

Факультет нелинейных процессов
Кафедра электроники, колебаний и волн



М.В. Белоглазкина, Е.Н. Егоров, Ю.И. Левин

Численное решение уравнений

Учебно-методическое пособие

Саратов – 2008



Содержание

1. Введение	3
2. Решение систем линейных уравнений	5
2.1. Метод исключения (Гаусса)	5
2.2. Метод прогонки	7
3. Методы решения нелинейных уравнений	8
3.1. Метод половинного деления	9
3.2. Метод простой итерации	10
3.3. Метод Ньютона (касательных)	11
3.4. Метод хорд (секущих)	12
4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений одношаговыми разностными методами. Задача Коши	13
4.1. Численное решение задачи Коши. Метод Эйлера	15
4.2. Метод Рунге-Кутты	18
5. Практическое задание	24
6. Контрольные вопросы	26
7. Рекомендуемая литература	27



1. Введение

Современное развитие физики и техники тесно связано с использованием в процессе расчётов и проектирования вычислительного оборудования. В основе вычислительного эксперимента лежит решение уравнений математической модели численными методами. Применение вычислительной техники при этом позволяет автоматизировать процесс нахождения решения (например, при решении систем линейных алгебраических уравнений). Или упростить особенно трудоёмкие процедуры вычисления, уменьшить количество итераций, необходимых для нахождения точного или приближённого решения.

Численные методы решения различных видов уравнений – это алгоритмы нахождения приближённых (а иногда и точных) значений искомого решения. Решение алгебраических уравнений при этом получаются в виде значений аргументов, вычисленных с определённой степенью точности, а решения дифференциальных уравнений в виде таблицы. Численные методы не позволяют найти общего решения системы; они могут дать только частное решение. Однако эти методы применимы к очень широкому классу уравнений и всем типам задач для них.

Численные методы можно применять только к корректно поставленным задачам. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений требуют также соблюдения условия *обусловленности*, т.е. малые изменения начальных



условий не должны приводить к значительным изменениям интегральных кривых – решение должно быть устойчиво.

Данное учебно-методическое пособие посвящено методам компьютерного решения уравнений или систем уравнений различного типа. Рассматриваются различные методы решения систем линейных алгебраических уравнений, методы решения нелинейных уравнений, а также обыкновенных дифференциальных уравнений.



2. Решение систем линейных уравнений

2.1. Метод исключения (Гаусса)

Одним из самых распространенных методов решения систем линейных уравнений является метод исключения (Гаусса). В общем случае нашей целью будет отыскание данным методом решения системы n неоднородных уравнений с n неизвестными (x_1, x_2, \dots, x_n) :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Метод Гаусса для произвольной системы основан на приведении матрицы системы к треугольной. Вычтем из второго уравнения системы (1.1) первое, умноженное на такое число, чтобы уничтожился коэффициент при x_1 , т.е. на $c_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$. Затем таким же образом вычтем первое уравнение из третьего, четвертого и т.д., при этом $c_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$. В результате получаем:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ 0 \cdot x_1 + a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)}, \\ &\dots \\ 0 \cdot x_1 + a_{n2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}. \end{aligned}$$

Здесь $a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - c_{i1}a_{1j}$, $b_i^{(2)} = b_i - c_{i1}b_1$. Таким образом, у нас исключаются все элементы первого столбца, лежащие ниже главной диагонали.



Вычтем из новой третьей строки вторую, умноженную на

$c_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$. Аналогичную операцию произведем с остальными

строками $4, 5, \dots, n$, т.е. вычтем из каждой i -той строки вторую,

умноженную на $c_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$. Получаем систему

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ &\dots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{n3}^{(3)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(3)}x_n &= b_n^{(3)}. \end{aligned}$$

Производя аналогичные действия с третьим, четвертым и т.д. уравнениями, на $(n - 1)$ -ом шаге получаем треугольную систему:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ \dots \quad \dots & \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)}. \end{aligned}$$

Здесь $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - c_{ik}a_{kj}^{(k)}$, $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - c_{ik}b_k^{(k)}$, $c_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$.

