учетом (2):

$$I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot U_D}{kT} \right)} - 1 \right) = \frac{U_0 \cdot \sin(\omega t) - U_D}{R} . \quad (8)$$

Решив это уравнение (в любой заданный момент времени), можно найти все остальные неизвестные величины, входящие в систему (3) – (6).

Математическая модель схемы выпрямителя
с фильтрующим конденсатором

Данная схема изображена на рис. 2, где C – емкость конденсатора.

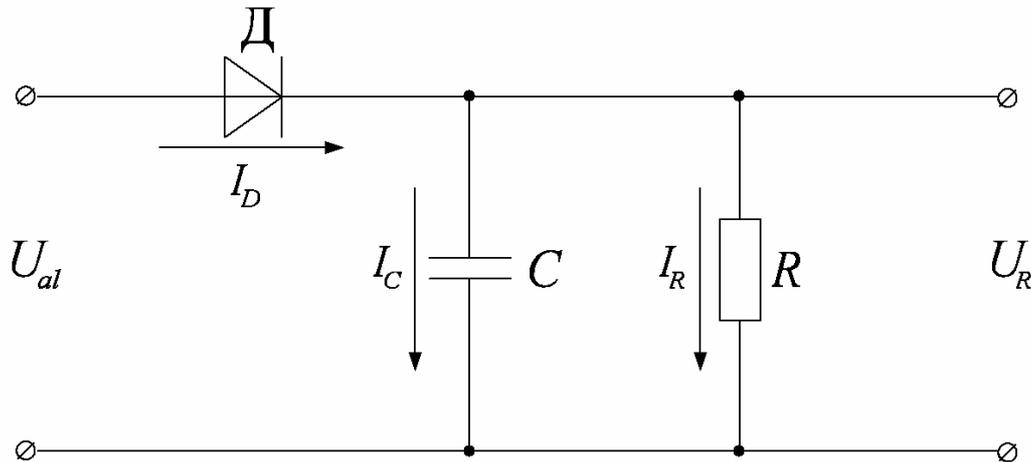


Рис. 2.

Опять же, используя законы Кирхгофа, получаем для этой схемы следующую систему уравнений:

$$U_{al} = U_D + U_C , \quad (9)$$

$$U_C = U_R , \quad (10)$$

$$I_D = I_R + I_C , \quad (11)$$

$$U_R = I_R \cdot R , \quad (12)$$

$$I_D = I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot U_D}{kT} \right)} - 1 \right) , \quad (13)$$

$$I_C = C \cdot \frac{dU_C}{dt} , \quad (14)$$

где U_C и I_C – напряжение и ток конденсатора.

Система (9) – (14) после несложных математических преобразований приводит к одному обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) с одной неизвестной $U_R = U_R(t)$:

$$\frac{dU_R}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \left(I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot (U_{al} - U_R)}{kT} \right)} - 1 \right) - \frac{U_R}{R} \right), \quad (15)$$

или, с учетом (2):

$$\frac{dU_R}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \left(I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot (U_0 \cdot \sin(\omega t) - U_R)}{kT} \right)} - 1 \right) - \frac{U_R}{R} \right). \quad (16)$$

Математическая модель схемы выпрямителя
с $L - C$ – фильтром

Данная схема изображена на рис. 3, где L – индуктивность.