Следует отметить, что данный метод нельзя использовать, если в ходе расчета на главной диагонали оказался нулевой элемент $a_{kk}^{(k)} = 0$, но перестановкой строк можно переместить ненулевой элемент на главную диагональ и продолжить расчет.

Точность результата будет определяться точностью выполнения арифметических операций для преобразования элементов матрицы. Для уменьшения погрешности при делении

на диагональный элемент обычно рекомендуется осуществить такую перестановку уравнений, чтобы поставить на диагональ наибольший по модулю из всех элементов рассматриваемого столбца.

2.2 Метод прогонки

Пусть A – трехдиагональная матрица, имеющая вид:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & c_2 & -b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & c_3 & -b_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & c_n \end{pmatrix}.$$

Обычно для систем с трехдиагональной матрицей, которые часто встречаются при решении краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка, используют метод прогонки.

Положим $a_1 = b_n = 0$ и запишем данную систему в каноническом виде:

$$-a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = d_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Выразим из первого уравнения рассматриваемой системы x_1 через x_2 :

$$c_1 x_1 - b_1 x_2 = d_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{b_1}{c_1} x_2 + \frac{d_1}{c_1}.$$

Теперь из второго уравнения выразим x_2 через x_3

$$-a_2x_1 + c_2x_2 - b_2x_3 = d_2 \Rightarrow x_2 = \frac{b_2x_3}{c_2 - \frac{b_1}{c_1a_2}} + \frac{d_2 + \frac{a_2}{c_1}d_1}{c_2 - \frac{b_1}{c_1}a_2}.$$

Проводя аналогичные рассуждения для остальных уравнений системы, получаем:

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i,$$

где $\alpha_i = \frac{b_i}{c_i - \alpha_{i-1}a_i}$, $\beta_i = \frac{d_i + \beta_{i-1}a_i}{c_i - \alpha_{i-1}a_i}$.

Теперь рассмотрим как работает метод прогонки. Вначале (на прямом ходе прогонки) мы определяем коэффициенты α_i и β_i через известные элементы матрицы A , заданные значения d_i и ранее вычисленные α_{i-1} и β_{i-1} :

$$\alpha_i = \frac{b_i}{c_i}, \beta_i = \frac{d_i}{c_i}, \alpha_i = \frac{b_i}{c_i - \alpha_{i-1}a_i}, \beta_i = \frac{d_i + \beta_{i-1}a_i}{c_i - \alpha_{i-1}a_i}.$$

После вычисления коэффициентов α_i и β_i начинается обратный ход прогонки – определение x_i . Т.к. $x_n = \alpha_n x_{n+1} + \beta_n$ и

$$\alpha_n = \frac{b_n}{c_n - \alpha_{n-1}a_n} = 0 \quad (b_n = 0), \text{ то:}$$

$$x_n = \beta_n, \quad x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i.$$

3. Методы решения нелинейных уравнений

Во многих научных и инженерных задачах требуется решить уравнение вида

$$f(x) = 0, \tag{3.1}$$

где $f(x)$ – заданная непрерывная нелинейная функция.



В аналитическом виде удастся найти решение только для простейших уравнений. В большинстве же случаев приходится решать уравнение вида (3.1) численными методами.

Численное решение уравнения (3.1) обычно проводят в два этапа. На первом этапе находят такие интервалы изменения переменной x , где расположен только один корень. Эта задача обычно решается графически. На втором этапе проводят уточнение отдельных корней. Для этого используют различные методы, часть которых будет рассмотрена ниже.

3.1 Метод половинного деления

Пусть на отрезке $[a, b]$ расположен один корень уравнения (3.1), который необходимо уточнить с погрешностью ε (рис. 3.1).

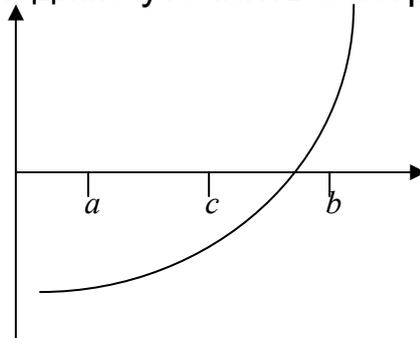


Рис. 3.1. Метод половинного деления

Т.к. известно, что на интервале $[a, b]$ уравнение имеет только один корень и $f(x)$ – непрерывная функция, то выполняется условие $f(a)f(b) < 0$.

Суть метода половинного деления заключается в следующем. Находим середину отрезка $[a, b]$:

$$c = \frac{a + b}{2}$$

и вычисляем $f(c)$. Теперь необходимо сделать выбор, какую из двух частей отрезка взять для дальнейшего уточнения корня. Т.к. $f(x)$ – непрерывная функция, то корень будет находиться в той половине отрезка, на концах которого $f(x)$ имеет разные знаки. На рис. 3.1 это будет отрезок $[c, b]$, т.е. для очередного шага уточнения точка a перемещаем в середину отрезка c и продолжаем процесс деления как с первоначальным интервалом $[a, b]$.

Итерационный процесс продолжается, пока интервал $[a, b]$ не станет меньше заданной погрешности ε .

К достоинствам данного метода следует отнести высокую надежность и простоту. Недостатком его является тот факт, что необходимо предварительно найти две точки, значения функции в которых имеют разные знаки.

3.2. Метод простой итерации

От исходного уравнения (3.1) перейдем к эквивалентному уравнению

$$x = \varphi(x), \quad (3.2)$$

где $\varphi(x) = f(x) + x$. Пусть имеется некоторое начальное приближение к корню $x = x_0$. Подставим его в правую часть

уравнения (3.2) и получим новое приближение: $x_1 = \varphi(x_0)$, затем аналогичным образом получим $x_2 = \varphi(x_1)$ и т.д.,

$$x_{k+1} = \varphi(x_k). \quad (3.3)$$

Считаем, что корень найден, если $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$, где ε – заданная погрешность.

Необходимо установить при каких условиях итерационный процесс (3.3) будет сходиться к корню уравнения x^* . Пусть в итерационной формуле (3.3)

$$x_k = x^* + \varepsilon_k, \quad x_{k+1} = x^* + \varepsilon_{k+1},$$

где ε_k и ε_{k+1} – отклонения k -го и $(k+1)$ -го приближений от корня. Если процесс уточнения осуществляется вблизи корня x^* , то функцию $\varphi(x)$ можно приближенно представить двумя членами ряда Тейлора. Тогда (3.3) примет вид:

$$x^* + \varepsilon_{k+1} \cong \varphi(x^*) + \varepsilon_k \varphi'(x^*).$$

Т.к. x^* – корень уравнения, то $x^* = \varphi(x^*)$ и, следовательно,

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \varphi'(x^*).$$

Для того, чтобы итерационный процесс был сходящимся, необходимо выполнение условия $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$, что возможно лишь когда $|\varphi'(x)| < 1$.

3.3 Метод Ньютона (касательных)

Метод Ньютона или касательных заключается в следующем. Если x_n есть некоторое приближение к корню x^* , а $f(x)$ имеет

непрерывную производную, то уравнение (3.1) можно преобразовать следующим образом:

$$0 = f(x^*) = f(x_n + (x^* - x_n)) = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(\xi).$$

Приближенно заменяя $f'(\xi)$ на значение в известной точке x_n , получим такой итерационный процесс:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (3.4)$$

Геометрически этот процесс означает замену на каждой итерации графика $y = f(x)$ касательной к нему.

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода простых итераций. Пусть $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Тогда $\varphi'(x) = \frac{ff''}{(f')^2}$.

Следовательно, т.к. $|\varphi'(x)| < 1$, итерационный процесс сходится при выполнении условия $|ff''| < (f')^2$.

Недостатком метода Ньютона является необходимость вычисления производной на каждом шаге итерационного процесса.