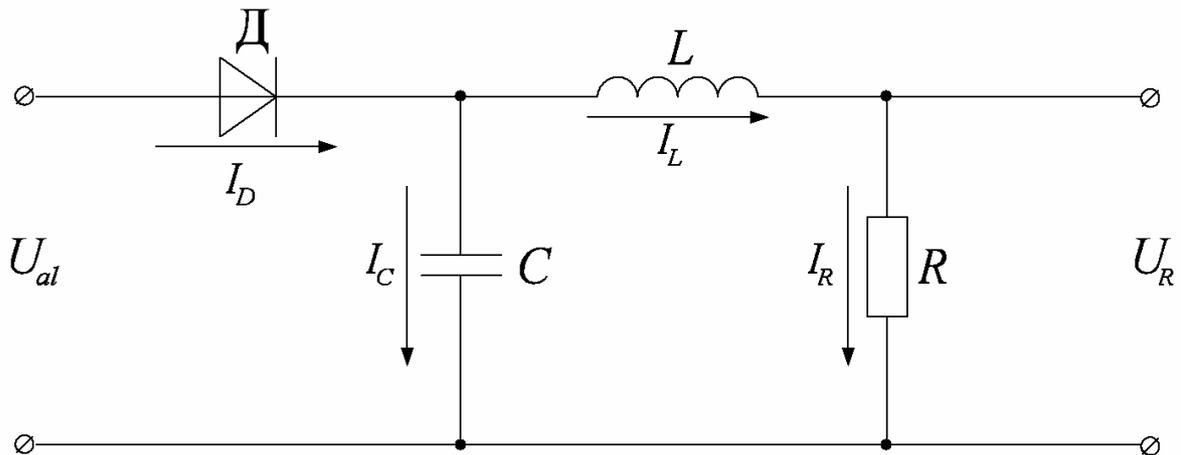


Рис. 3.

Используя законы Кирхгофа, получаем для данной схемы следующую систему уравнений:

$$U_{al} = U_D + U_C, \quad (17)$$

$$U_C = U_L + U_R, \quad (18)$$

$$U_R = I_R \cdot R, \quad (19)$$

$$U_L = L \cdot \frac{dI_L}{dt}, \quad (20)$$

$$I_D = I_C + I_L, \quad (21)$$

$$I_L = I_R, \quad (22)$$

$$I_D = I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot U_D}{kT} \right)} - 1 \right), \quad (23)$$

$$I_C = C \cdot \frac{dU_C}{dt}, \quad (24)$$

где U_L и I_L – напряжение и ток катушки индуктивности.

Система (17) – (24) может быть сведена к системе двух ОДУ относительно двух искомым функций $U_R = U_R(t)$ и $U_D = U_D(t)$:

$$\frac{dU_R}{dt} = \frac{R}{L} \cdot (U_{al} - U_R - U_D), \quad (25)$$

$$\frac{dU_D}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{U_R}{R} - I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot U_D}{kT} \right)} - 1 \right) \right) + \frac{dU_{al}}{dt}, \quad (26)$$

которые с учетом (2) приводятся к системе:

$$\frac{dU_R}{dt} = \frac{R}{L} \cdot (U_0 \cdot \sin(\omega t) - U_R - U_D), \quad (27)$$

$$\frac{dU_D}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{U_R}{R} - I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot U_D}{kT} \right)} - 1 \right) \right) + U_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t). \quad (28)$$

Численные методы и алгоритмы

Вначале сформулируем рекомендации и исходные данные, общие для всех трех схем выпрямителей, рассмотренных выше.

$I_s = 1$ мА, $T = 300$ К, $\omega = 2\pi \cdot f$, а $f = 50$ Гц, $U_0 = 100$ В. Величины R , L и C должны варьироваться в расчетах с целью получения наилучших результатов выпрямления и наилучшей наглядности результатов.

Шаг по времени при численном решении должен выбираться, с одной стороны, меньшим не менее чем на порядок периода переменного напряжения, равного $1/f$, а, с другой стороны, меньше характерного времени самого быстрого процесса, происходящего в схеме. Расчеты вести для интервала времени не менее 10 периодов переменного напряжения.

Выпрямитель без фильтрующих реактивных элементов

В каждый заданный момент времени t уравнение (8) представляет собой нелинейное (трансцендентное), решая которое, например, методом половинного деления (или каким-либо другим известным методом), находим значение U_D в данный момент времени. Затем, воспользовавшись уравнением (3), вычисляем напряжение на нагрузке U_R .

Выпрямитель с фильтрующим конденсатором

Алгоритм решения уравнения (17) методом Рунге-Кутта 4 порядка следующий.

$$U_{Ri+1} = U_{Ri} + \frac{\Delta t}{6} \cdot (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) , \quad (29)$$

где

$$K_1 = \frac{1}{C} \cdot \left[I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot (U_0 \cdot \sin(\omega t_i) - U_{Ri})}{kT} \right)} - 1 \right) - \frac{U_{Ri}}{R} \right] , \quad (30)$$

$$K_2 = \frac{1}{C} \cdot \left[I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot (U_0 \cdot \sin(\omega(t_i + \Delta t/2)) - (U_{Ri} + K_1 \cdot \Delta t/2))}{kT} \right)} - 1 \right) - \frac{U_{Ri} + K_1 \cdot \Delta t/2}{R} \right] , \quad (31)$$

$$K_3 = \frac{1}{C} \cdot \left[I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot (U_0 \cdot \sin(\omega(t_i + \Delta t/2)) - (U_{Ri} + K_2 \cdot \Delta t/2))}{kT} \right)} - 1 \right) - \frac{U_{Ri} + K_2 \cdot \Delta t/2}{R} \right] , \quad (32)$$

$$K_4 = \frac{1}{C} \cdot \left[I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot (U_0 \cdot \sin(\omega(t_i + \Delta t)) - (U_{Ri} + K_3 \cdot \Delta t))}{kT} \right)} - 1 \right) - \frac{U_{Ri} + K_3 \cdot \Delta t}{R} \right] . \quad (33)$$

При этом для $i = 0$ $U_{R0} = 0$ (начальное условие).

Выпрямитель с $L - C$ - фильтром

Алгоритм решения системы ОДУ (27) – (28) методом Рунге-Кутта 4 порядка следующий.

$$U_{Ri+1} = U_{Ri} + \frac{\Delta t}{6} \cdot (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) , \quad (34)$$

$$U_{Di+1} = U_{Di} + \frac{\Delta t}{6} \cdot (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) , \quad (35)$$

где

$$K_1 = \frac{R}{L} \cdot (U_0 \cdot \sin(\omega t_i) - U_{Ri} - U_{Di}) , \quad (36)$$

$$L_1 = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{U_{Ri}}{R} - I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot U_{Di}}{kT} \right)} - 1 \right) \right) + U_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t_i) , \quad (37)$$

$$K_2 = \frac{R}{L} \cdot \left(U_0 \cdot \sin\left(\omega \left(t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) - \left(U_{Ri} + K_1 \cdot \frac{\Delta t}{2} \right) - \left(U_{Di} + L_1 \cdot \frac{\Delta t}{2} \right) \right) , \quad (38)$$

$$L_2 = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{\left(U_{Ri} + K_1 \cdot \frac{\Delta t}{2} \right)}{R} - I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot (U_{Di} + L_1 \cdot \Delta t / 2)}{kT} \right)} - 1 \right) \right) + U_0 \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \left(t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) , \quad (39)$$

$$K_3 = \frac{R}{L} \cdot \left(U_0 \cdot \sin\left(\omega \left(t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) - \left(U_{Ri} + K_2 \cdot \frac{\Delta t}{2} \right) - \left(U_{Di} + L_2 \cdot \frac{\Delta t}{2} \right) \right) , \quad (40)$$

$$L_3 = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{\left(U_{Ri} + K_2 \cdot \frac{\Delta t}{2} \right)}{R} - I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot (U_{Di} + L_2 \cdot \Delta t / 2)}{kT} \right)} - 1 \right) \right) + U_0 \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \left(t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) , \quad (41)$$

$$K_4 = \frac{R}{L} \cdot (U_0 \cdot \sin(\omega(t_i + \Delta t)) - (U_{Ri} + K_3 \cdot \Delta t) - (U_{Di} + L_3 \cdot \Delta t)) , \quad (42)$$

$$L_4 = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{(U_{Ri} + K_3 \cdot \Delta t)}{R} - I_s \cdot \left(e^{\left(\frac{q \cdot (U_{Di} + L_3 \cdot \Delta t)}{kT} \right)} - 1 \right) \right) + U_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega(t_i + \Delta t)) . \quad (43)$$

При этом для $i = 0$ $U_{R0} = 0$ и $U_{D0} = 0$ (начальные условия).