3.4. Метод хорд (секущих)

Чтобы избежать вычисления производной, метод Ньютона можно упростить, заменив производную $f'(x_n)$ в алгоритме Ньютона (3.4) ее приближенным значением в виде отношения приращения функции $\Delta f = f(x_n) - f(x_{n-1})$ к приращению аргумента $\Delta x = x_n - x_{n-1}$. Таким образом, получаем формулу метода секущих:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n). \quad (3.5)$$

Геометрический смысл такого изменения метода Ньютона в том, что от аппроксимации функции $f(x)$ касательной мы переходим к секущей.

Для того, чтобы начать итерационный процесс, необходимо задать два начальных приближения x_0 и x_1 . Затем по формуле (3.5) вычисляем новые приближения к корню до выполнения условия $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, где ε – заданная погрешность вычисления.

Метод секущих уступает методу Ньютона в скорости сходимости, но не требует вычисления производных.

4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений одношаговыми разностными методами. Задача Коши

Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов и многие другие. Во многих случаях такие уравнения не интегрируются в явном виде. Поэтому необходимо использовать методы, позволяющие получать приближённое решение задачи.

Конкретная прикладная задача может приводить к дифференциальному уравнению любого порядка, или к системе уравнению любого порядка. Но известно, что обыкновенное дифференциальное уравнение p -го порядка

$$u^{(p)}(x) = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(p-1)})$$

при помощи замены $u^{(k)} = u_k(x)$ можно свести к эквивалентной системе p уравнений первого порядка

$$u'_k(x) = u_{k+1}(x), \quad 0 \leq k \leq p-2$$

$$u'_{p-1}(x) = f(x, u_0, u_1, \dots, u_{p-1}),$$

где $u_0 = u(x)$. Аналогично, произвольную систему дифференциальных уравнений любого порядка можно заменить некоторой эквивалентной системой уравнений первого порядка. Поэтому здесь и далее мы будем рассматривать системы уравнений первого порядка вида

$$\frac{du_k}{dx} = f_k(x, u_0, u_1, \dots, u_p), \quad 1 \leq k \leq p \quad (4.1a)$$

или в векторной форме

$$\frac{d\vec{u}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{u}(x)), \quad (4.1b)$$

$$\vec{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}, \quad \vec{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_p\},$$

Известно, что система p -го порядка имеет множество решений, которое в общем случае зависит от p параметров $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$ и может быть записано в форме $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x; \mathbf{c})$. Для определения значений этих параметров, т.е. для выделения единственного решения, надо наложить p дополнительных условий на функции $u_k(x)$.

Различают три типа задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: задачи Коши, краевые задачи и

задачи на собственные значения. В данном случае нас интересуют задачи Коши.

Задача Коши представляет собой уравнение (4.16) с начальными условиями вида

$$u_k(\xi) = \eta_k, \quad 0 \leq k \leq p, \quad (4.2)$$

т.е. заданы значения всех функций в одной и той же точке $x = \xi$. Эти условия можно рассматривать как задание координат начальной точки $(\xi, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ интегральной кривой в $(p+1)$ -мерном пространстве $\{x, u_1, u_2, \dots, u_p\}$. Решение при этом обычно требуется найти на некотором отрезке $\xi \leq x \leq X$, так что точку $x = \xi$ можно считать начальной точкой этого отрезка.

4.1. Численное решение задачи Коши. Метод Эйлера

Для простоты изложения в дальнейшем ограничимся решением задачи Коши, записанной в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \quad a \leq x \leq b \quad (4.3)$$

с одной неизвестной функцией y и начальным условием

$$y(a) = \hat{y}.$$

Первый шаг на пути численного решения состоит в разбиении отрезка $[a, b]$ на конечное число частей введением *узловых точек* $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Если обозначить через h расстояние между узлами (шаг сетки), то $h = (a-b)/N$ и $x_k = a + kh$, ($k = 0, 1, \dots, N$), где N – целое число отрезков разбиения. В дальнейшем будем через $y(x_k)$ обозначать значение точного

решения (4.3) в точке x_k , а через y_k – соответствующее приближённое значение, построенное с помощью рассматриваемого численного метода.

Простейшей численной схемой является *метод Эйлера*, который определяется формулами

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad y_0 = \hat{y}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.4)$$

Вывод метода Эйлера следует из разложения в ряд Тейлора функции $y(x)$ (интегральной кривой уравнения (4.3)) в окрестности точки x_k

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(z_k) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{2} y''(z_k),$$

где z_k лежит внутри отрезка $[x_k, x_{k+1}]$. Будем считать, что все выписанные производные существуют. Если ограничиться первыми двумя членами разложения, то можно записать

$$y_{k+1} \approx y_k + hf(x_k, y_k).$$

Геометрический смысл метода Эйлера заключается в аппроксимации искомого решения (интегральной кривой $y(x)$) на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ отрезком касательной, проведённой к графику решения в точке x_k . На рисунке 4.1 приведено графическое представление метода Эйлера. Сплошными линиями на рис. 4.1 изображено поле интегральных кривых, отвечающих уравнению (4.4). Стартуя из некоторой начальной точки x_k , проводим касательную к интегральной кривой, проходящей через данную точку. Тогда следующей точкой численного решения станет точка y_{k+1} , которая получается при пересечении соответствующей

касательной с интегральной кривой в точке x_{k+1} , и т.д. Таким образом численным решением исходного уравнения будет ломанная линия проведённая по касательным.

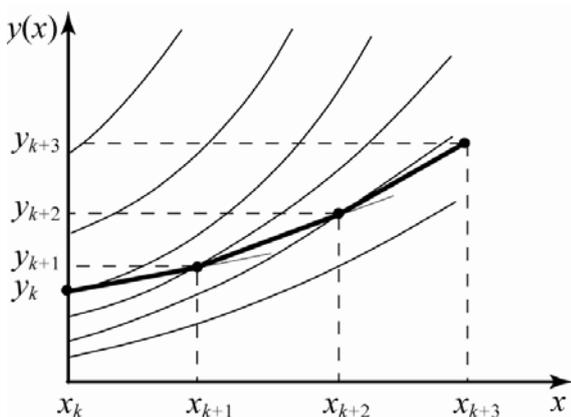


Рис. 4.1. Геометрическая интерпретация метода Эйлера. Результатом численного решения является ломаная линия, представляющая собой набор касательных к интегральным кривым, отвечающим уравнению (4.3)

Метод Эйлера прост для численной реализации: на шаге k вычисляется значение $f(x_k, y_k)$, которое затем подставляется в (4.4). Недостатком этого метода является то, что он обладает высокой погрешностью вычислений. Основным источником погрешности вычислений в данном случае выступает ошибка дискретизации, которая возникает в результате замены дифференциального уравнения (4.3) разностной аппроксимацией (4.4). Можно показать, что глобальная ошибка дискретизации есть $O(h)$. Это означает, что при уменьшении шага h приближённое решение будет всё более точным, и при стремлении h к нулю будет сходиться к точному решению с линейной скоростью по h . Этот факт выражают утверждением, что метод Эйлера имеет *первый порядок*. Столь медленная сходимость при уменьшении шага h характерна для всех методов первого порядка.



4.2. Метод Рунге-Кутты

Идея метода, предложенного немецкими математиками К. Рунге и М.В. Куттой, основана на вычислении приближённого решения y_{i+1} в узле $x_{i+1} = x_i + h$ в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами:

$$y_{i+1} = y_i + p_{q1}k_1(h) + p_{q2}k_2(h) + \dots + p_{qq}k_q(h), \quad (4.5)$$

где

$$k_1(h) = hf(x_i, y_i),$$

$$k_2(h) = hf(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21}k_1(h)),$$

.....

$$k_q(h) = hf(x_i + \alpha_q h, y_i + \beta_{q1}k_1(h) + \dots + \beta_{q,q-1}k_{q-1}(h)).$$

При этом коэффициенты α_i , β_{ij} и p_{qi} выбираются так, чтобы разложение выражения (4.5) по степеням h совпадало до максимально возможной степени при произвольной правой части $f(x,y)$ и произвольном шаге h с разложением Тейлора искомого решения:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \dots + \frac{h^s}{s!}y^{(s)}(x_i) + \frac{h^{s+1}}{(s+1)!}y^{(s+1)}(x_i) + \dots$$