Задание

1. Пользуясь описанными выше алгоритмами, рассчитать зависимости $U_R = U_R(t)$ для 10 периодов переменного синусоидального напряжения, подаваемого на входы трех схем выпрямителей.

2. Построить полученные зависимости в виде графиков. Определить, как влияют на форму напряжения на нагрузке величины R , L и C . Объяснить их влияние.

3. Провести сравнительный анализ качества выпрямления с использованием трех описанных схем.

4. Проанализировать полученные результаты и сформулировать рекомендации, следующие из данных математического моделирования.

Литература

Основная:

1. Жаворонков М.А., Кузин А.В. Электротехника и электроника: учеб. пособие. – 3-е изд., стер. – М.: Изд. центр "Академия", 2010. – 393 с.
2. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: учебник. – 12-е изд., стер. – М.: Изд. центр "Академия", 2008. – 538 с.
3. Пасынков В.В., Чиркин Л.К. Полупроводниковые приборы: Учебник для вузов. - 7-е изд., испр. - СПб., М., Краснодар: Лань, 2003. – 478 с.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: учеб. пособие / Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 6-е изд. - М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2008. - 636 с.
5. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы: учеб. пособие / под ред. А. И. Кибзуна. - 2-е изд., испр. и доп. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 398 с.
6. Рашиков В.И., Рошаль А.С. Численные методы решения физических задач: Учебное пособие. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2005. – 204 с.

Дополнительная:

1. Опадчий Ю.Ф. Аналоговая и цифровая электроника: учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1996. – 768 с.
2. Гусев В.Г., Гусев Ю.М. Электроника: учеб. пособ. для приборостроит. спец. вузов. – М: Высш. шк., 1982. – 495 с.
3. Наундорф У. Аналоговая электроника: Основы, расчет, моделирование / пер. с нем. М.М. Ташлицкого. – М.: Техносфера, 2008. – 471 с.
4. Трейстер Р., Мейо Дж. 44 источника электропитания для любительских электронных устройств. - М.: Энергоиздат, 1990. - 288 с.
5. Справочная книга радиолюбителя-конструктора / Под ред. Н.И. Чистякова. - М.: Радио и связь, 1990. - 624 с.

6. Полупроводниковые выпрямители / Е.И. Беркович, А.И. Боровой, В.М. Венделанд, Б.К. Курносков, В.В. Пырков, А.Ф. Свиридов, А.И. Толкачев / Под ред. Ф.И. Ковалева и Г.П. Мостковой. – М.: Энергия, 1967. – 480 с.
7. Лебедев А.И. Физика полупроводниковых приборов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 488 с.
8. Викулин И.М., Стафеев В.И. Физика полупроводниковых приборов. - М.: Радио и связь, 1990. - 262 с.
9. Михайлов А.И., Сергеев С.А., Глуховской Е.Г. Физические основы твердотельной электроники и микроэлектроники: Планы семинарских занятий: Учебное пособие для студ. фак. нано- и биомедицинских технологий / Под общ. ред. проф. А.И. Михайлова. – Саратов: ООО «Редакция журнала «Промышленность Поволжья», 2008. – 116 с.
10. Гуртов В.А. Твердотельная электроника: Учеб. пособие. – 2-е изд., доп. – М.: Техносфера, 2007. – 406 с.
11. Гаман В.И. Физика полупроводниковых приборов: Учебное пособие. - Томск: Изд-во НТЛ, 2000. - 426 с.
12. Пасынков В.В., Чиркин Л.К. Полупроводниковые приборы: Учебник для вузов. - 5-е изд., испр. - СПб.: Лань, 2001. – 478 с.
13. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНЕ. – М.: Мир, 1977. – 584 с.
14. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
15. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. - 512 с.
16. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1987. – 288 с.

Контрольные вопросы для отчета по работе

1. Назначение выпрямителей тока. Принцип выпрямления тока с помощью полупроводниковых диодов.
2. Схемы выпрямителей тока на полупроводниковых диодах.
3. Математические модели разных схем выпрямителей.
4. Методы и алгоритмы численного решения задачи.
5. Анализ полученных результатов моделирования.