Это эквивалентно тому, что если ввести вспомогательную функцию

$$\varphi_q(h) = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = y(x_i + h) - y_i - \sum_{i=1}^q p_{qi}k_i(h), \quad (4.6)$$

то её разложение должно начинаться с максимально возможной степени



$$\varphi_q(h) = \frac{h^{s+1}}{(s+1)!} \varphi_q^{(s+1)}(0) + O(h^{s+1}) \quad (4.7)$$

Если можно определить эти постоянные так, что разложение $\varphi_q(h)$ имело вид (4.7), то говорят, что формула (4.5) с выбранными коэффициентами имеет *порядок точности* s . При этом величина $p_1 = \varphi_q(h) = y(x_i) - y_i$ называется *локальной погрешностью метода* на шаге, а первое слагаемое в (4.7) называется *главным членом локальной погрешности* метода.

Можно показать, например, что формула 1-го порядка малости в данном случае будет совпадать с формулой Эйлера, который также называется *методом Рунге-Кутты первого порядка*.

Рассмотрим более подробно вывод двухчленную формулу – *метод Рунге-Кутты 2-го порядка*. Приближённое решение в точке x_{i+1} в этом случае ищется в виде

$$y_{i+1} = y_i + p_{21}k_1(h) + p_{22}k_2(h), \quad (4.8)$$

где

$$k_1(h) = hf(x_i, y_i),$$

$$k_2(h) = hf(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21}k_1(h)).$$

Для вычисления неизвестных α_2 , β_{21} , p_{21} и p_{22} введём вспомогательную функцию

$$\varphi_2(h) = y(x_i + h) - y_i - p_{21}k_1(h) - p_{22}k_2(h). \quad (4.9)$$

Разложим функцию (4.9) в ряд Тейлора по степеням h :

$$\varphi_2'(h) = y'(x_i + h) - p_{21}f(x_i, y_i) - p_{22}f(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21}hf(x_i, y_i)) -$$



$$-p_{22}\alpha_2 hf(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} hf(x_i, y_i)) -$$

$$-p_{22} h \beta_{21} f'_y f(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} hf(x_i, y_i)),$$

$$\varphi_2''(h) = y'' - 2p_{22}\alpha_2 f' - 2p_{22}\beta_{21} f'_y f - p_{22} h [...],$$

.....

При подсчёте производных здесь использовались следующие формулы

$$y' = f \text{ и } y'' = f' + f'_y f.$$

Так как метод второго порядка точности, то необходимо, чтобы $\varphi_2(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_2''(0) = 0$. Это условие выполняется, если

$$1 - p_{21} - p_{22} = 0,$$

$$1 - 2\alpha_2 p_{22} = 0,$$

$$1 - 2\beta_{21} p_{22} = 0.$$

Решая данную систему, имеем

$$\beta_{21} = \alpha_2, \quad p_{22} = \frac{1}{2\alpha_2}, \quad p_{21} = 1 - \frac{1}{2\alpha_2}.$$

В данном случае имеем три уравнения и четыре неизвестных параметра, задавая один из них, мы получим разные различные модификации численной схемы 2-го порядка точности. В данном случае следует выбирать такие значения коэффициентов, которые дают удобные для вычисления формулы. Общеупотребительными стали схемы со следующими наборами значений параметров:

$$p_{21} = 0, \quad p_{22} = 1, \quad \beta_{21} = \alpha_2 = \frac{1}{2}.$$

И

$$p_{21} = \frac{1}{2}, p_{22} = \frac{1}{2}, \beta_{21} = \alpha_2 = 1.$$

В общем случае для коэффициентов численной схемы должно выполняться следующее условие:

$$\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} = \alpha_i,$$

для $i = 2, 3, \dots, s$, где s – порядок метода.

Рассмотрим теперь *метод Рунге-Кутты 4-го порядка*. Проведя выкладки, аналогичные приведённым выше для метода Рунге-Кутты 2-го порядка, можно показать, что, как и в предыдущем случае, существует целое семейство численных схем 4-го порядка.

Классическим вариантом записи метода Рунге-Кутты 4-го порядка стала следующая схема:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Погрешность данной формулы определяется как

$$p_1 = \frac{h^5}{120} \varphi_4^{(5)}(0) + O(h^5),$$

где φ_4 - соответствующая вспомогательная функция.

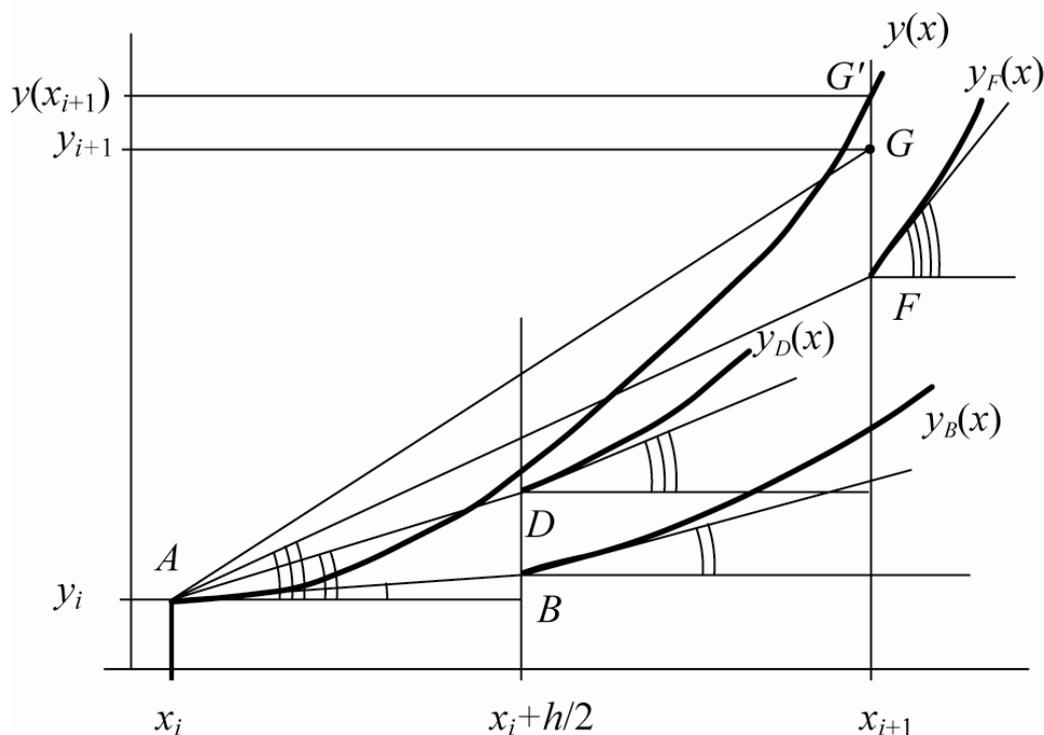


Рис. 4.2. Геометрическая интерпретация метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Результатом численного решения является ломаная линия (часть линии – отрезок **AG**), наклон которой определяется как взвешенное среднее угловых коэффициентов касательных в точках **A**, **B**, **D** и **F** проведённых к интегральным кривым, проходящим через эти точки

На рисунке 4.2 дана геометрическая интерпретация классического метода Рунге-Кутты. Отрезок **AG** представляет собой отрезок ломанной численного решения на одном шаге численного интегрирования. При этом точка **G** – точка, полученная в численном решении на шаге $i+1$, а **G'** – точное значение функции $y(x)$ в точке x_{i+1} . Решение y_{i+1} получается



следующим образом. В точке **A** проводится касательная к интегральной кривой $y(x)$ (вычисляется функция k_1 в численном решении), пересечение которой с прямой $x_i+h/2$ даёт точку **B**. Далее в точке **B** также строится касательная к интегральной кривой $y_B(x)$ проходящей через неё. В численном решении этому соответствует вычисление функции k_2 . Тогда прямая с угловым коэффициентом, определяемым через k_2 , проведённая из точки **A**, даёт вторую промежуточную точку **D**. Далее процедура повторяется (вычисляются функции k_3 и k_4). Результирующее значение y_{i+1} (точка **G**) определяется как взвешенное среднее (см. (4.10)) угловых коэффициентов в четырёх точках **A**, **B**, **D** и **F**.

В литературе можно встретить и другие варианты записи этого метода. Доказательство их правильности оставляем читателю данного пособия.



5. Практическое задание

В ходе выполнения предложенных заданий студент обязан, прежде всего, ознакомиться с предложенным в задании методом, после чего должен приступить к выполнению непосредственно задания. В качестве отчёта студент представляет преподавателю программу, реализующую предложенный метод, выполненную на любом известном студенту языке программирования (предпочтительно *Pascal*, *C++*, *Fortran*). Для получения положительной оценки студент обязан отчитаться по теории изучаемого метода, а также продемонстрировать работоспособность программы, т.е. программа должна не только компилироваться без ошибок, но и выдавать в результате работы верный ответ. Ответ предложенной задачи в программе должен быть реализован в наиболее общем и наглядном виде, в противном случае преподаватели оставляют за собой право потребовать доработки программы.

В каждом задании предложен тестовый пример в качестве проверки, однако, программа должна давать возможность замены тестовой функции на любую, предложенную преподавателем. При этом студент обязан самостоятельно предусмотреть в программе возможные ограничения применимости того или иного метода к данному классу задач.

И напоследок: для успешного выполнения заданий рекомендуется ознакомиться с теорией изучаемого метода не только по данному пособию, но и по дополнительной литературе. Также, желательно знать хотя бы в общих чертах аналогичные



методы, т.к. преподаватель может потребовать в ходе теоретического отчёта сравнить свойства предложенного метода с другими, применяемыми для решения задач данного типа. Отметим также, что самостоятельное выполнение всех предложенных задач способствует не только пополнению библиотеки алгоритмов численных методов, но и более глубокому пониманию студентом сути предложенного метода.

I. Решить в общем виде систему четырёх линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными используя метод:

1. исключения (Гаусса),
2. прогонки.

II. Решить произвольное нелинейное уравнение методом:

1. половинного деления,
2. простой итерации,
3. хорд (секущих),
4. Ньютона.

Определить количество итераций для нахождения решения с наперед заданной точностью ε . Обратить внимание на границы применимости метода.

Тестовый пример: $f(x) = x^3 - \sin(x) + \cos(x)$

III. Построить график решения дифференциального уравнения второго порядка используя метод:

1. Эйлера,
2. Рунге-Кутта (4 порядка).

Тестовый пример: $x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0$



6. Контрольные вопросы

1. Объясните суть метода исключения (Гаусса) для решения систем алгебраических уравнений. Укажите ограничения применимости данного метода.
2. В чём заключается метод решения систем алгебраических уравнений методом прогонки? Для каких систем применим этот метод?
3. Какие существуют методы решения нелинейных уравнений? Какова точность этих методов? Какой из них, по вашему мнению, точнее?
4. В чём заключается суть метода половинного деления?
5. Продемонстрируйте графически суть решения нелинейного уравнения методом простой итерации и методом Ньютона. Каковы условия применимости данных методов?
6. Что есть общего и в чём отличие метода Ньютона и метода секущих решения нелинейных уравнений?
7. В чём заключается задача Коши? Приведите пример.
8. Какие методы решения задачи Коши вы знаете?
9. Объясните суть метода Эйлера решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
10. Объясните суть метода Рунге-Кутты. Как определяется порядок метода? Как изменяется погрешность метода при увеличении порядка?
11. Как определяются коэффициенты численной схемы в семействе методов Рунге-Кутты? Приведите пример.
12. Дайте графическую интерпретацию метода Рунге-Кутты 4-го порядка.



7. Рекомендуемая литература

- [1] Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
- [2] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. М.: Наука, 1976-1977. В 2 томах.
- [3] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
- [4] Корн Г, Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978.
- [5] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
- [6] Дж. Ортега, У. Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.